Over energie bij elektriciteit

I, 2.

OVER ENERGIE BIJ ELEKTRICITEIT.

OVER ENERGIE BIJ ELEKTRICITEIT.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

MR. H. P. G. QUACK,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT DER WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN

DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

TE VERDEDIGEN

op ZATERDAG 18 APRIL 1874, des namiddags ten 1 ure.

DOOR

JOHANNES PAULUS VAN DER STOK,

geboren te Zuilen.

Utrecht,

Stoom-Boekdrukkerij en Steendrukkerij „de Industrie."

(K. A. MANSSEN.)

1874.

AAN

mijn Hooggeachten Grootvader

I. A. STRICKER.

Nog één plicht, de aangenaamste bij het promoveeren, blijft mij over te vervullen.

Van harte zeg ik U allen, Professoren der philosophische faculteit, dank niet alleen daarvoor, dat Gij mij de wetenschap hebt leeren liefhebben, maar vooral ook voor de vele bewijzen van vriendschap en belangstelling, die ik van Uwe zijde mocht ondervinden.

In het bizonder dank ik U, geachte promotor Professor Grinwis, *voor de welwillende wijze waarop Gij de leiding mijner dissertatie hebt op U genomen; hierin, als altijd, hebt Gij getoond veel voor Uwe leerlingen over te hebben.*

HOOFDSTUK I.

Behoud van 't arbeidsvermogen en potentiaal.

§ 1. Voor ieder stelsel, waar de voorwaarden, aan welke de punten die dat stelsel bepalen, moeten voldoen niet veranderlijk zijn met den tijd, geldt de vergelijking:

$$d\,\Sigma\,\tfrac{1}{2}\,mv^2 = \Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

d. i. de elementairarbeid, door de bewegende krachten verricht bij eene elementaire verplaatsing, wordt gemeten door de aangroeiing der levendige kracht gedurende den tijd waarin die krachten werkzaam waren.

De krachten, waardoor men steeds de voorwaarden kan vervangen, komen hierin niet voor; volgens hypothese onafhankelijk van den tijd, stellen zij drukkingen of spanningen voor, wier resultante geen arbeid verricht en loodrecht staat op den doorloopen weg.

In 't geval dat de bewegende krachten centraalkrachten zijn, die alleen afhangen van den afstand der werkzame punten onderling, is $\Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ een volkomen differentiaal eener functie U der coordinaten en de totale verandering der levendige kracht wordt gemeten door de verandering dier functie

$$\frac{1}{2}\Sigma m v_2^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_1^2 = \int_1^2 d\,U = U_2 - U_1 \;.\;.\;.\; (2)$$

U wordt de potentiaalfunctie genoemd en heeft tot hoofdeigenschap dat de differentiaal ten opzichte eener willekeurige richting de composante der kracht in die richting aangeeft.

Bij 't beschouwen van een stelsel, alleen overgelaten aan de werking der deeltjes onderling, laten beide leden der vergelijking (2) eene analyse toe, die tot nadere definieering der daarin voorkomende grootheden kan leiden.

§ 2. De totale levendige kracht van een stelsel wordt gegeven door de vergelijking:

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + \Sigma \frac{1}{2} m u^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

waarin M de totale massa is, v_1 de snelheid van 't zwaartepunt en u de snelheid der punten ten opzichte daarvan.

Beschouwen wij nu twee punten met de massa's ε en ε' en decomponeeren wij hunne snelheden v en v' ieder in twee richtingen, de eene volgens hunne verbindingslijn r, de andere volgens eene richting loodrecht daarop.

De eerste composanten mogen zijn: α en α', de tweede: β en β', de richtingscosinussen

van r: a, b, c
van β: l, m, n
van β': p, q, r

Zijn eindelijk (x, y, z), (x', y', z'), (x_1, y_1, z_1) de coordinaten der beide punten en van 't zwaartepunt, dan is:

$$\tfrac{1}{2} M^2 v_1^{\,2} = \frac{(\varepsilon+\varepsilon')^2}{2}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)\right\} \quad . \; . \; (4)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon+\varepsilon')\, x_1 &= \varepsilon\, x + \varepsilon'\, x' \\ (\varepsilon+\varepsilon')\, y_1 &= \varepsilon\, y + \varepsilon'\, y' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5) \\ (\varepsilon+\varepsilon')\, z_1 &= \varepsilon\, z + \varepsilon'\, z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a\,\alpha + l\,\beta \quad \frac{dx'}{dt} = a\,\alpha' + p\,\beta' \\ \frac{dy}{dt} &= b\,\alpha + m\beta \quad \frac{dy'}{dt} = b\,\alpha' + q\,\beta' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6) \\ \frac{dz}{dt} &= c\,\alpha + n\,\beta \quad \frac{dz'}{dt} = c\,\alpha' + r\,\beta' \end{aligned}$$

door differentiatie van (5) verkrijgt men:

$$\begin{aligned} (\varepsilon+\varepsilon')\frac{dx_1}{dt} &= \varepsilon\frac{dx}{dt} + \varepsilon'\frac{dx'}{dt} \\ (\varepsilon+\varepsilon')\frac{dy_1}{dt} &= \varepsilon\frac{dy}{dt} + \varepsilon'\frac{dy'}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7) \\ (\varepsilon+\varepsilon')\frac{dz_1}{dt} &= \varepsilon\frac{dz}{dt} + \varepsilon'\frac{dz'}{dt} \end{aligned}$$

Verheft men de vergelijkingen (7) in het quadraat en substitueert daarin de vergelijkingen (6), zoo wordt:

$$\begin{aligned} (\varepsilon+\varepsilon')^2\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 &= \varepsilon^2\,\alpha^2\,a^2 + \varepsilon'^2\,\alpha'^2\,a^2 + \varepsilon^2\,\beta^2\,l^2 + \varepsilon'^2\,\beta'^2\,p^2 \\ &+ 2\,\varepsilon\varepsilon'\,a^2\,\alpha\alpha' + 2\,\varepsilon\varepsilon'\,p\,l\,\beta\,\beta' + 2\,\varepsilon\,\alpha\,\beta\,a\,l \\ &+ 2\,\varepsilon\varepsilon'\,al\,\beta\,\alpha' + 2\,\varepsilon\varepsilon'\,ap\,\alpha\,\beta' + 2\,\varepsilon'\,\alpha'\,\beta\,ap. \end{aligned}$$

De waarden van $(\varepsilon+\varepsilon')^2\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2$ en $(\varepsilon+\varepsilon')^2\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2$ verkrijgt men uit de vorige vergelijking door respectievelijk a in b en c, l in m en n, p in q en r te veranderen.

Hun som geeft volgens (4) en wanneer men bedenkt dat:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$l^2 + m^2 + n^2 + 1$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$
$$a\,l + b\,m + c\,n = o$$
$$a\,p + b\,q + c\,r = o$$
$$l\,p + m\,q + n\,r = \cos.(\beta\,\beta') = \cos\Theta$$
$$\tfrac{1}{2} M^2 v_1^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2 + \varepsilon^2\beta^2 + \varepsilon'^2\beta'^2 + 2\varepsilon\varepsilon'\beta\beta'\cos\Theta\right\}$$

Stelt men in deze vergelijking α en α' gelijk o, dan volgt hieruit de snelheid γ, die 't zwaartepunt zou verkrijgen onder den invloed der snelheden β en β' alleen:

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon^2\beta^2 + \varepsilon'^2\beta'^2 + 2\varepsilon\varepsilon'\beta\beta'\cos\Theta}{(\varepsilon + \varepsilon')^2}$$

deze waarde in de vorige vergelijking substitueerend, verkrijgt men;

$$\tfrac{1}{2} M v_1^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma^2\right\} \quad . . (8)$$

Ook $\Sigma\, m\, u^2$ splitst zich in twee deelen; de snelheid van ε' b. v. ten opzichte van 't zwaartepunt wordt verkregen door de snelheid v_1, met tegengesteld teeken, aan die massa mede te deelen.

Noemen wij die u', zoo is:

$$u'^2 = v_1^2 + v'^2 - 2\,v_1\,v' \cos(v_1\,v')$$

Hierin heeft v_1 de waarde door (8) bepaald, de richtingscosinussen van v_1 zijn:

$$\frac{1}{v_1}\frac{dx_1}{dt},\quad \frac{1}{v_1}\frac{dy_1}{dt},\quad \frac{1}{v_1}\frac{dz_1}{dt}$$

die van v^1 zijn:

$$\frac{a\,\alpha' + p\,\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},\ \frac{b\,\alpha' + q\,\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},\ \frac{c\,\alpha' + r\,\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},$$

uit deze gegevens en uit:

$$v^1 = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

vindt men:

$$u'^2 = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon + \varepsilon'^2)}(\beta^2 + \beta'^2 - 2\beta\beta'\cos.\Theta) + \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon + \varepsilon')^2}(\alpha - \alpha')$$

of

$$\varepsilon' u'^2 = \frac{\varepsilon' \varepsilon^2}{(\varepsilon + \varepsilon')^2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

wanneer men $\frac{ds}{dt}$ de relatieve snelheid der beide massa's loodrecht op r en $\frac{dr}{dt}$ de relatieve snelheid volgens r noemt.

Beschouwt men eveneens de snelheid der massa ε ten opzichte van 't zwaartepunt, dan verkrijgt men:

$$\varepsilon\, u^2 = \frac{\varepsilon\,\varepsilon'^2}{(\varepsilon + \varepsilon')^2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

hun som geeft dus:

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\varepsilon\, u^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

$\frac{1}{2}\,M\,v^2$ kunnen wij de uitwendige levendige kracht noemen, zij is constant voor een stelsel, alleen aan inwendige krachten onderworpen; $\frac{1}{2}\,\Sigma\,\varepsilon\, u^2$ is de inwendige levendige kracht.

Echter kunnen wij, voor 't geval van een afgesloten stelsel, ook $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ constant beschouwen; *) evenmin als de levendige kracht van 't zwaartepunt kan zij haar equivalent vinden in den arbeid door de krachten, tusschen ε en ε' werkende, verricht, daar deze beweging loodrecht geschiedt op de richting der kracht.

Deze beschouwingen uitbreidende over een willekeurig aantal punten, vindt men voor de levendige kracht van een stelsel, de massa's weer algemeen m noemende:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\,v^2 = C + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\frac{mm'}{m+m'}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots (9)$$

waarin de summatie moet worden uitgestrekt over alle mogelijke combinaties, twee aan twee, der punten van het stelsel.

§ 3. In vergelijking (2) beduidt $\int_1^2 dU$ den arbeid, verricht bij vormverandering van 't stelsel.

Denken wij ons weder twee massa's die op elkander werken, $\int_R^r dU$ zal dan den arbeid voorstellen door de onderlinge kracht verricht, indien de massa's, onder den invloed dier kracht, van den afstand R tot den afstand r zijn gekomen.

Deze integraal laat zich splitsen in twee deelen:

$$\int_c^r dU + \int_R^c dU,$$

waarin c eene constante is voor 't beschouwde stelsel.

*) Wilh. Weber, Elektrod. Maasbestimm Insbesondere über das Princip der Erh. der Energie.

De vergelijking (2) wordt dan:

$$\tfrac{1}{2}\ \Sigma\, mv_r^2 - \tfrac{1}{2}\ \Sigma\, mv_R^2 = \int_c^r dU + \int_R^c dU \quad . \ . \ (10)$$

of

$$\tfrac{1}{2}\ \Sigma\, mv_r^2 + \int_r^c dU + \tfrac{1}{2}\ \Sigma\, mv_R^2 + \int_R^c dU \quad . \ . \ (11)$$

Zij duidt aan dat in ieder systeem, waarbinnen centraalkrachten werken, in iederen stand de som van de levendige kracht en den arbeid noodig om 't stelsel van uit dien stand in een bepaalden anderen, aangeduid door c, over te voeren, constant is.

Men kan nu voor de potentiaalfunctie in plaats van U, evengoed aannemen $\int_c^r dU$, onverminderd de hoofdeigenschap in § 1 aangegeven, daar echter c voor ieder stelsel afzonderlijk zou moeten bepaald worden, is het wenschelijk de waarde van c oneindig groot te nemen, terwijl hierbij bovendien nog komt dat de potentiaalfunctie der in de natuur voorkomende krachten, voor r oneindig, steeds o is.

Het is echter ons voornemen, niet $\int_\infty^r dU$; maar $\int_r^\infty dU$ als potentiaal te definieeren. De potentiaal eener massa in eenig punt wordt dan: de arbeid door de inwendige krachten verricht, wanneer de eenheid van massa van uit dat punt zich tot op oneindigen afstand voortbeweegt, terwijl de hoofdeigenschap dan wordt:

De composante der bewegende kracht, volgens eene willekeurige richting, wordt gegeven door de partieele differentiatie der potentiaal volgens die richting, met omgekeerd teeken.

De begrippen potentiaal en potentieele energie worden hierdoor identisch, zooals uit (11) blijkt.

§ 4. Noemt men dus:

$$\int_r^\infty dU = V_r$$

dan wordt hierdoor (11):

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m v_r^2 + V_r = \text{Constante} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Substitueert men hierin de waarde in (9) voor de levendige kracht gevonden,

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma \frac{mm'}{m+m'}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_r = C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

De constante hierin kan bepaald worden als de waarde van de eerste term van 't eerste lid als $V_r = o$ wordt d. i. voor r oneindig groot, of als de waarde van V_r voor 't geval dat $\frac{dr}{dt} = o$ is; noemen wij deze waarde V_o, dan krijgen wij voor den algemeenen vorm der potentiaal de beide waarden:

$$V_r = \tfrac{1}{2}\,\Sigma \frac{m\,m'}{m+m'}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)_\infty^3 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_r^2\right\} \quad . \; . \quad (14)$$

$$V_r = V_o - \tfrac{1}{2}\,\Sigma \frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{dr}{dt}\right)_r^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

HOOFDSTUK II.

Vormen waarin de energie optreedt bij statische elektriciteit.

---

§ 5. *Definities.*

Onder energie van een elektrisch stelsel wordt verstaan de arbeid, dien dat stelsel ingevolge zijn elektrischen toestand kan verrichten, dus alleen de potentieele energie; zij wordt gemeten door den arbeid, die noodig is geweest om aan dat stelsel die hoeveelheid energie mede te deelen.

Volgens de boven gegeven definitie van potentiaal wordt dus de energie steeds gemeten door de waarde dier potentiaal.

Stooten b. v. twee punten elkander volgens zekere wet af, dan wordt de energie van dit stelsel, wanneer een der punten zich in een bepaalden stand ten opzichte van 't andere bevindt, zoowel gemeten door den arbeid, dien uitwendige krachten moeten verrichten om dat punt van uit oneindigen afstand in dien stand te brengen, als door den arbeid, dien de inwendige krachten verrichten, wanneer dat punt tot op oneindigen afstand wordt afgestooten; dezen laatsten arbeid nu hebben wij als potentiaal gedefinieerd.

Evenens wordt de energie van een geladen stelsel gegeven door den arbeid noodig om die lading van uit oneindigen afstand tot het systeem te voeren, of door de potentiaal op zich zelf.

Verder volgt uit de definitie, dat de potentiaal van een geladen stelsel op eene zekere hoeveelheid el. in eenig punt, evenredig is aan die hoeveelheid, daar onder hoeveelheid el. eene grootheid wordt verstaan, die geheel analoog is met wat men massa noemt bij gewone krachten.

Onder de algemeene uitdrukking »*de potentiaal van een conductor*" verstaan wij den arbeid, dien de elektrische krachten verrichten, wanneer van uit een willekeurig punt binnen den conductor, de eenheid van el. tot op oneindigen afstand wordt gebracht, gesteld dat dit gedaan kon worden zonder de lading te veranderen.

Wordt dus de lading n malen grooter dan wordt ook de potentiaal van den conductor n malen grooter.

Stellen wij de potentiaal van een conductor, geladen met een hoeveelheid el. e, voor door V en noemen wij de potentiaal, indien de lading gelijk aan de eenheid was, W, dan is dus:

$$V = W e \qquad (1)$$

§ 6. *Energie van een geladen systeem.*

Denken *) wij ons een systeem verdeeld in deelen, klein genoeg dat de potentiaal in ieder constant zij.

*) Clerk Maxwell. Electricity and Magnetism I pag. 89.

Die deelen mogen geladen zijn met hoeveelheden el. voorgesteld door:

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \text{enz.}$$

en hunne potentialen mogen zijn

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \text{enz.}$$

worden de ladingen n maal grooter dan worden ook de potentialen

$$n\,V_1,\ n\,V_2,\ n\,V_3,$$

veranderen wij nu n in $n + dn$, dan geven wij aan de deelen ladingen:

$$e_1\,dn,\ e_2\,dn,\ e_3\,dn,\ \text{enz.}$$

De arbeid hiertoe noodig is:

$$n\,V_1\,e_1\,dn,\ n\,V_2\,e_2\,dn\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{enz.}$$

De geheele arbeid is dus:

$$(V_1\,e_1 + V_2\,e_2 + \ .\ .\ .\ .\ .\ \text{enz.})\,n\,dn$$

Herhaalt men dit proces een oneindig aantal malen, telkens eene oneindig kleine lading aanbrengend, dan wordt de totale arbeid:

$$\Sigma(Ve)\int n\,dn = \frac{1}{2}\,\Sigma(Ve)\,(n_1^2 - n_o^2)$$

Stellen wij hierin $n_1 = 1$, $n_o = o$, dan verkrijgen wij den arbeid, noodig om aan de deelen van 't beschouwde stelsel de ladingen e, e_1 . . . . . enz. mede te deelen of, wat hetzelfde is, de energie der lading:

$$Q = \frac{1}{2}\,\Sigma(Ve)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Uit (1) volgt: $Q = \frac{1}{2}\,\Sigma(We^2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$

zoodat de energie van een geladen stelsel evenredig is aan 't quadraat zijner lading.

Andere uitdrukkingen identisch met (2) zijn:

$$Q = \frac{1}{2} \int V\, dq \quad \text{voor el massa's}$$

$$Q = \frac{1}{2} \int V \varrho\, ds \quad \text{voor vlakteladingen}$$

$$Q = \frac{1}{2} Vc \qquad \text{voor conductoren.}$$

Eene andere methode *), alleen van toepassing op geleiders, volgt uit den arbeid dien de elektrische krachten verrichten, wanneer de geleider gelegenheid heeft zich te vergrooten en dus de lading wordt uitgebreid over een verwijderd niveauvlak, aangeduid door $V = C$.

De kracht op de eenheid van el. aan 't oppervlak uitgeoefend is:

$$F = 2\, \pi \varrho$$

Deze eenheid wordt voortbewogen langs den normaal aan 't niveauvlak, waarvan dn een element is, de arbeid wordt dus voor de hoeveelheid el. ϱds in 't element ds:

$$\varrho\, ds \int F\, dn = 2\, \pi \varrho\, ds \int \varrho\, dn$$

maar:
$$\varrho = -\frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dn}$$

$$\frac{1}{2} \varrho\, ds \int \frac{dv}{dn}\, dn = \frac{1}{2} (V - C)\, \varrho\, ds$$

Vallen de grenzen van 't nieuwe niveauvlak in het oneindige, dan is $C = o$ en wij verkrijgen voor den totalen arbeid of de energie:

$$Q = \frac{1}{2} Ve$$

*) C. H. C. Grinwis: Over de energie eener el. lading. Versl. en meded. der Kon. Akad. van Wetensch. Afd. Natuurk. 2de Reeks. Deel VI.

§ 7. *Toepassingen.*

a. Bol.

$$\text{Energie}: Q = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R}$$

Wordt de straal m malen grooter, terwijl de hoeveelheid el. dezelfde blijft, dan wordt de totale energie m malen kleiner.

De energie van de eenheid van oppervlak verandert echter in verhouding van 1 tot $\frac{1}{m^3}$.

In dezelfde verhouding verandert de energie bij eene cirkelvormige plaat.

b. Omwentelingsellipsoide.

De potentiaal wordt gegeven door de formule:

$$V = \frac{Q}{2}\int_0^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{a^2+\mu}}$$

waarin a de lange as en tevens de omwentelingsas voorstelt. De integratie geeft:

$$V = \frac{Q}{2ae}\ \mathrm{l.}\frac{1+e}{1-e} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

indien

$$\sqrt{a^2-b^2} = ae$$

De straal van een bol die, bij gelijke lading, gelijke energie bezit, wordt gegeven door de vergelijking:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2ae}\ \mathrm{l.}\frac{1+e}{1-e}$$

daar $\frac{1}{2e}\ \mathrm{l.}\frac{1+e}{1-e} = 1 + \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{5} + \ldots\ldots$ enz.

is deze straal kleiner dan de groote as maar grooter dan de kleine as:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a}\cdot\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}e^4 \ldots\ldots \text{enz.}\right)$$

De verandering in energie die de ellipsoide ondergaat indien haar vorm verandert, zonder dat de lading toe of afneemt, wordt gemeten door de totale verandering der potentiaal:

$$dV = -\frac{Q\,d\,a}{2\,a^2\,e}\,l.\,\frac{1+e}{1-e} + \frac{Q\,d\,e}{a\,e}\left\{\frac{1}{1-e^2} - \frac{1}{2\,e}\,l.\,\frac{1+e}{1-e}\right\} \quad (5)$$

Na ontwikkeling in reeksen vindt men, dat de toename der lange as de energie vermindert, toename der excentriciteit daarentegen de energie vermeerdert. Men verkrijgt nl:

$$\frac{dV}{de}\,de = \frac{Q}{a}\left\{\frac{2}{3}\,e + \frac{4}{5}\,e^3 + \frac{6}{7}\,e^5 + \ldots\ldots\right\} de$$

Intregeert men deze vergelijking van o tot e, dan verkrijgt men, na vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ Q, hoeveel energie een ellipsoide meer bezit, dan een bol van een straal gelijk aan de groote as, wanneer de lading even groot blijft.

De conditie, waaraan de veranderingen van a en e onderworpen zijn, wil de energie dezelfde blijven, verkrijgt men door (5) gelijk o te stellen; zij wordt:

$$\frac{da}{a} = \frac{2\,de}{(1-e^2)\,l.\,\frac{1+e}{1-e}} - \frac{de}{e} \quad \ldots\ldots (6)$$

De vraag of er verband bestaat tusschen oppervlak, inhoud en energie wordt beantwoord door deze vergelijking te substitueeren in de differentiaalvergelijkingen van oppervlak en inhoud. Deze zijn, daar:

$$\text{Opp.} = 2\pi a^2\left(1 - e^2 + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\ \text{Bgsin.}\ e\right)$$

$$\text{Inh.} = \frac{4}{3}\,a^3\,\pi\,(1-e^2)$$

$$d.\mathrm{Opp} = 4\,\pi a\,da\left(1 - e^2 + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\mathrm{Bgsin}\,e\right)$$

$$- 2\pi a^2\,de\left(2\,e - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{Bgsin}\,e\right)$$

$$d\,\mathrm{Inh.} = 4\,\pi a^2\,da\,(1 - e^2) - \tfrac{8}{3}\,\pi a^3\,e\,de$$

of na ontwikkeling in reeksen:

$$d.\,\mathrm{Opp.} = 4\,\pi a\,da\left(2 - \frac{4}{3}\,e^2 - \frac{1.\,2}{3.\,5}\,e^4 - \frac{1.\,2.\,4}{3.\,5.\,7}\,e^6\,.\ \mathrm{enz.}\right)$$

$$- 4\pi a^2\,de\left(\frac{4}{3}\,e + \frac{1.\,4}{3.\,5}\,e^3 + \frac{1.\,4.\,6}{3.\,5.\,7}\,e^5\ .\ .\ .\ \mathrm{enz.}\right)$$

terwijl (6) ontwikkeld geeft:

$$\frac{da}{a} = de\left(\frac{2}{3}\,e + \frac{26}{45}\,e^3 + \frac{5\,0\,2}{7.\,9.\,15}\,e^5 + \ .\ .\ .\ .\ .\ \mathrm{enz.}\right)$$

elimineert men met behulp van deze vergelijking *da* in de beide vorige differentiaalvergelijkingen zoo verkrijgt men:

$$dI = -\,4\,\pi a^3\,de\left(\frac{4}{45}\,e^3 + \frac{44}{7.\,9.\,15}\,e^5 + \ .\ .\ .\ .\ .\ \mathrm{enz.}\right)$$

$$dO = -\,2\,\pi a^2\,de\left(\frac{16}{5.\,7.\,9}\,e^5 + \ .\ .\ .\ .\ .\ \mathrm{enz.}\right)$$

Zij geven aan hoe inhoud en oppervlak veranderen indien de excentriciteit zóó verandert dat de energie dezelfde blijft.

Integreert men ze tusschen *o* en *e* zoo verkrijgt men hoeveel de inhoud en oppervlak van een bol van gelijke energie verschillen met die eener ellipsoide.

Hieruit blijkt dus dat de energie van een omwentelings-ellipsoide, die van vorm verandert, zonder daarbij van inhoud of oppervlakte te veranderen, in geen dier beide gevallen constant blijft.

§ 8. *Influentie.*

Behalve de energie, die ieder geladen stelsel voorstelt, moet hier nog in rekening gebracht worden de energie door de onderlinge werking der systemen veroorzaakt; deze laatste wordt gemeten door de potentiaal der stelsels op elkander.

Daar op ieder systeem evenveel positieve als negatieve el. wordt geinfluenceerd, verandert de energie der stelsels door influentie niet, terwijl iedere conductor die afgeleid is, geen energie representeert.

Werken vaste elektrische massa's, die een potentiaal U bezitten, op een conductor, geladen tot een potentiaal V, zoo wordt de totale energie voorgesteld door:

$$\frac{1}{2}\,Ve + \frac{1}{2}\int U\,dq + \frac{1}{2}\int V_u\,dq + \frac{1}{2}\int U_u\,\varrho\,ds \quad . . (7)$$

De eerste term stelt voor de energie van den conductor, de tweede die der el. massa's, de beide laatste termen, die blijkbaar aan elkander gelijk zijn, wat men zou kunnen noemen de relatieve energie.

Het teeken *u* onder de potentiaalteekens beduidt *uitwendig.*

Daar de potentiaal op den conductor $V + U_u$ is en deze constant moet zijn, zoo wordt (7):

$$\frac{1}{2}(V + U_u)e + \frac{1}{2}\int U\,dq + \frac{1}{2}\int V_u\,dq \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$

Is de geleider met den grond verbonden of aanvankelijk neutraal, dan is de eerste term gelijk nul. De energie wordt dan:

$$Q = \frac{1}{2}\int U\,dq + \frac{1}{2}\int V_u\,dq$$

of $$Q = \frac{1}{2}\int U\,dq + \frac{1}{2}\int U_u\,\varrho\,ds \;\ldots\ldots\; (9)$$

Hierin zijn U_u en ϱ tegengesteld van teeken zoodat Q kan worden voorgesteld door:

$$Q = w - p \text{ *)}$$

d. i. door de aanwezigheid van den afgeleiden conductor wordt de energie der el. massa's verminderd, hetgeen te verwachten was, daar er arbeid moet aangewend worden om den geinfluenceerden conductor te verwijderen. Bij influentie van twee geleiders op elkander wordt (7):

$$\frac{1}{2}\int V\,\varrho\,ds + \frac{1}{2}\int U\,\varrho'\,ds' + \frac{1}{2}\int V_u\,\varrho'\,ds' + \frac{1}{2}\int U_u\,\varrho\,ds$$

daar echter: $$V_u = -\int V\,\varepsilon\,ds$$

$$U_u = -\int U\,\varepsilon'\,ds'$$

waarin ε en ε' de dichtheden zijn der, door de eenheid van el., op de conductoren geinfluenceerde ladingen, wanneer deze niet geisoleerd zijn.

De energie wordt dus uitgedrukt door:

$$\frac{1}{2}\,V\,e + \frac{1}{2}\,U\,e' - \frac{1}{2}\,V\int\varepsilon\,ds\int\varrho'\,ds' - \frac{1}{2}\,U\int\varepsilon'\,ds'\int\varrho\,ds$$

ε en ϱ' zijn omgekeerd van teeken; het hangt dus af van de teekens van V en U of de energie vermeerderd of verminderd wordt, wanneer twee conductoren onder elkanders invloed gebracht worden.

*) C. H. C Grinwis, Over de energie eener el. lading enz.

HOOFDSTUK III.

Arbeid bij elektrodynamische werking.

---

§ 9. *Weber's grondformule.*

Weber's grondformule geeft de bewegingsvergelijking van twee elektrische deeltjes die zich onder elkanders invloed bewegen en is dus geschikt tot direkte toepassing op de formulen (14) en (15) van Hoofdstuk I.

$$F = \frac{e\,e'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2\,r}{c^2}\,\frac{d^2 r}{dt^2}\right)$$

Indien met de elektrische deeltjes verbonden zijn massa's m en m', zoo wordt de versnelling, die men verkrijgt door beurtelings de kracht door de beide massa's te deelen en deze quotienten op te tellen:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{m + m'}{m\,m'} \cdot \frac{e\,e'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2\,r}{c^2}\,\frac{d^2 r}{dt^2}\right)$$

noemen wij: $$\frac{m + m'}{m\,m'} \cdot \frac{e\,e'}{c^2} = a$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{a}{r^2}\left(c^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\,r\,\frac{d^2 r}{dt^2}\right)$$

of
$$\frac{d^2 r}{dt^2} + f(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 f(r)$$

waarin:
$$f(r) = \frac{a}{r^2 - 2ar}$$

deze differentiaalvergelijking kan gebracht worden tot eene lineaire vergelijking der eerste orde, stellen wij:

$$\frac{dr}{dt} = p \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dp}{dr}\,p$$

$$p\frac{dp}{dr} + f(r)\,p^2 = c^2 f(r)$$

hierna:
$$p^2 = t$$

$$\frac{dt}{dr} + 2\,f(r).\ t = 2\,c^2 f(r)$$

geintegreerd geeft deze vergelijking:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{2c^2 a}{r - 2a} + \frac{r\,C}{r - 2a}$$

correspondeert met eene waarde van $\frac{dr}{dt} = o$ de waarde van r, r_o, zoo is dus:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2c^2 a}{r - 2a} \cdot \frac{r - r_o}{r_o} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ook deze vergelijking laat verdere integratie toe. Stelt men:

$$r - 2a = p^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2r_o}{a\,c^2}}\int\frac{p^2\,dp}{\sqrt{p^2 + (2a - r_o)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2r_o}{a\,c^2}}\left\{\frac{p}{2}\sqrt{p^2 + 2a - r_o} + \frac{r_o - 2a}{2}\,l.\left(p + \sqrt{p^2 + 2a - r_o}\right)\right\} \text{*)}$$

---

*) R. Lobatto. Lessen over diff. en integr. rekening II pag. 57.

$$t = \sqrt{\frac{2 r_0}{a c^2}} \left\{ \frac{\sqrt{r - 2a}}{2} \sqrt{r - r_0} + \frac{r_0 - 2a}{2} \right.$$

$$\left. l.\left(\sqrt{r - 2a} + \sqrt{r - r_0}\right) \right\} + C$$

is voor $\frac{dr}{dt} = o$, $r = r_0$ en $t = o$

$$t = \sqrt{\frac{2\, r}{a c^2}} \left\{ \frac{\sqrt{r - 2a}}{2} \sqrt{r - r_0} + \frac{r_0 - 2a}{2} \right.$$

$$\left. l.\ \frac{\sqrt{r - 2a} + \sqrt{r - r_0}}{\sqrt{r_0 - 2a}} \right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

Zijn de elektrische deeltjes ongelijknamig van teeken, d. i heeft er aantrekking plaats, dan wordt de formule:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\, r_0}{a c^2}} \left\{ \frac{\sqrt{2a + r}}{2} \sqrt{r - r_0} - \frac{2a + r}{2} \right.$$

$$\left. \left(\text{Bgsin.}\ \frac{\sqrt{2a + r}}{\sqrt{2a + r_0}} + (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

Wij hebben nu alle gegevens om de potentiaal met behulp der vergelijking:

$$V = \frac{1}{2} \frac{m + m'}{m\, m'} \left\{ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2_\infty - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2_r \right\} \ldots \quad (3)$$

te bepalen. De vergelijking (1) geeft:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2_\infty = \frac{2\, c^2\, a}{r_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

hiermede wordt (3) met behulp van (1):

$$V = \frac{e\, e'}{r_0} \cdot \frac{r_0 - 2a}{r - 2a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Elimineert men tusschen deze vergelijking en (1) r_0,

---

*) R. Lobatto. Lessen over diff. en integr. rekening II pag. 57.

dan verkrijgt men voor de potentiaal de waarde die WEBER daarvoor heeft gegeven:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

Bewegen zich de elektrische deeltjes binnen twee draadelementen die met hunne verbindingslijn hoeken θ en θ' maken, zoo wordt: *)

$$\Sigma \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -8\, uu' \cos.\theta \cos.\theta'$$

$$e = \varepsilon\, ds, \qquad e' = \varepsilon'\, ds' \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{16}$$

$$a\,\varepsilon\, u = i \qquad a\,\varepsilon\, u' = i'$$

en daar bovendien $\Sigma \frac{ee'}{r} = o$, vindt men:

$$V = \frac{ii'}{2} \cdot \frac{\cos.\theta \cos.\theta'}{r} ds\, ds' \quad \ldots\ldots (7)$$

voor de uitdrukking der potentiaal van twee elementen op elkander.

§ 10. *Ampères elementairformule.*

Om de potentiaal van AMPÈRES elementairformule te vinden zullen wij terstond den arbeid bepalen dien de elektrodynamische krachten verrichten, wanneer het element ds' van uit zijne primitieve ligging, evenwijdig aan zich zelf, in willekeurige richting tot op oneindigen afstand wordt voortbewogen.

Het element ds moge tot coördinaten hebben: x, y, z, het element ds': x', y', z', hun afstand in dezen stand

---

*) Elektrodyn. Maassbestimm. von WILHELM WEBER. pag. 329. Leipzig 1846.

zij r_o en de cosinussen die hunne richting met r_o maken: cos. θ_o en cos. θ_o'. Voeren wij het element *ds'* weg in eene richting aangeduid door de richtingscosinussen: l, m en n en beschouwen wij *ds'* op het oogenblik waarop het een afstand σ heeft afgelegd, terwijl wij r den afstand, Θ en Θ' de hoeken, die *ds* en *ds'* in dezen stand met r maken, noemen.

Bij evenwijdige wegvoering blijft de hoek tusschen de elementen constant.

$$\left.\begin{aligned}\text{Dan is:}\quad \cos.(r.\sigma) &= \frac{r_o \cos.(r.\sigma) + \sigma}{r}\\ \cos.\Theta &= \frac{r_o \cos.\theta_o + \sigma \cos.(\sigma.ds)}{r}\\ \cos.\Theta' &= \frac{r_o \cos.\theta'_o + \sigma \cos.(\sigma.ds')}{r}\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

Ampères formule luidt:

$$F = -\frac{i\,i'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos.\varepsilon - {}^3/_2 \cos.\Theta \cos.\Theta'\right)$$

De gezochte arbeid wordt dus voorgesteld door:

$$\int_o^\infty F \cos.(r.\sigma)\, d\sigma \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9)$$

Schrijft men nu nog voor r de waarde:

$$r^2 = \sigma^2 + r^2_o + 2\,\sigma\, r_o \cos.(r_o\, \sigma)$$

zoo is men blijkbaar door de bovenstaande formulen in staat de te onderzoeken integralen alleen afhankelijk van σ te maken.

Volgens (9) hebben wij na te gaan de integralen:

$$-\cos.\varepsilon \int_o^\infty \frac{\cos.(r\,\sigma)}{r^2}\, d\sigma$$

$$^3/_2 \int_0^\infty \frac{\cos.\,\Theta \cos.\,\Theta' \cos.\,(r.\,\sigma)}{r^2}\, d\,\sigma$$

Met behulp van (8) worden deze integralen.

$$-\cos.\,\varepsilon \int_0^\infty \frac{(r_0 \cos.\,(r_0.\,\sigma) + \sigma)\, d\,\sigma}{(\sigma^2 + r_0^2 + 2\,\sigma\, r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma))^{3/2}}$$

$$^3/_2\, r_0^2 \cos.\,\theta_0 \cos.\,\theta'_0 \int_0^\infty \frac{(r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma) + \sigma)\, d\,\sigma}{(\sigma^2 + r_0^2 + 2\,\sigma\, r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma))^{5/2}}$$

$$^3/_2\, r_0 \left\{\cos.\,\theta_0 \cos.\,(\sigma\, ds') + \cos.\,\theta_0' \cos.\,(\sigma.\, ds)\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{(r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma) + \sigma)\,\sigma\, d\,\sigma}{(\sigma^2 + r_0^2 + 2\,\sigma\, r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma))^{5/2}}$$

$$^3/_2 \cos.\,(\sigma\, ds) \cos.\,(\sigma\, ds') \int_0^\infty \frac{(r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma) + \sigma)\,\sigma^2\, d\,\sigma}{(\sigma^2 + r_0^2 + 2\,\sigma\, r_0 \cos.\,(r_0\,\sigma))^{5/2}}$$

De respectieve waarden dezer vier bepaalde integralen zijn, afgezien van de constanten:

$$+ \frac{1}{r_0}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r_0^3}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos.\,(r_0\,\sigma)}$$

$$- \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{1 + \cos.\,(r_0\,\sigma)}$$

De vergelijking (9) of de gezochte arbeid wordt hierdoor dus:

$$-\frac{\cos.\,\varepsilon}{r_0}\, i\, i'\, ds\, ds' + \frac{1}{2} \frac{\cos.\,\theta_0 \cos.\,\theta'_0}{r_0}\, i\, i'\, ds\, ds' \,.\,. \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\cos.\,\theta_0.\cos.\,(\sigma\, ds') + \cos.\,\theta'_0 \cos.\,(\sigma\, ds) - 2 \cos.\,(\sigma\, ds) \cos.\,(\sigma\, ds')}{r_0\,(1 + \cos.\,(r_0\,\sigma))}\, i\, i'\, ds\, ds'$$

De laatste term dezer uitdrukking hangt af van σ; bestond er echter een potentiaal voor Ampères elementairformule, dan moest de gezochte arbeid onafhankelijk zijn van de richting en alleen afhangen van den begin- en eindtoestand. Ampères formule strijdt dus tegen het beginsel van 't behoud van arbeidsvermogen. Is een der stroomen gesloten b. v. s zoodat daarover tusschen dezelfde grenzen moet geintegreerd worden, zoo geeft de laatste term van (10) de drie volgende integralen te onderzoeken:

$$\int \frac{\cos.\theta_0.\cos.(\sigma\, ds')}{r_0(1+\cos.r_0\,\sigma} ds, \int \frac{\cos.\theta'_0.\cos.(\sigma\, ds)}{r_0(1+\cos.r_0\,\sigma)} ds$$

$$\int \frac{\cos.(\sigma\, ds).\cos.(\sigma\, ds')}{r_0(1+\cos.(r_0\,\sigma))} ds$$

De eerste en laatste integraal verdwijnen bij integratie over den gesloten stroom s daar de term cos. (σ, ds') ten opzichte van s constant is en r_0, cos. ($r_0\,\sigma$) en cos. (σ, ds) zich, met behulp der vergelijkingen der kromme s, zóó laten vervormen, dat de integralen teruggebracht worden tot den vorm:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} \psi(\alpha)\, d\alpha$$

die noodzakelijk verdwijnt (Zie Noot).

Ditzelfde valt van de tweede integraal niet te zeggen, hare waarde is niet te bepalen.

Evenmin dus als voor twee elementen geeft Ampères formule voor de kracht door een gesloten stroom op een element uitgeoefend, eene waarde, die het bestaan eener potentiaal aangeeft.

Bij integratie over s' verkeert de eerste integraal in 't zelfde geval als de tweede bij integratie over s; zoodat bij integratie over twee gesloten stroomen alle integralen verdwijnen en AMPÈRES formule een bruikbaren vorm blijkt te bezitten waarvan de potentiaal is:

$$V = -\iint \frac{\cos.\varepsilon}{r}\, i\, i'\, ds\, ds' + \frac{1}{2}\iint \frac{\cos.\theta.\cos.\theta'}{r}\, i\, i'\, ds\, ds'$$

daar echter*)

$$\cos.\theta = \frac{dr}{ds},\ \cos.\theta' = -\frac{dr}{ds'},\ \cos.\varepsilon = -\frac{d\left(r\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}$$

zoo is:

$$\iint \frac{\cos.\theta.\cos.\theta'}{r}\, ds\, ds' = \iint r\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\, ds\, ds'$$

bij gedeelten integreerend over s:

$$\int r\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\, ds = \left(\frac{dr}{ds'}\right)_1^2 - \int\frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}\, ds$$

$$= \int\frac{\cos.\varepsilon}{r}\, ds$$

omdat $\frac{dr}{ds'}$ tusschen de gelijke grenzen 2 en 1 verdwijnt. Men kan dus voor de potentiaal schrijven:

$$V = -\frac{1}{2}\iint\frac{\cos.\varepsilon.}{r}\, i\, i'\, ds\, ds' = -\frac{1}{2}\iint\frac{\cos.\theta.\cos.\theta'}{r}\, i\, i'\, ds\, ds'$$

Deze laatste vorm toont de overeenkomst aan met de potentiaal die uit WEBER's formule volgt, wanneer men abstraheert van het teeken. De potentiaal onder den vorm

$$-\frac{i\, i'}{2}\iint\frac{\cos.\varepsilon}{r}\, ds\, ds'$$

is het eerst ingevoerd door F. E. NEUMANN. †)

Hij ging uit van eene door AMPÈRE gemaakte opmer-

---

*) CHARLES BRIOT. Theorie mecanique de la chaleur pag. 291.

†) Allgemeine Gesetze der inducirten elektr STRÖME 1845.

king dat een gesloten stroom, wat zijne dynamische werking betreft, vervangen kan worden door een magnetisch dubbeloppervlak, dat dien stroom tot grenslijn heeft. NEUMANN wijzigde dit in dien zin, dat hij zich zulk een vlak belegd dacht met elementairstroomen en met behulp van AMPÈRES formulen hiervoor, kwam hij tot zijn potentiaalvorm, die de basis vormt van zijn inductiewet. Zijn potentiaal, bekend onder den naam van NEUMANN'S *integraalwet*, geldt blijkens de afleiding alleen voor gesloten stroomen.

In vele gevallen, voornamelijk bij inductieverschijnselen, is echter noodzakelijk de elementairpotentiaal of ten minste de potentiaal van een gesloten stroom op een stroomelement te kennen.

Deze questie, die door AMPÈRES formule niet wordt opgelost, is in den laatsten tijd een punt van zorgvuldig onderzoek geweest.

Uit de bovenstaande vormen blijkt dat, met gelijk recht, voor de potentiaal van twee elementen op elkander genomen kan worden:

$$-\frac{i\,i'}{2}\,\frac{\cos.\varepsilon}{r}\,ds\,ds' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (11)$$

$$-\frac{i\,i'}{2}\,\frac{\cos.\theta.\cos.\theta'}{r}\,ds\,ds' \;.\;.\;.\;.\;. \quad (12)$$

$$-i\,i'\frac{\cos.\varepsilon}{r}\,ds\,ds' + \frac{i\,i'}{2}\,\frac{\cos.\theta.\cos.\theta'}{r}\,ds\,ds' \;.\;. \quad (13)$$

$$+\frac{i\,i'}{2}\,\frac{\cos.\varepsilon}{r}\,ds\,ds' - i\,i'\frac{\cos.\theta.\cos.\theta'}{r}\,ds\,ds' \;.\;. \quad (14)$$

daar al deze vormen, indien één stroom gesloten is, hetzelfde resultaat geven, terwijl iedere term hierbij gevoegd mag worden die, in dat geval, eveneens verdwijnt.

Het blijkt hieruit hoe gevaarlijk het is uit een integraalwet terstond tot een elementairwet te besluiten. Het weinig gedefinieerde karakter van AMPÈRES wet, reeds vroeger door GRASSMANN*) aangetoond, is aan dezelfde oorzaak te wijten; het is even ongeoorloofd zegt CARL NEUMANN in zijne *Elektrische Kräfte* als wilde men uit de vergelijking $a + b = c + d$ het besluit trekken dat $a = c$ en $b = d$.

HELMHOLTZ heeft beproefd †) alle tot dien tijd aangegeven vormen voor de elementairpotentiaal, waarvan die van MAXWELL:

$$-\frac{1}{4}\,\frac{ii'}{r}(\cos.\,\varepsilon + \cos.\,\theta\,\cos.\,\theta')\,ds\,ds'$$

ons nog te noemen overblijft, onder één vorm, zoo algemeen mogelijk, te vereenigen.

Hij voegt hiervoor bij NEUMANN'S vorm (11) de uitdrukking:

$$+ B\,ii'\,\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\,ds\,ds'$$

die blijkbaar, omdat zij eene volkomen differentiaal is ten opzichte van s en s_1, verdwijnt als een der beide stroomen gesloten is.

Stelt men nu: $$B = -\frac{1 - k}{4}$$

waarin k willekeurig is, dan wordt de potentiaal:

$$+\frac{1}{4}\,\frac{ii'}{r}\,\{(1 + k)\cos.\,\varepsilon + (1 - k)\cos.\,\theta\cos\theta'\}\,ds\,ds' \quad (15)$$

---

*) Pogg Ann. Bd. 64.

†) CRELLE'S Journal Bd. 72.

zooals blijkt indien men in het oog houdt dat

$$\frac{d\left(r\frac{dr}{ds}\right)}{ds'} = -\cos.\varepsilon$$

Voor $k = 1$ stemt deze uitdrukking (15) overeen met NEUMANN'S vorm (11), voor $k = -1$ met WEBER'S vorm (12), voor $k = 3$ en $k = -3$ met de door ons in (13) en (14) aangegeven vormen, voor $k = o$ eindelijk met MAXWELL'S potentiaal.

Men kan echter de zaak van eene andere zijde beschouwen dan wij gedaan hebben; in plaats van AMPÈRE'S formule voorop te stellen, kan men HELMHOLTZ'S algemeene potentiaal aannemen en vragen hoedanig hierdoor AMPÈRES wet zou worden veranderd.

Bij nader onderzoek naar de gevolgen der aanname van HELMHOLTZ, komt Prof. GRINWIS *), door terstond uit (15) de composanten der kracht te berekenen, tot het resultaat dat de werking dan niet als eene kracht volgens de verbindingslijn mag worden beschouwd (behoudens het geval $k = 1$); maar dat dan daarin krachten zijn opgenomen in de richtingen der elementen, die bij gesloten stroomen verdwijnen.

CARL NEUMANN heeft de questie omtrent het al of niet bestaan eener elementairpotentiaal uitgemaakt door de ervaring tot scheidsrechter in te roepen †).

Noemt men de potentiaal van twee stroomen op elkander V en de levendige kracht der ponderabele massa T, dan zal voor ieder tijdelement, volgens de definitie

---

*) Bijdrage tot de theorie der elektrod. potentiaal Kon. Ak. v. Wet. afd. Natuurk. 2de Reeks Deel V.

†) Die elektrischen Kräfte 1873. pag. 74.

van potentiaal in hoofdstuk I gegeven, de vergelijking gelden:

$$dT = -\left(\frac{dV}{da}da + \frac{dV}{da'}da' + \ .\ .\ enz.\right)\ .\ .\ (16)$$

waarin a, a' enz. de parameters zijn, die de ligging van een der stroomen ten opzichte van den anderen bepalen.

Noemt men nu de potentiaal van twee elementen op elkander v, dan is:

$$V = \Sigma\Sigma\, v\ ds\ ds'$$

en stelt men: $$dT = \Sigma\Sigma\, dT_o$$

waarin dan dT_o den arbeid beduidt door 't element ds op ds' uitgeoefend, dan wordt (16):

$$\Sigma\Sigma\, dT_o = -\Sigma\Sigma\left(\frac{d.\,(v\ ds\ ds')}{da}da + \ .\ .\ enz.\right)\ .\ (17)$$

Een integraalwet van dezen vorm kan dus overeenstemmen met een elementairwet van den vorm:

$$dT_o = -\left(\frac{d\,(v\ ds\ ds')}{da}da + \ .\ .\ enz.\right)\ .\ .\ .\ (18)$$

Het recht van bestaan van deze elementairwet is dus gebaseerd op het bestaan eener elementairpotentiaal. Past men nu deze vergelijking toe op een stroomring uit twee deelen A en A′ samengesteld, waarvan A draaibaar is om eene gegevene as, A′ daarentegen vast ligt, terwijl de andere stroomring B vervangen wordt door eene solenoide, waarvan de geometrische as met de draaiingsas samenvalt *), zoo zal de relatieve stand tusschen A en de solenoide bij draaiing niet veranderen.

*) Faraday's rotatietoestel. WIEDEMANN Bd. II pag. 142 1873.

De door de solenoide, gedurende een tijdelement, op het deel A uitgeoefende arbeid heeft dan de waarde:

$$dT = - \frac{d. \Sigma\Sigma (v\, ds\, ds'}{d\alpha} d\alpha$$

waarin α de draaiingshoek is en de integraal moet uitgestrekt worden over de geheele solenoide en het bewegelijk gedeelte A van den geleider.

Daar echter hun relatieve stand niet verandert, is deze arbeid nul; bevindt zich dus A in rust dan is B niet in staat beweging in het leven te roepen, hetgeen met de ervaring in strijd is.

Het resultaat is dus:

Dat voor gesloten stroomen NEUMANN's integraalwet van kracht is.

Dat voor één gesloten stroom en één element de potentiaalvorm door HELMHOLTZ aangegeven moet gebruikt worden als de meest algemeene.

Dat een elementairpotentiaal, die dezelfde eigenschappen heeft als die van NEUMANN, van nl. een maat te zijn tegelijk voor den gedanen arbeid en de aangewende kracht, niet kan bestaan.

HOOFDSTUK IV.

Inductie.

---

§ 11. *Wetten der Inductie.*

De vergelijking van 't behoud van arbeidsvermogen:

$$dT + dV = o$$

in het vorige hoofdstuk (form. (16)) opgesteld, heeft alleen betrekking op de potentiaal van AMPÈRES kracht formule, alleen dus voor de ponderomotorische krachten die de evenwichtstoestanden, waaruit die formule is afgeleid, bepalen.

De inductieverschijnselen bewijzen echter dat er nog andere, zuiver elektrische krachten in 't spel zijn, die analogie vertoonen met die bij de statische elektriciteit beschouwd; m. a. w. dat een stroom, afzonderlijk beschouwd, een zeker potentieel arbeidsvermogen voorstelt, dat zich uit in den extrastroom bij opening of sluiting en dat er eveneens zulk een arbeidsaequivalent bestaat, wanneer twee stroomen zich in elkanders nabijheid bevinden, hetwelk in actueele energie wordt omgezet wanneer die stroomen buiten elkanders invloed worden gebracht.

Om een maat voor deze energie te vinden, stellen wij ons voor dat het elektrische agens, vloeistof of materie, gevormd wordt door eene elastische stof, wier evenwichtstoestand door uitwendige krachten kan veranderd worden.

Zijn de composanten dier uitwendige kracht op de eenheid van massa in 't punt m (x, y, z) X, Y en Z en bevindt zich de elastische stof in rust, dan geldt de vergelijking der hydrostatica:

$$\mathrm{dp} = \varrho\,(\mathrm{X\,dx} + \mathrm{Y\,dy} + \mathrm{Z\,dz}) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

waarin dp de aangroeiing in druk voorstelt, indien men van 't beschouwde punt overgaat tot het punt $(x + dx, y + dy, z + dz)$ en ϱ de densiteit in 't punt (x, y, z) die, bij eene elastische stof, eene functie is van p. Even goed kan men echter in de bovenstaande formule de coordinaten van m constant beschouwen en X, Y en Z veranderlijk met den tijd.

(X dx + Y dy + Z dz) wordt dan de arbeid door de uitwendige kracht op de eenheid van massa in den tijd dt verricht en dp de verandering in druk, die in dien tijd in 't punt m heeft plaats gegrepen.

Bevindt zich de elastische stof in beweging, dan wordt (1):

$$\mathrm{dp} = \varrho\,(\mathrm{X\,dx} + \mathrm{Y\,dy} + \mathrm{Z\,dz}) - \frac{\varrho}{2}\,\mathrm{dv}^2 \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

waarin v de snelheid; is dus die snelheid constant of kan de levendige kracht dier stof verwaarloosd worden, zoo wordt de verandering in druk onafhankelijk van de snelheid der beweging.

De formule (1) kan geschreven worden:

$$dp = \varrho\, dV \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \quad (3)$$

waarin V de potentiaal is der krachten werkende op de eenheid van massa.

Om nu de kracht te vinden die een stroomgeleider s, waarin een stroom I loopt, op de eenheid van massa in het stroomelement $d\sigma$ uitoefent, hebben wij slechts de formule van AMPÈRE te beschouwen om te zien dat wat daar intensiteit genoemd wordt, in nauw verband moet staan met wat bij gewone krachten massa genoemd wordt.

Het is dus logisch voor de potentiaal dier kracht aan te nemen HELMHOLTZ's potentiaal gedeeld door I', indien een stroom van deze intensiteit zich in den geleider σ bevindt.

Noemen wij dus:

$$V = - I\, I' \left\{ (1 + K) \cos. \varepsilon + (1 - K) \cos. \theta \text{ en } \theta' \right\},$$

dan wordt de potentiaal der krachten, die een gesloten stroom s uitoefenen op de eenheid van massa in 't element $d\sigma$,

$$d\sigma \int \frac{V}{I'}\, ds$$

Nemen wij nu aan, zooals algemeen gedaan wordt, dat bij den galvanischen stroom de voorwaarden vervuld zijn waardoor (2) gelijk wordt aan (1), m. a. w. dat men te doen heeft met gelijkvormige stroomen of dat aan het elektrisch agens geen inertie wordt toegekend, zoo wordt de toename in druk:

$$dp = \varrho \, d\sigma . d. \int \frac{V}{I} ds \text{. . . . . (4)}$$

De overeenkomst van deze formule met die door F. E. NEUMANN gegeven voor de door inductie ontwikkelde elektrom. kracht, is volkomen indien men de verandering in druk gelijk stelt aan de elektrom. kracht.

De analogie tusschen de verschijnselen die bij de werking van uitwendige krachten op een elastisch medium ontstaan en de inductieverschijnselen is evident; ook hier ontstaat vermeerdering of vermindering in druk naarmate het centrum, van waar de kracht uitgaat, nadert of zich verwijdert en evenzoo ontstaat er beweging der bestanddeelen, wanneer de werking der kracht ophoudt.

Een populair voorbeeld hiervan geven de eb en vloed stroomen die zouden ontstaan indien de maan ten opzichte der aarde werd bewogen.

Het minusteeken in de aangenomen potentiaal verliest zijne beteekenis na deeling door een der intensiteiten; men moet dus aan eene willekeurige richting van den stroom het teeken plus toekennen om de tegenovergestelde te definieeren, dan geeft de vergel. (4) de omkeering van den inductiestroom indien de richting van den inducent wordt omgekeerd; de wet van LENZ kan echter uit onze hypothese niet volgen zoolang het mechanisch verschil tusschen stroomen van tegengestelde richting niet is aangegeven.

De factor ϱ is bij NEUMANN constant en heet de inductiecoëfficient. Om echter te bewijzen dat het constant zijn van dezen factor geene uitgemaakte zaak is, zij het voldoende de volgende regelen van NEUMANN zelf aan te halen.

»Indessen giebt es Inductions-Erscheinungen welche nur durch die Annahme erklärt werden zu können scheinen dass eine momentan wirkende Ursache die elektrom. Kraft nicht bloss momentan inducirt sondern während einer gewissen, wenn auch äusserst kurzen, Zeit, *wonach* ϱ *also nicht constant, sondern eine Function der Zeit ist.*"

Nemen wij echter aan dat in de meeste gevallen ϱ als constant mag beschouwd worden; dan wordt, volgens (4), de totale elektrom. kracht gedurende den tijd dt in den geleider σ door den geleider s ontwikkeld:

$$\frac{de}{dt} dt = \varrho . d. \int\int \frac{V}{I} ds\, d\sigma = \varrho \cdot \frac{d\,(IW)}{dt} dt \quad . \; . \; . \; (5)$$

als W de potentiaal der beide geleiders, doorloopen door stroomen van de intensiteit één, op elkander voorstelt.

Het is natuurlijk dat het hetzelfde is of de verandering der potentiaal ontstaat door verandering van I of van W of van beiden. Nemen wij aan dat W verandert door wegvoering van een der stroomgeleiders langs den weg w dan is:

$$\frac{de}{dt} dt = \varrho\, I \frac{dW}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} dt$$

d. i. de elektromotorische kracht is ieder oogenblik evenredig aan de snelheid van beweging; deze vergelijking, gedeeld door den weerstand, stelt voor wat NEUMANN noemt »*differentiaalstroom*," geintegreerd tusschen bepaalde grenzen van w, wordt de elektrom. kracht onafhankelijk van de snelheid; de vergelijking, gedeeld door den weerstand, stelt dan NEUMANN's »*integraalstroom*" voor.

Op dezelfde wijze volgen uit het boven aangenomene de wetten der extrastroomen.

Hier treedt echter ieder element tweemaal op, eenmaal als inducent en eenmaal als geinduceerd zoodat:

$$\frac{de}{dt}\,dt = \varrho\,\frac{d.\,(2\,IP)}{dt}\,dt = 2\varrho\, I\,\frac{dP}{dt}\,dt + 2\varrho\, P\,\frac{dI}{dt}\,dt \quad . . \,(6)$$

waarin de eerste term van het tweede lid betrekking heeft op vormverandering, de tweede op intensiteitsschommelingen. *P* beduidt hier dan de potentiaal van den stroomgeleider op zich zelf.

§ 12. *Energie bij inductie.*

Reeds in 1847 heeft Helmholtz in zijne »Erhaltung der Kraft," voor speciale gevallen, uit de vergelijking van 't behoud van arbeidsvermogen de wet der inductie getracht af te leiden en den inductiecoefficient bepaald. Beweegt zich nl. een magneet van hard staal, waarin dus geene inductiestroomen worden opgewekt, onder den invloed van een geleider waarin een stroom van de intensiteit *I* stroomt, dan zal, wanneer de potentiaal van den magneet op den stroom, doorloopen door de stroomeenheid, aangeduid wordt door v, de stroom aan den magneet in den tijd *dt* eene hoeveelheid levendige kracht mededeelen:

$$-I\,\frac{dv}{dt}\,dt$$

Deze arbeid moet door de batterij geproduceerd worden, zoowel als de hoeveelheid warmte $I^2 R\,dt$ in den geleider opgewekt. Werkt dus in de batterij eene elektrom. kracht *A*, dan is:

$$AI\,dt = I^2R\,dt - I\frac{dv}{dt}dt$$

$$I = \frac{A + \frac{dv}{dt}}{R}$$

of is $A = o$

$$I = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

Kiest men de eenheid van weerstand dus zóó dat de eenheid van stroom gedurende de tijdseenheid eene hoeveelheid warmte ontwikkelt aequivalent met de eenheid van arbeid, dan wordt door de beweging van den magneet een stroom ontwikkeld, waarvan de elektrom. kracht gelijk is aan $\frac{dv}{dt}$.

Bij 't gebruik van deze eenheden is dus de inductie-coëfficient gelijk aan de eenheid.

Om de vergelijking van 't behoud van arbeidsvermogen algemeen te verkrijgen kunnen wij, volgens *Helmholtz* *), de wet van *Ohm* toepassen.

Stroomt in een geleider waarin de elektrom. kracht A werkt, een stroom van de intensiteit I, terwijl zich in de nabijheid een stroom van de intensiteit I' bevindt, dan is:

$$IR = A + \frac{d\,(2\,IP)}{dt} + \frac{d(I'W)}{dt}$$

$$I^2R = AI + d.\,\frac{(I^2P)}{dt} + II'\frac{dW}{dt}$$

I^2P is de potentiaal van den stroom op zich zelf, groeit dus de intensiteit in den geleider aan tot I, dan heeft

*) Pogg. Ann. Bd. 83 en Crelle's Journal Bd. 72.

de kracht die den stroom drijft een arbeid te overwinnen door — I^2P aangegeven, terwijl, indien de stroom van I tot o afneemt, eene daaraan aequivalente hoeveelheid warmte ontstaat.

$II'W$ is de potentiaal der geleiders op elkander; zij stelt den arbeid voor, dien de krachten der batterij verrichten moeten omdat zich een stroom I' in de nabijheid bevindt, wordt I' verwijderd dan ontstaat eene warmte in den geleider aequivalent met $II'W$.

Dezelfde warmte zal ontstaan in den anderen geleider voor welken de vergelijking geldt:

$$I'^2R' = AT' + d.\frac{(I'^2P')}{dt} + II'\frac{dW}{dt}.$$

NOOT.

Dat de eerste en laatste der drie op bladz. 24 voorkomende integralen bij integratie over den gesloten stroom s nul worden, kan op de volgende wijze bewezen worden.

De coordinaten van 't element ds' mogen zijn: a, b en c en die van eenig element van den gesloten stroom in 't algemeen: x, y en z.

Daar cos. (σ ds') constant is, wordt de eerste integraal:

$$\int \frac{\cos.\ \theta}{r\,(1 + \cos.\,(r\,\sigma))}\, ds$$

Nu is:

$$\cos.\,(r\,\sigma) = \frac{x - a}{r}\,l + \frac{y - b}{r}\,m + \frac{z - c}{r}\,n \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

als l, m en n de richtingscosinussen van σ zijn.

Bovendien is gegeven:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Zijn nu de vergelijkingen waardoor de kromme s bepaald wordt:

$$\varphi\,(x, y, z) = o \qquad \psi\,(x, y, z) = o \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

zoo kan men uit de vier laatste vergelijkingen de grootheden x, y en z elimineeren, waardoor het mogelijk is cos. ($r\,\sigma$) als functie der veranderlijke r alleen uittedrukken.

Daar nu: $\cos.\,\theta = \dfrac{dr}{ds}$

zoo wordt de integraal: $\int \frac{dr}{\chi(r)}$

die genomen moet worden tusschen gelijke waarden van r en dus verdwijnt.

De derde integraal:

$$\int \frac{\cos.(\sigma\, ds)}{r(1+\cos.(r.\sigma))} ds$$

kan om dat

$$\cos.(\sigma\, ds) = \frac{dx}{ds} l + \frac{dy}{ds} m + \frac{dz}{ds} n$$

gesplitst worden in de drie integralen:

$$\int \frac{l\, dx}{r(1+\cos.(r\,\sigma))},\ \int \frac{m\, dy}{r(1+\cos.(r\,\sigma))},\ \int \frac{n\, dz}{r(1+\cos.(r\,\sigma))}$$

Door middel der vergelijkingen (1) en (2) kan men nu $r(1+\cos.(r\,\sigma))$ uitdrukken in functie van x, y en z en uit de vergelijking die men hierdoor verkrijgt, met behulp der vergelijkingen (3), achtereenvolgens telkens twee der veranderlijken x, y en z elimineeren, waardoor alle drie bovenstaande integralen den vorm aannemen:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} \psi(\alpha)\, d\alpha$$

en dus nul worden.

Het bewijs van het nul worden der tweede integraal van bladz. 24, bij integratie over den gesloten stroom s', is volkomen analoog met dat van het nul worden der eerste integraal over s.

Beschouwt men dan een bepaald element ds, dan wordt $\cos.(\sigma\, ds)$ constant, de coordinaten van ds constant en die van eenig element van s' veranderlijk.

THESES.

I.

In manchen Beziehungen lässt sich von der physischen Existenz der durch das Potential ausgedrückten Arbeit mit mehr Recht sprechen als von der physischen Existenz einer Kraft. WILHELM WEBER.

II.

WEBERS methode om tot zijn potentiaalvorm te komen (Elektrod. Massbestimm. insbes. über die Erh. der Energie 4) is onjuist.

III.

Ten onrechte beweert MAXWELL (Electricity and Magnetism Vol. 1, 36):

Electricity, as a physical quantity is not, like heat, a form of energy.

zoo wordt de integraal: $\int \frac{dr}{\chi(r)}$

die genomen moet worden tusschen gelijke waarden van r en dus verdwijnt.

De derde integraal:

$$\int \frac{\cos.(\sigma\, ds)}{r(1+\cos.(r.\sigma))}\, ds$$

kan om dat

$$\cos.(\sigma\, ds) = \frac{dx}{ds}\, l + \frac{dy}{ds}\, m + \frac{dz}{ds}\, n$$

gesplitst worden in de drie integralen:

$$\int \frac{l\, d\, x}{r(1+\cos.(r\,\sigma))},\ \int \frac{m\, dy}{r(1+\cos.(r\,\sigma))},\ \int \frac{n\, d\, z}{r(1+\cos.(r\,\sigma))}$$

Door middel der vergelijkingen (1) en (2) kan men nu $r(1+\cos.(r\,\sigma))$ uitdrukken in functie van x, y en z en uit de vergelijking die men hierdoor verkrijgt, met behulp der vergelijkingen (3), achtereenvolgens telkens twee der veranderlijken x, y en z elimineeren, waardoor alle drie bovenstaande integralen den vorm aannemen:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} \psi(\alpha)\, d\alpha$$

en dus nul worden.

Het bewijs van het nul worden der tweede integraal van bladz. 24, bij integratie over den gesloten stroom s', is volkomen analoog met dat van het nul worden der eerste integraal over s.

Beschouwt men dan een bepaald element ds, dan wordt $\cos.(\sigma\, ds)$ constant, de coordinaten van ds constant en die van eenig element van s' veranderlijk.

THESES.

I.

In manchen Beziehungen lässt sich von der physischen Existenz der durch das Potential ausgedrückten Arbeit mit mehr Recht sprechen als von der physischen Existenz einer Kraft. WILHELM WEBER.

II.

WEBERS methode om tot zijn potentiaalvorm te komen (Elektrod. Massbestimm. insbes. über die Erh. der Energie 4) is onjuist.

III.

Ten onrechte beweert MAXWELL (Electricity and Magnetism Vol. I, 36):

Electricity, as a physical quantity is not, like heat, a form of energy.

IV.

De questie, welke potentiaal aan de kracht moet worden toegeschreven die een gesloten stroom op een element uitoefent, wordt door het aannemen van HELMHOLTZ's potentiaalvorm niet opgelost.

V.

Het is niet mogelijk de wetten der inductie uit het beginsel van 't behoud van arbeidsvermogen af te leiden.

VI.

De natuurlijke draaiing van 't polarisatievlak is een argument tegen de theorie van MAXWELL.

VII.

De formule van ijzerchloruur moet een veelvoud zijn van $Fe\ Cl_2$.

VIII.

Er zijn niet genoeg redenen om STRECKERS formulen van afgeleiden van urinezuur boven die van Kolbe te verkiezen.

IX.

Het zure karakter der hydroxylgroep bij organische verbindingen wordt bepaald door afwezigheid van Hydrogenium in de nabij gelegen groepen.

X.

De hypothesen der Chemie omtrent valentie en constitutie kunnen eerst tot hare volle waarde komen, nadat de physica, door verbeterde quantitatieve methoden, op het gebied van licht en warmte, de middelen tot kritiek heeft geleverd.

XI.

De geschiedenis der Chemie bewijst, dat hypothesen vaak schadelijk zijn voor de ontwikkeling eener wetenschap.

XII.

Les phenomènes vitaux sont le résidu de la chimie comme la chimie elle même était le résidu de la physique.

Littré: La science au point de vue philosophique.

XIII.

Het excretievermogen der plantenwortels mag niet betwijfeld worden, wanneer men aanneemt dat zij hunne functie door osmose verrichten.

XIV.

Proeven met afgesneden takken hebben weinig waarde bij 't onderzoek naar physiologische eigenschappen.

XV.

De zware regens der tropische gewesten kunnen verklaard worden door het absorptie- en uitstralingsvermogen van waterdamp.

XVI.

De fossiele flora en fauna eener geologische formatie geeft weinig zekerheid omtrent het bij de vorming geheerscht hebbend klimaat.

XVII.

Het zou beter zijn kracht, met tijd en ruimte, als elementair begrip aan te nemen, dan haar schijnbaar te definieeren als oorzaak van beweging.

XVIII.

Deductie geeft kennis, inductie wetenschap.

XIX.

De statistiek is de eindvorm van onderzoek der positieve wetenschappen.

XX.

De natuurlijkste wijze van rangschikking der wetenschappen is voor den wijsgeer, zoowel als voor den natuurhistoricus, die, welke berust op de genealogie.

XXI.

C'est une erreur de croire que l'étude des sciences émousse le sentiment de la poesie; bien plus elles ont, quand elles atteignent certaines hauteurs une naturelle affinité pour elle.

Littré Ampère et l'electromagnetisme.