



Combinatorische configuraties in meerdimensionale ruimten

<https://hdl.handle.net/1874/253643>

A 40192

Phys.
Miller
1902

COMBINATORISCHE * *
CONFIGURATIES IN * *
MEERDIMENSIONALE
RUIMTEN. * * * *

J. A. CARP.





Combinatorische Configuraties in
Meerdimensionale Ruimten.

Combinatorische Configuraties * * *
* * * in Meerdimensionale Ruimten

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. A. A. W. HUBRECHT

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Dinsdag 6 Mei 1902, des namiddags te 3 uren

DOOR

JACOB ARNOUD CARP

geboren te GELDROP



J. VAN DRUTEN

Stoom Boek- en Steendrukkerij „de Industrie”

UTRECHT — 1902

Bij het einde mijner academische studiën is het mij een behoefte U Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde mijn oprechten dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

Voor al U Hooggeleerde W. KAPTEIJN geldt dezen dank, zoowel voor uwe heldere nooit te vergeten colleges, als voor uwe onverflauwde en hartelijke belangstelling.

U Hooggeachte Promotor, Hooggeleerde JAN DE VRIES mijn dank voor den mij, bij de samenstelling van mijn proefschrift, zoo bereidwillig verleenden steun.

De even leerzame als aangename uren met U doorgebracht, Hooggeleerde A. A. NIJLAND, wien ik het voorrecht had in zoo verschillende omstandigheden te leeren waardeeren, zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.

INHOUD.

	Bldz.
INLEIDING. De Meerdimensionale Ruimte.	1
HOOFDSTUK I. Combinatorische Configuraties in het algemeen	9
HOOFDSTUK II. Eigenschappen der Combinatorische configuratie in R_{p+1}	38

INLEIDING.

De Meerdimensionale Ruimte.

§ 1. Duiden we de ruimte van n afmetingen aan door het symbool R_n , dan wordt een punt aangewezen door het symbool R_0 , een rechte door R_1 , een plat vlak door R_2 enz.

Een R_2 ontstaat door een R_1 uit een, buiten die R_1 gelegen, R_0 te projecteeren.

Een R_3 ontstaat door een R_2 uit een, buiten die R_2 gelegen, R_0 te projecteeren.

Een R_4 definieeren we nu als te ontstaan door alle punten van een R_3 uit een R_0 , buiten die R_3 gelegen, te projecteeren; evenzoo een R_n als te ontstaan door alle punten van een R_{n-1} uit een R_0 , buiten die R_{n-1} gelegen, te projecteeren.

§ 2. Evenals een R_2 , in een R_3 , door een R_1 slechts in één R_0 gesneden wordt, tenzij de R_1 geheel in de R_2 ligt, zoo wordt ook een R_3 , in een R_4 , door een R_1 slechts in één R_0 en door een R_2 slechts in een R_1 gesneden, tenzij

die R_1 en R_2 geheel in de R_3 liggen. Werd de R_3 toch door de R_1 in meer dan één R_0 gesneden, dan kon door die 2 R_0 van de R_3 een R_1 gebracht worden met welke R_1 de gegeven R_1 dan zou samenvallen. De gegeven R_1 zou dus geheel in de gegeven R_3 liggen. Sneed de R_2 de R_3 behalve in een R_1 ook nog in een R_0 dan zouden we, in de R_3 , door die R_1 en R_0 een R_2 kunnen brengen. De gegeven R_2 zou dan met deze R_2 samenvallen en dus geheel in de R_3 liggen.

§ 3. Een R_n wordt dus bepaald door $n+1$ willekeurige punten d. w. z. punten waarvan er niet meer dan $p+1$ in één R_p ($p < n$) liggen.

Hieruit volgt dat, wanneer een R_m $p+1$ willekeurige punten van een R_p ($m > p$) bevat, deze R_p geheel in de R_m gelegen is. Er kan toch door die $p+1$ punten van de R_m een R_p gebracht worden welke geheel in die R_m gelegen is. De beide R_p zouden dan $p+1$ punten gemeen hebben en dus samenvallen.

We zien bovendien, dat een R_n ∞^n punten bevat en een punt van een R_n dus bepaald wordt door n enkelvoudige gegevens (b. v. coördinaten). Alleen toch n zulke gegevens kunnen het vereischte aantal ∞^n punten opleveren.

§ 4. Twee willekeurige ruimten R_m en R_{m_1} die achtereenvolgens bepaald worden door $m + 1$ en $m_1 + 1$ punten, behooren beide tot een ruimte R_{m+m_1+1} , welke door die $m + m_1 + 2$ punten bepaald wordt. De ruimten R_m en R_{m_1} snijden elkaar in 't algemeen niet. Hebben zij echter één punt gemeen, dan liggen zij in de ruimte R_{m+m_1} , welke kan gelegd worden door de $m + m_1 + 1$ punten, die de R_m en R_{m_1} bepalen. Hebben R_m en R_{m_1} een R_a , dus $a + 1$ punten, gemeen, dan liggen R_m en R_{m_1} in een ruimte R_{m+m_1-a} , welke door de $m + m_1 + 2 - (a + 1) = m + m_1 - a + 1$ punten, die de R_m en R_{m_1} bepalen, kan aangebracht worden.

Wordt $R_{m+m_1-a} = R_n$ gesteld, dan blijkt, dat in een R_n twee ruimten R_m en R_{m_1} elkaar volgens een R_a snijden als $m + m_1 - a = n$, dus

$$a = m + m_1 - n.$$

Is $a = 0$ dan snijden zij elkaar in een enkel punt. Is a negatief dan hebben zij geen element gemeen. Is $m > m_1$ dan kan a hoogstens $= m_1$ zijn, in welk geval $m = n$ is en R_{m_1} geheel in R_m ligt.

Twee in R_n gelegen ruimten R_m en R_{m_1} snijden elkaar dus in een ruimte R_a als:

$$a = m + m_1 - n.$$

R_a wordt door een 3^e ruimte R_{m_2} in een ruimte R_{a_1} gesneden als:

$$a_1 = a + m_2 - n$$

$$a_1 = m + m_1 + m_2 - 2n.$$

R_{a_1} wordt door een 4^e ruimte R_{m_3} in een ruimte R_{a_2} gesneden als men heeft:

$$a_2 = a_1 + m_3 - n$$

$$a_2 = m + m_1 + m_2 + m_3 - 3n.$$

enz. Eindelijk wordt de ruimte $R_{a_{s-2}}$ door een $(s+1)^e$ ruimte R_{m_s} volgens een $R_{a_{s-1}}$ gesneden als:

$$a_{s-1} = a_{s-2} + m_s - n$$

$$a_{s-1} = \sum_{i=0}^{i=s} m_i - sn.$$

$(s+1)$ willekeurige ruimten $R_m, R_{m_1}, \dots, R_{m_s}$, allen gelegen in één R_n , snijden elkaar dus volgens een ruimte R_p als:

$$p = \sum_{i=0}^{i=s} m_i - sn.$$

§ 5. Uit het voorgaande volgt, dat twee in een R_n gelegen ruimten R_{n-1} elkaar snijden in een $R_{2(n-1)-n} = R_{n-2}$; drie ruimten R_{n-1} in een $R_{3(n-1)-2n} = R_{n-3}$; n ruimten R_{n-1} in een R_0 .

Evenals door n willekeurige punten een R_{n-1} wordt aangewezen bepalen in een R_n n willekeurige ruimten R_{n-1} een punt. We noemen nu de R_0 en de R_{n-1} twee *duale ruimten* in de R_n .

Terwijl $m + 1$ willekeurige punten een R_m bepalen, snijden $m + 1$ willekeurige, in R_n aangenomen, R_{n-1} elkaar volgens een $R_{(m+1)(n-1)-m} = R_{n-m-1}$. We noemen nu R_m en R_{n-m-1} ook *duale ruimten* in de R_n en in 't algemeen noemen we twee ruimten *duaal*, wanneer de som der indices $= n - 1$ is. Is n oneven, dan heeft men een ruimte, die met zichzelf *duaal* is, n. l. voor $m = n - m - 1$ of $m = \frac{n-1}{2}$.

§ 6. Een ruimte R_{n-1} wordt bepaald door n willekeurige punten. Daar deze punten geheel willekeurig zijn, hangen de eigenschappen van een dergelijke ruimte uitsluitend af van het aantal punten waardoor die ruimte bepaald wordt.

We kunnen uit n punten geen groep van s punten vormen, zonder tegelijkertijd ∞ veel groepen van $n - s$ punten te verkrijgen, zoodanig, dat die $s + n - s$ punten te samen de R_{n-1} bepalen. In een ruimte R_{n-1} treden dus tegelijk met een ruimte R_{s-1} ∞ vele ruimten R_{n-s-1} op, d. w. z. tegelijk met een ruimte R_{s-1} treden alle met haar *duale* ruimten op.

Elke eigenschap van een ruimte R_{s-1} is een functie uitsluitend van het aantal der punten, welke die R_{s-1} bepalen, dus een functie van s . Tegelijk met deze functie van s treedt echter dezelfde functie van $(n-s)$ op, welke functie een analoge eigenschap van een ruimte R_{n-s-1} aangeeft.

Treedt een groep van s punten, dus een R_{s-1} , in verband met een groep van p punten, dus een R_{p-1} , dan krijgen we een eigenschap van die twee ruimten, welke een functie is van s en p . Tegelijk met deze functie treedt dan op een functie van $n-s$ en $s-p$, welke een analoge eigenschap aangeeft van een R_{n-s-1} in verband met een R_{n-p-1} .

Voorbeeld 1. Stel $n=4$, $s=3$, $p=1$.

Drie R_2 snijden elkaar in één R_0 . Deze eigenschap kunnen we beschouwen als een functie van 3 en 1, waarbij de constanten 3 en 1 optreden. Nu moet dus ook gelden een eigenschap voor $n-3=4-3=1$ en $n-1=3$, waarbij dezelfde constanten optreden dus: drie R_{4-3-1} bepalen één R_{4-1-1} of drie R_0 bepalen één R_2 .

Voorbeeld 2. In een R_{n-1} snijden vier R_{s-1} elkaar volgens een $R_{4(s-1)-3(n-1)} = R_{4s-3n-1}$. We hebben hier dus een eigenschap, welke we kunnen beschouwen als een functie van s en $4s-3n$ en waarbij de constanten 4 en 1 optreden.

Hier is $p = 4s - 3n$ en dus $n - p = 4n - 4s$. Er moet nu ook gelden een eigenschap welke te beschouwen is als dezelfde functie van $n - s$ en $4n - 4s$ en wel vier R_{n-s-1} bepalen een $R_{4n-4s-1}$.

In R_{2n-1} is de som der indices van twee duale ruimten gelijk aan $2n - 2$, dus het tweevoud van den index $n - 1$ der met zichzelf duale ruimte, R_{n-1} . Is $s - 1 > n - 1$ dan is $2n - s - 1 < n - 1$. Moeten we dus b. v. bij $2R_{s-1}$ spreken van elkaar snijden, dan moeten we bij $2R_{2n-s-1}$ spreken van te zamen bepalen. Is toch de index van een ruimte $< n - 1$ b. v. gelijk aan $n - 2$ dan snijden twee dergelijke ruimten in een R_{2n-1} elkaar volgens een $R_{2(n-2)-(2n-1)} = R_{-3}$, d. w. z. zij snijden elkaar niet. Is daarentegen de index van een ruimte $> n - 1$ b. v. gelijk aan n , dan bepalen twee dergelijke ruimten geen andere in de R_{2n-1} gelegen ruimte, want die twee R_n worden bepaald door $2(n + 1)$ punten, welke daar zij tot een R_{2n-1} behooren, die R_{2n-1} zelf bepalen.

In R_{2n} heeft het middelste paar duale ruimten de indices n en $(n - 1)$ en is dus van elk ander paar duale ruimten de index van de eene $> n$, die van de andere $< n - 1$. Is de index $\equiv n$ b. v. gelijk aan $n + 1$, dan worden twee der-

gelijke ruimten bepaald door $2(n+2)$ punten, welke te zamen, daar zij in een R_{2n} gelegen zijn, deze R_{2n} bepalen. Twee dergelijke ruimten snijden elkaar echter volgens een $R_{2(n+1)-2n} = R_2$. Is de index $\geq n-1$ b. v. gelijk aan $n-1$, dan snijden twee dergelijke ruimten elkaar volgens een $R_{2(n-1)-2n} = R_{-2}$, d. w. z. zij snijden elkaar niet. Zij bepalen echter een $R_{2(n-1+1)-1} = R_{2n-1}$.

Een eigenschap van ruimten R_{s-1} , R_{p-1} enz., uitgedrukt door een functie van s , p , enz., geeft dus tegelijkertijd aanleiding tot een corresponderende eigenschap der ruimten R_{n-s-1} , R_{n-p-1} , enz., uitgedrukt door eenzelfde functie van $n-s$, $n-p$, enz., vooropgesteld echter, dat we de uitdrukkingen „elkaar snijden”, „bepalen”, „gelegen zijn in”, „gaan door”, enz. van de eerste eigenschap in de tweede eigenschap op gepaste wijze vertalen.

HOOFDSTUK I.

Combinatorische Configuraties in het algemeen.

§ 1. Onder een *combinatorische configuratie* in een R_{p+1} verstaan we een zoodanig samenstel van ruimten $R_p, R_{p-1}, \dots, R_{p-2}, R_3, R_2, R_1$ en R_0 , dat de elementen R_{p-q} kunnen voorgesteld worden, hetzij door de combinaties zonder herhaling der $(s-q)^e$ klasse, hetzij door de combinaties zonder herhaling der $(s-p+q)^e$ klasse van n getallen. In het eerste geval zullen we een dergelijke configuratie aanduiden door $p+1 \tau_n^s$, in het tweede geval door $p+1 \sigma_n^s$.

§ 2. De combinatorische configuraties $p+1 \tau_n^s$ zijn voor $p=1$ onderzocht door Dr. JAN DE VRIES in de *Mathematische Annalen Bd. 34 en 35* „Ueber eine Gattung regelmässiger ebener Configurationen“, waar ook het bestaan dezer configuraties in het platte vlak bewezen wordt. Het volgende bewijs voor het bestaan dezer configuraties is gegeven door

Dr. H. SCHUBERT in de *Hamburger Mittheilungen* van 1883 „Ueber eine gewisse Familie von Konfigurationen”.

Is in een R_s een groep van n willekeurige punten gegeven, dan kan door elke s dezer punten een R_{s-1} gebracht worden, door elke $(s-1)$ dezer punten een R_{s-2} . Op deze wijze ontstaan $\binom{n}{s} R_{s-1}$ en $\binom{n}{s-1} R_{s-2}$. Nu snijdt een R_2 elke R_{s-1} volgens een R_1 en elke R_{s-2} volgens een R_0 . Deze R_1 en R_0 vormen een in R_2 gelegen combinatorische configuratie. Want elke groep van s punten waardoor een R_{s-1} is gelegd, bevat s groepen van $s-1$ punten, die elk een R_{s-2} bepalen. Een R_{s-1} bevat dus s maal een R_{s-2} en dus liggen ook op elke R_1 van de configuratie s punten R_0 . Verder kan elke groep van $s-1$, een R_{s-2} bepalende, punten met $(n-s+1)$ punten een groep van s , een R_{s-1} bepalende, punten vormen, zoodat dus elke R_{s-2} ligt in $(n-s+1) R_{s-1}$, d.w.z. elk configuratiepunt ligt in $(n-s+1)$ configuratierechten.

Wordt elk der oorspronkelijke n punten in de R_s aangeduid door een der getallen van 1 tot n en steeds het snijpunt van de R_2 met een, $(s-1)$ punten bevattende, R_{s-2} door het samenstel der bij die $(s-1)$ punten behorende getallen, dan vormen de getallengroepen behorende

bij de $\binom{n}{s-1} R_0$ van de configuratie alle combinaties zonder herhaling der $(s-1)^e$ klasse van de getallen van 1 tot n , terwijl de s in één R_1 liggende R_0 worden aangeduid door de s combinaties der $(s-1)^e$ klasse van s der n getallen. Duiden we evenzoo de snijlijn der R_2 met een, door s punten bepaalde, R_{s-1} aan door de, bij die s punten behoorende getallen, dan zien we dat alle R_1 van de configuratie worden voorgesteld door combinaties zonder herhaling der s^e klasse van de getallen van 1 tot n , terwijl de $(n-s+1)$ door één cf.punt gaande cf.rechten de getallen, welke in de notatie van dit punt voorkomen gemeen hebben en aan deze getallen voor elk dezer lijnen nog een der overige $(n-s+1)$ getallen wordt toegevoegd.

Er bestaat dus bij elk getallenpaar n, s ($n \geq s+1$) een cf.

$$2\tau_n^s \equiv \left(\binom{n}{s-1}_{n-s+1}; \binom{n}{s}_s \right)$$

Deze comb. cf. welke ontstaan uit een n -hoek behoorende tot een s -dimensionale ruimte, vormen een familie van ∞^2 cf. daar zoowel n als s ∞ kunnen worden. Zij vormen een onderdeel van een familie van ∞^3 cf. waarvan het bestaan is aangetoond door VERONESE, *Mathematische Annalen* Bd. 19. „Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von

verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens" en die op soortgelijke wijze uit een n -hoek in een s -dimensionale ruimte ontstaan.

§ 3. Rangschikken we namelijk n punten van een R_s in groepen van s , $(s-1)$ en $(s-2)$ punten en snijden we de hierdoor bepaalde ruimten R_{s-1} , R_{s-2} en R_{s-3} door een R_3 , dan krijgen we in deze R_3 een cf. bestaande uit $\binom{n}{s} R_2$, $\binom{n}{s-1} R_1$ en $\binom{n}{s-2} R_0$.

Plaatsen we de n punten in groepen van s , $(s-1)$, $(s-2)$, $(s-3)$ punten en snijden we de hierdoor bepaalde R_{s-1} , R_{s-2} , R_{s-3} en R_{s-4} door een R_4 , dan ontstaat in deze R_4 een cf. van $\binom{n}{s} R_3$, $\binom{n}{s-1} R_2$, $\binom{n}{s-2} R_1$ en $\binom{n}{s-3} R_0$.

Zoo voortgaande kunnen we ten slotte uit de n punten groepen vormen van $s_1 (s-1)$, $(s-2)$, 3, 2, 1 punten en de hierdoor bepaalde R_{s-1} , R_{s-2} , R_0 snijden door de R_s zelf. Het resultaat hiervan is de volledig n -hoek in de s -dimensionale ruimte, waarin elk punt verbonden is met elk ander punt door een R_1 , elke 3 punten verbonden zijn door een R_2 , elke 4 punten verbonden door een R_3 ,
. . . . elke s punten verbonden door een R_{s-1} .

Door n willekeurige in een R_s gelegen punten worden $\binom{n}{s} R_{s-1}$, $\binom{n}{s-1} R_{s-2}$, $\binom{n}{s-p} R_{s-p-1}$ bepaald, welke door

snijding met een R_{p+1} opleveren $\binom{n}{s} R_p, \binom{n}{s-1} R_{p-1} \dots \dots$
 $\binom{n}{s-q} R_{p-q}, \dots \dots \binom{n}{s-p+1} R_1$ en $\binom{n}{s-p} R_0$ in die R_{p+1} ge-
 legen, terwijl een R_p bevat:

$$\binom{s}{s-1} R_{p-1}, \binom{s}{s-2} R_{p-2} \dots \dots \binom{s}{s-p} R_0$$

elke R_{p-1} bevat:

$$(n-s+1) R_p, \binom{s-1}{s-2} R_{p-2} \dots \dots \binom{s-1}{s-p} R_0$$

.

elke R_{p-q} bevat:

$$(n-s+q) R_{p-q+1}, \binom{n-s+q}{2} R_{p-q+2} \dots \dots \binom{n-s+q}{q} R_p$$

$$\text{en } \binom{s-q}{s-q-1} R_{p-q-1}, \binom{s-q}{s-q-2} R_{p-q-2}, \dots \dots \binom{s-q}{s-p} R_0.$$

Worden de n punten in R_s wederom aangewezen door de getallen 1 tot n , dan worden de $\binom{n}{s} R_{s-1}$ en dus ook de hieruit door snijding met een R_{p+1} verkregen $\binom{n}{s} R_p$, aangeduid door de combinaties zonder herhaling van de s^e klasse der getallen van 1 tot n ; de $\binom{n}{s-1} R_{p-1}$ door de combinaties zonder herhaling van de $(s-1)^e$ klasse van de getallen van 1 tot n enz.; ten slotte de $\binom{n}{s-p} R_0$ door de combinaties van de $(s-p)^e$ klasse van de getallen van 1 tot n , terwijl de $(s-q) R_{p-q-1}$ welke te zamen in één R_{p-q} liggen worden voorgesteld door de $(s-q)$ combinaties der $(s-q-1)^e$ klasse

van de getallen, die in de notatie van die R_{p-q} voorkomen.

Voor $p = 2$ ontstaat een cf. in de driedimensionale ruimte, bestaande uit $\binom{n}{s} R_2$, $\binom{n}{s-1} R_1$ en $\binom{n}{s-2} R_0$, terwijl in elke R_2 zijn gelegen $s R_1$ en $\binom{s}{2} R_0$, elke R_1 draagt $n - (s - 1) R_2$ en $\binom{s-1}{s-2} R_0$ en elke R_0 draagt $n - (s - 2) R_1$ $\binom{n-(s-2)}{2} R_2$, dus een cf.

$$3 \tau_n^s \equiv \left(\binom{n}{s-2} \binom{n-s+2}{2}^{(n-s+2)} ; \binom{n}{s-1} \binom{n-s+1}{s-1}^{(n-s+1)} ; \binom{n}{s} \binom{s}{2}^s \right)^*$$

De meest algemeene comb. cf. verkrijgt men door in een R_s de R_{s-1} , R_{s-2} R_{s-p-1} , welke achtereenvolgens aangewezen worden door de combinaties der s^e , $(s-1)^e$, . . . $(s-p)^e$ klasse van n in die R_s gelegen punten, te snijden door een R_{p+1} . Er ontstaat dan in die R_{p+1} een cf.

$$p+1 \tau_n^s \equiv \left(\begin{array}{cc} R_0 \binom{n-(s-p)}{p} R_p & R_1 \binom{n-(s-p+1)}{p-1} R_p \\ \vdots & \vdots \\ \binom{n}{s-p} \binom{n-(s-p)}{3} R_3 & \binom{n}{s-p+1} \binom{n-(s-p+1)}{2} R_2 ; \dots \\ \binom{n-(s-p)}{2} R_2 & \binom{n-(s-p+1)}{1} R_1 \\ \binom{n-(s-p)}{1} R_1 & \binom{s-p+1}{s-p} R_0 \end{array} \right)$$

*) Sitzungsberichten der Kais. Ak. d. Wissensch. in Wien. Bd. C. Abth. II. Dr. JAN DE VRIES. «Ueber räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen.»

2, 3, 4, $(s - p), (s - p + 1)$
 in de lijn 1, 2, 3, $(s - p), (s - p + 2)$ behalve C ,
 de punten

1, 2, 3, $(s - p - 1), (s - p + 2)$
 1, 2, 3, $(s - p - 2), (s - p), (s - p + 2)$

 2, 3, 4, $(s - p), (s - p + 2)$.

Elk punt eener cf. $p + 1 \tau_n^s$ kan dus beschouwd worden als centrum van $n - (s - p)$ lijnen, terwijl op elk dezer lijnen nog $(s - p)$ cf.punten liggen.

Deze punten vormen $(s - p)$ veelhoeken, wier hoekpunten liggen op de $n - (s - p)$ rechten door het centrum gaande. Een dergelijke veelhoek wordt gevormd door de punten waarvan de symbolen $(s - p - 1)$ getallen met het symbool van het centrum gemeen hebben.

De eenvoudigste veelhoek in een R_{p+1} , welke niet in een ruimte van lager orde gelegen is, wordt bepaald door $p + 2$ punten (door $p + 1$ punten zouden we toch een R_p kunnen brengen). Een dergelijke veelhoek wordt door VERONESE een *fondamenteaalpyramide* van de ruimte R_{p+1} genoemd.

Liggen de overeenkomstige hoekpunten van een aantal veelhoeken op lijnen door één punt C gaande, dan heeten

die veelhoeken *perspectief*. Een gevolg van deze perspectieve ligging is, dat twee hoekpunten van een veelhoek met de overeenkomstige hoekpunten van een andere veelhoek liggen in de R_2 , welke bepaald wordt door de 2 hoekpunten van een dezer veelhoeken en het punt C ; dat 2 tripels van overeenkomstige hoekpunten liggen in een R_3 , bepaald door een dezer tripels en het punt C ; dat 2 m -tallen van overeenkomstige hoekpunten liggen in een R_m , bepaald door een dier m -tallen en het punt C .

Worden de hoekpunten dezer $(s - p)$ veelhoeken paarsgewijze door rechten verbonden, dan snijden 2, door overeenkomstige paren hoekpunten getrokken R_1 , daar zij in één R_2 liggen, elkaar volgens een R_0 .

Worden door tripels hoekpunten van elke veelhoek ruimten R_2 gebracht, dan snijden de overeenkomstige R_2 , daar zij in één R_3 gelegen zijn, elkaar

$$2 \text{ aan } 2 \text{ volgens een } R_{2,2-3} = R_1$$

$$\text{en } 3 \quad " \quad 3 \quad " \quad " \quad R_{3,2-2,3} = R_0.$$

Worden door quadrupels hoekpunten van elken veelhoek R_3 gebracht, dan snijden de overeenkomstige R_3 , daar zij in één R_4 gelegen zijn, elkaar

$$2 \text{ aan } 2 \text{ volgens een } R_{2,3-4} = R_2$$

3 aan 3 volgens een $R_{3.3.-2.4} = R_1$

4 „ 4 „ „ $R_{4.3.-3.4} = R_0$.

Worden door $(p+1)$ -tallen hoekpunten van elken veelhoek R_p gebracht, dan snijden de overeenkomstige R_p , daar zij in één R_{p+1} gelegen zijn, elkaar

2 aan 2 volgens een $R_{2.p-(p+1)} = R_{p-1}$

3 „ 3 „ „ $R_{3.p-2(p+1)} = R_{p-2}$

.

$p+1$ „ $p+1$ „ „ $R_{(p+1)p-p(p+1)} = R_0$.

Worden door $(p+2)$ -tallen hoekpunten van elke veelhoek R_{p+1} gebracht, dan snijden de overeenkomstige R_{p+1} , daar zij in één R_{p+2} gelegen zijn, elkaar

2 aan 2 volgens een R_p

3 „ 3 „ „ R_{p-1}

.

$p+2$ „ $p+2$ „ „ R_0 .

Worden door $(s-p)$ -tallen hoekpunten van elke veelhoek R_{s-p-1} gebracht, dan snijden de overeenkomstige R_{s-p-1} , daar zij in één R_{s-p} gelegen zijn, elkaar

2 aan 2 volgens een R_{s-p-2}

3 „ 3 „ „ R_{s-p-3}

.

$s-p$ „ $s-p$ „ „ R_0 .

Worden ten slotte door s -tallen hoekpunten van elke veelhoek R_{s-1} gebracht, dan snijden de overeenkomstige R_{s-1} , daar zij in één R_s gelegen zijn, elkaar

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \text{aan} & 2 & \text{volgens een} & R_{s-2} \\ 3 & " & 3 & " & " & R_{s-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ s-p & " & s-p & " & " & R_p. \end{array}$$

Projecteeren we de aldus verkregen figuur uit een willekeurig punt van de R_s op een met dit punt duale ruimte R_{s-1} , dan wordt iedere R_0 geprojecteerd op de R_{s-1} als een:

$$R_{1+1-1+(s-1)-s} = R_0$$

iedere R_1 geprojecteerd op de R_{s-1} als een:

$$R_{1+2-1+(s-1)-s} = R_1$$

iedere R_2 geprojecteerd op de R_{s-1} als een:

$$R_{1+3-1+(s-1)-s} = R_2$$

$$.$$

iedere R_{s-2} geprojecteerd op de R_{s-1} als een:

$$R_{1+(s-1)-1+(s-1)-s} = R_{s-2}$$

iedere R_{s-1} geprojecteerd op de R_{s-1} als een:

$$R_{1+s-1+(s-1)-s} = R_{s-1}$$

Elke in de R_s gelegen ruimte wordt dus geprojecteerd als een ruimte van dezelfde orde, doch nu gelegen in een R_{s-1} .

Projecteeren we nu alle in deze R_{s-1} gelegen ruimten op een in die ruimte gelegen R_{s-2} , dan wordt wederom elke ruimte vervangen door een van dezelfde orde, terwijl de ruimten R_{s-2} de ruimte R_{s-2} , waarop geprojecteerd wordt, zelf opleveren en dus verdwijnen.

Zoo voortgaande, blijft er eindelijk het oorspronkelijk aantal $R_0, R_1 \dots R_p, R_{p+1}$ over, allen gelegen in één R_{p+2} . Projecteeren we deze ruimten op een in die R_{p+2} gelegen R_{p+1} , dan krijgen we in die R_{p+1} het oorspronkelijk aantal $R_0, R_1, \dots R_p$, dat we in de R_s geconstrueerd hadden, terwijl alle ruimten van hoogere orde verdwenen zijn.

Deze in een R_{p+1} gelegen ruimten $R_0, \dots R_p$ behooren allen tot de cf. $p+1 \tau_n^s$, zooals volgt uit het symbool, dat wij hen moeten toekennen, terwijl het aantal R_q , dat we in de R_{p+1} geconstrueerd hebben overeenstemt met het aantal R_q van de cf. $p+1 \tau_n^s$. We hebben toch geconstrueerd de volgende ruimten R_0 :

Het punt $C \dots \dots \dots 1.$

De hoekpunten der $(s-p), (n-s+p)$ -hoeken. $(s-p) (n-s+p)$

Elke 2 hoekpunten van 2, $(n-s+p)$ -hoeken

geven één $R_0 \dots \dots \dots \binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{2}$

Elke 3 hoekpunten van 3, $(n-s+p)$ -hoeken

geven één R_0 $\binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{3}$

.

Elke $(s-p)$ hoekpunten van $(s-p)$, $(n-s+p)$ -

hoeken geven één R_0 $\binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{s-p}$

Aantal R_0 $\binom{n}{s-p}^*$

Ruimten R_1 :

$(n-s+p)$ rechten door C $n-s+p$.

Elke 2 hoekpunten van elke $(n-s+p)$ -hoek

geven een R_1 $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{2}$

Elke 3 hoekpunten van elke 2, $(n-s+p)$ -

hoeken geven één R_1 $\binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{3}$

Elke 4 hoekpunten van elke 3, $(n-s+p)$ -

hoeken geven één R_1 $\binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{4}$

.

Elke $(s-p+1)$ hoekpunten van elke $(s-p)$,

$(n-p+s)$ -hoeken geven één R_1 $\binom{s-p}{s-p+1} \binom{n-s+p}{s-p+1}$

Aantal R_1 $\binom{n}{s-p+1}$

.

Ruimten R_p :

*) Zie blz. 22.

Elke p hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek

geven met het punt C één R_p $\binom{n-s+p}{p}$

Elke $(p+1)$ hoekpunten van elke $(n-s+p)$ -

hoek geven één R_p $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{p+1}$

Elke $(p+2)$ hoekpunten van elke 2, $(n-s+p)$ -

hoeken geven één R_p $\binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{p+2}$

Elke $(p+3)$ hoekpunten van elke 3, $(n-s+p)$ -

hoeken geven één R_p $\binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{p+3}$

Elke s hoekpunten van elke $(s-p)$, $(n-s+p)$ -

hoeken geven één R_p $\binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{s}$

Aantal R_p $\binom{n}{s}$

De sommaties van bovenstaande reeksen worden gemakkelijk uitgevoerd volgens een methode van Prof. VAN DEN BERG. *)

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{s-p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-(s-p)} &= \frac{(1+x)^n}{x^{n-(s-p)}} \\
 &\left\{ 1 + \binom{s-p}{1} x + \binom{s-p}{2} x^2 + \dots + \binom{s-p}{s-p} x^{s-p} \right\} \cdot \\
 &\left\{ 1 + \binom{n-(s-p)}{1} \frac{1}{x} + \binom{n-(s-p)}{2} \frac{1}{x^2} + \dots + \binom{n-(s-p)}{n-(s-p)} \frac{1}{x^{n-(s-p)}} \right\} = \\
 &= \frac{1}{x^{n-(s-p)}} \left\{ 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right\}.
 \end{aligned}$$

*) „De constructie figuur enz.”. Versl. en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. 3^e Reeks. Deel V blz. 267.

Het aantal R_0 is nu gelijk aan den coëfficiënt van x^0 in het 1^e lid dezer identiteit, dus gelijk aan

$$\binom{n}{n-(s-p)} = \binom{n}{s-p}$$

Het aantal R_1 is gelijk aan den coëfficiënt van x^{-1} , dus gelijk aan

$$\binom{n}{n-(s-p)-1} = \binom{n}{s-p+1}$$

enz.

Een cf. $p+1 \tau_n^s$ kan dus geconstrueerd worden, wanneer gegeven zijn $(s-p)$ in een R_s perspectief gelegen $(n-s+p)$ -hoeken.

Al moet ik het bewijs schuldig blijven, zoo meen ik hieruit te mogen besluiten, dat een $p+1 \tau_n^s$ ook bepaald is door $(s-p)$ in een R_{p+1} perspectief gelegen $(n-s+p)$ -hoeken.

Wordt een $p+1 \tau_n^s$ op een in dezelfde R_{p+1} gelegen R_p geprojecteerd, dan ontstaat in die R_p een $p \tau_n^{s-1}$.

§ 5. Wij noemen de punten, waarin 2 R_1 , elk bepaald door 2 hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden, de punten a_0 ; die, waarin 3 R_2 , elk bepaald door 3 hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden, de punten a_1 ; die, waarin 4 R_3 , elk bepaald door 4 hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden, de punten a_2 ; die, waarin $(i+2)$

R_{i+1} , elk bepaald door $(i+2)$ hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden, de punten a_i .

Noemen we verder elke R_1 volgens welke 2 R_2 , elk bepaald door 3 hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden een R_1 b_0 ; elke R_1 volgens welke 3 R_3 , elk bepaald door 4 hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden een R_1 b_1 ; elke R_1 volgens welke $(i+2)$ R_{i+2} , elk bepaald door $(i+3)$ hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden een R_1 b_i .

Noemen we elke R_p volgens welke 2 R_{p+1} , elk bepaald door $(p+2)$ hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden een R_p p_0 ; elke R_p volgens welke 3 R_{p+2} , elk bepaald door $(p+3)$ hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden een R_p p_1 ; elke R_p volgens welke $(i+2)$ R_{i+p+1} , elk bepaald door $(i+p+2)$ hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek, elkaar snijden een R_p p_i , dan bevat een $p+1$ τ_n^s , zooals volgt uit de opsomming der $R_0, R_1 \dots R_p$ op blz. 20, 21 en 22, dus:

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+2} \text{ punten } a_i$$

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+3} \text{ lijnen } b_i$$

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+4} \text{ vlakken } c_i$$

.

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+q+2} R_q q_i$$

.

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+p+2} R_p p_i.$$

Als $t > q$ is, liggen in een $R_t t_i$ een aantal $R_q q_i =$
 $= \binom{i+t+2}{i+q+2},$

terwijl door een $R_q q_i$ gaan een aantal $R_t t_i =$

$$= \binom{n-s+p-(i+q+2)}{(i+t+2)-(i+q+2)} = \binom{n-s+p-(i+q+2)}{t-q}.$$

Indien $t > q$ is, liggen in een $R_t t_i$:

als $j \geq i$, een aantal $R_q q_j =$

$$= \binom{i+t+2}{j+q+2} \binom{i+2}{j+2}$$

als $i < j < i+t-q+1$, een aantal $R_q q_j =$

$$= \binom{i+t+2}{(j+q+2)} \binom{s-p-(i+2)}{(j+2)-(i+2)} \text{ en}$$

als $j > i+t-q$, een aantal $R_q q_j =$

$$= \binom{n-s+p-(i+t+2)}{(j+q+2)-(i+t+2)} \binom{(s-p)-(i+2)}{(j+2)-(i+2)},$$

terwijl door een $R_q q_i$ gaan, als $i \geq j$, een aantal $R_t t_i =$

$$= \binom{(s-p)-(j+2)}{(i+2)-(j+2)} \binom{n-s+p-(j+q+2)}{(i+t+2)-(j+q+2)}$$

als $j+q-t < i < j$, een aantal $R_t t_i =$

$$= \binom{n-s+p-(j+q+2)}{(i+t+2)-(j+q+2)} \binom{j+2}{i+2} \text{ en}$$

als $i \leq j+q-t$, een aantal $R_t t_i = \binom{j+q+2}{i+t+2} \binom{j+2}{i+2}.$

Vragen we naar de grootste waarde, welke de index i van een $R_q q_i$ kan hebben, dan moeten we twee gevallen onderscheiden.

1^e. Is $n - s + p \geq s$, dan komen voor de ruimten:

$R_0 a_0$ tot en met a_{s-p-2} .

$R_1 b_0$ " " " b_{s-p-2} .

.

$R_p p_0$ " " " p_{s-p-2} .

Voor $n - s + p = s$, d. w. z. voor de met zichzelf duale cf. is er dan nog één $R_p p_{s-p-2}$.

2^e. Is $n - s + p < s$ b. v. $n - s + p = s - (p - q)$, dan komt er in de cf. nog één $R_q q_{s-p-2}$ voor, terwijl voor R_{q+1} de max. waarde van i is $s - p - 3$, voor R_t de max. waarde van i is $s - p - 2 - (t - q)$.

De punten a , lijnen b , vlakken c $R_p p$ vormen te samen de perspectiviteitsfiguur der $(s - p)$ perspectief gelegen $(n - s + p)$ -hoeken.

§ 6. We hebben een fundamenteaalpyramide in een R_{p+1} genoemd het samenstel van $p + 2$ punten met de $\binom{p+2}{2} R_1$, $\binom{p+2}{3} R_2$, $\binom{p+2}{p+1} = (p + 2) R_p$, welke zij bepalen. Een fundamenteaalpyramide in een R_{p+1} is een $p + 1$ τ_{p+2}^{p+1} en heeft evenveel R_p als R_0 , in het algemeen evenveel R_q als R_{p-q} .

Voor $p = 1$ krijgen we als fundamentaalpyramide in het platte vlak een driehoek, voor $p = 2$ als fundamentaalpyramide in de R_3 een viervlak.

Tot hoeveel fundamentaalpyramiden, deel uitmakende van een $p+1 \tau_n^s$, behoort een zeker element van die configuratie?

In een $p+1 \tau_n^s$ behoort een R_0 , zooals gemakkelijk is in te zien als we het punt beschouwen als centrum van $(s-p)$ perspectief gelegen $(n-s+p)$ -hoeken, tot $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{p+1}$ fundamentaalpyramiden, daar elke $p+1$ hoekpunten van een $(n-s+p)$ -hoek met het centrum C één fundamentaalpyramide oplevert. Een $(n-s+p)$ -hoek geeft dus $\binom{n-s+p}{p+1}$ fundamentaalpyramiden en $(s-p)$, $(n-s+p)$ -hoeken geven dus $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{p+1}$ fundamentaalpyramiden.

Brengen we door het centrum C en een hoekpunt van een der $(n-s+p)$ -hoeken een R_1 , dan behoort deze lijn tot $\binom{n-s+p-1}{p}$ van de $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{p+1}$ fundamentaalpyramiden, waarin het punt C voorkomt. Op die lijn liggen $(s-p+1)$ cf.punten. Elke 2 dezer punten geven aanleiding tot $\binom{n-s+p-1}{p}$ fundamentaalpyramiden, waartoe die lijn behoort. Een lijn van een $p+1 \tau_n^s$ behoort dus tot $\binom{s-p+1}{2} \binom{n-s+p-1}{p}$ fundamentaalpyramiden.

Brengen we door C en q hoekpunten van één $(n-s+p)$ -hoek een R_q , dan behoort deze R_q tot $\binom{n-s+p-q}{p+2-(q+1)}$ fundamentaalpyramiden, waartoe C behoort. In een R_q van de $p+1 \tau_n^s$ liggen $\binom{s-p+q}{s-p} = \binom{s-p+q}{q}$ R_0 . Elk dezer punten is in die R_q met q van de andere punten door R_1 verbonden, terwijl die q andere punten 2 aan 2 door R_1 verbonden zijn. Elk punt van een $p+1 \tau_n^s$ ligt met $(s-p)$ andere punten op één R_1 en behoort dus tot $(s-p)$ groepen van $q+1$ punten elk. Een R_q heeft dus $\binom{s-p+q}{q} \frac{s-p}{q+1} = \binom{s-p+q}{q+1}$ groepen van $(q+1)$ punten, die ieder aanleiding geven tot $\binom{n-s+p-q}{p+2-(q+1)}$ fundamentaalpyramiden. Een R_q behoort dus tot $\binom{s-p+q}{q+1} \binom{n-s-p+q}{p-q+1}$ fundamentaalpyramiden.

Een R_p behoort dus in een $p+1 \tau_n^s$ tot $\binom{s}{p+1} (n-s)$ fundamentaalpyramiden.

§ 7. Van een cf. $p+1 \tau_n^s$, waarvan de elementen R_q worden aangeduid door de combinaties zonder herhaling der $(s-q)^e$ klasse van n getallen, kunnen we op de volgende wijze het bestaan bewijzen.

Laten in een R_s gegeven zijn n ruimten R_{s-1} , welke aangeduid worden door de getallen van 1 tot n . Twee dezer

R_{s-1} snijden elkaar volgens een R_{s-2} ,

3 R_{s-1} " " " " R_{s-3} ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 p & R_{s-1} & " & " & " & " & R_{s-p}, \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 s & R_{s-1} & " & " & " & " & R_0.
 \end{array}$$

Men heeft dus in de gegeven R_s :

$$\binom{n}{1} R_{s-1}, \binom{n}{2} R_{s-2}, \binom{n}{3} R_{s-3}, \dots, \binom{n}{s} R_0.$$

Projecteeren we deze ruimten op een in de gegeven R_s gelegen R_{s-1} , dan krijgen we in deze R_{s-1} : $\binom{n}{2} R_{s-2}, \binom{n}{3} R_{s-3}, \dots, \binom{n}{s} R_0$. Projecteeren we deze ruimten op een in die R_{s-1} gelegen R_{s-2} , dan krijgen we in deze R_{s-2} : $\binom{n}{3} R_{s-3}, \dots, \binom{n}{s} R_0$. Projecteeren we ten slotte de in een R_{p+2} gelegen ruimten $R_{p+1} \dots R_0$ op een in die R_{p+2} gelegen R_{p+1} , dan krijgen we in deze R_{p+1} : $\binom{n}{s-p} R_p, \binom{n}{s-p+1} R_{p-1} \dots \binom{n}{s} R_0$, welke te zamen vormen een, in die R_{p+1} gelegen, cf.

$$\begin{array}{l}
 p+1 \tau_n^s \equiv \left(\begin{array}{cc} \binom{s}{p} R_p & \binom{s-1}{p-1} R_p \\ R_0 \cdot & R_1 \cdot \\ \binom{n}{s} \binom{s}{2} R_2; \binom{n}{s-1} \binom{s-1}{2} R_3; & \dots \\ \binom{s}{1} R_1 & \binom{s-1}{1} R_2 \\ & \binom{n-s+1}{n-s} R_0 \end{array} \right) \\
 \dots \dots \dots \left(\begin{array}{c} \binom{n-s+p}{1} R_{p-1} \\ R_p \cdot \\ \binom{n}{s-p} \cdot \\ \binom{n-s+p}{p-1} R_1 \\ \binom{n-s+p}{p} R_0 \end{array} \right) \equiv p+1 \tau_n^{n-s+p}
 \end{array}$$

De cf. $p+1 \sigma_n^s$ is dus dual met de cf. $p+1 \tau_n^s$.

In $p+1 \tau_n^s$ heeft een R_m evenveel elementen R_q als in een $p+1 \sigma_n^s$ een R_{p-m} elementen R_{p-q} bevat.

De cf. $p+1 \tau_n^s$ is dual met zichzelf als $p+1 \tau_n^s \equiv \equiv p+1 \tau_n^{n-s+p}$, dus als:

$$s = n - s + p$$

$$\text{of } n = 2s - p.$$

§ 8. Uitgaande van een R_s kunnen we ons een $p+1 \sigma_n^s$ op de volgende wijze voorstellen.

Zij gegeven een R_{s-1} C en in deze R_{s-1} , $(n-s+p) R_{s-2}$. Door elk dezer R_{s-2} gaan bovendien, behalve C , nog $(s-p) R_{s-1}$. Deze R_{s-1} vormen dus $(s-p)$, $(n-s+p) R_{s-1}$, waarvan de met elkaar corresponderende R_{s-1} door één R_{s-2} gaan.

Elke 2 R_{s-2} in C gelegen, hebben een $R_{2(s-2)-(s-1)} = R_{s-3}$ gemeen.

Elke 3 R_{s-2} in C gelegen, hebben een $R_{3(s-2)-2(s-1)} = R_{s-4}$ gemeen.

.

Elke q R_{s-2} in C gelegen, hebben een $R_{q(s-2)-(q-1)(s-1)} = R_{s-q-1}$ gemeen.

Elke 2 R_{s-1} van een der $(s-p)$, $(n-s+p) R_{s-1}$ snijden

elkaar volgens een $R_{2(s-1)-s} = R_{s-2}$. Alle homologe R_{s-2} hebben een R_{s-3} gemeen, zoodat deze R_{s-2}

2 aan 2 een $R_{2(s-1)-(s-3+1)-1} = R_{s-1}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{2} R_{s-1};$$

3 aan 3 een $R_{3(s-1)-2(s-3+1)-1} = R_s$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{2} R_s;$$

.

$(s-p)$ aan $(s-p)$ een $R_{(s-p)(s-1)-(s-p-1)(s-3+1)-1} =$
 $= R_{2s-p-3}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{2} R_{2s-p-3}.$$

Elke 3 R_{s-1} van een der $(s-p)$, $(n-s+p)$ - R_{s-1} snijden elkaar volgens een $R_{3(s-1)-2s} = R_{s-3}$. Alle homologe R_{s-3} hebben een R_{s-4} gemeen, zoodat deze R_{s-3}

2 aan 2 een $R_{2(s-2)-(s-3)-1} = R_{s-2}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{3} R_{s-2};$$

3 aan 3 een $R_{3(s-2)-2(s-3)-1} = R_{s-1}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{3} R_{s-1};$$

.

$(s-p)$ aan $(s-p)$ een $R_{(s-p)(s-2)-(s-p-1)(s-3)-1} =$
 $= R_{2s-p-4}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{3} R_{2s-p-4}.$$

Elke q R_{s-1} van een der $(s-p)$, $(n-s+p) \cdot R_{s-1}$ snijden elkaar volgens een $R_{q(s-1)-(q-1)s} = R_{s-q}$. Alle homologe R_{s-q} hebben een R_{s-q-1} gemeen, zoodat deze R_{s-q} 2 aan 2 een $R_{2(s-q+1)-(s-q)-1} = R_{s-q+1}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{q} R_{s-q+1};$$

3 aan 3 een $R_{3(s-q+1)-2(s-q)-1} \cdot R_{s-q+2}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{q} R_{s-q+2};$$

.

$(s-p)$ aan $(s-p)$ een $R_{(s-p)(s-q+1)-(s-p-1)(s-q)-1} =$
 $= R_{2s-p-q-1}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{q} R_{2s-p-q-1}.$$

Elke $(s-p)$ R_{s-1} van een der $(s-p)$, $(n-s+p) \cdot R_{s-1}$ snijden elkaar volgens een $R_{(s-p)(s-1)-(s-p-1)s} = R_p$. Alle homologe R_p hebben een R_{p-1} gemeen, zoodat deze R_p 2 aan 2 een $R_{2(p+1)-p-1} = R_{p+1}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{s-p} R_{p+1};$$

3 aan 3 een $R_{3(p+1)-2p-1} = R_{p+2}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{s-p} R_{p+2};$$

.

$(s-p)$ aan $(s-p)$ een $R_{(s-p)(p+1)-(s-p-1)p-1} = R_{s-1}$ bepalen.

$$\text{Opleverende } \binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{s-p} R_{s-1}.$$

Elke $s R_{s-1}$ van een der $(s-p)$, $(n-s+p)-R_{s-1}$ snijden
elkaar volgens een $R_{s(s-1)-(s-1)s} = R_0$. Deze R_0 bepalen

2 aan 2 een R_1 opleverende $\binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{s} R_1$;

3 „ 3 „ R_2 „ $\binom{s-p}{3} \binom{n-s+p}{s} R_2$;

.....

$(s-p)$ aan $(s-p)$ een R_{s-p-1} opleverende $\binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{s} R_{s-p-1}$.

We hebben thans in de R_s geconstrueerd een figuur be-
staande uit:

Een $R_{s-1} C$ 1

$(s-p)$, $(n-s+p)-R_{s-1}$ $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{1}$

Elke $2R_{s-2}$, waarin $2R_{s-1}$ van één $(n-s+p)-$

$-R_{s-1}$ elkaar snijden, bepalen één R_{s-1} . $\binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{2}$

.....

Elke $(s-p) R_p$, waarin $(s-p) R_{s-1}$ van één

$(n-s+p)-R_{s-1}$ elkaar snijden, bepalen

één R_{s-1} $\frac{\binom{s-p}{s-p} \binom{n-s+p}{s-p}}{1}$

Aantal R_{s-1} $\binom{n}{s-p}$

$(n-s+p) R_{s-2}$ gelegen in de $R_{s-1} C$. . $(n-s+p)$

Elke $2R_{s-1}$ van een $(n-s+p)-R_{s-1}$ snijden

elkaar in één R_{s-2} $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{2}$

Elke $2R_{s-3}$, waarin $3 R_{s-1}$ van één $(n-s+p)-$

$-R_{s-1}$ elkaar snijden, bepalen één R_{s-2} . $\binom{s-p}{2} \binom{n-s+p}{3}$

Elke $(s-p) R_{p+1}$, waarin $(s-p+1) R_{s-1}$ van

één $(n-s+p)$ - R_{s-1} elkaar snijden, bepalen

[illegible]

$$\binom{n}{s-p} R_{s-1+(p+1)-s} = \binom{n}{s-p} R_p$$

$$\binom{n}{s-p+1} R_{s-2+(p+1)-s} = \binom{n}{s-p+1} R_{p+1}$$

• • • • •

$$\binom{n}{s} R_{s-p-1+(p+1)-s} = \binom{n}{s} R_0.$$

te zamen vormende een $p+1 \sigma_n^s$, welke bevat

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+2} R_p p_i$$

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+3} R_{p-1} (p-1)i$$

• • • • •

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+p-t+2} R_t t_i$$

• • • • •

$$\binom{s-p}{i+2} \binom{n-s+p}{i+p+2} R_o \quad a_i.$$

Als $t > q$ is gaan door een $R_q q_j$

als $i \geq j + t - q$ een aantal $R_t t_i =$

$$= \binom{n-s+p-(j+p-q+2)}{(i+p-t+2)-(j+p-q+2)} \binom{s-p-(j+2)}{i+2-(j+2)}$$

als $i - t + q < j \leq i$ een aantal $R_t t_i =$

$$= \binom{j+p-q+2}{i+p-t+2} \binom{s-p-(j+2)}{i+2-(j+2)} \text{ en}$$

als $i < j$ een aantal $R_t t_i =$

$$= \binom{j+p-q+2}{i+p-t+2} \binom{j+2}{i+2},$$

terwijl in een R_t t_i liggen, als $i \geq j - q + t$ is, een aantal $R_q q_j =$

$$= \binom{i+p-t+2}{j+p-q+2} \binom{i+2}{j+2}$$

als $i \geq j > i + q - t$ is, een aantal $R_q q_j =$

$$= \binom{n-s+p-(i+p-t+2)}{(j+p-q+2)-(i+p-t+2)} \binom{i+2}{j+2}$$

als $i < j$ is, een aantal $R_q q_j =$

$$= \binom{n-s+p-(i+p-t+2)}{(j+p-q+2)-(i+p-t+2)} \binom{s-p-(i+2)}{j+2-(i+2)}.$$

Een cf. $p+1 \sigma_n^s$ kan dus geconstrueerd worden, wanneer gegeven zijn $(s-p)$ in een R_s *lineaal* *) gelegen $(n-s+p)$ - R_{s-1} .

Wordt een cf. $p+1 \sigma_n^s$ gesneden door een in dezelfde R_{p+1} gelegen R_p , dan ontstaat in die R_p een cf. $p \sigma_n^{s-1}$.

Daar een cf. $p+1 \tau_n^s \equiv$ cf. $p+1 \sigma_n^{n-s+p}$, kunnen we ons een combinatorische configuratie op twee wijzen ontstaan voorstellen.

Aangezien een fondamentaalpyramide evenveel R_p als R_o , evenveel R_{p-q} als R_q bevat is het gemakkelijk in te zien, dat een R_p van de cf. $p+1 \sigma_n^s$ behoort tot $\binom{s-p}{1} \binom{n-s+p}{p+1}$

*) De beteekenis van de uitdrukking *lineaal*, ingevoerd door SCHROETER, Crelle Bd. 100 S 238, is hier uitgebreid tot de meerdimensionale ruimte. De bedoeling is, dat de $(s-p)$, $(n-s+p)$ - R_{s-1} , zoodanig gelegen zijn, dat elke $(s-p)$ homologue R_{s-1} elkaar snijden volgens één R_{s-2} , welke $(n-s+p)$ R_{s-2} gelegen zijn in één R_{s-1} .

fondamentaalpyramiden, een R_{p-1} tot $\binom{s-p+1}{2} \binom{n-s+p-1}{p}$
 fondamentaalpyramiden, een R_{p-q} tot $\binom{s-p+q}{q+1} \binom{n-s+p-q}{p-q+1}$
 fondamentaalpyramiden. We behoeven om dit in te zien de
 redeneering van § 6 slechts dualistisch te vertalen. Een
 R_o behoort dus tot $\binom{s}{p+1} (n-s)$ fondamentaalpyramiden.

HOOFDSTUK II.

Eigenschappen der Combinatorische Configuratie in R_{p+1} .

§ 1. Zal een groep onderling gescheiden puntenvreemde, d. w. z. geen cf. punt gemeen hebbende $p+1 \tau_n^s$ in een $p+1 \tau_m^s$ ($m > n$) voorkomen, dan moet het aantal punten van de $p+1 \tau_m^s$ deelbaar zijn door het aantal punten van de $p+1 \tau_n^s$. Een 1^e voorwaarde is dus:

$$\binom{m}{s-p} \text{ deelbaar door } \binom{n}{s-p}.$$

Voor de notatie van deze configuraties $p+1 \tau_n^s$ zijn noodig $\binom{m}{s-p} : \binom{n}{s-p}$ groepen, elk van n getallen, dus in het geheel $\left\{ \binom{m}{s-p} : \binom{n}{s-p} \right\} n$ getallen. Daar elk getal in deze groepen evenveel malen moet voorkomen, moet $\left\{ \binom{m}{s-p} : \binom{n}{s-p} \right\} n$ deelbaar zijn door m , dus een 2^e voorwaarde is:

$$\binom{m-1}{s-p-1} \text{ deelbaar door } \binom{n-1}{s-p-1}.$$

Elke combinatie van $s-p-1$ verschillende getallen geeft aanleiding tot $\frac{m-(s-p-1)}{n-(s-p-1)}$ groepen van n getallen, die niet

meer dan $(s-p-1)$ getallen en dus geen punt gemeen hebben; de notatie van een punt toch vereischt $(s-p)$ getallen. We kunnen dus opschrijven $\left\{ \binom{m}{s-p-1} \frac{m-(s-p-1)}{n-(s-p-1)} \right\} : \binom{n}{s-p-1} = \binom{m}{s-p} : \binom{n}{s-p}$, n -tallen, die niet meer dan $(s-p-1)$ getallen gemeen hebben. Dus juist voldoende om de puntenvreemde $p+1 \tau_n^s$ te noteeren. Een 3^e voorwaarde is dus:

$$m - (s-p-1) \text{ deelbaar door } n - (s-p-1).$$

Wordt dus voldaan de 3 voorwaarden:

$$1^e. m - (s-p-1) \text{ deelbaar door } n - (s-p-1)$$

$$2^e. \binom{m}{s-p} \quad " \quad " \quad \binom{n}{s-p}$$

$$3^e. \binom{m-1}{s-p-1} \quad " \quad " \quad \binom{n-1}{s-p-1},$$

dan bevat een $p+1 \tau_m^s$ een groep van $\binom{m}{s-p} : \binom{n}{s-p}$, puntenvreemde $p+1 \tau_n^s$. Een dergelijke groep wordt, daar zij alle punten der $p+1 \tau_m^s$ bevat, als een hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep aangeduid.

Voor $n = s$ worden bovenstaande voorwaarden:

$$1^e. m - s \text{ deelbaar door } p + 1$$

$$2^e. \binom{m}{s-p} \quad " \quad " \quad \binom{s}{p}$$

$$3^e. \binom{m-1}{s-p-1} \quad " \quad " \quad \binom{s-1}{p}$$

Wordt hieraan voldaan, dan heeft de $p+1 \tau_m^s$ puntenvreemde hoofd- $p+1 \tau_s^s$ -groepen. Daar een $p+1 \tau_s^s$ bestaat uit één

R_p en de daarin gelegen $R_{p-1}, \dots, R_0$, bevat een $p+1 \tau_m^s$ dus in dit geval groepen van $\binom{m}{s-p} : \binom{s}{p} R_p$, welke R_p geen ruimten van lagere orde van de cf. gemeen hebben en waarin alle punten van de cf. gelegen zijn, d. w. z. puntenvreemde hoofd- R_p -groepen.

Voorbeeld: Een $3 \tau_{13}^4 \equiv (78_{11}^{55}; 286_3^{10}; 715_6^4)$ heeft een puntenvreemde hoofd- R_2 -groep dus een puntenvreemd hoofdveelvlak, want daar $p=2, s=4, m=13$ is, hebben we:

$$1^e. 13 - 4 = 9 \text{ deelbaar door } 3$$

$$2^e. \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} \quad " \quad " \quad \binom{4}{2} = 6$$

$$3^e. \binom{12}{1} = 12 \quad " \quad " \quad \binom{3}{2} = 3$$

$3 \tau_{13}^4$ heeft dus puntenvreemde hoofd-13-vlakken.

Op dezelfde voorwaarden, waarop een $p+1 \tau_m^s$ een puntenvreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep heeft, heeft een $p+1 \sigma_m^s$ een R_p -vreemde hoofd- $p+1 \sigma_n^s$ -groep, welke alle R_p van de cf. bevat. Dus als aan die voorwaarden voldaan wordt, heeft een $p+1 \tau_m^{m-s+p}$ een R_p -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^{n-s+p}$ groep, die alle R_p van de cf. bevat.

Stellen we $n=s$ in genoemde voorwaarden, dan heeft dus $p+1 \sigma_m^s$ als:

$$1^e. m - s \text{ deelbaar is door } p + 1.$$

$$2^e. \binom{m}{s-p} \quad " \quad " \quad " \quad \binom{s}{p}$$

$$3^e. \binom{m-1}{s-p-1} \text{ deelbaar is door } \binom{s-1}{p}$$

een R_p -vreemde hoofdveelhoek, die alle R_p van de cf. bevat, aangezien $p+1 \tau_s^s$ een enkel punt met de daar door gaande $R_1, R_2, \dots R_p$ voorstelt, d. w. z. dat op dezelfde voorwaarden een $p+1 \tau_m^{m-s+p}$ een R_p -vreemde hoofd- $p+1 \tau_s^p$ -groep heeft. (Aannemende, dat een $p+1 \tau_s^p$ één R_0 met de daar door gaande $R_1, R_2 \dots R_p$ voorstelt.)

Omgekeerd heeft een $p+1 \tau_m^{m-s+p}$ puntenvreemde hoofd- $p+1 \tau_s^p$ -groepen op dezelfde voorwaarden waarop een $p+1 \tau_m^s$ puntenvreemde hoofd- $p+1 \tau_s^s$ -groepen heeft. (Aannemende, dat een $p+1 \tau_s^p$ één R_p met de daarin gelegen $R_{p-1} \dots R_0$ voorstelt).

§ 2. De voorwaarden waarop een groep lijnenvreemde $p+1 \tau_n^s$ in een $p+1 \tau_m^s$ voorkomen zijn de volgende:

1^e. Het aantal lijnen van $p+1 \tau_m^s$ moet deelbaar zijn door het aantal lijnen van $p+1 \tau_n^s$ dus:

$$1^e. \binom{m}{s-p+1} \text{ deelbaar door } \binom{n}{s-p+1}$$

Het aantal getallen noodig voor de notatie der $p+1 \tau_n^s$, $\left\{ \binom{m}{s-p+1} : \binom{n}{s-p+1} \right\} n$ moet deelbaar zijn door m dus:

$$2^e. \binom{m-1}{s-p} \text{ deelbaar door } \binom{n-1}{s-p}$$

Elke combinatie van $(s-p)$ getallen geeft aanleiding tot

$\frac{m-(s-p)}{n-(s-p)}$ groepen van n getallen, die niet meer dan $(s-p)$ getallen gemeen hebben. Er zijn dus $\left\{ \binom{m}{s-p} \frac{m-(s-p)}{n-(s-p)} \right\} : \binom{n}{s-p} = \binom{m}{s-p+1} : \binom{n}{s-p+1}$ dezer groepen mogelijk, dus juist het benoodigde aantal om alle $p+1 \tau_n^s$ te noteeren mits dus:

3^e. $m - (s - p)$ deelbaar door $n - (s - p)$.

Deze voorwaarde zegt, dat het aantal lijnen door een punt van $p+1 \tau_m^s$ deelbaar moet zijn door het aantal lijnen gaande door een punt van $p+1 \tau_n^s$.

§ 3. De voorwaarden waarop een $p+1 \tau_m^s$ een groep R_q -vreemde $p+1 \tau_n^s$ bevat, zijn:

1^e. Het aantal R_q van een $p+1 \tau_m^s$ moet deelbaar zijn door het aantal R_q van een $p+1 \tau_n^s$, dus $\binom{m}{s-p+q}$ moet deelbaar zijn door $\binom{n}{s-p+q}$.

2^e. Het aantal getallen voor de notatie noodig $\left\{ \binom{m}{s-p+q} : \binom{n}{s-p+q} \right\} n$ moet deelbaar zijn door m dus $\binom{m-1}{s-p+q-1}$ moet deelbaar zijn door $\binom{n-1}{s-p+q-1}$.

3^e. Elke combinatie van $(s-p+q-1)$ getallen geeft aanleiding tot $\frac{m-(s-p+q-1)}{n-(s-p+q-1)}$ groepen van n getallen, welke niet meer dan $(s-p+q-1)$ getallen gemeen hebben. Er zijn dus $\left\{ \binom{m}{s-p+q-1} \frac{m-(s-p+q-1)}{n-(s-p+q-1)} \right\} : \binom{n}{s-p+q-1} = \binom{m}{s-p+q} : \binom{n}{s-p+q}$ dezer groepen mogelijk, dus juist het benoodigde aantal om alle $p+1 \tau_n^s$ te noteeren, mits $m - (s - p + q - 1)$ deelbaar

is door $n - (s - p + q - 1)$. Deze voorwaarde zegt, dat het aantal R_q , dat in de cf. $p+1 \tau_m^s$ gaat door een R_{q-1} deelbaar moet zijn door het aantal R_q , dat in de cf. $p+1 \tau_n^s$ door een R_{q-1} gaat.

4°. Het aantal R_q , dat in de cf. $p+1 \tau_m^s$ gaat door een R_{q-2} moet deelbaar zijn door het overeenkomstige aantal in de cf. $p+1 \tau_n^s$ dus:

$$\binom{m-(s-p+q-2)}{2} \text{ deelbaar door } \binom{n-(s-p+q-2)}{2}.$$

5°. Het aantal R_q , dat in de cf. $p+1 \tau_m^s$ gaat door een R_{q-3} moet deelbaar zijn door het overeenkomstige aantal in de cf. $p+1 \tau_n^s$ dus:

$$\binom{m-(s-p+q-3)}{3} \text{ deelbaar door } \binom{n-(s-p+q-3)}{3}$$

.

$(q+2)^\circ$. Het aantal R_q , dat in de cf. $p+1 \tau_m^s$ gaat door een R_0 moet deelbaar zijn door het overeenkomstige aantal in de cf. $p+1 \tau_n^s$ dus:

$$\binom{m-(s-p)}{q} \text{ deelbaar door } \binom{n-(s-p)}{q}.$$

Stellen we in de gevonden voorwaarden $n = s$ dan gaan deze over in de voorwaarden waarop een $p+1 \tau_m^s$ een R_q -vreemde hoofd- R_p -groep heeft.

§ 4. Op dezelfde voorwaarden waarop een $p+1 \tau_m^s$ een R_{p-q} -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep bevat, heeft een $p+1 \sigma_m^s$

een R_q -vreemde hoofd- $p+1$ σ_n^s -groep. Zal een $p+1$ σ_m^s een R_q -vreemde hoofd- $p+1$ σ_n^s -groep bevatten, dan is toch noodig dat:

1°. Het aantal R_q van de $p+1$ σ_m^s deelbaar is door het aantal R_q van de $p+1$ σ_n^s dus:

$$\binom{m}{s-q} \text{ deelbaar door } \binom{n}{s-q}.$$

2°. Het aantal getallen $\left\{ \binom{m}{s-q} : \binom{n}{s-q} \right\}$ n noodig voor de notatie van een dergelijke groep deelbaar is door m dus:

$$\binom{m-1}{s-q-1} \text{ deelbaar door } \binom{n-1}{s-q-1}.$$

3°. Elke combinatie van $(s-q-1)$ getallen geeft aanleiding tot $\frac{m-(s-q-1)}{n-(s-q-1)}$ groepen van n getallen, die niet meer dan $(s-q-1)$ getallen gemeen hebben. We krijgen dus: $\left\{ \binom{m}{s-q-1} \frac{m-(s-q-1)}{n-(s-q-1)} \right\} : \binom{n}{s-q-1} = \binom{m}{s-q} : \binom{n}{s-q}$, dat is juist het benodigde aantal groepen van n getallen. Dus moet $m-(s-q-1)$ deelbaar zijn door $n-(s-q-1)$, d. w. z. het aantal R_q , dat ligt in een R_{q+1} in een $p+1$ σ_m^s , moet deelbaar zijn door het overeenkomstige aantal in een $p+1$ σ_n^s .

4°. Het aantal R_q , dat ligt in een R_{q+2} in een $p+1$ σ_m^s , moet deelbaar zijn door het overeenkomstige aantal in een $p+1$ σ_n^s , dus:

$$\binom{m-(s-q-2)}{2} \text{ deelbaar door } \binom{n-(s-q-2)}{2}$$

.

$(p-q+2)^e$ voorwaarde. Het aantal R_q , dat ligt in een R_p van de $p+1 \tau_m^s$, moet deelbaar zijn door het overeenkomstige aantal in de $p+1 \tau_n^s$, dus:

$$\binom{m-(s-p)}{p-q} \text{ deelbaar door } \binom{n-(s-p)}{p-q}$$

§ 5. Heeft een $p+1 \tau_m^s$ een R_{p-1} -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep, dan behooren hiertoe alle R_{p-1} van de cf. en dus ook alle ruimten van lagere orde.

Verwijderen we uit de $p+1 \tau_m^s$ de R_p behorende tot die R_{p-1} -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep, dan blijven door elke R_{p-1} $\{m-(s-1)\} - \{n-(s-1)\} = (m-n)$ R_p gaan en blijven er over $\binom{m}{s} - \left\{ \binom{m}{s-1} : \binom{n}{s-1} \right\} \binom{n}{s} = \binom{m}{s-1} \left(\frac{m-s+1}{s} - \frac{n-s+1}{s} \right) = \binom{m}{s-1} \frac{m-n}{s} R_p$.

Een R_{p-2} behoort tot $\frac{m-(s-2)}{n-(s-2)}$ cf. $p+1 \tau_n^s$. Er gaan toch door een R_{p-2} in een $p+1 \tau_m^s$, $\{m-(s-2)\}$ R_{p-1} en in een $p+1 \tau_n^s$, $\{n-(s-2)\}$ R_{p-1} . Elke R_{p-1} behoort tot één $p+1 \tau_n^s$ van de hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep. Een R_{p-2} behoort dus tot $\frac{m-(s-2)}{n-(s-2)}$ $p+1 \tau_n^s$. Verwijderen we dus de R_p dezer hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep, dan verliest elke R_{p-2} , $\frac{m-(s-2)}{n-(s-2)} \binom{n-(s-2)}{2} R_p$. Er blijven dus door een R_{p-2} gaan:

$$\binom{m-(s-2)}{2} - \frac{m-(s-2)}{n-(s-2)} \binom{n-(s-2)}{2} = \frac{m-s+2}{1.2} (m-n) R_p$$

Een R_{p-3} behoort tot $\binom{m-(s-3)}{2} : \binom{n-(s-3)}{2}$ cf. $p+1 \tau_n^s$, want door een R_{p-3} gaan in een $p+1 \tau_m^s$ $\binom{m-(s-3)}{2} R_{p-1}$ en in

Verwijderen we uit $3\tau_{22}^4$ de vlakken van een lijnenvreemde hoofd- $3\tau_7^4$ -groep, dan houden we over een cf.

$$(231 \begin{smallmatrix} 150 \\ 20 \end{smallmatrix}; 1540 \begin{smallmatrix} 15 \\ 3 \end{smallmatrix}; 5775 \begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix})$$

Verwijderen we uit $p+1\tau_m^s$ de R_p eener R_{p-1} -vreemde hoofd- R_p -groep, dan houden we een cf. over, welke uit de voorgaande kunnen afleiden door $n=s$ te stellen, dus een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc} \binom{m-(s-p)}{p-1} \frac{m-s}{p} & m-s & \binom{s}{s-1} \\ \binom{m-(s-p)}{p-1} & \binom{s-1}{s-2} & \cdot \\ \binom{m}{s-p} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m-(s-p) & \binom{s-1}{s-p} & \binom{s}{s-p} \end{array} ; \dots \binom{m}{s-1} \cdot ; \binom{m}{s-1} \frac{m-s}{s} \cdot \right)$$

Voorbeeld: Verwijderen we uit $3\tau_{22}^4$ de vlakken van een lijnenvreemd hoofd-385-vlak dan blijft er over een cf.

$$(231 \begin{smallmatrix} 180 \\ 20 \end{smallmatrix}; 1540 \begin{smallmatrix} 18 \\ 3 \end{smallmatrix}; 6930 \begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix})$$

§ 6. Op de voorwaarden waarop $p+1\tau_m^s$ een R_q -vreemde hoofd- $p+1\tau_n^s$ -groep heeft, heeft $p+1\sigma_m^s$ een R_{p-q} -vreemde hoofd- $p+1\sigma_n^s$ -groep.

$p+1\tau_m^s$ heeft een R_{p-1} -vreemde hoofd- $p+1\tau_n^s$ -groep op de volgende voorwaarden:

1 ^e .	$\binom{m}{s-1}$	deelbaar door	$\binom{n}{s-1}$
2 ^e .	$\binom{m-1}{s-2}$	"	$\binom{n-1}{s-2}$
3 ^e .	$m-s+2$	"	$n-s+2$
4 ^e .	$\binom{m-(s-3)}{2}$	"	$\binom{n-(s-3)}{2}$

$$(p+1)^s \cdot \binom{m-(s-p)}{p-1} \quad " \quad " \quad \binom{n-(s-p)}{p-1}.$$

Op deze voorwaarden heeft dus $p+1 \sigma_m^s$ een R_1 -vreemde hoofd- $p+1 \sigma_n^s$ -groep.

Voor $n=s$ heeft dus $p+1 \sigma_m^s$ op dezelfde voorwaarden een R_1 -vreemde hoofdveelhoek waarop $p+1 \tau_m^s$ een R_{p-1} -vreemde hoofd- R_p -groep heeft.

Heeft een $p+1 \sigma_m^s$ een R_1 -vreemde hoofd- $p+1 \sigma_n^s$ -groep, dan behooren hiertoe alle R_1 van de cf. en dus ook alle ruimten van hoogere orde.

Verwijderen we uit $p+1 \sigma_m^s$ de R_0 , behoorende tot die hoofd- $p+1 \sigma_n^s$ -groep, dan blijven in elke R_1 liggen $\{m-(s-1)\} - \{n-(s-1)\} = (m-n) R_0$ en er blijven over $\binom{m}{s} - \left\{ \binom{m}{s-1} : \binom{n}{s-1} \right\} \binom{n}{s} = \binom{m}{s-1} \frac{m-n}{s} R_0$.

Een R_2 behoort tot $\frac{m-(s-2)}{n-(s-2)}$ cf. $p+1 \sigma_n^s$, dus verliest een $R_2 \frac{m-(s-2)}{n-(s-2)} \binom{n-(s-2)}{2} R_0$, er blijven dus over $(m-s+2) \frac{m-n}{2} R_0$ enz. We houden dus ten slotte over een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc} \binom{s}{p} & \binom{s-1}{p-1} & \binom{s-1}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m}{s-1} \frac{m-n}{s} \binom{s}{2} & \binom{m}{s-1} \binom{s-1}{1} & \vdots \\ \vdots & m-n & \vdots \\ \binom{s}{1} & & \binom{m-(s-p+1)}{p-2} \frac{m-n}{p-1} \end{array} \right);$$

$$; \begin{pmatrix} m \\ s-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-(s-p) \\ p-1 \end{pmatrix} \frac{m-n}{p}$$

Hadden we uit $p+1 \tau_m^s$ een R_1 -vreemde hoofdveelhoek verwijderd, dan hadden we een cf. overgehouden, welke uit bovenstaande wordt afgeleid door $n=s$ te stellen, dus een cf.

$$\left(\begin{pmatrix} m \\ s-1 \end{pmatrix} \frac{m-s}{s} \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} s-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ; \dots ; \begin{pmatrix} m \\ s-p+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ;$$

$$; \begin{pmatrix} m \\ s-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-(s-p) \\ p-1 \end{pmatrix} \frac{m-s}{p}$$

§ 7. Stellen we $p+1 \tau_m^s \equiv p+1 \sigma_m^s$ dan is:

$$p+1 \tau_m^s \equiv p+1 \tau_m^{m-s+p},$$

dus: $m = 2s - p$.

$p+1 \tau_{2s-p}^s$ stelt dus de met zichzelf duale configuratie voor. Deze cf. heeft dus op de volgende voorwaarden een

R_{p-1} -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep en tevens een R_1 -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^{n-s+p}$ -groep.

$$\begin{aligned}
 1^e. & \quad \binom{2s-p}{s-1} && \text{deelbaar door} && \binom{n}{s-1} \\
 2^e. & \quad \binom{2s-p-1}{s-2} && " && \binom{n-1}{s-2} \\
 3^e. & \quad s-p+2 && " && n-s+2 \\
 4^e. & \quad \binom{s-p+3}{2} && " && \binom{n-s+3}{2}
 \end{aligned}$$

.

$$(p+1)^e. \quad \binom{s}{p-1} \quad " \quad " \quad \binom{n-s+p}{p-1}.$$

Verwijderen we uit een cf. $p+1 \tau_{2s-p}^s$, welke aan deze voorwaarden voldoet, de R_p van de R_{p-1} -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep en de R_0 van de R_1 -vreemde hoofd- $p+1 \tau_n^s$ -groep, dan houden we over een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc} \binom{m-(s-p)}{p-1} \frac{m-n}{p} & \binom{m-(s-p+1)}{p-2} \frac{m-n}{p-1} & \\ \vdots & \vdots & \\ \binom{m}{s-1} \frac{m-n}{s} & \binom{m}{s-1} & \vdots \\ \binom{s}{2} & \binom{s-1}{1} & m-n \\ \binom{s}{1} & & \end{array} \right) ; \dots$$

$$\dots ; \left(\begin{array}{ccc} m-n & & \binom{s}{s-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{m}{s-p+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m-(s-p+1)}{p-2} \frac{m-n}{p-1} & \binom{m}{s-1} \frac{m-n}{s} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m-(s-p)}{p-1} \frac{m-n}{p} & \binom{m-(s-p)}{p-1} \frac{m-n}{p} & \end{array} \right)$$

Waarin $m = 2s - p$ dus een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc}
 \binom{s}{p-1} \frac{2s-p-n}{p} & \binom{s-1}{p-2} \frac{2s-p-n}{p-1} & \\
 \vdots & \vdots & \\
 \binom{2s-p}{s-1} \frac{2s-p-n}{s} & \binom{2s-p}{s-1} & \vdots \\
 \vdots & \binom{s-1}{1} & 2s-p-n \\
 \vdots & \vdots & \\
 2s-p-n & \binom{s}{s-1} & \\
 \vdots & \vdots & \\
 \dots; \binom{2s-p}{s-1} & \vdots & \binom{2s-p}{s-1} \frac{2s-p-n}{s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \binom{s-1}{p-2} \frac{2s-p-n}{p-1} & \vdots & \binom{s}{p-1} \frac{2s-p-n}{p}
 \end{array} \right)$$

De cf. $p+1 \tau_{2s-p}^s$ heeft een R_{p-1} -vreemde hoofd- R_p -groep en tegelijk een R_1 -vreemde hoofdveelhoek als voldaan wordt aan:

$$\begin{aligned}
 1^e. \quad \binom{m}{s-1} &= \binom{2s-p}{s-1} && \text{deelbaar door } s. \\
 2^e. \quad \binom{m-1}{s-2} &= \binom{2s-p-1}{s-2} && \text{" " } s-1 \\
 3^e. \quad m-s &= s-p && \text{" " } 2 \\
 4^e. \quad \binom{m-(s-3)}{2} &= \binom{s-p+3}{2} && \text{" " } 3 \\
 &\dots && \\
 (p+1)^e. \quad \binom{m-(s-p)}{p-1} &= \binom{s}{p-1} && \text{" " } p.
 \end{aligned}$$

Verwijderen we uit $p+1 \tau_{2s-p}^s$ de R_p van de hoofd- R_p -groep en de R_0 van de hoofdveelhoek, dan houden we over een cf., welke uit bovenstaande volgt door $n=s$ te stellen, dus een cf.

$$\begin{pmatrix}
 \binom{s}{p-1} \frac{s-p}{p} & \binom{s-1}{p-2} \frac{s-p}{p-1} & & \\
 \binom{2s-p}{s-1} \frac{s-p}{s} & \vdots & \binom{2s-p}{s-1} & \vdots & ; \dots\dots\dots \\
 & \binom{s}{2} & & \vdots & \\
 & \binom{s}{1} & & s-p &
 \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots \begin{pmatrix}
 & s-p & & \binom{s}{s-1} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 \binom{2s-p}{s-2} & \vdots & \binom{2s-p}{s-1} \frac{s-p}{s} & \vdots \\
 & \binom{s-1}{p-2} \frac{s-p}{p-1} & & \binom{s}{p-1} \frac{s-p}{p}
 \end{pmatrix}$$

Een cf. welk aan de vereischte voorwaarden voldoet is b.v.
 $3 \tau_{30}^{16}$. Deze cf. heeft een lijnenvreemd hoofdveelvlak en een
 lijnenvreemde hoofdveelhoek. Verwijderen we de vlakken
 dezer hoofdveelvlak en de punten dezer hoofdveelhoek, dan
 blijft er over een cf.

$$\left(\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} \frac{14}{16} \begin{matrix} 112 \\ 16 \end{matrix} ; \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 14 \end{matrix} ; \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} \frac{14}{16} \begin{matrix} 16 \\ 112 \end{matrix} \right)$$

§ 8. Nemen we aan, dat een $p+1 \tau_m^s$ bevat een groep
 van x gescheiden R_{p-1} (d. w. z. geen $2 R_{p-1}$ in één R_p ge-
 legen). Elke R_{p-1} wordt voorgesteld door $(s-1)$ getallen.
 Deze $(s-1)$ -tallen hebben niet meer dan $(s-3)$ getallen
 gemeen, dus hebben de x R_{p-1} ook geen R_{p-2} gemeen.
 Door de x gescheiden R_{p-1} gaan $x(m-s+1) R_p$. In elk

dezer R_p liggen $(s-1)$ van de overige R_{p-1} . Gaan deze R_p $(s-1)$ aan $(s-1)$ door de overige R_{p-1} , dan noemen we de groep van $x R_{p-1}$ een *neven- x - R_{p-1}* en hebben we: $(s-1) \times$ overige R_{p-1} gelijk aan $x(m-s+1) \times$ het aantal overige R_{p-1} in elke R_p , dus:

$$(s-1) \left\{ \binom{m}{s-1} - x \right\} = x(m-s+1) \left\{ \binom{s}{s-1} - 1 \right\}$$

$$x = \binom{m}{s-1} \frac{1}{m-s+2} = \binom{m}{s-2} : (s-1)$$

Om het benodigde aantal groepen van $(s-1)$ getallen te krijgen, die slechts $(s-3)$ getallen gemeen hebben, moeten we elke combinatie van $(s-3)$ getallen tot een $(s-1)$ -tal maken, door er 2 van de overige $m-(s-3)$ getallen bij te voegen. We krijgen dan $\left\{ \binom{m}{s-3} \frac{m-s+3}{2} \right\} : \binom{s-1}{s-3} = \binom{m}{s-2} : (s-1) = x$ groepen van $(s-1)$ getallen, dus juist het benodigde aantal.

De tabel voor de *neven- x - R_{p-1}* bevat $(s-1)x$ getallen. Daar elk getal evenveel malen voorkomt, moet $\binom{m}{s-2}$ deelbaar zijn door m .

Op de *neven- x - R_{p-1}* liggen $x \binom{s-1}{s-2} = \binom{m}{s-2}$, dus alle R_{p-2} van de cf. Dus elke R_{p-2} ligt in één van de $x R_{p-1}$.

Elke R_{p-3} ligt in $\frac{m-(s-3)}{2}$ van de $x R_{p-1}$.

Elke R_{p-4} ligt in $\left[m-(s-4) \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{3}{2} = \binom{m-(s-4)}{3} \times \frac{1}{m-(s-2)}$ van de $x R_{p-1}$.

Elke R_{p-5} ligt in $\left[\binom{m-(s-5)}{2} \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{4}{2} = \binom{m-(s-5)}{4} \times \frac{1}{m-(s-2)}$ van de $x R_{p-1}$.

Elke R_{p-6} ligt in $\left[\binom{m-(s-6)}{3} \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{5}{2} = \binom{m-(s-6)}{5} \times \frac{1}{m-(s-2)}$ van de $x R_{p-1}$.

.....

Elke R_{p-q} ligt in $\left[\binom{m-(s-q)}{q-3} \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{q-1}{2} = \binom{m-(s-q)}{q-1} \times \frac{1}{m-(s-2)}$ van de $x R_{p-1}$.

.....

Elke R_0 ligt in $\left[\binom{m-(s-p)}{p-3} \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{p-1}{2} = \binom{m-(s-p)}{p-1} \times \frac{1}{m-(s-2)}$ van de $x R_{p-1}$.

Voor het bestaan van een neven- $x-R_{p-1}$ krijgen we dus de volgende voorwaarden:

1^e $\binom{m}{s-2}$ moet deelbaar zijn door $(s-1)$.

2^e $\binom{m}{s-2}$ moet deelbaar zijn door m .

3^e $m-s+3$ moet deelbaar zijn door 2.

4^e $(m-s+4)(m-s+3)$ moet deelbaar zijn door 2. 3.

5^e $(m-s+5)(m-s+4)(m-s+3)$ moet deelbaar zijn door 2. 3. 4.

.....

p^e $(m-s+p)(m-s+p-1) \dots (m-s+3)$ moet deelbaar zijn door $(p-1)!$

Dit komt hierop neer, dat, wanneer aan de eerste twee voorwaarden voldaan is, we een neven- x - R_{p-1} kunnen verwachten, wanneer:

- a. $m - s + 1$ deelbaar is door alle getallen $< p$
 of b. $m - s + 3$ " " " " " $< p$.

Verwijderen we de neven- x - R_{p-1} uit de $p+1 \tau_m^s$, dan kunnen we de overblijvende onregelmatige figuur splitsen in 2 configuraties.

1°. De overblijvende R_{p-1} met alle R_{p-2} , R_{p-3} R_0 en de R_p , welke door de neven- x - R_{p-1} gaan. Deze cf. heeft: $\binom{m}{s-p} R_0$, $\binom{m}{s-p+1} R_1$ $\binom{m}{s-2} R_{p-2}$, $\binom{m}{s-1} - x =$
 $= \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} R_{p-1}$ en $(m-s+1) x = \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} R_p$.

Elke R_p verliest één R_{p-1} . Er blijven dus in een R_p , $(s-1)$ R_{p-1} over. Het aantal R_{p-2} R_0 in een R_p blijft onveranderd. Door elke R_{p-1} gaan $(s-1)$ R_p . Het aantal overige ruimten in een R_{p-1} gelegen blijft onveranderd.

Elke R_{p-2} verliest één R_{p-1} , terwijl er $(m-s+1)$ overblijven. Het aantal incidenties van ruimten R_{p-2} met $R_p =$
 $= \binom{s}{s-2} \times \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1}$, dus het aantal R_p gaande door een $R_{p-2} = \left\{ \binom{s}{2} \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} \right\} : \binom{m}{s-2} = \frac{(m-s+1)s}{2}$. Elke

R_{p-3} verliest $\frac{m-(s-3)}{2} R_{p-1}$, terwijl er overblijven $\binom{m-(s-3)}{2} - \frac{m-(s-3)}{2} = \frac{m-(s-3)}{2} (m-s+1) R_{p-1}$.

Aantal incidenties van ruimten R_{p-3} met $R_p = \binom{s}{s-3} \times \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1}$, dus het aantal R_p gaande door een $R_{p-3} = \left\{ \binom{s}{3} \binom{m}{s-2} \times \frac{m-s+1}{s-1} \right\} : \binom{m}{s-3} = \frac{s(m-s+3)(m-s+1)}{3!} = \frac{s}{m-s+2} \binom{m-(s-3)}{3}$.

Elke R_{p-q} verliest $\left[\binom{m-(s-q)}{q-3} \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{q-1}{2} R_{p-1}$, terwijl er overblijven $\binom{m-(s-q)}{q-1} - \left[\binom{m-(s-q)}{q-3} \frac{m-(s-3)}{2} \right] : \binom{q-1}{2} = \binom{m-(s-q)}{q-1} \frac{m-(s-1)}{m-(s-2)}$.

Het aantal incidenties van ruimten R_{p-q} met $R_p = \binom{s}{s-q} \times \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1}$, dus is het aantal R_p gaande door een $R_{p-q} = \left\{ \binom{s}{q} \binom{m}{s-2} \frac{m-(s-1)}{s-1} \right\} : \binom{m}{s-q} = \binom{m-(s-q)}{q} \frac{s}{m-s+2}$.

Het is dus een cf. waarbij door een R_{p-q} een aantal R_p gaan $= \frac{s}{m-s+2} \binom{m-(s-q)}{q}$ voor $q=2$ tot p .

$\binom{m-(s-q)}{q} \frac{s}{m-s+2}$ moet dus ook een geheel getal zijn voor $q=2$ tot p , d. w. z.:

$s(m-s+1)$ moet deelbaar zijn door $2!$

$s(m-s+1)(m-s+3)$ " " " " $3!$

.....

$s(m-s+1)(m-s+3) \dots (m-s+p)$ " " " " $p!$

We hebben gezien, dat $(m-s+1)$ of $(m-s+3)$ deelbaar

moeten zijn door alle getallen $< p$, aan deze laatste groep voorwaarden wordt dus voldaan als één der getallen $s, (m-s+1), (m-s+3), \dots (m-s+p)$ deelbaar is door p .

De 2^e configuratie heeft dezelfde $R_{p-1}, R_{p-2} \dots R_0$ doch de overige R_p , dus de R_p , die niet door de neven- x - R_{p-1} gaan.

Het aantal $R_p =$

$$= \binom{m}{s} - \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} = \binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)(m-2s+2)}{s(s-1)}.$$

Het aantal R_p gaande door een $R_{p-1} =$

$$= m - (s-1) - (s-1) = m - 2s + 2.$$

Het aantal R_p gaande door een $R_{p-q} (q > 1) =$

$$= \binom{m-(s-q)}{q} - \frac{s}{m-s+2} \binom{m-(s-q)}{q} = \binom{m-(s-q)}{q} \frac{m-2s+2}{m-s+2}.$$

§ 9. Op dezelfde wijze als we hierboven neven- x - R_{p-1} hebben afgeleid voor een $p+1 \tau_m^s$ kunnen we voor een $p+1 \sigma_m^s$ neven- x - R_1 afleiden. Een dergelijke neven- x -zijde bestaat uit x gescheiden lijnen (zij hebben geen punt gemeen), terwijl de punten op deze lijnen gelegen $(s-1)$ aan $(s-1)$ op de overige lijnen van de cf. liggen. De lijnen van de neven- x -zijde hebben ook geen vlak gemeen, terwijl alle vlakken van de cf. door die x lijnen gaan enz.

Stellen we $p=2$, dan zien we, dat een $3 \tau_m^s$, indien voldaan wordt aan de voorwaarden

1^e. $\binom{m}{s-2}$ deelbaar door $(s-1)$

2^e. $\binom{m}{s-2}$ " " m

3^e. $m-s+3$ deelbaar door 2,

een neven- x -zijde bevat. Op deze x -zijde liggen alle punten van de cf. Na verwijdering der neven- x -zijde kan de $3\tau_m^s$ gesplitst worden in:

1^e een cf.

$$\left(\binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)s}{2} \begin{matrix} s-1 \\ m-s+1 \end{matrix} ; \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} \begin{matrix} s-1 \\ s-1 \end{matrix} ; \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} \begin{matrix} (s-1) \\ (s) \end{matrix} \right)$$

en 2^e een cf.

$$\left(\binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)(m-2s+2)}{2} \begin{matrix} m-2s+2 \\ m-s+1 \end{matrix} ; \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} \begin{matrix} m-2s+2 \\ s-1 \end{matrix} ; \binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)(m-2s+2)}{s(s-1)} \begin{matrix} s \\ (s) \end{matrix} \right)$$

Voorbeeld. De cf. $3\tau_9^4 \equiv (36 \frac{21}{7}; 84 \frac{6}{3}; 126 \frac{4}{6})$ voldoet aan bovenstaande voorwaarden en heeft een neven-12-zijde. Na verwijdering dezer neven-12-zijde kunnen we de overblijvende figuur splitsen in een cf. $(36 \frac{12}{6}; 72 \frac{3}{3}; 72 \frac{3}{6})$ en een cf. $(36 \frac{9}{6}; 72 \frac{3}{3}; 54 \frac{4}{6})$.

Op dezelfde voorwaarden waarop een $3\tau_m^s$ een neven- x -zijde bevat, waarop alle punten van de cf. liggen, bevat een $3\tau_m^s$ een neven- x -zijde, waardoor alle vlakken van de cf. gaan.

Na verwijdering van een dergelijke neven- x -zijde kunnen we de overblijvende figuur splitsen in 2 configuraties en wel 1^e een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc} \binom{s}{2} & s-1 & m-s+1 \\ \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} & \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} & \binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)s}{2} \end{array} \right)$$

2^e een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc} \binom{s}{2} & s-1 & m-s+1 \\ \binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)(m-2s+2)}{s(s-1)} & \binom{m}{s-2} \frac{m-s+1}{s-1} & \binom{m}{s-2} \frac{(m-s+1)(m-2s+2)}{2} \end{array} \right)$$

Nemen we aan, dat $3\tau_m^s$ een neven- x -zijde heeft, die alle punten bevat dan voldoen m en s aan de voorwaarden:

1^e. $m - s$ oneven.

1^e. $\binom{m}{s-2}$ deelbaar door m .

3^e. $\binom{m}{s-2}$ " " $(s-1)$

Nemen we verder aan dat $3\tau_m^s \equiv 3\sigma_m^{m-s+2}$ ook een neven- x -zijde heeft, welke alle vlakken bevat, dan voldoen m en s bovendien aan drie voorwaarden:

4^e. $m - (m - s + 2)$ oneven dus s oneven.

5^e. $\binom{m}{m-s} = \binom{m}{s}$ deelbaar door m .

6^e. $\binom{m}{s}$ deelbaar door $m - s + 1$,

dan heeft dus $3\tau_m^s$ zoowel een neven- x -zijde, die alle punten als een, die alle vlakken bevat. De voorwaarden eischen,

dat s oneven en $m-s$ ook oneven zij, dus dat s oneven en m even zij. Aan de 6 voorwaarden wordt b. v. voldaan door $3 \tau_{16}^5$. In het algemeen zullen de twee neven- x -zijden samenvallen als:

$$\binom{m}{s-2} : (s-1) = \binom{m}{m-s+2-2} : (m-s+2-1),$$

dus als:

$$s = m - s + 2$$

$$m = 2(s-1),$$

d. w. z. bij de met zichzelf duale cf. $3 \tau_s^{2(s-1)} \equiv 3 \sigma_{2(s-1)}^s$.

Als de cf. $3 \tau_{2(s-1)}^s$ een neven- x -zijde heeft, die alle punten bevat, dan gaat zij ook door alle vlakken. De cf. $3 \tau_{2(s-1)}^s$ heeft een neven- x -zijde als:

1°. s oneven is.

2°. $\binom{2s-2}{s}$ deelbaar is door $(2s-2)$.

3°. $\binom{2s-2}{s}$ " " " $(s-1)$.

Aan deze laatste voorwaarde wordt steeds voldaan, als aan de 2° voldaan wordt, er blijven dus slechts twee voorwaarden over.

Aan de 2° voorwaarde wordt, voor zoover ik het heb kunnen nagaan, voldaan door elk getal, dat geen macht van 2 is. Aan de eerste twee voorwaarden wordt dus door elk oneven getal voldaan.

Verwijderen we in een $3\tau_{2(s-1)}^s$ de neven- x -zijde, dan verliest elk vlak en elk punt één lijn en er blijft over een cf.

$$\left(\binom{2s-2}{s}_{(s-1)}^{\binom{s}{2}} ; \binom{2s-2}{s}_{s-1}^{s-1} ; \binom{2s-2}{s}^{s-1}_{\binom{s}{2}} \right)$$

bestaande uit een gelijk aantal punten, lijnen en vlakken.

$$\text{Voorbeeld: } 3\tau_8^5 \equiv \left(56 \begin{smallmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix} ; 70 \begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix} ; 56 \begin{smallmatrix} 5 \\ 10 \end{smallmatrix} \right)$$

Na verwijdering der neven- x -zijde, blijft er over een cf.:

$$\left(56 \begin{smallmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} ; 56 \begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix} ; 56 \begin{smallmatrix} 4 \\ 10 \end{smallmatrix} \right)$$

Hadden we uit $3\tau_{2(s-1)}^s$ verwijderd alle niet tot de neven- x -zijde behorende lijnen, dan hadden we overgehouden een cf.:

$$\left(\binom{2s-2}{s}_1^{\binom{s}{2}} ; \binom{2s-2}{s}_{s-1}^{\frac{1}{s-1}} ; \binom{2s-2}{s}^{1}_{\binom{s}{2}} \right)$$

§ 10. Wanneer m deelbaar is door r b.v. $m = r m_1$ dan kunnen we de m getallen met behulp waarvan een $p+1\tau_m^s$ genoteerd wordt, verdeelen in groepen van r getallen.

$$|1\ 2\ 3\ \dots\ r|\ (r+1)\ \dots\ 2r|\ \dots\ \dots\ | \dots\ r\ m_1|$$

We kunnen nu als $m_1 \geq s$ is in $p+1\tau_m^s$ een cf. aanwijzen, waarvan de punten, lijnen, $\dots$ R_p geen 2 getallen uit één

dezer groepen bevatten. Deze cf. heeft dus $r^{s-p} \binom{m_1}{s-p} R_0$,
 $r^{s-p+1} \binom{m_1}{s-p+1} R_1 \dots r^s \binom{m_1}{s} R_p$.

Door elke R_0 gaan $r(m_1 - s + p) R_1$

" " R_0 " $r^2 \binom{m_1-s+p}{2} R_2$

.

" " R_0 " $r^p \binom{m_1-s+p}{p} R_p$

In elke R_1 liggen $(s - p + 1) R_0$

Door elke R_1 gaan $r(m_1 - s + p - 1) R_2$

" " R_1 " $r^2 \binom{m_1-s+p-1}{2} R_3$

.

" " R_1 " $r^{p-1} \binom{m_1-s+p-1}{p-1} R_p$

In elke R_2 liggen $(s - p + 2) R_1$

" " R_2 " $\binom{s-p+2}{2} R_0$

Door elke R_2 gaan $r(m_1 - s + p - 2) R_3$

" " R_2 " $r^2 \binom{m_1-s+p-2}{2} R_4$

.

" " R_2 " $r^{p-2} \binom{m_1-s+p-2}{p-2} R_p$

.

.

In elke R_p liggen s R_{p-1}

" " R_p " $\binom{s}{2}$ R_{p-2}

In elke R_p liggen $\binom{s}{3}$ R_{p-3}

.

" " R_p " $\binom{s}{p}$ R_0 .

Het is dus een cf.

$$\left(\begin{array}{ccc} r^p \binom{m_1-s+p}{p} & & r^{p-1} \binom{m_1-s+p-1}{p-1} \\ & \vdots & \vdots \\ r^{s-p} \binom{m_1}{s-p} & ; & r^{s-p+1} \binom{m_1}{s-p+1} \\ & \vdots & \vdots \\ r^2 \binom{m_1-s+p}{2} & ; & r^2 \binom{m_1-s+p-1}{2} \\ & \vdots & \vdots \\ r \binom{m_1-s+p}{1} & ; & r \binom{m_1-s+p-1}{s-p+1} \end{array} \right) ;$$

$$\dots \dots \dots ; r^s \binom{m_1}{s} \begin{pmatrix} \binom{s}{1} \\ \binom{s}{2} \\ \vdots \\ \binom{s}{p} \end{pmatrix}$$

§ 11. Is $s = p + 2$ dan kunnen we ons een $p+1 \tau_n^{p+2}$ nog op een andere wijze voorstellen, dan als een samenstel van $(s-p)$ perspectief gelegen $(n-s+p)$ -hoeken met hun perspectiviteitsfiguur en wel als $(n-p-2)$ twee aan twee perspectief gelegen fondamentaalpyramiden met hun perspectiviteitsfiguur en perspectiviteitscentra, verbindingslijnen, -vlakken, $-R_3, \dots -R_p$ dezer centra en verbindingslijnen

van homologe hoekpunten der fondamentaalpyramiden twee aan twee, verbindingsvlakken van homologe hoekpunten van de fondamentaalpyramiden drie aan drie verbindings- R_p van homologe hoekpunten der fondamentaalpyramiden $(p+1)$ aan $(p+1)$.

Uit de notatie volgt toch het voorkomen van de volgende $(n-p-2)$ fondamentaalpyramiden.

1^e. $1(p+3), 2(p+3), 3(p+3), \dots (p+2)(p+3).$

2^e. $1(p+4), 2(p+4), 3(p+4), \dots (p+2)(p+4).$

3^e. $1(p+5), 2(p+5), 3(p+5), \dots (p+2)(p+5).$

.

$(n-p-2)^e$ $1n, 2n, 3n, \dots (p+2)n.$

De perspectiviteitscentra dezer twee aan twee perspectief gelegen pyramiden worden voorgesteld door de combinaties der 2^e klasse van de getallen $(p+3), (p+4) \dots n.$

Zij vormen dus met hun verbindingslijnen, -vlakken, $-R_3, \dots$

$-R_p$ een $p+1$ τ_{n-p-2}^{p+2} , terwijl de perspectiviteitsfiguur bestaat

uit de punten ik ($i=1$ tot $p+2, k=2$ tot $p+2$) lijnen ikl

($i=1$ tot $p+2, k=2$ tot $p+2, l=3$ tot $p+2$) vlakken

$iklm$ ($i=1$ tot $p+2, k=2$ tot $p+2, l=3$ tot $p+2, m=4$ tot $p+2$)

.

R_p $iklm \dots q$ ($i=1$ tot $p+2, \dots q=p+2$).

De perspectiviteitsfiguur is dus een $p+1 \tau_{p+2}^{p+2}$ zij is dus geheel vervat in één R_p .

De drager der perspectiviteitscentra en de perspectiviteitsfiguur vormen twee met elkaar geassocieerde configuraties.

Is $n = 2(p+2)$, dan zijn ook alle perspectiviteitscentra vervat in één R_p en hebben we dus 2 geassocieerde $p+1 \tau_{p+2}^{p+2}$

In het algemeen kunnen we een $p+1 \tau_n^{p+2}$ beschouwen als te ontstaan uit $(n-t)$ twee aan twee perspectief gelegen t -hoeken.

Uit de notatie volgt toch, dat we in een $p+1 \tau_n^{p+2}$ de volgende $(n-t)$ twee aan twee perspectief gelegen t -hoeken kunnen aanwijzen.

1°. $1(t+1), 2(t+1), 3(t+1) \dots t(t+1).$

2°. $1(t+2), 2(t+2), 3(t+2) \dots t(t+2).$

...

$(n-t)^\circ. 1n, 2n, 3n \dots tn.$

De perspectiviteitscentra dezer twee aan twee perspectief gelegen t -hoeken worden voorgesteld door de combinaties der 2° klasse zonder herhaling der getallen $(t+1) \dots n$. Zij vormen dus met hun verbindingslijnen, -vlakken, $\dots -R_p$ een $p+1 \tau_{n-t}^{p+2}$, terwijl de perspectiviteitsfiguur bestaat uit de:

punten ik	$i = 1 \text{ tot } t$
lijnen ikl	$k = 2 \text{ tot } t$
	$l = 3 \text{ tot } t$
.....	
$R_p \quad iklm \dots q$	$q = p + 1 \text{ tot } t$

De perspectiviteitsfiguur is dus een $p+1 \tau_t^{p+2}$.

De duale stelling geldt natuurlijk voor $p+1 \sigma_n^{p+2} \equiv \equiv_{p+1} \tau_n^{n-p+2}$, welke configuratie dus te beschouwen is als te zijn ontstaan uit $(n-t)$ twee aan twee lineaal gelegen t - R_p . (d. w. z. elke $(n-t)$ homologe R_p snijden elkaar in één R_{p-1} en deze $t R_{p-1}$ zijn in één R_p gelegen.)

§ 12. Onder de *constellatie* eener figuur verstaat men het minimum aantal punten, welke noodig zijn voor de constructie van die figuur.

Ter bepaling van de constellatie van een $p+1 \tau_n^s$ kunnen we ons afvragen, hoeveel punten bij de constructie willekeurig aangenomen zijn.

Een $p+1 \tau_n^s$ is bepaald door een aantal $(n-s+p)$ -hoeken, groot $(s-p)$, gelegen op $(n-s+p)$ stralen gaande door een gegeven punt, het centrum. Dit centrum is bepaald door $p+1$ enkelvoudige gegevens, de $(n-s+p)$ stralen door dit punt zijn ieder bepaald door $p+1$, dus te zamen door $(p+1)(n-s+p)$ enkelvoudige gegevens. Op iedere straal

liggen, behalve de twee punten waardoor de straal bepaald wordt, nog $(s - p - 1)$ punten, ieder door één enkelvoudig gegeven bepaald. De $p+1 \tau_n^s$ is dus bepaald door $p+1 + (p+1)(n-s+p) + (s-p-1)(n-s+p) = ns - (s-p-1)(s+1)$ enkelvoudige gegevens, dus door $\frac{ns - (s-p-1)(s+1)}{p+1}$ onderling onafhankelijke punten.

Een $p+1 \tau_n^{p+1}$ is dus bepaald door n onderling onafhankelijke punten, zooals ook duidelijk is, want het is een volledige n -hoek in de $(p+1)$ -dimensionale ruimte.

We kunnen dus onderscheiden $p+1$ soorten van $p+1 \tau_n^s$ en wel:

- 1^e. Configuraties waarbij $ns - (s-p-1)(s+1) \equiv 0 \pmod{p+1}$.
 2^e. " " $ns - (s-p-1)(s+1) \equiv 1$ " "
 3^e. " " $ns - (s-p-1)(s+1) \equiv 2$ " "

 $(p+1)^e$. " " $ns - (s-p-1)(s+1) \equiv p$ " "

De configuraties der 1^e soort zijn bepaald door een aantal onafhankelijke punten, die der 2^e soort door een aantal onafhankelijke punten en één punt op de verbindinglijn van 2 dier punten, die der 3^e soort door een aantal onafhankelijke punten en één punt in het verbindingsvlak van 3 dier onafhankelijke punten die der $(p+1)^e$ soort door een

aantal onafhankelijke punten en één punt in de verbindings- R_p van $(p+1)$ dier punten.

Een $p+1 \sigma_n^s$ is bepaald door $(s-p)$ lineaal gelegen $(n-s+p)$ - R_p , d. w. z. door een R_p waarin gelegen zijn $(n-s+p) R_{p-1}$, terwijl door ieder dezer R_{p-1} nog $(s-p) R_p$ gaan. Een $p+1 \sigma_n^s$ is dus bepaald door $(p+1)(p+1) + (n-s+p)(p+1)(p+1) + (n-s+p)(s-p-1)(p+1)$ enkelvoudige gegevens dus door

$$\frac{(p+1)^2 + (n-s+p)(p+1)^2 + (n-s+p)(s-p-1)(p+1)}{(p+1)^2} = \\ = \frac{ns - (s-p-1)(s+1)}{p+1} \text{ onafhankelijke } R_p.$$

Een $p+1 \sigma_n^s$ wordt dus door evenveel R_p bepaald, als een $p+1 \tau_n^s$ door punten bepaald wordt. Een $p+1 \tau_n^s \equiv p+1 \sigma_n^{n-s+p}$ is bepaald door

$$\frac{n(n-s+p) - (n-s-1)(n-s+p+1)}{p+1} = \frac{ns - (s-p-1)(s+1)}{p+1}$$

R_p , dus een $p+1 \tau_n^s$ is bepaald door evenveel R_p als punten, terwijl een $p+1 \tau_n^s$ en een $p+1 \tau_n^{n-s+p}$ door een zelfde aantal punten of R_p bepaald worden.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Dr. GEORG SCHEFFERS behandelt in zijn „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Bd. II” het geval, dat in de uitdrukking voor de kromming van een oppervlak in een normaaldoorsnede

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r + 2 s m + t m^2}{1 + m^2}$$

teller en noemer een lineairen factor in m gemeen hebben en deze uitdrukking dus den vorm

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{a + b m}{c + d m}$$

aanneemt.

Het volgende voorbeeld, dat SCHEFFERS van dit geval geeft is onjuist gekozen.

Beispiel: Wir können auf folgende Art eine Fläche herstellen, die einen reellen Punkt von dieser besonderen Art

enthält: Wir construieren in den Ebenen durch die z -Axe alle Kreise, die im Anfangspunkt die xij -Ebene berühren und deren Mittelpunktshöhe $z = R$ linear gebrochen von der Tangente des Winkels der jeweiligen Ebene mit der xz -Ebene abhängt. Dan hat der Anfangspunkt auf der Fläche der Kreise die gewünschte Eigenschaft.

II.

$\binom{2s-2}{s}$ is deelbaar door $2s-2$ als s geen macht van 2 is.

III.

Door wenteling eener kromme om een raaklijn in een gewoon punt O dier kromme, ontstaat een omwentelingsoppervlak met een dubbelpunt in O.

IV.

In de uitdrukking

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

waarin $z = x + i y$, mag men in e niets anders zien dan een functieteekeu.

V.

TODHUNTER (The functions of Laplace, Lamé and Bessel § 7) vergeet, bij de ontwikkeling van $|1 - \alpha(2x - \alpha)|^{-\frac{1}{2}}$ in een reeks geordend naar de opklimmende machten van α , te vermelden, dat voldaan moet worden aan $|\alpha(2x - \alpha)| < 1$.

VI.

JORDAN (Cours d'Analyse, tome I, pag. 363) geeft het theorema:

„La fonction F (hypergeometrische reeks) et deux quelconques de ses contiguës sont liées par une équation lineaire ayant pour coefficients des polynômes du premier degré en x ”.

De wijze waarop hij dit theorema voor een bijzonder geval bewijst verdient geen aanbeveling.

VII.

De methode van C. J. BUSK (Nature Febr. 28, March 28, 1889)

om een getal in zijn priemfactoren te ontbinden, verklaart niet hoe FERMAT op een vraag van MERSENNE of 100895598169 een priemgetal was, kon antwoorden, dat dit niet het geval is, doch het bedoelde getal een product is van 898423 en 112303.

VIII.

Het paradoxale in de paradox van St. Petersburg is een gevolg daarvan, dat men het vraagstuk verkeerd gesteld heeft.

IX.

Si le gain espéré par une spéculation est 60000 fr. et que $\frac{1}{3}$ soit la probabilité de l'obtenir, la personne qui devra recevoir cette somme eventuelle pourra considérer le tiers de 60000 fr. comme un bien qu'il possède et que l'on devrait comprendre dans l'inventaire de sa fortune. (Poisson)

„Poisson va trop loin” zegt BERTRAND ten onrechte van deze uitspraak. (Calcul des Probabilités pag. 50.)

X.

De sterftestatistiek en de daarop gebaseerde levensverzekeringtarieven behooren internationaal geregeld te worden.

XI.

Een vaas bevat zwarte en witte ballen in onbekende verhouding. Elke verhouding is even waarschijnlijk. Men trekt μ malen een bal en krijgt m witte en n zwarte ballen. Welke is de waarschijnlijkheid dat de $(\mu + 1)^{\text{e}}$ trekking weer een witte bal oplevert?

$$\text{Deze is: } \frac{m + 1}{m + n + 2} \quad (\text{CONDORCET}).$$

BERTRAND zegt (Calcul des Probabilités pag. 173) over deze uitkomst:

„Les applications faites de cette formule ont été presque „toutes sans fondement”.

„Représentons-nous le premier homme au premier coucher „du Soleil. Il devrait, pendant sa première nuit, s’il raisonne „comme CONDORCET, assigner la valeur $\frac{2}{3}$ à la probabilité de „le revoir. S’il comprend la question et s’il se la pose, les „chances pour lui seront beaucoup moindres. Le Soleil a „disparu; s’il est éteint, qui le rallumera? S’il est tombé „dans la mer, comment en sortirait-il?”

„Sans avoir cependant la science parfaite que lui supposent „les théologiens, le premier homme se persuadera sans doute,

„après ceut apparitions, que le Soleil tourne autour de
 „la Terre, rien alors ne doit lui faire craindre un arrêt
 „brusque, l'absence du Soleil au cent et unième jour ne
 „l'étonnerait pas moins pue celle des objets éclairés chaque
 „matin par ses premiers rayons; faudra-t-il, en invoquant
 „la formule, supposer qu'après cent jours la probabilité de
 „les revoir est $\frac{101}{102}$? L'absurdité serait précisément la même.”

„Le lever du Soleil, après une année, sera pour le premier
 „homme une certitude”.

„Si le temps doit la confirmer et l'accroître, c'est par la
 „découverte des lois astronomiques et non par le succès
 „renouvelé d'un même jeu de hasard”.

Deze redeneering van BERTRAND is volkomen onjuist.

XII.

Terecht zegt Dr. L. IDELER in zijn Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, Bd. II., S. 321:

„Es ist sehr zu bedauern, dass GREGOR XIII nicht das Fest
 „(Ostern) an einerlei Sonntage, z. B. am letzten des März
 „oder ersten des Aprils, zu feiern angeordnet hat”.

XIII.

Tegen de verklaring van J. C. KAPTEIJN van de bewegingsverschijnselen, welke worden waargenomen in den nevel om Nova Perseï, n.l. dat men in dien nevel het licht, door Nova Perseï uitgestraald, zich ziet voortplanten, bestaan geen ernstige bezwaren.

XIV.

Het ware te wenschen, dat in Nederland van regeeringswege de Midden-Europeesche tijd werd ingevoerd.

XV.

GILBERT zegt in § 7 van zijn Cours de mécanique analytique:

„Nous disons que deux intervalles de temps sont égaux, lorsqu'un même corps, placé dans des conditions parfaitement identiques de part et d'autre, exécute pendant ces deux intervalles de temps, des mouvements identiques” en in § 8:

„Le mouvement d'un point est uniforme, lorsqu'il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, si petits que soient ces temps”.

Hij definiëert dus de gelijkheid van tijdsverloopen met behulp van de eenparige beweging en de eenparige beweging met behulp van de gelijkheid van tijdsverloopen.

XVI.

In „The thermal measurement of energy, Lectures by E. H. GRIFFITHS; Cambridge University Press 1901”, vindt men op blz. 50 de volgende proef beschreven:

In een U-vormige buis, waarvan de eene arm gesloten is, bevindt zich een hoeveelheid kwik. De lucht, welke zich in den gesloten arm boven het kwikniveau bevindt, staat door een ingesmolten buis in verbinding met een glazen ballon. Verhit men deze ballon, dan zet de lucht zich daarin uit en wordt de kwik in de open arm der U-vormige buis naar boven gedreven tot eindelijk een gedeelte van de lucht, welke zich in de gesloten arm bevindt, ontsnapt. Wanneer de verdunning der lucht in de gesloten arm een zekeren graad bereikt heeft, begint de kwik sterk te schommelen en blijft dit doen zoolang de ballon verhit wordt.

Bij deze proef moet de temperatuur in den gesloten arm constant blijven.





A.
1