Over eenige aantallen van kegelsneden die aan acht voorwaarden voldoen

https://hdl.handle.net/1874/254784

Over eenige aantallen van kegelsneden, - die aan acht voorwaarden voldoen. -

A. A. DALHUISEN.

Over eenige aantallen van kegelsneden,
- die aan acht voorwaarden voldoen. -

Over eenige aantallen van kegelsneden die aan acht voorwaarden voldoen

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. J. M. S. BALJON

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 17 April 1905 des namiddags ten 4 ure

DOOR

ALEIDA ALBERDINA DALHUISEN

geboren te KAMPEN

Stoomdrukkerij „de Industrie" J. VAN DRUTEN - Utrecht

1905

AAN MIJNEN VADER

EN

DE NAGEDACHTENIS MIJNER MOEDER

Gaarne maak ik van de mij hier aangeboden gelegenheid gebruik, om mijn hartelijken dank te betuigen aan de Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde voor hunne welwillende leiding bij mijne studiën, zoowel in als buiten de collegezaal. Dat een groot deel van dien welgemeenden dank U toekomt, Hooggeleerde J. de Vries, Hooggeachte Promotor, behoef ik U nauwelijks te verzekeren; Uwe belangstelling in mijn werk zal ik steeds dankbaar gedenken.

INHOUD.

INLEIDING.

§ 1.

In zijn „Kalkül der abzählenden Geometrie" geeft Dr. H. Schubert in Hoofdstuk IV, § 20, eenige tabellen, die een overzicht geven van aantallen kegelsneden, welke aan *acht* gegeven voorwaarden voldoen. Deze tabellen zijn afgeleid uit twee andere, welke aantallen ontaarde kegelsneden aanwijzen, die aan *zeven* voorwaarden voldoen. Die afleiding geschiedt met behulp van twee eenvoudige formules, die betrekkingen aangeven, welke bij stelsels kegelsneden tusschen de grootheden μ, ν, ρ, δ en η bestaan. Hierin stelt voor:

μ het aantal kegelsneden, waarvan het vlak door een gegeven punt gaat.
ν het aantal kegelsneden, die eene gegeven rechte snijden.
ρ het aantal kegelsneden, die een gegeven vlak aanraken.
δ eene ontaarding van den tweeden graad.
η eene ontaarding der tweede klasse.

Door Dr. Schubert zijn echter slechts enkele voorbeelden gegeven van de bepaling der uitkomsten, die in de tabellen der ontaardingen neergelegd zijn, en uit deze tabellen zijn *alleen* door berekening, met behulp van bovengenoemde formules, de aantallen kegelsneden afgeleid, die aan acht voorwaarden voldoen.

Daarom heb ik mij in dit proefschrift ten doel gesteld, eenige aantallen kegelsneden, die aan acht gegeven voorwaarden voldoen, te bepalen enkel met behulp van het beginsel van het behoud van het aantal en tevens de geheele afleiding van de tabellen voor de ontaarde kegelsneden hierin te geven.

Hierbij heb ik gebruik gemaakt van eenige, in die richting verkregen resultaten, die door Prof. Dr. J. DE VRIES reeds zijn neergelegd in eene mededeeling: „Over het aantal kegelsneden, die acht gegeven rechten snijden" (Verslagen Kon. Academie van Wetenschappen te *Amsterdam*, X, 1901, bl. 192) en op deze uitkomsten heb ik verder voortgebouwd.

Tevens heb ik een onderzoek ingesteld naar de oppervlakken, die ontstaan uit stelsels van ∞^1 vele kegelsneden, die aan zeven voorwaarden voldoen.

§ 2.

Als men de aantallen kegelsneden zoekt, die voldoen aan de voorwaarden $\mu^m \nu^n \rho^r$, waarin $m + n + r = 8$, krijgt men voor de mogelijke waarden van m, n en r de volgende tabel:

$\mu^3 \nu^5$	$\mu^2 \nu^6$	$\mu \nu^7$	ν^8
$\mu^3 \nu^4 \rho$	$\mu^2 \nu^5 \rho$	$\mu \nu^6 \rho$	$\nu^7 \rho$
$\mu^3 \nu^3 \rho^2$	$\mu^2 \nu^4 \rho^2$	$\mu \nu^5 \rho^2$	$\nu^6 \rho^2$
$\mu^3 \nu^2 \rho^3$	$\mu^2 \nu^3 \rho^3$	$\mu \nu^4 \rho^3$	$\nu^5 \rho^3$
$\mu^3 \nu \rho^4$	$\mu^2 \nu^2 \rho^4$	$\mu \nu^3 \rho^4$	$\nu^4 \rho^4$
$\mu^3 \rho^5$	$\mu^2 \nu \rho^5$	$\mu \nu^2 \rho^5$	$\nu^3 \rho^5$
	$\mu^2 \rho^6$	$\mu \nu \rho^6$	$\nu^2 \rho^6$
		$\mu \rho^7$	$\nu \rho^7$
			ρ^8

Hierin stelt voor:

μ het aantal kegelsneden, waarvan het vlak door een bepaald punt gaat.

ν het aantal kegelsneden, die eene gegeven rechte snijden.

ρ het aantal kegelsneden, die een gegeven vlak aanraken.

Deze tabel zal nu berekend worden volgens het beginsel van het behoud van het aantal. Dit beginsel luidt aldus:

Het aantal figuren, dat aan bepaalde voorwaarden voldoet, verandert niet of wordt oneindig groot, als men de voorwaarden continu wijzigt.

Als men met behulp van dit beginsel de tabel zoekt, moet men uitkomsten gebruiken, verkregen in twee andere tabellen, die hier volgen:

$P^2 \nu^4$	$P \mu \nu^5$	$P \nu^6$
$P^2 \nu^3 \rho$	$P \mu \nu^4 \rho$	$P \nu^5 \rho$
$P^2 \nu^2 \rho^2$	$P \mu \nu^3 \rho^2$	$P \nu^4 \rho^2$
$P^2 \nu \rho^3$	$P \mu \nu^2 \rho^3$	$P \nu^3 \rho^3$
$P^2 \rho^4$	$P \mu \nu \rho^4$	$P \nu^2 \rho^4$
	$P \mu \rho^5$	$P \nu \rho^5$
		$P \rho^6$

$T \mu \nu^4$	$T \nu^5$
$T \mu \nu^3 \rho$	$T \nu^4 \rho$
$T \mu \nu^2 \rho^2$	$T \nu^3 \rho^2$
$T \mu \nu \rho^3$	$T \nu^2 \rho^3$
$T \mu \rho^4$	$T \nu \rho^4$
	$T \rho^5$

Hierin stelt voor:

P het aantal kegelsneden, die door een gegeven punt gaan.
T het aantal kegelsneden, die eene gegeven rechte aanraken.
μ, ν en ρ hebben dezelfde beteekenis als in de eerstgenoemde tabel.

Wij gaan nu eerst de laatstgenoemde tabellen zoeken.

HOOFDSTUK I.

Bepaling der aantallen

$P^2 \nu^n \rho^r$, $P\mu^m \nu^n \rho^r$, $T\mu^m \nu^n \rho^r$.

§ 1.

$P^2 \nu^4$. De voorwaarde P^2 geeft aan, dat de kegelsneden door twee gegeven punten P_1 en P_2 moeten gaan. Verder moeten ze vier gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 snijden.

Legt men drie van deze stralen, b.v. ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan ligt in een willekeurig vlak door P_1 P_2 geene kegelsnede, die aan de vraag voldoet, omdat ze den doorgang van ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 met P_1 en P_2 moet verbinden. Dit is alleen mogelijk, wanneer de vier doorgangen collineair zijn of als twee dier doorgangen samenvallen.

Het eerste gebeurt, als men een vlak legt door $P_1 P_2$ en den doorgang van ν_4 op Φ. In dit vlak voldoet dan het samenstel der rechte $P_1 P_2$ met de rechte, die haar doorgang op Φ met den doorgang van ν_4 verbindt.

Het tweede gebeurt, als men een vlak legt door $P_1 P_2$ en een der drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3. In elk dezer vlakken ligt eene eigenlijke kegelsnede, die voldoet en op deze wijze vindt men dus nog drie oplossingen.

In het geheel voldoen dus *vier* antwoorden aan de vraag. Volgens het genoemde beginsel van het behoud van het aantal is dus

$$P^2 \nu^4 = 4.$$

$P^2 \nu^3 \rho$. De kegelsneden moeten weer door twee gegeven punten P_1 en P_2 gaan, verder drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 snijden en een vlak ρ aanraken.

Legt men ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan kan men het vlak aanbrengen door P_1, P_2 en een der drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3. In dit vlak zoekt men het snijpunt met de overblijvende ν en de snijlijn met ρ. Men vindt dan hierin *twee* kegelsneden door vier punten, die eene rechte aanraken. Men vindt *drie* zulke vlakken, dus $3 \times 2 = 6$ oplossingen.

Hier is geene ontaarding van den tweeden graad mogelijk, omdat dan uit een punt van ρ eene rechte getrokken zou moeten worden naar P_1 of P_2, die tevens op eene der rechten ν moest rusten. Dus heeft men:

$$\underline{P^2 \nu^3 \rho = 6.}$$

$\underline{P^2 \nu^2 \rho^2}$. De kegelsneden gaan weer door de punten P_1 en P_2, snijden twee gegeven stralen ν_1 en ν_2 en raken twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aan.

Laat men de rechte $P_1 P_2$ snijden door ν_1, dan voldoen alleen kegelsneden in het vlak, gebracht door $P_1 P_2$ en ν_1. Zooals later bepaald wordt, is de waarde van $\mu^3 \nu^3 \rho^2$ *vier;* er liggen dus in genoemd vlak vier kegelsneden door drie punten, die twee rechten aanraken en ieder is dubbel te tellen, omdat zij ν_1 tweemaal snijdt. Dit geeft dus *acht* eigenlijke kegelsneden, die voldoen.

Hier voldoen geene ontaardingen aan de vraag, omdat $P_1 P_2$ niet gesneden wordt door ν_2 en door de snijlijn l van ρ_1 en ρ_2, en er uit een punt van l geene rechte door P_1 of P_2 mogelijk is, die tevens op ν_2 rust.

Dus dan vindt men ook in het algemeen:

$$\underline{P^2 \nu^2 \rho^2 = 8.}$$

$\underline{P^2 \nu \rho^3}$. De kegelsneden moeten door P_1 en P_2 gaan, eene gegeven rechte ν snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Men laat hier weer $P_1 P_2$ door ν snijden, dan voldoen alleen kegelsneden in het vlak door $P_1 P_2$ en ν gebracht. Zooals later bepaald wordt, is de waarde van $\mu^3 \nu^2 \rho^3$ *vier;* er liggen dus in genoemd vlak vier kegelsneden door twee punten, welke drie rechten aanraken. Iedere kegelsnede is dubbel in rekening te brengen, omdat zij ν_1 tweemaal snijdt. Zoo vindt men dus *acht* oplossingen.

Hier voldoen geene ontaardingen, omdat het snijpunt der drie vlakken ρ niet op de rechte $P_1 P_2$ ligt en men uit dit snijpunt ook geene rechte naar P_1 of P_2 kan trekken, die tevens op ν rust. Dus is

$$\underline{P^2 \nu \rho^3 = 8.}$$

$\underline{P^2 \rho^4.}$ De kegelsneden gaan door P_1 en P_2 en moeten vier vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 aanraken.

Men legt hier drie vlakken, ρ_1, ρ_2, ρ_3, door eene rechte l, dan zal geene eigenlijke kegelsnede aan de vraag kunnen voldoen. Immers deze zou door P_1 en P_2 moeten gaan en l aanraken, wat in het algemeen onmogelijk is, omdat l en $P_1 P_2$ niet in één vlak liggen.

Eenig vlak door $P_1 P_2$ gebracht, geeft in de snijlijnen met ρ_1, ρ_2, ρ_3 drie raaklijnen, die door één punt gaan. De kegelsnede moet dus ontaarden en daar ook ρ_4 moet aangeraakt worden, is de eenig mogelijke oplossing eene ontaarding van den tweeden graad in het vlak door $P_1 P_2$ en het snijpunt van ρ_4 met l. Deze zal achtmaal in rekening gebracht moeten worden. Immers de rechte l is als snijlijn van *twee* der vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 bepaald, dus moeten ook slechts twee dezer vlakken voor de ontaarding dubbel in rekening gebracht worden. Ook ρ_4 gaat door het dubbelpunt, zoodat deze ontaarding achtmaal te tellen is.

Er voldoen hier geene ontaardingen der tweede klasse, omdat $P_1 P_2$ de rechte l niet snijdt.

In het geheel zijn er dus *acht* oplossingen, zoodat men heeft:

$$\underline{P^2 \rho^4 = 8.}$$

§ 2.

$\underline{P \mu \nu^5.}$ Hier moet het vlak der kegelsneden door een gegeven punt μ gaan, terwijl de kegelsneden zelf door een gegeven punt P moeten gaan en vijf stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 moeten snijden.

Legt men drie van de vijf stralen in een vlak ϕ, dan kan men een vlak aanbrengen door P, door μ en door een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3. In dit vlak bepaalt men de snijpunten met de overige drie rechten en vindt dan door vijf punten éene kegelsnede, die voldoet. Zoo zijn er in het geheel *drie*.

Verder kan men de transversaal t leggen uit P op ν_4 en ν_5; vervolgens brengt men een vlak door μ en t, dan snijdt dit vlak het vlak Φ volgens eene rechte, die met t eene ontaarding van den tweeden graad vormt, welke voldoet.

Legt men eindelijk het vlak door μ, door P en door het snijpunt Q_4 van ν_4 met Φ, dan kan men de snijlijn bepalen van dit vlak (μ P Q_4) met het vlak Φ. Zij deze snijlijn de lijn t', dan legt men uit P eene transversaal op t' en op ν_5 en deze vormt met t' eene ontaarding van den tweeden graad, die voldoet. Zoo vindt men ook eene ontaarding in het vlak door P, μ en Q_5, welk laatste punt de doorgang van ν_5 op Φ is.

In het geheel zijn er dus *zes* oplossingen, waaruit volgt

$$\underline{P \mu \nu^5 = 6.}$$

$\underline{P \mu \nu^4 \rho.}$ Hier moeten de kegelsneden door een gegeven punt P gaan, vier stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 snijden en een vlak ρ aanraken, terwijl haar vlak door een punt μ gaat.

Legt men weer ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan voldoet elke kegelsnede in het vlak, gebracht door P, μ en een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke de overige stralen snijdt en het vlak ρ aanraakt. Men vindt *twee* kegelsneden in genoemd vlak, die door vier gegeven punten gaan en den doorgang van ρ met dit vlak aanraken. Daar ν_1, ν_2, ν_3 drie snijpunten hebben, vindt men op deze wijze $3 \times 2 = 6$ oplossingen.

Legt men een transversaal t uit P op ν_4 en den doorgang l van ρ met Φ, dan kan men een vlak brengen door μ en t. Dit vlak snijdt Φ in eene rechte t', die met t een lijnenpaar vormt, dat men dubbel moet tellen, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat.

Brengt men eindelijk het vlak door P, μ en den doorgang Q_4 van ν_4 met Φ, dan snijdt dit vlak het vlak Φ in eene rechte t''. Men verbindt P met het snijpunt van t'' en ρ door eene rechte t''', dan vormt t''' met t'' een lijnenpaar, dat eveneens dubbel is te tellen.

In het geheel zijn er dus $6 + 2 + 2 = 10$ oplossingen, zoodat men heeft

$$\underline{P \mu \nu^4 \rho = 10.}$$

$\underline{P \mu \nu^3 \rho^2}$. De kegelsneden moeten door P gaan, drie rechten ν_1, ν_2, ν_3 snijden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken, terwijl haar vlak door een gegeven punt μ gaat.

Legt men ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ, dan kan men een vlak χ aanbrengen door P, μ en een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3. In dit vlak χ liggen dan *vier* kegelsneden, welke door P, het genoemde snijpunt en den doorgang der overblijvende rechte gaan, terwijl zij de doorgangen van ρ_1 en ρ_2 met χ aanraken. Daar er drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3 zijn, vindt men op deze wijze $3 \times 4 = 12$ oplossingen.

Legt men het vlak door P, door het snijpunt van ϕ met de doorsnede l van ρ_1 en ρ_2 en door het punt μ, dan snijdt dit vlak het vlak ϕ in eene rechte t. Verbindt men dan P met het snijpunt van t en l door eene rechte t', dan vormt t' met t een lijnenpaar, dat voldoet en viermaal is te tellen, omdat ρ_1 en ρ_2 door haar dubbelpunt gaan.

Eene ontaarding der tweede klasse is hier niet mogelijk, omdat uit P geene rechte kan rusten op ν_1, ν_2, ν_3.

Dus in het geheel zijn er $12 + 4 = 16$ oplossingen, zoodat men vindt:

$$\underline{P \mu \nu^3 \rho^2 = 16.}$$

$\underline{P \mu \nu^2 \rho^3}$. De kegelsneden moeten door P gaan, twee stralen ν_1 en ν_2 snijden en drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken, terwijl haar vlak door een punt μ gaat.

Legt men ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan kan men een transversaal t leggen uit P op ν_1 en l; brengt men een vlak door μ en t, dan snijdt dit vlak de rechte ν_2 in een punt Q_2; verbindt men Q_2 met het snijpunt van t en l, dan vormt deze rechte met t eene ontaarding van den tweeden graad, die voor *vier* is te tellen. Immers de rechte l is als snijlijn van twee der drie vlakken ρ volkomen bepaald en elk vlak door l is raakvlak aan de kegelsnede. De beide bepalende vlakken ρ, die door het dubbelpunt der ontaarding gaan, maken, dat deze ontaarding viermaal in rekening gebracht moet worden.

Daar men eene dergelijke oplossing vindt met de transversaal uit P op ν_3 en l, zijn dit samen *acht* oplossingen.

Beschouwt men het regelvlak van den tweeden graad door ν_1, ν_2, l, dan moet men door de rechte P μ een raakvlak aan dit quadratische regelvlak aanbrengen. Dit is op twee manieren mogelijk, en t_1 is zoodoende op twee manieren bepaald. Men zoekt nu de beide snijpunten van deze rechten met l, en verbindt deze met P. Zoo vindt men dus *twee* ontaardingen, die elk voor *vier* zijn te tellen; dit geeft weer 8 oplossingen.

In het geheel zijn er dus 16, zoodat

$$\underline{P \mu \nu^2 \rho^3 = 16.}$$

$\underline{P \mu \nu \rho^4}$. Hier gaan de kegelsneden door P, snijden ν_1 en ν_2 en raken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aan, terwijl haar vlak door een punt μ gaat.

Legt men ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan brengt men het vlak door P, μ en het snijpunt S van l met ρ_4. Dit vlak snijdt ν in een punt Q. Verbindt men S met P en met Q, dan voldoet deze ontaarding van den tweeden graad en is voor *acht* te tellen, omdat l door twee der drie vlakken ρ bepaald is en ρ_4 tevens door het dubbelpunt gaat.

Legt men verder de transversaal uit P op ν en l, dan voldoet deze ontaarding der tweede klasse, want haar vlak is bepaald, omdat dit nog door μ moet gaan. Ze geldt voor vier oplossingen, omdat ze ν dubbel snijdt en dubbel door P gaat.

In het geheel zijn er dus 12 oplossingen en men heeft dus:

$$\underline{P \mu \nu \rho^4 = 12.}$$

$\underline{P \mu \rho^5}$. Hier moeten de kegelsneden door een punt P gaan en vijf vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken, terwijl haar vlak door μ zal gaan.

Legt men weer ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan voldoet vooreerst de ontaarding der tweede klasse, gevormd door de verbindingslijn t van P met het snijpunt S van l en ρ_4. Haar vlak is bepaald, daar dit door μ gaat, en de straalpunten liggen in S en in het snijpunt van t met ρ_5. Deze ontaarding is dubbel te tellen, omdat zij tweemaal door P gaat.

Zoo vindt men er nog eene, als men P met het snijpunt van l en ρ_5 verbindt.

Legt men eindelijk de transversaal uit P op l en op de snijlijn van ρ_4 en ρ_5, dan vormt deze transversaal ook eene ontaarding der tweede klasse die dubbel te tellen is en waarvan het vlak bepaald is, omdat het door μ gaat. De straalpunten liggen op l en op de snijlijn van ρ_4 en ρ_5.

In het geheel vindt men dus 6 oplossingen, zoodat

$$P \mu \rho^5 = 6.$$

§ 3.

$P \nu^6$. Het aantal kgelsneden, die door een gegeven punt P gaan en zes stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ snijden, kan men vinden, door ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ te leggen.

Eigenlijke kegelsneden vindt men, als ze door P en een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3 gaan en de overige vier rechten snijden. Volgens de gevonden waarde voor $P^2 \nu^4$ is dit aantal *vier* voor elk der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3; dus in 't geheel vindt men zoo *twaalf* oplossingen.

Legt men de transversaal uit P op ν_4 en ν_5, dan snijdt deze het vlak Φ in een punt S; verbindt men S met den doorgang Q_6 van ν_6 met Φ, dan vormen deze beide rechten een lijnenpaar dat voldoet. Men vindt er *drie* op deze wijze omdat men ν_4, ν_5, ν_6 op drie wijzen twee aan één kan combineeren.

Verbindt men de snijpunten Q_5 en Q_6 van ν_5 en ν_6 met Φ en legt men de transversaal uit P op ν_4 en deze verbindingslijn, dan vormt deze transversaal met die verbindingslijn een lijnenpaar. Ook hier vindt men er drie.

In het geheel zijn er dus 12 eigenlijke en 6 ontaarde kegelsneden, zoodat

$$P \nu^6 = 18.$$

$P \nu^5 \rho$. De kegelsneden moeten door P gaan, verder vijf stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ snijden en een vlak ρ aanraken.

Legt men weer drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ, dan voldoen vooreerst alle kegelsneden door P en een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke op de overige drie rechten rusten en ρ aanraken. Volgens de gevonden waarde voor $P^2 \nu^3 \rho$ is dit voor elk der snijpunten van ν_1, ν_2 en ν_3 *zes*, dus voor alle samen 18.

Legt men de transversaal t uit P op ν_4 en op de snijlijn l van ρ met ϕ en vervolgens uit het snijpunt van t en l de transversaal t' naar het snijpunt Q_5 van ν_5 met ϕ, dan vormen t en t' een lijnenpaar, dat dubbel te tellen is, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat. Zoo vindt men er nog een, dus dit geeft samen *vier* oplossingen.

Verbindt men de snijpunten Q_4 en Q_5 van ν_4 en ν_5, dan snijdt deze verbindingslijn den doorgang l in een punt S. S met P verbonden geeft dan de tweede rechte van een lijnenpaar, dat voldoet en dubbel te tellen is, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat.

In het geheel vindt men dus $18 + 4 + 2 = 24$ oplossingen, zoodat

$$\underline{P \, \nu^5 \, \rho = 24.}$$

$\underline{P \, \nu^4 \, \rho^2.}$ De kegelsneden moeten door P gaan, vier stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken.

Legt men weer ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ, dan voldoen vooreerst alle kegelsneden door P en een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke de overige twee rechten snijden en ρ_1 en ρ_2 aanraken. Volgens de gevonden waarde voor $P^2 \nu^2 \rho^2$ is dit aantal voor elk der drie snijpunten *acht*, dus in het geheel vindt men op deze wijze 24 oplossingen.

Als de doorsnede van ρ_1 en ρ_2 het vlak ϕ in een punt S snijdt, verbindt men P met S. Deze rechte wordt tot een lijnenpaar aangevuld door de verbindingslijn van S met den doorgang Q_4 van ν_4 met ϕ. Deze oplossing geldt voor *vier*, omdat ρ_1 en ρ_2 door haar dubbelpunt gaan.

Men vindt dus $24 + 4 = 28$ oplossingen, zoodat

$$\underline{P \, \nu^4 \, \rho^2 = 28.}$$

$P\nu^3\rho^3$. Hier gaan de kegelsneden door P, snijden drie gegeven rechten ν_1, ν_2, ν_3 en raken aan drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Legt men ν_1, ν_2, ν_3 weer in een vlak Φ, dan voldoen alle kegelsneden door P en elk der drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke de overblijvende rechte snijden en ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken. Volgens de gevonden waarde voor $P^2\nu\rho^3$ is dit aantal voor elk der snijpunten *acht*, dus in 't geheel $3 \times 8 = 24$.

Hier voldoet geene ontaarding van den tweeden graad, omdat het snijpunt van ρ_1, ρ_2, ρ_3 niet in Φ ligt en uit een punt geene rechte kan gaan, die op drie stralen rust. Ook voldoet geene ontaarding der tweede klasse, want eene rechte kan uit een punt niet op vier stralen rusten. Dus is

$$P\nu^3\rho^3 = 24.$$

$P\nu^2\rho^4$. De kegelsneden moeten door P gaan, twee stralen ν_1 en ν_2 snijden en vier vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken.

Legt men hier drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan voldoen vooreerst kegelsneden in het vlak door P en l gebracht. Hierin vindt men behalve P nog de twee snijpunten met ν_1 en ν_2 en behalve l nog den doorgang met ρ_4. Er zijn *vier* kegelsneden door drie punten, welke twee rechten raken, maar elk van deze oplossingen moet dubbel geteld worden, daar de raaklijn l hier dubbel in rekening moet worden gebracht. Daarom vindt men op deze wijze $4 \times 2 = 8$ oplossingen.

Ook voldoet de ontaarding van den tweeden graad, die gevormd wordt door de rechte, gaande door P en het snijpunt Q van $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ en de rechte uit Q op ν_1 en ν_2. Deze oplossing is voor acht te tellen, want de rechte l is dubbel te tellen en ρ_4 gaat door het dubbelpunt.

In het geheel vindt men dus $8 + 8 = 16$ oplossingen, zoodat

$$P\nu^2\rho^4 = 16.$$

$P\nu\rho^5$. Door P moeten de kegelsneden gaan; verder moeten ze eene rechte ν snijden en vijf vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken.

Legt men ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan voldoen hier alleen kegelsneden in het vlak door P en l. Hierin zijn *vier* kegelsneden door twee punten, die drie rechten raken. Elk moet echter dubbel geteld worden, omdat ook hier de rechte l weer dubbel te tellen is.

Eene ontaarding is hier niet mogelijk, want $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ gaan niet door één punt en uit P kan geene rechte gaan op ν_1 en verder door de twee snijpunten van l met ρ_4 en ρ_5 of naar ν_1, l en de snijlijn van ρ_4 en ρ_5. Dus is

$$\underline{P\,\nu\,\rho^5 = 8.}$$

$\underline{P\,\rho^6.}$ Hier moeten de kegelsneden door P gaan en verder zes gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ aanraken.

Legt men weer drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan voldoen alleen kegelsneden in het vlak, gebracht door P en l. In dit vlak liggen het punt P en behalve l nog de drie doorgangen van ρ_4, ρ_5, ρ_6. Men vindt dus hierin *twee* kegelsneden, die door een punt gaan en vier rechten aanraken, maar ze zijn dubbel te tellen, omdat de rechte l weer dubbel als raaklijn moet worden opgevat. Dit geeft dus $2 \times 2 = 4$ oplossingen.

Eene ontaarding voldoet hier niet, omdat $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ elkaar niet in één punt snijden en er ook geene transversaal mogelijk is uit P naar l en door het snijpunt van ρ_4, ρ_5, ρ_6 of door 't snijpunt van $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ en op de snijlijn van ρ_5 en ρ_6. Dus is

$$\underline{P\,\rho^6 = 4.}$$

§ 4.

$\underline{T\,\mu\,\nu^4.}$ De voorwaarde T geeft aan, dat de kegelsneden eene gegeven rechte t moeten aanraken. De kegelsneden moeten dus liggen in eenig vlak door t. Daar haar vlak eveneens door een gegeven punt μ gaat, is het vlak dus volkomen bepaald. Verder moeten de kegelsneden vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden.

Men legt drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 zoodanig, dat de snijpunten Q_1, Q_2, Q_3 met het vlak Φ der kegelsneden in eene rechte n liggen en zoekt verder het snijpunt Q_4 van ν_4 met Φ. Dan voldoet als eenige oplossing de rechte n met de verbindingslijn van Q_4 met het snijpunt van n en t. Deze ontaarding van den tweeden graad is dubbel te tellen, daar t door het dubbelpunt gaat. Zij is ondubbelzinnig bepaald en eene eigenlijke kegelsnede voldoet niet, omdat drie punten in eene rechte liggen. Dus is

$$T \mu \nu^4 = 2.$$

$T \mu \nu^3 \rho$. Het vlak ϕ der kegelsneden is weer bekend door de rechte t en het punt μ. Verder moeten de kegelsneden drie gegeven rechten ν_1, ν_2, ν_3 snijden en een vlak ρ aanraken.

Men legt t door het snijpunt Q van ν met het vlak ϕ en tevens daardoor de snijlijn l van ρ met ϕ. Verder zoekt men de snijpunten Q_2 en Q_3 van ν_2 en ν_3 met ϕ. Nu voldoet alleen de ontaarding van den tweeden graad, gevormd door de rechten $Q_1 Q_2$ en $Q_1 Q_3$. Deze geldt echter voor *vier*, daar er twee raaklijnen door haar dubbelpunt gaan. Zij is ondubbelzinnig bepaald en er voldoet hier geen eigenlijke kegelsnede, omdat er twee raaklijnen door een punt der kegelsnede gaan.

Men vindt dus:

$$T \mu \nu^3 \rho = 4.$$

$T \mu \nu^2 \rho^2$. De rechte t en het punt μ bepalen weer het vlak ϕ der kegelsneden. Bovendien moeten de kegelsneden twee gegeven stralen ν_1 en ν_2 snijden en twee gegeven vlakken, ρ_1 en ρ_2, aanraken. Men legt hier de snijlijnen l_1 en l_2 van ρ_1 en ρ_2 met ϕ door het snijpunt Q_1 van ν_1 met ϕ. Verder zoekt men het snijpunt Q_2 van ν_2 met ϕ. Dan voldoet hier alleen de ontaarding der tweede klasse $Q_1 Q_2$, die voor *vier* oplossingen geldt, daar ν_1 en ν_2 dubbel worden gesneden. Deze ontaarding is ondubbelzinnig bepaald en daar er ook hier geene eigenlijke kegelsnede voldoet, heeft men

$$T \mu \nu^2 \rho^2 = 4.$$

$T \mu \nu \rho^3$. De voorwaarden T, μ bepalen weer het vlak ϕ der kegelsneden, en deze moeten dan eene gegeven rechte ν snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Men legt ρ_1 en ρ_2 zóó, dat hare snijlijnen l_1 en l_2 met het vlak Φ door het snijpunt Q van ν met Φ gaan. Verder zoekt men de snijlijn l_3 van ρ_3 met Φ. Hier voldoet alleen de ontaarding der tweede klasse, gevormd door de verbindingslijn van Q met het snijpunt van l_3 en t. Deze is dubbel te tellen, daar zij ν dubbel snijdt, en daar zij ondubbelzinnig bepaald is en er hier geene eigenlijke kegelsnede voldoet, is

$$\underline{T \, \mu \, \nu \, \rho^3 = 2.}$$

$\underline{T \, \mu \, \rho^4.}$ Weer is het vlak Φ bekend en de kegelsneden moeten vier gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 aanraken.

Men legt ρ_1, ρ_2, ρ_3 zoo, dat hun snijpunt in Φ valt; dan zoekt men den doorgang l_4 van ρ_4 met Φ. De eenige oplossing is de ontaarding der tweede klasse, gevormd door de rechte, die het snijpunt van ρ_1, ρ_2, ρ_3 verbindt met het snijpunt van l_4 en de gegeven raaklijn t. Deze oplossing is ondubbelzinnig bepaald.

Er voldoet hier geene eigenlijke kegelsnede, daar drie raaklijnen door een punt gaan. Men vindt dus

$$\underline{T \, \mu \, \rho^4 = 1.}$$

§ 5.

$\underline{T \, \nu^5.}$ Hier moeten de kegelsneden een gegeven rechte t aanraken en vijf stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 snijden.

Laat men t snijden door ν_1 en ν_2, dan voldoen vooreerst kegelsneden in het vlak gebracht door t en ν_1 en in dat door t en ν_2. In elk vlak vindt men ééne kegelsnede door vier punten, die t aanraakt, omdat een dezer punten op t ligt en dus het raakpunt is. Deze ééne oplossing zal echter dubbel gerekend moeten worden, omdat zij als twee samengevallen kegelsneden beschouwd moet worden. Als n.l de vier punten buiten t liggen, voldoen twee kegelsneden; laat men een dezer punten tot t naderen, dan verschillen deze twee kegelsneden steeds minder en valt het punt op t, dan zijn ze samengevallen. Daar tevens ν_1 of ν_2 dubbel gesneden wordt, geeft dit voor beide vlakken samen 8 oplossingen, die voldoen.

Legt men eene transversaal op t, ν_3, ν_4, ν_5, dan vormt deze transversaal met t eene ontaarding van den tweeden graad.

Er zijn twee transversalen op de vier rechten en elke oplossing is dubbel te tellen, omdat de raaklijn t door het dubbelpunt gaat. Zoo vindt men dus nog *vier* oplossingen.

In het geheel zijn er 12 oplossingen, dus vindt men

$$T \nu^5 = 12.$$

$T \nu^4 \rho$. De kegelsneden moeten eene rechte t raken, vier stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en een vlak ρ aanraken. Men laat t weer snijden door ν_1 en ν_2, dan voldoen vooreerst kegelsneden in de vlakken door t en ν_1 en door t en ν_2. In elk dier vlakken zijn tweemaal twee samengevallen kegelsneden, omdat ook hier een der snijpunten op t ligt. Elke oplossing is dubbel te tellen, daar ν_1 of ν_2 tweemaal gesneden wordt. Zoo vindt men dus 16 oplossingen.

Verder voldoet de rechte t met de transversaal uit het snijpunt van t met ρ_4 naar ν_3 en ν_4; deze oplossing moet viermaal in rekening worden gebracht, omdat t en ρ_4 door het dubbelpunt gaan.

In het geheel zijn er dus $16 + 4 = 20$ oplossingen, zoodat men heeft

$$T \nu^4 \rho = 20.$$

$T \nu^3 \rho^2$. Weer raken de kegelsneden eene rechte t; verder snijden zij drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 en raken twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aan.

Men laat t weer snijden door ν_1 en ν_2, dan voldoen vooreerst kegelsneden in het vlak door t en ν_1, die door twee punten gaan en drie rechten aanraken. Dit zijn hier tweemaal twee samengevallen kegelsneden, die elk dubbel te tellen zijn, daar zij ν_1 dubbel snijden. Zoo vindt men dus *acht* oplossingen; ook zijn er acht in het vlak door t en ν_2, dus in het geheel 16 oplossingen.

Hier voldoet geene ontaarding van den tweeden graad, omdat t de snijlijn van ρ_1 en ρ_2 niet snijdt.

Ook voldoet geene ontaarding der tweede klasse, want eene rechte kan niet op vijf stralen rusten. Dus is

$$T \nu^3 \rho^2 = 16.$$

$\underline{T \nu^2 \rho^3}$. Weer raken de kegelsneden aan t, verder aan drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 en zij snijden twee stralen ν_1 en ν_2.

Men laat t weer snijden door ν_1 en ν_2, dan voldoen alleen kegelsneden in de vlakken door t en ν_1, en t en ν_2. In elk dier vlakken ligt ééne kegelsnede, die als twee samengevallen kegelsneden te beschouwen is. Zij snijdt ν_1 of ν_2 dubbel en is dus voor *vier* te tellen. In beide vlakken samen geeft dit dus *acht* oplossingen.

Er voldoet hier geene ontaarding van den tweeden graad, omdat t niet door het snijpunt van ρ_1, ρ_2, ρ_3 gaat.

Evenmin voldoet eene ontaarding der tweede klasse, want uit een punt is geen rechte te trekken, die op drie gegeven rechten rust. Dus is

$$\underline{T\,\nu^2\,\rho^3 = 8.}$$

$\underline{T \nu \rho^4}$. De rechte t wordt aangeraakt door de kegelsneden en deze moeten tevens op een straal ν rusten en vier vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 aanraken.

Men laat t snijden door de snijlijnen l_{12} en l_{34} van ρ_1 en ρ_2 en van ρ_3 en ρ_4, achtereenvolgens in de punten P_{12} en P_{34}. Als men het vlak brengt door t en l_{12}, voldoet hierin de ontaarding der tweede klasse, die gevormd wordt door de verbindingslijn n van P_{34} met het snijpunt van genoemd vlak met ν. Deze ontaarding is dubbel te tellen, omdat zij de rechte ν tweemaal ontmoet.

Eveneens vindt men zulk een dubbel te tellen ontaarding in het vlak door t en l_{34}. Dit geeft dus samen *vier* antwoorden.

Er voldoen hier geene eigenlijke kegelsneden en geene ontaardingen van den tweeden graad, zoodat

$$\underline{T\,\nu\,\rho^4 = 4.}$$

$\underline{T \rho^5}$. De kegelsneden moeten weer de rechte t aanraken en bovendien vijf gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5.

Weer legt men de snijlijnen l_{12} van ρ_1 en ρ_2 en l_{34} van ρ_3 en ρ_4 op de rechte t. Er voldoen hier alleen kegelsneden in de vlakken door t en l_{12} en door t en l_{34}. Als l_{12} de rechte t in P_{12}, en l_{34} haar in P_{34} snijdt, voldoet in het vlak door t en l_{12} alleen de ontaarding der tweede klasse, gevormd door de verbindingslijn van P_{34} met het snijpunt van l_{12} en ρ_5. Deze oplossing is enkelvoudig.

Zoo vindt men eveneens eene ontaarding der tweede klasse in het vlak door t en l_{34} en daar er verder geene eigenlijke kegelsneden en geene ontaardingen van den tweeden graad voldoen, is het totale aantal antwoorden hier twee. Dus is

$$\underline{T\,\rho^5 = 2.}$$

HOOFDSTUK II.

Bepaling der aantallen kegelsneden, die voldoen aan acht voorwaarden.

§ 1.

$\underline{\mu^3 \nu^5}$. De voorwaarde μ^3 geeft aan, dat het vlak der kegelsnede door drie gegeven punten gaat. Dit vlak is daardoor dus volkomen bepaald. Verder zoekt men de snijpunten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ met het vlak der kegelsnede.

Legt men P_1, P_2, P_3 op éene rechte, dan voldoet aan de vraag het samenstel van deze rechte met de verbindingslijn van P_4 en P_5 als ontaarding van den tweeden graad. Dit is blijkbaar de eenige oplossing, zoodat volgens het beginsel van het behoud van het aantal in het algemeen ook slechts éene oplossing voldoet. Dus is

$$\underline{\mu^3 \nu^5 = 1.}$$

$\underline{\mu^3 \nu^4 \rho}$. Door de voorwaarde μ^3 is weer het vlak der kegelsnede volkomen bepaald. Men zoekt de snijpunten P_1, P_2, P_3, P_4 van dit vlak met $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$. Tevens bepaalt men de snijlijn l van dit vlak met ρ.

Legt men de rechten ν_1, ν_2, ν_3 zóó, dat P_1, P_2, P_3 in eene rechte lijn t liggen, dan is t de eene rechte van een lijnenpaar, dat voldoet. Het dubbelpunt ligt in het snijpunt S van t en l en de andere rechte is de verbindingslijn van P_4 en S. Deze oplossing is blijkbaar slechts op éene wijze mogelijk, doch is dubbel te tellen, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat. Men vindt dus

$$\underline{\mu^3 \nu^4 \rho = 2.}$$

$\underline{\mu^3 \nu^3 \rho^2.}$ Hier is het vlak weer bepaald; de kegelsneden moeten drie gegeven rechten ν_1, ν_2, ν_3 snijden en twee gegeven vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken. Men zoekt de snijpunten P_1, P_2, P_3 van ν_1, ν_2, ν_3 met het vlak der kegelsnede en tevens de snijlijnen l_1 en l_2 van dit vlak met ρ_1 en ρ_2.

Kiest men ρ_1 en ρ_2 zóó, dat l_1 en l_2 door P_1 gaan, dan voldoet als eenige oplossing de ontaarding van den tweeden graad, gevormd door $P_1 P_2$ en $P_1 P_3$. Ze is voor *vier* te tellen, omdat er twee raakvlakken door haar dubbelpunt gaan, zoodat men heeft

$$\underline{\mu^3 \nu^3 \rho^2 = 4.}$$

$\underline{\mu^3 \nu^2 \rho^3.}$ Weer is het vlak bepaald en de kegelsneden moeten twee gegeven rechten ν_1 en ν_2 snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken. Men zoekt hier de snijpunten P_1 en P_2 van ν_1 en ν_2 met dit vlak der kegelsnede en de snijlijnen l_1, l_2, l_3 van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met dit vlak.

Men legt ρ_1 en ρ_2 zoodanig, dat l_1 en l_2 door P_1 gaan. Hier voldoet alleen de ontaarding der tweede klasse $P_1 P_2$, waarvan het eene straalpunt in P_1 en het andere in het snijpunt van $P_1 P_2$ met l_3 ligt. De oplossing is blijkbaar slechts op éene wijze mogelijk, maar is voor *vier* te tellen, omdat ν_1 en ν_2 dubbel gesneden worden. Men vindt dus:

$$\underline{\mu^3 \nu^2 \rho^3 = 4.}$$

$\underline{\mu^3 \nu \rho^4.}$ Het vlak is bekend en de kegelsneden moeten éene rechte ν snijden en vier gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken. Men zoekt de snijlijnen l_1, l_2, l_3, l_4 van het vlak μ^3 met $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ en het snijpunt P van ν met het vlak μ^3.

Men kiest ρ_1 en ρ_2 zóó, dat l_1 en l_2 door P gaan. De eenige oplossing is hier eene ontaarding der tweede klasse, gevormd door de verbindingslijn van P met het snijpunt Q van l_3 en l_4. De beide rangpunten zijn P en Q. De oplossing is dubbel te tellen omdat zij ν dubbel snijdt, dus is

$$\underline{\mu^3 \nu \rho^4 = 2.}$$

$\underline{\mu^3 \rho^5}$. Het vlak μ^3 is bekend en de kegelsneden moeten vijf gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken. Men zoekt de snijlijnen l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 van $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ met μ^3 en kiest ρ_1, ρ_2, ρ_3 zoo, dat l_1, l_2, l_3 elkaar in één punt snijden. Zij dit punt P en zij Q het snijpunt van l_4 en l_5, dan is P Q de eenige oplossing, die voldoet. De straalpunten van deze ontaarding liggen in P en Q, en daar deze oplossing enkelvoudig is, heeft men:

$$\underline{\mu^3 \rho^5 = 1.}$$

§ 2.

$\underline{\mu^2 \nu^6}$. De voorwaarde μ^2 zegt, dat de kegelsneden in vlakken liggen, die door twee gegeven punten, dus door eene gegeven rechte gaan. Verder moeten de gezochte kegelsneden zes gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ snijden.

Men kan hier de gegeven rechte μ^2 snijden door drie van de zes stralen, b.v. door ν_1, ν_2, ν_3. Kegelsneden, die aan de vraag voldoen, vindt men in de vlakken door μ^2 en ν_1, μ^2 en ν_2 en μ^2 en ν_3. Men zoekt dan de snijpunten van zulk een vlak, b.v. van vlak $(\mu^2 \nu_1)$, met de overige lijnen ν, dus hier met $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$. Door deze vijf snijpunten gaat éene kegelsnede, die echter dubbel geteld moet worden, daar zij ν_1 tweemaal snijdt. In de drie genoemde vlakken vindt men dus samen *zes* oplossingen; dit zijn eigenlijke kegelsneden.

Verder zijn er twee transversalen van $\mu^2, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ en elk van deze beide vormt met μ^2 eene ontaarding van den tweeden graad, die voldoet.

Er zijn dus zes eigenlijke en twee ontaarde oplossingen, zoodat men heeft

$$\underline{\mu^2 \nu^6 = 8.}$$

$\underline{\mu^2 \nu^5 \rho}$. Het vlak der kegelsnede moet weer gaan door eene bepaalde rechte μ^2. De kegelsneden moeten op vijf gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ rusten en een gegeven vlak ρ aanraken.

Laat men ook hier de rechte μ^2 snijden door drie stralen ν_1, ν_2, ν_3, dan voldoen kegelsneden in de vlakken door μ^2 en ν_1, μ^2 en ν_2 en μ^2 en ν_3. Men zoekt in zulk een vlak, b.v. in vlak $(\mu^2 \nu_1)$, de snijpunten P_2, P_3, P_4, P_5 met de overige stralen $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ en de snijlijn l met ρ. Er zijn in het vlak $(\mu^2 \nu_1)$ dan *twee* kegelsneden door P_2, P_3, P_4, P_5 die l raken; beide zijn dubbel te tellen, omdat zij ν_1 dubbel snijden. De drie genoemde vlakken bevatten dus $3 \times 4 = 12$ oplossingen in den vorm van eigenlijke kegelsneden.

Er voldoet hier ook eene ontaarde kegelsnede, want als men het snijpunt van μ^2 met ρ zoekt, vindt men daaruit ééne rechte, die op ν_4 en ν_5 rust. Deze rechte vormt met μ^2 eene ontaarding van den tweeden graad, die dubbel is te tellen, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat.

Men heeft dus 12 eigenlijke en twee ontaarde oplossingen, zoodat men vindt:

$$\underline{\mu^2 \nu^5 \rho = 14.}$$

$\underline{\mu^2 \nu^4 \rho^2.}$ De vlakken der kegelsneden gaan weer door de rechte μ^2; de kegelsneden moeten vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en twee gegeven vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken.

Men laat hier weer μ^2 snijden door ν_1, ν_2, ν_3. Kegelsneden, die aan de vraag voldoen, liggen in elk der vlakken door μ^2 en ν_1, μ^2 en ν_2 en μ^2 en ν_3. Men zoekt de snijpunten van zulk een vlak b.v. van vlak $(\mu^2 \nu_1)$ met ν_2, ν_3, ν_4 en de snijlijnen met ρ_1 en ρ_2.

In dit vlak $(\mu^2 \nu_1)$ vindt men dan volgens het vroeger gevondene *vier* kegelsneden door drie punten, welke twee rechten aanraken. Elke kegelsnede moet dubbel in rekening gebracht worden, omdat zij ν_1 tweemaal snijdt. In de drie genoemde vlakken vindt men dus $3 \times 8 = 24$ oplossingen in den vorm van eigenlijke kegelsneden.

Er voldoet hier geene ontaarding van den tweeden graad, omdat μ^2, ρ_1 en ρ_2 elkaar niet in één punt snijden.

Ook eene ontaarding der tweede klasse is niet mogelijk, want op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ kan geene rechte rusten. Dus is

$$\underline{\mu^2 \nu^4 \rho^2 = 24.}$$

$\underline{\mu^2 \nu^3 \rho^3.}$ Weer gaan de vlakken door μ^2; verder moeten de kegelsneden drie gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3 snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Laat men weer μ^2 snijden door ν_1, ν_2, ν_3, dan zullen kegelsneden, die aan de vraag voldoen, liggen in elk der vlakken door μ^2 en ν_1, μ^2 en ν_2 en μ^2 en ν_3. Van vlak $(\mu^2 \nu_1)$ zoekt men de snijpunten met ν_2 en ν_3 en de snijlijnen met ρ_1, ρ_2, ρ_3. In dit vlak liggen dan, volgens het vroeger gevondene, *vier* kegelsneden, die door twee punten gaan en drie rechten aanraken, maar elk is dubbel te tellen, daar zij ν_1 tweemaal snijdt. In de drie genoemde vlakken vindt men dus $3 \times 8 = 24$ oplossingen in den vorm van eigenlijke kegelsneden.

Er voldoen hier geene ontaardingen, omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3 de lijn μ^2 niet in één punt snijden en er geen transversaal mogelijk is op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ en op de snijlijn van twee vlakken ρ.

Men heeft dus

$$\underline{\mu^2 \nu^3 \rho^3 = 24.}$$

$\underline{\mu^2 \nu^2 \rho^4}$. Door de rechte μ^2 gaan de vlakken en de kegelsneden moeten twee gegeven stralen ν_1 en ν_2 snijden en vier gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken.

Men legt hier het snijpunt der vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 op de rechte μ^2, dan vindt men geene oplossing in een willekeurig vlak door μ^2, omdat daarin de kegelsneden door twee punten zouden moeten gaan en vier rechten aanraken.

Men vindt wel eene oplossing in een vlak door μ^2 en een der drie snijlijnen van ρ_1, ρ_2, ρ_3. In dit vlak zoekt men de snijpunten met ν_1 en ν_2 en de snijlijnen met de overige vlakken ρ. Men vindt dan *vier* kegelsneden, die door twee punten gaan en drie rechten aanraken. In de drie genoemde vlakken vindt men dus $3 \times 4 = 12$ oplossingen in den vorm van eigenlijke kegelsneden.

Er voldoet hier ook eene ontaarding der tweede klasse. Legt men n.l. eene rechte uit het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3 op ν_1 en ν_2, dan kan men hierdoor en door μ^2 een vlak brengen. In dit vlak voldoet dan de genoemde rechte als ontaarding der tweede klasse; de rangpunten liggen in P en in het snijpunt der rechte met ρ_4. Deze ontaarding zal viermaal in rekening gebracht moeten worden, omdat ν_1 en ν_2 dubbel gesneden worden.

Eene ontaarding van den tweeden graad kan niet voldoen, omdat $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ elkaar niet in één punt snijden.

Men vindt hier dus twaalf eigenlijke en vier ontaarde oplossingen, dus

$$\underline{\mu^2 \nu^2 \rho^4 = 16.}$$

$\underline{\mu^2 \nu \rho^5.}$ Het vlak der kegelsneden gaat weer door μ^2 en de kegelsneden moeten een gegeven rechte ν snijden en vijf gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken.

Men legt hier het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3 weer op μ^2, dan voldoet geene oplossing in een willekeurig vlak door μ^2, omdat de kegelsneden daarin door een punt moesten gaan èn vijf rechten aanraken.

Wel voldoet eene oplossing in het vlak door μ^2 en een der snijlijnen van ρ_1, ρ_2, ρ_3. Legt men b.v. het vlak door μ^2 en de snijlijn van ρ_1 en ρ_2, dan zoekt men het snijpunt van dit vlak met ν en de snijlijnen met de overige vlakken ρ. Er liggen in dit vlak dan *twee* kegelsneden door één punt, die aan vier rechten raken. In de drie vlakken, die men kan aanbrengen, liggen dus $3 \times 2 = 6$ oplossingen in den vorm van eigenlijke kegelsneden.

Ook hier vindt men eene ontaarding der tweede klasse, die aan de vraag voldoet. Legt men n.l. de rechte l uit P op ν en op de snijlijn van ρ_4 en ρ_5, en brengt men het vlak door μ^2 en l, dan voldoet l als ontaarding. De rangpunten liggen in P en in het snijpunt van l met de doorsnede van ρ_4 en ρ_5. Deze ontaarding is dubbel te tellen, omdat zij ν dubbel snijdt.

Daar er hier geene ontaarding van den tweeden graad voldoet, vindt men zes eigenlijke en twee ontaarde oplossingen, dus

$$\underline{\mu^2 \nu \rho^5 = 8.}$$

$\underline{\mu^2 \rho^6.}$ Legt men hier weer het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3 in de gegeven rechte μ^2, dan voldoen er eigenlijke kegelsneden in elk der vlakken door μ^2 en eene der snijlijnen van ρ_1, ρ_2, ρ_3. Men vindt in zulk een vlak dan vijf rechten, waaraan de kegelsneden moeten raken, dus in elk der drie vlakken éénc oplossing.

Eene ontaarding der tweede klasse vindt men in het vlak door μ^2 en het snijpunt Q van ρ_4, ρ_5, ρ_6. Deze ontaarding wordt gevormd door de verbindingslijn van P en Q en heeft hare rangpunten in P en Q. Ze vormt een enkelvormige oplossing.

Daar er hier geene ontaarding van den tweeden graad mogelijk is, heeft men drie eigenlijke en éénе ontaarde oplossing, zoodat

$$\mu^2 \rho^6 = 4.$$

§ 3.

$\mu \nu^7$. Het vlak van elke kegelsnede, die aan deze vraag zal voldoen, moet door een gegeven punt μ gaan; verder moeten de kegelsneden zeven gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ snijden.

Legt men drie van deze stralen, b.v. ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ, dan voldoen vooreerst alle kegelsneden door een der snijpunten P van die drie rechten, welke op de overige vijf stralen rusten, terwijl hare vlakken door μ gaan. Door elk der punten P gaan *zes* zulke kegelsneden, volgens de vroeger gevonden waarde van P μ ν^5. Zoodoende vindt men $3 \times 6 = 18$ eigenlijke kegelsneden, die aan de vraag voldoen.

Als de rechten ν_4 en ν_5 het vlak ϕ in P_4 en P_5 snijden, bepaalt deze rechte $P_4 P_5$ met μ een vlak, waarop ν_6 en ν_7 twee snijpunten Q_6 en Q_7 leveren. De rechte $P_4 P_5$ in vlak ϕ vormt dan de eene en $Q_6 Q_7$ de tweede rechte van de ontaarding van den tweeden graad. Daar men zoo zes combinaties van $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ kan maken, vindt men dus op deze wijze zes ontaarde kegelsneden.

Als P_4 de doorgang van ν_4 met ϕ is, verbindt men μ met P_4 en zoekt de transversaal van $\mu P_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$. Zij deze t, dan snijdt het vlak door μ en t het vlak ϕ in eene rechte t', die met t een lijnenpaar vormt, dat aan de vraag voldoet. Er zijn hier *twee* transversalen op vier rechten en men kan $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ op *vier* wijzen drie aan één combineeren, zoodat men op deze wijze $4 \times 2 = 8$ oplossingen vindt.

Legt men eindelijk eene transversaal t'' op $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$, brengt een vlak aan door μ en t'', en zoekt de snijlijn van dit vlak met Φ, dan vormt deze de tweede rechte van een lijnenpaar, dat voldoet; t'' is de andere rechte. Omdat $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ twee transversalen t'' hebben, vindt men op deze wijze *twee* ontaardingen van den tweeden graad.

In het geheel voldoen dus 18 eigenlijke en 16 ontaarde kegelsneden, dus

$$\underline{\mu \nu^7 = 34.}$$

$\underline{\mu \nu^6 \rho.}$ Hier moeten weer de vlakken der gezochte kegelsneden door μ gaan en de kegelsneden moeten zes gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ snijden en een vlak ρ aanraken.

Legt men weer drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan voldoen vooreerst kegelsneden uit een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke op de overige vier rechten rusten en wier vlakken door μ gaan, terwijl zij het gegeven vlak ρ aanraken. Dit aantal is 10, volgens de vroeger gevonden waarde voor $P \mu \nu^4 \rho$. Voor de drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3 samen vindt men dus $3 \times 10 = 30$ oplossingen.

Zijn P_4 en P_5 de snijpunten van ν_4 en ν_5 met Φ, terwijl ρ het vlak Φ in den doorgang l snijdt, dan verbindt men P_4 en P_5 door eene rechte t; deze snijdt l in een punt S. Brengt men een vlak door μ en t, dan snijdt dit ν_6 in een punt Q_6. Verbindt men S met Q_6 door eene rechte t', dan vormen t en t' eene ontaarding van den tweeden graad, die voldoet, en dubbel te tellen is, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat. Men kan ν_4, ν_5, ν_6 op *drie* wijzen twee aan één rangschikken; dus zoo vindt men $3 \times 2 = 6$ oplossingen.

Verbindt men μ met het snijpunt P_4 van ν_4 met Φ, dan kan men eene transversaal t'' leggen op $\mu P_4, \nu_5, \nu_6$ en de snijlijn l van ρ met Φ. Legt men door μ en t'' een vlak, dan snijdt dit vlak het vlak Φ in eene rechte t''', die met t'' eene ontaarding vormt, welke voldoet, en dubbel te tellen is, omdat ρ hiervoor als raakvlak dubbel telt. De vier rechten $\mu P_4, \nu_5, \nu_6, l$ hebben *twee* transversalen, en men kan ν_4, ν_5, ν_6, op *drie* wijzen twee aan één combineeren; dus vindt men hier $3 \times 2 \times 2 = 12$ oplossingen.

Eindelijk zoekt men de transversaal t van ν_4, ν_5, ν_6, l en legt een vlak door μ en t, dan snijdt dit vlak het vlak Φ in een rechte t', die met t een lijnenpaar vormt, dat voldoet en dubbel te tellen is, omdat ρ door het dubbelpunt gaat. Daar er *twee* transversalen t zijn, vindt men hier $2 \times 2 = 4$ oplossingen.

In het geheel zijn er dus $30 + 6 + 12 + 4 = 52$ oplossingen, zoodat

$$\mu \, \nu^6 \, \rho = 52.$$

$\mu \, \nu^5 \, \rho^2$. De vlakken der gezochte kegelsneden moeten weer door μ gaan; de kegelsneden moeten verder vijf gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 snijden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken.

Legt men ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan voldoet in Φ de ontaarding der tweede klasse, gelegd door de punten Q_4, Q_5, waarvan het vlak door μ gaat en de straalpunten in de snijpunten met ρ_1 en ρ_2 liggen. Deze ontaarding zal voor 16 te tellen zijn. Als men n.l. de doorgangen Q_4 en Q_5 verbindt, snijdt deze rechte de stralen ν_1 en ν_2, die het vlak Φ bepalen. Bovendien zal ze elke rechte in Φ, dus ook ν_3, snijden en omdat Φ bepaald wordt door twee rechten, moeten de snijpunten met deze beide bepalende rechten voor de ontaarding dubbel gerekend worden. Daar de figuur η ook ν_4 en ν_5 dubbel snijdt, zal ze 16 maal in rekening gebracht moeten worden.

Verder voldoen alle kegelsneden door een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, waarvan het vlak door μ gaat, en die de overige stralen snijden en ρ_1 en ρ_2 aanraken. Dit aantal is voor elk der snijpunten 16, volgens de waarde van $P \, \mu \, \nu^3 \, \rho^2$. Zoo vindt men in het geheel $3 \times 16 = 48$ oplossingen.

Trekt men uit den doorgang S van $l_{12} \equiv (\rho_1 \, \rho_2)$ op Φ de transversaal t op ν_4 en ν_5 en legt vervolgens een vlak door μ en t, dan snijdt dit het vlak Φ in eene rechte t', die met t een lijnenpaar vormt, dat voldoet en voor *vier* geteld moet worden, omdat ρ_1 en ρ_2 door het dubbelpunt gaan.

Verbindt men Q met S door een rechte t'' en legt men een vlak door μ en t'', dan snijdt dit vlak ν_5 in een punt dat, met S verbonden, de tweede rechte t''' van een lijnenpaar geeft, dat voldoet. Deze oplossing is eveneens voor *vier* te tellen. Men vindt ook *vier* oplossingen, door Q_5 met S te verbinden.

In het geheel zijn er $16 + 48 + 4 + 8 = 76$ oplossingen, dus heeft men

$$\underline{\mu \nu^5 \rho^2 = 76.}$$

$\underline{\mu \nu^4 \rho^3.}$ De vlakken der kegelsneden gaan door μ; de kegelsneden moeten verder vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Legt men weer ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan voldoen de ontaardingen der tweede klasse, die bepaald zijn door den doorgang Q_4 van ν_4 op Φ en het snijpunt van twee der doorgangen van de vlakken ρ. Deze oplossingen gelden elk voor 8, omdat ze ν_4 snijden en op ν_1 en ν_2 rusten; daar de laatste twee het vlak Φ bepalen, wordt dan elke rechte in Φ, dus ook ν_3, gesneden. Daar er drie zulke ontaardingen zijn, geeft dit $3 \times 8 = 24$ oplossingen.

Verder voldoen aan de vraag alle kegelsneden door een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, waarvan het vlak door μ gaat en die de overige twee stralen snijden en ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken. Volgens de waarde van P $\mu \nu^2 \rho^3$ is dit aantal voor elk dier snijpunten 16, dus in het geheel $3 \times 16 = 48$.

Men vindt hier verder geene ontaarding van den tweeden graad, die aan de vraag voldoet, omdat het snijpunt der drie vlakken ρ niet in Φ ligt.

In het geheel zijn er dus $48 + 24 = 72$ oplossingen, zoodat men heeft

$$\underline{\mu \nu^4 \rho^3 = 72.}$$

Deze uitkomst kan men ook nog anders krijgen. Indien men n.l. niet drie rechten ν in één vlak legt, maar drie vlakken ρ door éene rechte, kan men ook dit aantal bepalen.

$\underline{\mu \nu^4 \rho^3.}$ Men zoekt hier kegelsneden, waarvan het vlak door μ gaat en die verder vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Legt men hier de drie vlakken ρ door een rechte l, dan voldoen allereerst de kegelsneden, die l raken, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en waarvan het vlak door μ gaat. Dit aantal kegelsneden is *twee* volgens de vroeger gevonden waarde voor $T \mu \nu^4$. Daar echter l reeds bepaald is als snijlijn van twee vlakken ρ, moet ze als dubbele raaklijn worden opgevat en is elke oplossing dubbel te tellen. Op deze wijze vindt men dus *vier* oplossingen.

Legt men verder eene transversaal t op ν_1, ν_2, ν_3, l, en brengt men dan een vlak door t en μ, dan snijdt dit vlak de rechte ν_4 in een punt. Dit verbindt men met het snijpunt van t en l; dan vormt deze verbindingslijn met t een lijnenpaar, dat voldoet en voor *vier* te tellen is, omdat l door haar dubbelpunt gaat. De rechten ν_1, ν_2, ν_3, l hebben *twee* transversalen en er zijn *vier* rangschikkingen drie aan één van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ mogelijk, dus hier vindt men $4 \times 2 \times 4 = 32$ oplossingen.

Zal de eene rechte t_1 van een lijnenpaar rusten op ν_1 en ν_2 en de andere t_2 op ν_3 en ν_4, dan zijn t_1 en t_2 beschrijvende lijnen van de quadratische regelvlakken (ν_1, ν_2, l) en (ν_3, ν_4, l). Men zoekt nu uit μ een gemeenschappelijk raakvlak aan beide regelvlakken. Er zijn er vier; één daarvan kan men niet gebruiken en wel het vlak door μ en l. Immers de vier snijpunten van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ met het vlak door μ en l vormen een volledigen vierhoek, waarvan de diagonaalpunten in 't algemeen niet op l liggen. Er blijven *drie* bruikbare gemeenschappelijke raakvlakken over, dus vindt men hier drie oplossingen. Elke oplossing is voor *vier* te tellen, omdat l door het dubbelpunt gaat en verder zijn er *drie* combinaties mogelijk van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ twee aan twee. Men vindt dus $3 \times 4 \times 3 = 36$ oplossingen.

In het geheel zijn er dus $4 + 32 + 36 = 72$ oplossingen mogelijk, zoodat

$$\underline{\mu \, \nu^4 \rho^3 = 72.}$$

$\underline{\mu \, \nu^3 \rho^4.}$ De vlakken van de kegelsneden gaan door een gegeven punt μ en verder snijden de kegelsneden drie gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, terwijl zij vier vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken.

Om dit aantal te vinden, legt men drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l; dan voldoen vooreerst alle kegelsneden, die l aanraken, ν_1, ν_2, ν_3 snijden en ρ_4 raken, terwijl haar vlak door μ gaat. Dit aantal is *vier* volgens de vroeger gevonden waarde voor $T\,\mu\,\nu^3\,\rho$. Daar echter l als snijlijn van twee vlakken ρ bepaald is en derhalve voor de kegelsnede, die l raakt, elk vlak door l raakvlak is, moet de rechte l als dubbele raaklijn worden aangemerkt. Elke oplossing is dus dubbel te tellen en op deze wijze vindt men dus $4 \times 2 = 8$ antwoorden op de vraag.

Legt men verder een transversaal t uit het snijpunt S van l met ρ_4 op ν_1 en ν_2, dan kan men een vlak aanbrengen door μ en t. Dit vlak snijdt ν_3 in een punt Q_3, en als men S met Q_3 verbindt door eene rechte t', voldoet t' met t als lijnenpaar. Daar l dubbel geteld moet worden en tevens door het dubbelpunt gaat, terwijl ook ρ_4 door S gaat, moet deze oplossing voor *acht* tellen. Omdat men drie rechten op *drie* manieren twee aan één kan combineeren, vindt men op deze wijze dus $3 \times 8 = 24$ oplossingen.

Legt men eindelijk een transversaal t op ν_1, ν_2, ν_3, l, dan voldoet deze als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak door μ gaat. De rangpunten liggen op l en ρ_4. Daar men twee transversalen t kan leggen op ν_1, ν_2, ν_3, l, voldoen er dus $2 \times 8 = 16$ oplossingen, want elke t is voor *acht* te tellen, daar zij ν_1, ν_2, ν_3 dubbel snijdt.

Samen zijn er $8 + 24 + 16 = 48$ oplossingen dus

$$\underline{\mu\,\nu^3\,\rho^4 = 48.}$$

$\underline{\mu\,\nu^2\,\rho^5.}$ De vlakken der kegelsneden gaan door μ en de kegelsneden moeten twee rechten ν_1 en ν_2 snijden en vijf vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken.

Legt men drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan voldoet elke kegelsnede in het vlak (l, μ), die l raakt, ν_1 en ν_2 snijdt en ρ_4 en ρ_5 aanraakt. Dit zijn er *vier* volgens de waarde van $T\,\mu\,\nu^2\,\rho^2$. Ieder moet tweemaal in rekening gebracht worden, omdat l dubbel te tellen is. Dit zijn dus 8 oplossingen.

Legt men een transversaal t op l, ν_1, ν_2 en de snijlijn l_{45} van ρ_4 en ρ_5, dan voldoet deze ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak door μ bepaald is. De rangpunten liggen op l en l_{45}; de oplossing is voor *vier* te tellen, omdat ν_1 en ν_2 dubbel gesneden worden. Daar er twee transversalen t zijn, vindt men dus 8 oplossingen.

Legt men de transversaal uit het snijpunt Q van l met ρ_4 op ν_1 en ν_2, dan voldoet deze als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak door μ bepaald is. De rangpunten liggen in Q en in den doorgang met ρ_5. De oplossing moet viermaal in rekening gebracht worden, omdat zij ν_1 en ν_2 dubbel snijdt. Zoo vindt men ook *vier* antwoorden uitgaande van het snijpunt van l met ρ_5.

Dus in 't geheel zijn er $8 + 8 + 4 + 4 = 24$ oplossingen of

$$\underline{\mu\, \nu^2\, \rho^5 = 24.}$$

$\underline{\mu\, \nu\, \rho^6.}$ De kegelsneden moeten eene rechte ν snijden en zes vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6 aanraken, terwijl haar vlak door μ gaat.

Legt men weer ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte l, dan voldoet vooreerst elke kegelsnede, die l en ρ_4, ρ_5, ρ_6 raakt, terwijl zij ν snijdt en haar vlak door μ gaat. Volgens de gevonden waarde voor T $\mu\, \nu\, \rho^3$ is dit aantal *twee*. Elke oplossing is dubbel te tellen, omdat l dubbele raaklijn is. Zoo vindt men dus *vier* antwoorden.

Legt men de transversaal uit het snijpunt Q van l met ρ_4 op ν en op de snijlijn l_{56} van ρ_5 en ρ_6, dan is dit eene ontaarding der tweede klasse, waarin het vlak door μ gaat. De rangpunten liggen in Q en op l_{56}; de oplossing is dubbel te tellen, omdat ze ν dubbel snijdt. Men kan driemaal zulk een snijpunt met l vinden, heeft dus $3 \times 2 = 6$ oplossingen.

Eindelijk voldoet de rechte uit het snijpunt S van ρ_4, ρ_5, ρ_6 naar l en ν als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak door μ gaat. De rangpunten liggen op l en in S; deze oplossing is dubbel te tellen, daar zij ν dubbel snijdt.

In het geheel zijn er $4 + 6 + 2 = 12$ oplossingen, zoodat men vindt

$$\underline{\mu\, \nu\, \rho^6 = 12.}$$

$\underline{\mu\,\rho^7}$. De vlakken gaan door μ en de kegelsneden raken de vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7$ aan.

Legt men ρ_1, ρ_2, ρ_3 door l, dan voldoet de kegelsnede, die $l, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7$ raakt en in het vlak door μ ligt. Zij vervangt twee oplossingen.

Legt men de rechte door het snijpunt S van l met ρ_4 naar het snijpunt R van ρ_5, ρ_6, ρ_7, dan voldoet deze rechte als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak door μ gaat; R en S zijn haar straalpunten.

Ook de snijpunten van l met ρ_5, ρ_6, ρ_7 geven zulk eene oplossing, zoodat er samen $2 + 4 = 6$ zijn. Dus is

$$\underline{\mu\,\rho^7 = 6.}$$

§ 4.

$\underline{\nu^8}$. Hier moeten de kegelsneden acht gegeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7, \nu_8$ snijden.

Legt men [1]) drie rechten, ν_1, ν_2, ν_3, in een vlak Φ, dan voldoet vooreerst de kegelsnede in vlak Φ, die door de snijpunten van $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7, \nu_8$ met vlak Φ gaat. Deze kegelsnede is voor *acht* oplossingen te tellen, omdat ν_1, ν_2, ν_3 tweemaal gesneden worden.

Verder voldoet elke kegelsnede door een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, die de overige zes rechten snijdt; volgens de vroeger gevonden waarde voor $P\,\nu^6$ vindt men 18 kegelsneden voor elk der drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3. In het geheel geeft dit dus $3 \times 18 = 54$ kegelsneden.

Zoekt men de snijpunten P_4 en P_5 van ν_4 en ν_5 met Φ, dan kan men de transversaal zoeken op $P_4\,P_5, \nu_6, \nu_7, \nu_8$. Deze transversaal vormt met $P_4\ P_5$ eene ontaarding van den tweeden graad, die voldoet. Daar er *twee* transversalen van vier rechten zijn en men $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7, \nu_8$ op *tien* wijzen drie aan twee kan rangschikken, vindt men op deze wijze $10 \times 2 = 20$ oplossingen.

---

[1]) Zie Dr. J. DE VRIES: «Over het aantal kegelsneden, die acht gegeven rechten snijden» (K. A. v. W. te A. 1901, X, blz. 194).

Men zoekt de transversaal t van $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$; snijdt deze ϕ in T, dan verbindt men T met het snijpunt P_8 van ν_8 en ϕ. Het stel rechten t en $T P_8$ vormt dan eene ontaarding, die voldoet. Hier heeft men dus samen $5 \times 2 = 10$ oplossingen, want er zijn *twee* transversalen t en *vijf* combinaties vier aan één van $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7, \nu_8$.

In het geheel voldoen dus $8 + 54 + 20 + 10 = 92$ kegelsneden, zoodat men heeft:

$$\nu^8 = 92.$$

$\nu^7 \rho$. Hier moeten de kegelsneden zeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ snijden en een vlak ρ aanraken. Men legt weer ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ.

Vooreerst voldoen dan in het vlak ϕ twee kegelsneden door de vier snijpunten met $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$, welke de snijlijn van ρ met ϕ aanraken. Elk van beide is voor acht te tellen, omdat zij ν_1, ν_2, ν_3 dubbel snijdt. Zoo vindt men dus 16 eigenlijke kegelsneden.

Verder zoekt men het aantal kegelsneden door elk van de drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke op de overige vijf rechten rusten en een gegeven vlak aanraken. Volgens de vroeger gevonden waarde van $P \nu^5 \rho$ is dit aantal 24 voor elk der snijpunten; dus in het geheel vindt men op deze wijze $3 \times 24 = 72$ oplossingen.

Zoekt men de snijpunten P_4 en P_5 van ν_4 en ν_5 met ϕ, dan vormt $P_4 P_5$ eene rechte van een lijnenpaar, dat voldoet en waarvan het dubbelpunt ligt in het snijpunt S van $P_4 P_5$ met den doorgang van ρ op ϕ; de andere rechte is de transversaal uit S op ν_6 en ν_7. Daar iedere oplossing dubbel te tellen is, omdat ρ door het dubbelpunt gaat, en men $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ op *zes* wijzen zoo rangschikken kan, vindt men hier $6 \times 2 = 12$ oplossingen, die voldoen.

Legt men eindelijk eene transversaal t op ν_4, ν_5, ν_6 en de snijlijn n van ϕ en ρ, dan is dit de eene rechte van een lijnenpaar dat voldoet. Het snijpunt S van t met n is het dubbelpunt en de verbindingslijn van S met den doorgang P_7 van ν_7 op ϕ is de tweede rechte van het lijnenpaar. Daar de vier genoemde rechten *twee* transversalen t hebben, en elke oplossing dubbel te tellen is, omdat ρ een dubbel raakvlak is, terwijl men $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ op *vier* wijzen drie aan één kan rangschikken, vindt men op deze wijze $4 \times 2 \times 2 = 16$ ontaardingen. In het geheel zijn er dus $16 + 72 + 12 + 16 = 116$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\nu^7 \rho = 116.}$$

$\underline{\nu^6 \rho^2.}$ Hier moeten zes stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ gesneden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aangeraakt worden.

Legt men weer ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ, dan voldoen voorcerst *vier* kegelsneden in dit vlak, die door de snijpunten van ν_4, ν_5, ν_6 met ϕ gaan en de doorgangen van ρ_1 en ρ_2 met ϕ aanraken. Daar elke kegelsnede ν_1, ν_2, ν_3 dubbel snijdt, moet zij achtmaal geteld worden en men vindt zoo dus $4 \times 8 = 32$ oplossingen.

Verder voldoet elke kegelsnede door een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, die op de overige vier rechten rust en de twee vlakken ρ aanraakt. Dit zijn er voor elk van die drie snijpunten 28, wegens de vroeger voor $P \nu^4 \rho^2$ gevonden waarde. In het geheel vindt men er hier dus $3 \times 28 = 84$.

Legt men uit het snijpunt S der doorgangen van ρ_1 en ρ_2 met ϕ de transversaal op ν_4 en ν_5, dan is dit de eene rechte van een lijnenpaar, dat voldoet. S is het dubbelpunt en de tweede rechte is de verbindingslijn van S met den doorgang van ν_6 op ϕ. Dit lijnenpaar moet voor *vier* oplossingen gerekend worden, omdat ρ_1 en ρ_2 door haar dubbelpunt gaan. Men kan ν_4, ν_5, ν_6 op *drie* wijzen twee aan één combineeren, zoodat men hier dus $3 \times 4 = 12$ oplossingen heeft.

In het geheel zijn er $32 + 84 + 12 = 128$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\nu^6 \rho^2 = 128.}$$

$\underline{\nu^5 \rho^3.}$ De kegelsneden moeten hier vijf stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ snijden en drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Legt men ν_1, ν_2, ν_3 weer in een vlak ϕ, dan voldoen allereerst vier kegelsneden in dit vlak ϕ, die gaan door de snijpunten van ν_4 en ν_5 met Φ en de doorgangen van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met Φ aanraken. Elke kegelsnede is voor *acht* te tellen, omdat zij ν_1, ν_2, ν_3 tweemaal snijdt. Dit geeft dus $4 \times 8 = 32$ oplossingen.

Verder voldoet elke kegelsnede door een der drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, die op de overige drie rechten rust en de drie vlakken ρ aanraakt. Dit zijn er 24 volgens de vroeger gevonden waarde van $P\,\nu^3\,\rho^3$. Op deze wijze vindt men dus $3 \times 24 = 72$ oplossingen.

Daar ρ_1, ρ_2, ρ_3 het vlak Φ in het algemeen niet in één punt snijden, voldoet hier geene ontaarding met het dubbelpunt in Φ. Ook voldoet geene ontaarding der tweede klasse, want die zou op de doorsnede van twee der vlakken èn op vijf rechten moeten rusten.

In het geheel voldoen dus $72 + 32 = 104$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\nu^5\,\rho^3 = 104.}$$

$\underline{\nu^4\,\rho^4.}$ Hier moeten vier stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ gesneden en vier vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aangeraakt worden.

Men legt weer ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak Φ, dan voldoen vooreerst twee kegelsneden in Φ door het snijpunt van ν_4 met Φ, die de doorgangen van $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ met Φ aanraken. Iedere kegelsnede is voor *acht* te tellen, omdat zij ν_1, ν_2, ν_3 dubbel snijdt. Zoo vindt men dus $2 \times 8 = 16$ oplossingen.

Verder voldoen alle kegelsneden door een der drie snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke op de overige twee rechten rusten en $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken. Volgens de vroeger voor $P\,\nu^2\,\rho^4$ gevonden waarde zijn er voor elk punt 16, dus in het geheel $3 \times 16 = 48$.

Daar er geene lijnenparen met het dubbelpunt in Φ en geene ontaardingen der tweede klasse mogelijk zijn, welke laatste op zes rechten zouden moeten rusten òf door een punt gaan en op vier rechten rusten, vindt men hier samen $16 + 48 = 64$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\nu^4\,\rho^4 = 64.}$$

$\underline{\nu^3 \rho^5.}$ De kegelsneden moeten drie gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3 snijden en vijf gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, aanraken.

Legt men ν_1, ν_2, ν_3 in een vlak ϕ, dan voldoet hier vooreerst de kegelsnede, die de vijf snijlijnen van ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 met ϕ aanraakt. Deze eenige oplossing is voor *acht* te tellen, omdat zij ν_1, ν_2, ν_3 dubbel snijdt.

Verder voldoet elke kegelsnede uit een der snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, welke op de andere rechte rust en vijf vlakken aanraakt. Volgens de gevonden waarde voor P ν ρ^5 is dit aantal *acht*. Uit de drie snijpunten vindt men dus $3 \times 8 = 24$ oplossingen.

Daar hier geene ontaardingen van den tweeden graad met het dubbelpunt in ϕ mogelijk zijn en er ook geene ontaardingen der tweede klasse voldoen, omdat eene rechte niet door een bepaald punt kan gaan en tegelijk op vier rechten rusten, voldoen hier $8 + 24 = 32$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\nu^3 \rho^5 = 32.}$$

$\underline{\nu^2 \rho^6.}$ Hier moeten de kegelsneden twee rechten ν_1 en ν_2 snijden en zes vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6 aanraken.

Legt men hier drie vlakken, ρ_1, ρ_2, ρ_3, door eene rechte t, dan voldoen alle kegelsneden welke t raken, ν_1 en ν_2 snijden en ρ_4, ρ_5, ρ_6 aanraken. Volgens de vroeger gevonden waarde voor T ν^2 ρ^3 is dit aantal 8. Daar echter t bepaald is als snijlijn van twee vlakken ρ, zoodat elk vlak door t ook raakvlak is, moet t als dubbele raaklijn gerekend worden. Iedere oplossing is dubbel te tellen, zoodat men hier 16 oplossingen vindt.

Eene ontaarding der tweede klasse kan hier niet voldoen, want uit het snijpunt van ρ_4, ρ_5, ρ_6 is geene rechte mogelijk, die op ν_1, ν_2, t rust.

Ook is geene ontaarding van den tweeden graad mogelijk, omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6 elkaar niet in één punt snijden. Dus is

$$\underline{\nu^2 \rho^6 = 16.}$$

$\underline{\nu \rho^7.}$ De kegelsneden snijden de rechte ν en raken de vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7 aan.

Legt men weer ρ_1, ρ_2, ρ_3 door eene rechte t, dan voldoen de kegelsneden die t raken, ν snijden en ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7 aanraken. Dit aantal is *vier* volgens de gevonden waarde voor $T \nu \rho^4$. Elke oplossing moet echter dubbel geteld worden, omdat t als dubbele raaklijn is op te vatten. Dit geeft dus $2 \times 4 = 8$ oplossingen.

Daar hier verder geene ontaarde kegelsneden mogelijk zijn, omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7 elkaar niet in één punt snijden en ook geene rechte te trekken is door twee punten, die op ν zal rusten, is hier

$$\underline{\nu \rho^7 = 8.}$$

$\underline{\rho^8}$. Om het aantal kegelsneden te vinden, die aan acht gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7, ρ_8 raken, legt men weer drie der vlakken door eene rechte t. Hier voldoen alle kegelsneden die t en ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7, ρ_8 aanraken. Volgens de gevonden waarde voor $T \rho^5$ is dit aantal *twee*. Elke oplossing is echter om meer gemelde reden dubbel te tellen, zoodat men hier *vier* antwoorden vindt.

Verder zijn er geene ontaardingen mogelijk, omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7, ρ_8 elkaar niet in één punt snijden en evenmin ρ_5, ρ_6, ρ_7, ρ_8. Men heeft dus

$$\underline{\rho^8 = 4.}$$

HOOFDSTUK III.

Bepaling der aantallen ontaarde kegelsneden, die aan zeven voorwaarden voldoen.

§ 1.

Wij willen nu de aantallen ontaardingen van den tweeden graad en de tweede klasse vinden, die aan zeven voorwaarden voldoen. (1) Deze moeten wij n.l. gebruiken, wanneer wij nagaan de stelsels van ∞^1 vele kegelsneden, die aan zeven voorwaarden voldoen.

Als δ voorstelt eene ontaarding van den tweeden graad en η eene ontaarding der tweede klasse, terwijl μ, ν en ρ de meergenoemde beteekenis hebben, ontstaan de volgende tabellen:

$\delta\,\mu^3\,\nu^4$	$\delta\,\mu^2\,\nu^5$	$\delta\,\mu\,\nu^6$	$\delta\,\nu^7$
$\delta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho$	$\delta\,\mu^2\,\nu^4\,\rho$	$\delta\,\mu\,\nu^5\,\rho$	$\delta\,\nu^6\,\rho$
$\delta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2$	$\delta\,\mu^2\,\nu^3\,\rho^2$	$\delta\,\mu\,\nu^4\,\rho^2$	$\delta\,\nu^5\,\rho^2$
$\delta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3$	$\delta\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^3$	$\delta\,\mu\,\nu^3\,\rho^3$	$\delta\,\nu^4\,\rho^3$
$\delta\,\mu^3\,\rho^4$	$\delta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4$	$\delta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4$	$\delta\,\nu^3\,\rho^4$
	$\delta\,\mu^2\,\rho^5$	$\delta\,\mu\,\nu\,\rho^5$	$\delta\,\nu^2\,\rho^5$
		$\delta\,\mu\,\rho^6$	$\delta\,\nu\,\rho^6$
			$\delta\,\rho^7$

en:

$\eta\,\mu^3\,\nu^4$	$\eta\,\mu^2\,\nu^5$	$\eta\,\mu\,\nu^6$	$\eta\,\nu^7$
$\eta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho$	$\eta\,\mu^2\,\nu^4\,\rho$	$\eta\,\mu\,\nu^5\,\rho$	$\eta\,\nu^6\,\rho$
$\eta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2$	$\eta\,\mu^2\,\nu^3\,\rho^2$	$\eta\,\mu\,\nu^4\,\rho^2$	$\eta\,\nu^5\,\rho^2$
$\eta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3$	$\eta\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^3$	$\eta\,\mu\,\nu^3\,\rho^3$	$\eta\,\nu^4\,\rho^3$
$\eta\,\mu^3\,\rho^4$	$\eta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4$	$\eta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4$	$\eta\,\nu^3\,\rho^4$
	$\eta\,\mu^2\,\rho^5$	$\eta\,\mu\,\nu\,\rho^5$	$\eta\,\nu^2\,\rho^5$
		$\eta\,\mu\,\rho^6$	$\eta\,\nu\,\rho^6$
			$\eta\,\rho^7$

1) Schubert geeft in zijn *Kalkül der abzählenden Geometrie*, blz. 93, 94 slechts de afleiding van vier dezer aantallen.

§ 2

$\delta\,\mu^3\,\nu^4$. Door de voorwaarde μ^3 is het vlak Φ der ontaardingen bepaald; deze moeten verder vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden.

Men zoekt de snijpunten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ met het vlak Φ, dan voldoen aan de vraag de drie lijnenparen van den door Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 gevormden volledigen vierhoek. Ieder is enkelvoudig, zoodat er dus *drie* oplossingen zijn en men heeft

$$\delta\,\mu^3\,\nu^4 = 3.$$

$\delta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho$. Door μ^3 is weer het vlak Φ bepaald; zoekt men de snijpunten Q_1, Q_2, Q_3 van ν_1, ν_2, ν_3 met vlak Φ en den doorgang l van ρ en Φ, dan moet het dubbelpunt van elke ontaarding, die voldoet, op l liggen. Men verbindt Q_1 met Q_2, dan snijdt $Q_1\,Q_2$ de rechte l in een punt, en hieruit trekt men de rechte naar Q_3. Dit samenstel voldoet aan de vraag, maar geldt voor *twee* oplossingen, omdat l hier dubbele raaklijn is. Men kan hier de punten Q_1, Q_2, Q_3 op drie wijzen twee aan één combineeren, zoodat men in het geheel $3 \times 2 = 6$ oplossingen vindt en

$$\delta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho = 6.$$

$\delta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2$. De voorwaarde μ^3 bepaalt weer het vlak Φ der kegelsneden. Verder moeten deze twee rechten ν_1 en ν_2 snijden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken.

Het dubbelpunt der ontaardingen, die aan de vraag voldoen, ligt in het snijpunt der doorgangen l_1 en l_2 van ρ_1 en ρ_2 met Φ. Verder zoekt men de beide snijpunten Q_1 en Q_2 van ν_1 en ν_2 met Φ, dan voldoet als eenige oplossing het samenstel der rechten uit het genoemde dubbelpunt naar Q_1 en Q_2. Deze eenige oplossing is voor *vier* te tellen, daar ρ_1 en ρ_2 beide door het dubbelpunt gaan, zoodat

$$\delta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2 = 4.$$

$\delta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3$. Door μ^3 is het vlak Φ bekend, maar omdat de drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 dit vlak Φ in het algemeen niet in één punt snijden, wat toch voor eene δ noodig is, voldoet hier geene oplossing aan de vraag. Dus

$$\underline{\delta\, \mu^3\, \nu\, \rho^3 = 0.}$$

$\underline{\delta\, \mu^3\, \rho^4.}$ Daar evenmin de vier gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ het vlak ϕ in één punt snijden, is hier geene oplossing mogelijk, zoodat

$$\underline{\delta\, \mu^3\, \rho^4 = 0.}$$

§ 3.

$\underline{\delta\, \mu^2\, \nu^5.}$ De voorwaarde μ^2 geeft aan, dat het vlak der gezochte kegelsneden door twee gegeven punten, dus door eene gegeven rechte moet gaan. Verder moeten de gevraagde ontaardingen vijf gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ snijden.

Legt men eene transversaal t_1 op ν_1, ν_2, ν_3 en μ^2, dan is het vlak van de ontaarding bepaald; dit is n.l. het vlak door μ^2 en t_1 gelegd. Dit vlak snijdt ν_4 en ν_5 in twee punten Q_4 en Q_5 en deze verbindingslijn $Q_4\, Q_5$ vormt de andere rechte t_2 van de ontaarding. Men kan $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ op *tien* manieren drie aan twee combineeren; door elk drietal met μ^2 gaan *twee* transversalen, zoodat men in het geheel $10 \times 2 = 20$ oplossingen vindt. Dus

$$\underline{\delta\, \mu^2\, \nu^5 = 20.}$$

$\underline{\delta\, \mu^2\, \nu^4\, \rho.}$ Ook hier gaan de vlakken der gevraagde kegelsneden door eene vaste rechte μ^2 en verder moeten de kegelsneden vier gegeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en een gegeven vlak ρ aanraken. Het dubbelpunt der ontaarding moet dus in ρ liggen.

Men legt eene transversaal t_1 op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$; deze snijdt ρ in het dubbelpunt; het vlak door μ^2 en t_1 is dus het vlak van de ontaarding. Dit vlak snijdt ν_4 in een punt Q_4, en Q_4 verbonden met het bovengenoemde dubbelpunt, geeft de tweede lijn t_2 van δ. Er zijn nu *vier* combinaties van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ drie aan één mogelijk; elk drietal bepaalt met μ^2 *twee* transversalen; elke doorgang van ρ met het vlak van δ is dubbele raaklijn, zoodat elke oplossing dubbel te tellen is. Op deze wijze ontstaan er $4 \times 2 \times 2 = 16$ ontaardingen.

Men kan ook de vier rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ twee aan twee combineeren. Elk tweetal bepaalt met μ^2 een quadratisch regelvlak en μ^2 is een beschrijvende lijn van beide regelvlakken. Deze twee regelvlakken snijden ρ volgens twee kegelsneden, die vier punten gemeen hebben, waarvan er één op μ^2 ligt. De overige drie snijpunten geven ieder eene rechte, die op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ rust. Een combinatie van twee dezer rechten vormt eene ontaarding δ; er zijn op deze wijze *drie* verschillende ontaardingen te krijgen, die elk dubbel te tellen zijn, daar ρ door het dubbelpunt gaat. Men kan $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ op *drie* wijzen twee aan twee combineeren, zoodat men hieruit $3 \times 3 \times 2 = 18$ oplossingen vindt.

Samen zijn er dus $18 + 16 = 34$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\delta\, \mu^2\, \nu^4\, \rho = 34.}$$

$\underline{\delta\mu^2\nu^3\rho^2}$. Het vlak van elke figuur δ moet gaan door μ^2; verder moeten de kegelsneden drie gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3 snijden en twee gegeven vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken. Het dubbelpunt van elke oplossing moet dus liggen op de snijlijn l_{12} van ρ_1 en ρ_2.

Men legt eene transversaal t_1 op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, l_{12}$, dan snijdt t_1 de rechte l_{12} in het dubbelpunt, en het vlak van δ is bepaald door μ^2 en t_1. Dit vlak snijdt ν_3 in een punt Q_3 en de verbindingslijn van Q_3 met het genoemde dubbelpunt geeft de tweede rechte t_2 van δ. Men kan ν_1, ν_2, ν_3 op *drie* manieren twee aan één combineeren. Elk tweetal geeft met μ^2 en l_{12} *twee* transversalen, zoodat er $3 \times 2 = 6$ oplossingen zijn. Daar twee raakvlakken door het dubbelpunt van δ gaan, is elke oplossing voor *vier* te tellen, zoodat

$$\underline{\delta\, \mu^2\, \nu^3\, \rho^2 = 24.}$$

$\underline{\delta\mu^2\nu^2\rho^3}$. Volgens de voorwaarde ρ^3 zijn drie gegeven vlakken raakvlakken, zoodat het dubbelpunt der ontaardingen met een gegeven punt samenvalt. Het vlak der kegelsneden moet door μ^2 gaan en is dus volkomen bepaald door μ^2 en het snijpunt van ρ_1, ρ_2, ρ_3.

De beide gegeven rechten ν_1 en ν_2 snijden dit vlak in Q_1 en Q_2, en als men het snijpunt van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met Q_1 en Q_2 verbindt, vormen deze rechten eene ontaarding δ, die voldoet. De oplossing is blijkbaar slechts op éénе wijze mogelijk, maar is voor *acht* te tellen, omdat elk der vlakken ρ als dubbel raakvlak moet opgevat worden.

Men heeft dus:

$$\underline{\delta\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^3 = 8.}$$

$\underline{\delta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4.}$ Aangezien de voorwaarde ρ^4 beteekent, dat het dubbelpunt der ontaardingen, die zullen voldoen, in vier gegeven vlakken ρ moet liggen, en dit in het algemeen onmogelijk is, heeft men hier geene oplossing. Dus is

$$\underline{\delta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4 = 0.}$$

$\underline{\delta\,\mu^2\,\rho^5.}$ Daar ook vijf vlakken in het algemeen elkaar niet in één punt snijden, is

$$\underline{\delta\,\mu^2\,\rho^5 = 0.}$$

§ 4.

$\underline{\delta\,\mu\,\nu^6.}$ Het vlak van elke ontaarding, die zal voldoen, moet door een gegeven punt μ gaan en de kegelsneden moeten zes gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ snijden.

Men kan hier twee stellen oplossingen vinden, omdat men de zes rechten ν op twee wijzen kan verdeelen n.l. vier aan twee en drie aan drie. In het eerste geval voldoet de éénе rechte van δ aan ν^4 en de andere aan ν^2; in het laatste geval voldoen beide rechten aan ν^3.

Als een der lijnen t_1 van δ op vier rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ rust, is het vlak van deze ontaarding bepaald door μ en t_1. Dan zoekt men de snijpunten Q_5 en Q_6 van ν_5 en ν_6 met dit vlak, en de verbindingslijn van Q_5 en Q_6 is de tweede rechte t_2 van δ. Omdat de combinatie vier aan twee van zes rechten op 15 verschillende manieren mogelijk is en elk viertal rechten twee transversalen heeft, vindt men op deze wijze $15 \times 2 = 30$ oplossingen.

Als iedere rechte der ontaarding op drie gegeven rechten moet rusten, beschrijven ze dus ieder een quadratisch regelvlak. Men moet dus een vlak zoeken, dat door μ gaat en eene beschrijvende lijn van beide regelvlakken bevat, m. a. w. een gemeenschappelijk raakvlak door μ aan die regelvlakken. Er zijn *vier* zulke gemeenschappelijke raakvlakken en er zijn *tien* verschillende rangschikkingen drie aan drie mogelijk, zoodat men op deze wijze $10 \times 4 = 40$ oplossingen vindt.

In het geheel zijn er $30 + 40 = 70$ oplossingen, dus

$$\delta \mu \nu^6 = 70.$$

$\delta \mu \nu^5 \rho$. Weer moet het vlak van elke ontaarding, die voldoet, door een gegeven punt μ gaan, terwijl de kegelsneden vijf gegeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ moeten snijden en een gegeven vlak ρ aanraken.

Men kan hier weer het geval onderscheiden, dat de eene rechte van δ op vier stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ rust en de andere op ν_5, en het geval, dat de eene rechte ν_1, ν_2, ν_3 snijdt, terwijl de andere ν_4 en ν_5 ontmoet.

Voor 't geval een der rechten van δ, b.v. t_1, op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ rust, is het vlak van δ bepaald door het punt μ en de rechte t_1. Men zoekt nu het snijpunt Q_5 van ν_5 met dit vlak, dan is de tweede rechte t_2 van δ de lijn, die Q_5 verbindt met het snijpunt van t_1 en ρ; immers het dubbelpunt van δ moet in ρ liggen. Daar er *twee* transversalen rusten op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ en men de vijf rechten ν op *vijf* manieren vier aan één kan rangschikken, vindt men $5 \times 2 = 10$ ontaardingen. Elk is echter dubbel te tellen, omdat ρ een dubbel raakvlak is, dus men vindt op deze wijze 20 oplossingen.

Als de eene rechte van δ, b.v. t_1, op drie rechten ν_1, ν_2, ν_3 rust, dan is de meetkundige plaats van t_1 een quadratisch regelvlak. Het vlak van δ moet door μ en t_1 gaan, is dus een raakvlak uit μ aan dit quadratische regelvlak.

De tweede lijn t_2 van δ moet in het vlak door μ en t_1 liggen en op ν_4 en ν_5 rusten. Men kan volgens het beginsel van het behoud van het aantal onderstellen, dat ν_4 en ν_5 elkaar in een punt L snijden, dus in één vlak A liggen. Een transversaal van ν_4 en ν_5 moet dus òf door L gaan òf in A liggen.

Gaat t_2 door L, dan moet het vlak van δ door μ en L gaan. Men moet dan door de rechte μ L een raakvlak aan het bovengenoemde quadratische regelvlak aanbrengen. Dit is op twee manieren mogelijk en t_1 is zoodoende op twee manieren bepaald. Nu snijdt t_1 het vlak ρ in het dubbelpunt en de verbindingslijn van dit dubbelpunt met L is t_2. Men kan $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ op 10 manieren drie aan twee rangschikken; elke rangschikking geeft twee ontaardingen en elke ontaarding is dubbel te tellen, omdat ρ een dubbel raakvlak is. Hier vindt men dus $10 \times 2 \times 2 = 40$ oplossingen.

Ligt t_2 in A, dan moet, daar t_2 het vlak ρ in het dubbelpunt snijdt, dit dubbelpunt liggen op de snijlijn van A en ρ. Op deze snijlijn moet dus t_1 ook rusten en daar deze tevens rust op ν_1, ν_2, ν_3, vindt men hier twee rechten t_1 die voldoen. Verder kan men hier ook 10 combinaties maken; elke rangschikking geeft twee rechten t_1, dus twee ontaardingen, en iedere ontaarding is dubbel te tellen, omdat ρ een dubbel raakvlak is. Ook hier vindt men dus $10 \times 2 \times 2 = 40$ oplossingen.

In het geheel zijn er $20 + 40 + 40 = 100$ antwoorden, dus

$$\underline{\delta\, \mu\, \nu^5\, \rho = 100.}$$

$\underline{\delta\, \mu\, \nu^4\, \rho^2.}$ Weer gaat het vlak der ontaarding door een gegeven punt μ en verder moeten de ontaardingen vier rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken. Het dubbelpunt der δ moet dus op de snijlijn $l_{1\,2}$ van ρ_1 en ρ_2 liggen.

Legt men eene transversaal t_1 op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, l_{1\,2}$, dan is het vlak der ontaarding bepaald door μ en t_1. Het snijpunt van t_1 met $l_{1\,2}$ is het dubbelpunt; verbindt men dit punt met het snijpunt Q_4 van ν_4 met het vlak door μ en t_1, dan is deze verbindingslijn de rechte t_2 van δ.

De rangschikking drie aan één van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ is op *vier* wijzen mogelijk; elke rangschikking geeft *twee* transversalen t_1, dus twee ontaardingen δ, en elke δ is voor vier te tellen, omdat ρ_1 en ρ_2 dubbele raakvlakken zijn. Zoo vindt men dus $4 \times 2 \times 4 = 32$ oplossingen.

Laat men de eene rechte t_1 van δ rusten op ν_1 en ν_2 en de andere rechte t_2 op ν_3 en ν_4, dan is t_1 eene beschrijvende lijn van het quadratische regelvlak (ν_1, ν_2, l_{12}) en t_2 van (ν_3, ν_4, l_{12}). Men zoekt nu uit μ een gemeenschappelijk raakvlak van deze beide regelvlakken. Er zijn *vier* gemeenschappelijke raakvlakken; één van deze kan men niet gebruiken n.l. het vlak door μ en l_{12}, de gemeenschappelijke beschrijvende lijn van beide regelvlakken. Immers de vier snijpunten van ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 met het vlak door μ en l_{12} vormen een' volledigen vierhoek, waarvan de diagonaalpunten in het algemeen niet op l_{12} liggen. Er blijven dus drie bruikbare gemeenschappelijke raakvlakken over. Men kan ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 op *drie* wijzen twee aan twee combineeren; elke combinatie geeft *drie* oplossingen en elke oplossing is voor *vier* te tellen, daar ρ_1 en ρ_2 dubbele raakvlakken zijn. Op deze manier vindt men dus $3 \times 3 \times 4 = 36$ oplossingen.

In het geheel voldoen dus $32 + 36 = 68$ antwoorden, zoodat

$$\underline{\delta \mu \nu^4 \rho^2 = 68.}$$

$\underline{\delta \mu \nu^3 \rho^3}$. Weer gaan de vlakken der ontaardingen door een gegeven punt μ, terwijl de kegelsneden drie gegeven rechten ν_1, ν_2, ν_3 moeten snijden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken.

Het dubbelpunt moet hier dus liggen in het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3. De eene rechte t_1 van δ gaat door P en rust op ν_1 en ν_2, is dus geheel bepaald. Dan is door μ en t_1 ook het vlak van δ bepaald en als ν_3 dit vlak in Q_3 snijdt, is de rechte P Q_3 de tweede lijn t_2 van δ, die ook volkomen bepaald is. Bij deze rangschikking krijgt men dus slechts éene ontaarding δ, die echter voor *acht* tellen moet, daar ρ_1, ρ_2, ρ_3 dubbele raakvlakken zijn. Omdat men ν_1, ν_2 en ν_3 op *drie* wijzen twee aan één kan rangschikken, vindt men dus in het geheel $3 \times 8 = 24$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\delta \mu \nu^3 \rho^3 = 24.}$$

$\underline{\delta \mu \nu^2 \rho^4}$. Hier zou de voorwaarde ρ^4 eischen, dat het dubbelpunt der ontaarding tegelijk in vier vlakken moest liggen. Omdat dit in het algemeen onmogelijk is, heeft men

$$\underline{\delta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4 = 0.}$$

$\underline{\delta\,\mu\,\nu\,\rho^5.}$ Om dezelfde reden is

$$\underline{\delta\,\mu\,\nu\,\rho^5 = 0.}$$

$\underline{\delta\,\mu\,\rho^6.}$ Eveneens vindt men

$$\underline{\delta\,\mu\,\rho^6 = 0.}$$

§ 5.

$\underline{\delta\,\nu^7.}$ Hier moeten de ontaardingen zeven gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6, ν_7 snijden. De eene rechte t_1 van δ snijdt ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, de andere is een transversaal t_2 van ν_5, ν_6, ν_7 en t_1. Daar er 35 combinaties vier aan drie van ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6, ν_7 zijn, terwijl elke rangschikking twee transversalen t_1 geeft en elke t_1 twee transversalen t_2, krijgt men hier $35 \times 2 \times 2 = 140$ oplossingen. Dus is

$$\underline{\delta\,\nu^7 = 140.}$$

$\underline{\delta\,\nu^6\,\rho.}$ Hier moeten de kegelsneden zes gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 snijden en een gegeven vlak ρ aanraken. Het dubbelpunt van δ moet dus in ρ liggen. Men kan hier twee stellen oplossingen vinden.

Men legt de transversaal t_1 op ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 en uit het snijpunt van t_1 met ρ de transversaal op ν_5 en ν_6; deze is dan de andere rechte t_2 van δ. Men kan 15 combinaties vier aan twee van ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 maken; elke rangschikking geeft twee rechten t_1 en elke oplossing is dubbel te tellen, omdat ρ door het dubbelpunt gaat. Op deze wijze vindt men dus $15 \times 2 \times 2 = 60$ oplossingen.

Laat men t_1 rusten op ν_1, ν_2, ν_3 en t_2 op ν_4, ν_5, ν_6, dan vormen t_1 en t_2 ieder een quadratisch regelvlak, welke beide regelvlakken ρ ieder in eene kegelsnede snijden. Deze kegelsneden hebben vier punten gemeen, waardoor dus een t_1 en een t_2 gaan. Daar er *tien* combinaties drie aan drie van ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 mogelijk zijn, terwijl iedere rangschikking *vier* ontaardingen geeft en elke ontaarding dubbel te tellen is, omdat ρ een dubbel raakvlak is, heeft men hier $10 \times 4 \times 2 = 80$ oplossingen.

In 't geheel zijn er $60 + 80 = 140$ antwoorden, dus is

$$\delta\, \nu^6\, \rho = 140.$$

$\delta\, \nu^5\, \rho^2$. De ontaardingen moeten hier vijf gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ snijden en twee gegeven vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken. Het dubbelpunt der ontaardingen ligt dus op de doorsnede l_{12} van ρ_1 en ρ_2.

Legt men een transversaal t_1 op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, l_{12}$, dan kan men uit het snijpunt van t_1 en l_{12} ééne rechte t_2 vinden, die op ν_4 en ν_5 rust. Daar er 10 combinaties drie aan twee van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ zijn, terwijl iedere rangschikking *twee* transversalen t_1, dus twee ontaardingen geeft en elke ontaarding voor *vier* te tellen is, omdat ρ_1 en ρ_2 door het dubbelpunt van δ gaan, heeft men hier $10 \times 2 \times 4 = 80$ oplossingen, zoodat

$$\delta\, \nu^5\, \rho^2 = 80.$$

$\delta\, \nu^4\, \rho^3$. Hier snijden de kegelsneden vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ en raken drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2 en ρ_3 aan. Het dubbelpunt ligt hier in het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Men legt de transversaal t_1 uit P op ν_1 en ν_2 en de transversaal t_2 uit P op ν_3 en ν_4. De ontaarding blijkt hier volkomen bepaald te zijn, doch geldt voor *acht* oplossingen, omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3 dubbele raakvlakken zijn. Men kan $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ op *drie* wijzen twee aan twee rangschikken en vindt dus $3 \times 8 = 24$ oplossingen.

Men heeft dus

$$\delta\, \nu^4\, \rho^3 = 24.$$

$\delta\, \nu^3\, \rho^4$. De ontaardingen moeten drie rechten ν_1, ν_2, ν_3 snijden en vier vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken. Daar echter het dubbelpunt in het algemeen niet in vier vlakken tegelijk ligt, heeft men hier geene oplossing, zoodat

$$\delta\, \nu^3\, \rho^4 = 0.$$

$\underline{\delta\,\nu^2\,\rho^5}$. Om dezelfde reden is

$$\underline{\delta\,\nu^2\,\rho^5 = 0.}$$

$\underline{\delta\,\nu\,\rho^6}$. Eveneens is

$$\underline{\delta\,\nu\,\rho^6 = 0.}$$

$\underline{\delta\,\rho^7}$. Ook is

$$\underline{\delta\,\rho^7 = 0.}$$

§ 6.

$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu^4}$. De ontaardingen der tweede klasse, die aan deze voorwaarden zullen voldoen, moeten vier gegeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden, terwijl haar vlak door drie gegeven punten gaat. Dit vlak is dus geheel bepaald en aangezien $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ dit vlak in vier punten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 snijden, die in het algemeen niet op éene rechte liggen, is dus in het algemeen geene oplossing mogelijk. Dus

$$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu^4 = 0.}$$

$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho}$. Ook hier is het vlak der ontaardingen door μ^3 bepaald, maar omdat de drie gegeven rechten ν_1, ν_2, ν_3 dit vlak in drie punten Q_1, Q_2, Q_3 snijden, die in het algemeen niet op éene rechte liggen, is

$$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho = 0.}$$

$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2}$. De voorwaarde μ^3 bepaalt weer het vlak van η, en dit vlak wordt door de gegeven rechten ν_1 en ν_2 in twee punten Q_1 en Q_2 gesneden. De verbindingslijn $Q_1\,Q_2$ is de lijn l van η, die dus volkomen bepaald is. De beide rangpunten zijn de snijpunten van l met de gegeven vlakken ρ_1 en ρ_2. Aangezien ν_1 en ν_2 de lijn l in een dubbelpunt snijden, is deze eenige oplossing voor *vier* te tellen, zoodat

$$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2 = 4.}$$

$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3}$. Hier is het vlak van η bekend en verder moeten een gegeven straal ν gesneden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aangeraakt worden.

Men zoekt de snijlijnen n_1, n_2, n_3 van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met het vlak μ^3, dan zal één rangpunt liggen in het snijpunt van twee der drie lijnen n. Dit rangpunt bepaalt met het snijpunt Q van ν en μ^3 de lijn l van η. Het snijpunt van l met de derde der snijlijnen n is het tweede rangpunt. Daar men n_1, n_2, n_3 op *drie* wijzen twee aan één kan rangschikken, en elke oplossing dubbel te tellen is, omdat ν de lijn l snijdt in een dubbelpunt, zijn er $3 \times 2 = 6$ oplossingen. Dus is

$$\underline{\eta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3 = 6.}$$

$\underline{\eta\,\mu^3\,\rho^4}$. Het vlak μ^3 wordt door de vier vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ gesneden volgens een volledige vierzijde, waarvan elke twee overstaande hoekpunten als rangpunten kunnen worden opgevat. Er zijn drie combinaties twee aan twee der vier snijlijnen n_1, n_2, n_3, n_4 van $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ met μ^3, zoodat er *drie* oplossingen zijn en dus

$$\underline{\eta\,\mu^3\,\rho^4 = 3.}$$

§ 7.

$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^5}$. Hier gaan de vlakken der ontaardingen door twee gegeven punten, dus door eene gegeven rechte μ^2. Verder zou de lijn l van η op vijf gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ moeten rusten, wat in het algemeen onmogelijk is, dus

$$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^5 = 0.}$$

$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^4\,\rho}$. Hier zou de lijn l op de rechte μ^2 en op de vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ moeten rusten, wat niet kan, zoodat ook

$$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^4\,\rho = 0.}$$

$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^3\,\rho^2}$. Hier moet de lijn l van η rusten op μ^2 en op drie gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, terwijl de rangpunten in de twee gegeven vlakken ρ liggen. Men legt een transversaal op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$; zij is de lijn l van η, die ρ_1 en ρ_2 in de rangpunten snijdt. Omdat er *twee* transversalen rusten op $\mu^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ en elke oplossing voor *acht* te tellen is, omdat l de drie rechten ν_1, ν_2 en ν_3 dubbel snijdt, is het aantal oplossingen $2 \times 8 = 16$, dus

$$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^3\,\rho^2 = 16.}$$

$\underline{\eta\,\mu^2\nu^2\rho^3}$. De lijn l van η moet op μ^2 en op twee gegeven stralen ν_1 en ν_2 rusten, terwijl de rangpunten in de vlakken ρ moeten liggen.

Men kan hier niet het snijpunt der drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 als eene rangpunt aannemen, want uit dit punt kan geene rechte getrokken worden, die op μ^2, ν_1, ν_2 rust. Men kan echter wel de lijn l op μ^2, ν_1, ν_2 en de snijlijn n_{12} van ρ_1 en ρ_2 leggen, dan snijdt l de lijn n_{12} in het eene en het vlak ρ_3 in het tweede rangpunt. Men kan de vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 op *drie* manieren twee aan één combineeren; elke rangschikking geeft *twee* transversalen en elke oplossing is voor *vier* te tellen, omdat l de stralen ν_1 en ν_2 dubbel snijdt, dus vindt men $3 \times 2 \times 4 = 24$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^3 = 24.}$$

$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4}$. De ontaarding rust op μ^2 en den gegeven straal ν_1 en moet de vier gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aanraken. Men kan hier twee stellen oplossingen vinden.

Laat men de lijn l van η gaan door het snijpunt P_{123} van de vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 en rusten op ν en μ^2, dan ligt het eene rangpunt in P_{123} en het andere in het snijpunt van l met ρ_4. Men kan $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ op *vier* wijzen drie aan één combineeren en elke oplossing is dubbel te tellen, daar zij ν dubbel snijdt, zoodat men hier $4 \times 2 = 8$ oplossingen vindt.

Laat men de lijn l van η rusten op μ^2, ν en de doorgangen n_{12} van ρ_1 en ρ_2 en n_{34} van ρ_3 en ρ_4, dan ligt het eene rangpunt op n_{12} en het andere op n_{34}. Er zijn voor elke rangschikking *twee* transversalen van $\nu, \mu^2, n_{12}, n_{34}$ en men kan $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ op *drie* manieren twee aan twee rangschikken. Bovendien is elke oplossing dubbel te tellen, daar ν dubbel gesneden wordt, zoodat men op deze wijze $2 \times 3 \times 2 = 12$ oplossingen vindt.

In het geheel zijn er dus $8 + 12 = 20$ oplossingen, zoodat

$$\underline{\eta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4 = 20.}$$

$\underline{\eta\,\mu^2\rho^5}$. Hier moet η rusten op μ^2 en de rangpunten moeten in de gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ liggen.

Men kan hier η leggen door het snijpunt P van drie der vijf vlakken en haar laten rusten op μ^2 en de snijlijn der overige twee vlakken ρ. De lijn l van η is dan volkomen bepaald en daar men $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ op 10 manieren drie aan twee kan rangschikken, zijn hier tien oplossingen mogelijk.

Men heeft dus

$$\eta \mu^2 \rho^5 = 10.$$

§ 8.

$\eta \mu \nu^6$. Hier gaat het vlak van η door een gegeven punt μ en moet η zes gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ snijden. Daar eene rechte niet op zes rechten kan rusten, is in het algemeen geene oplossing mogelijk, zoodat

$$\eta \mu \nu^6 = 0.$$

$\eta \mu \nu^5 \rho$. Daar de lijn l van η in het algemeen niet op vijf gegeven stralen kan rusten, is

$$\eta \mu \nu^5 \rho = 0.$$

$\eta \mu \nu^4 \rho^2$. Het vlak van η moet door een vast punt μ gaan en η moet vier gegeven stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en de rangpunten in ρ_1 en ρ_2 hebben.

Men legt de transversaal l op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$; dan is het vlak der ontaarding bepaald door μ en l. De rangpunten liggen in de snijpunten van l met ρ_1 en met ρ_2. Daar op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ twee transversalen l rusten, en iedere oplossing voor 16 te tellen is, omdat $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ dubbel gesneden worden, voldoen er $2 \times 16 = 32$ antwoorden, dus

$$\eta \mu \nu^4 \rho^2 = 32.$$

$\eta \mu \nu^3 \rho^3$. Het vlak van η gaat weer door μ en verder moeten drie gegeven rechten ν_1, ν_2, ν_3 gesneden en drie gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aangeraakt worden.

Men legt eene rechte l op ν_1, ν_2, ν_3 en de snijlijn n_{12} van ρ_1 en ρ_2. Het vlak van η is dan bepaald door μ en l. In n_{12} ligt het eene en in ρ_3 het tweede straalpunt n.l. in hun snijpunten met l. Men kan ρ_1, ρ_2, ρ_3 op *drie* manieren twee aan één combineeren; elke rangschikking geeft *twee* transversalen l, elke oplossing is voor *acht* te tellen, omdat ν_1, ν_2, ν_3 dubbel gesneden worden en men heeft dus $3 \times 2 \times 8 = 48$ oplossingen, zoodat

$$\eta\, \mu\, \nu^3\, \rho^3 = 48.$$

$\eta\, \mu\, \nu^2\, \rho^4$. Weer gaat het vlak door μ; hier moeten twee rechten ν_1 en ν_2 gesneden en vier vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ aangeraakt worden. Men kan hier weer twee stellen oplossingen vinden.

Legt men l door het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3 en op ν_1 en ν_2, dan is het vlak van η bepaald door μ en l. Het eene rangpunt is het snijpunt P der vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, het tweede rangpunt is het snijpunt van l met ρ_4. Men kan $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ op *vier* manieren drie aan één combineeren en elke oplossing is voor *vier* te tellen, omdat ν_1 en ν_2 dubbel gesneden worden. Men vindt dus $4 \times 4 = 16$ oplossingen.

Legt men l op ν_1, ν_2 en de snijlijnen n_{12} van ρ_1 en ρ_2 en n_{34} van ρ_3 en ρ_4, dan is het vlak weer door μ en l bepaald. De snijpunten van l met n_{12} en n_{34} zijn de rangpunten. Men kan $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ op *drie* wijzen twee aan twee combineeren; elke rangschikking geeft *twee* lijnen l en elke oplossing is voor *vier* te tellen, omdat ν_1 en ν_2 dubbel gesneden worden. Hier vindt men dan $3 \times 2 \times 4 = 24$ oplossingen.

In het geheel zijn er $16 + 24 = 40$ oplossingen, dus

$$\eta\, \mu\, \nu^2\, \rho^4 = 40.$$

$\eta\, \mu\, \nu\, \rho^5$. Het vlak van η gaat door μ en η moet éene rechte ν snijden en vijf vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken.

Men kan de lijn l van η door het snijpunt P van ρ_1, ρ_2, ρ_3 trekken en op ν en de snijlijn n_{54} van ρ_5 en ρ_4 laten rusten. Men kan $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ op *tien* manieren drie aan twee rangschikken en elke oplossing is dubbel te tellen, omdat ν dubbel gesneden wordt.

Dus er zijn $10 \times 2 = 20$ oplossingen, zoodat

$$\eta\, \mu\, \nu\, \rho^5 = 20.$$

$\eta\, \mu\, \rho^6$. Het vlak gaat door μ en er moeten zes gegeven vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ aangeraakt worden.

Men legt hier l door de snijpunten P van ρ_1, ρ_2, ρ_3 en Q van ρ_4, ρ_5, ρ_6. Het vlak van η is dan door μ en l bepaald. De zes vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ kan men op *tien* wijzen drie aan drie combineeren, zoodat er 10 oplossingen zijn en dus

$$\eta \mu \rho^6 = 10.$$

$\eta \nu^7$. De lijn l van η kan niet op zeven rechten rusten, dus

$$\eta \nu^7 = 0.$$

$\eta \nu^6 \rho$. De lijn l van η kan ook niet zes rechten snijden, dus

$$\eta \nu^6 \rho = 0.$$

$\eta \nu^5 \rho^2$. Ook kan de lijn l van η niet vijf rechten ontmoeten, dus

$$\eta \nu^5 \rho^2 = 0.$$

$\eta \nu^4 \rho^3$. Daar l ook niet tegelijk op vier rechten en op de snijlijn van twee vlakken ρ kan rusten, is

$$\eta \nu^4 \rho^3 = 0.$$

$\eta \nu^3 \rho^4$. De lijn l kan niet drie lijnen ν snijden en tevens twee snijlijnen der vlakken ρ, zoodat

$$\eta \nu^3 \rho^4 = 0.$$

$\eta \nu^2 \rho^5$. Ook kan de lijn l niet op twee lijnen ν en eene snijlijn van twee vlakken ρ rusten en door het snijpunt der overige drie vlakken ρ gaan, zoodat

$$\eta \nu^2 \rho^5 = 0.$$

$\eta \nu \rho^6$. De lijn l kan niet de rechte ν ontmoeten en door twee punten n.l. de snijpunten van ρ_1, ρ_2, ρ_3 en ρ_4, ρ_5, ρ_6 gaan, dus

$$\eta \nu \rho^6 = 0.$$

$\eta \rho^7$. Daar de lijn l niet door de snijpunten van ρ_1, ρ_2, ρ_3 en van ρ_4, ρ_5, ρ_6 kan gaan en tegelijk in één van deze twee punten het vlak ρ_7 ontmoeten, is dus

$$\eta \rho^7 = 0.$$

HOOFDSTUK IV.

Over stelsels van ∞^1 kegelsneden en daardoor gevormde oppervlakken.

§ 1.

$\underline{\mu^3 \nu^4.}$ Hier vindt men het stelsel kegelsneden, waarvan het vlak gegeven is door de voorwaarde μ^3. De kegelsneden moeten vier stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden, dus gaan door de vier snijpunten P_1, P_2, P_3, P_4 van μ^3 met $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$. Dit stelsel is klaarblijkelijk een bundel kegelsneden.

De bekende twee parabolen hierin vindt men, door er een raakvlak bij te nemen en dan de snijlijn van dit raakvlak met μ^3 naar het oneindige te laten gaan. De voorwaarde $\mu^3 \nu^4 \rho$ gaf twee kegelsneden, die hier dus tot parabolen worden.

De bekende ontaardingen van den bundel ziet men terug in de voorwaarden: $\delta \mu^3 \nu^4 = 3$ en $\eta \mu^3 \nu^4 = 0$.

Als bijzonder geval van dezen bundel kegelsneden vindt men een cirkelbundel, en wel als de snijpunten van ν_1 en ν_2 met μ^3 in de cyclische punten van het vlak liggen. Alle cirkels van dezen bundel gaan door P_3 en P_4, dus de meetkundige plaats hunner middelpunten is de middelloodlijn op $P_3 P_4$.

$\underline{\mu^3 \nu^3 \rho.}$ Hier vindt men een stelsel kegelsneden, waarvan het vlak μ^3 is. Alle kegelsneden gaan door de snijpunten P_1, P_2, P_3 van de rechten ν_1, ν_2, ν_3 met μ^3 en raken de snijlijn l van ρ met μ^3 aan.

In dit stelsel zijn *vier* parabolen, want neemt men er een tweede raakvlak ρ bij, dan ontstaat de voorwaarde $\mu^3 \nu^3 \rho^2 = 4$

en laat men nu de snijlijn van dit vlak ρ naar het oneindige gaan, dan worden deze vier kegelsneden tot parabolen.

De ontaardingen van dit stelsel vindt men uit de voorwaarden $\delta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho = 6$ en $\eta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho = 0$ en dit zijn *drie* lijnenparen, die elk dubbel in rekening gebracht worden.

De meetkundige plaats van de middelpunten der kegelsneden zal hier eene kromme van den vierden graad zijn met *vier* punten in het oneindige. De vier parabolen in het stelsel $\mu^3\,\nu^3\,\rho$ geven *vier* middelpunten in het oneindige, dus de meetkundige plaats moet ook deze punten in het oneindige bezitten.

Een bijzonder geval krijgt men ook hier, door twee snijpunten b.v. die van ν_1 en ν_2 met μ^3, naar de cyclische punten te brengen. Alle cirkels gaan door het snijpunt P_3 van ν_3 met μ^3 en raken de snijlijn l van ρ met μ^3 aan. Een dezer cirkels is M A, als A het voetpunt der loodlijn uit P_3 op l is en M het midden van P_3 A. Verder voldoet als grensgeval de lijn in het oneindige met de rechte door P_3 evenwijdig met l; deze heeft haar middelpunt dus in het oneindige. De meetkundige plaats der middelpunten zal hier een parabool zijn met M tot top en symmetrisch ten opzichte van P_3 A.

$\mu^3\,\nu^2\,\rho^2$. Dit stelsel kegelsneden ligt weer in het vlak μ^3 en alle exemplaren moeten gaan door de snijpunten P_1 en P_2 van μ^3 met ν_1 en ν_2 en de snijlijnen l_1 en l_2 van μ^3 met ρ_1 en ρ_2 aanraken.

In dit stelsel zijn *vier* parabolen, want neemt men er een derde raakvlak bij, dan ontstaat de voorwaarde $\mu^3\,\nu^2\,\rho^3 = 4$ en deze kegelsneden worden tot parabolen, als men de snijlijn van μ^3 met dit derde raakvlak naar het oneindige verlegt.

Men vindt hier de ontaardingen uit de voorwaarden $\delta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2 = 4$ en $\eta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2 = 4$ en wel ééne viervoudige ontaarding van den tweeden graad en ééne viervoudige ontaarding der tweede klasse.

De meetkundige plaats der middelpunten van de kegelsneden in dit stelsel is eene kromme van den vierden graad met *vier* punten in het oneindige, immers de middelpunten der vier parabolen liggen in het oneindige.

Een bijzonder geval van dit stelsel kegelsneden vindt men, als men P_1 en P_2 in de cyclische punten legt. Er ontstaat dan een stelsel cirkels, die l_1 en l_2 aanraken, zoodat de meetkundige plaats hunner middelpunten gevormd wordt door de twee deellijnen der hoeken, die l_1 en l_2 met elkaar maken.

$\mu^3 \nu \rho^3$. Het vlak μ^3 der kegelsneden is weer bekend en alle kegelsneden moeten eene rechte ν snijden en drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken; zij gaan dus door het snijpunt P van ν met μ^3 en raken de snijlijnen l_1, l_2, l_3, van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met μ^3 aan.

In dit stelsel vindt men de parabolen, door er een vierde raakvlak bij te nemen, waardoor de voorwaarde $\mu^3 \nu \rho^4 = 2$ ontstaat. Men verlegt de raaklijn in μ^3 naar het oneindige en vindt dan *twee* parabolen.

De ontaardingen van dit stelsel vindt men uit $\delta \mu^3 \nu \rho^3 = 0$ en $\eta \mu^3 \nu \rho^3 = 6$, dus zes ontaardingen der tweede klasse, die echter drie dubbel getelde zijn.

Men vindt hier geen cirkelbundel als bijzonder geval, daar er geen twee punten gegeven zijn, waardoor alle kegelsneden moeten gaan.

$\mu^3 \rho^4$. Dit stelsel kegelsneden in μ^3 bevat alle exemplaren, die de snijlijnen l_1, l_2, l_3, l_4 van $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ met μ^3 aanraken. Dit is klaarblijkelijk eene schaar kegelsneden. De eene parabool der schaar vindt men, als men er een vijfde raakvlak bij neemt, zoodat de voorwaarde $\mu^3 \rho^5 = 1$ ontstaat, en vervolgens de snijlijn van dit vijfde raakvlak met μ^3 naar het oneindige verlegt.

De bekende ontaardingen van de schaar vindt men terug uit $\delta \mu^3 \rho^4 = 0$ en $\eta \mu^3 \rho^4 = 3$, dus de drie ontaardingen der tweede klasse.

Ook hier vindt men geen cirkelbundel als bijzonder geval.

---

§ 2.

$\mu^2 \nu^5$. De kegelsneden, waarvan de vlakken door twee gegeven punten, dus door eene gegeven rechte μ^2 gaan, en die vijf stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ snijden, vormen een oppervlak van den achtsten graad. Immers zoekt men het aantal snijpunten van dit oppervlak met eene willekeurige rechte, m. a. w. het aantal kegelsneden, dat voldoet aan $\mu^2 \nu^6$, dan is dit aantal *acht*.

De gegeven rechte μ^2 zal eene zesvoudige rechte op dit oppervlak zijn. Legt men n.l. een willekeurig vlak door μ^2, dan vindt men daarin, behalve de rechte μ^2, slechts ééne kegelsnede, die de vijf rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ ontmoet. Daar de doorsnijding in dit vlak van den achtsten graad is, moet μ^2 zesmaal tot het oppervlak behooren. Uit eenig punt van μ^2 zullen dus *zes* kegelsneden van dit stelsel gaan; hieruit vindt men eene vroeger gevonden waarde terug, n.l. $P \mu \nu^5 = 6$.

Dan volgt hieruit, dat de kegelsneden, die voldoen aan de voorwaarde $P \mu \nu^4$, dus door een gegeven punt gaan, vier stralen snijden en hun vlak door een bepaald punt zenden, een oppervlak vormen van den zesden graad. Op dit oppervlak zal $P \mu$ eene viervoudige rechte zijn; want legt men eenig vlak door $P \mu$, dan vindt men daarin, behalve de rechte $P \mu$, slechts ééne kegelsnede, welke door vijf punten gaat. De doorsnede is van den zesden graad, dus de rechte $P \mu$ moet viermaal tot het oppervlak behooren.

Het punt P zal op deze rechte een vijfvoudig punt zijn, omdat de eene kegelsnede er ook nog door gaat.

Uit elk punt van $P \mu$ gaan dus *vier* kegelsneden van dit stelsel, zoodat men hier weer terugvindt $P^2 \nu^4 = 4$.

De kegelsneden, die voldoen aan de voorwaarde $P^2 \nu^3$, dus door twee punten gaan en drie stralen snijden, vormen derhalve een oppervlak van den vierden graad. Hierop is $P_1 P_2$ eene dubbelrechte, omdat een willekeurig vlak door $P_1 P_2$ als doorsnede behalve $P_1 P_2$ slechts ééne kegelsnede bevat. De punten P_1 en P_2 zijn drievoudige punten op dit oppervlak, daar deze ééne kegelsnede ook door beide punten gaat.

Op de zesvoudige rechte μ^2 van het oppervlak, gevormd door de kegelsneden, die aan de voorwaarde $\mu^2 \nu^5$ voldoen, vormen die kegelsneden eene verwantschap, waarin met elk punt der eene reeks zes punten der andere overeenkomen. Deze (6, 6) bevat 12 coïncidenties; dus vindt men hier terug, dat $T \nu^5 = 12$ is, want elke coïncidentie geeft aan, dat eene kegelsnede raakt aan μ^2.

Op dit oppervlak vindt men ook rechte lijnen, gevormd door de ontaarde kegelsneden. Omdat n.l. $\delta \mu^2 \nu^5 = 20$ en $\varkappa \mu^2 \nu^5 = 0$, liggen er 20 ontaardingen van den tweeden graad of 40 enkelvoudige rechten op dit oppervlak.

Ook de rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ liggen op het oppervlak, daar zij door alle kegelsneden gesneden worden. Zij zijn enkelvoudig, want een willekeurig vlak door μ^2 geeft slechts éene kegelsnede, die haar snijdt.

Een willekeurig vlak ϕ snijdt het oppervlak in eene kromme van den achtsten graad met een zesvoudig punt L, den doorgang van ϕ met de zesvoudige rechte μ^2. De klasse dier kromme zij k, dan is $k = n(n - 1) - 2\delta - 3\varkappa$, waarin n den graad der kromme, δ haar aantal dubbelpunten en $\varkappa$ haar aantal keerpunten voorstelt. Omdat het zesvoudige punt L telt voor $\frac{1}{2} \times 6 \times 5$ dubbelpunten en er verder geene dubbel- of keerpunten zijn, is $k = 8 \times 7 - 6 \times 5 = 26$. Uit het zesvoudige punt L gaan naar deze kromme dus nog $26 - 2 \times 6 = 14$ raaklijnen. Aan het vlak ϕ zullen dus 14 kegelsneden van het stelsel moeten raken en omdat ϕ geheel willekeurig genomen is, vindt men hier terug, dat $\mu^2 \nu^5 \rho = 14$ is.

Er zullen 14 parabolen op dit oppervlak liggen, want legt men het vlak ϕ in het oneindige, dan worden de 14 kegelsneden, die ϕ aanraken, tot parabolen.

De meetkundige plaats der middelpunten van de kegelsneden in het stelsel $(\mu^2 \nu^5)$ is eene ruimtekromme van den 14^{en} graad; immers er liggen 14 punten in het oneindige. Elk vlak door μ^2 geeft slechts éene kegelsnede door vijf punten, dus één punt der meetkundige plaats buiten μ^2. Dus μ^2 wordt 13 maal door deze ruimtekromme gesneden.

$\mu^2 \nu^4 \rho$. De kegelsneden, die aan deze voorwaarde voldoen, vormen een oppervlak van den 14den graad. Immers het aantal snijpunten van dit oppervlak met eene rechte wordt bepaald door de waarde van $\mu^2 \nu^5 \rho$ en deze is 14.

De rechte μ^2 is eene tienvoudige rechte op dit oppervlak. Legt men n.l. een willekeurig vlak door μ^2, dan liggen, behalve μ^2, in dat vlak twee kegelsneden, die door de vier snijpunten met $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ gaan en de snijlijn met ρ aanraken. Daar de doorsnijding van den graad 14 is, moet μ^2 tienvoudig zijn. Uit elk punt van μ^2 gaan dus 10 kegelsneden van dit stelsel, waaruit men terugvindt, dat $P \mu \nu^4 \rho = 10$ is.

De kegelsneden, die voldoen aan de voorwaarde $P \mu \nu^3 \rho$, vormen dus een oppervlak van den tienden graad met eene zesvoudige rechte $P \mu$, omdat een vlak door $P \mu$ behalve deze rechte twee kegelsneden bevat en de doorsnede van den tienden graad moet zijn.

Uit elk punt van de rechte $P \mu$ gaan dus *zes* kegelsneden van dit stelsel, waaruit weer volgt, dat $P^2 \nu^3 \rho = 6$ is. Dus de kegelsneden, die voldoen aan de voorwaarde $P^2 \nu^2 \rho$, vormen een oppervlak van den zesden graad met een dubbelrechte $P_1 P_2$, want een vlak door $P_1 P_2$ bevat, behalve deze rechte, nog twee kegelsneden, en de doorsnijding moet van den graad zes zijn. De punten P_1 en P_2 zijn dan viervoudige punten op dit oppervlak, omdat de beide kegelsneden ook door P_1 en P_2 gaan.

Op de tienvoudige rechte μ^2 van het oppervlak $(\mu^2 \nu^4 \rho)$ bepalen de kegelsneden eene verwantschap (10, 10). Deze heeft 20 coïncidenties, zoodat μ^2 door 20 kegelsneden wordt aangeraakt, waaruit men terugvindt, dat $T \nu^4 \rho = 20$ is.

Op dit oppervlak liggen ook rechte lijnen, gevormd door de ontaarde kegelsneden in het stelsel $\mu^2 \nu^4 \rho$. Omdat $\delta \mu^2 \nu^4 \rho = 34$ en $\eta \mu^2 \nu^4 \rho = 0$, vindt men hier 34 ontaardingen van den tweeden graad, dus 34 rechte lijnen, omdat elke figuur δ in het genoemde aantal voor eene dubbele oplossing is gerekend.

Ook de rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ liggen op dit oppervlak, omdat alle kegelsneden op hen rusten. Zij zijn evenwel dubbelrechten, omdat een vlak door μ^2 twee kegelsneden bevat, die $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden. Door elk punt van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ gaan dus twee raakvlakken aan het oppervlak.

$\mu^2 \nu^3 \rho^2$. Het oppervlak, dat gevormd wordt door de kegelsneden, die aan deze voorwaarde voldoen, is van den graad 24, omdat $\mu^2 \nu^4 \rho^2 = 24$.

Een willekeurig vlak door μ^2 geeft *vier* kegelsneden, die door de drie snijpunten met ν_1, ν_2, ν_3 gaan en de snijlijnen met ρ_1 en ρ_2 aanraken. Daar de doorsnede in dit vlak van den graad 24 is, moet μ^2 eene zestienvoudige rechte op dit oppervlak zijn. Uit elk punt van μ^2 gaan dus 16 kegelsneden, waaruit men terugvindt, dat $P \mu \nu^3 \rho^2 = 16$ is.

De kegelsneden, die aan de voorwaarde $P \mu \nu^2 \rho^2$ voldoen, zullen dus een oppervlak van den graad 16 vormen, waarop $P \mu$ eene achtvoudige rechte is. Immers in een vlak door $P \mu$ liggen, behalve $P \mu$ zelf, vier kegelsneden door drie punten, die twee rechten aanraken. Uit elk punt van $P \mu$ gaan dus *acht* kegelsneden van dit stelsel, waaruit volgt dat $P^2 \nu^2 \rho^2 = 8$ is.

De kegelsneden met de voorwaarde $P^2 \nu \rho^2$ vormen dus een oppervlak van den achtsten graad. Omdat in een vlak door $P_1 P_2$ *vier* kegelsneden liggen en de doorsnijding van den graad acht is, ligt de rechte $P_1 P_2$ *niet* op dit oppervlak. De punten P_1 en P_2 zijn echter viervoudige punten op dit oppervlak, want in elk vlak door P_1 en P_2 gaan vier kegelsneden door beide punten.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3 zijn viervoudige rechten op het oppervlak $(\mu^2 \nu^3 \rho^2)$. Immers in een vlak door μ^2 liggen vier kegelsneden, die deze rechten snijden.

Verder liggen op dit oppervlak nog rechte lijnen, gevormd door de ontaarde kegelsneden van het stelsel $\mu^2 \nu^3 \rho^2$. Deze vindt men uit $\delta \mu^2 \nu^3 \rho^2 = 24$ en $\eta \mu^2 \nu^3 \rho^2 = 16$ en dit zijn *zes* viermaal getelde ontaardingen van den tweeden graad en *twee* achtmaal getelde ontaardingen der tweede klasse. Op dit oppervlak liggen dus nog $12 + 2 = 14$ rechte lijnen.

Op de 16-voudige rechte μ^2 vormen de kegelsneden van het stelsel $\mu^2 \nu^3 \rho^2$ eene verwantschap (16, 16). Deze heeft 32 coïncidenties, doch deze zijn niet alle raakpunten voor kegelsneden. Op dit oppervlak liggen nl. ontaardingen der tweede klasse, die op μ^2 rusten en dus μ^2 in twee samenvallende punten snijden. Daar echter geen rangpunt van deze ontaardingen op μ^2 ligt, is dus μ^2 geene raaklijn der figuur. Om dus het aantal kegelsneden te vinden, dat aan μ^2 raakt, moet men van de 32 coïncidenties aftrekken de 16 coïncidenties, ontstaan uit de snijding van μ^2 met de ontaardingen der tweede klasse. Dus μ^2 is raaklijn voor 16 kegelsneden, waaruit men terugvindt, dat T $\nu^3 \rho^2 = 16$ is.

$\underline{\mu^2 \nu^2 \rho^3}$. Daar $\mu^2 \nu^3 \rho^3 = 24$, is het oppervlak, gevormd door de kegelsneden, die aan de voorwaarde $\mu^2 \nu^2 \rho^3$ voldoen, van den 24sten graad.

Dit oppervlak bevat μ^2 als zestienvoudige rechte, want in een vlak door μ^2 liggen *vier* kegelsneden door de snijpunten met ν_1 en ν_2, die de snijlijnen met ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken. Daar de doorsnede van den graad 24 is, moet μ^2 16-voudig zijn. Uit elk punt van μ^2 gaan dus 16 kegelsneden van dit stelsel, zoodat P $\mu \nu^2 \rho^3 = 16$.

De kegelsneden met de voorwaarde P $\mu \nu \rho^3$ vormen dus een oppervlak van den zestienden graad. Dit bevat de achtvoudige rechte P μ, omdat in een vlak door P μ, behalve deze rechte, *vier* kegelsneden liggen en de doorsnede van den graad zestien is. Uit elk punt van P μ gaan dus *acht* kegelsneden van dit stelsel, zoodat $P^2 \nu \rho^3 = 8$.

De kegelsneden met de voorwaarde $P^2 \rho^3$ vormen dus een oppervlak van den graad 8, waarop de rechte $P_1 P_2$ *niet* ligt, want een vlak door $P_1 P_2$ geeft als doorsnijding *vier* kegelsneden. De punten P_1 en P_2 zijn echter viervoudige punten op dit oppervlak, want in eenig vlak door P_1 en P_2 liggen vier kegelsneden door deze beide punten.

Op het oppervlak $(\mu^2 \nu^2 \rho^3)$ zijn ν_1 en ν_2 viervoudige rechten, omdat in een vlak door μ^2 vier kegelsneden liggen, die op ν_1 en ν_2 rusten.

Ook liggen er nog rechten op dit oppervlak, afkomstig van de ontaardingen in dit stelsel en deze vindt men uit $\delta \mu^2 \nu^2 \rho^3 = 8$ en $\eta \mu^2 \nu^2 \rho^3 = 24$. Dit zijn echter éene ontaarding van den tweeden graad, die achtmaal in rekening is gebracht en zes ontaardingen der tweede klasse, die elk voor vier geteld moeten worden. Dan liggen er dus $2 + 6 = 8$ rechten op dit oppervlak.

Op de zestienvoudige rechte μ^2 vormen de kegelsneden van dit stelsel $\mu^2 \nu^2 \rho^3$ eene verwantschap (16, 16), die 32 coïncidenties heeft. Hieronder zijn ook de snijpunten van μ^2 met de ontaardingen der tweede klasse en dit zijn er 24. Daar μ^2 hiervoor geene raaklijn is, omdat geen straalpunt op μ^2 ligt, zijn er maar *acht* kegelsneden, die μ^2 aanraken. Daaruit vindt men terug, dat $T \nu^2 \rho^3 = 8$ is.

$\mu^2 \nu \rho^4$. De kegelsneden, die aan deze voorwaarde voldoen, vormen een oppervlak van den zestienden graad, omdat $\mu^2 \nu^2 \rho^4 = 16$.

In μ^2 heeft dit oppervlak eene 12-voudige rechte, omdat een vlak door μ^2 als doorsnede, behalve μ^2, nog *twee* kegelsneden bevat, die door een punt gaan en vier rechten raken. Uit elk punt van μ^2 gaan dus 12 kegelsneden van dit stelsel, zoodat men terugvindt, dat $P \mu \nu \rho^4 = 12$ is.

De kegelsneden, die aan de voorwaarde $P \mu \rho^4$ voldoen, vormen een oppervlak van den twaalfden graad met de achtvoudige rechte $P \mu$. Immers in een vlak door $P \mu$ liggen, behalve deze rechte, nog twee kegelsneden. Uit elk punt van $P \mu$ gaan dus 8 kegelsneden, waaruit opnieuw volgt, dat $P^2 \rho^4 = 8$ is.

De rechte ν is eene dubbelrechte op het oppervlak $(\mu^2 \nu \rho^4)$, want in eenig vlak door μ^2 liggen twee kegelsneden, die beide op ν rusten.

Verder liggen er op het oppervlak nog rechte lijnen, die afkomstig zijn van de ontaardingen in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta \mu^2 \nu \rho^4 = 0$ en $\eta \mu^2 \nu \rho^4 = 20$ en wel alleen 10 ontaardingen der tweede klasse, die elk tweemaal in rekening worden gebracht. Dus door μ^2 gaan 10 vlakken, die het oppervlak langs eene rechte raken.

Op de 12-voudige rechte μ^2 vormen de kegelsneden eene verwantschap (12, 12), dus met 24 coïncidenties. Hieronder zijn er 20, afkomstig van de 20 ontaardingen der tweede klasse en die niet meetellen voor raakpunten. Er zijn dus *vier* kegelsneden, die μ^2 aanraken, waaruit opnieuw volgt, dat $T \nu \rho^4 = 4$ is.

$\underline{\mu^2 \rho^5}$. De kegelsneden vormen hier een oppervlak van den achtsten graad, omdat $\mu^2 \nu \rho^5 = 8$.

In μ^2 heeft dit oppervlak eene zesvoudige rechte, omdat een vlak hierdoor, behalve μ^2, slechts ééne kegelsnede bevat, die aan vijf rechten raakt. Uit elk punt van μ^2 gaan dus *zes* kegelsneden van dit stelsel, waaruit men terugvindt, dat $P \mu \rho^5 = 6$ is.

Op het oppervlak $(\mu^2 \rho^5)$ liggen rechte lijnen, afkomstig van de ontaardingen in het stelsel. Deze vindt men uit $\delta \mu^2 \rho^5 = 0$ en $\eta \mu^2 \rho^5 = 10$, dus 10 enkelvoudige ontaardingen der tweede klasse.

Een willekeurige doorsnede van het oppervlak met een vlak ϕ is eene kromme van den graad 8 met een zesvoudig punt L. Dit punt is het snijpunt van de zesvoudige rechte μ^2 met ϕ. Deze kromme is dus van de klasse $8 \times 7 - 6 \times 5 = 26$ en het aantal raaklijnen uit L aan deze kromme is dus $26 - 2 \times 6 = 14$. Maar hieronder zijn 10 oneigenlijke raaklijnen, want de 10 ontaardingen der tweede klasse geven in ϕ ook twee samenvallende punten. Dit zijn in het algemeen geene raaklijnen voor die ontaardingen, want hare straalpunten liggen in het algemeen niet in ϕ. Dus ϕ wordt door vier kegelsneden aangeraakt en men vindt hier dus terug, dat $\mu^2 \rho^6 = 4$ is.

Op de zesvoudige rechte μ^2 van het oppervlak $(\mu^2 \rho^5)$ bepalen de kegelsneden eene verwantschap (6, 6) met 12 coïncidenties. De tien ontaardingen der tweede klasse op dit oppervlak geven wel coïncidenties, doch geene raakpunten, zoodat μ^2 maar door *twee* kegelsneden wordt aangeraakt, waaruit men terugvindt, dat $T\rho^5 = 2$ is.

---

§ 3.

$\mu\nu^6$. De kegelsneden, waarvan het vlak door een gegeven punt μ gaat en die zes gegeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ snijden, vormen een oppervlak van den 34sten graad, omdat het aantal snijpunten van dit oppervlak met eene rechte 34 is; immers $\mu\nu^7 = 34$.

Op dit oppervlak liggen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ als zesvoudige rechten, want uit eenig punt P op ν_1 gaan zes kegelsneden van dit stelsel, omdat $P.\mu\nu^5 = 6$ is.

Verder liggen op dit oppervlak rechte lijnen, die afkomstig zijn van de ontaarde kegelsneden in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta\mu\nu^6 = 70$ en $\eta\mu\nu^6 = 0$; de 70 ontaardingen van den tweeden graad leveren 140 rechten op dit oppervlak.

De meetkundige plaats der kegelsneden, die door een punt P gaan, vier rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden en waarvan het vlak door μ gaat, is een oppervlak van den zesden graad. Immers $P\mu\nu^5 = 6$, dus het oppervlak geeft zes snijpunten met eene rechte.

Elk der rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ is eene enkelvoudige rechte op het oppervlak $(P\mu\nu^4)$, omdat uit elk van haar punten slechts ééne kegelsnede van dit stelsel gaat. Legt men n.l. een vlak door P, door een punt P' van ν_1 en door μ, dan ligt daarin slechts ééne kegelsnede door P, P' en de snijpunten van dit vlak met ν_2, ν_3, ν_4.

Ook liggen er ontaardingen op dit oppervlak, want legt men eene rechte t uit P op ν_1, ν_2, en vervolgens een vlak door μ en t, dan vormt de verbindingslijn van de beide snijpunten van dit vlak met ν_3 en ν_4 de tweede rechte t' van een lijnenpaar, dat voldoet. Daar er *zes* combinaties van de vier rechten zijn te maken, vindt men dus zes ontaardingen van den tweeden graad op dit oppervlak; hierop liggen dus, behalve $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$, nog 12 rechte lijnen.

$\mu\, \nu^5\, \rho$. De kegelsneden, die vijf rechten ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 snijden, een vlak ρ aanraken en haar vlak door μ zenden, vormen een oppervlak van den graad 52, omdat $\mu\, \nu^6\, \rho = 52$ is.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 zijn tienvoudige rechten op dit oppervlak, want uit eenig punt op een dezer rechten gaan tien kegelsneden van dit stelsel, omdat P $\mu\, \nu^4\, \rho = 10$ is.

Verder liggen op dit oppervlak nog rechte lijnen, die afkomstig zijn van ontaarde kegelsneden. Deze vindt men uit $\delta\, \mu\, \nu^5\, \rho = 100$ en $\eta\, \mu\, \nu^5\, \rho = 0$. Er liggen 50 dubbelgetelde ontaardingen van den tweeden graad, dus 100 rechten op dit oppervlak.

De meetkundige plaats der kegelsneden, die door een punt P gaan, drie rechten ν_1, ν_2, ν_3 snijden en een vlak ρ aanraken, terwijl haar vlak door μ gaat, is een oppervlak van den tienden graad, omdat P $\mu\, \nu^4\, \rho = 10$ is.

Elk der rechten ν_1, ν_2, ν_3 is eene dubbelrechte op dit oppervlak, omdat uit elk harer punten twee kegelsneden van dit stelsel gaan. Legt men n.l. een vlak door P, door een punt P′ van ν_1, en door μ, dan liggen daarin *twee* kegelsneden door vier punten, die eene rechte aanraken.

Er liggen ook ontaardingen op het oppervlak (P $\mu\, \nu^3\, \rho$). Legt men n.l. eene rechte t uit P op ν_1 en ν_2, vervolgens het vlak door μ en t en verbindt men het snijpunt van dit vlak en ν_3 met den doorgang van t op ρ, dan vormt deze verbindingslijn met t eene ontaarding van den tweeden graad, die voldoet. Men vindt *drie* combinaties van de drie rechten ν twee aan één, dus dit geeft drie lijnenparen of zes rechten op dit oppervlak.

$\mu\, \nu^4\, \rho^2$. De kegelsneden, die aan deze voorwaarden voldoen, vormen een oppervlak van den 76sten graad, omdat $\mu\, \nu^5\, \rho^2 = 76$ is.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 zijn 16-voudige rechten op dit oppervlak, want uit eenig punt op ν_1 gaan 16 kegelsneden van dit stelsel, omdat P $\mu\, \nu^3\, \rho^2 = 16$ is.

Verder liggen op dit oppervlak nog rechte lijnen, die afkomstig zijn van de ontaardingen in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta\,\mu\,\nu^4\,\rho^2 = 68$ en $\eta\,\mu\,\nu^4\,\rho^2 = 32$. Dit zijn 17 viermaal getelde lijnenparen en twee 16-maal getelde ontaardingen der tweede klasse. Dit geeft dus samen $34 + 2 = 36$ rechte lijnen op het oppervlak.

De kegelsneden, die door een punt P gaan, twee rechten ν_1 en ν_2 snijden, twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken en haar vlak door μ zenden, vormen een oppervlak van den graad 16, omdat $P\,\mu\,\nu^3\,\rho^2 = 16$ is.

De rechten ν_1 en ν_2 zijn viervoudige rechten op dit oppervlak, want uit elk van haar punten gaan *vier* kegelsneden van dit stelsel. Legt men n.l. een vlak door P, door een punt P' van ν_1, en door μ, dan liggen daarin vier kegelsneden, die door drie punten gaan en twee rechten aanraken.

Er liggen ook ontaardingen op dit oppervlak $(P\,\mu\,\nu^2\,\rho^2)$, want legt men eene rechte t uit P op ν_1 en op de snijlijn l_{12} van ρ_1 en ρ_2, vervolgens een vlak door μ en t en zoekt dan het snijpunt Q van ν_2 met dit vlak, dan vormt de verbindingslijn van Q met het snijpunt van t en l_{12} de tweede rechte t' van een lijnenpaar, waarvan t de andere rechte is. Zoo vindt men er nog een, dus er liggen twee lijnenparen of vier rechten op het oppervlak.

Ook is er eene ontaarding der tweede klasse. Legt men n.l. de rechte t uit P op ν_1 en ν_2, dan voldoet deze als dubbelrechte, waarvan het vlak door μ en t bepaald is. Hare rangpunten liggen in de doorgangen van t op ρ_1 en ρ_2. Langs haar ligt een raakvlak door μ aan het oppervlak.

$\underline{\mu\,\nu^3\,\rho^3.}$ Dit stelsel kegelsneden vormt een oppervlak van den graad 72, omdat $\mu\,\nu^4\,\rho^3 = 72$ is.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3 liggen er op en zijn 16-voudig, omdat uit een willekeurig punt van ν_1 zestien kegelsneden gaan; immers $P\,\mu\,\nu^2\,\rho^3 = 16$.

Verder liggen op dit oppervlak nog rechte lijnen, afkomstig van de ontaarde kegelsneden in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta\,\mu\,\nu^3\,\rho^3 = 24$ en $\eta\,\mu\,\nu^3\,\rho^3 = 48$ en wel *drie* achtmaal getelde ontaardingen van den tweeden graad en *zes* achtmaal getelde ontaardingen der tweede klasse. Er zijn dus samen $6 + 6 = 12$ rechten op dit oppervlak.

De kegelsneden, die door een punt P gaan, eenè rechte ν snijden, drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken en hun vlak door μ laten gaan, vormen een oppervlak van den graad 16, omdat $P\, \mu\, \nu^2\, \rho^3 = 16$ is.

De rechte ν is eene viervoudige rechte op dit oppervlak, want uit elk van haar punten gaan *vier* kegelsneden van dit stelsel. Immers, legt men een vlak door P, door een punt P' van ν, en door μ, dan liggen daarin vier kegelsneden door twee punten, die drie rechten aanraken.

Er liggen ook ontaardingen op dit oppervlak. Verbindt men het snijpunt Q van de vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 met P door eene rechte t; legt daarna het vlak door μ en t en zoekt het snijpunt R van dit vlak met ν, dan vormt de rechte R Q met t een lijnenpaar dat voldoet. Er liggen dus twee rechten op dit oppervlak.

Legt men uit P de transversaal t op ν en op eene snijlijn l van twee der vlakken ρ, dan voldoet t als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak door μ en t bepaald is. Hare rangpunten liggen op l en in het derde raakvlak. Zoo vindt men er drie, dus er liggen nog drie rechten op dit oppervlak.

Zoekt men de kegelsneden, die raken aan eene rechte l, drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 snijden en haar vlak door μ zenden, dan vormt dit stelsel $(T\, \mu\, \nu^3)$ een dubbelvlak als ontaarding van een quadratisch oppervlak. Immers zoekt men het aantal kegelsneden van dit stelsel, dat eene rechte snijdt, dan is dit aantal *twee* volgens de waarde van $T\, \mu\, \nu^4$. Deze rechte heeft dus twee punten met dit vlak (μ, T) gemeen en het vlak is dus een dubbelvlak.

$\underline{\mu\, \nu^2\, \rho^4}$. Dit stelsel kegelsneden vormt een oppervlak van den graad 48, omdat $\mu\, \nu^3\, \rho^4 = 48$ is.

De rechten ν_1 en ν_2 liggen er op en zijn twaalfvoudig, omdat uit een willekeurig punt van ν_1 of ν_2 12 kegelsneden gaan; immers P $\mu\,\nu\,\rho^4 = 12$.

Verder liggen op dit oppervlak rechte lijnen, afkomstig van de ontaarde kegelsneden in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4 = 0$ en $\eta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4 = 40$ en wel *tien* viermaal geteldc ontaardingen der tweede klasse. Er liggen dus tien rechten op dit oppervlak.

De kegelsneden, die door een punt P gaan, vier vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 aanraken en haar vlak door μ zenden, vormen een oppervlak van den graad 12, omdat P $\mu\,\nu\,\rho^4 = 12$ is. Op dit oppervlak liggen geene lijnenparen, omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 elkaar niet in één punt snijden.

Wel liggen er ontaardingen der tweede klasse op, want legt men de transversaal t uit P op de snijlijnen l_{12} en l_{34} van ρ_1 en ρ_2 en van ρ_3 en ρ_4, dan voldoet t als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak bepaald is door t en μ, en de rangpunten liggen in l_{12} en l_{34}. Daar men drie zulke ontaardingen der tweede klasse vindt, geeft dit *drie* rechten op het oppervlak.

Ook is eene rechte t mogelijk uit P naar het snijpunt Q van drie vlakken ρ; deze ontaarding der tweede klasse voldoet, want haar vlak is bepaald door μ en t en hare rangpunten liggen in Q en in het vierde vlak ρ. Omdat men vier zulke ontaardingen vindt, geeft dit nog *vier* rechten op het oppervlak.

Zoekt men de kegelsneden, die raken aan eene rechte l, aan een vlak ρ, twee stralen ν_1 en ν_2 snijden en waarvan het vlak door μ gaat, dan vormen deze een viervoudig vlak als ontaarding van een biquadratisch oppervlak. Immers zoekt men het aantal kegelsneden van dit stelsel (T $\mu\,\nu^2\,\rho$), dat eene rechte snijdt, dan is dit aantal *vier*, omdat T $\mu\,\nu^3\,\rho = 4$ is. Deze rechte heeft dus vier punten met het vlak (μ, T) gemeen, dus (μ T) is een viervoudig vlak.

$\underline{\mu\,\nu\,\rho^5.}$ Het stelsel kegelsneden, dat hieraan voldoet, vormt een oppervlak van den graad 24, omdat $\mu\,\nu^2\,\rho^5 = 24$ is.

De rechte ν ligt hierop en is zesvoudig, immers uit elk harer punten gaan *zes* kegelsneden van dit stelsel, omdat $P \mu \rho^5 = 6$ is.

Op dit oppervlak liggen nog rechte lijnen, afkomstig van ontaarde kegelsneden. Deze vindt men uit $\delta \mu \nu \rho^5 = 0$ en $\eta \mu \nu \rho^5 = 20$ en wel tien dubbelgetelde ontaardingen der tweede klasse. Er liggen dus op dit oppervlak *tien* rechte lijnen.

Zoekt men de kegelsneden, die raken aan eene rechte l, aan twee vlakken ρ_1 en ρ_2, die eene rechte ν snijden en haar vlak door μ zenden, dan vormt dit stelsel $(T \mu \nu \rho^2)$ een viervoudig vlak als ontaarding van een biquadratisch oppervlak. Immers zoekt men het aantal kegelsneden van dit stelsel, dat eene rechte snijdt, dan is dit aantal *vier* volgens de waarde van $T \mu \nu^2 \rho^2$. Elke rechte snijdt dit vlak in vier punten, dus genoemd vlak is viervoudig.

$\mu \rho^6$. Dit stelsel kegelsneden vormt een oppervlak van den graad 12, omdat $\mu \nu \rho^6 = 12$ is.

Op dit oppervlak liggen rechte lijnen, afkomstig van de ontaarde kegelsneden in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta \mu \rho^6 = 0$ en $\eta \mu \rho^6 = 10$, dus alleen tien enkelvoudige ontaardingen der tweede klasse. Er liggen dus tien rechten op dit oppervlak.

Zoekt men de kegelsneden, die raken aan een rechte l, aan drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 en waarvan het vlak door μ gaat, dan vormt dit stelsel $T \mu \rho^3$ een dubbelvlak als ontaarding van een quadratisch oppervlak. Want zoekt men het aantal kegelsneden van dit stelsel, dat eene rechte snijdt, dan is dit aantal *twee* volgens de waarde van $T \mu \nu \rho^3$. Elke rechte snijdt het vlak (T, μ) dus in twee punten, zoodat deze meetkundige plaats een dubbelvlak is.

---

§ 4.

ν^7. De kegelsneden, die op zeven rechten rusten, vormen een oppervlak, waarvan men den graad weer bepaalt uit het aantal snijpunten met eene rechte. Deze graad is de waarde van ν^8, dus 92.

De zeven rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ worden door alle kegelsneden gesneden, liggen dus op dit oppervlak. Alle zijn 18-voudig, want $P\,\nu^6 = 18$, dus uit elk harer punten gaan 18 kegelsneden.

Verder liggen er nog rechten op dit oppervlak, die afkomstig zijn van de ontaarde kegelsneden uit dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta\,\nu^7 = 140$ en $\eta\,\nu^7 = 0$, dus 140 lijnenparen. Deze geven echter 70 dubbelgetelde en 140 enkelvoudige rechten, want elke transversaal op vier der zeven rechten wordt door twee transversalen op haar en op de overige drie rechten tot twee kegelsneden aangevuld.

Zoekt men de kegelsneden, die door een punt P gaan en vijf rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ snijden, dan vormen deze een oppervlak van den graad 18, omdat $P\,\nu^6 = 18$ is.

Neemt men op een van de rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ eenig punt P', dan gaan daardoor *vier* kegelsneden van dit oppervlak $(P\,\nu^5)$, omdat $P^2\,\nu^4 = 4$ is. Dus elk van die vijf rechten is viervoudig op dit oppervlak.

Legt men door P eene rechte t op twee der vijf stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$, dan wordt deze door twee transversalen op t en de overige drie stralen aangevuld tot twee ontaarde kegelsneden. Voor elke combinatie vindt men dus éene dubbele rechte en twee enkelvoudige rechten op dit oppervlak. Daar men $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ op 10 manieren twee aan drie kan combineeren, zijn er 10 dubbele en 20 enkelvoudige rechten op dit oppervlak.

Men vindt ook nog 20 enkelvoudige rechten, als men op vier der vijf stralen ν eene transversaal t legt en uit P eene transversaal op t en op de vijfde rechte ν. Men vindt n.l. vijf combinaties vier aan één van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ en telkens twee transversalen op vier rechten, dus 10 lijnenparen of 20 rechten.

Legt men een vlak door P en ν_1, dan ligt daarin de viervoudige rechte ν_1; vier dubbele rechten, omdat men uit P eene rechte naar elk der vier doorgangen van $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ kan trekken en deze dubbel te tellen is, daar zij tot *twee* ontaardingen van den tweeden graad behoort; twee enkelvoudige rechten door P, n.l. de rechten, die door P gaan, op ν_1 rusten en de twee transversalen op ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 ontmoeten; eindelijk de kegelsnede door P en de doorgangen van ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 op het vlak (P ν_1), welke echter dubbel te tellen is, omdat zij ν_1 tweemaal snijdt. Zoo vindt men ook, dat de graad van het oppervlak (P ν^5) is $4 + 8 + 2 + 4 = 18$.

Het punt P is een twaalfvoudig punt op dit oppervlak, want als men let op de doorsnijding in het vlak (P ν_1), dan gaan door P vier dubbele rechten, twee enkelvoudige rechten en de dubbel te tellen kegelsnede.

Ook ziet men gemakkelijk, dat de doorgangen van ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 op het vlak (P ν_1) viervoudige punten zijn, want door elken doorgang gaat eene dubbele rechte en de dubbel te tellen kegelsnede.

$\underline{\nu^6 \rho.}$ De kegelsneden, die op zes gegeven stralen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 rusten en een gegeven vlak ρ aanraken, vormen een oppervlak van den graad 116, omdat $\nu^7 \rho = 116$ is.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 liggen op dit oppervlak, omdat zij door alle kegelsneden gesneden worden. Alle zijn 24-voudig, want P $\nu^5 \rho = 24$, dus uit elk harer punten gaan 24 kegelsneden.

Verder liggen er nog rechte lijnen op dit oppervlak, afkomstig van de ontaardingen in dit stelsel. Deze vindt men uit $\delta\, \nu^6 \rho = 140$ en $\eta\, \nu^6 \rho = 0$; dit zijn echter 70 dubbelgetelde lijnenparen, omdat ρ door haar dubbelpunt gaat. Dus er liggen 140 rechten op dit oppervlak.

De kegelsneden, die door een punt P gaan, vier rechten ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 snijden en een vlak ρ aanraken, vormen een oppervlak van den graad 24, omdat P $\nu^5 \rho = 24$ is. Neemt men op een der vier rechten ν eenig punt P, dan gaan daardoor *zes* kegelsneden, omdat $P^2 \nu^3 \rho = 6$ is. Dus ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 zijn zesvoudige rechten op dit oppervlak.

Legt men uit P eene rechte t op twee der vier rechten ν, dan snijdt t het vlak ρ in een punt Q. Uit Q trekt men de transversaal t' op ν_3 en ν_4, dan vormt t' met t een lijnenpaar van dit stelsel. Daar men vier stralen op zes manieren twee aan twee kan rangschikken, geeft dit zes lijnenparen, dus 12 rechten op dit oppervlak.

Verder kan men eene transversaal t leggen op $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$; vervolgens het snijpunt van t en ρ verbinden met P, dan vormt deze rechte met t een lijnenpaar. Er zijn twee transversalen op vier rechten, dus twee lijnenparen, dus liggen er nog vier rechten op dit oppervlak.

Legt men een vlak door P en ν_1, dan ligt daarin de zesvoudige rechte ν_1; drie dubbele rechten uit P naar de doorgangen van ν_2, ν_3, ν_4 met het vlak (P ν_1); twee dubbele rechten door P, die op de beide transversalen van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ rusten en ρ in het snijpunt met elk dezer transversalen ontmoeten; eindelijk de beide kegelsneden door P, die ν_2, ν_3, ν_4 snijden en ρ aanraken en die dubbel te tellen zijn, omdat zij ν_1 dubbel snijden. Ook zoo vindt men, dat de graad van het oppervlak (P $\nu^4 \rho$) $6 + 6 + 4 + 8 = 24$ is.

P zal een 14-voudig punt zijn van deze doorsnijding in (P ν_1), want door P gaan drie dubbele rechten naar de doorgangen van ν_2, ν_3, ν_4 met (P ν_1); verder twee dubbele rechten op de beide transversalen van $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ en de beide dubbel te tellen kegelsneden.

De doorgangen van ν_2, ν_3, ν_4 met het vlak (P ν_1) blijken hier zesvoudige punten te zijn, want door ieder gaat ééne dubbele rechte en twee dubbel te tellen kegelsneden.

$\underline{\nu^5 \rho^2.}$ De kegelsneden, die op vijf rechten rusten en twee vlakken aanraken, vormen een oppervlak van den graad 128, omdat $\nu^6 \rho^2 = 128$ is.

De rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ liggen op dit oppervlak en zijn 28-voudig, want P $\nu^4 \rho^2 = 28$, dus uit elk harer punten gaan 28 kegelsneden van dit stelsel.

Verder liggen er nog rechten op dit oppervlak, afkomstig van de ontaardingen in dit stelsel. Daar $\delta \nu^5 \rho^2 = 80$ en

$\eta\, \nu^5 \rho^2 = 0$, vindt men 20 viermaal getelde lijnenparen, dus veertig rechten op dit oppervlak.

De meetkundige plaats der kegelsneden, die door een punt P gaan, drie stralen ν_1, ν_2, ν_3 snijden en twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken, is een oppervlak van den graad 28, omdat $P\, \nu^4 \rho^2 = 28$ is. Elk der stralen ν is eene 8-voudige rechte daarop, omdat door elk harer punten 8 kegelsneden van dit stelsel gaan, immers $P^2 \nu^2 \rho^2 = 8$.

De transversaal t uit P op ν_1 en de snijlijn l van ρ_1 en ρ_2 wordt door de rechte uit het snijpunt van t en l rustend op ν_2 en ν_3 tot eene ontaarde kegelsnede aangevuld. Er zijn zoo drie kegelsneden, dus *zes* rechte lijnen op dit oppervlak $(P\, \nu^3 \rho^2)$.

Legt men eene transversaal t op ν_1, ν_2, ν_3, l en dan uit het snijpunt van t en l eene rechte t' naar P, dan vormt t' met t een lijnenpaar, dat voldoet. Er zijn twee transversalen op vier rechten, dus twee zulke lijnenparen of vier rechten op dit oppervlak.

Legt men een vlak door P en ν_1, dan ligt daarin de achtvoudige rechte ν_1; éène viervoudige rechte rustend op ν_1 en gaande door P; eindelijk vier kegelsneden door drie punten, die twee rechten raken en die dubbel te tellen zijn, omdat zij ν_1 dubbel snijden. Ook zoo vindt men voor den graad van het oppervlak $(P\, \nu^3 \rho^2)$ $8 + 4 + 16 = 28$.

Op dit oppervlak is P een 12-voudig punt, want als men let op de doorsnijding in het vlak $(P\, \nu_1)$, gaan door P éène viervoudige rechte en vier dubbel te tellen kegelsneden. De doorgangen van vlak $(P\, \nu_1)$ met ν_2 en ν_3 zijn 8-voudige punten, want door elk gaan vier dubbel te tellen kegelsneden.

$\underline{\nu^4 \rho^3.}$ De kegelsneden, die op vier rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ rusten en drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken, vormen een oppervlak van den 104en graad, omdat $\nu^5 \rho^3 = 104$ is.

De rechten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ liggen op het oppervlak, want alle kegelsneden rusten erop. Ze zijn 24-voudig, want uit elk harer punten gaan 24 kegelsneden, omdat $P\, \nu^3 \rho^3 = 24$ is.

Op dit oppervlak liggen ook nog rechten, afkomstig van de ontaardingen in dit stelsel. Omdat $\delta \nu^4 \rho^3 = 24$ en $\eta \nu^4 \rho^3 = 0$, liggen er drie achtmaal getelde ontaardingen van den tweeden graad, dus *zes* rechte lijnen op het oppervlak.

De kegelsneden, die door een punt P gaan, twee rechten ν_1 en ν_2 snijden en drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken, vormen een oppervlak van den 24sten graad, omdat $P \nu^3 \rho^3 = 24$ is. Elk der rechten ν_1 en ν_2 is achtvoudig, omdat door elk harer punten 8 kegelsneden gaan, immers $P^2 \nu \rho^3 = 8$.

Verbindt men P met het snijpunt Q der vlakken ρ door eene rechte t en legt men uit Q eene transversaal t' op ν_1 en ν_2, dan vormt t' met t een lijnenpaar, dat voldoet. Op het oppervlak $(P \nu^2 \rho^3)$ liggen dus nog twee rechte lijnen.

Een vlak door P en ν_1 geeft als doorsnijding de achtvoudige rechte ν_1 en vier kegelsneden door twee punten, welke drie rechten raken; de kegelsneden moeten dubbel geteld worden, daar zij ν_1 tweemaal snijden. Ook hieruit blijkt dus, dat het oppervlak van den graad $8 + 16 = 24$ is.

Het punt P is achtvoudig, want de vier dubbel te tellen kegelsneden gaan er door. Om dezelfde reden is het snijpunt van ν_2 met het vlak $(P \nu_1)$ achtvoudig.

Zoekt men de kegelsneden, die aan eene rechte l raken en vier stralen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ snijden, dan vormen deze een oppervlak van den twaalfden graad. Immers zoekt men het aantal snijpunten van dit oppervlak met eene willekeurige rechte, dan wordt dit gevonden uit $T \nu^5 = 12$.

Op dit oppervlak zijn $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ dubbelrechten. Legt men n.l. een vlak door eenig punt van ν_1 en door l, dan liggen daarin twee kegelsneden door vier punten, die eene rechte aanraken.

Legt men eene transversaal t op ν_1, ν_2, ν_3, l en vervolgens een vlak door t en l, dan geeft het snijpunt van ν_4 met dit vlak de tweede rechte van een lijnenpaar, dat voldoet. Er zijn vier combinaties drie aan één van de rechten ν, dus acht ontaardingen, want ν_1, ν_2, ν_3, l hebben twee transversalen. Er liggen dus 16 rechte lijnen op het oppervlak $(T \nu^4)$.

$\nu^3 \rho^4$. De kegelsneden, die aan deze voorwaarde voldoen, vormen een oppervlak van den 64sten graad, omdat $\nu^4 \rho^4 = 64$ is.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3 liggen op dit oppervlak, daar alle kegelsneden hierop rusten. Ze zijn 16-voudig, want $P \nu^2 \rho^4 = 16$, dus uit elk harer punten gaan 16 kegelsneden van dit stelsel.

Verder liggen er geene rechten op, want $\delta \nu^3 \rho^4 = 0$ en $\eta \nu^3 \rho^4 = 0$.

De kegelsneden die door een punt P gaan, eene rechte ν snijden en vier vlakken ρ aanraken, vormen een oppervlak van den 16en graad, omdat $P \nu^2 \rho^4 = 16$ is. De rechte ν is eene achtvoudige rechte op dit oppervlak, want uit elk harer punten gaan 8 kegelsneden van dit stelsel, immers $P^2 \rho^4 = 8$.

De doorsnijding van dit oppervlak met een vlak door P en ν bevat de achtvoudige rechte ν en twee kegelsneden door P, die vier rechten aanraken; deze kegelsneden zijn dubbel te tellen, omdat zij ν tweemaal snijden. Ook zoo vindt men, dat de graad van dit oppervlak $8 + 8 = 16$ is.

Het punt P is een viervoudig punt der doorsnede, want de beide dubbel te tellen kegelsneden gaan er door.

De kegelsneden, die op drie rechten ν_1, ν_2, ν_3 rusten, eene rechte l en een vlak ρ aanraken, vormen een oppervlak van den 20sten graad, omdat $T \nu^4 \rho = 20$ is.

De rechten ν_1, ν_2, ν_3 zijn viervoudige rechten op dit oppervlak, omdat een vlak door l en eenig punt van ν_1 vier kegelsneden van het stelsel $(T \nu^3 \rho)$ bevat.

Legt men de transversaal t uit het snijpunt van l met ρ op ν_1 en ν_2 en vervolgens een vlak door l en t, dan geeft het snijpunt van ν_3 met dit vlak de tweede rechte van een lijnenpaar, dat voldoet. Zoo vindt men er drie, dus dit geeft *zes* rechten op het oppervlak.

Ook ontaardingen der tweede klasse liggen er op. Zoekt men de twee transversalen van l, ν_1, ν_2, ν_3, dan zijn dit twee ontaardingen der tweede klasse met de rangpunten op l en in ρ. Dit geeft dus nog twee rechte lijnen op het oppervlak $(T \nu^3 \rho)$.

$\nu^2 \rho^5$. De kegelsneden, die aan deze voorwaarde voldoen, vormen een oppervlak van den 32sten graad, omdat $\nu^3 \rho^5 = 32$ is.

De rechten ν_1 en ν_2 liggen op het oppervlak, daar alle kegelsneden op haar rusten. Ze zijn achtvoudig, omdat door elk harer punten acht kegelsneden van dit stelsel gaan, immers $P \nu \rho^5 = 8$.

Verder liggen geene rechten op dit oppervlak, want $\delta \nu^2 \rho^5 = 0$ en $\eta \nu^2 \rho^5 = 0$.

De kegelsneden, die door een punt P gaan, en vijf vlakken $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ aanraken, vormen een oppervlak van den achtsten graad, omdat $P \nu \rho^5 = 8$ is.

Legt men een vlak door P en de snijlijn l van twee der vlakken ρ, dan liggen hierin twee kegelsneden door P, die vier rechten aanraken. Deze moeten echter dubbel in rekening worden gebracht, omdat de rechte l door *twee* raakvlakken bepaald is en dus als raaklijn voor deze kegelsneden ook tweemaal geteld moet worden. Ook zoo vindt men, dat de graad van dit oppervlak *acht* is. Het punt P is hierop een viervoudig punt, daar er twee dubbel te tellen kegelsneden door P gaan.

De kegelsneden, die op twee rechten ν_1 en ν_2 rusten en eene rechte l benevens twee vlakken ρ_1 en ρ_2 aanraken, vormen een oppervlak van den 16^{en} graad, omdat $T \nu^3 \rho^3 = 16$ is.

De rechten ν_1 en ν_2 zijn hierop viervoudig, omdat in een vlak door l en eenig punt van ν_1 *vier* kegelsneden liggen, die door twee punten gaan en drie rechten aanraken.

Legt men uit het snijpunt Q van l met ρ_1 de transversaal t op ν_1 en ν_2, dan ligt deze ontaarding der tweede klasse op dit oppervlak met de rangpunten in Q en ρ_2. Ook is eene ontaarding mogelijk uit het snijpunt van l en ρ_2, die op ν_1 en ν_2 rust, zoodat er *twee* rechte lijnen op dit oppervlak liggen.

$\underline{\nu \rho^6.}$ Hier vormen de kegelsneden een oppervlak van den 16^{en} graad, omdat $\nu^2 \rho^6 = 16$ is.

De rechte ν ligt op dit oppervlak en is viervoudig, want $P \rho^6 = 4$, dus uit elk harer punten gaan vier kegelsneden.

Verder liggen geene rechten op dit oppervlak, omdat $\delta \nu \rho^6 = 0$ en $\eta \nu \rho^6 = 0$ is.

De kegelsneden, die eene rechte ν snijden en eene rechte l benevens drie vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3 aanraken, vormen een oppervlak van den achtsten graad, omdat $T \nu^2 \rho^3 = 8$ is. De rechte ν is eene dubbelrechte op dit oppervlak, want in een vlak door l en eenig punt P van ν liggen *twee* kegelsneden, die door één punt gaan en vier rechten aanraken.

De transversaal uit het snijpunt Q van l en ρ_1 naar ν en de snijlijn t van ρ_2 en ρ_3 voldoet als ontaarding der tweede klasse; hare rangpunten liggen in Q en op t. Zoo vindt men er drie, dus er liggen *drie* rechte lijnen op dit oppervlak.

$\underline{\rho^7}$. De kegelsneden, die aan zeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7 raken, vormen een oppervlak van den achtsten graad, omdat $\nu \rho^7 = 8$ is. Op dit oppervlak liggen geene rechte lijnen, want $\delta \rho^7 = 0$ en $\eta \rho^7 = 0$.

De kegelsneden, die aan eene rechte l en vier gegeven vlakken ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 raken, vormen een oppervlak van den vierden graad, omdat $T \nu \rho^4 = 4$ is.

Legt men de transversaal t uit het snijpunt P van l en ρ_1 naar het snijpunt Q van ρ_2, ρ_3, ρ_4, dan voldoet t als ontaarding der tweede klasse, waarvan het vlak bepaald is door l en t; de rangpunten liggen in P en Q. Zoo vindt men er vier dus liggen er *vier* rechte lijnen op het oppervlak ($T \rho^4$).

Overzicht der verkregen uitkomsten. [1]

§ 1.

$P^2 \nu^4 = 4$
$P^2 \nu^3 \rho = 6$
$P^2 \nu^2 \rho^2 = 8$
$P^2 \nu \rho^3 = 8$
$P^2 \rho^4 = 8$

$P \mu \nu^5 = 6$
$P \mu \nu^4 \rho = 10$
$P \mu \nu^3 \rho^2 = 16$
$P \mu \nu^2 \rho^3 = 16$
$P \mu \nu \rho^4 = 12$
$P \mu \rho^5 = 6$

$P \nu^6 = 18$
$P \nu^5 \rho = 24$
$P \nu^4 \rho^2 = 28$
$P \nu^3 \rho^3 = 24$
$P \nu^2 \rho^4 = 16$
$P \nu \rho^5 = 8$
$P \rho^6 = 4$

$T \mu \nu^4 = 2$
$T \mu \nu^3 \rho = 4$
$T \mu \nu^2 \rho^2 = 4$
$T \mu \nu \rho^3 = 2$
$T \mu \rho^4 = 1$

$T \nu^5 = 12$
$T \nu^4 \rho = 20$
$T \nu^3 \rho^2 = 16$
$T \nu^2 \rho^3 = 8$
$T \nu \rho^4 = 4$
$T \rho^5 = 2$

§ 2.

$\mu^3 \nu^5 = 1$
$\mu^3 \nu^4 \rho = 2$
$\mu^3 \nu^3 \rho^2 = 4$
$\mu^3 \nu^2 \rho^3 = 4$
$\mu^3 \nu \rho^4 = 2$
$\mu^3 \rho^5 = 1$

$\mu^2 \nu^6 = 8$
$\mu^2 \nu^5 \rho = 14$
$\mu^2 \nu^4 \rho^2 = 24$
$\mu^2 \nu^3 \rho^3 = 24$
$\mu^2 \nu^2 \rho^4 = 16$
$\mu^2 \nu \rho^5 = 8$
$\mu^2 \rho^6 = 4$

$\mu \nu^7 = 34$
$\mu \nu^6 \rho = 52$
$\mu \nu^5 \rho^2 = 76$
$\mu \nu^4 \rho^3 = 72$
$\mu \nu^3 \rho^4 = 48$
$\mu \nu^2 \rho^5 = 24$
$\mu \nu \rho^6 = 12$
$\mu \rho^7 = 6$

$\nu^8 = 92$
$\nu^7 \rho = 116$
$\nu^6 \rho^2 = 128$
$\nu^5 \rho^3 = 104$
$\nu^4 \rho^4 = 64$
$\nu^3 \rho^5 = 32$
$\nu^2 \rho^6 = 16$
$\nu \rho^7 = 8$
$\rho^8 = 4$

---

[1] Zie Dr. H. SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, Hoofdstuk IV, § 20.

§ 3.

$\delta\,\mu^3\,\nu^4 = 3$	$\delta\,\mu^2\,\nu^5 = 20$	$\delta\,\mu\,\nu^6 = 70$	$\delta\,\nu^7 = 140$
$\delta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho = 6$	$\delta\,\mu^2\,\nu^4\,\rho = 34$	$\delta\,\mu\,\nu^5\,\rho = 100$	$\delta\,\nu^6\,\rho = 140$
$\delta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2 = 4$	$\delta\,\mu^2\,\nu^3\,\rho^2 = 24$	$\delta\,\mu\,\nu^4\,\rho^2 = 68$	$\delta\,\nu^5\,\rho^2 = 80$
$\delta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3 = 0$	$\delta\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^3 = 8$	$\delta\,\mu\,\nu^3\,\rho^3 = 24$	$\delta\,\nu^4\,\rho^3 = 24$
$\delta\,\mu^3\,\rho^4 = 0$	$\delta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4 = 0$	$\delta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4 = 0$	$\delta\,\nu^3\,\rho^4 = 0$
	$\delta\,\mu^2\,\rho^5 = 0$	$\delta\,\mu\,\nu\,\rho^5 = 0$	$\delta\,\nu^2\,\rho^5 = 0$
		$\delta\,\mu\,\rho^6 = 0$	$\delta\,\nu\,\rho^6 = 0$
			$\delta\,\rho^7 = 0$

$\eta\,\mu^3\,\nu^4 = 0$	$\eta\,\mu^2\,\nu^5 = 0$	$\eta\,\mu\,\nu^6 = 0$	$\eta\,\nu^7 = 0$
$\eta\,\mu^3\,\nu^3\,\rho = 0$	$\eta\,\mu^2\,\nu^4\,\rho = 0$	$\eta\,\mu\,\nu^5\,\rho = 0$	$\eta\,\nu^6\,\rho = 0$
$\eta\,\mu^3\,\nu^2\,\rho^2 = 4$	$\eta\,\mu^2\,\nu^3\,\rho^2 = 16$	$\eta\,\mu\,\nu^4\,\rho^2 = 32$	$\eta\,\nu^5\,\rho^2 = 0$
$\eta\,\mu^3\,\nu\,\rho^3 = 6$	$\eta\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^3 = 24$	$\eta\,\mu\,\nu^3\,\rho^3 = 48$	$\eta\,\nu^4\,\rho^3 = 0$
$\eta\,\mu^3\,\rho^4 = 3$	$\eta\,\mu^2\,\nu\,\rho^4 = 20$	$\eta\,\mu\,\nu^2\,\rho^4 = 40$	$\eta\,\nu^3\,\rho^4 = 0$
	$\eta\,\mu^2\,\rho^5 = 10$	$\eta\,\mu\,\nu\,\rho^5 = 20$	$\eta\,\nu^2\,\rho^5 = 0$
		$\eta\,\mu\,\rho^6 = 10$	$\eta\,\nu\,\rho^6 = 0$
			$\eta\,\rho^7 = 0$

STELLINGEN.

Stellingen.

I.

In zijn „Kalkül der abzählenden Geometrie", hoofdstuk IV, § 20, geeft Dr. H. Schubert in twee tabellen een overzicht van aantallen ontaarde kegelsneden, die aan zeven voorwaarden voldoen. Het is af te keuren, dat hij deze uitkomsten geeft, zonder tenminste van elke kolom dier tabellen éene uitkomst te bepalen.

II.

De bepaling van het aantal ontaarde kegelsneden, die voldoen aan de voorwaarde $\delta \nu^6 \rho$, had door Dr. Schubert (Kalkül der abzählenden Geometrie, hoofdstuk IV, § 20) uitgevoerd kunnen worden, zonder gebruik te maken van de symbolische vergelijking $g^3 = 2\, g_s$.

III.

In de mededeeling van Prof. Dr. J. de Vries „Over het aantal kegelsneden, die acht gegeven rechten snijden" (Verslagen der Kon. Academie van Wetenschappen te Amsterdam, 1901, X) vindt men op blz. 194 aangegeven: „dit oppervlak bevat zeker 140 rechten" Dit is minder juist.

IV.

Eene dubbelrechte $\varkappa$, die door drie gegeven punten gaat, is slechts *viermaal* in rekening te brengen.

V.

Als men een negatief getal opvat als het verschil van twee getallen, waarvan de aftrekker grooter is dan het aftrektal, is de algebra slechts eene uitbreiding van de rekenkunde.

VI.

Bij het bewijs van $\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$, kan men zeer eenvoudig aantoonen, dat een oneindig groot aantal oneindig kleine producten verwaarloosd mag worden.

VII.

De wet van den blijvenden spiegelstand geldt alleen volkomen, als men het gewicht der lucht verwaarloost en de temperatuur van het drijvende lichaam en zijne smeltmassa constant blijft.

VIII.

Het verdient afkeuring, te spreken van: „eene snelheid van v Meters per seconde”.

IX.

Het bewijs van de eigenschap, dat bij een' vlakken spiegel het virtueele beeld van een punt evenver achter den spiegel ligt, als het punt ervóór, wordt gewoonlijk te omslachtig geleverd.

X.

Men kan het vraagstuk: „wat is de kans, dat eene rechte lijn zóó in drie stukken verdeeld wordt, dat deze stukken een' driehoek kunnen vormen", zeer eenvoudig oplossen.

XI.

Er moet meer éénheid komen in de behandeling van de formules voor de lenzen in de verschillende leerboeken voor Hoogere Burgerscholen.

XII.

De proef van het bevriezen van water door snelle verdamping van ether, kan iets gemakkelijker worden ingericht dan in de meeste leerboeken wordt aangegeven.

XIII.

Bij het afleiden van physische betrekkingen moet ook in de elementaire leerboeken gewicht gehecht worden aan de grafische voorstelling.
