Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Stelsels van bollen, die een kubische ruimtekromme aanraken

https://hdl.handle.net/1874/254900

A[k] 192.
1908.

Stelsels van Bollen,

die een kubische ruimtekromme aanraken.

A. W. GROENMAN

qu.
2

A. qu.
192

STELSELS VAN BOLLEN,
DIE EEN KUBISCHE RUIMTEKROMME AANRAKEN.

A^{b} 192 (1908)

Stelsels van Bollen, die een kubische ruimtekromme aanraken.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. JAN DE VRIES

Hoogleeraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 2 November 1908 des namiddags te 4 uur

DOOR

ALBERT WILLEM GROENMAN

geboren te 's-Gravenhage.

BIBLIOTHEEK DER RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT.

P. DEN BOER

SENATUS VETERANORUM TYPOGRAPHUS ET LIBRORUM EDITOR

UTRECHT — 1908

AAN MIJN OUDERS.

Het verschijnen van dit proefschrift is mij een welkome aanleiding U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, mijn groote erkentelijkheid voor Uw onderwijs te betuigen.

In het bijzonder hoop ik, dat Gij, Hooggeleerde DE VRIES, *Hooggeschatte Promotor, mijn dank wel zult willen aarvaarden. Het bewerken van dit proefschrift heeft mij de gelegenheid gegeven ten volle te gaan waardeeren, welken bezielenden invloed het bijwonen Uwer colleges heeft uitgeoefend en welken krachtigen steun het heeft geschonken bij het streven naar wetenschappelijken arbeid.*

Groote verplichting gevoel ik ook jegens U, Hooggeleerde KAPTEYN. *Uw vriendschappelijk en bemoedigend woord zal bij mij in even dankbare herinnering blijven als Uw opgewekt en boeiend onderwijs.*

INHOUD.

INLEIDING.

De aantallen en systemen van bollen, die een ruimtekromme van den derden graad meervoudig en veelpuntig aanraken, zijn reeds meermalen een onderwerp van studie geweest.

In 1894 publiceerde E. Timerding in zijn „Inaugural-Dissertation" [1]) verschillende eigenschappen uit de krommingstheorie van de *kubische hyperbool*. Haar drie punten in het oneindige en een willekeurig punt van die kromme worden gekozen als basispunten van een homogeen coördinatenstelsel. Het gelukt langs dezen weg belangrijke vereenvoudigingen in de oplossing van het vraagstuk te brengen, maar voor een analoog onderzoek van de *kubische parabool* en *kubische parabolische hyperbool* zou de methode geheel gewijzigd moeten worden. Bovendien is de geldigheid der resultaten voor de algemeene kubische ruimtekromme niet bewezen.

---

1) „Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren". Strassburg, Strassburger Druckerei und Verlagsanstalt, vorm. R. Schultz & Co., 1894.

Met de afleiding van dezelfde bijzonderheden voor de algemeene kubische ruimtekromme houdt STURM zich bezig in een artikel, getiteld „*Metrische Eigenschaften der R_3*"[1]). Met behulp van de theorie van hoogere involuties op een rationale ruimtekromme vindt STURM getallen, die overeenstemmen met de resulaten van TIMERDING voor de kubische hyperbool. Van deze methode vindt men een overzicht in Hoofdstuk IV, pag. 75.

Het is echter gemakkelijk in te zien, dat voor een derdegraadsruimtekromme, die het vlak in het oneindige raakt *(kubische parabolische hyperbool)* of osculeert *(kubische parabool)* verschillende veelpuntig of meervoudig rakende bollen uiteen zullen vallen in het vlak in het oneindige en een eindig vlak. Voor die gevallen hebben de algemeene resultaten van STURM nog slechts betrekkelijke waarde. Ter onderkenning van de aantallen dier ontaardingen in de uitkomsten is het noodzakelijk een anderen weg te volgen. In dit proefschrift zijn de resultaten van een dergelijk onderzoek neergelegd.

Om echter zooveel mogelijk de beschouwingen tot het eindige gebied te beperken, is in de plaats van het systeem bollen der ruimte (d. i. het stelsel quadratische oppervlakken door den imaginairen bolcirkel) een systeem quadratische oppervlakken beschouwd, die een in het eindige gelegen vaste kegelsnede gemeen hebben. Met dankbaarheid vermeld ik, dat Prof. dr.

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band XI, pag. 1.

P. ZEEMAN te Leiden mij deze opvatting aan de hand heeft gedaan.

Gemakkelijk kan de geldigheid der gevonden resultaten door projectie ook voor het systeem bollen der ruimte bewezen worden.

Daar voor het bedoelde onderzoek de kennis van een bijzondere quadratische, involutorische lijnenverwantschap in het platte vlak noodzakelijk is, wordt deze in Hoofdstuk I volledig behandeld.

P. Kanters te leiden op deze sprekers [illegible] geven.

Gelukkig [illegible] de geldigheid der gezonde [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der [illegible] [illegible].

[illegible] het bekende onderwerp de kwestie van [illegible] [illegible] het geheel vlak noodzakelijk is, wordt door [illegible] onlangs behandeld.

HOOFDSTUK I.

Onderzoek van een bijzondere quadratische lijnenverwantschap in het platte vlak.

---

§ 1. De bijzondere lijnenverwantschap, die in dit hoofdstuk onderzocht zal worden, is door de volgende gegevens bepaald.

In een vlak v zijn drie punten P_1, P_2 en P_3 als basispunten van een net van kegelsneden gegeven, benevens een vaste kegelsnede K_2. Een lijn l snijdt K_2 in twee punten A en B, die in het algemeen een exemplaar L_2 van het net bepalen. De lijn l', die de overige twee snijpunten der kegelsneden K_2 en L_2 verbindt, zal de aan l toegevoegde rechte worden genoemd. Het is duidelijk, dat op deze wijze in het algemeen de rechte lijnen van het platte vlak involutorisch gepaard zullen worden.

Deze verwantschap zal behandeld worden vooreerst indien het net van kegelsneden gegeven is door drie gescheiden basispunten, dan indien twee der basispunten en ten slotte als alle basispunten samenvallen. Bovendien behoort voor elk dezer gevallen afzonderlijk beschouwd te worden de onderstelling, dat K_2 door geen, één, twee of drie der basispunten gaat.

§ **2.** *Het net is bepaald door drie niet samenvallende punten* P_1, P_2, P_3.

De vaste kegelsnede K_2 *gaat door geen dezer punten.*

Van het homogene coördinatenstelsel, dat gebruikt zal worden, zij $P_1 P_2 P_3$ de assendriehoek. De rechte lijn l heeft met K_2 twee punten A en B gemeen. De kegelsnede door P_1, P_2, P_3, A en B zal K_2 nog in twee punten C en D snijden; CD of l' is dan toegevoegd aan AB of l. In het algemeen worden de lijnen van het platte vlak aldus één aan één involutorisch aan elkander toegevoegd. Een uitzondering daarop vormen de zijden van den fundamentaaldriehoek. Snijdt bijvoorbeeld $P_1 P_2$ de kegelsnede K_2 in A′ en B′, dan zal de lijn $P_1 P_2$ niet één exemplaar van het net bepalen, maar elke lijn door P_3 zal met $P_1 P_2$ een ontaarde kegelsnede van het net vormen. Aan $P_1 P_2$ zijn dus alle lijnen door P_3 en aan elke lijn door P_3 is $P_1 P_2$ toegevoegd.

Derhalve:

De lijnen van het platte vlak zijn in deze verwantschap op involutorische wijze in paren gerangschikt, maar elke lijn door één der basispunten is toegevoegd aan de lijn door de beide overige basispunten, en de lijn door twee der hoekpunten van den assendriehoek aan alle lijnen door het derde hoekpunt.

In het algemeen zal een kegelsnede worden voorgesteld door de vergelijking

$$A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 + 2 A_{12} x_1 x_2 + \\ + 2 A_{23} x_2 x_3 + 2 A_{31} x_3 x_1 = 0.$$

Ter vereenvoudiging der formules zullen wij aan de homogene coördinaten een zoodanige beteekenis hechten, dat voor de vaste kegelsnede K_2 de coëfficiënten $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ zijn, zoodat K_2 wordt voorgesteld door

$$K_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 a_3 x_1 x_2 + 2 a_2 x_1 x_3 + \\ + 2 a_1 x_2 x_3 = 0.$$

De lijn l, voorgesteld door

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

zij toegevoegd aan de lijn l', bepaald door

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0.$$

Het exemplaar van het net, dat door de snijpunten van K_2 en l, derhalve door de snijpunten van K_2 en l' gaat, behoort tot den bundel van kegelsneden, bepaald door K_2 en de ontaarding $(l + l')$ en heeft dus tot vergelijking

$$K_2 - L L' = 0.$$

Daar deze kegelsnede door P_1, P_2 en P_3 gaat, moeten de coëfficiënten van x_1^2, x_2^2 en x_3^2 gelijk aan nul zijn.

Dit geeft de volgende betrekkingen tusschen de coördinaten van toegevoegde rechten:

$$\xi_1 \eta_1 = 1,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 1,$$
$$\xi_3 \eta_3 = 1.$$

De vergelijking van een punt in lijncoördinaten is:

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0;$$

derhalve heeft de toegevoegde figuur tot vergelijking

$$\frac{p_1}{\eta_1} + \frac{p_2}{\eta_2} + \frac{p_3}{\eta_3} = 0$$

of

$$p_1 \eta_2 \eta_3 + p_2 \eta_1 \eta_3 + p_3 \eta_1 \eta_2 = 0.$$

Dit stelt een kromme van de tweede klasse voor, die aan de drie zijden van den assendriehoek raakt.

Hieruit volgt dus:

Deze involutorische lijnenverwantschap is quadratisch.

De kegelsnede, ontstaan door transformatie van een punt, blijkt na herhaalde transformatie weer in het oorspronkelijke punt over te gaan, zoodat het involutorische karakter der verwantschap ook hier gehandhaafd is. Daar echter de raaklijnen $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ en $P_3 P_1$ in de punten (waaiers) P_3, P_1 en P_2 worden omgezet, behooren deze drie punten tot de volledige transformatie der kegelsnede

$$p_1 \eta_2 \eta_3 + p_2 \eta_1 \eta_3 + p_3 \eta_1 \eta_2 = 0,$$

welke figuur dus inderdaad van de vierde klasse is.

Met P_1, dus

$$\xi_1 = 0,$$

komt overeen

$$\eta_2 \eta_3 = 0,$$

of

$$\eta_2 = 0 \quad \text{en} \quad \eta_3 = 0,$$

dus de punten P_2 en P_3.

M. a. w.:

Een stralenbundel wordt omgezet in het raaklijnenstelsel van een kegelsnede, beschreven in den fundamentaaldriehoek.

Voor de basispunten is de toegevoegde kromme van de tweede klasse ontaard in de beide overige basispunten.

Een willekeurige kromme van de n^{de} klasse wordt in lijncoördinaten voorgesteld door

$$A\xi_1^n + B\xi_2^n + C\xi_3^n + D\xi_1^{n-1}\xi_2 + \ldots\ldots = 0$$

en dus getransformeerd in

$$\frac{A}{\eta_1^n} + \frac{B}{\eta_2^n} + \frac{C}{\eta_3^n} + \frac{D}{\eta_1^{n-1}\eta_2} + \ldots\ldots = 0$$

of

$$A\eta_2^n\eta_3^n + B\eta_1^n\eta_3^n + C\eta_1^n\eta_2^n +$$
$$+ D\eta_1\eta_2^{n-1}\eta_3^n + \ldots\ldots 0,$$

dus in een kromme van de klasse $2n$, die elk der zijden van den assendriehoek tot n-voudige raaklijnen heeft.

Raakt de gegeven kromme p maal aan een zijde van den fundamentaaldriehoek, bijvoorbeeld $P_2 P_3$, dan is in de vergelijking dier kromme de hoogste macht van ξ_1 slechts $(n-p)$ en de klasse der getransformeerde kromme wordt dan verlaagd tot $2n-p$, zooals een eenvoudige substitutie aantoont. Daar in de vergelijking der getransformeerde kromme de hoogste macht van η_1 is $(n-p)$, van η_2 echter n, raakt deze n maal aan $P_2 P_3$ en $(n-p)$ maal aan $P_1 P_2$ en aan $P_2 P_3$. De kromme, aan deze kromme toegevoegd, is dus van de klasse:

$$2(2n-p) - n - 2(n-p) = n$$

en is, zooals de algebraïsche substitutie aantoont, identiek met de oorspronkelijke.

Ook meetkundig blijkt gemakkelijk de invloed van de raking der gegeven kromme C_n aan de zijden van den assendriehoek op de klasse der getransformeerde kromme. Immers raakt C_n bijvoorbeeld éénmaal aan $P_1 P_2$, dan komen met deze raaklijn alle lijnen door P_3 overeen. De getransformeerde kromme wordt dus gesplitst in een kromme van de klasse één (het punt P_3) en een kromme van de klasse $2n-1$.

Derhalve:

Een kromme van de klasse n wordt omgezet in een kromme van de klasse $2n-p$, als p voorstelt het totaal aantal malen, dat de gegeven kromme raakt aan de zijden van den fundamentaaldriehoek.

Uit

$$\xi_1 \eta_1 = 1,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 1,$$
$$\xi_3 \eta_3 = 1,$$

volgt voor de dubbelrechten, dat zijn de lijnen, die in deze verwantschap met zichzelve overeenstemmen,

$$\xi_1 = \pm 1$$
$$\xi_2 = \pm 1$$
$$\xi_3 = \pm 1.$$

De *dubbelrechten* worden dus bepaald door:

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0.$$

Schijnbaar stellen deze vergelijkingen acht lijnen voor, maar zij zijn twee aan twee identiek, omdat hun linkerleden alleen in teeken verschillen.

Derhalve:

Deze quadratische transformatie heeft vier dubbelrechten.

Dit resultaat is een andere uitdrukking voor de eigenschap, dat in een net van kegelsneden vier exemplaren een dubbele aanraking hebben met een gegeven kegelsnede.

§ 3. *Het net is bepaald door drie niet samenvallende punten* P_1, P_2 *en* P_3.

De vaste kegelsnede K_2 *gaat door één dezer punten.*

Zij P_1 het punt, dat op K_2 ligt. De drie basispunten P_1, P_2 en P_3 van het net zullen wederom tot hoekpunten van den assendriehoek worden gekozen.

Een lijn l heeft met K_2 twee punten A en B gemeen, die een exemplaar van het net bepalen. Deze kegelsnede heeft nog twee punten met K_2 gemeen, waarvan P_1 één punt is. Aan een willekeurige lijn is derhalve in het algemeen één lijn door P_1 toegevoegd. Een lijn door P_1 bepaalt op K_2 nog één punt C; hierdoor gaat een enkelvoudige oneindigheid exemplaren van het net; aan de rechte P_1C zijn dus ∞^1 lijnen toegevoegd. Elk punt van K_2 bepaalt één exemplaar van den bundel kegelsneden door P_1, P_2, P_3 en C; derhalve gaat door elk punt van K_2 één lijn, toegevoegd aan P_1C. Daarom kunnen de ∞^1 aan P_1C toegevoegde lijnen geen kromme omhullen; zij vormen dus een stralenbundel. Daar aan elke lijn door P_1 o. a. de lijn P_2P_3 is toegevoegd, ligt het centrum van dezen bundel op $P_2 P_3$. Men besluit hieruit:

Aan een willekeurige lijn is één rechte door P_1 toegevoegd, maar met een lijn door P_1 komt een stralenbundel overeen, waarvan het centrum op $P_2 P_3$ ligt.

Aldus is aan elke lijn $P_1 C$ één punt van $P_2 P_3$ toegevoegd, waardoor alle aan $P_1 C$ toegevoegde lijnen gaan. M. a. w. er bestaat een projectieve verwantschap tusschen de puntenreeks $P_2 P_3$ en den stralenbundel P_1. Tweemaal zal een punt van $P_2 P_3$ op den overeenkomstigen straal vallen en dus een straal door P_1 met zichzelve overeenstemmen.

Derhalve:

Het stelsel van toegevoegde lijnen heeft twee dubbellijnen, die door P_1 gaan.

Van een stralenbundel door een willekeurig punt Q is elke straal s ook te beschouwen als een exemplaar van den stralenbundel door het snijpunt van s met $P_2 P_3$ en dus toegevoegd aan een bepaalde rechte door P_1. Bovendien is de straal $Q P_1$ toegevoegd aan een stralenbundel met centrum op $P_2 P_3$. Een willekeurige stralenbundel wordt derhalve omgezet in een waaier door P_1 (met projectieve verwantschap der stralen van beide bundels) en een stralenbundel met centrum op $P_2 P_3$, dus in een ontaarde kromme van de tweede klasse.

Een willekeurige kromme van de n^{de} klasse wordt omgezet in een n-maal te tellen waaier met centrum P_1 en n waaiers, wier centra op $P_2 P_3$ liggen. Immers elke raaklijn aan de kromme is toegevoegd aan een straal door P_1, uitgezonderd de n raaklijnen door P_1, die in stralenbundels met middelpunten op $P_2 P_3$ worden getransformeerd. En elke straal door P_1 is toegevoegd aan n raaklijnen, daar de toegevoegde bundel van dien straal n raaklijnen bevat.

Deze resultaten gaan we nu algebraïsch afleiden.

In de vergelijking van K_2 ontbreekt de coëfficiënt van x_1^2 en aan de coördinaten x_2 en x_3 wordt een zoodanige beteekenis gegeven, dat de coëfficiënten van x_2^2 en x_3^2 de positieve eenheid zijn.

Derhalve is

$$K_2 \equiv x_2^2 + x_3^2 + 2a_3 x_1 x_2 + 2a_2 x_2 x_3 + 2a_1 x_2 x_3 = 0.$$

Een lijn l,

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

zij toegevoegd aan de lijn l',

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0;$$

dan volgen uit het feit, dat

$$K_2 - L L' = 0$$

tot het net van kegelsneden door P_1, P_2 en P_3 behoort, de transformatieformules

$$\xi_1 \eta_1 = 0,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 1,$$
$$\xi_3 \eta_3 = 1.$$

De vergelijking van alle lijnen door èèn punt is

$$(p_1 + \lambda q_1) x_1 + (p_2 + \lambda q_2) x_2 + (p_3 + \lambda q_3) x_3 = 0; \text{(1)}$$

zij wordt omgezet in

$$\frac{x_2}{p_2 + \lambda q_2} + \frac{x_3}{p_3 + \lambda q_3} = 0$$

of

$$(p_3 + \lambda q_3) x_2 + (p_2 + \lambda q_2) x_3 = 0, \quad (^2)$$

dat zijn alle lijnen door P_1, projectief toegevoegd aan de stralen van den gegeven bundel.

Voor

$$\lambda = -\frac{p_1}{q_1}$$

echter wordt in (1) de coëfficiënt van x_1 nul en dus dezelfde coëfficiënt van de toegevoegde lijn onbepaald. Aan die lijn is derhalve toegevoegd de stralenbundel

$$\mu x_1 + \left(p_3 - \frac{p_1 q_3}{q_1}\right) x_2 + \left(p_2 - \frac{p_1 q_2}{q_1}\right) x_3 = 0,$$

die tot centrum een bepaald punt van $P_2 P_3$ heeft.

Derhalve:

Een willekeurige waaier wordt omgezet in een ontaarde kromme van de tweede klasse.

En:

De lijnenverwantschap is een bijzondere involutorische en quadratische.

De lijn

$$l \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wordt omgezet in

$$l' \equiv \frac{1}{\eta_2} x_2 + \frac{1}{\eta_3} x_3 = 0$$

d. i. een lijn door P_1.

De lijn

$$m \equiv \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wordt getransformeerd in

$$m' \equiv \lambda x_1 + \frac{1}{\eta_2} x_2 + \frac{1}{\eta_3} x_3 = 0$$

waarin λ onbepaald is, dus in een waaier met centrum op $P_2 P_3$.

Een kromme van de n^{de} klasse wordt vastgesteld door

$$A \xi_1^n + B \xi_2^n + C \xi_3^n + D \xi_1^{n-1} \xi_2 + \ldots\ldots = 0$$

en getransformeerd in

$$\frac{B}{\eta_2^n} + \frac{C}{\eta_3^n} + \ldots\ldots = 0$$

of na herleiding in een vergelijking, homogeen in η_2 en η_3,

$$C \eta_2^n + B \eta_3^n + \ldots\ldots = 0,$$

dus in n waaiers met centra op $P_2 P_3$ en in

$$\eta_1^n = 0$$

d.i. de waaier met middelpunt P_1, n maal geteld.

Voor de dubbellijnen geldt:

$$\xi_1 = 0,$$
$$\xi_2 = \pm 1,$$
$$\xi_3 = \pm 1.$$

Er zijn dus twee dubbellijnen, voorgesteld door

$$\pm x_2 \pm x_3 = 0.$$

§ **4.** *De vaste kegelsnede* K_2 *gaat door twee der drie punten, die het net bepalen.*

Indien $P_1 P_2 P_3$ tot coördinatendriehoek wordt gekozen en de kegelsnede K_2 door P_2 en P_3 gaat, kan deze voorgesteld worden door:

$$K_2 \equiv x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_1 x_2 x_3 = 0.$$

Indien l,

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

toegevoegd is aan l',

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0,$$

volgen uit het feit, dat tot het net van kegelsneden door P_1, P_2 en P_3

$$K_2 - L L' = 0$$

behoort, deze coëfficiëntenbetrekkingen van verwante lijnen:

$$\eta_1 \xi_1 = 1,$$
$$\eta_2 \xi_2 = 0,$$
$$\eta_3 \xi_3 = 0.$$

Een willekeurige lijn

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wordt dus getransformeerd in

$$x_1 = 0.$$

De lijn

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$$

wordt omgezet in

$$x_1 + \lambda \eta_1 x_3 = 0,$$

dus in een waaier P_2.

Evenzoo is een lijn door P_2 toegevoegd aan den stralenbundel P_3.

Een willekeurige waaier Q wordt dus getransformeerd in de twee stralenbundels, die tot centra hebben P_2 en P_3;

immers een willekeurige straal wordt omgezet in $P_2 P_3$, maar QP_2 in den waaier P_3 en QP_3 in den waaier P_2.

De toevoeging der rechten is dus een bijzondere quadratische en involutorische lijnenverwantschap.

De lijn

$$x_1 = 0$$

wordt getransformeerd in

$$x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 = 0,$$

d. z. alle lijnen van het vlak en is derhalve ook aan zichzelve toegevoegd, dus dubbellijn der verwantschap.

De coëfficiënten van de vergelijking der dubbellijnen volgt uit:

$$\xi_1 = \pm 1,$$
$$\xi_2 = 0,$$
$$\xi_3 = 0,$$

dus de verwantschap heeft slechts één dubbellijn:

$$x_1 = 0.$$

§ **5.** *De vaste kegelsnede* K_2 *gaat door de drie basispunten van het net van kegelsneden.*

Daar de kegelsnede door P_1, P_2, P_3 en de beide snijpunten van een lijn l met K_2 vijf punten met K_2 gemeen heeft en er dus mede samenvalt, is de toevoeging der lijnen in het algemeen onbepaald.

Een uitzondering vormen de zijden van den fundamentaaldriehoek, waarmede alle lijnen door het tegenoverliggende hoekpunt overeenkomen, en elke lijn door een hoekpunt, waaraan de tegenoverliggende zijde is toegevoegd.

§ 6. *Het net van kegelsneden is bepaald door drie punten, waarvan twee samenvallen.*

De vaste kegelsnede gaat door geen dezer punten.

Zij gegeven, dat de kegelsneden van het net gaan door de vaste punten P_1, P_2 en in P_1 raken aan een gegeven rechte $P_1 Q_3$, terwijl Q_3 op deze lijn willekeurig gekozen is. Als assendriehoek van het homogeen coördinatenstelsel wordt $P_1 P_2 Q_3$ gekozen.

Een exemplaar van het net van kegelsneden zal K_2 in vier punten snijden en deze zullen op drie verschillende wijzen in twee paren te verdeelen zijn, die telkens twee involutorisch aan elkander toegevoegde rechten bepalen.

Als ontaardingen van het net gelden de lijnenparen, die ieder bestaan uit $P_1 Q_3$ en een lijn door P_2, zoodat $P_1 Q_3$ aan alle lijnen door P_2 is toegevoegd. Ook de lijn $P_1 P_2$ vormt met elk der lijnen door P_1 een ontaard exemplaar van het net, is dus aan alle lijnen door P_2, derhalve ook aan zichzelve toegevoegd en geldt in de lijnenverwantschap als dubbelrechte.

Het is mogelijk de beteekenis der coördinaten zóó te bepalen, dat de coëfficiënten van x_1^2, x_2^2 en $x_3 x_1$ in de vergelijking der vaste kegelsnede de positieve eenheid zijn.

Indien K_2 gegeven is door

$$K_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{12} x_1 x_2 +$$
$$+ a_{23} x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$$

en een paar toegevoegde lijnen l en l' door

$$l \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

en

$$l' \equiv \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0,$$

dan stelt

$$K_2 - L L' = 0$$

een exemplaar van het net voor.

In de vergelijking van het net van kegelsneden ontbreken de coëfficiënten van x_1^2 en x_2^2, omdat alle exemplaren gaan door P_1 en P_2 en ontbreekt de coëfficiënt van $x_1 x_3$, daar de kegelsneden in P_1 aan $P_1 Q_3$ $(x_2 = 0)$ raken.

Hieruit volgen deze drie betrekkingen tusschen de lijncoördinaten van toegevoegde rechten:

$$\xi_1 \eta_1 = 1,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 1,$$
$$\xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 = 1.$$

Door herleiding vindt men hieruit

$$\eta_1 = \frac{1}{\xi_1},$$
$$\eta_2 = \frac{1}{\xi_2},$$
$$\eta_3 = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^2},$$

of

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \xi_1 \xi_2 : \xi_1^2 : (\xi_1 - \xi_3) \xi_2.$$

Een punt met de vergelijking

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

wordt getransformeerd in

$$p_1 \eta_1 \eta_2 + p_2 \eta_1^2 + p_3 \eta_1 \eta_2 - p_3 \eta_3 \eta_2 = 0,$$

d. i. de vergelijking van een kromme van de tweede klasse, rakende aan $P_1 Q_3$ en in P_2 aan $P_1 P_2$.

Derhalve:

De involutorische lijnenverwantschap is quadratisch.

Voor

$$\eta_1 = 0,$$

$$\eta_3 = 0$$

vindt men

$$\xi_2 = 0,$$

d. w. z. met $P_1 Q_3$ komen alle lijnen door P_2 overeen, en omgekeerd.

Aan $P_1 P_2$ zijn alle rechten door P_1 toegevoegd en omgekeerd.

Immers uit

$$\eta_1 = 0,$$

$$\eta_2 = 0$$

volgt

$$\xi_1 = 0.$$

Dus wordt P_1 met de vergelijking

$$\xi_1 = 0$$

getransformeerd in

$$\eta_1 \eta_2 = 0,$$

d. i. in de punten P_1 en P_2;

en P_2, voorgesteld door

$$\xi_2 = 0$$

in

$$\eta_1^2 = 0$$

d. i. het punt P_1, dubbel geteld.

Een willekeurig punt op $P_1 Q_3$ met de vergelijking

$$p_1 \xi_1 + p_3 \xi_3 = 0$$

wordt omgezet in

$$p_1 \eta_1 \eta_2 + p_3 \eta_1 \eta_2 - p_3 \eta_3 \eta_2 = 0,$$

dus in P_2 en een bepaald punt op $P_1 Q_3$.

In het algemeen stemt met een kromme C_n van de klasse n overeen een kromme C_{2n} van de klasse $2n$. Zij de vergelijking van C_n in lijncoördinaten:

$$A \xi_1^n + B \xi_2^n + C \xi_3^n + D \xi_1^{n-1} \xi_2 + \ldots\ldots = 0,$$

dan blijkt uit de transformatieformules dat, indien C_n raakt aan $P_1 P_2$ (met de lijncoördinaten $\xi_1 = 0$ en $\xi_2 = 0$) of aan $P_1 Q_3$ ($\xi_1 = 0$ en $\xi_3 = 0$) de klasse van de getransformeerde kromme met één wordt verlaagd. Of C_n raakt aan $P_2 Q_3$, is van geen invloed op de klasse van de getransformeerde kromme; immers deze zijde van den assendriehoek is een willekeurig gekozen straal door P_2.

De dubbellijnen der verwantschap zijn bepaald door

$$\xi_1^2 = 1,$$
$$\xi_2^2 = 1,$$
$$2 \xi_1 \xi_3 = 1,$$

of door

$$\xi_1 = \pm 1,$$
$$\xi_2 = \pm 1,$$
$$\xi_3 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Daar ξ_3 lineair afhangt van ξ_1, is het teeken van den coëfficiënt ξ_3 der dubbellijnen bepaald door dat van ξ_1.

E r z ij n d u s t w e e e i g e n l ij k e d u b b e l l ij n e n in deze verwantschap; maar de zijde $P_1 P_2$ moet, zooals pag. 18 gevonden is, ook als dubbellijn beschouwd worden.

§ **7.** *Het net van kegelsneden is bepaald door drie punten, waarvan twee samenvallen.*

De vaste kegelsnede gaat door één dezer punten.

Indien de kegelsneden van het net aan de zijde $P_1 Q_3$ van den assendriehoek raken in P_1 en door P_2 gaan, heeft men te onderscheiden of de vaste kegelsnede K_2 door P_1 dan wel door P_2 gaat.

Ten eerste. K_2 *gaat door* P_2.

Als de vergelijking van K_2 is

$$x_1^2 + a_{33} x_3^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0,$$

van een rechte l

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

en van de toegevoegde lijn l'

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0,$$

dan verschaft de betrekking

$$K_2 - L L' = 0$$

de volgende transformatieformules:

$$\xi_1 \eta_1 = 1,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 0,$$
$$\xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 = 1,$$

of

$$\eta_1 = \frac{1}{\xi_1},$$
$$\xi_2 \eta_2 = 0,$$
$$\eta_3 = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^2}.$$

Een waaier met de vergelijking:

$$(p_1 + \lambda q_1) x_1 + (p_2 + \lambda q_2) x_2 + (p_3 + \lambda q_3) x_3 = 0$$

wordt getransformeerd in:

$$(p_1 + \lambda q_1) x_1 + \{p_1 - p_3 + \lambda (q_1 - q_3)\} x_3 = 0$$

en in het resultaat der transformatie van den waaierstraal, waarvoor men heeft

$$\lambda = -\frac{p_2}{q_2}.$$

Deze straal wordt omgezet in:

$$\left(p_1 - \frac{p_2 q_1}{q_2}\right) x_1 + \mu x_2 + \left\{p_1 - p_3 + \frac{p_2}{q_2}(q_1 - q_3)\right\} x_3 = 0,$$

waarin μ onbepaald is.

Een waaier wordt dus omgezet in twee stralenbundels, derhalve in een ontaarde kromme van de tweede klasse, waaruit volgt:

D e b e s c h o u w d e i n v o l u t o r i s c h e l ij n e n v e r w a n t s c h a p i s e e n b ij z o n d e r e q u a d r a t i s c h e.

Een rechte lijn

$$l \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wordt in het algemeen omgezet in:

$$l' \equiv \frac{1}{\xi_1} x_1 + \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^{\,2}} x_3 = 0,$$

dus in een lijn door P_2.

Omgekeerd, een lijn door P_2,

$$m \equiv \xi_1 x_1 + \xi_3 x_3 = 0,$$

wordt getransformeerd in

$$m' \equiv \frac{1}{\xi_1} x_1 + \lambda x_2 + \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^{\,2}} x_3 = 0,$$

dus in een waaier, wiens centrum op $P_1 Q_3$ ligt.

Een kromme van de n^{de} klasse C_n wordt in lijncoördinaten voorgesteld door

$$A \xi_1^n + B \xi_2^n + C \xi_3^n + D \xi_1^{n-1} \xi_2 + \ldots\ldots = 0,$$

en getransformeerd in

$$\frac{A}{\eta_1^n} + C \frac{(\eta_1 - \eta_3)^n}{\eta_1^{2n}} + \ldots\ldots = 0.$$

De vergelijking der getransformeerde kromme is homogeen in η_1 en η_3 en van den graad n; deze bestaat uit n waaiers met centrum op $P_1 P_2$, terwijl bovendien

$$\eta_2^n = 0,$$

(d. i. de waaier met middelpunt P_2) n maal geteld, als een gedeelte der getransformeerde kromme beschouwd moet worden.

Voor de dubbellijnen geldt:

$$\xi_1^2 = 1,$$

$$\xi_2^2 = 0,$$

$$2 \xi_1 \xi_3 = 1.$$

Er zijn dus twee dubbellijnen, die beide door P_2 gaan.

Ten tweede. K_2 *gaat door* P_1 *zonder* $P_1 Q_3$ *te raken.*

Indien de vergelijking van K_2 is

$$x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$$

en

$$l \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

toegevoegd is aan

$$l' \equiv \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0,$$

volgen uit

$$K_2 - L L' = 0$$

deze betrekkingen tusschen de coëfficiënten:

$$\xi_1 \eta_1 = 0,$$

$$\xi_2 \eta_2 = 1,$$

$$\xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 = 1,$$

of, indien ξ_1 niet gelijk is aan nul,

$$\eta_1 = 0,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\xi_2},$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\xi_1}.$$

Een waaier

$$(p_1 + \lambda q_1)x_1 + (p_2 + \lambda q_2)x_2 + (p_3 + \lambda q_3)x_3 = 0$$

wordt omgezet in

$$(p_1 + \lambda q_1)x_2 + (p_2 + \lambda q_2)x_3 = 0$$

en in het transformatieresultaat van den straal, waarvoor

$$\lambda = -\frac{p_1}{q_1}.$$

Hiervoor vindt men

$$\mu x_1 + (p_2 q_1 - p_1 q_2)x_3 = 0.$$

Dus alle waaiers worden getransformeerd in de ontaarde kromme van de tweede klasse, bestaande uit de waaiers met centra P_1 en P_2.

Een willekeurige lijn

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wordt omgezet in

$$\xi_1 x_2 + \xi_2 x_3 = 0,$$

dus in een lijn door P_1.

Een lijn door P_1 is echter toegevoegd aan alle lijnen door één punt. Immers, voor

$$\xi_1 = 0$$

vindt men vooreerst

$$\xi_3 \eta_1 = 1,$$

dus

$$\eta_1 = \frac{1}{\xi_3}.$$

Daar

$$\eta_2 = \frac{1}{\xi_2}$$

en η_3 onbepaald blijft, wordt l' voorgesteld door

$$\xi_2 x_1 + \xi_3 x_2 + \mu x_3 = 0.$$

Voor de dubbellijnen geldt

$$\xi_1 = 0,$$
$$\xi_2 = \pm 1,$$
$$\xi_3 = \frac{1}{\xi_1}.$$

Hunne vergelijking is dus

$$\xi_1{}^2 x_1 \pm \xi_1 x_1 + x_3 = 0,$$

met

$$\xi_1 = 0;$$

derhalve is

$$x_3 = 0$$

de eenige dubbellijn van deze verwantschap.

§ **8.** *Het net van kegelsneden is bepaald door drie punten, waarvan twee samenvallen.*

De vaste kegelsnede gaat door twee dezer punten.

Er zijn weer twee gevallen te onderscheiden.

Ten eerste. *De vaste kegelsnede* K_2 *gaat door* P_1 *en* P_2.

Voor dit geval worden de transformatieformules, zooals gemakkelijk uit § 7 blijkt, daar de coëfficiënten van x_1^2 en x_2^2 nu nul zijn in de vergelijking van K_2, uitgedrukt door

$$\xi_1 \eta_1 = 0,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 0,$$
$$\xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 = 1.$$

We willen hier alleen de dubbellijnen bepalen. Daarvoor geldt

$$\xi_1^2 = 0,$$
$$\xi_2^2 = 0,$$
$$2\,\xi_1 \xi_3 = 1,$$

dus

$$x_3 = 0$$

is de eenigste dubbellijn.

Ten tweede. K_2 *raakt in* P_1 *aan* $P_1 Q_3$.

In de vergelijking van K_2 zijn de coëfficiënten van x_1^2 en $x_1 x_3$ nul en worden de transformatieformules

$$\xi_1 \eta_1 = 0,$$
$$\xi_2 \eta_2 = 1,$$
$$\xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 = 0,$$

dus van de dubbellijnen worden de coëfficiënten gevonden door

$$\xi_1^2 = 0,$$

$$\xi_2^2 = 1,$$

$$2\xi_1\xi_3 = 0 \text{ of } \xi_3 = \text{onbepaald},$$

dus

$$x_2 + \mu x_3 = 0$$

is als een waaier van dubbellijnen op te vatten.

De overige resultaten vindt men, mutatis mutandis, gemakkelijk door vergelijking met § 4.

§ **9.** *Het net van kegelsneden is bepaald door drie punten, waarvan twee samenvallen.*

De vaste kegelsnede K_2 *gaat door de drie basispunten van het net.*

Evenals in § 5 blijkt, dat de lijnenverwantschap geheel onbepaald wordt.

§ **10.** *Het net van kegelsneden is door drie samenvallende punten bepaald.*

De vaste kegelsnede gaat door geen dezer punten.

Het net bestaat uit de kegelsneden, die in een bepaald punt een gegeven kegelsnede driepuntig raken.

Zij de assendriehoek $P_1 Q_2 Q_3$, waarin $P_1 Q_3$ de gemeenschappelijke raaklijn van de exemplaren van het net is, met P_1 als raakpunt. We kiezen $Q_2 Q_3$ zoodanig, dat één der kegelsneden van het net tot vergelijking heeft

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

Een tweetal ontaardingen van kegelsneden, die tot het net behooren, zijn

$$x_2^2 = 0$$

en

$$x_2 x_3 = 0,$$

zoodat het net voorgesteld kan worden door:

$$a x_2^2 + b x_2 x_3 + c(x_1 x_2 - x_3^2) = 0.$$

Aan de coördinaten zullen we een zoodanige beteekenis hechten, dat K_2 de volgende vergelijking heeft

$$x_1^2 + A_{22} x_2^2 + x_3^2 + A_{12} x_1 x_2 + A_{23} x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Indien de lijn

$$l \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

toegevoegd is aan

$$l' \equiv \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0,$$

dan stelt

$$K_2 - L L' = 0$$

een exemplaar van het net van kegelsneden voor. Tusschen de coëfficiënten bestaan dus de volgende betrekkingen:

$$\xi_1 \eta_1 = 1,$$

$$1 - \xi_3 \eta_3 = -A_{12} + \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1,$$

$$1 = \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1.$$

Hieruit volgt

$$\eta_1 = \frac{1}{\xi_1},$$

$$\eta_2 = -\frac{(\xi_1 - \xi_3)\xi_3}{\xi_1^3} - \frac{\xi_2}{\xi_1^2} + \frac{A_{12} + 1}{\xi_1},$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^2},$$

of

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = \xi_1^2 : \left[(A_{12}+1)\xi_1^2 + \xi_3^2 - \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_3\right] : \\ : \xi_1 (\xi_1 - \xi_3).$$

In het algemeen komt met een punt, in lijncoördinaten voorgesteld door

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$$

overeen een kromme van de tweede klasse, met de vergelijking,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 A_{12} + \alpha_2 + \alpha_3)\xi_1^2 - \alpha_2 \xi_1 \xi_2 - (\alpha_2 + \alpha_3)\xi_1 \xi_3 + \\ + \alpha_2 \xi_3^2 = 0,$$

die dus in P_1 aan $P_1 Q_3$ raakt.

De involutorische lijnenverwantschap is dus quadratisch.

In het algemeen is aan een rechte een bepaalde rechte toegevoegd. Een uitzondering vormen de rechte lijnen door P_1, die allen aan de lijn $P_1 Q_3$ toegevoegd zijn, en omgekeerd de lijn $P_1 Q_3$, die getransformeerd wordt in elk der lijnen door P_1. Immers

$$\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wordt, daar

$$\xi_1 = 0$$

omgezet in

$$\xi_3^2 x_2 = 0.$$

Langs den omgekeerden weg zou men algebraïsch kunnen aantoonen, dat $P_1 Q_3$ aan alle lijnen door P_1 is toegevoegd; maar meetkundig blijkt dit gemakkelijker. $P_1 Q_3$ vormt toch met een lijn door P_1 een ontaard exemplaar van het net van kegelsneden.

Substitutie van de gevonden transformatieformules in de vergelijking van een kromme van de klasse n geeft op dezelfde wijze als in § 2 en § 6 is afgeleid:

Een kromme van de klasse n wordt in een kromme van de klasse $(2\,n - p)$ omgezet, als p voorstelt het aantal malen, dat de gegeven kromme buiten P_1 raakt aan $P_1\,Q_3$. Raakt de gegeven kromme aan $P_1\,Q_3$ in P_1, dan wordt de klasse van de getransformeerde kromme met 2 verminderd.

Voor de dubbellijnen geldt

$$\xi_1^2 = 1,$$
$$2\,\xi_1\,\xi_3 = 1,$$
$$2\,\xi_1\,\xi_2 = 1 + A_{12} - \xi_3^2.$$

Daar ξ_3 en ξ_2 lineair afhangen van ξ_1, is er slechts één dubbellijn in de verwantschap.

De coëfficiënten van deze dubbellijn zijn

$$\xi_1 = \pm\,1,$$
$$\xi_2 = \pm\,(\tfrac{1}{2}\,A_{12} + \tfrac{3}{8}),$$
$$\xi_3 = \pm\,\tfrac{1}{2}$$

Bovendien blijkt uit de meetkundige beschouwing, dat de lijn $P_1\,Q_3$ als dubbelrechte te rekenen is, daar $P_1\,Q_3$, tweemaal geteld, een ontaard exemplaar van het net van kegelsneden is. Om ook langs algebraïschen weg dit resulaat te bereiken, merken we op, dat in het algemeen aan de rechte

$$\xi_1\,x_1 + \xi_2\,x_2 + \xi_3\,x_3 = 0$$

toegevoegd is

$$\frac{1}{\xi_1}\,x_1 - \left(\frac{(\xi_1 - \xi_3)\,\xi_3}{\xi_1^{\,3}} + \frac{\xi_2}{\xi_1^{\,2}} - \frac{A_{12} + 1}{\xi_1}\right)x_2 + \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_1^{\,2}}\,x_3 = 0$$

of

$$\xi_1 x_1 - \left(\frac{(\xi_1 - \xi_3)\xi_3}{\xi_1} + \xi_2 - (A_{12} + 1)\xi_1\right) x_2 +$$
$$+ (\xi_1 - \xi_3) x_3 = 0.$$

Door substitutie van

$$\xi_1 = 0$$

en

$$\xi_3 = 0$$

in de vergelijking van de lijn en haar toegevoegde, blijkt dat de rechte

$$x_2 = 0$$

aan zichzelve toegevoegd is.

§ **11.** *Het net van kegelsneden is bepaald door drie samenvallende punten.*

De vaste kegelsnede gaat door één der basispunten van het net.

De vergelijking der vaste kegelsnede K_2, die door P_1 gaat, is:

$$A_{22} x_2^2 + x_3^2 + A_{12} x_1 x_2 + A_{23} x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$$

en uit deze vergelijking, in verband met § 10, volgt gemakkelijk voor de transformatieformules:

$$\xi_1 \eta_1 = 0,$$

$$\eta_2 = -\frac{(\xi_1 - \xi_3)\xi_3}{\xi_1^3} - \frac{\xi_2}{\xi_1^2} + \frac{A_{12} + 1}{\xi_1},$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^2}.$$

Derhalve is in het algemeen aan een lijn toegevoegd een lijn door P_1, want als de coëfficiënt ξ_1, van de vergelijking van een lijn niet nul is, moet de coëfficiënt η_1 van de toegevoegde rechte nul zijn.

Een lijn door P_1 wordt voorgesteld door:

$$\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

Om de coëfficiënten der toegevoegde rechte af te leiden, gebruiken we de betrekkingen (vergelijk pag. 29)

$$\xi_1 \eta_1 = 0,$$
$$1 - \xi_3 \eta_3 = - A_{12} + \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1,$$
$$1 = \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1.$$

Substitueert men hierin

$$\xi_1 = 0,$$

dan vindt men gemakkelijk:

$$\eta_1 = \frac{1}{\xi_3},$$
$$\eta_2 = \text{onbepaald},$$
$$\eta_3 = \frac{\xi_3 + A_{12} \xi_3 - \xi_2}{\xi_3^2},$$

dus aan een rechte door P_1 zijn alle stralen van een waaier toegevoegd, waarvan het centrum op $P_1 Q_3$ ligt.

Een kromme van de klasse n wordt derhalve omgezet in n waaiers met centra op $P_1 Q_3$ en den waaier P_1, n maal geteld.

Meetkundig blijkt gemakkelijk, dat $P_1 Q_3$ d e e e n i g e d u b b e l r e c h t e v a n d e q u a d r a t i s c h e l i j n e n v e r w a n t s c h a p i s.

§ **12.** *Het net van kegelsneden is bepaald door drie samenvallende punten.*

De vaste kegelsnede raakt in het gemeenschappelijk punt aan de gemeenschappelijke raaklijn van alle kegelsneden van het net.

Indien K_2 aan $P_1 Q_3$ raakt in P_1, is haar vergelijking:

$$A_{22} x_2^2 + x_3^2 + A_{12} x_1 x_2 + A_{23} x_2 x_3 = 0$$

en volgt door vergelijking met § 10, dat de transformatieformules zijn:

$$\begin{aligned} \xi_1 \eta_1 &= 0, \\ 1 - \xi_3 \eta_3 &= - A_{12} + \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1, \\ \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dus een willekeurige lijn is toegevoegd aan $P_1 Q_3$.

De lijn $P_1 Q_3$ is toegevoegd aan alle lijnen van het vlak, dus ook aan zichzelve. $P_1 Q_3$ is dus te beschouwen als dubbelrechte.

Voor de coëfficiënten van een rechte, toegevoegd aan een willekeurige lijn door P_1, vindt men:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0, \\ \eta_2 &= \text{onbepaald}, \\ \eta_3 &= \frac{1 + A_{12}}{\xi_3}. \end{aligned}$$

Dus aan een lijn door P_1 zijn alle lijnen door P_1 toegevoegd.

§ 13. *Het net van kegelsneden is bepaald door drie samenvallende punten.*

De vaste kegelsnede K_2 *is een exemplaar van dit net van kegelsneden.*

De lijnenverwantschap in v is onbepaald.

HOOFDSTUK II.

Quadratische oppervlakken van een stelsel met vier graden van vrijheid, die meervoudig of veelpuntig raken aan een kubische ruimtekromme.

---

§ **1.** In de ruimte is de kromme van den derden graad, R_3, in vele opzichten het analogon van de kegelsnede in het platte vlak. Dit blijkt o. a. hieruit, dat van R_3 de klasse overeenstemt met den graad en dat elke kubische ruimtekromme rationaal is.

De volgende eigenschappen van R_3 zullen herhaaldelijk toepassing vinden.

Een kromme van den derden graad is bepaald door zes willekeurige punten.

Door een willekeurig punt der ruimte gaat één bisecante van R_3 en gaan drie osculatievlakken.

Een willekeurige rechte wordt door vier raaklijnen van R_3 gesneden.

Hieruit volgt, dat het raaklijnenoppervlak aan een kubische ruimtekromme van den vierden graad en de derde klasse is. Dus ook de doorsnijding van het raaklijnenoppervlak met een willekeurig vlak is van den vierden graad en de derde klasse. Van deze vlakke kromme komt elk punt ondubbelzinnig overeen met één punt van R_3, dus de doorsnede van het raaklijnenoppervlak van R_3 met een plat vlak is rationaal.

De kubische ruimtekromme wordt uit één harer punten geprojecteerd door een kegel van den tweeden graad.

Een quadratisch oppervlak heeft zes punten met R_3 gemeen; R_3 ligt dus geheel op dat oppervlak, indien de kromme er zeven punten mee gemeen heeft. En daar een quadratisch oppervlak door negen punten gegeven is, kan elke kubische ruimtekromme als basiskromme van een net van quadratische oppervlakken beschouwd worden.

§ **2.** Zij gegeven een kubische ruimtekromme R_3 en een vlak v, dat een willekeurigen stand heeft ten opzichte van R_3. In het vlak v, dat R_3 in de drie punten P_1, P_2 en P_3 snijdt, is een vaste kegelsnede K_2 aangenomen als basiskromme van een systeem van quadratische oppervlakken. M. a. w. van dit systeem zijn vijf punten gegeven en daar een quadratisch oppervlak door negen punten bepaald is, bestaat het stelsel uit ∞^4 tweede-graadsoppervlakken. Deze snijden op de kubische ruimtekromme ∞^4 zestallen punten in, waarvan elk zestal door vier punten bepaald is. Derhalve wordt door het beschouwde systeem quadratische oppervlakken op R_3 een involutie van den zesden graad en den vierden rang I_6^4 ingesneden.

Een exemplaar E_2 van het systeem quadratische oppervlakken door K_2 moge met R_3 het zestal punten S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 en S_6 gemeen hebben. Dit zestal is op tien verschillende wijzen in twee drietallen te verdeelen. Door één drietal van zulk een paar, bijv. door S_1, S_2 en S_3 denkt men zich een vlak s, dat v in een lijn l snijdt. Deze lijn l heeft met K_2 twee snijpunten A en B, waardoor een exemplaar O_2 van het door R_3 gedachte net quadratische oppervlakken bepaald is. De doorsnijdingskromme van O_2 en v is een kegelsnede door P_1, P_2, P_3, A en B, die K_2 bovendien in twee andere punten C en D snijdt. De beide beschouwde quadratische oppervlakken E_2 en O_2 hebben dus gemeen het coplanaire vijftal punten S_1, S_2, S_3, A en B; derhalve ligt de kegelsnede, door die vijf punten bepaald, op beide oppervlakken. Hun vierde-graadsdoorsnijding is dus uiteengevallen in twee kegelsneden; daaruit volgt, dat het andere vijftal punten, dat zij gemeen hebben en waarvan geen punt in het vlak s ligt, op de andere der beide kegelsneden moet liggen. Derhalve liggen de punten C en D met S_4, S_5 en S_6 in één vlak s'; m. a. w. CD of l' is de snijlijn van s' met v.

In het vlak v zal de lijn l' toegevoegd heeten aan l. Op deze wijze worden de lijnen van v in paren verdeeld, zoodanig dat men heeft:

Twee rechten van v zijn aan elkander toegevoegd, wanneer hun vier snijpunten met K_2 op één kegelsnede van het net door P_1, P_2 en P_3 liggen.

In Hoofdstuk I is afgeleid, dat deze lijnenverwantschap involutorisch en quadratisch is.

Om de beteekenis van zulk een lijnenpaar nog nader in het licht te stellen, toonen we aan, dat door de zes snijpunten van R_3 met twee resp. door l en l' gaande, overigens willekeurige vlakken een exemplaar van het systeem quadratische oppervlakken door K_2 gaat.

Immers, indien deze zes snijpunten zijn Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 en Q_6, kan door K_2 en vier dezer punten Q_1, Q_2, Q_3 en Q_4 een quadratisch oppervlak F_2 gedacht worden. Met het tweede-graadsoppervlak O_2 door R_3, A en B heeft dit oppervlak wederom twee kegelsneden gemeen. Veronderstelt men, dat Q_1, Q_2, Q_3 en l in één vlak liggen, dan ligt één dier kegelsneden in dit vlak en de andere moet dan door de gemeenschappelijke punten C, D en Q_4 der beide oppervlakken F_2 en O_2 gaan. De beide overige snijpunten van het oppervlak F_2 met R_3 liggen dus ook in het vlak (l', Q_4) en zijn derhalve de punten Q_5 en Q_6. M. a. w.:

Twee toegevoegde rechten bepalen ∞^2 vlakkenparen, waarvan de zes snijpunten met R_3 op een quadratisch oppervlak door K_2 liggen.

De verschillende veronderstellingen over het al of niet samenvallen van P_1, P_2 en P_3 en over de ligging van K_2 t. o. van die punten, zooals die in Hoofdstuk I behandeld zijn, hebben nu de volgende beteekenis verkregen.

Als P_1, P_2 en P_3 drie gescheiden punten zijn, is het vlak v een snijvlak van R_3; vallen twee dier punten samen, dan is v raakvlak en vallen de drie punten tezamen, dan is v osculatievlak van R_3.

Liggen één of meer dier punten op K_2, dan heeft die kegelsnede deze punten met R_3 gemeen.

§ 3. *Het vlak v is een snijvlak van de derde-graads-ruimtekromme en de vaste kegelsnede* K_2 *in v gaat niet door één der drie snijpunten van v en* R_3. (Zie Hoofdstuk I § 2).

Een quadratisch oppervlak door K_2 zal drievoudig raken aan de kubische ruimtekromme, indien de zes snijpunten twee aan twee samenvallen. In dat geval vallen de beide verbindingsvlakken van drie snijpunten samen en dus de toegevoegde lijnen l en l'. De lijnenverwantschap heeft vier dubbellijnen, dus:

Vier stelsels van ∞^1 quadratische oppervlakken door K_2 raken drievoudig aan R_3.

Van elk dier stelsels liggen de polen ten opzichte van het vlak v op een rechte lijn; men toont dit op de volgende wijze aan.

Indien d één der vier dubbellijnen is en L en M de snijpunten van d met K_2 zijn, is het mogelijk een quadratisch oppervlak O_2 door R_3, L en M te leggen. Elk exemplaar van den vlakkenbundel met as d bepaalt een quadratisch oppervlak F_2 door K_2, dat in de drie snijpunten van dat vlak aan R_3 raakt. De kegelsnede door die drie snijpunten en door L en M is identiek met de doorsnede van dat vlak met O_2, daar de beide kegelsneden vijf punten gemeen hebben. Daar F_2 en O_2 door het vlak v worden gesneden in twee kegelsneden, die elkaar in L en M aanraken, hebben alle quadratische oppervlakken door K_2, die drievoudig raken aan R_3 en waarvan de drie raakpunten coplanair zijn met de dubbelrechte d, als gemeenschappelijke raakvlakken in L en M de raakvlakken in die punten aan O_2. Ten opzichte van alle exemplaren van dat stelsel quadratische oppervlakken heeft d dus als gemeenschappelijke poollijn de doorsnede d' dier beide raakvlakken. En daar de pool van v voor elk exemplaar op de poollijn van d moet liggen, zijn de polen van v ten opzichte van alle exemplaren gelegen op d', dus op een rechte lijn, q. e. d.

Op elke dubbelrechte d der lijnenverwantschap in v steunen vier raaklijnen van R_3. Een vlak door zulk een dubbellijn en een daarop rustende raaklijn bepaalt op de boven omschreven wijze een aan R_3 drievoudig rakend quadratisch oppervlak door K_2, waarvan in dit geval twee raakpunten zijn samengevallen. Derhalve:

Er zijn zestien tweede-graadsoppervlakken in het stelsel, die met R_3 één vierpuntige en één tweepuntige aanraking hebben.

Het osculatievlak in een punt van R_3 snijdt v in een raaklijn der doorsnede D_4^3 van het raaklijnenoppervlak van R_3 met het vlak v. Op de toegevoegde rechte steunen vier raaklijnen. Hieruit volgt:

In elk punt van R_3 raken vier quadratische oppervlakken van het stelsel driepuntig, die elders een tweepuntige aanraking met R_3 hebben.

De raakvlakken in een punt van R_3 snijden het vlak v in een stralenbundel. De toegevoegde lijnen omhullen een kromme van de tweede klasse. Deze heeft met de doorsnijding D_4^3 van het raaklijnenoppervlak zes raaklijnen gemeen. Aan zes stralen van den waaier zijn dus lijnen toegevoegd, waardoor een osculatievlak van R_3 gelegd kan worden. Men besluit hieruit:

I n e l k p u n t v a n R_3 r a k e n z e s d o o r K_2 g a a n d e q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n t w e e p u n t i g, d i e e l d e r s e e n d r i e p u n t i g e a a n r a k i n g h e b b e n.

De aan een raaklijn r van D_4^3 toegevoegde lijn r' snijdt D_4^3 in vier punten. Snijdt de lijn r' de rechte r in het raakpunt met D_4^3, dan gaat door r' één raakvlak aan R_3, dat R_3 raakt in het osculatiepunt van het osculatievlak door r. Aan één punt van D_4^3, beschouwd als raakpunt van een rechte r kan men de vier snijpunten van de toegevoegde rechte r' met D_4^3 toevoegen. Aan één snijpunt (alle lijnen door dat punt) zijn dan de zes raakpunten toegevoegd van de zes raaklijnen aan D_4^3, die toegevoegd zijn aan waaierstralen (zie pag. 41). Op de rationale kromme D_4^3 is op deze wijze een verwantschap (4, 6) bepaald. Daar deze tien coïncidenties heeft, blijkt in verband met het voorgaande:

E r z ij n i n h e t s t e l s e l t i e n q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n m e t v ij f p u n t i g e a a n r a k i n g.

Indien de lijn r', toegevoegd aan een raaklijn r van D_4^3, zelve raaklijn aan die doorsnijdingskromme is, dan bepalen die lijnen twee osculatievlakken, dus een dubbel osculeerend quadratisch oppervlak van het systeem. D_4^3 wordt door de quadratische lijnenverwantschap getransformeerd in een kromme van de zesde klasse, die achttien raaklijnen met D_4^3 gemeen heeft. Aan één raaklijn van D_4^3 is involutorisch één raaklijn van de getransformeerde kromme toegevoegd. Dus aan een gemeenschappelijke raaklijn der beide krommen is gelijktijdig één raaklijn van D_4^3 en één raaklijn van de getransformeerde kromme toegevoegd. Derhalve, daar de toevoeging ondubbelzinnig is, moet aan een gemeenschappelijke raaklijn ook een gemeenschappelijke raaklijn zijn toegevoegd. De achttien gemeenschappelijke raaklijnen moeten dus in negen paren verdeeld worden, waaruit volgt:

In het stelsel zijn negen dubbel osculeerende quadratische oppervlakken.

§ **4.** *Het vlak v is een snijvlak van de derde-graadsruimtekromme en de vaste kegelsnede* K_2 *in v gaat door één der drie snijpunten* P_1 *van* R_3 *en v.* (Zie Hoofdstuk I, § 3).

Op R_3 wordt door het stelsel quadratische oppervlakken, dat K_2 als basiskromme heeft een involutie van den vijfden graad en den vierden rang ingesneden, want elk quadratisch oppervlak van het stelsel is bepaald door vier punten van R_3 en heeft behalve P_1, vijf snijpunten met de kubische ruimtekromme. Derhalve moeten de quadratische oppervlakken, die driemaal raken aan R_3, P_1 tot één der raakpunten hebben. Inderdaad gaan de dubbellijnen der quadratische lijnenverwantschap door P_1. Het aantal dezer dubbelrechten is twee.

Dus er zijn twee stelsels van ∞^1 quadratische oppervlakken van het stelsel, die driemaal raken aan R_3.

Daar elke dubbelrechte een unisecante van R_3 is, steunen buiten het snijpunt P_1 nog twee raaklijnen op de beide dubbellijnen.

Er zijn derhalve vier quadratische oppervlakken door K_2 die in P_1 raken en elders een vierpuntige aanraking hebben en twee oppervlakken van het stelsel, die in P_1 een vierpuntige aanraking hebben en elders raken.

Door een punt van R_3 gaat één osculatievlak. Dit snijdt het vlak v volgens een rechte l, waaraan in het algemeen één rechte l' door P_1 is toegevoegd. Hierop steunen buiten P_1 twee raaklijnen.

Er zijn derhalve twee quadratische oppervlakken, die in een bepaald punt Q van R_3 deze kromme driepuntig raken en bovendien R_3 buiten P_1 raken; en er is één quadratisch oppervlak, dat R_3 in Q osculeert en in P_1 raakt.

Aan den doorgang van het osculatievlak door P_1 zijn alle rechten door een zeker punt van P_2P_3 toegevoegd en er zijn dus oneindig vele quadratische oppervlakken van het stelsel, die R_3 in P_1 osculeeren en elders raken.

De doorgang van het raaklijnenoppervlak van R_3 met het vlak v is een kromme van den vierden graad en de derde klasse, die door P_1, P_2 en P_3 (de snijpunten van R_3 en v) gaat. Alle raakvlakken in een punt van R_3 snijden v in een waaier, waaraan in het algemeen toegevoegd zijn de stralenbundel met centrum P_1 en een waaier met centrum C op P_2P_3.

P_1 is een keerpunt van D_4^3. Dus door P_1 gaat één raaklijn van D_4^3, die in P_1 aan die kromme raakt. De waaier met het centrum C bevat drie raaklijnen aan D_4^3. Er zijn dus drie quadratische oppervlakken van het stelsel, die R_3 in één punt raken en elders buiten P_1 osculeeren en één exemplaar, dat R_3 in datzelfde punt raakt en in P_1 osculeert.

Aan de doorgangen van de raakvlakken van R_3 in P_2 is de lijn $P_1 P_3$ toegevoegd, die in het algemeen geen doorgang van een osculatievlak van R_3 zal zijn. Hetzelfde geldt voor de doorgangen der raakvlakken van R_3 in P_3, die aan $P_1 P_2$ zijn toegevoegd.

Indien men twee vlakken toegevoegd noemt, als zij zes punten op R_3 insnijden, die de snijpunten zijn van R_3 met een quadratisch oppervlak door K_2, dan zijn volgens het voorgaande aan één osculatievlak twee raakvlakken en aan drie vlakken van een bundel met een raaklijn van R_3 als as een osculatievlak toegevoegd. Op den doorgang D_4^3 van het raaklijnenoppervlak van R_3 met v kan men de raakpunten A der doorgangen van osculatievlakken toevoegen aan de snijpunten B van raaklijnen van R_3 in toegevoegde raakvlakken. Aan één punt A zijn dus twee punten B en aan één punt B drie punten A toegevoegd. Blijkbaar heeft men hier een puntenverwantschap (2,3) op een rationale kromme. Er zijn vijf coïncidenties, dus er zijn vijf osculatievlakken, die met het toegevoegde raakvlak de raaklijn aan R_3 gemeen hebben.

Er zijn dus vijf quadratische oppervlakken van het stelsel, die buiten P_1 een vijfpuntige aanraking met R_3 hebben.

Bovendien is een quadratisch oppervlak mogelijk met vijfpuntige aanraking in P_1, want van dat oppervlak zijn negen punten gegeven.

Dubbel osculeerende tweede-graadsoppervlakken hebben noodwendig één osculatiepunt in P_1. Aan den doorgang van het osculatievlak van R_3 in P_1 zijn alle stralen van een waaier toegevoegd, wiens centrum op $P_2 P_3$ ligt. Deze stralenbundel bevat drie raaklijnen van D_4^3, dus drie doorgangen van osculatievlakken van R_3 met v.

Er zijn dus drie dubbel osculeerende quadratische oppervlakken in het stelsel, (één osculatiepunt is voor elk der drie exemplaren het punt P_1).

§ 5. *Het vlak v is een snijvlak van de kubische ruimtekromme en de vaste kegelsnede K_2 in v gaat door twee snijpunten P_2 en P_3 van R_3 en v.* (Zie Hoofdstuk I § 4).

De quadratische oppervlakken van het stelsel hebben behalve de punten P_2 en P_3 nog vier snijpunten met R_3. En daar juist vier punten een exemplaar van het stelsel quadratische oppervlakken bepalen, wordt er door dat stelsel geen involutie ingesneden op R_3. Hieruit volgt reeds, dat verschillende gevallen van bijzondere aanraking van quadratische oppervlakken van het stelsel aan R_3 zich bij deze ligging der punten P_2 en P_3 niet zullen voordoen.

De quadratische lijnenverwantschap heeft slechts één dubbellijn, nl. de lijn $P_2 P_3$.

Er is derhalve één systeem van ∞^1 aan R_3 drievoudig rakende quadratische oppervlakken van het stelsel door K_2.

Deze oppervlakken hebben allen de raakpunten P_2 en P_3 gemeen.

Op de dubbelrechte $P_2 P_3$ steunen slechts de raaklijnen in P_2 en P_3, want $P_2 P_3$ is bisecante van R_3.

Er zijn dus twee quadratische oppervlakken met één vierpuntige aanraking (respectievelijk in P_2 en in P_3) en één tweepuntige aanraking aan R_3.

De volgende resultaten behoeven geen nadere toelichting.

In elk punt van R_3 raken twee quadratische oppervlakken van het stelsel, die respectievelijk in P_2 en in P_3 osculeeren.

In elk punt van R_3 osculeeren twee quadratische oppervlakken door K_2, welke R_3, achtereenvolgens in P_2 en in P_3, aanraken.

Er zijn twee, respectievelijk in P_2 en in P_3, vijfpuntig aan R_3 rakende quadratische oppervlakken in het stelsel.

In het stelsel is één dubbel, in de punten P_2 en P_3 aan R_3 osculeerend quadratisch oppervlak.

§ 6. *Het vlak v is een snijvlak van de kubische ruimtekromme en de vaste kegelsnede* K_2 *in v gaat door de drie snijpunten van* R_3 *en v.* (Zie Hoofdstuk I, § 5).

Daar de lijnenverwantschap in *v* onbepaald is, geeft dit geval geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen over meervoudig of veelpuntig aan R_3 rakende quadratische oppervlakken, die door K_2 gaan.

§ 7. *Het vlak v is een raakvlak van de kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede* K_2 *in v gaat door geen der snijpunten van* R_3 *en v.* (Zie Hoofdstuk I, § 6).

De quadratische lijnenverwantschap in v heeft twee eigenlijke dubbellijnen.

Derhalve zijn er twee stelsels van ∞^1 quadratische oppervlakken door K_2, die drievoudig raken aan R_3.

Indien P_1 het raakpunt van R_3 met v is en P_2 het snijpunt, dan is de lijn $P_1 P_2$ ook als een dubbelrechte van de verwantschap te beschouwen. Een vlak door $P_1 P_2$ moet dus ook drie punten P_1, P_2 en S op R_3 insnijden, die als raakpunten van een quadratisch oppervlak door K_2 met R_3 zijn te beschouwen. Inderdaad, een ontaard quadratisch oppervlak, bestaande uit het vlak v en het vlak, dat R_3 in S raakt en door P_2 gaat, is vooreerst een exemplaar van het stelsel en ten tweede vallen de zes snijpunten met R_3 twee aan twee samen. Er is een enkelvoudige oneindigheid van dergelijke ontaarde quadratische oppervlakken, behoorende tot het stelsel.

De doorgang van het raaklijnenoppervlak van R_3 met v is een kromme van den vierden graad en de derde klasse. Indien v echter raakvlak aan R_3 is, ligt één der lijnen van het raaklijnenoppervlak van R_3 geheel in v en is dus de doorgang uiteengevallen in de raaklijn $P_1 Q_3$ in P_1 en een kromme D_3^3 van den derden graad en de derde klasse. Met de twee eigenlijke dubbellijnen der lijnenverwantschap in v heeft deze kromme zes snijpunten, m. a. w. op deze beide dubbellijnen steunen, behalve $P_1 Q_3$, zes raaklijnen.

Er zijn dus zes quadratische oppervlakken van het stelsel, die één vierpuntige en één tweepuntige aanraking met R_3 hebben.

Als ontaarde quadratische oppervlakken met dezelfde bijzondere aanraking aan R_3 vindt men het vlak v, dubbel geteld en het vlak v met het osculatievlak van R_3 in P_2. Bovendien is het vlak v met elk raakvlak van R_3 in P_1 een ontaard quadratisch oppervlak van het stelsel, waarvan de zes snijpunten zijn samengevallen in één viervoudig en één tweevoudig snijpunt. Voor elk dezer ontaarde elementen ligt het viervoudig snijpunt als raakpunt en het tweevoudig snijpunt als snijpunt in een raakvlak van R_3, dat door een dubbelrechte en een daarop steunende raaklijn gelegd is, evenals voor de zes niet ontaarde quadratische oppervlakken met dezelfde bijzonderheid.

Door een punt van R_3 gaat één osculatievlak van R_3. Aan den doorgang van zulk een vlak met v is in het vlak v één rechte toegevoegd. Deze rechte heeft met D_3^3 drie snijpunten. Aan één osculatievlak zijn dus, behalve het vlak v, drie raakvlakken van R_3 toegevoegd, zoodanig dat het osculatievlak en elk der raakvlakken een quadratisch oppervlak van het stelsel bepalen, dat R_3 in een bepaald punt osculeert en elders raakt. Hieruit volgt dus:

In elk punt S van R_3 osculeeren drie quadratische oppervlakken aan R_3, die de kubische ruimtekromme elders raken.

Bovendien is het osculatievlak in S van R_3 met het vlak v als een ontaard quadratisch oppervlak te beschouwen, dat aan de voorwaarden voldoet.

D_3^3 is van de derde klasse en raakt aan $P_1 Q_3$ in P_1; dientengevolge is de getransformeerde kromme van de vijfde klasse. Vijf stralen van een waaier, n.l. de raaklijnen uit het waaiercentrum aan die kromme van de vijfde klasse, zijn aan raaklijnen van D_3^3 toegevoegd. Dit beteekent, dat van alle raakvlakken in een punt van R_3 vijf vlakken aan een osculatievlak van R_3 zijn toegevoegd. Dus:

In elk punt van R_3 raken vijf quadratische oppervlakken van het stelsel aan R_3, die de kubische ruimtekromme elders osculeeren.

Een raakvlak bepaalt op D_3^3 een punt M als snijpunt van de raaklijn van R_3 in dat raakvlak en een osculatievlak een punt N als raakpunt van dat vlak met D_3^3. De verwantschap der punten M en N, behoorende tot toegevoegde raak- en osculatievlakken, is volgens het vorige (3, 5). Er zijn acht coïncidenties, dus:

Het aantal aan R_3 vijfpuntig rakende quadratische oppervlakken van het stelsel is acht.

Een ontaard quadratisch oppervlak, dat aan de voorwaarde van vijfpuntige aanraking aan R_3 voldoet en tot het stelsel behoort, is het vlak v met het osculatievlak van R_3 in P_1.

In het stelsel quadratische oppervlakken, gaande door K_2, zal een dubbel osculeerend exemplaar voorkomen, indien aan een raaklijn van D_3^3 in de quadratische lijnenverwantschap in v weer een raaklijn van D_3^3 is toegevoegd. De kromme D_3^3 van de derde klasse wordt omgezet in een kromme van de vijfde klasse, want D_3^3 raakt in P_1 aan een zijde van den coördinatendriehoek, wat de klasse van de getransformeerde kromme met één vermindert. Deze heeft met de oorspronkelijke kromme vijftien raaklijnen gemeen. Daar de toevoeging der lijnen in het vlak v ondubbelzinnig is, moet een gemeenschappelijke raaklijn der beide toegevoegde krommen met een gemeenschappelijken raaklijn overeenstemmen. Een uitzondering vormt de lijn $P_1 Q_3$, die wel aan beide krommen raakt, maar toegevoegd is aan elk der lijnen van den waaier met centrum P_2, dus aan een raaklijn aan ieder der krommen. De overige veertien gemeenschappelijke raaklijnen zijn dus in zeven involutorisch aan elkander toegevoegde lijnenparen te verdeelen.

Derhalve zijn er zeven dubbel osculeerende quadratische oppervlakken in het systeem.

Aan de lijn $P_1 Q_3$ is de waaier P_2 toegevoegd. In P_2 heeft D_3^3 een keerpunt, dus er is slechts één raaklijn uit P_2 aan D_3^3 mogelijk. Deze raaklijn van D_3^3 is dus ook toegevoegd aan een raaklijn van D_3^3. Een ontaard dubbel osculeerend quadratisch oppervlak van het stelsel wordt hierdoor bepaald, bestaande uit het vlak v en het raakvlak aan R_3 in P_2, dat door $P_2 P_1$ gaat. Inderdaad zijn de zes snijpunten dezer beide vlakken met R_3 samengevallen in twee drievoudige.

§ 8. *Het vlak v is een raakvlak van de kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede K_2 in v gaat door één der snijpunten van R_3 en v.* (Zie Hoofdstuk I § 7).

1°. R_3 *raakt aan v in* P_1, K_2 *gaat door* P_2.

Daar de quadratische lijnenverwantschap twee dubbellijnen heeft, die beide door P_2 gaan, volgt hieruit:

Er zijn twee stelsels van ∞^1 quadratische oppervlakken, gaande door K_2, die in drie punten aan R_3 raken. Één van die drie punten is telkens P_2.

Daar de dubbelrechten unisecanten van R_3 zijn en het snijpunt met R_3 gemeen hebben, steunen buiten $P_1 Q_3$ nog twee raaklijnen van R_3 op elk der dubbelrechten, waarvan de raaklijn van R_3 in P_2 gemeenschappelijk is voor beide dubbellijnen.

Er zijn derhalve, de ontaarde quadratische oppervlakken van het systeem verder buiten beschouwing latend, vier exemplaren van het systeem quadratische oppervlakken door K_2, die één vier- en één tweepuntige aanraking aan R_3 hebben.

De snijlijn van v en een osculatievlak van R_3 is toegevoegd aan een lijn door P_2. Hierop steunt, behalve in P_2 en buiten $P_1 Q_3$, één raaklijn van R_3. Er is dus één quadratisch oppervlak van het stelsel, dat R_3 osculeert en elders buiten P_2 raakt en één dat R_3 in hetzelfde punt osculeert en in P_2 raakt.

Alle raakvlakken in een punt van R_3 snijden het vlak v in een waaier, die omgezet wordt in een waaier met centrum P_2 en een waaier, wiens centrum M op $P_1 Q_3$ ligt. Aan de doorsnijding D_3^3 van het raaklijnenoppervlak van R_3 met v raakt één straal van den waaier P_2 in P_2 zelve en drie stralen van den waaier M, n.l. $P_1 Q_3$ en twee andere lijnen. In een punt van R_3 raken dus twee quadratische oppervlakken aan R_3, die elders buiten P_2 aan R_3 osculeeren.

De meermalen afgeleide verwantschap op D_3^3, waarvan het aantal coïncidenties het aantal buiten P_2 vijfpuntig rakende quadratische oppervlakken van het stelsel aangeeft, wordt dus aangewezen door (1,2) en heeft drie coïncidenties.

Buiten P_2 raken derhalve drie quadratische oppervlakken van het stelsel vijfpuntig aan R_3, en daar van een quadratisch oppervlak, dat in P_2 vijfpuntig aan R_3 raakt en door K_2 gaat, negen punten gegeven zijn, is er bovendien één in P_2 vijfpuntig aan R_3 rakend quadratisch oppervlak van het stelsel.

Dubbel osculeerende quadratische oppervlakken hebben noodzakelijk één osculatiepunt in P_2. De doorgang met v van het osculatievlak aan R_3 in P_2 wordt omgezet in een stralenbundel, waarvan het centrum op $P_1 Q_3$ ligt. Deze heeft drie raaklijnen aan D_3^3, waaronder $P_1 Q_3$, dus:

Er zijn twee aan R_3 dubbel osculeerende quadratische oppervlakken in het stelsel.

2°. R_3 *raakt aan* v *in* P_1, K_2 *snijdt* $P_1 Q_3$ *in* P_1.

Alle quadratische oppervlakken door K_2 snijden de raaklijn $P_1 Q_3$ van R_3 in P_1 en derhalve is een oppervlak van het stelsel met bijzondere aanraking in P_1 noodzakelijk ontaard.

De lijnenverwantschap heeft één dubbelrechte, n.l. $P_1 P_2$. De ∞^1 quadratische oppervlakken, die drievoudig raken aan R_3, hebben dus één aanrakingspunt in P_1 en zijn ontaard in het vlak v en een raakvlak door P_2.

Daar de dubbelrechte bisecante is, steunt behalve $P_1 Q_3$ één raaklijn in P_2 op de dubbellijn. Een niet ontaard aan R_3 eens twee- en eens vierpuntig rakend quadratisch oppervlak van het stelsel is er dus niet.

De doorgang van een osculatievlak van R_3 wordt in het algemeen omgezet in een lijn door P_1. Behalve $P_1 Q_3$ steunen op deze rechte twee raaklijnen van R_3.

Er zijn dus twee quadratische oppervlakken van het stelsel, die in een bepaald punt aan R_3 osculeeren en buiten P_1 aan R_3 raken en één ontaard oppervlak, dat in datzelfde punt R_3 osculeert en in P_1 raakt.

De bundel van vlakken, die R_3 in één punt raken, snijden v in een waaier. Deze wordt omgezet in twee waaiers, achtereenvolgens met centra P_1 en een punt M van $P_1 P_2$. Uit P_1 kan men behalve $P_1 Q_3$, geen raaklijn aan D_3^3 trekken; uit M drie raaklijnen.

Er raken dus in een punt van R_3 drie quadratische oppervlakken van het stelsel, die buiten P_1 aan R_3 osculeeren.

Er volgt hieruit, volgens de meermalen aangewende afleiding:

B u i t e n P_1 r a k e n v ij f q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n v a n h e t s t e l s e l v ij f p u n t i g a a n R_3.

Een dubbel osculeerend quadratisch oppervlak door K_2 moet noodzakelijk één osculatiepunt in P_1 hebben. De doorgang met v van het osculatievlak in P_1 is $P_1 Q_3$. Deze wordt getransformeerd in een waaier met centrum P_2. Dit punt ligt op D_3^3 en op R_3; er is dus slechts één osculatievlak van

R_3 door dat punt mogelijk. Derhalve is er één dubbel osculeerend quadratisch oppervlak door K_2, dat ontaard is in het vlak v en het raakvlak in P_2 door P_1.

§ 9. *Het vlak v is een raakvlak van de kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede* K_2 *in v gaat door twee snijpunten van* R_3 *en v.* (Zie Hoofdstuk I, § 8.)

1°. R_3 *raakt het vlak v in* P_1. K_2 *gaat door* P_1 *en* P_2. $P_1 Q_3$ *is de raaklijn in v aan* R_3.

$P_1 Q_3$ is de eenige dubbellijn van de lijnenverwantschap in v, hieruit volgt:

Er zijn ∞^1 quadratische oppervlakken van het stelsel, die drie raakpunten met R_3 hebben. Zij hebben alle de raakpunten P_1 en P_2 gemeen en zijn ontaard in het vlak v en een raakvlak van R_3 door P_2.

Op $P_1 P_2$, bisecante van R_3, steunt in P_1 één raaklijn, nl. $P_1 Q_3$ en één raaklijn in P_2.

Er is derhalve één (in het vlak v en het osculatievlak in P_2) ontaard quadratisch oppervlak door K_2, dat R_3 eens tweepuntig (in P_1) en eens vierpuntig (in P_2) raakt. Het quadratisch oppervlak, dat R_3 in P_1 vierpuntig en in P_2 tweepuntig aanraakt, is ontaard in het vlak v, dubbel geteld.

Gemakkelijk blijken de volgende resultaten:

In elk punt van R_3 raakt één quadratisch oppervlak van het stelsel, dat elders, nl. in P_2. osculeert.

In elk punt van R_3 osculeert één quadratisch oppervlak, dat elders, nl. in P_2, aan R_3 raakt.

Er is één quadratisch oppervlak van het stelsel, dat R_3 vijfpuntig raakt, nl. in P_2.

Er is geen dubbel osculeerend tweede-graadsoppervlak van het stelsel.

2°. R_3 *raakt het vlak* v *in* P_1 *en heeft in dat punt als raaklijn* $P_1 Q_3$. K_2 *raakt* $P_1 Q_3$ *in* P_1.

Daar $P_1 Q_3$ o. a. een dubbellijn der lijnenverwantschap in v is en tegelijkertijd raaklijn aan R_3, zijn de vlakken door $P_1 Q_3$ raakvlakken aan R_3 en vallen dus van de drie snijpunten er twee samen. Derhalve zijn er ∞^1 quadratische oppervlakken van het stelsel, die R_3 vierpuntig in P_1 en elders tweepuntig raken.

Elke lijn door P_1 is als dubbellijn op te vatten. Dus zijn er ∞^2 quadratische oppervlakken van het stelsel, die in drie punten een tweepuntige aanraking aan R_3 hebben; al deze oppervlakken hebben het raakpunt P_1 aan R_3 gemeen.

Verder blijkt gemakkelijk:

In elk punt van R_3 raken ∞^1 quadratische oppervlakken van het stelsel, die in P_1 osculeeren. Van deze quadratische oppervlakken zijn nl. acht punten gegeven.

In ieder punt van R_3 osculeeren ∞^1 quadratische oppervlakken van het stelsel, die elders, nl. in P_1, raken.

In elk punt van R_3 osculeert één quadratisch oppervlak van het stelsel, dat ook in P_1 osculeert.

Er zijn ∞^1 quadratische oppervlakken van het stelsel, die in P_1 een vijfpuntige aanraking met R_3 hebben.

§ **10.** *Het vlak v is een raakvlak der kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede gaat door de drie gemeenschappelijke punten van* K_2 *en v.* (Zie Hoofdstuk I, § 9).

Over de meervoudig of veelpuntig aan R_3 rakende quadratische oppervlakken door K_2 zijn geen bijzondere opmerkingen te maken, daar de lijnenverwantschap in v geheel onbepaald is.

§ **11.** *Het vlak v is een osculatievlak van de kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede* K_2 *gaat niet door het osculatiepunt van* R_3 *en v.* (Zie Hoofdstuk I, § 10).

De doorgang met v van het raaklijnenoppervlak aan R_3 is in dit geval ontaard in een kromme van de tweede klasse, D_2^2, en de raaklijn $P_1\ Q_3$ aan R_3 in v dubbel geteld. Immers, daar v zelve osculatievlak aan R_3 is, kan men door een punt van v overigens nog slechts twee osculatievlakken aan R_3 leggen en zijn er dus door elk punt van v slechts twee raaklijnen aan die doorgangskromme D_2^2 mogelijk. D_2^2 moet in P_1 aan $P_1\,Q_3$ raken, omdat v het raakvlak in P_1 aan het raaklijnenoppervlak is.

De lijnenverwantschap heeft één eigenlijke dubbelrechte en bovendien is $P_1\,Q_3$ als dubbellijn te beschouwen. Hieruit volgt:

Er is één stelsel van ∞^1 quadratische oppervlakken door K_2, die in drie punten raken aan R_3.

De vlakken door $P_1 Q_3$ hebben met R_3 een raakpunt en een snijpunt gemeen en ieder punt van R_3 kan zulk een snijpunt zijn. Hieruit volgt, dat het raakvlak in een punt van R_3, dat door P_1 gaat, met het vlak v een ontaard quadratisch oppervlak vormt, dat met R_3 een vierpuntige aanraking in P_1 en een tweepuntige aanraking heeft. De dubbellijn $P_1 Q_3$ geeft derhalve aanleiding tot een stelsel van ∞^1 ontaarde quadratische oppervlakken, die in drie punten aan R_3 raken, maar van die drie raakpunten zijn twee samengevallen.

Op de eigenlijke dubbellijn steunen, buiten $P_1 Q_3$, twee raaklijnen aan R_3.

Er zijn dus twee niet ontaarde quadratische oppervlakken van het systeem, die R_3 vierpuntig en tevens tweepuntig raken.

Door een punt van R_3 gaat één osculatievlak. Aan de doorsnijding van dit vlak met v is in het algemeen één rechte toegevoegd, die twee snijpunten met D_2^2 heeft, waardoor dus twee raakvlakken van R_3 gaan. Bij een osculatievlak behooren dus twee raakvlakken van R_3, die elk met het eerstgenoemde vlak een oppervlak van den tweeden graad vormen, die zes punten met R_3 gemeen heeft.

In een punt van R_3 osculeeren derhalve twee quadratische oppervlakken door K_2, die R_3 elders, buiten P_1, aanraken.

De raakvlakken van de quadratische oppervlakken van het systeem, die in een gegeven punt aan R_3 raken, gaan allen door de raaklijnen aan R_3 in dat punt en snijden dus op v een waaier in. Deze wordt omgezet in een kegelsnede, die $P_1 Q_3$ in P_1 raakt, dus met D_2^2 de raaklijn in P_1 gemeen heeft. Behalve $P_1 Q_3$ hebben deze beide krommen van de tweede klasse nog twee gemeenschappelijke raaklijnen. Twee doorgangen van raakvlakken in een gegeven punt van R_3 met v zijn dus toegevoegd aan doorgangen van osculatievlakken aan R_3.

D u s i n e e n p u n t v a n R_3 r a k e n t w e e q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n v a n h e t s t e l s e l, d i e b u i t e n P_1 a a n R_3 o s c u l e e r e n.

Op D_2^2 zijn aan het raakpunt van den doorgang l van een osculatievlak toegevoegd de beide snijpunten van de lijn l', waarin l wordt omgezet. Aan zulk een snijpunt (alle lijnen door dat punt) zijn twee raakpunten van doorgangen van osculatievlakken toegevoegd. De vier coïncidenties van de verwantschap (2,2) op D_2^2 beteekenen:

E r z ij n v i e r q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n v a n h e t s t e l s e l, d i e b u i t e n P_1 e e n v ij f p u n t i g e a a n r a k i n g m e t R_3 h e b b e n.

D_2^2 raakt aan $P_1 Q_3$ in P_1 en wordt getransformeerd in een kromme van de tweede klasse. Immers, is de vergelijking van D_2^2

$$a \xi_1^2 + b \xi_3^2 + c \xi_1 \xi_2 + d \xi_1 \xi_3 = 0,$$

dan is de vergelijking der getransformeerde kromme

$$\frac{a}{\xi_1^2} + b \frac{(\xi_1 - \xi_3)^2}{\xi_1^4} - c \frac{(\xi_1 - \xi_3)\xi_3}{\xi_1^4} - c \frac{\xi_2}{\xi_1^3} + c \frac{1 + A_{12}}{\xi_1^3} +$$

$$+ d \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1^3} = 0.$$

Na herleiding van deze vergelijking blijkt ze dezelfde termen te hebben als de vergelijking van D_2^2. Deze kromme en haar getransformeerde hebben dus de raaklijn in P_1 gemeen. Daar ze bovendien nog twee raaklijnen gemeen hebben, heeft D_2^2 één paar aan elkander toegevoegde raaklijnen; dus:

Er is één niet ontaard quadratisch oppervlak door K_2, dat dubbel osculeert aan R_3.

§ **12**. *Het vlak v is een osculatievlak van de kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede* K_2 *snijdt de raaklijn van* R_3 *in v in het raakpunt* P_1. (Zie Hoofdstuk I, § 11).

In de door deze gegevens bepaalde lijnenverwantschap in v is de raaklijn $P_1 Q_3$ aan R_3 de eenige dubbellijn. Daar een niet ontaard quadratisch oppervlak niet tegelijkertijd door K_2 in v kan gaan en in het punt P_1 van K_2 aan v raken, zijn er geen quadratische oppervlakken van het systeem, die R_3 in drie punten raken. Evenmin zijn er quadratische oppervlakken van het systeem, die één vier- en één tweepuntige aanraking aan R_3 hebben.

Aan den doorgang van een osculatievlak, die een raaklijn aan D_2^2 is, is in het algemeen een lijn door P_1 toegevoegd. Daar P_1 een punt van D_2^2 is, steunt, behalve $P_1 Q_3$, nog één raaklijn op deze toegevoegde rechte. In een punt van R_3 osculeert dus één quadratisch oppervlak, dat elders raakt.

Aan den waaier, dien de raakvlakken van R_3 in één punt op v insnijden, zijn twee stralenbundels toegevoegd, n.l. één waaier met centrum P_1 en een tweede met centrum op $P_1 Q_3$. Immers elke straal van een waaier is toegevoegd aan een lijn door P_1, behalve de straal die door P_1 gaat, welke aan een stralenbundel is toegevoegd met middelpunt op $P_1 Q_3$. D_2^2 raakt aan $P_1 Q_3$ in P_1, dus behalve $P_1 Q_3$ is er één raaklijn aan D_2^2 toegevoegd aan een straal van een waaier.

Dit beteekent, dat er één quadratisch oppervlak door K_2 in een punt van R_3 raakt, dat elders aan R_3 osculeert.

De meermalen aangehaalde verwantschap op D_2^2 is dus een (1, 1) met twee coïncidenties.

Derhalve zijn er twee quadratische oppervlakken door K_2 die een vijfpuntige aanraking aan R_3 hebben.

Daar alle quadratische oppervlakken door K_2 het punt P_1 van R_3 bevatten, zou een dubbel aan R_3 osculeerend oppervlak van het systeem één osculatiepunt in P_1 moeten hebben. Indien het quadratisch oppervlak niet ontaardt, is dit onmogelijk. Tweemaal osculeerende quadratische oppervlakken bevat het systeem dus niet.

§ **13.** *Het vlak v is een osculatievlak der kubische ruimtekromme. De raaklijn* $P_1 Q_3$ *van* R_3 *in v raakt aan de vaste kegelsnede* K_2 *in v* (zie Hoofdstuk I § 12).

Dubbelrechte der lijnenverwantschap in *v* is P_1Q_3. Derhalve zijn er ∞^1 quadratische oppervlakken door K_2, die driemaal raken aan R_3, maar twee raakpunten zijn van al deze tweedegraadsoppervlakken samengevallen in P_1, zoodat men heeft:

∞^1 quadratische oppervlakken van het systeem hebben één vierpuntige en één tweepuntige aanraking.

Daar een quadratisch oppervlak met R_3 zes punten gemeen heeft en elk exemplaar van het systeem in P_1 twee punten met R_3 gemeen heeft, is geen vijfpuntig rakend quadratisch oppervlak door K_2 mogelijk, tenzij dat raakpunt in P_1 valt. Omdat een vijfpuntige aanraking in P_1 tezamen met K_2 acht punten van het quadratisch oppervlak geeft, heeft men:

Er zijn ∞^1 quadratische oppervlakken, die in P_1 vijfpuntig raken aan R_3 en door K_2 gaan.

Op dezelfde wijze vindt men:

In elk punt van R_3 osculeeren ∞^1 quadratische oppervlakken van het systeem, die in P_1 aan R_3 raken.

In elk punt van R_3 raken ∞^1 quadratische oppervlakken van het systeem, die in P_1 aan R_3 osculeeren.

In elk punt van R_3 osculeert één quadratisch oppervlak door K_2, dat bovendien in P_1 aan R_3 osculeert.

§ **14.** *Het vlak v is een osculatievlak der kubische ruimtekromme. De vaste kegelsnede* K_2 *in v heeft een driepuntige aanraking aan* R_3. (Zie Hoofdstuk I § 13).

Daar in dit geval de lijnenverwantschap in *v* geheel onbepaald wordt, zijn er geen bijzondere opmerkingen te maken over meervoudig of veelpuntig aan R_3 rakende quadratische oppervlakken door K_2.

HOOFDSTUK III.

Quadratische oppervlakken van een stelsel met drie of minder graden van vrijheid, die meervoudig of veelpuntig raken aan een kubische ruimtekromme.

---

§ 1. Indien de quadratische oppervlakken, die de kubische ruimtekromme in zes gescheiden of ten deele samenvallende punten snijden, door een vaste kegelsnede K_2 in een gegeven vlak v gaan en bovendien door een vast punt P der ruimte, dan behooren die oppervlakken tot een stelsel, waarvan zes punten gegeven zijn. Derhalve bestaat dit stelsel uit ∞^3 exemplaren. Drie punten op de kubische ruimtekromme zullen dus in het algemeen een quadratisch oppervlak van het stelsel bepalen. Het door die drie punten gaande vlak snijdt het vlak v in een rechte lijn l. De drie overige snijpunten van dit tweede-graadsoppervlak met R_3 en daarmede het vlak door die drie punten, zijn volkomen bepaald. Dit vlak moet het vlak v snijden in de lijn l', die volgens de in Hoofdstuk I bestudeerde quadratische lijnenverwantschap aan l is toegevoegd. Immers in Hoofdstuk II, § 2 is afgeleid, dat elk paar puntendrietallen, waarin de zes snijpunten met R_3 van een quadratisch oppervlak door K_2 te verdeelen zijn, een vlakkenpaar bepaalt, dat v in twee toegevoegde lijnen snijdt.

M. a. w. zal met een vlak door l één bepaald vlak door l' overeenstemmen, zoodanig dat de zes snijpunten met R_3 van dat vlakkenpaar op een quadratisch oppervlak van het beschouwde stelsel liggen.

In het algemeen worden de vlakken der ruimte op deze wijze één aan één aan elkander toegevoegd. Het vlak v zal echter tezamen met elk vlak door het vaste punt P een ontaard regelvlak van het systeem vormen. Is dus omgekeerd in het algemeen elk vlak door P aan v toegevoegd, voor een enkelvoudige oneindigheid van vlakken door P wordt het toegevoegde vlak onbepaald.

Immers indien in een vlak door P een kegelsnede ligt, die door de drie snijpunten met R_3, de beide snijpunten met K_2 en door P gaat, dan kan door deze kegelsnede en K_2 een bundel quadratische oppervlakken van het stelsel gelegd worden. Want K_2, die geheel op het quadratisch oppervlak ligt, bepaalt vijf punten van het oppervlak en een andere kegelsnede, die K_2 in twee punten snijdt en ook op het oppervlak moet liggen, geeft drie nieuwe punten. Dus de beide kegelsneden tezamen geven de acht punten, die den bundel bepalen.

De doorsneden met v van deze vlakken door P, die een kegelsnede bevatten, gaande door de drie snijpunten met R_3, de twee snijpunten met K_2 en door P, zijn gemakkelijk op te sporen. Daartoe denkt men zich den bundel quadratische oppervlakken, die door R_3 (zeven punten) en P gelegd kan worden. Alle exemplaren van dezen bundel bevatten drie punten van de bisecante door P, hebben dus deze lijn gemeen. De kegelsneden, waarin de oppervlakken van den bundel het vlak v snijden, bevatten dus alle de snijpunten P_1, P_2 en P_3 van R_3 en het snijpunt S van deze bisecante; derhalve zijn deze kegelsneden in een bundel vereenigd. Elk exemplaar E_2 hiervan behoort tot het net van kegelsneden door P_1, P_2 en P_3, bepaalt dus met K_2 in v drie paar toegevoegde lijnen. Zij zulk een lijnenpaar (m, m'), dan kan men door één dier lijnen, m, en door P een vlak leggen, dat het door E_2 gaande exemplaar van den door R_3 en P bepaalden bundel quadratische oppervlakken zal snijden in een kegelsnede, die gaat door de beide snijpunten van m met K_2, door P en door drie punten van R_3. Het vlak (m, P) is dus een vlak met de verlangde eigenschap.

De bundel van kegelsneden met de basispunten P_1, P_2, P_3 en S bepaalt een enkelvoudige oneindigheid van lijnenparen der quadratische lijnenverwantschap in het vlak v. En elk vlak door zulk een lijn m en door P heeft dus de eigenschap een kegelsnede door de verlangde zes punten te bevatten. De exemplaren van den door deze kegelsnede en K_2 bepaalden bundel quadratische oppervlakken hebben nog drie snijpunten met R_3 en de vlakken door die puntendrietallen gaan door de toegevoegde lijn m'.

We komen dus tot de volgende slotsom.

De toevoeging der vlakken, zooals omschreven is op pag. 64, is ondubbelzinnig, met uitzondering van de vlakken, die door een rechte in v van het type m gaan, welke vlakken alle aan het vlak (m', P) toegevoegd zijn, terwijl het vlak (m, P) in het bijzonder aan alle vlakken van den bundel met as m' is toegevoegd.

In de punteninvolutie van den zesden graad en den derden rang, welke de quadratische oppervlakken door K_2 en P op R_3 insnijden, zijn de drietallen snijpunten van vlakken van het type (m, P) dus neutrale drietallen.

Ter bepaling van de omhulde der vlakken (m, P) onderzoeken we de omhulde der lijnen m in het vlak v. Lijnen van het type m zijn, zooals is afgeleid, de gemeenschappelijke koorden van de vaste kegelsnede K_2,

$$K_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a_3x_1x_2 + 2a_1x_2x_3 + 2a_2x_3x_1 = 0$$

en van de exemplaren van een bundel kegelsneden in het vlak v, die tot basispunten heeft de drie snijpunten P_1, P_2 en P_3 der kubische ruimtekromme (als hoekpunten van den fundamentaaldriehoek aangenomen) en het snijpunt van de bisecante van R_3 door P.

Ter wille van de symmetrie der formules zullen we dit laatste snijpunt S geven als vierde snijpunt van twee bepaalde exemplaren van het net van kegelsneden door de drie hoekpunten van den fundamentaaldriehoek, dus S volgt uit

$$\left.\begin{aligned} p_3x_1x_2 + p_1x_2x_3 + p_2x_3x_1 = 0 \\ q_3x_1x_2 + q_1x_2x_3 + q_2x_3x_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

en de bundel van kegelsneden door P_1, P_2, P_3 en S is gegeven door:

$$(p_3 + \lambda q_3)x_1x_2 + (p_1 + \lambda q_1)x_2x_3 + (p_2 + \lambda q_2)x_3x_1 = 0.$$

Indien m en m' twee der bedoelde toegevoegde rechten zijn, dan is

$$K_2 - MM' = 0$$

een exemplaar van dezen bundel.

Tusschen de lijncoördinaten van m en m' bestaan dus de volgende betrekkingen:

$$\xi_1 \eta_1 = 1$$
$$\xi_2 \eta_2 = 1$$
$$\xi_3 \eta_3 = 1$$
$$2a_3 - \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = \mu(p_3 + \lambda q_3)$$
$$2a_2 - \xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1 = \mu(p_2 + \lambda q_2)$$
$$2a_1 - \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = \mu(p_1 + \lambda q_1)$$

waaruit drie betrekkingen volgen tusschen de lijncoördinaten van een rechte van het type m

$$2a_3 - \frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\xi_1} = \mu p_3 + \mu\lambda q_3$$
$$2a_2 - \frac{\xi_1}{\xi_3} - \frac{\xi_3}{\xi_1} = \mu p_2 + \mu\lambda q_2$$
$$2a_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} - \frac{\xi_3}{\xi_2} = \mu p_1 + \mu\lambda q_1$$

Door eliminatie der beide factoren μ en $\mu\lambda$ blijken de lijncoördinaten van een lijn van het type m te moeten voldoen aan

$$\begin{vmatrix} 2a_3 - \frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\xi_1} & p_3 & q_3 \\ 2a_2 - \frac{\xi_1}{\xi_3} - \frac{\xi_3}{\xi_1} & p_2 & q_2 \\ 2a_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} - \frac{\xi_3}{\xi_2} & p_1 & q_1 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$2\xi_1\xi_2\xi_3 \begin{vmatrix} a_3 & p_3 & q_3 \\ a_2 & p_2 & q_2 \\ a_1 & p_1 & q_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1^2\xi_3 + \xi_2^2\xi_3 & p_3 & q_3 \\ \xi_1^2\xi_2 + \xi_2\xi_3^2 & p_2 & q_2 \\ \xi_1\xi_2^2 + \xi_1\xi_3^2 & p_1 & q_1 \end{vmatrix} = 0.$$

of

$$\Sigma\, r_1\,(\xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\, a_1\, \xi_2\, \xi_3)\, \xi_1 = 0$$

waarin

$$r_1 = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}$$

In loopende lijncoördinaten is dit de vergelijking van een kromme van de derde klasse, die raakt aan de zijden van den fundamentaaldriehoek en bovendien SP_1, SP_2 en SP_3 tot raaklijnen heeft.

De kromme heeft geen dubbelraaklijn en is dus van den zesden graad.

Derhalve omhullen de vlakken (m, P) een kegel van de derde klasse en den zesden graad. De vlakken door de bisecante PS en resp. door P_1, P_2 en P_3 zijn raakvlakken van dezen kegel.

§ 2. We gaan thans over tot het bewijs der volgende zeven stellingen.

1. Zes exemplaren van het stelsel quadratische oppervlakken, gaande door een vaste kegelsnede K_2 in een vlak v en door een punt P buiten dat vlak, die R_3 in een gegeven punt A raken, raken R_3 bovendien elders.

Bewijs.

De vlakkenbundel, die de raaklijn r aan R_3 in A tot as heeft, snijdt op v een waaier in. Elke straal hiervan bepaalt ondubbelzinnig een vlak door de raaklijn r en dit vlak snijdt R_3, behalve in A, dubbel geteld, nog in één punt B. Door B gaat één exemplaar van den bundel quadratische oppervlakken, die K_2 bevatten, door P gaan en aan R_3 in A raken. Dit exemplaar heeft met R_3 nog drie snijpunten C, die elk het bedoelde quadratische oppervlak bepaald zouden hebben. Door r en elk der punten C kan een vlak gelegd worden, dat v in een straal c van den waaier snijdt. Voegt men den straal, die de snijlijn is der vlakken $(r$, B) en v, aan de drie stralen c toe, dan is op deze wijze in den waaier een verwantschap (3, 3) bepaald. Deze heeft zes coïncidenties en elke coïncidentie heeft de beteekenis, dat twee der vier snijpunten van de R_3 in A rakende quadratische oppervlakken zijn samengevallen. Derhalve raken zes exemplaren van het beschouwde stelsel quadratische oppervlakken, die R_3 in A raken, bovendien de kubische ruimtekromme nog elders.

2. Twaalf quadratische oppervlakken door K_2 en P raken R_3 vierpuntig.

Bewijs.

De doorsnijdingskromme van het raaklijnenoppervlak van R_3 met v zij D, en het punt G op D zij het snijpunt van de raaklijn r in A van R_3. Volgens de voorgaande stelling zijn er zes quadratische oppervlakken van het stelsel, die R_3 in A en bovendien elders raken. Men denkt zich in de zes aldus bepaalde raakpunten de raaklijnen getrokken aan R_3 en voegt de snijpunten dier zes raaklijnen met D toe aan het punt G. Daar aan elk punt op D op deze wijze zes punten toegevoegd zijn, is op D een puntenverwantschap (6, 6) met twaalf coïncidenties bepaald. Het aantal dezer dubbelelementen geeft aan, dat van twaalf tweemaal aan R_3 rakende exemplaren van het stelsel quadratische oppervlakken de beide raakpunten tezamen zijn gevallen of m. a. w. dat twaalf quadratische oppervlakken van het stelsel vierpuntig raken.

3. Er zijn zes quadratische oppervlakken door K_2 in v, een punt P der ruimte en twee punten G en H van R_3, die R_3 elders raken.

Bewijs.

De kegelsnede K_2 en de punten P, G en H zijn tezamen gelijkwaardig met acht grondpunten van een bundel quadratische oppervlakken. Een punt A van de kubische ruimtekromme bepaalt dus een exemplaar E_2 van den bundel, dat bovendien nog drie snijpunten met R_3 heeft. Voegt men op D (doorsnijdingskromme van het raaklijnenoppervlak aan R_3 met v) het snijpunt van de raaklijn van R_3 in A toe aan de snijpunten der raaklijnen van R_3 in de overige drie snijpunten van E_2 en R_3, dan ontstaat op D een verwantschap (3, 3), met zes coïncidenties. Zes quadratische oppervlakken van den bundel raken R_3 dus elders dan in G of H.

4. Er zijn negen quadratische oppervlakken door K_2 in v, een punt P der ruimte en een punt G van R_3, die de kubische ruimtekromme elders driepuntig raken.

Bewijs.

Door K_2, P en G is een net van quadratische oppervlakken bepaald. In een punt A van R_3 raakt één exemplaar van het net. dat nog drie snijpunten B, B', B'' met R_3 heeft. Op de kromme D in v worden aan het snijpunt van de raaklijn van R_3 in A toegevoegd de snijpunten der raaklijnen in B, B' en B'' aan R_3. Volgens de vorige stelling gaan door B zes quadratische oppervlakken, die elders raken. De op deze wijze op D bepaalde verwantschap wordt dus voorgesteld door (3. 6). Het is duidelijk, dat de negen coïncidenties beteekenen, dat negen quadratische oppervlakken van het net elders dan in A driepuntig raken.

5. Er zijn zes en dertig quadratische oppervlakken door K_2 en door een punt P der ruimte, die de kubische ruimtekrommme eens tweepuntig en elders driepuntig raken.

Bewijs.

Van het stelsel quadratische oppervlakken door K_2 en P zijn zes punten gegeven en een exemplaar daarvan is dus door drie punten bepaald. In elk punt van R_3 is dus een quadratisch oppervlak, behoorende tot het stelsel, dat osculeert aan de kubische ruimtekromme. Op deze wijze beschouwd, bepaalt elk osculatievlak, en ook elke doorgang van zulk een vlak met v een exemplaar van het stelsel. Deze doorgangen der osculatievlakken vormen het raaklijnenstelsel der snijkromme D van het raaklijnenoppervlak van R_3 met het vlak v. Daar elk quadratisch oppervlak van het beschouwde stelsel een oppervlak is, dat door K_2 gaat, moet volgens Hoofdstuk II het verbindingsvlak der overige drie snijpunten van zulk een osculeerend quadratisch oppervlak het vlak v snijden in de lijn, die in de quadratische lijnenverwantschap toegevoegd is aan den doorgang van het osculatievlak van R_3. Voor het algemeene geval is de doorgang van het raaklijnenoppervlak van de derde klasse en den vierden graad, D_4^3, dus zullen de lijnen, die toegevoegd zijn aan de raaklijnen dier kromme, een kromme van de zesde klasse D^6 omhullen. Elke der raaklijnen aan D^6 zal gesneden worden door vier raaklijnen van R_3. Door zulk een raaklijn gaat één vlak ε, dat met het osculatievlak ω door de toegevoegde lijn zes snijpunten op R_3 bepaalt, waardoor een quadratisch oppervlak van het systeem mogelijk is. We noemen de vlakken ε en ω toegevoegde vlakken.

We onderzoeken thans de verwantschap op D_4^3, waarbij aan de snijpunten met een raaklijn aan D^6 worden toegevoegd de snijpunten met de lijnen, die raken aan R_3 in de snijpunten van het vlak ε door diezelfde raaklijn aan D^6. Door een punt P van D_4^3 gaan zes raaklijnen van D^6, waardoor gezamenlijk zes vlakken gaan, die ieder aan een osculatievlak van R_3 zijn toegevoegd. Deze zes vlakken hebben achttien snijpunten met R_3 en de raaklijnen van R_3 in die punten bepalen op R_3 achttien punten Q, toegevoegd aan een punt P. Door een punt Q van D_4^3 gaat één raaklijn van R_3.

Het raakpunt op R_3 zij G. Volgens de voorgaande stelling gaan door G negen quadratische oppervlakken van het stelsel, die R_3 elders driepuntig raken; m. a. w. door G gaan negen vlakken, die op de boven omschreven wijze toegevoegd zijn aan een osculatievlak. Op de negen doorgangen dier vlakken steunen zes en dertig raaklijnen van R_3 of aan een punt Q zijn zes en dertig punten P toegevoegd. De onderzochte verwantschap op D_4^3 wordt dus uitgedrukt door (18, 36) met vier en vijftig coïncidenties.

Zulk een coïncidentie heeft in het algemeen de beteekenis, dat een vlak, dat toegevoegd is aan een osculatievlak, een raaklijn bevat, dus een raakvlak is. Een uitzondering vormen de achttien raaklijnen, die uit de snijpunten van R_3 en v aan D^6 te trekken zijn, daar in die snijpunten op de raaklijn aan D^6 een raaklijn van R_3 steunt, zonder dat in het algemeen het aan een osculatievlak toegevoegde vlak door één dier lijnen die raaklijn van R_3 zal bevatten.

Er zijn dus $54 - 18 = 36$ quadratische oppervlakken van het beschouwde stelsel, die R_3 tweepuntig en elders driepuntig raken.

6. T w a a l f q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n d o o r K_2 e n t w e e p u n t e n d e r r u i m t e o s c u l e e r e n a a n d e k u b i s c h e r u i m t e k r o m m e.

Bewijs.

De quadratische oppervlakken door K_2 en twee punten der ruimte vormen een net. De exemplaren van dit net, die door een vast punt van R_3 gaan, hebben bovendien nog vijf snijpunten met R_3, zoodanig dat één dier punten de vier overige bepaalt. Op R_3 wordt op deze wijze een verwantschap (4, 4) met acht coïncidenties vastgelegd. Dit beteekent, dat acht exemplaren van het net die bovendien door een gegeven punt S van R_3 gaan, aan R_3 elders raken in een punt T_n ($n = 1, 2 \ldots . 8$).

In elk punt T van R_3 raakt één exemplaar van het net aan die kromme. Dit exemplaar heeft bovendien vier snijpunten S met R_3.

Tusschen de punten S en T bestaat op R_3 dus een verwantschap (8, 4). De twaalf coïncidenties hebben blijkbaar de beteekenis, dat er twaalf quadratische oppervlakken van het net osculeeren aan R_3.

7. Tien quadratische oppervlakken door K_2 en drie punten der ruimte raken aan R_3.

Bewijs.

Een exemplaar van den door K_2 en drie punten der ruimte bepaalden bundel quadratische oppervlakken is door één punt van R_3 bepaald en heeft bovendien nog vijf snijpunten met R_3. Elk dezer punten bepaalt ook weer dat exemplaar van den bundel, zoodat op R_3 een puntenverwantschap (5, 5) is vastgelegd. De tien coïncidenties beteekenen, dat tien quadratische oppervlakken van den bundel twee samenvallende snijpunten of raakpunten op R_3 hebben.

Opmerking.

Hoewel de resultaten van dit hoofdstuk door de methode van STURM (Hoofdstuk IV) ook afgeleid worden, scheen het toch niet zonder belang deze stellingen nog langs anderen weg te bewijzen. Het is hier weliswaar evenmin gelukt bij bijzondere veronderstellingen over R_3 ten opzichte van v het aantal niet ontaarde gevallen met zekerheid vast te stellen, maar dat de graad en de klasse van den doorgang met v van het raaklijnenoppervlak aan R_3 invloed hebben, komt met deze bewijsmethode duidelijk te voorschijn (zie o. a. stelling n^0. 5).

HOOFDSTUK IV.

Methode van Sturm.

§ 1. Ter opsporing van de aantallen quadratische oppervlakken van een systeem met een gegeven aantal graden van vrijheid, die meervoudig of veelpuntig raken aan een kubische ruimtekromme, maakt STURM gebruik van eigenschappen van involuties op een rationale ruimtekromme.

Vooraf mogen de bewijzen gaan van een paar minder bekende eigenschappen, die veelvuldig toepassing zullen vinden.

I_n^k zal beteekenen een involutie van den n^{den} graad en k^{den} rang, zoodanig dat k punten een groep van n punten bepalen.

Eigenschap I.

In een involutie I_n^k op een rationalen drager zijn $(k+1)(n-k)$ groepen met een $(k+1)$voudig element.

Bewijs.

Nemen we een groep, die bepaald is door een k-voudig punt. Aan dat punt zijn $(n-k)$ enkelvoudige punten toegevoegd, die tot dezelfde groep behooren. Bij elk enkelvoudig punt P kan men $(k - 1)$ punten kiezen en bepaalt daardoor, behalve P, een groep van $(n - 1)$ punten. M. a. w. een enkelvoudig punt legt op den rationalen drager een involutie I^{k-1}_{n-1} vast. Is de te bewijzen eigenschap juist, dan heeft deze $k(n - k)$ groepen met een k-voudig punt.

Aldus zijn aan een k-voudig punt $(n - k)$ enkelvoudige punten toegevoegd en aan een enkelvoudig punt $k(n - k)$ k-voudige punten. Deze verwantschap $\{(n - k), k(n - k)\}$ heeft $(k + 1)(n - k)$ coïncidenties of $(k + 1)$-voudige punten.

Is deze eigenschap derhalve juist voor $(k - 1)$ en $(n - 1)$, dan is zij ook waar voor k en n. En daar $k = 1$ en $n = 2$ de bekende stelling geeft, dat een involutie twee dubbelpunten heeft, is de eigenschap bewezen.

Eigenschap II.

a) *Een involutie* I^k_n *bevat* $(t + 1)(k - t + 1)(n - k)(n - k - 1)$ *groepen met een* $(t + 1)$*-voudig en een* $(k - t + 1)$*-voudig element, wanneer* $\frac{k}{2} \leqq t < k$.

b) *Is k even, dan zijn er* $\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2} + 1\right)^2 (n - k) \times (n - k - 1)$ *groepen met twee* $\left(\frac{k}{2} + 1\right)$*-voudige elementen.*

Bewijs.

Evenals een enkelvoudig punt op een rationalen drager van een involutie I^k_n een tweede involutie I^{k-1}_{n-1} bepaalt, zal een $(k - t)$-voudig punt op denzelfden drager een involutie I^t_{n-k+t} vastleggen.

Volgens eigenschap I bevat deze involutie $(t + 1)(n - k)$

groepen met een $(t+1)$-voudig punt. Deze groepen van $(n-k+t)$ punten bevatten ieder $(n-k-1)$ enkelvoudige punten.

We zullen aan het $(k-t)$-voudig punt toevoegen de $(n-k-1)(t+1)(n-k)$enkelvoudige punten X_1, die in alle groepen van de involutie I^t_{n-k+t} met een $(t+1)$-voudig punt tezamen voorkomen.

Om op te sporen, hoeveel $(k-t)$-voudige punten in deze verwantschap aan een enkelvoudig punt X_1 zijn toegevoegd, stellen we dit aantal symbolisch voor door $Z^{k-1,\,t}_{n-1}$. De beteekenis van dit symbool is, dat in de involutie I^{k-1}_{n-1}, die het punt X_1 op den drager bepaalt, er $Z^{k-1,\,t}_{n-1}$ groepen voorkomen met een $(t+1)$-voudig en een $(k-t)$-voudig element. Want alleen de $(k-t)$-voudige punten, die in een dergelijke groep voorkomen, zijn in de onderzochte verwantschap aan X_1 toegevoegd.

Met dezelfde symbolische schrijfwijze is dan in de involutie I^k_n het aantal groepen met een $(t+1)$-voudig en een $(k-t+1)$-voudig element uitgedrukt door $Z^{k,\,t}_n$.

En daar het aantal van deze bijzondere groepen in I^k_n gevonden wordt door het aantal coïncidenties van de verwantschap der punten X_1, en der $(k-t)$-voudige punten op den drager van I^k_n, heeft men de volgende betrekkingen

$$Z^{k,\,t}_n = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z^{k-1,\,t}_{n-1},$$

$$Z^{k-1,\,t}_{n-1} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z^{k-2,\,t}_{n-2},$$

— — — — — — — — — — — — —

$$Z^{t+1,\,t}_{n-k+t+1} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z^{t,\,t}_{n-k+t}.$$

Hieruit volgt, door optelling

$$Z_n^{k,\,t} = (t+1)\,(k-t)\,(n-k)\,(n-k-1) + Z^{t,\,t}_{n-k+t}\,.$$

$Z^{t,\,t}_{n-k+t}$ is het aantal groepen, dat een $(t+1)$-voudig en een enkelvoudig element hebben in de involutie I^t_{n-k+t}. In deze involutie zijn volgens „Eigenschap I" $(t+1)\,(n-k)$ groepen met een $(t+1)$-voudig element en $(n-k-1)$ enkelvoudige elementen, dus het gezochte aantal groepen met één $(t+1)$voudig en één enkelvoudig punt is

$$Z^{t,\,t}_{n-k+t} = (t+1)\,(n-k)\,(n-k-1)$$

Dus is ten slotte

$$Z_n^{k,\,t} = (t+1)\,(k-t+1)\;n-k)\,(n-k-1).$$

Is

$$t+1 = k-t+1$$

of

$$t = \frac{k}{2},$$

dan is zoowel het $(t+1)$-voudig als het $(k-t+1)$-voudig punt een $(t+1)$-voudig element, en is dus het totaal aantal:

$$Z_n^{k,\,\frac{k}{2}-1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)^2 (n-k)\,(n-k-1).$$

Iedere groep bevat dan twee $\left(\frac{k}{2}+1\right)$-voudige groepen.

§ **2.** Het stelsel quadratische oppervlakken, dat door een vaste kegelsnede K_2 gaat, snijdt op de kubische ruimtekromme R_3 een involutie I_6^4 in. Indien het vlak v, waarin

K_2 ligt, niet een snijvlak, maar een raak- of osculatievlak aan R_3 is en er derhalve onder de quadratische oppervlakken door K_2 met bijzondere aanraking aan R_3 ontaardingen voorkomen, zullen de eigenschappen I en II niet kunnen dienen om de aantallen der ontaardingen af te zonderen van de aantallen der niet ontaarde quadratische oppervlakken.

Zij het vlak v een snijvlak van R_3 *terwijl geen der snijpunten van* R_3 *en v op de vaste kegelsnede* K_2 *ligt.*

De involutie I_6^4, die door alle quadratische oppervlakken door K_2 op R_3 ingesneden wordt, heeft volgens eigenschap I $(k+1)(n-k)=10$ groepen met een $(k+1)$- of vijfvoudig punt. Dus:

Het systeem quadratische oppervlakken door K_2 heeft tien exemplaren met vijfpuntige aanraking.

Alle kwadratische oppervlakken, die R_3 in een bepaald punt raken, hebben buiten het raakpunt nog vier snijpunten met R_3 en een exemplaar van het systeem is door het raakpunt en nog twee punten van R_3 bepaald. Derhalve wordt een involutie I_4^2 op R_3 ingesneden.

Hieruit volgt: Van alle quadratische oppervlakken van het systeem, die R_3 in een bepaald punt raken, zijn er zes, die R_3 elders osculeeren.

Alle quadratische oppervlakken door K_2, die R_3 in een bepaald punt osculeeren, snijden op de kubische ruimtekromme een involutie I_3^1 in, waarin vier groepen met een tweevoudig punt.

Dus: Van alle quadratische oppervlakken van het systeem, die R_3 in een bepaald punt osculeeren, zijn er vier, die R_3 elders raken.

Derhalve raken in één punt A van R_3 zes quadratische oppervlakken van het systeem aan die kromme, die bovendien R_3 osculeeren in een punt B en osculeeren in één punt B van R_3 vier quadratische oppervlakken van het systeem, die in een punt A bovendien aan R_3 raken.

Tusschen de punten A en de punten B op R_3 bestaat derhalve een verwantschap (6, 4). De tien coïncidenties hebben de beteekenis, dat er tien quadratische oppervlakken door K_2 gaan, die een vijfpuntige aanraking met R_3 hebben, zooals reeds gevonden was.

Om te bepalen het aantal quadratische oppervlakken door K_2, dat één vier- en één tweepuntige aanraking met R_3 heeft, gebruikt men eigenschap IIa en substitueert

$$k = 4, n = 6 \text{ en } t = 1.$$

In de involutie I_6^4 zijn derhalve

$$(t + 1)(k - t + 1)(n - k)(n - k - 1) = 16$$

groepen met een viervoudig en een tweevoudig punt.

Derhalve gaan door K_2 zestien quadratische oppervlakken, die één vierpuntige en één tweepuntige aanraking met R_3 hebben.

Substitueert men in de formule van eigenschap IIb

$$t = \tfrac{1}{2} \mathrm{k} = 2 \text{ en } n = 6,$$

dan vindt men:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)^2 (n-k)(n-k-1) = 9,$$

of:

D o o r K_2 g a a n n e g e n a a n R_3 d u b b e l o s c u-l e e r e n d e q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n.

Dit zijn dezelfde resultaten, die in Hoofdstuk II, § 3 werden verkregen, met uitzondering van de systemen driemaal aan R_3 rakende quadratische oppervlakken door K_2. Deze methode eigent zich immers slechts om die puntgroepen met bijzondere punten te vinden, waarvan in de involutie eindige aantallen voorkomen.

§ 3. *Indien het vlak v een snijvlak van R_3 is en de kegelsnede K_2 in v gaat door één der snijpunten P_1 van R_3 en v*, dan bepalen vier punten op R_3 een quadratisch oppervlak door die punten en door K_2 en dit oppervlak heeft buiten het vaste snijpunt P_1 vijf snijpunten met R_3. De aldus door het systeem quadratische oppervlakken op R_3 ingesneden involutie is derhalve van den vijfden graad, vierden rang.

H e t a a n t a l q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n d o o r K_2, d a t b u i t e n P_1 e e n v ij f p u n t i g e a a n r a k i n g m e t R_3 h e e f t, i s v o l g e n s e i g e n s c h a p I v ij f.

Immers:

$$(k+1)(n-k) = 5.$$

De quadratische oppervlakken van het systeem, die in een bepaald punt aan R_3 raken, snijden op R_3 een involutie I_3^2 in. Volgens eigenschap I osculeeren dus drie van deze quadratische oppervlakken elders aan R_3.

De quadratische oppervlakken, die in een bepaald punt R_3 osculeeren, bepalen op R_3 een involutie I_2^1. Volgens dezelfde eigenschap raken twee dezer oppervlakken elders aan R_3.

In één punt A van R_3 raken derhalve drie quadratische oppervlakken door K_2, die elders in een punt B aan R_3 osculeeren en in één punt B osculeeren twee quadratische oppervlakken van het systeem, die in een punt A aan R_3 raken.

De vijf coïncidenties van de tusschen de punten A en de punten B aldus op R_3 bepaalde verwantschap (2, 3) bewijzen nogmaals, dat er vijf vijfpuntig aan R_3 rakende quadratische oppervlakken door K_2 gaan.

De eigenschap II heeft in haar formule een factor $(n-k-1)$; deze formule levert dus nul, indien de graad en de rang der involutie één verschillen. Er zijn derhalve geen quadratische oppervlakken door K_2, die buiten P_1 een tweepuntige en een vierpuntige aanraking ($t = 3$) aan R_3 of twee driepuntige aanrakingen ($t = 2$) hebben. Dit is ook onmogelijk, omdat buiten P_1 een quadratisch oppervlak slechts vijf snijpunten met R_3 heeft.

Maar alle quadratische oppervlakken door K_2, die in P_1 aan R_3 raken, snijden op R_3 een involutie I_4^3 in. Er zijn dus, volgens eigenschap I, vier elders vierpuntig rakende quadratische oppervlakken.

Evenzoo leert de involutie I_2^1, welke de in P_1 vierpuntig rakende quadratische oppervlakken van het systeem op R_3 insnijden, dat er onder deze oppervlakken twee zijn, die elders R_3 raken.

De quadratische oppervlakken, die door K_2 gaan en in P_1 aan R_3 osculeeren, snijden op R_3 een punteninvolutie I_3^2 in. Er zijn dus hieronder drie bovendien elders aan R_3 osculeerende quadratische oppervlakken.

Vallen twee punten van R_3 op K_2 in v, dan snijden de quadratische oppervlakken door K_2 geen involutie op R_3 in en geeft deze methode dus geen resultaten.

§ **4.** Ten slotte willen wij eenige resultaten, behandeld in of behoorende bij Hoofdstuk III, ook met behulp dezer eigenschappen afleiden.

Alle quadratische oppervlakken, die door K_2 en een vast punt der ruimte gaan, vormen een systeem van ∞^3 exemplaren en snijden op de kubische ruimtekromme een involutie I_6^3 in. Volgens eigenschap I zijn er in I_6^3 twaalf groepen met een viervoudig element, en volgens eigenschap IIa zes en dertig groepen met een twee- en een drievoudig element.

D o o r K_2 e n e e n v a s t p u n t d e r r u i m t e g a a n d e r h a l v e t w a a l f q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n, d i e R_3 v i e r p u n t i g r a k e n e n z e s e n d e r t i g q u a d r a t i s c h e o p p e r v l a k k e n, d i e R_3 e e n s d r i e p u n t i g e n e e n s t w e e p u n t i g r a k e n.

Alle quadratische oppervlakken, die door K_2 en een punt der ruimte gaan en bovendien R_3 in een gegeven punt raken, bepalen op R_3 een involutie I_4^1.

In dezen bundel zijn derhalve zes quadratische oppervlakken, die R_3 ook elders raken.

Een net van quadratische oppervlakken, met K_2 en twee punten der ruimte als basiselementen, snijdt op R_3 een involutie I_6^2 in. Derhalve:

In een net van quadratische oppervlakken zijn twaalf exemplaren, die aan R_3 osculeeren en twaalf dubbel aan R_3 rakende exemplaren.

Een bundel van quadratische oppervlakken bepaalt op R_3 een involutie I_6^1, waarin tien groepen met een tweevoudig punt.

Er zijn derhalve in een bundel tien quadratische oppervlakken, die aan R_3 raken.

HOOFDSTUK V.

De bollen, die meervoudig of veelpuntig raken aan een kubische ruimtekromme.

---

§ 1. Alle bollen hebben den imaginairen bolcirkel gemeen en een quadratisch oppervlak, dat den imaginairen bolcirkel bevat, is een bol. Derhalve vormen de bollen een systeem quadratische oppervlakken door een vaste kegelsnede en kunnen de aantallen van meervoudig of veelpuntig aan een kubische ruimtekromme rakende bollen uit het voorgaande gemakkelijk worden afgeleid. Het vlak *v* van de vaste kegelsnede K_2 is in dit geval het vlak in het oneindige. En blijkbaar bepalen de verschillende veronderstellingen, die in het tweede hoofdstuk gemaakt zijn over het gedrag der kubische ruimtekromme ten opzichte van het vlak der vaste kegelsnede en ten opzichte dier kegelsnede zelve, de soorten van kubische ruimtekrommen, indien voor het vlak *v* het vlak in het oneindige gekozen wordt en voor vaste kegelsnede de imaginaire bolcirkel.

Indien de kubische ruimtekromme één of drie punten met den imaginairen bolcirkel gemeen heeft, is zij imaginair. We zullen de resultaten van het voorgaande onderzoek op het bollensysteem ten opzichte van reëele, kubische ruimtekrommen toepassen.

§ 2. Kubische hyperbool.

Deze kromme heeft met het vlak in 't oneindige drie niet samenvallende reëele punten gemeen.

Dit geval stemt overeen met Hoofdstuk II § 3, waaruit onmiddellijk volgt:

Er zijn vier stelsels van ∞^1 bollen, die drievoudig aan een kubische hyperbool raken.

Daar het middelpunt van een bol diens pool is ten opzichte van het vlak in het oneindige, volgt hieruit:

De middelpunten der drievoudig aan een kubische hyperbool rakende bollen zijn vereenigd op vier rechte lijnen.

Verder vinden wij:

Er zijn zestien bollen, die met een kubische hyperbool één vierpuntige en één tweepuntige aanraking hebben.

In elk punt van een kubische hyperbool raken vier bollen driepuntig, die elders tweepuntig aan die ruimtekromme raken.

In elk punt van een kubische hyperbool

raken zes bollen tweepuntig, die elders osculeeren.

Er zijn tien bollen, die vijfpuntig raken aan een kubische hyperbool.

Er zijn negen dubbel aan een kubische hyperbool osculeerende bollen.

§ 3. **Kubische parabolische hyperbool.**

Deze kromme heeft drie reëele punten met het vlak in 't oneindige gemeen, waarvan twee samenvallen.

Hoofdstuk II, § 7 behandelt het analoge geval voor een systeem quadratische oppervlakken door een vaste kegelsnede.

Men leidt hieruit af:

Er zijn twee stelsels van ∞^1 bollen, die aan de kubische parabolische hyperbool drievoudig raken. De middelpunten van elk dier bollenstelsels liggen op een rechte.

Er zijn zes bollen die één vierpuntige en één tweepuntige aanraking hebben met de kubische parabolische hyperbool.

In elk punt dier kromme osculeeren drie bollen, die elders raken en raken vijf bollen die elders osculeeren.

Er zijn acht bollen, die vijfpuntig raken aan de kubische parabolische hyperbool.

Er zijn zeven aan die kromme dubbel osculeerende bollen.

§ 4. Kubische parabool.

Deze kromme heeft met het vlak in het oneindige drie samenvallende punten gemeen.

Door toepassing van Hoofdstuk II § 11 vinden wij:

Er is een stelsel van ∞^1 bollen, die drievoudig raken aan de kubische parabool. De middelpunten liggen op één rechte.

Er zijn twee bollen, die de kubische parabool eens vierpuntig en eens tweepuntig raken.

In een punt der kubische parabool raken twee bollen, die elders osculeeren en osculeeren twee bollen, die elders raken.

Er zijn vier bollen die de kubische parabool vijfpuntig raken.

Er is één bol, die de kubische parabool dubbel osculeert.

§ 5. De circulaire kubische ruimtekrommen.

In de §§ 5, 9 en 13 van Hoofdstuk II vindt men de analoge gevallen voor het systeem quadratische oppervlakken door K_2 in het vlak *v*. Er is in die paragrafen afgeleid, dat geen exemplaar van het beschouwde systeem quadratische oppervlakken één der behandelde bijzondere aanrakingen met R_3 heeft, tenzij in de gemeenschappelijke punten van K_2 en R_3. Derhalve zullen de bollen, die een dergelijke bijzondere aanraking aan deze soort kubische ruimtekrommen vertoonen, één of twee aanrakingen in punten van den imaginairen bolcirkel hebben. Daarom is het in dit verband niet van belang de resultaten der §§ 5, 9 en 13 op het bollensysteem der ruimte toe te passen.

§ **6.** We willen ook de resultaten van Hoofdstuk III § 2 toepassen op het bollensysteem der ruimte ten opzichte van de **kubische hyperbool.**

Door een punt der ruimte gaan twaalf bollen, die de kubische hyperbool vierpuntig raken.

Door een punt der ruimte gaan zes en dertig bollen, die de kubische hyperbool tweepuntig en elders driepuntig raken.

In een bollennet zijn twaalf exemplaren, die de kubische hyperbool osculeeren.

In een bollenbundel zijn tien exemplaren, die de kubische hyperbool raken.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Men onderscheide naar het gedrag in het oneindige veertien soorten van derde-graadsruimtekrommen.

II.

Ten onrechte beschouwt WILHELM RULF als een eigenschap, dat een rechte één punt in het oneindige heeft.

Cf. WILHELM RULF. Elemente der projectivischen Geometrie.

III.

Het beginsel der dualiteit voere men in de projectieve meetkunde in, onafhankelijk van de pooltheorie.

IV.

Bij transformaties door coëfficiëntenbetrekkingen zijn coëfficiënten, die gelijk aan ∞ of een macht van ∞ worden, te vermijden.

V.

Ch. Lagrange's aanname van „l'infiniment petit absolu" voert tot ongerijmdheden.

Cf. Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences, 1903, N°. 3, pag. 1062.

VI.

Cikot's opmerkingen over reeksen in het „Wiskundig Tijdschrift", 3de jaargang, Juli N°. 4, pag. 194, zijn gedeeltelijk onnoodig, gedeeltelijk onjuist.

VII.

Tegen de wijze van behandelen van de homogeen gepolariseerde bol in Abraham und Föppl's „Theorie der Elektrizität, I" § 42, zijn bezwaren.

VIII.

De berekening van Thomson in „Popular Lectures" over de orde van grootheid der atomen uit de dikte van vloeistoflamellen berust op een hypothese, die aan bedenking onderhevig is.

Cf. Sir W. Thomson „Constitution of Matter" pag. 155.

IX.

Bij vervanging in berekeningen van een natuurlijken lichtstraal door twee onderling loodrecht gepolariseerde stralen voert men een hypothese in.

X.

De temperatuur van Cagniard de la Tour en de kritische temperatuur zijn practisch dezelfde.

XI.

De relatieve sterkte van de gele tegenover de groene heliumlijnen in de chromosfeer van de zon is onvoldoende verklaard.

XII.

Bij bronnen, die licht met continu spectrum uitzenden, kan de bolometer de relatieve verplaatsing t. o. van den waarnemer doen kennen.

XIII.

Het streven van Prof. Sissingh om voor de kunsttermen, zooveel mogelijk Nederlandsche uitdrukkingen te bezigen, verdient geen aanbeveling.

Cf. „Leerboek der Natuurkunde" door Dr. J. Bosscha, Vierde Boek, Tweede Stuk, Inleiding.

ERRATA.

pag. 18 r. 9 v. o. staat: „P_2”, moet zijn: „P_1”.

pag. 25 r. 9 v. o. wordt gelezen:

$$„(p_2 q_1 - p_1 q_2) x_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) x_2 + \mu x_3 = 0.”$$

pag. 25 r. 6 v. o. staat: „P_2”, moet zijn: „een punt op $P_1 P_2$”.