Over monoïden

https://hdl.handle.net/1874/254898

OVER MONOÏDEN.

G. v. BEEK.

OVER MONOÏDEN.

Diss. Utrecht 1907

OVER MONOÏDEN.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. S. D. VAN VEEN HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 5 JULI 1907 DES NAMIDDAGS TE 3½ UUR DOOR * * * * * * * *

GERARD VAN BEEK

* * * * * * GEBOREN TE BARNEVELD * * * * * *

Het is mij een aangename taak U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn welgemeenden dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

Inzonderheid richt ik mij daartoe tot U, Hoogeleerde JULIUS. Als assistent op het Physisch Laboratorium ben ik meer dan anders in de gelegenheid geweest veel van U te leeren.

Niet minder gevoel ik mij aan U verplicht, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, voor alles, wat Gij voor mij geweest zijt.

Uw belangstelling en voorlichting, bij het vervaardigen van dit proefschrift ondervonden, zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.

INHOUD.

ERRATUM:

Bladz. 16, 3e reg. v. ond. lees: n—1 in plaats van n+1.

VOORWOORD.

Wanneer men een ruimtekromme door hare vergelijkingen bepalen wil, kan men in navolging van Cayley *) gebruik maken van den kegel, die de kromme uit een willekeurig punt projecteert.

De graad van dezen kegel is in het algemeen dezelfde als die der kromme.

Daar elk punt der kromme tot een beschrijvende lijn van den kegel aanleiding geeft, kan omgekeerd op elke beschrijvende lijn steeds op zoodanige wijze een punt bepaald worden, dat de meetkundige plaats dezer punten een ruimtekromme oplevert, die met den kegel van gelijken graad is.

Een oppervlak van graad n, dat in den top van den kegel een $(n-1)$-voudig punt bezit, zou daartoe kunnen dienen.

Immers zoo'n oppervlak wordt door elke beschrijvende lijn van den kegel buiten den top slechts in één punt gesneden.

Cayley noemt een dergelijk oppervlak een *monoïde*, terwijl het singuliere punt, dat er op voorkomt, de *top* geheeten wordt.

Het zal nu geheel van den aard der ruimtekromme afhangen, welke monoïde haar op genoemde wijze op een projecteerenden kegel insnijdt.

Zonder hier op echter in te gaan, komt het mij belangrijk genoeg voor, de eigenschappen eener monoïde, zelve te onderzoeken en de resultaten daarvan, in dit proefschrift neergelegd, zullen uitmaken in hoeverre dit onderzoek vruchtdragend is geweest.

---

*) Comptes Rendus, tom. LIV, pg. 55.

HOOFDSTUK I.

De Monoïde M^n.

§ 1. Bepaling der Monoïde. Gaan we uit van een monoïde van graad n en leggen we, ten einde de vergelijking van het oppervlak in een geschikten vorm te verkrijgen, een hoekpunt van een coördinatentetraëder in den top.

Zijn X_1, X_2, X_3 en X_4 de hoekpunten van dien tetraëder en zij X_4 in den top der monoïde gelegen, dan brengt dit met zich mede, dat de coördinaat x_4 slechts tot de eerste macht in de vergelijking van het oppervlak mag voorkomen.

Deze vergelijking kan dan als volgt geschreven worden:

$$A^{(n-1)} x_4 + B^{(n)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hierin stellen A en B functies voor, welke homogeen zijn in x_1, x_2 en x_3, terwijl de graad ervan aangegeven wordt door den bovenaan geplaatsten index.

Een homogene functie van graad n met drie veranderlijken bevat in het algemeen $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termen.

In het linkerlid der vergelijking (1) komen dus

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) + \tfrac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2) = n\,(n+2)+1$$

termen voor.

Om de $n\,(n+2)$ constanten in dit linkerlid te bepalen zijn nu evenveel vergelijkingen noodig, waaruit volgt:

Een monoïde M^n is door het veelvoudige punt en $n\,(n+2)$ andere punten bepaald.

Keeren we nu terug tot vergelijking (1).

Het oppervlak er door voorgesteld gaan we doorsnijden met een vlakkenbundel, waarvan de as eenvoudigheidshalve gelegen is in de tetraëderribbe $X_2\,X_3$.

De vergelijking van dezen bundel is:

$$x_4 = \lambda\, x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Door x_4 uit (1) en (2) te elimineeren, verkrijgen we:

$$B^{(n)} + \lambda\, x_1\, A^{(n-1)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Dit is de vergelijking van een kegelbundel van graad n met centrum in X_4.

Geven we λ in vergelijking (2) een bepaalde waarde, d.w.z. beschouwen we de doorsnede van een bepaald vlak uit den vlakkenbundel met de monoïde, dan is (3) de vergelijking van den kegel, die deze doorsnijdingskromme uit X_4 projecteert.

Met elk vlak uit den vlakkenbundel komt alzoo een kegel uit den kegelbundel overeen.

Er bestaat derhalve een projectief verband tusschen deze beide bundels.

Dat de meetkundige plaats der doorsnijdingskrommen van overeenkomstige exemplaren uit beide bundels een monoïde oplevert, blijkt analytisch door uit de vergelijkingen (2) en (3) den parameter λ te elimineeren, waarbij dan weer vergelijking (1) voor den dag komt.

Intusschen valt op te merken, dat de kegelbundel, waarvan hier sprake is, geen willekeurige kan zijn.

Uit vergelijking (3) toch blijkt, dat van de n^2 basisribben van den kegelbundel, welke geleverd worden als doorsnijdingsrechten van den kegel $B^{(n)} = 0$ en den samengestelden kegel $x_1 A^{(n-1)} = 0$ er n stuks in één vlak gelegen zijn, n.l. in het vlak $x_1 = 0$.

Ditzelfde vlak bevat de as van den vlakkenbundel.

Bovendien moet de projectieve verwantschap zoodanig geregeld zijn, dat met het vlak $x_1 = 0$ uit den vlakkenbundel de kegel $x_1 A^{(n-1)} = 0$ uit den kegelbundel overeenstemt.

Bij substitutie van $\lambda = \infty$ in de vergelijkingen (2) en (3) is dit gemakkelijk in te zien.

Alles samengevat is nu het resultaat:

Een monoïde M^n is te beschouwen als de meetkundige plaats der doorsnijdingskrommen van overeenkomstige elementen van een vlakkenbundel en een projectief daarmee verwanten kegelbundel van graad n, indien van den laatste n basisribben in één vlak gelegen zijn en dit vlak de as van den vlakkenbundel bevat.

Tevens moet het als element van den vlakkenbundel toegevoegd zijn aan een kegel, welke samengesteld is uit dit vlak en een kegel van graad $n—1$.

Deze stelling is langs synthetischen weg ook wel te bewijzen.

Daartoe doorsnijden we kegel- en vlakkenbundel met een willekeurig vlak. Daarin liggen dan een stralenbundel en een krommenbundel, waartusschen projectief verband bestaat. 't Is nu maar de vraag welke kromme door deze beide bundels voortgebracht wordt.

Met een willekeurigen straal uit den eenen bundel komt een kromme uit den anderen bundel overeen, zoodat er van de voortgebrachte kromme al n punten op dien straal gelegen zijn.

Behoorde het centrum van den stralenbundel er ook toe, dan zou dit aantal daardoor met één vermeerderd worden. Dit is echter niet het geval.

Door het centrum gaat wel een kromme van den krommenbundel, maar van deze laatste kromme moeten dan $n + 1$ punten op een rechte liggen, te weten: de n basispunten en genoemd centrum. Deze kromme zal dus ontaarden in die rechte en een kromme van graad $n - 1$.

Nu is aan deze rechte uit den stralenbundel dezelfde rechte en een kromme van graad n—1 toegevoegd. Op die rechte liggen dan al vast n—1 punten en nog een punt, dat op te vatten is als het snijpunt van de twee samenvallende rechten.

Hiermede is aangetoond, dat het centrum van den stralenbundel niet op de voortgebrachte kromme komt te liggen, zoodat een willekeurige straal er niet meer dan n punten van bevat, waarmede dan tevens bewezen is, dat de vlakken- en kegelbundel, waarvan we uitgingen, een oppervlak van graad n bepalen.

Dat dit oppervlak een monoïde is met den top in het centrum van den kegelbundel, blijkt als volgt.

Wanneer het doorsnijdingsvlak van zooeven door den top van den kegelbundel gelegd wordt, bevat het een straleninvolutie van graad n en een projectief daarmee verwanten stralenbundel, terwijl de verbindingslijn der centra als straal uit den stralenbundel toegevoegd is aan zichzelf en aan n—1 andere rechten, door het centrum der straleninvolutie gaande.

Dit is een geval van gereduceerde ligging der eerste orde *).

*) Emil Weyr: Beiträge zur Curvenlehre, Wien, Alfred Hölder, § 50.

Op die verbindingslijn liggen dan in het involutie-centrum $n-1$ punten der kromme van graad n, welke in ons doorsnijdingsvlak wordt bepaald.

Hieruit volgt, dat dit vlak het oppervlak van graad n snijdt volgens een kromme met een $(n-1)$-voudig punt.

Dit oppervlak is derhalve een monoïde met den top in het centrum van den kegelbundel.

§ 2. Rechten door den top.

Uit de vergelijking eener monoïde:

$$A^{(n-1)} x_4 + B^{(n)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

volgt, dat op zoo'n oppervlak $n\,(n-1)$ rechten gelegen zijn.

Het zijn de doorsnijdingsrechten der beide kegels

$$A = o \text{ en } B = o.$$

Leggen we nu de tetraëderribbe $X_4\ X_1$ in één dezer rechten, dan moet het linkerlid der vergelijking van het oppervlak bij substitutie van $x_2 = o$ deelbaar zijn door x_3 en omgekeerd.

In dat geval is deze ribbe een enkelvoudige rechte der monoïde.

De vergelijking wordt dan:

$$[U^{(1)} x_1^{\,n-2} + U^{(2)} x_1^{\,n-3} + \ldots + U^{(n-2)} x_1 + U^{(n-1)}]\, x_4 + V^{(1)} x_1^{\,n-1} + V^{(2)} x_1^{\,n-2} + \ldots + V^{(n-1)} x_1 + V^{(n)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierin zijn de functies U en V homogeen in x_2 en x_3, terwijl de graad ervan weer door den bovenaan geplaatsten index aangegeven wordt.

De vergelijking (2) bevat nu twee termen minder dan de vergelijking (1), waaruit volgt, dat zoo'n rechte door den top voor twee enkelvoudige gegevens telt, indien de top eenmaal vastgelegd is.

Dit is ook wel meetkundig in te zien, want liggen twee punten met den top op één rechte, dan bevat deze $n+1$ punten der monoïde en moet er dan geheel op liggen.

Wanneer we nu door zulke rechten door den top de monoïde bepalen willen, dan hebben we er op te letten, dat ze niet willekeurig aangenomen kunnen worden.

Uit vergelijking (3) van § 1 volgt toch, dat deze $n(n-1)$ rechten met nog n in één vlak gelegen andere rechten de n^2 basisribben van een kegelbundel moeten vormen. Nu is zoo'n kegelbundel bepaald door $\frac{1}{2} n(n+3)-1$ rechten door één punt, zoodat we van de monoïde er slechts

$$\tfrac{1}{2} n(n+3)-n-1=\tfrac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

willekeurig door den top aannemen kunnen.

Dit telt volgens het voorgaande voor $(n-1)(n+2)$ enkelvoudige gegevens, waardoor er buiten deze rechten nog $n+2$ willekeurig te kiezen punten overblijven.

Bevat de monoïde een k-voudige rechte door den top en wordt de tetraëderribbe $X_4 X_1$ daarin gelegd, dan moet het linkerlid der vergelijking bij substitutie van $x_2 = o$ deelbaar zijn door x_3^k en omgekeerd.

Volgens de notatie van zooeven is dan de vergelijking van het oppervlak:

$$[U^{(k)} x_1^{n-k-1} + U^{(k+1)} x_1^{n-k-2} + \ldots + U^{(n-2)} x_1 + U^{(n-1)}] x_4 + V^{(k)} x_1^{n-k} + V^{(k+1)} x_1^{n-k-1} + \ldots + V^{(n-1)} x_1 + V^{(n)} = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Deze vergelijking bevat $k(k+1)$ termen minder dan vergelijking (1). Een k-voudige rechte door den top telt dus voor $k(k+1)$ enkelvoudige gegevens.

Gaan we nu eens over tot een $(n-1)$-voudige rechte, dan telt die voor $n(n-1)$ enkelvoudige gegevens.

Buiten deze rechte kunnen dan nog $3n$ willekeurige punten ter bepaling van zoo'n monoïde aangenomen worden.

Elk punt dezer rechte is een $(n-1)$-voudig punt en kan daarom als top der monoïde opgevat worden.

Een willekeurig vlak, door de $(n-1)$-voudige rechte gebracht, moet nog een rechte op de monoïde insnijden. We hebben dus te doen met een oppervlak, dat oneindig veel rechten bevat, die alle de $(n-1)$-voudige rechte snijden.

Onze monoïde is derhalve een regelvlak.

Een enkelvoudig oneindig stelsel van rechten kan men aan 3 voorwaarden laten voldoen. Denken we ons nu twee willekeurige vlakke doorsneden van ons regelvlak, dan moeten al die rechten, behalve op de $(n-1)$-voudige rechte, ook daarop rusten.

Die vlakke doorsneden hebben beide een $(n-1)$-voudig punt in de $(n-1)$-voudige rechte der monoïde, waaruit volgt:

Een monoïde M^n met $(n-1)$-voudige rechte is te beschouwen als de meetkundige plaats van alle rechten, die rusten op twee vlakke krommen van graad n met een $(n-1)$-voudig punt en op de verbindingslijn dier twee singuliere punten.

Men kan zich zoo'n regelvlak ook wel op de volgende manier ontstaan denken.

Gaan we namelijk uit van een vlakke kromme van graad n met een $(n-1)$-voudig punt. Door dat punt laten we een rechte gaan, die niet in het vlak der kromme gelegen is. Nemen we nu op de rechte en op de kromme een puntenreeks aan, waartusschen projectief verband gelegd wordt. Dit is mogelijk, daar rechte en kromme beide van geslacht nul zijn.

De verbindingsrechten van overeenkomstige punten in de beide reeksen vormen nu zoo'n regelvlak.

Immers het gebeurt $n-1$ maal, dat een punt der reeks op de kromme in het (n—1)-voudige punt terecht komt, zoodat dientengevolge de drager der puntenreeks een (n—1)-voudige rechte op het voortgebrachte regelvlak wordt.

Daar een willekeurig vlak door deze veelvoudige rechte nog maar één nieuwe rechte van het regelvlak kan insnijden, moet dit van graad n zijn. Elke rechte ervan is toegevoegd aan een punt der vlakke kromme. Het oppervlak is derhalve van geslacht nul, wat dan ook van elke vlakke doorsnede geldt.

Er kunnen bij een monoïde M^n op zijn hoogst $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dubbelrechten door den top gaan, want dit is het maximum aantal dubbelpunten bij een vlakke kromme van graad n.

Hierbij telt een k-voudige rechte voor $\frac{1}{2}k(k-1)$ dubbelrechten.

Het oppervlak van Steiner is een voorbeeld van een monoïde van graad 4 met 3 dubbelrechten door den top.

§ 3. Rechten buiten den top.*)

Zooals we gezien hebben is een monoïde met gegeven top door $n(n+2)$ punten bepaald.

Nemen we hiervan $n+1$ stuks op een rechte, dan moet deze rechte geheel tot het oppervlak behooren.

---

*) Verg. J. de Vries: Surfaces algébriques renfermant un nombre fini de droites. Archives Teyler, sér. II, t. VIII, § 5 — § 11.

Leggen we nu in zoo'n rechte de tetraëderribbe X_2 X_3, dan wordt de vergelijking van het oppervlak:

$$A^{(n-1)}x_1 + B^{(n-1)}x_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Daar deze vergelijking $n+1$ termen minder bevat dat vergelijking (1) van § 1 blijkt, dat een rechte buiten den top, zooals wel te verwachten was, voor $n+1$ enkelvoudige gegevens telt.

Het vlak door deze rechte en den top moet nu een kromme van graad n met een $(n-1)$-voudig punt insnijden. De rechte zelf behoort reeds tot die kromme, zoodat er niets anders overblijft dan een ontaarde kromme van graad $n-1$ met een $(n-1)$-voudig punt en wel het samenstel van $n-1$ rechten door één punt.

Hieruit volgt dus, dat het optreden van een rechte buiten den top gepaard gaat met een bijzondere ligging van $n-1$ rechten door den top. Deze moeten n.l. in één vlak liggen.

Bij een kubisch oppervlak met dubbelpunt wordt daaraan steeds voldaan, omdat $n-1=2$.

De 6 rechten door den top kunnen op 15 manieren twee aan twee gecombineerd worden, waaruit volgt, dat een dergelijk kubisch oppervlak 15 rechten buiten het dubbelpunt bevat.

Gaan we nu onze monoïde, door vergelijking (1) bepaald, eens doorsnijden met een vlakkenbundel, waarvan de as gelegen is in de rechte buiten den top.

De vergelijking van dien vlakkenbundel luidt:

$$x_4 = \lambda\, x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Door uit de vergelijkingen (1) en (2) x_4 $\cancel{\lambda}$ te elimineeren, krijgen we de verschillende kegels, die de doorsnijdingskrommen van monoïde en vlakkenbundel uit den top der eerste projecteeren.

Die kegels hebben tot vergelijking:

$$x_1 (B^{(n-1)} + \lambda\, A^{(n-1)}) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Iedere kegel bevat het vlak $x_1 = o$, terwijl er een kegelbundel van graad $n-1$ overblijft.

De vergelijking daarvan is:

$$B^{(n-1)} + \lambda\, A^{(n-1)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Door λ uit vergelijking (4) en (2) te elimineeren krijgen we vergelijking (1) terug. Daar nu voor elke waarde van λ een vlak uit den vlakkenbundel met een kegel uit den kegelbundel overeenstemt, is tevens het analytisch bewijs geleverd van de volgende stelling.

Een monoïde M^n met een rechte buiten den top is te beschouwen als de meetkundige plaats der doorsnijdingskrommen van een kegelbundel van graad $n-1$ en een projectief daarmee verwanten vlakkenbundel. De as van dezen vlakkenbundel wordt op de monoïde een rechte buiten den top.

Het bewijs der stelling kan ook als volgt geleverd worden.

Een willekeurig vlak bevat van vlakken- en kegelbundel steeds een stralen- en krommenbundel, waartusschen ook een overeenkomst één aan één bestaat. Deze krommenbundel is van graad n—1.

Op elken straal uit den stralenbundel liggen n—1 snijpunten met de toegevoegde kromme. Het centrum van den stralenbundel bepaalt een kromme uit den krommenbundel. De hieraan toegevoegde straal snijdt deze kromme in het centrum van den stralenbundel en n—2 andere punten. Genoemd centrum ligt dus op de kromme, die in ons doorsnijdingsvlak door de beide bundels wordt voortgebracht. Een willekeurige straal bevat derhalve van deze kromme steeds n punten, zoodat ze van graad n is.

De vlakken- en kegelbundel, waarvan we uitgingen, bepalen daarom een oppervlak van graad n.

Daar nu het centrum van den stralenbundel steeds op de kromme gelegen is, welke in zoo'n willekeurig snijvlak wordt voortgebracht, moet de as van den vlakkenbundel een rechte van dat oppervlak wezen.

Er rest ons nog aan te toonen, dat dit oppervlak een monoïde is.

Denken we ons daartoe een vlak door de as van den vlakkenbundel en het centrum van den kegelbundel.

Als vlak van den eersten bundel is het toegevoegd aan een kegel van graad n—1 en bepaalt derhalve n—1 rechten door één punt.

Dit vlak snijdt ons oppervlak dus volgens een kromme van graad n met een (n—1)-voudig punt, reden waarom het een monoïde is.

Willen we van eenige rechten door één punt uitgaan om daardoor zoo'n monoïde te bepalen, dan hebben we in aanmerking te nemen, dat deze rechten niet willekeurig mogen zijn. Ze moeten toch behooren tot de basisribben van een kegelbundel van graad n—1. Een dergelijke bundel is bepaald door $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-1$ elkaar in één punt snijdende rechten.

Nemen we ter bepaling van de monoïde zooveel rechten door één punt aan, dan hebben we, daar ieder van deze rechten van twee enkelvoudige gegevens telt, nog over $n+4$ enkelvoudige gegevens te beschikken. Hieruit blijkt, dat we de monoïde dan nog door een willekeurige rechte en drie willekeurige punten kunnen laten gaan.

Dat er buiten den top eener monoïde nog meer rechten kunnen voorkomen, kan op de volgende manier aangetoond worden.

We weten, dat zoo'n monoïde door den top en

$n\ (n+2)$ punten bepaald is. Leggen we nu telkens $n+1$ dezer punten op een rechte vast, hetgeen n maal gebeuren kan zonder het aantal $n\,(n+2)$ te overschrijhen, dan zien we, dat de aldus bepaalde monoïde n rechten bevat, die geheel buiten den top gelegen zijn.

Gaan we nu eens van een monoïde uit, die n zulke rechten h_k bevat.

Een rechte g_{kl}, rustend op h_k en h_l en gaande door den top, bevat dan van de monoïde $n+1$ punten en ligt er daarom geheel op,

Bij twee rechten h_k en h_l behoort steeds één rechte g_{kl}. Het aantal dezer laatste rechten vinden we door de n rechten twee aan twee te combineeren. Dit levert ons dus $\frac{1}{2}\ n\ (n-1)$ stuks.

Iedere rechte g rust op twee rechten h, terwijl elke rechte h door $n-1$ rechten g gesneden wordt. Immers een rechte h bepaalt met den top een vlak, waarin $n-1$ rechten g moeten liggen.

Beschouwen we eens ter toepassing een kubisch oppervlak met dubbelpunt en noemen we die drie rechten buiten den top in navolging van Schläfli: h_{12}, h_{23} en h_{13}.

Hierbij behooren dan de rechten g_1, g_2 en g_3 door den top en wel als volgt:

g_1 rust op h_{12} en h_{13}, g_2 rust op h_{12} en h_{23} en g_3 rust op h_{13} en h_{23}.

Iedere rechte g rust dus op twee rechten, terwijl hier ook elke rechte h, $n—1=2$ rechten g ontmoet, want:

h_{12} snijdt g_1 en g_2, h_{23} snijdt g_2 en g_3 en h_{13} snijdt g_1 en g_3.

Door het dubbelpunt van het kubische oppervlak gaan 6 rechten g. Deze kunnen op 20 verschillende wijzen drie aan drie gecombineerd worden, waaruit volgt, dat op zoo'n kubisch oppervlak 20 dergelijke configuratie's voorkomen.

Daar $n(n+2) = n(n+1) + n$ hebben we, wanneer er n rechten op de zooeven beschreven wijze aangenomen zijn, nog over n punten de vrije beschikking. Leggen we deze op een rechte vast, die één der n gegeven rechten snijdt, dan moet ook die rechte geheel op de monoïde liggen.

Een monoïde kan derhalve buiten den top $n+1$ rechten bevatten, mits twee ervan elkaar snijden.

Behalve deze twee snijdende rechten h_1 en h_2 geheeten komen er dan nog $n \mp 1$ willekeurige rechten $h_3 \dots h_{n+1}$ voor. Deze laatste geven aanleiding tot $\frac{1}{2}(n—1)(n—2)$ rechten g door den top, die geheel op de monoïde liggen, terwijl ze elk op twee rechten h rusten.

Het vlak door den top en h_1 geeft n—1 rechten g. Evenzoo het vlak door den top en h_2. Deze 2 (n—1) rechten zijn dezelfde als die, welke verkregen worden door de vlakken door den top en één der rechten $h_3 \dots h_{n+1}$ in verband met h_1 en h_2 te beschouwen.

In het geheel gaan er door den top dus $\frac{1}{2}$ (n—1) (n—2) $+$ 2 (n—1) $=$ $\frac{1}{2}$ (n—1) ($n+2$) rechten der monoïde, die elk twee rechten h ontmoeten.

Ook hier snijdt elke rechte h n—1 rechten g.

Wilden we dit eens controleeren bij een kubisch oppervlak met een dubbelpunt, dan zouden we door dat punt 5 zulke rechten g verwachten.

Nemen we voor de twee snijdende rechten buiten den top h_{12} en h_{34}, dan hebben we voor de twee willekeurige rechten h_{13} en h_{14}, h_{13} en h_{23}, h_{14} en h_{24} of h_{23} en h_{24}. Welke twee we nu ook kiezen, ze bepalen geen andere rechten g bij de 4 rechten g_1, g_2, g_3 en g_4, door h_{12} en h_{34} vastgelegd.

Dit komt daardoor, dat de rechten g, behoorende bij h_{12} en h_{34}, zelve 6 rechten h bepalen, want bij een kubisch oppervlak ligt steeds een rechte h in het vlak van twee rechten g.

Zooals wel duidelijk is, zijn ook andere liggingen van rechten buiten den top mogelijk. Het kan immers voorkomen, dat meerdere rechten h elkaar snijden.

In plaats van deze gevallen na te gaan, onderzoeken we eens, of op een monoïde buiten den top een schele k-zijde kan voorkomen. Van die k-zijde denken we de hoekpunten willekeurig op de monoïde gelegen en bovendien op elke zijde dan nog $n-1$ punten.

Zal nu een monoïde door den top en deze punten bepaald kunnen worden dan moet:

$$k + k\,(n-1) \leqq n\,(n+2) \text{ of:}$$

$$k \leqq n+2.$$

Op zijn hoogst is er dus buiten den top een $(n+2)$-zijde te verwachten.

Bevat nu een monoïde een schele $(n+2)$-zijde, dan geeft een vlak door den top en één dezer rechten h weer aanleiding tot $n-1$ rechten g, welke door den top gaan, geheel op de monoïde liggen en op twee rechten h rusten.

In het geheel zijn er dan $\frac{1}{2}\,(n-1)\,(n+2)$ zulke rechten g.

Onderzoeken we dit eens nader voor het geval $n=3$.

Een kubisch oppervlak met een dubbelpunt moet nu door dit laatste en een schele vijfzijde bepaald wezen.

Zoo'n schele vijfzijde kan dan als volgt genoemd worden:

$$h_{12},\ h_{34},\ h_{15},\ h_{23} \text{ en } h_{45}.$$

Hierbij behooren dan de 5 rechten g_1, g_2, g_3, g_4 en g_5. Deze rechten geven ook nog aanleiding tot de volgende schele vijfzijden:

h_{12}	h_{34}	h_{15}	h_{24}	en	h_{35}.
h_{12}	h_{34}	h_{25}	h_{14}	en	h_{35}.
h_{12}	h_{35}	h_{24}	h_{13}	en	h_{45}.
h_{12}	h_{35}	h_{14}	h_{23}	en	h_{45}.
h_{12}	h_{54}	h_{25}	h_{13}	en	h_{45}.
h_{34}	h_{25}	h_{13}	h_{24}	en	h_{15}.
h_{34}	h_{25}	h_{14}	h_{23}	en	h_{15}.
h_{35}	h_{24}	h_{13}	h_{25}	en	h_{14}.
h_{35}	h_{24}	h_{15}	h_{23}	en	h_{14}.
h_{13}	h_{24}	h_{15}	h_{23}	en	h_{45}.
h_{13}	h_{25}	h_{14}	h_{23}	en	h_{45}.

Vijf rechten g uit het dubbelpunt geven, zooals blijkt, in 't geheel aanleiding tot 12 schele vijfzijden. Er gaan door het dubbelpunt van het kubisch oppervlak 6 zulke rechten g. Deze kunnen op 6 verschillende wijzen vijf aan vijf gecombineerd worden, waaruit volgt, dat er 72 dergelijke schele vijfzijden op een kubische monoïde voorkomen.

Wanneer op een monoïde een veelvoudige rechte door den top voorkomt, dan kan het oppervlak buiten den top ook nog wel rechten bevatten.

Het geval van een (n—1)-voudige rechte is al behandeld in § 2. Dat van een (n—2)-voudige rechte willen we nu eens gaan beschouwen.

Kiezen we onzen coördinatentetraëder evenals in § 2, dan wordt de vergelijking van het oppervlak:

$$[U^{(n-2)} x_1 + U^{(n-1)}] x_4 + V^{(n-2)} x_1^2 + V^{(n-1)} x_1$$
$$+ V^{(n)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Door den top dezer monoïde gaan behalve de veelvoudige rechte nog $3\,n$—4 andere rechten. Men vindt ze als doorsnijding der beide kegels:

$$U^{(n-2)} x_1 + U^{(n-1)} = o. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\text{en } V^{(n-2)} x_1^2 + V^{(n-1)} x_1 + V^{(n)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Bij eliminatie van x_1 uit de vergelijkingen (6) en (7) blijkt, dat dit aantal rechten juist is. Immers dan ontstaat een vergelijking van graad 3 n—4 en homogeen in x_2 en x_3. Deze vergelijking stelt dan $3\,n$—4 vlakken door de rechte X_4X_1 voor, wat op evenveel rechten door den top der monoïde ziet.

Dit aantal is ook als volgt af te leiden.

Elk vlak door de (n—2)-voudige rechte snijdt op de monoïde een kegelsnede in, welke steeds door den top gaat. Zoo dikwijls het nu gebeurt, dat een dergelijke kegelsnede ontaardt, bevat de monoïde een rechte door den top.

Ten einde dit te onderzoeken, doorsnijden we de monoïde met den vlakkenbundel die de (n—2)-voudige rechte tot as heeft.

De vergelijking van dezen bundel is:

$$x_3 = \lambda\, x_2' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

De eliminatie van x_3 uit de vergelijkingen (5) en (8) geeft nu:

$$x_2^{(n-2)}\left[\, x_1 x_4\, f^{(n-2)} + x_2 x_4\, f^{(n-1)} + x_1^2\, g^{(n-2)} + x_1 x_2\, g^{(n-1)} + x_2^2\, g^{(n)}\right] = o \quad . \ . \quad (9).$$

Hierin zijn f en g polynomia in λ, waarvan de graad door den index aangegeven wordt.

De vergelijking (9) stelt de kegels voor, welke de kegelsneden, door den vlakkenbundel ingesneden, uit X_3 projecteeren.

De factor $x_2^{(n-2)}$ wijst op de (n—2)-voudige rechte, welke tegelijk met elke kegelsnede ingesneden wordt.

Voor elke waarde van λ, waarvoor de bekende invariant van dit stelsel kegels nul wordt, hebben we met een ontaarding te doen. Dus als:

$$\begin{vmatrix} 2\, g^{(n-2)}, & g^{(n-1)}, & f^{(n-2)} \\ g^{(n-1)}, & 2\, g^{(n)}, & f^{(n-1)} \\ f^{(n-2)}, & f^{(n-1)}, & o \end{vmatrix} = o \quad . \ . \ . \quad (10).$$

Bij uitwerking blijkt, dat zulks voor $3n—4$ waarden van λ plaats vindt, waarmede ook langs dezen weg het bestaan van evenveel rechten door den top der monoïde is aangetoond.

In het linkerlid der vergelijking (5) komen $5n—1$ termen voor, dus $5n—2$ onafhankelijke constanten, waaruit volgt, dat een monoïde met een $(n—2)$-voudige rechte door den top door deze twee gegevens en nog $5n—2$ punten bepaald is.

Daar nu $5n—2 \geqq 4(n+1)$ voor $n \geqq 6$, zou men denken, dat een monoïde van graad zes of hooger met een $(n—2)$-voudige rechte door den top nog 4 willekeurige rechten kan bevatten.

Zonder ontaarding is dit echter niet het geval.

Gaan we n.l. uit van een rechte l en een punt O daarop en verder van vier willekeurige rechten h_1, h_2, h_3 en h_4. Zal l nu een $(n—2)$-voudige rechte eener monoïde, met top in O, kunnen wezen, terwijl dit oppervlak bovendien nog de vier rechten h bevat, dan moet elk vlak door l een kegelsnede insnijden, die door O gaat en op de rechten h rust.

We beschouwen een bijzonder geval en leiden daaruit den graad van het oppervlak dezer kegelsneden af.

Daartoe nemen we aan, dat h_4 op l rust. In het vlak $(l\,h_4)$ ligt dan een bundel kegelsneden, die aan de voorwaarden voldoen. Nu wordt h_4 door elke kegelsnede tweemaal gesneden, zoodat het vlak $(l\ h_4)$ ook tweemaal tot het bedoelde oppervlak behoort. Verder bestaat dit uit het oppervlak, gevormd door de kegelsneden, die op h_1, h_2 en h_3 rusten en bovendien nog door O en het snijpunt P van l en h_4 gaan.

De rechten h_1, h_2 en h_3 bezitten 2 transversalen, die l snijden, zoodat de rechte l tweemaal tot het laatstgenoemde oppervlak behoort. Immers l behoort dan tweemaal tot een ontaarde kegelsnede, die aan de voorwaarden voldoet.

Elk vlak door l snijdt dus een kegelsnede en nog een tweevoudige rechte in. Het oppervlak is dan van graad 4 met de drievoudige punten O en P op de tweevoudige rechte l.

Bij dit oppervlak komt nu nog het tweemaal te tellen vlak $(l\ h_4)$.

Op dit samengestelde oppervlak zijn O en P vijfvoudige punten en l een viervoudige rechte.

Indien nu l en h_4 elkaar niet snijden, dan blijft het resultaat, dat de kegelsneden, in de vlakken door l gelegen, gaande door O en rustend op h_1, h_2, h_3 en h_4 een oppervlak van den zesden graad bepalen, waarop O een vijfvoudig punt en l een viervoudige rechte is.

Hieruit volgt nu, dat een monoïde M^n met een $(n-2)$-

voudige rechte door den top en 4 rechten buiten den top bestaan moet uit een dergelijk oppervlak van den zesden graad met nog (n—6) vlakken door die veelvoudige rechte.

Beschouwen we nu een monoïde met een (n—2)-voudige rechte door den top O, terwijl er buiten den top nog 3 willekeurige rechten h_1, h_2 en h_3 voorkomen. In elk der vlakken ($O h_1$), ($O h_2$) en ($O h_3$) liggen dan behalve de rechten g_{12}, g_{13} en g_{23}, die door O gaan en resp. op h_1 en h_2, h_1 en h_3 en h_2 en h_3 rusten, nog n—3 rechten der monoïde.

Dit zijn al in het geheel 3 n—6 rechten door den top.

De ontbrekende twee worden aangetroffen in de vlakken door l en de twee transversalen van h_1, h_2, h_3 en l.

Controleeren we dit eens bij een kubisch oppervlak met dubbelpunt.

Naar Schläfli's notatie nemen we voor de rechten buiten het dubbelpunt h_{12}, h_{13} en h_{23}.

Daarbij behooren dan de drie rechten door het dubbelpunt g_1, g_2 en g_3. Is nu g_4 de (n—2)-voudige rechte, dan zijn h_{45} en h_{46} de twee transversalen van zooeven.

Ze bepalen met g_4 de twee andere rechten door het dubbelpunt n.l. g_5 en g_6.

Buiten den top kan een monoïde geen andere dan enkelvoudige rechten bevatten. Immers een willekeurig vlak door den top doorsneed de monoïde dan volgens een K_n met een $(n-1)$-voudig punt en nog een ander veelvoudig punt, hetgeen zonder ontaarding niet mogelijk is.

---

§4. Klasse der Monoïde. Zooals bekend is, wordt de klasse van een oppervlak verkregen als het aantal gemeenschappelijke punten van het oppervlak en de beide eerste poolvlakken, behoorende bij twee willekeurige punten. Om dit voor een monoïde te onderzoeken hebben we na te gaan, hoe die poolvlakken zich in den top der monoïde gedragen.

Daartoe gaan we uit van een monoïde, voorgesteld door de vergelijking :

$$A^{(n-1)} x_4 + B^{(n)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Het eerste poolvlak van X_2 heeft dan tot vergelijking:

$$A_2^{(n-1)} x_4 + B_2^{(n)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Die indices 2 wijzen op een partiëele differentiatie naar x_2.

Het oppervlak, door vergelijking (2) voorgesteld, is klaarblijkelijk een monoïde van graad $n-1$ met den top in X_4.

Op analoge wijze vinden we het eerste poolvlak van X_3 :

$$A_3^{(n-1)} x_4 + B_3^{(n)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Het aantal snijpunten der oppervlakken (1), (2) en (3), verminderd met het aantal gemeenschappelijke punten in X_4, levert de gevraagde klasse.

De beide poolvlakken (2) en (3) geven als doorsnijding een ruimtekromme van graad $(n-1)^2$, waarvan $(n-2)^2$ takken door X_4 gaan. Immers in een willekeurig vlak door X_4 liggen twee krommen van graad $n-1$ met $(n-2)$-voudig punt in X_4.

Daar bezit dat vlak dus $(n-2)^2$ punten, aan beide poolvlakken toebehoorende, zoodat hun doorsnede $(n-2)^2$ takken door X_4 moet zenden.

Onze monoïde heeft in X_4 een $(n-1)$-voudig punt. Elk der $(n-2)^2$ takken heeft daar $n-1$ punten met haar gemeen.

De drie oppervlakken hebben alzoo in X_4 $(n-1)(n-2)^2$ gemeenschappelijke punten en buiten X_4 is dit aantal derhalve:

$$n\,(n-1)^2 - (n-1)\,(n-2)^2 = (n-1)\,(3\,n-4),$$

waarmede de klasse der monoïde gevonden is.

Voor $n = 3$ geeft dit 10, hetgeen overeenstemt met wat we van een kubisch oppervlak met een dubbelpunt weten.

Komt op een monoïde een rechte buiten den top voor, dan kan dit oppervlak voorgesteld worden door de vergelijking:

$$A^{(n-1)} x_4 + B^{(n-1)} x_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Het eerste poolvlak van een willekeurig punt bijv. X_1 heeft dan tot vergelijking:

$$A_1^{(n-1)} x_4 + B_1^{(n-1)} x_1 + B^{(n-1)} = o \quad . \quad . \quad (5).$$

Dit poolvlak bevat de rechte $X_2 X_3$ niet, waaruit volgt, dat het optreden van een rechte buiten den top geen invloed heeft op de klasse der monoïde.

Met een k-voudige rechte door den top is dit wel het geval.

Is er bijv. een k-voudige rechte in $X_4 X_1$ gelegen, dan is volgens § 2 de vergelijking van het oppervlak:

$$[U^{(k)} x_1^{n-k-1} + U^{(k+1)} x_1^{n-k-2} + \ldots + U^{(n-2)} x_1 +$$
$$+ U^{(n-1)}] x_4 + V^{(k)} x_1^{n-k} + V^{(k+1)} x_1^{n-k-1} + \ldots +$$
$$+ V^{(n-1)} x_1 + V^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Het eerste poolvlak van X_2 heeft dan tot vergelijking:

$$[U_2^{(k)} x_1^{n-k-1} + U_2^{(k+1)} x_1^{n-k-2} + \ldots +$$
$$+ U_2^{(n-2)} x_1 + U_2^{(n-1)}] x_4 + V_2^{(k)} x_1^{n-k} +$$
$$+ V_2^{(k+1)} x_1^{n-k-1} + \ldots + V_2^{(n-1)} x_1 + V_2^{(n)} = o \,(7).$$

En het eerste poolvlak van X_3:

$$[U_3^{(k)}\, x_1^{\,n-k-1} + U_3^{(k+1)}\, x_1^{\,n-k-2} + \ldots\ldots + U_3^{(n-2)}\, x_1 + U_3^{(n-1)}]\, x_4 + V_3^{(k)}\, x_1^{\,n-k} + V_3^{(k+1)}\, x_1^{\,n-k-1} + \ldots + V_3^{(n-1)}\, x_1 + V_3^{(n)} = o \quad (8).$$

Beide poolvlakken zijn krachtens hunne vergelijkingen monoïden M^{n-1} met top in X_4 en met X_4X_1 als (k—1)-voudige rechte.

In een willekeurig vlak ligt van elk poolvlak een kromme van graad n—1 met een (k—1)-voudig punt op X_4X_1, zoodat van de $(n-1)^2$ snijpunten dezer krommen $(k-1)^2$ stuks op X_4X_1 gelegen zijn.

Buiten X_4X_1 doorsnijden de beide poolvlakken elkaar dus volgens een ruimtekromme van graad $(n-1)^2 - (k-1)^2$.

Deze zendt $(n-2)^2 - (k-1)^2$ takken door X_4.

Immers een willekeurig vlak door X_4 snijdt elk der beide poolvlakken volgens een kromme van graad n—1 met een (n—2)-voudig punt in X_4. Bij de $(n-2)^2$ snijpunten, die deze krommen in X_4 gemeen hebben, zijn dan de $(k-1)^2$ punten geteld, die de beide krommen op de (k—1)-voudige rechte gemeen hebben.

Bovendien bezit de ruimtekromme nog eenige punten op X_4 X_1.

Hun aantal wordt als volgt gevonden.

Een willekeurig vlak door X_4X_1 snijdt de beide poolvlakken volgens deze $(k-1)$-voudige rechte en een kromme van graad $n-k$ met een $(n-k-1)$-voudig punt in X_4.

Van de $(n-k)^2$ snijpunten dezer beide krommen liggen er dan $(n-k-1)^2$ stuks in X_4. Buiten X_4 bezitten die krommen dus $(n-k)^2-(n-k-1)^2$ gemeenschappelijke punten.

Het vlak dezer krommen bevat $(n-1)^2-(k-1)^2$ punten der ruimtekromme.

Daarom bezit de ruimtekromme $[(n-1)^2-(k-1)^2]-[(n-k)^2-(n-k-1)^2]$ punten op X_4X_1.

We hebben gezien, dat de ruimtekromme $(n-2)^2-(k-1)^2$ takken door X_4 zendt, zoodat ze op $X_4\,X_1$ buiten X_4 nog $[(n-1)^2-(k-1)^2]-[(n-k)^2-(n-k-1)^2]-[(n-2)^2-(k-1)^2]=2\,k-2$ punten bezit.

Zij P een dezer punten.

Daar P op de monoïde M^n en op het eerste poolvlak van X_2 gelegen is, heeft $P\,X_2$ de beteekenis eener raaklijn aan de monoïde M^n.

De ruimtekromme zal de monoïde M^n daar derhalve in $k+1$ punten snijden.

Buiten X_4X_1 wordt de oorspronkelijke monoïde door de ruimtekromme dan in:

$n[(n-1)^2-(k-1)^2]-(n-1)[(n-2)^2-(k-1)^2]-$
$-(k+1)(2k-2)=(n-1)(3n-4)-(k-1)(3k+1)$
punten gesneden.

Dit getal geeft de klasse der monoïde M^n, waarmede aangetoond is, dat de k-voudige rechte de klasse met $(k-1)(3k+1)$ verlaagt.

Op een monoïde kunnen buiten den top nog andere singuliere punten voorkomen.

Stellen we ons een monoïde met nog een p-voudig punt voor, en gaan we eens na, in hoeverre de klasse der monoïde daardoor verlaagd wordt.

Ligt de top in X_4 en het p-voudige punt in X_3, dan mag in de vergelijking van het oppervlak de coördinaat x_3 tot geen hooger macht voorkomen dan tot de macht $n-p$.

Die vergelijking moet er dan als volgt uitzien:

$$[U^{(p-1)}x_3^{n-p}+U^{(p)}x_3^{n-p-1}+\ldots+U^{(n-2)}x_3+$$
$$+U^{(n-1)}]\,x_4+V^{(p)}x_3^{n-p}+V^{(p+1)}x_3^{n-p-1}+$$
$$+\ldots+V^{(n-1)}x_3+V^{(n)}=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

U en V zijn homogeen in x_1 en x_2, terwijl de bovenaan geplaatste index den graad aangeeft.

Deze vergelijking bevat p^2 termen minder dan vergelijking (1), zoodat een p-voudig punt op een monoïde voor p^2 enkelvoudige gegevens telt.

Op een willekeurig oppervlak echter telt een p-voudig punt voor $\frac{1}{6} p (p+1) (p+2)$ enkelvoudige gegevens, hetgeen af te leiden valt door de vergelijking van zoo'n oppervlak te beschouwen in verband met die van een oppervlak, waar een dergelijk p-voudig punt op voorkomt.

Om nu de klasse der monoïde, voorgesteld door vergelijking (9), te bepalen, gaan we het eerste poolvlak van X_1 en X_2 beschouwen.

De vergelijking van het eerste poolvlak van X_1 is:

$$[U_1^{(p-1)} x_3^{n-p} + U_1^{(p)} x_3^{n-p-1} + \ldots + U_1^{(n-2)} x_3 + U_1^{(n-1)}] x_4 + V_1^{(p)} x_3^{n-p} + V_1^{(p+1)} x_3^{n-p-1} + \ldots + V_1^{(n-1)} x_3 + V_1^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Het eerste poolvlak van X_2 is nu:

$$[U_2^{(p-1)} x_3^{n-p} + U_2^{(p)} x_3^{n-p-1} + \ldots + U_2^{(n-2)} x_3 + U_2^{(n-1)}] x_4 + V_2^{(p)} x_3^{n-p} + V_2^{(p+1)} x_3^{n-p-1} + \ldots + V_2^{(n-1)} x_3 + V_2^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Beide poolvlakken zijn monoïden M^{n-1} met top in X_4 terwijl ze in X_3 een $(p-1)$-voudig punt bezitten. Tevens volgt uit hunne vergelijkingen dat de rechte X_3X_4 op beide als $(p-2)$-voudige rechte voorkomt.

Op de oorspronkelijke monoïde is het een $(p-1)$-voudige rechte, wat uit vergelijking (9) af te leiden is.

De beide poolvlakken doorsnijden elkaar volgens een ruimtekromme, waartoe de rechte X_3X_4 $(p-2)^2$ maal behoort. De restdoorsnijding is derhalve een ruimtekromme van graad $(n-1)^2 - (p-2)^2$.

Deze laatste zendt nu $(n-2)^2 - (p-2)^2$ takken door X_4 en $(p-1)^2 - (p-2)^2$ takken door X_3.

Elke tak door X_4 snijdt de oorspronkelijke monoïde in $n-1$ en elke tak door X_3 in p punten.

Hieruit volgt, dat de ruimtekromme de oorspronkelijke monoïde buiten X_3 en X_4 nog in
$n[(n-1)^2 - (p-2)^2] - (n-1)[(n-2)^2 - (p-2)^2] -$
$- p[(p-1)^2 - (p-2)^2] = (n-1)(3n-4) - (p-1)$
$(3p-4)$ punten snijdt.

We zien derhalve, dat een p-voudig punt op een monoïde de klasse met $(p-1)(3p-4)$ verlaagt.

Voor de waarde $p=1$ blijft de klasse onveranderd en voor de waarde $p=2$ wordt ze twee lager.

Komt op een willekeurig oppervlak een p-voudig punt voor, dan wordt de klasse daardoor met $p(p-1)^2$ verminderd, wat na het voorgaande wel duidelijk is.

§5. Veelvoudige punten op de Monoïde.

In de vorige paragraaf is de klasse afgeleid voor een monoïde, waarop nog een p-voudig punt voorkwam.

De mogelijkheid van zoo'n p-voudig punt buiten den top bleek wel uit het bestaan van vergelijking (6).

De vraag kan nu gesteld worden, hoeveel dubbelpunten zijn er op een monoïde buiten den top wel te verwachten. Hiervoor is een bovenste grens te vinden.

Zij O de top der monoïde en P een willekeurig punt buiten het oppervlak. Het eerste poolvlak van P is dan een monoïde van graad $n-1$ met den top eveneens in O. De doorsnijdingskromme van de beide oppervlakken bezit daarom $(n-1)(n-2)$ takken door O, waaruit volgt, dat de raakkegel uit P in OP een $(n-1)$ $(n-2)$-voudige ribbe bezit. Zoo'n veelvoudige ribbe op een kegel telt voor $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)[(n-1)(n-2)-1]$ dubbelribben.

Het aantal keerribben op den raakkegel uit P vinden we als het aantal snijpunten, buiten O gelegen, van de monoïde en het eerste en tweede poolvlak van P.

Het tweede poolvlak van een willekeurig punt t. o. v. een M^n is steeds een monoïde M^{n-2} met den top in hetzelfde punt als de oorspronkelijke monoïde.

Is de vergelijking der monoïde toch:

$$A^{(n-1)} x_4 + B^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

dan is het eerste poolvlak van een punt buiten de monoïde gelegen bijv. van X_1:

$$A_1^{(n-1)} x_4 + B_1^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

En het tweede poolvlak van X_1:

$$A_{11}^{(n-1)} x_4 + B_{11}^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarmede het bewezen is.

De 3 oppervlakken (1), (2) en (3) hebben in den top $(n-1)(n-2)(n-3)$ gemeenschappelijke punten, dus daarbuiten nog $n(n-1)(n-2) - (n-1)(n-2)(n-3) = 3(n-1)(n-2)$.

Het aantal keerribben op den raakkegel uit P is derhalve: $3(n-1)(n-2)$.

Het aantal dubbelribben van dien raakkegel wordt langs een omweg afgeleid.

De klasse van den raakkegel is, wanneer we het aantal dubbelribben d noemen:
$n(n-1)[n(n-1)-1] - (n-1)(n-2)[(n-1)(n-2)-1] - 2d - 3 \times 3(n-1)(n-2)$.

Deze klasse is dezelfde als die van de monoïde.

Daarvoor is in § 4 de waarde $(n-1)(3n-4)$ gevonden. Door deze twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk te stellen, vinden we voor het aantal dubbelribben de waarde: $2(n-1)(n-2)(n-3)$.

Bezit nu een monoïde een dubbelpunt, dan geeft dit aanleiding tot een dubbelrechte op den raakkegel, want het eerste poolvlak gaat steeds door zoo'n dubbelpunt.

Het aantal dubbelpunten op de monoïde is daarom aan een bovenste grens gebonden. Immers het aantal dubbelrechten op een kegel van graad m is in maximo $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$.

Is het aantal dubbelpunten der monoïde x, dan vindt men de hoogste waarde van x uit de volgende vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}\,[n\,(n-1) - 1]\,[n\,(n-1) - 2] = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,[(n-1)\,(n-2) - 1] + 3\,(n-1)\,(n-2) + 2\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) + x.$$

Hieruit volgt $x = (n-2)\,(2\,n-3)$.

Controleeren we dit resultaat eens voor het geval $n=3$, dan blijkt dat op een kubisch oppervlak met dubbelpunt niet meer dan 3 andere dubbelpunten kunnen voorkomen. Dit stemt overeen met wat bekend is van de kubische oppervlakken.

HOOFDSTUK II.

De Dimonoïde D^n.

§ 1. Bepaling der Dimonoïde.

In de laatste paragraaf van het vorige hoofdstuk is gebleken, dat op een monoïde buiten den top nog andere veelvoudige punten kunnen voorkomen. Voor het geval van een *p*-voudig punt, is de vergelijking van het oppervlak afgeleid. Daarvan uitgaande is gemakkelijk in te zien, dat de vergelijking van een monoïde, in het bezit van nog een tweede $(n-1)$-voudig punt, als volgt geschreven kan worden:

$$A^{(n-2)} x_3 x_4 + B^{(n-1)} x_3 + C^{(n-1)} x_4 + D^{(n)} = o \quad (1).$$

Hierin stellen A, B, C en D homogene functies in x_1 en x_2 voor, terwijl de graad door den bovenaan geplaatsten index wordt aangegeven.

De beide coördinaten x_3 en x_4 komen slechts tot de eerste macht voor, waaruit blijkt, dat de punten X_3 en X_4 de beide $(n-1)$-voudige punten op het oppervlak zijn.

Zoo'n monoïde met twee toppen wordt een *dimonoïde* geheeten.

Het linkerlid van vergelijking (1) bevat $4n$ termen, dus $4n-1$ onafhankelijke constanten, waaruit volgt, dat een dimonoïde door haar beide toppen en $4n-1$ andere punten bepaald is.

Zoo'n dimonoïde kan echter ook wel anders bepaald worden. Doorsnijden we, ten einde dit aan te toonen, de dimonoïde, voorgesteld door vergelijking (1), met den vlakkenbundel, die de tetraëderribbe X_3X_2 tot as heeft.

De vergelijking van dien bundel is dan:

$$x_4 = \lambda x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

De eliminatie van x_4 uit de vergelijkingen (1) en (2) levert ons:

$$B^{(n-1)}x_3 + D^{(n)} + \lambda x_1 \, [C^{(n-1)} + A^{(n-2)} x_3] = o \quad . \quad (3).$$

Dit is de vergelijking van een kegelbundel van graad n, welke bepaald wordt door de beide kegels:

$$B^{(n-1)} x_3 + D^{(n)} = o \text{ en } x_1 \, [C^{(n-1)} + A^{(n-2)} x_3] = o.$$

De eerste hiervan bezit X_3X_4 als $(n-1)$-voudige ribbe.

De tweede is samengesteld uit het vlak $x_1 = o$ en een kegel van graad $n-1$ met X_3X_4 tot $(n-2)$-voudige ribbe.

De vlakkenbundel (2) is projectief verwant met den kegelbundel (3), want met een bepaald vlak stemt een bepaalde kegel overeen. De verwantschap is zoodanig geregeld, dat met het vlak $x_1 = o$ uit den vlakkenbundel de kegel $x_1 \, [C^{(n-1)} + A^{(n-2)} x_3]$ uit den kegelbundel overeenstemt, wat voor de waarde $\lambda = \infty$ blijkt.

De meetkundige plaats der doorsnijdingskrommen van overeenkomstige elementen uit de beide bundels is de dimonoïde, waarvan we uitgingen.

Dit wordt bewezen door λ uit de vergelijkingen (2) en (3) te elimineeren, waarbij we dan weer op vergelijking (1) terecht komen.

Een dimonoïde kan derhalve ook langs synthetischen weg geconstrueerd worden evenals we dat bij de monoïde gezien hebben.

§ 2. Rechten door een top.

Uit de vergelijking der dimonoïde, zooals we die in de voorgaande paragraaf aangetroffen hebben, is onmiddellijk af te leiden, dat de verbindingslijn der beide toppen een $(n-2)$-voudige rechte op het oppervlak is. Bij substitutie van $x_1 = o$ wordt het linkerlid toch deelbaar door $x_2^{\,n-2}$ en omgekeerd.

De vraag doet zich voor hoeveel van de $n\,(n-1)$ rechten, die door den top eener monoïde gaan, nu in die $(n-2)$-voudige rechte door beide toppen wel opgehoopt liggen? Voor de beantwoording dezer vraag moet eerst nagegaan worden, hoeveel rechten er buiten die $(n-2)$-voudige rechte door een top aangetroffen worden.

Dit kan als volgt gevonden worden.

Elk vlak door de $(n-2)$-voudige rechte moet nog een kegelsnede insnijden, gaande door de beide toppen der dimonoïde. Ontaardt nu zoo'n kegelsnede, dan geeft dit steeds een rechte door elken top. Om nu te onderzoeken hoe dikwijls dit gebeurt, doorsnijden we de dimonoïde met den vlakkenbundel, die de verbindingslijn der toppen tot as heeft.

Is de vergelijking der dimonoïde:

$$A^{(n-2)} x_3 x_4 + B^{(n-1)} x_3 + C^{(n-1)} x_4 + D^{(n)} = o \quad \ldots (1)$$

dan is de vergelijking van den vlakkenbundel:

$$x_2 = \lambda x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Gaan we x_2 elimineeren uit deze vergelijkingen, dan is het resultaat:

$$x_3 x_4 f^{(n-2)} + x_1 x_3 f^{(n-1)} + x_1 x_4 g^{(n-1)} +$$

$$+ x_1^2 g^{(n)} = o \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

De uitgevallen factor x_1^{n-2} wijst op de $(n-2)$-voudige rechte, f en g zijn polynomia in λ.

In (3) hebben we de vergelijking van de kegels, die uit X_2 de kegelsneden projecteeren, welke door den vlakkenbundel worden ingesneden.

De waarden van λ, welke een ontaarding van zoo'n kegel opleveren, vinden we uit de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 2\,g^{(n)} & , f^{(n-1)}, & g^{(n-1)} \\ f^{(n-1)}, & o & , f^{(n-2)} \\ g^{(n-1)}, & f^{(n-2)}, & o \end{vmatrix} = o \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Deze kan herleid worden tot:

$$f^{(n-1)}\, g^{(n-1)}\, f^{(n-2)} - g^{(n)}\, f^{(n-2)}\, f^{(n-2)} = o$$

of wel:

$$f^{(n-2)} = o \text{ en } g^{(n-1)} f^{(n-1)} - g^{(n)} f^{(n-2)} = o \quad . \; . \; (5).$$

Wanneer voor een waarde λ_0 aan de vergelijking $f^{(n-2)} = o$ voldaan wordt, dan zal de kegel, die de doorsnijdingskromme van het vlak $x_2 = \lambda_0 x_1$ met de dimonoïde projecteert, tot vergelijking hebben:

$$x_1 x_3 \overset{(n-1)}{f} (\lambda_0) + x_1 x_4 \overset{(n-1)}{g} (\lambda_0) + x_1^2 \overset{(n)}{g} (\lambda_0) = o \quad . \; (6).$$

Deze kegel ontaardt steeds in het vlak $x_1 = o$ en een vlak:

$$x_3 \overset{(n-1)}{f} (\lambda_0) + x_4 \overset{(n-1)}{g} (\lambda_0) + x_1 \overset{(n)}{g} (\lambda_0) = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Het vlak $x_1 = o$ geeft met het vlak $x_2 = \lambda_0 x_1$ de lijn $X_3 X_4$, zijnde de (n—2)-voudige rechte der dimonoïde.

Het vlak, voorgesteld door vergelijking (7), geeft met het vlak $x_2 = \lambda_0 x_1$ een rechte, die met $X_3 X_4$ in één vlak ligt. Dit vlak is een torsaalraakvlak der dimonoïde. Er zijn n—2 waarden λ_0.

Het komt dus $n-2$ maal voor, dat een rechte door den top der dimonoïde in de verbindingslijn der toppen valt. Bovendien bevat de dimonoïde dan steeds $n-2$ rechten, die buiten de toppen die verbindingslijn snijden.

Voor $n=3$ vinden we het bekende resultaat, dat een kubisch oppervlak met 2 dubbelpunten één rechte bevat, die op de verbindingslijn dezer dubbelpunten rust.

Heeft λ echter zoodanige waarde, dat voldaan wordt aan de vergelijking:

$g^{(n-1)} f^{(n-1)} - g^{(n)} f^{(n-2)} = o$, bijv. voor $\lambda = \lambda_1$, dan geeft dit een ontaarde kegelsnede in het vlak $x_2 = \lambda_1 x_1$.

Dit zal voor $2n-2$ waarden van λ plaats vinden, waarmede aangetoond is, dat door elken top der dimonoïde $2n-2$ rechten gaan.

Bij een kubisch oppervlak met twee dubbelpunten gaan er dan, zooals bekend is, door elk dubbelpunt 4 rechten van het oppervlak.

Keeren we terug tot de dimonoïde. Uit de vergelijking van het oppervlak volgt, dat er door elken top $n(n-1)$ rechten gaan.

Door elken top hebben we er al $2n-2$ aangetroffen. Verder waren er $n-2$ rechten, die de verbindingslijn der toppen sneden. Langs die verbindingslijn vallen dus $2\,n\,(n-1) - 2\,(2\,n-2) - (n-2) = 2\,n^2 - 7\,n+6$ rechten.

Voor $n=3$ geeft dit 3, wat ook moet, omdat die lijn door de toppen een enkelvoudige rechte van de kubische dimonoïde is en daarom dan in het geheel 4 maal geteld moet worden.

Dat er bij een dimonoïde door elken top $2\,n-2$ rechten gaan, is ook als volgt aan te toonen:

De vergelijking (1) doet toch zien, dat de rechten door den top X_4 moeten liggen op de beide kegels:

$$\begin{aligned} A^{(n-2)}\, x_3 + C^{(n-1)} &= o \\ \text{en} \quad B^{(n-1)}\, x_3 + D^{(n)} &= o. \end{aligned} \qquad (8)$$

De gemeenschappelijke rechten hiervan liggen in de $2\,n-2$ vlakken, bepaald door de vergelijking:

$$A^{(n-2)}\, D^{(n)} - B^{(n-1)}\, C^{(n-1)} = o \quad . \ . \ . \ . \quad (9)$$

welke ontstaat door uit de twee vergelijkingen (8) x_3 te elimineeren.

Hiermede is het bestaan der $2\,n-2$ rechten door X_4 bewezen. Op dezelfde manier kan dit voor X_3 gebeuren.

Behalve de rechte door de beide toppen kan een dimonoïde geen veelvoudige rechten bevatten. Zoo'n rechte zou dan steeds buiten één der toppen gelegen zijn, waarvan de onmogelijkheid in § 3 van het vorige hoofdstuk aangetoond is.

§ 3. Rechten buiten de toppen. In § 1 hebben we gezien, dat een dimonoïde door de beide toppen en $4n-1$ andere punten bepaald is. Liggen er van deze laatste $n+1$ op een rechte, dan moet deze rechte geheel op het oppervlak gelegen zijn.

Het vlak door deze rechte en een der toppen snijdt steeds $n-1$ rechten door dien top in, waaruit volgt, dat het optreden van een rechte buiten de toppen gepaard gaat met een bijzondere ligging van $n-1$ rechten door elken top.

Bij het kubisch oppervlak met twee dubbelpunten liggen altijd $n-1$ rechten door den top in één vlak.

Volgens het in § 2 behandelde gaan er 4 rechten door elk dubbelpunt. Hiervan heeft men 6 combinaties twee aan twee, zoodat er buiten de twee dubbelpunten 6 rechten op het oppervlak voorkomen, waarvan er geen enkele de rechte door de dubbelpunten snijdt.

Om buiten de toppen nog 3 rechten vast te leggen zijn $3n+3$ punten noodig. Dit is mogelijk, wanneer:

$$4n-1 \geqq 3n+3$$

of: $$n \geqq 4 \text{ is.}$$

Zijn O en P de toppen der dimonoïde, dan moet een vlak door O P steeds een kegelsnede insnijden.

Het oppervlak is dan de meetkundige plaats van alle kegelsneden, die door O en P gaan en op die 3 rechten rusten. Het is gemakkelijk in te zien, dat dit oppervlak van den vierden graad moet zijn. Zijn de drie gegeven rechten h_1, h_2 en h_3 en zij a één der twee rechten, die op O P, h_1, h_2 en h_3 rusten. Het lijnenpaar (O P, a) vormt dan een ontaarde kegelsnede, die aan de voorwaarden voldoet. Eveneens het lijnenpaar (O P, b), indien b de andere transversaal is van O P, h_1, h_2 en h_3, zoodat O P tweemaal op het oppervlak voorkomt, waaruit weer volgt, dat ieder vlak door O P een kromme van graad 4 insnijdt, waarvan O en P dan 3-voudige punten zijn.

Uit het voorgaande blijkt nu, dat een dimonoïde D^n met drie willekeurige rechten buiten de toppen ontaarden moet in een D^4 en $n-4$ vlakken, welke door de verbindingslijn der toppen van de D^4 gaan.

Voor het geval, dat twee der 3 rechten h een punt S gemeen hebben, bevat het vlak door O P en S nog een punt der andere rechte h. Deze 4 punten bepalen dan in dat vlak een bundel kegelsneden, die alle aan de gestelde voorwaarden voldoen.

Dat vlak behoort dan tot de D^4, waardoor er dan een kubisch oppervlak met dubbelpunten in O en P overblijft.

Beschouwen we nu eens het geval eener dimonoïde met toppen O en P en twee willekeurige rechten h_1 en h_2. Zoo'n dimonoïde kan van willekeurigen graad zijn, daar $4n-1$ steeds grooter is dan $2n+2$ vanaf de waarde $n=2$.

O P, h_1 en h_2 bepalen een hyperboloïde. Deze laatste doorsnijdt de dimonoïde volgens een ruimtekromme van graad $2n$. De rechte O P behoort $(n-2)$-maal tot deze kromme, want het is een enkelvoudige rechte der hyperboloïde en een $(n-2)$-voudige rechte der dimonoïde.

h_1 en h_2 behooren tot beide oppervlakken en dus ook tot hun doorsnijding.

Uit O kan men een rechte a_{12} der hyperboloïde trekken, die h_1 en h_2 snijdt. Deze rechte behoort ook tot de dimonoïde, daar ze er $n+1$ punten mede gemeen heeft. Een dergelijke rechte b_{12} is ook uit P te trekken.

De ruimtekromme R_{2n} bestaat dus al uit $n+2$ rechten, zoodat er een R_{n-2} overblijft.

Deze laatste moet ontaarden in $n-2$ rechten.

Om dit aan te toonen beschouwen we een punt A dezer R_{n-2}. Door A gaat steeds een rechte l der hyperboloïde, die O P, h_1 en h_2 snijdt. Deze rechte heeft in het snijpunt met O P $n-2$ en in A en de snijpunten met h_1 en h_2 nog 3 punten met de dimonoïde gemeen en ligt daarom geheel op dit oppervlak.

Elk der punten van de R_{n-2} geeft dan aanleiding tot een rechte l der dimonoïde. Dit oppervlak zou oneindig veel rechten bevatten en dus een regelvlak zijn.

Bovendien gaat elke rechte buiten de toppen vergezeld van $n-1$ rechten door elken top, waaruit volgt, dat is ons geval de dimonoïde door elken top oneindig veel rechten zou bezitten.

Deze ongerijmdheid doet ons nu besluiten, dat de ruimtekromme R_{n-2} moet ontaarden in $n-2$ rechten, die O P, h_1 en h_2 snijden.

Was dit laatste niet het geval, dan brachten ze evenals een niet ontaarde kromme R_{n-2} oneindig veel rechten der dimonoïde met zich mede.

Van die $n-2$ rechten gaat er geen enkele door een top.

Immers een willekeurig vlak door O bijv. snijdt uit de dimonoïde een kromme van graad n met een $(n-1)$-voudig punt in O en uit de hyperboloïde een kegelsnede door O. In O liggen dan $n-1$ snijpunten van beide krommen. Verder snijdt dat vlak h_1, h_2 en b_{12}, waardoor er buiten O nog $2n-(n-1)-3=n-2$ punten op te sporen zijn. Dit zijn echter juist de snijpunten, die dit vlak met de R_{n-2} oplevert, waarmede bewezen is, dat deze ruimtekromme geen enkelen tak door een top der dimonoïde zendt, daar voor P een dergelijke redeneering geldt.

Een vlak door één dezer $n-2$ rechten en O P moet uit de dimonoïde een kegelsnede snijden, welke door O en P gaat. Klaarblijkelijk ontaardt deze hier in die rechte zelf en in O P.

De $n-2$ rechten zijn dus dezelfde als die, waarvan het bestaan op een willekeurige dimonoïde in de vorige paragraaf bewezen werd.

Daar toonden we toch aan, dat op een dimonoïde buiten de toppen steeds $n-2$ rechten voorkomen, die op de verbindingslijn der toppen rusten.

Behalve deze $n-2$ rechten bevat een dimonoïde, waarop buiten de toppen de rechten h_1 en h_2 voorkomen, door elken top $2n-2$ rechten, zooals in § 2 werd afgeleid.

In het vlak (O, h_1) liggen behalve a_{12} nog $n-2$ rechten a' door O. Het vlak (O, h_2) bevat buiten a_{12} nog $n-2$ rechten a'' door O.

Zoo liggen er in het vlak (P, h_1) met b_{12} nog $n-2$ rechten b' door P en in het vlak (P, h_2) komen met b_{12} ook $n-2$ rechten b'' door P voor.

Verder ligt in het vlak (O P, a_{12}) nog een rechte b_0 door P. Eveneens in het vlak (O P, b_{12}) nog een rechte a_0 door O.

Zoo'n rechte a' zal een rechte b' nooit snijden.

Hadden ze namelijk een punt gemeen, dan moest dat een punt S der rechte h_1 wezen. In dat geval gingen door S 3 rechten van de dimonoïde, hetgeen niet kan, of S was een singulier punt van het oppervlak. Dit is echter buitengesloten.

Een rechte a' moet getroffen worden door een rechte uit P. Dit kan niet anders dan een rechte b'' zijn.

Onze dimonoïde bevat door O de rechten a_0, a_{12}, n—2 rechten a' en n—2 rechten a''. In 't geheel dus 2n—2 rechten, zooals ook moet.

Zoo ook 2n—2 rechten door P. Iedere rechte door O is gepaard aan een rechte door P.

Bij de (n—2)-voudige rechte O P behooren de n—2 rechten, die haar snijden.

Het oppervlak bevat daarom 3n—4 paren van rechten buiten de rechten h_1 en h_2.

Gaan we dit eens controleeren voor het geval n=3.

Door het eene dubbelpunt O gaan dan de 4 rechten a', a'', a_0 en a_{12}.

Het vlak (a', a_0) snijdt nog een rechte h_3 op het oppervlak in. h_2 moet de volledige doorsnede van dit vlak snijden en daar zij de rechten a' en a_0 kruist zal ze h_3 snijden.

b' en b_0 kruisen a' en a_0, zoodat ze rusten moeten op h_3. Deze rechte ligt dus ook in het vlak (b', b_0).

Het vlak (a'', a_0) bepaalt op het oppervlak een rechte h_4, die door h_1 gesneden wordt.

b'' en b_0 kruisen a'' en a_0, dus snijden ze h_4. Deze ligt daarom in het vlak (b'', b_0).

Het vlak (a', a'') bevat nog een rechte h_5, die h_1 en h_2 kruist.

b_{12} en b_0 kruisen a' en a'', waaruit volgt, dat h_5 in het vlak (b_{12}, b_0) gelegen is.

Het vlak (a_{12}, a_0) levert een rechte h_6 op, die h_1 en ook h_2 kruist.

Daar nu de rechten b' en b'' de rechten a_{12} en b^0 kruisen, moet h_6 in het vlak (b', b'') liggen.

Voor de volledigheid kunnen we hieraan toevoegen, dat h_1 in de vlakken (a', a_{12}) en (b', b_{12}), h_2 in de vlakken (a'', a_{12}) en (b'', b_{12}) ligt.

Nu bevat een kubisch oppervlak met twee dubbelpunten steeds een rechte h_7, die hun verbindingslijn snijdt.

Deze beide rechten vormen een volledige doorsnede van het oppervlak. De rechten $h_1 \ldots . h_6$ kruisen alle de verbindingslijn der dubbelpunten, zoodat ze op h_7 moeten rusten.

De rechten h_2 en h_3 snijden elkaar en liggen dus met h_7 in één vlak. Hetzelfde is het geval met de rechten h_1 en h_4. Het vlak door h_5 en h_7 moet nog een derde rechte insnijden en dat kan geen andere dan h_6 wezen.

Door h_7 gaan derhalve 3 drievoudige raakvlakken van het oppervlak, welke geheel buiten de dubbelpunten liggen.

Andere drievoudige raakvlakken buiten de dubbelpunten kunnen niet voorkomen, omdat h_7 alle rechten van het oppervlak snijdt.

§ 4. Andere constructie eener dimonoïde.

In de vorige paragraaf is een dimonoïde beschouwd als de meetkundige plaats der kegelsneden, die door twee vaste punten gaan en op drie gegeven rechten rusten. Immers elk vlak door die beide vaste punten bevatte daarbij van de gegeven rechten drie punten, waardoor een kegelsnede bepaald werd.

Men zou nu de drie gegeven rechten kunnen vervangen door een ruimtekromme van den derden graad. Daarvan liggen in elk vlak door de twee vaste punten ook altijd drie punten. Op die manier wordt dan weer in elk vlak een kegelsnede vastgelegd.

De meetkundige plaats dezer kegelsneden is echter een kwadratisch oppervlak en geen dimonoïde.

De rechte door de beide vaste punten kan toch nooit tot het oppervlak behooren, daar een ruimtekromme van den derden graad geen trisecanten bezit, zoodat genoemde rechte geen deel uitmaken kan van een ontaarde kegelsnede, die aan de voorwaarden voldoet.

Wel kunnen we tot een dimonoïde komen door uit te gaan van een rationale ruimtekromme van den vijfden graad.

Nemen we daarop twee vaste punten O en P aan. Elk vlak door deze bisecante O P bepaalt op de kromme nog drie punten, waardoor een kegelsnede vastgelegd wordt, die door O en P gaat.

Om te komen tot den graad van het oppervlak der kegelsneden, die door den vlakkenbundel met O P tot as bepaald worden, merken we op, dat een bisecante eener rationale ruimtekromme van den vijfden graad buiten hare steunpunten nog twee trisecanten draagt *).

De rechte O P behoort dus tweemaal tot een ontaarde kegelsnede, die aan de voorwaarden voldoet. Op het gevraagde oppervlak is zij daarom een dubbelrechte.

In een willekeurig vlak door O P ligt dan steeds een doorsnede van den vierden graad met twee drie-

---

*) Zie G. K. Nugteren: Rationale ruimtekrommen van de vijfde orde. Dissertatie. 1901. Hoofdstuk IV, § 6.

voudige punten. Het oppervlak der beschouwde kegelsneden is derhalve een dimonoïde van graad vier.

Door O gaan nog 3 trisecanten der ruimtekromme. Deze geven aanleiding tot 3 bisecanten door P. Zoo gaan er door P ook 3 trisecanten, welke op haar beurt 3 bisecanten door O bepalen. Zoo'n trisecante veroorzaakt immers steeds een ontaarde kegelsnede. De 6 rechten door elken top onzer dimonoïde zijn nu op deze wijze ook aangetoond.

Dat omgekeerd op een dimonoïde D^4 met toppen O en P een rationale ruimtekromme R_5 bepaald kan worden, die door O en P gaat, blijkt als volgt.

Denken we ons een kegel van graad vier met O tot top. Laat O P en 3 der 6 rechten op de dimonoïde, door O, enkelvoudige rechten op dezen kegel zijn, terwijl de overige 3 rechten door O er als dubbelrechten op voorkomen.

Deze rechten tellen samen voor 13 enkelvoudige beschrijvende lijnen. Daar een kegel van den vierden graad door 14 rechten door den top bepaald is, moet een dergelijke kegel altijd mogelijk zijn.

Hij snijdt de dimonoïde volgens een ruimtekromme van graad zestien. Hiertoe behoort O P tweemaal, 3 der rechten door den top elk tweemaal en de overige 3 elk éénmaal. De restdoorsnede is dan een ruimtekromme van den vijfden graad. De kegel bezit het maximum aantal dubbelribben, waarom de ruimtekromme, die er door geprojecteerd wordt, rationaal moet zijn.

In een willekeurig vlak door O hebben dimonoïde en kegel buiten O vier gemeenschappelijke punten.

De ruimtekromme R_{16} zendt dus 12 takken door O.

De 11 rechten, waaruit ze met de R_5 bestaat, gaan alle door O, zoodat de R_5 éénmaal door O moet gaan. Hetzelfde geldt voor het punt P.

Door O gaat een bundel kegels van den vierden graad, waarvan elk exemplaar op de dimonoïde zoo'n R_5 insnijdt. Immers de gegeven rechten telden voor 13, terwijl er ter bepaling van zoo'n kegel 14 noodig zijn.

Hieruit volgt, dat op een dimonoïde D^4 een enkelvoudig oneindig stelsel rationale ruimtekrommen van den vijfden graad te bepalen is, die alle door de toppen gaan en daar dezelfde trisecanten bezitten, terwijl ze nog twee trisecanten, die op de verbindingslijn der toppen rusten, gemeen hebben.

§ 5. Klasse der dimonoïde.

In § 4 van hoofdstuk I is voor de klasse eener monoïde, waarop nog een p-voudig punt voorkomt, de waarde gevonden:

$$(n-1)\,(3\,n-4)-(p-1)\,(3\,p-4).$$

Substitueeren we hierin voor p de waarde $n-1$, dan geeft dit voor de klasse eener dimonoïde $6n-10$. Voor een kubisch oppervlak met twee dubbelpunten geeft dit voor de klasse de waarde 8, zooals behoort.

De klasse eener dimonoïde is met behulp der eerste poolvlakken van twee willekeurige punten buiten het oppervlak af te leiden.

Gaan we daartoe uit van de dimonoïde voorgesteld door de vergelijking:

$$A^{(n-2)} x_3 x_4 + B^{(n-1)} x_3 + C^{(n-1)} x_4 + D^{(n)} = o \quad (1).$$

De hoekpunten X_1 en X_2 liggen niet op het oppervlak.

Het eerste poolvlak van X_1 heeft vergelijking:

$$A_1^{(n-2)} x_3 x_4 + B_1^{(n-1)} x_3 + C_1^{(n-1)} x_4 + D_1^{(n)} = o \quad (2).$$

Volgens de notatie van vroeger wijst de index 1 op een partieele differentiatie naar x_1.

Op analoge wijze vinden we voor de vergelijking van het eerste poolvlak van X_2:

$$A_2^{(n-2)} x_3 x_4 + B_2^{(n-1)} x_3 + C_2^{(n-1)} x_4 + D_2^{(n)} = o \quad (3).$$

Beide poolvlakken zijn weer dimonoïden, met de toppen in X_3 en X_4, terwijl $X_3 X_4$ voor beide een $(n-3)$-voudige rechte is.

Buiten deze rechte doorsnijden de twee poolvlakken elkaar volgens een ruimtekromme van graad $(n-1)^2 - (n-3)^2 = 4n-8$.

't Is er nu om te doen, hoeveel takken deze ruimtekromme door X_3 en X_4 zendt.

Om daartoe te komen, merken we op, dat een vlak door $X_3 X_4$ de beide poolvlakken moet snijden volgens de $(n-3)$-voudige rechte en een kegelsnede door X_3 en X_4. Deze twee kegelsneden hebben dan nog twee punten gemeen. De ruimtekromme bezit in het doorsnijdingsvlak $4n-8$ punten. Twee ervan liggen in de 2 snijpunten dier beide kegelsneden, zoodat er voor de punten X_3 en X_4 $4n-10$ overblijven.

Om reden van symmetrie moeten daarvan $2n-5$ in X_3 en $2n-5$ in X_4 liggen, zoodat onze ruimtekromme R_{4n-8} door elken top der dimonoïde $2n-5$ takken zendt.

De ruimtekromme en de dimonoïde hebben in het geheel $n(4n-8)$ gemeenschappelijke punten.

Om de klasse te vinden moet dit aantal nog verminderd worden met de $(n-1)(2n-5)$ punten, die in elk der toppen opgehoopt liggen.

De klasse der dimonoïde is dan $6n-10$, wat overeenstemt met het resultaat aan het begin dezer paragraaf.

§6. Veelvoudige punten op de dimonoïde.

Voor het onderzoek, of op een dimonoïde nog veelvoudige punten kunnen voorkomen, gaan we na, hoe de vergelijking van het oppervlak er uit moest zien, indien bijv. in het hoekpunt X_2 nog een p-voudig punt gelegen was. In dat geval moeten in die vergelijking de termen in x_2 van de graden n, $n-1$ tot $n-p+1$ ontbreken, zoodat die naar de bekende notatie als volgt geschreven kan worden:

$$A^{(n-p)} x_1^{p-2} x_3 x_4 + B^{(n-p)} x_1^{p-1} x_3 + C^{(n-p)}$$
$$x_1^{p-1} x_4 + D^{(n-p)} x_1^{p} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Hieruit blijkt, dat zoo'n oppervlak steeds ontaardt in $p-2$ vlakken $x_1 = o$ en een dimonoïde van graad $n-p+2$.

Zonder te ontaarden kan een dimonoïde dus hoogstens dubbelpunten bezitten.

Hun aantal is echter beperkt.

Komen er bijv. drie dubbelpunten voor, dan zal het vlak door deze punten de dimonoïde snijden volgens een kromme met een $(n-2)$-voudig punt op de $(n-2)$-voudige rechte en nog drie dubbelpunten.

Dit is alleen dan mogelijk, indien men heeft:

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \geqq \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) + 3.$$
$$\text{of } n \geqq 5.$$

Is de kromme, door het vlak der drie dubbelpunten ingesneden, ontaard, dan is het bestaan van drie dergelijke punten op een dimonoïde van graad vier nog wel mogelijk. Bij een ontaarde kromme toch is het aantal mogelijke dubbelpunten grooter dan bij een niet ontaarde.

Evenals bij de monoïde geschied is, kunnen we hier een bovenste grens voor het aantal dubbelpunten op een dimonoïde afleiden.

Beschouwen we daartoe een dimonoïde, bepaald door de vergelijking:

$$A^{(n-2)}x_3x_4 + B^{(n-1)}x_3 + C^{(n-1)}x_4 + D^{(n)} = o \quad . \quad . \quad (2).$$

In de vorige paragraaf hebben we gezien, dat het eerste poolvlak van een willekeurig buiten het oppervlak gelegen punt X_1 weer een dimonoïde is, waarvan de vergelijking er als volgt uitziet:

$$A_1^{(n-2)}x_3x_4 + B_1^{(n-1)}x_3 + C_1^{(n-1)}x_4 + D_1^{(n)} = o \ (3).$$

De oppervlakken (2) en (3) doorsnijden elkaar volgens een ruimtekromme van graad $n(n-1)$.

Hiertoe behoort de verbindingslijn der gemeenschappelijke toppen $(n-2)(n-3)$ maal, zoodat er een ruimtekromme van graad $4n-6$ overblijft.

Deze ruimtekromme zendt door X_3 zoowel als door X_4 $(n-1)(n-2) - (n-2)(n-3) = 2n-4$ takken.

De raakkegel uit X_1 aan de dimonoïde bestaat dus uit $(n-2)(n-3)$ maal het vlak $x_2 = o$ en een kegel van graad $4n-6$, waarop X_1X_3 en X_1X_4 beide $(2n-4)$-voudige ribben zijn.

Deze kegel bevat nu behalve de twee veelvoudige ribben nog eenige keerribben en dubbelribben.

Het aantal keerribben wordt gevonden door het tweede poolvlak van X_1 te beschouwen.

Daarvan is de vergelijking volgens de bekende notatie:

$$A_{11}^{(n-2)} x_3 x_4 + B_{11}^{(n-1)} x_3 + C_{11}^{(n-1)} x_4 + D_{11}^{(n)} = o \quad (4).$$

De oppervlakken (3) en (4) doorsnijden elkaar buiten $X_3\,X_4$ volgens een ruimtekromme van graad $(n-1)(n-2)-(n-3)(n-4)=4n-10$. Immers het tweede poolvlak is weer een dimonoïde met $X_3\,X_4$ tot $(n-4)$-voudige rechte.

Van die ruimtekromme R_{4n-10} gaan door elk der punten X_3 en X_4 $(n-2)(n-3)-(n-3)(n-4)=2n-6$ takken. Ze doorsnijdt de oorspronkelijke dimonoïde daarom buiten de toppen in:

$$n(4n-10)-2(n-1)(2n-6)=6(n-2) \text{ punten.}$$

Hieruit volgt, dat de raakkegel uit X_1 $6(n-2)$ keerribben bezit.

Het aantal dubbelribben op den raakkegel kunnen we verkrijgen door op te merken, dat de klasse van den raakkegel dezelfde is als van de dimonoïde. De klasse van den raakkegel is dus ook $6n-10$.

Elke $(2n-4)$-voudige ribbe op dien kegel vermindert de klasse met $(2n-4)(2n-5)$, daar ze voor half maal zooveel dubbelribben telt.

Daar een keerribbe de klasse met 3 verlaagt, vinden we het aantal dubbelribben d uit de vergelijking:

$$6n-10=(4n-6)(4n-7)-2(2n-4)(2n-5)-$$
$$-18(n-2)-2d.$$

Dit levert ons: $d = 4\,(n-2)\,(n-3)$.

Komt nu op de dimonoïde een dubbelpunt voor, dan brengt dit een dubbelribbe op den raakkegel met zich mede. Het aantal dubbelribben op den raakkegel kan nu zekere waarde niet overschrijden.

Noemen we het aantal dubbelpunten der dimonoïde x, dan vinden we de hoogste waarde van x uit de volgende vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}\,(4\,n-7)\,(4\,n-8) = (2\,n-4)\,(2\,n-5) + 6\,(n-2) + \\ + 4\,(n-2)\,(n-3) + x.$$

Het linkerlid geeft toch het maximum aantal dubbelribben op den raakkegel aan.

Deze vergelijking geeft voor x de waarde $2\,(n-2)$.

Op een dimonoïde kunnen dus niet meer dan $2\,(n-2)$ dubbelpunten voorkomen.

Voor $n=3$ is dit aantal 2. Dit stemt overeen met het bekende feit, dat een kubisch oppervlak niet meer dan 4 dubbelpunten kan bezitten.

HOOFDSTUK III.

Eigenschappen van bundels algebraïsche krommen, afgeleid uit eigenschappen der monoïde.

§ 1. Aantal dubbelpunten. Denken we ons een monoïde van graad $n+1$, waarop buiten den top nog een rechte voorkomt.

Zoo'n monoïde wordt voorgesteld door de vergelijking:

$$A^{(n)} x_4 + B^{(n)} x_1 = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Elk vlak door $X_2 X_3$ snijdt de monoïde volgens deze rechte en een kromme van graad n. Doorsnijden we de monoïde nu met den vlakkenbundel door $X_2 X_3$ en projecteeren we alle doorsneden uit X_4 op een willekeurig vlak, bijv. het vlak $x_4 = o$, dan ontstaat in dat vlak een krommenbundel van graad n, daar door elk punt van het vlak steeds een kromme gaat.

Verbindt men toch zoo'n punt P met X_4, dan bepaalt deze rechte nog een punt Q der monoïde.

Door Q wordt een vlak uit den vlakkenbundel vastgelegd, hetwelk de monoïde snijdt volgens een kromme door Q. Wordt deze geprojecteerd uit X_4 op het vlak $x_4 = o$, dan levert dat in dit vlak een kromme door P op.

Analytisch blijkt dit ook eenvoudig.

De vergelijking van den vlakkenbundel is:

$$x_4 = \lambda x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Door λ uit de vergelijkingen (1) en (2) te elimineeren ontstaat de volgende vergelijking van een kegelbundel van graad n:

$$B^{(n)} + \lambda A^{(n)} = o \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Elk vlak, dus ook het vlak $x_4 = o$, doorsnijdt dezen bundel volgens een krommenbundel van graad n.

De n^2 basisribben van den kegelbundel zijn de doorsnijdingsrechten der beide kegels $A = o$ en $B = o$. Ze behooren tot de $n(n+1)$ rechten der monoïde door den top. Ze snijden het vlak $x_4 = o$ in de n^2 basispunten van den krommenbundel.

Komt het nu voor, dat een kromme uit den krommenbundel een dubbelpunt bezit, dan moet de kromme, waaruit ze door projectie ontstaan is, ook van een dubbelpunt voorzien zijn. In dat geval is er dus een vlak uit den vlakkenbundel, dat de monoïde volgens een kromme met een dubbelpunt doorsnijdt.

Een zoodanig vlak is een raakvlak aan de monoïde. We zien derhalve, dat elk raakvlak uit den vlakkenbundel aanleiding geeft tot een kromme met een dubbelpunt in den krommenbundel. 't Is er dus om te doen, hoeveel vlakken uit den bundel de monoïde aanraken.

Om daartoe te geraken beschouwen we de eerste poolvlakken van twee punten, op de as van den vlakkenbundel gelegen. Wie kiezen daarvoor de punten X_2 en X_3.

Het eerste poolvlak van X_2 heeft tot vergelijking:

$$A_2^{(n)} x_4 + B_2^{(n)} x_1 = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Zoo vindt men voor het eerste poolvlak van X_3:

$$A_3^{(n)} x_4 + B_3^{(n)} x_1 = o . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat beide poolvlakkken monoïden M^n zijn, die beide met de oorspronkelijke monoïde den top en de rechte $X_2 X_3$ gemeen hebben.

Het aantal raakvlakken door $X_2 X_3$ aan de monoïde M^{n+1} wordt geleverd door het aantal gemeenschappelijke punten der oppervlakken (1), (4) en (5) buiten X_4 en de gemeenschappelijke rechte.

De beide poolvlakken hebben tot doorsnijding een ruimtekromme van graad n^2. Hiertoe behoort de rechte $X_2 X_3$, zoodat er eene kromme van graad n^2-1 overblijft.

Deze ruimtekromme zendt $(n-1)^2$ takken door X_4 omdat beide poolvlakken in X_4 een $(n-1)$-voudig punt bezitten.

Verder liggen er nog eenige punten van de ruimtekromme op $X_2 X_3$.

Om dit aantal op te sporen, leggen we door $X_2 X_3$ een willekeurig vlak. Dit snijdt de beide poolvlakken buiten de rechte $X_2 X_3$ nog volgens een kromme van graad $n-1$. Het vlak bevat dus $(n-1)^2$ punten der ruimtekromme buiten $X_2 X_3$.

In het geheel liggen n^2-1 punten dezer kromme in dit vlak, zoodat er $n^2-1-(n-1)^2=2n-2$ punten op $X_2 X_3$ moeten liggen.

In elk dezer punten heeft die rechte $X_2 X_3$ het karakter eener raaklijn aan de monoïde, omdat het een punt der monoïde is, dat tevens op het eerste poolvlak van X_2 of X_3 gelegen is.

De ruimtekromme snijdt daarom de monoïde daar ten plaatse steeds in twee punten.

Dit is ook wel anders af te leiden.

Een vlakkenbundel door $X_2 X_3$ doorsnijdt de monoïde volgens die rechte en een systeem krommen van graad n.

Deze krommen bepalen op die rechte een involutie I_n.

De $2(n-1)$ dubbelpunten dezer involutie wijzen er op, dat de kromme van graad n de rechte $X_2 X_3$ daar aanraakt, zoodat de ruimtekromme de monoïde daar in twee punten snijdt.

Buiten den top en de rechte $X_2 X_3$ hebben de oppervlakken (1), (4) en (5) daarom:

$$(n+1)(n^2-1) - n(n-1)^2 - 2(2n-2) = 3(n-1)^2$$

gemeenschappelijke punten.

De monoïde bezit dan evenveel raakvlakken door $X_2 X_3$, waarmede bewezen is, dat in een bundel algebraïsche krommen van graad n steeds $3(n-1)^2$ krommen met een dubbelpunt voorkomen.

Gaan we nu eens uit van een monoïde M^n, voorgesteld door de vergelijking:

$$A^{(n-1)} x_4 + B^{(n)} = o. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Doorsnijden we dit oppervlak met den vlakkenbundel:

$$x_4 = \lambda x_1 . \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

dan worden alle doorsneden uit X_4 geprojecteerd door den kegelbundel

$$B^{(n)} + \lambda x_1 A^{(n-1)} = o \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Deze wordt door het vlak $x_4 = o$ gesneden volgens een krommenbundel van graad n. Het is duidelijk, dat er van de n^2 basispunten in dezen bundel n op $X_2 X_3$ liggen en wel daar, waar deze rechte den kegel $B = o$ en de M^n snijdt.

Daar de klasse der monoïde $(n-1)(3n-4)$ bedraagt, komen in den krommenbundel al vast zooveel krommen met een dubbelpunt voor.

Nu liggen er in het vlak $x_4 = o$ buiten $X_2 X_3$ nog $n^2 - n$ basispunten. Hiervan zijn er slechts $\frac{1}{2} n (n+3) - n - 1$ noodig om dien bundel te bepalen. De overige liggen met deze noodzakelijk geassocieerd.

Nu zijn $\frac{1}{2} n (n+3) - n - 1$ punten juist voldoende om een kromme van graad $n-1$ te bepalen.

Deze kromme vormt met X_2X_3 een ontaarding uit den bundel.

Ze wordt door X_2X_3 in $n-1$ punten gesneden, zoodat er op deze rechte dan $n-1$ dubbelpunten voorkomen.

In het geheel komen in den krommenbundel weer $(n-1)(3n-4)+n-1=3(n-1)^2$ dubbelpunten voor.

De kromme van graad $n-1$, welke we hier ontmoet hebben, speelt nog een andere rol.

Daar elke rechte door den top de monoïde nog in één punt snijdt, kunnen we de monoïde punt voor punt afbeelden op een plat vlak. Hierbij wordt elke rechte door den top slechts in één punt afgebeeld.

Doen we dit op het vlak $x_4=o$, dan wordt de top afgebeeld in de doorsnede van dit vlak met den raakkegel $A=o$. Deze kromme is dezelfde als die, welke deel uitmaakte van de ontaarde kromme in den krommenbundel van zooeven.

Komt in een bundel algebraïsche krommen een k-voudig basispunt voor, dan wordt daardoor het aantal dubbelpunten in dien bundel met $(k-1)(3k+1)$ verlaagd.

Om dit aan te toonen, gaan we uit van een monoïde

M^{n+1} met een rechte buiten den top en een k-voudige rechte door den top.

Een dergelijke monoïde kan door de volgende vergelijking voorgesteld worden:

$$[U^{(k)}x_1^{\ n-k} + U^{(k+1)}x_1^{\ n-k-1} + \ldots + U^{(n-1)}x_1 + U^{(n)}]x_4 + [V^{(k)}x_1^{\ n-k} + V^{(k+1)}x_1^{\ n-k-1} + \ldots + V^{(n-1)}x_1 + V^{(n)}]x_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Het eerste poolvlak van X_3 heeft dan tot vergelijking:

$$[U_3^{(k)}x_1^{\ n-k} + U_3^{(k+1)}x_1^{\ n-k-1} + \ldots + U_3^{(n-1)}x_1 + U_3^{(n)}]x_4 + [V_3^{(k)}x_1^{\ n-k} + V_3^{(k+1)}x_1^{\ n-k-1} + \ldots + V_3^{(n-1)}x_1 + V_3^{(n)}]x_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Klaarblijkelijk is dit een monoïde M^n met de rechte X_2X_3 buiten den top X_4 en X_4X_1 als $(k-1)$-voudige rechte door den top.

Het eerste poolvlak van X_2 zal nu een dergelijke monoïde M^n moeten zijn.

Buiten de beide gemeenschappelijke rechten doorsnijden deze poolvlakken elkaar nog volgens een ruimtekromme van den graad $n^2-(k-1)^2-1$.

Deze zendt $(n-1)^2-(k-1)^2$ takken door X_4.

Verder bezit ze $2n-2$ punten op X_2X_3 en buiten X_4 nog $2k-2$ punten op X_4X_1.

Dit wordt op een soortgelijke wijze aangetoond als in het begin dezer paragraaf en in § 4 van Hoofdstuk I.

Daar is ook aangetoond, dat de ruimtekromme in hare punten op $X_2 X_3$ *twee*, en in hare punten buiten X_4 op $X_4 X_1$, $k+1$ punten met de oorspronkelijke monoïde gemeen heeft.

Buiten deze rechten heeft de ruimtekromme dan met de monoïde M^{n+1}:

$$(n+1)\,[n^2-(k-1)^2-1] - n\,[(n-1)^2-(k-1)^2] -$$
$$-(k+1)\,(2k-2)-2\,(2n-2)=3\,(n-1)^2-(k-1)\,(3k+1)$$

gemeenschappelijke punten.

Dit is het aantal raakvlakken door $X_2 X_3$ aan de monoïde M^{n+1}, waarvan de raakpunten niet op $X_2 X_3$ en $X_4 X_1$ liggen.

Doorsnijdt men nu de monoïde M^{n+1} met den vlakkenbundel door $X_2 X_3$ en worden de doorsneden uit X_4 op het vlak $x_4 = o$ geprojecteerd, dan ontstaat in dit vlak een bundel krommen, die alle in X_1 een k-voudig punt bezitten.

In dien bundel komen dan nog $3\,(n-1)^2 - (k-1)$ $(3\,k+1)$ krommen met een dubbelpunt voor.

Hiermede is bewezen, dat in een bundel algebraïsche krommen het aantal dubbelpunten door een k-voudig basispunt met $(k-1)\,(3\,k+1)$ verminderd wordt.

§ 2. Klasse der omhullende van alle buigraaklijnen.

Gaan we uit van de monoïde, voorgesteld door de vergelijking:

$$A^{(n)} x_4 + B^{(n)} x_1 = o \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In § 1 is aangetoond, hoe uit deze monoïde een bundel algebraïsche krommen in het vlak $x_4 = o$ wordt afgeleid.

Het aantal buigraaklijnen door X_3, in dezen bundel voorkomende, stemt overeen met het aantal inflexieraaklijnen der monoïde door X_3.

Dit aantal wordt gevonden met behulp van het eerste en tweede poolvlak van X_3.

De vergelijking van het eerste poolvlak van X_3 luidt:

$$A_3{}^{(n)} x_4 + B_3{}^{(n)} x_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die van het tweede poolvlak is:

$$A_{33}{}^{(n)} x_4 + B_{33}{}^{(n)} x_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)$$

Het aantal snijpunten der oppervlakken (1), (2) en (3), buiten X_4 en $X_2 X_3$ gelegen, bepaalt nu het aantal inflexieraaklijnen door X_3.

Daar het tweede poolvlak een monoïde M^{n-1} is met de rechte $X_2 X_3$ buiten den top X_4, doorsnijden die beide poolvlakken elkaar buiten $X_2 X_3$ nog volgens een ruimtekromme van den graad $n(n-1)-1$.

Deze laatste zendt $(n-1)(n-2)$ takken door X_4.

Een willekeurig vlak door $X_2 X_3$ bevat buiten deze rechte van beide poolvlakken steeds $(n-1)(n-2)$ punten.

De ruimtekromme heeft daarom op $X_2 X_3$ nog $n(n-1)-1-(n-1)(n-2)=2n-3$ punten.

De ruimtekromme snijdt de oorspronkelijke monoïde dan in

$$(n+1)[n(n-1)-1]-n(n-1)(n-2)-(2n-3)=$$
$$=3n(n-2)+2 \text{ punten.}$$

Het raakvlak in X_3 aan de monoïde bevat door X_3 twee inflexieraaklijnen, die geen aanleiding geven tot buigraaklijnen voor den krommenbundel.

De eene inflexieraaklijn is $X_2 X_3$ en de andere is de raaklijn in X_3 aan de doorsnede van het raakvlak en de monoïde. Immers deze doorsnede bestaat uit $X_2 X_3$ en een kromme door X_3. Er blijven dus $3n(n-2)$ inflexieraaklijnen door X_3 over, die buigraaklijnen door X_3 in den krommenbundel doen ontstaan.

De klasse der omhullende dezer buigraaklijnen is derhalve $3n(n-2)$.

Ook hier willen we den invloed van een k-voudig basispunt in den krommenbundel onderzoeken.

Daartoe gaan we uit van de monoïde M^{n+1} voorgesteld door vergelijking (9) van de vorige paragraaf.

Deze monoïde bevat buiten den top X_4 de rechte $X_2 X_3$ en door den top de k-voudige rechte $X_4 X_1$.

De krommenbundel in het vlak $x_4=o$, uit deze monoïde afgeleid, bezit dan in X_1 een k-voudig basispunt.

De buigraaklijnen door X_3 in dezen bundel zijn ontstaan uit inflexieraaklijnen der monoïde door X_3.

Om hun aantal te bepalen hebben we het eerste en het tweede poolvlak van X_3 noodig.

Volgens vergelijking (10) der vorige paragraaf is het eerste poolvlak van X_3 een monoïde M^n met $X_2 X_3$ buiten den top X_4 en $X_4 X_1$ als $(k—1)$-voudige rechte door den top.

De vergelijking van het tweede poolvlak van X_3 luidt:

$$[U_{33}^{(k)} x_1^{n-k} + U_{33}^{(k+1)} x_1^{n-k-1} + \ldots + U_{33}^{(n-1)} x_1 + U_{33}^{(n)}] x_4 + [V_{33}^{(k)} x_1^{n-k} + V_{33}^{(k+1)} x_1^{n-k-1} + \ldots + V_{33}^{(n-1)} x_1 + V_{33}^{(n)}] x_1 = o.$$

Het is een monoïde M^{n-1} met $X_2 X_3$ buiten den top X_4 en $X_4 X_1$ als $(k—2)$-voudige rechte door den top.

De beide poolvlakken van X_3 doorsnijden elkaar buiten deze twee gemeenschappelijke rechten nog volvolgens een ruimtekromme van den graad $n(n—1) — (k—1)(k—2)—1$.

Deze zendt $(n—1)(n—2) — (k—1)(k—2)$ takken door X_4.

Een willekeurig vlak door $X_2 X_3$ bevat buiten deze rechte van beide poolvlakken resp. een kromme van graad $n-1$ en $n-2$. Van de $(n-1)(n-2)$ snijpunten dezer krommen liggen er $(k-1)(k-2)$ op X_4X_1; deze behooren dus niet tot de ruimtekromme.

Buiten $X_2 X_3$ bezit de ruimtekromme dan in dat vlak $(n-1)(n-2)-(k-1)(k-2)$ punten.

Op $X_2 X_3$ liggen daarom steeds $[n(n-1)-(k-1)(k-2)-1]-[(n-1)(n-2)-(k-1)(k-2)]=2n-3$ punten der ruimtekromme.

Een willekeurig vlak door $X_4 X_1$ snijdt het eerste poolvlak volgens deze rechte en een kromme van graad $n-k+1$ met een $(n-k)$-voudig punt in X_4.

En van het tweede poolvlak bevat dit vlak buiten $X_4 X_1$ ook een kromme van graad $n-k+1$ met een $(n-k)$-voudig punt in X_4.

Van de $(n-k+1)^2$ snijpunten dezer krommen ligt er één op $X_2 X_3$ en behoort dus niet tot de ruimtekromme, terwijl er $(n-k)^2$ op X_4 gelegen zijn.

In verband met het aantal takken, dat de ruimtekromme door X_4 zendt, bevat ze buiten X_4 van de rechte $X_4 X_1$:

$$[n(n-1)-(k-1)(k-2)-1]-[(n-1)(n-2)-$$
$$-(k-1)(k-2)]-[(n-k+1)^2-(n-k)^2-1]=2k-3$$

punten.

De ruimtekromme snijdt de monoïde M^{n+1} buiten $X_2 X_3$ en $X_4 X_1$ daarom in:

$(n+1)[n(n-1)-(k-1)(k-2)-1]-n[(n-1)(n-2)-$
$-(k-1)(k-2)]-(2n-3)-k(2k-3)=3n^2-6n-$
$-3k^2+6k$ punten.

Uit X_3 gaan nu evenveel inflexieraaklijnen van de monoïde M^{n+1}.

Drie dezer inflexieraaklijnen geven echter geen aanleiding tot buigraaklijnen in den krommenbundel door X_3 en wel de beide inflexieraaklijnen in het raakvlak in X_3 aan de monoïde M^{n+1} en de rechte X_1X_3, welke als de projectie van elke rechte door X_3 in het vlak $X_3X_4X_1$ opgevat kan worden.

In den krommenbundel in het vlak $x_1=o$ komen dus:

$3n(n-2)-3(k-1)^2$ buigraaklijnen door X_3 voor.

Het k-voudig basispunt in den krommenbundel verlaagt de klasse van de omhullende van alle buigraaklijnen derhalve met $3(k-1)^2$.

§ 3. Aantal krommen met een buigpunt in een basispunt.

Is van de monoïde M^{n+1}, waarvan we uitgaan, een rechte door den top in X_4X_1 gelegen, dan is de vergelijking van dit oppervlak:

$$[U^{(1)}x_1^{\,n-1}+U^{(2)}x_1^{\,n-2}+\ldots+U^{(n-1)}x_1+U^{(n)}]x_4+$$
$$+[V^{(n)}x_1^{\,n-1}+V^{(2)}x_1^{\,n-2}+\ldots+V^{(n-1)}x_1+$$
$$+V^{(n)}]x_1=o. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Het is bekend, hoe hieruit een krommenbundel in het vlak $x_4 = o$ is af te leiden.

Daar $X_4 X_1$ een rechte door den top der monoïde is, moet X_1 een basispunt in dezen bundel zijn.

$X_1 X_1$ is steeds een der twee inflexieraaklijnen door een punt P dezer rechte.

Zoo dikwijls het nu gebeurt, dat de andere inflexieraaklijn door P in het vlak $P X_2 X_3$ gelegen is, zoo vaak komt het voor, dat een kromme uit den bundel in het basispunt X_1 een buigpunt bezit.

Dit heeft plaats als de gemeenschappelijke rechte buiten $X_4 X_1$ van het raakvlak en het kwadratisch poolvlak van P in het vlak $P X_2 X_3$ gelegen is.

Laat de coördinaten van P:

x_1, o, o en λx_1 wezen.

De vergelijking van het raakvlak in P is dan:

$$y_2 (V_2^{(1)} + \lambda U_2^{(1)}) + y_3 (V_3^{(1)} + U_3^{(1)}) = o \quad . \quad (2).$$

De vergelijking van het kwadratisch poolvlak van P wordt dan:

$$2 y_1 y_2 [n V_2^{(1)} + (n-1) \lambda U_2^{(1)}] + 2 y_1 y_3 [n V_3^{(1)} + \\ + (n-1) \lambda U_3^{(1)}] + y_2^2 (V_{22}^{(2)} + \lambda U_{22}^{(2)}) + 2 y_2 y_3 \\ (V_{23}^{(2)} + \lambda U_{23}^{(2)}) + 2 y_2 y_4 U_2^{(1)} + y_3^2 (V_{33}^{(2)} + \\ + \lambda U_{33}) + 2 y_3 y_4 U_3^{(1)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

De grootheden U en V in de vergelijkingen (2) en

(3) zijn door differentiatie uit de functies U en V van vergelijking (1) ontstaan.

Het zijn constanten, zooals uit de beteekenis der indices wel blijkt.

Was dit niet het geval, dan zouden ze voor de waarden der coördinaten van P nul geworden zijn.

Het raakvlak en het kwadratisch poolvlak bevatten beide de rechte $X_4 X_1$, gelijk wel te verwachten was.

Bovendien bevatten raak- en poolvlak nog een tweede inflexieraaklijn door P en het is er nu om te doen, voor hoeveel waarden van λ deze rechte in het vlak $P X_2 X_3$ gelegen is.

Zoeken we daartoe de doorsnede van raak- en poolvlak:

Dit gebeurt door uit de vergelijkingen (2) en (3) den coördinaat y_3 te elimineeren.

Dit levert een uitdrukking, die deelbaar is door y_2, wat ook behoort, daar de twee vlakken de rechte $X_4 X_1$ gemeen hebben.

Na rangschikking en deeling door y_2 is het resultaat der eliminatie:

$$y_1 \left[2\{n V_2^{(1)} + (n-1)\lambda U_2^{(1)}\} (V_3^{(1)} + \lambda U_3^{(1)})^2 - \right.$$
$$- 2\{n V_3^{(1)} + (n-1)\lambda U_3^{(1)}\} (V_2^{(1)} + \lambda U_2^{(1)}) (V_3^{(1)} +$$
$$\left. + \lambda U_3^{(1)})\right] + y_2 \left[(V_{22}^{(2)} + \lambda U_{22}^{(2)}) (V_3^{(1)} + \lambda U_3^{(1)})^2 + \right.$$
$$+ (V_{33}^{(2)} + \lambda U_{33}^{(2)}) (V_2^{(1)} + \lambda U_3^{(1)})^2 - 2(V_{23}^{(2)} +$$

$$+\lambda U_{23}^{(2)})(V_2^{(1)}+\lambda U_2^{(1)})(V_3^{(1)}+\lambda U_3^{(1)})]+$$
$$+y_4[2(V_3^{(1)}+\lambda U_3^{(1)})^2 U_2^{(1)}-2(V_2^{(1)}+\lambda U_2^{(1)})$$
$$(V_3^{(1)}+\lambda U_3^{(1)})U_3^{(1)}]=o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Deze vergelijking stelt het vlak voor, dat door X_3 gaat en door die tweede gemeenschappelijke rechte van raak- en poolvlak.

Nu moet nagegaan worden voor welke waarden van λ deze rechte in het vlak $P X_2 X_3$ komt te liggen.

De vergelijking van dit vlak is

$$y_4 = \lambda y_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Door na te gaan of één der vergelijkingen (2), (4) en (5) door lineaire combinatie der beide andere af te leiden is, komt men er niet.

Er is hier echter nog een andere weg.

De rechte (2), (4) zal op $X_2 X_3$ moeten rusten, dus dan moet de coëfficient van y_5 in (4) nul worden.

In dat geval blijkt, dat de vergelijking (4) na eenige herleiding overgaat in vergelijking (5).

De rechte (2), (4) ligt dan in vlak (5).

De coëfficient van y_2 is in λ van den derden graad.

Het gebeurt dus drie keer, dat een inflexieraaklijn door een punt P van X_4X_1 in het vlak PX_2X_3 gelegen is.

Het blijkt dus, dat door elk basispunt in een bundel algebraïsche krommen drie krommen gaan, die daar een buigpunt bezitten.

§4. Kromme der buigpunten.

We hebben gezien, hoe de monoïde M^{n+1}, bepaald door de vergelijking:

$$A^{(n)} x_2 + B^{(n)} x_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in verband gebracht kan worden met een bundel algebraïsche krommen van graad n in het vlak $x_4 = o$.

In dit vlak ligt dan op de rechte $X_2 X_3$ een buigpunt, zoo dikwijls het gebeurt, dat een rechte door eenig punt P van $X_2 X_3$ tegelijk in het raakvlak, het kwadratisch poolvlak en het kubisch poolvlak van P gelegen is.

Immers een zoodanige rechte heeft in P vier punten met de monoïde gemeen. Daar $X_2 X_3$ tot geen kromme uit den bundel behoort, zal die rechte door P na projectie de met haar geprojecteerde kromme in drie samenvallende punten snijden en derhalve een buigraaklijn wezen.

De coördinaten van P mogen zijn o, x_2, λx_2 en o.

Om nu de vergelijkingen van het raakvlak, het kwadratisch poolvlak en het kubisch poolvlak van P te vinden, moet berekend worden welke waarde de verschillende differentiaal-quotienten van vergelijking (1) voor de coördinaten van P aannemen.

Als resultaat dezer berekening vinden we voor het raakvlak in P de vergelijking:

$$y_1 \, b^{(n)} + y_4 \, a^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$b^{(n)}$ en $a^{(n)}$ zijn hier polynomia in λ van graad n, ontstaan uit de functies $B^{(n)}$ en $A^{(n)}$ door substitutie der waarden $x_1=o$ en $x_3=\lambda\, x_2$ en na deeling door $x_2^{\ n}$.

Voor het kwadratisch poolvlak vinden we:

$$y_1^2\, b_1^{(n)} + y_1\, y_2\, b_2^{(n)} + y_1\, y_3\, b_3^{(n)} + y_1\, y_4\, a_1^{(n)} + \\ + y_2\, y_4\, a_2^{(n)} + y_3\, y_4\, a_3^{(n)} = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ook hier zijn $b_1^{(n)}$, $b_2^{(n)}$ enz. polynomia in λ, nu van graad $n-1$. Ze zijn ontstaan uit de functies $B_1^{(n)}$, $B_2^{(n)}$ enz.

De vergelijking van het kubisch poolvlak wordt:

$$y_1^3\, b_{11}^{(n)} + 2\, y_1^2\, y_2\, b_{12}^{(n)} + 2\, y_1^2\, y_3\, b_{13}^{(n)} + y_1^2\, y_4\, a_{11}^{(n)} + \\ + y_1\, y_2^2\, b_{22}^{(n)} + 2\, y_1\, y_2\, y_3\, b_{23}^{(n)} + 2\, y_1\, y_2\, y_4\, a_{12}^{(n)} + \\ + y_1\, y_3^2\, b_{33}^{(n)} + 2\, y_1\, y_3\, y_4\, a_{13}^{(n)} + y_2^2\, y_4\, a_{22}^{(n)} + \\ + 2\, y_2\, y_3\, y_4\, a_{23}^{(n)} + y_3^2\, y_4\, a_{33}^{(n)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

De polynomia in λ, die hier optreden, zijn van graad $n-2$. Ze zijn uit de functies $B_{11}^{(n)}$, $B_{12}^{(n)}$ enz. ontstaan.

De monoïde, het kwadratisch poolvlak en het kubisch poolvlak bezitten in P het gemeenschappelijk raakvlak (2).

De doorsnede van dit raakvlak met genoemde oppervlakken hebben in P dezelfde twee dubbelpuntsraaklijnen.

Een dezer raaklijnen is X_2X_3, daar deze rechte op alle drie de oppervlakken voorkomt, wat uit hunne vergelijkingen blijkt.

't Is nu de vraag, wanneer de andere raaklijn op het kubisch poolvlak gelegen is. In dat geval moet dit poolvlak door het raakvlak volgens drie rechten gesneden worden.

Ten einde deze doorsnede te onderzoeken, gaan we uit de vergelijkingen (2) en (4) y_4 elimineeren.

Het resultaat is:

$$y_1^2\left(a^{(n)}b_{11}^{(n)}-a_{11}^{(n)}b^{(n)}\right)+2y_1y_2\left(a^{(n)}b_{12}^{(n)}-\right.$$
$$\left.-a_{12}^{(n)}b^{(n)}\right)+2y_1y_3\left(a^{(n)}b_{13}^{(n)}-a_{13}^{(n)}b^{(n)}\right)+$$
$$+y_2^2\left(a^{(n)}b_{22}^{(n)}-a_{22}^{(n)}b^{(n)}\right)+2y_2y_3\left(a^{(n)}b_{23}^{(n)}-\right.$$
$$\left.-a_{23}^{(n)}b^{(n)}\right)+y_3^2\left(a^{(n)}b_{33}^{(n)}-a_{33}^{(n)}b^{(n)}\right)=o\quad.\quad(5).$$

Bij deze eliminatie kon de uitkomst door y_1 gedeeld worden, wat een gevolg is van het optreden der rechte X_2X_3.

Vergelijking (5) stelt den kegel voor, die uit X_4 de kegelsnede projecteert volgens welke het raakvlak het kubisch poolvlak buiten X_2X_3 nog snijdt.

Indien deze kegel ontaardt in twee vlakken zal het kubisch poolvlak door het raakvlak volgens drie rechten gesneden worden.

In dat geval bevat het kubisch poolvlak een rechte, die onze monoïde M^{n+1} in P volgens 4 punten snijdt.

De determinant, die de waarden van λ moet opleveren, waarvoor de kegel (5) ontaardt, is van graad $3(2n-2) = 6(n-1)$ in λ.

Voor evenveel waarden van λ heeft zulks plaats.

In het vlak $x_4 = o$ komen derhalve op de rechte X_2X_3 $6(n-1)$ buigpunten voor, waarmede bewezen is, dat in een krommenbundel van den graad n alle buigpunten op een kromme van den graad $6(n-1)$ gelegen zijn.

STELLINGEN.

I.

Bij het onderzoek van algebraïsche oppervlakken zijn homogene coördinaten aangewezen.

II.

In een bundel algebraïsche krommen heeft de ligging van eenige basispunten op een rechte geen invloed op het aantal dubbelpunten.

III.

De klasse der omhullende van alle buigraaklijnen in een bundel algebraïsche krommen van den graad n, wordt met $3\,(n-2)$ verminderd, indien n basispunten op een rechte liggen.

IV.

Kan in de meetkunde naast een analytisch ook een synthetisch bewijs geleverd worden, dan verdient dit laatste de voorkeur.

V.

In het algemeen staat een wiskundig bewijs des te hooger, naar mate er minder berekening in voorkomt.

VI.

Het paradoxale antwoord bij het spel van St. Petersburg vloeit voort uit de redactie van het vraagstuk.

VII.

In de vermenigvuldiging $a \times b$ is het wenschelijk a als vermenigvuldigtal op te vatten.

VIII.

In het bewijs van LORD RAYLEIGH, voorkomende in The Theory of Sound vol II § 245, dat de energie van een geluidsgolf voor de helft uit potentiëele en voor de andere helft uit kinetische energie zou bestaan, wordt aan een gas ten onrechte potentiëele energie toegekend.

IX.

De onregelmatige uitzetting van water wordt veroorzaakt door de aanwezigheid van dubbelmoleculen.

X.

Röntgenstralen zijn gedeeltelijk gepolariseerd.

XI.

Het noorderlicht is een gevolg van de ionisatie der hoogere luchtlagen door negatief geladen deeltjes, die, van de zon uitgaande, de atmosfeer binnendringen.

XII.

Alle natuurverschijnselen zijn op te vatten als wisselwerkingen van de materie en het electromagnetische veld.