



De bicentrale projectie

<https://hdl.handle.net/1874/255545>

A^{no} 192

Phys. fac 30/Nov

DE BICENTRALE

PROJECTIE

N. BAKKER

DE BICENTRALE PROJECTIE



Diss. Utrecht 1909

DE BICENTRALE PROJECTIE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD
VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE, AAN
DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN
DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. H. ZWAARDEMAKER,
HOOGLEERAAR IN DE GENEESKUNDE, VOLGENS
BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT,
TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DINS-
DAG 30 NOVEMBER 1909, DES NAMIDDAGS 4 UUR

DOOR

NANKE BAKKER

GEBOREN TE IJLST.



's-GRAVENHAGE — C. BREDÉE

Bij het voltooiën van dit proefschrift is het me een aangename taak U allen, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige faculteit der Universiteit te Utrecht, mijn hartelijken dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

In het bijzonder betuig ik U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, mijne erkentelijkheid voor den steun, dien ik ook bij het vervaardigen van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING.	1

HOOFDSTUK I.

ALGEMEENE BESCHOUWINGEN	15
-----------------------------------	----

HOOFDSTUK II.

METRISCHE BETREKKINGEN	50
----------------------------------	----

HOOFDSTUK III.

BIJZONDERE PROJECTIESTELSLS	78
---------------------------------------	----

INLEIDING.

De tijd is reeds lang verstreken, dat de Beschrijvende Meetkunde niets anders beteekende dan eene zekere vaardigheid in het teekenen. Sedert men er in geslaagd is door middel van dezen tak der meetkunde belangrijke projectieve eigenschappen af te leiden, sedert de Beschrijvende Meetkunde ons in staat heeft gesteld hoogst belangrijke theorema's te ontwikkelen voor de „Geometrie der Lage", sedert dien tijd is haar naam als wetenschap gevestigd.

Trouwens het beste bewijs voor hare belangrijkheid is wel, dat in den loop der tijden de projectieeler een zoodanige vlucht heeft genomen, dat men op allerlei manieren, volgens allerlei methoden, eene practische wijze van projecteeren heeft trachten te vinden.

Het streven was bij het zoeken van eene methode zooveel mogelijk aan de volgende 5 eischen recht te laten wedervaren:

1°. Gelijksoortige elementen moeten worden afgebeeld door elementen, die ook onderling weer gelijksoortig zijn.

2°. Gelijksoortige elementen moeten bij voorkeur,

indien zulks mogelijk blijkt, worden afgebeeld door elementen die niet alleen onderling gelijksoortig zijn, maar bovendien gelijksoortig met de oorspronkelijke elementen, waarvan ze de afbeelding moeten voorstellen.

3°. Indien mogelijk moet, wanneer één element P wordt afgebeeld door één of meer elementen p , omgekeerd door omkeering van de geometrische bewerking, uit die één of meer elementen p , weer alleen het element P voor den dag komen.

4°. De wijze van afbeelding dient zoo te worden gekozen, dat de afbeelding ons een duidelijk beeld geeft van het origineel.

5°. Men moet uit de projectie gemakkelijk de lengte van lijnen, de grootte van hoeken, enz. kunnen afleiden, die in het origineel voorkomen.

We willen in de eerste plaats een kort overzicht geven van de tot nu toe bekende projectie-methoden en van de wijze, waarop de afbeelding bij elk harer plaats heeft. Ook zullen we het voordeel van de eene methode boven de andere terloops even aanstippen.

De chronologische volgorde, waarin deze methoden zijn ontstaan, zullen we bij de indeeling in groepen buiten beschouwing laten. De groepeerings zal alleen berusten op analogie in methode, en in hoofdzaak neerkomen op die, welke gevolgd is door Dr. van Peschka in zijn uitgebreid werk over „Darstellende Geometrie”.

I. Afbeeldingsmethoden met één projectievlak.

a. *De Centrale Projectie.*

Deze methode is voldoende bekend; het lijkt me dus overbodig hierbij lang stil te staan.

Een vast punt wordt aangenomen als projectiecentrum; een willekeurig vlak als projectievlak. Een punt P wordt nu afgebeeld op het projectievlak of tafereel als doorsnede van de projecteerende lijn van P met dit vlak.

Het nadeel van deze methode is, dat op deze manier aan een bepaald punt P van de ruimte wel een enkel punt P' wordt toegevoegd, maar dat omgekeerd bij het punt P' behooren ∞ vele punten P van de ruimte, nl. alle punten van de lijn, die P' vereenigt met het projectiecentrum.

Evenzoo wordt eene lijn l voorgesteld door de snijlijn van het projecteerend vlak van l met het tafereel, maar hetzelfde bezwaar van hierboven is van kracht, nl. dat wel bij eene bepaalde lijn l , slechts ééne enkele lijn l' behoort, maar dat omgekeerd bij l' ∞ vele lijnen l van de ruimte behooren, n.l. alle lijnen van het vlak, dat l'

verbindt met het centrum van projectie. We zien dus duidelijk, dat deze ééne projectie l' niet voldoende is om de lijn l te bepalen.

Daar een punt P door zijne projectie P' in het algemeen ook niet bepaald is, zal eene lijn natuurlijk evenmin bepaald zijn door de projecties van 2 willekeurige punten. Men is aan dit bezwaar tegemoet gekomen door hiervoor bijzondere punten te kiezen, n.l. het *doorgangspunt* van de lijn met het projectievlak en de projectie van het oneindig ver gelegen punt van de lijn, *vluchtpunt* genaamd; dit laatste punt is eveneens te beschouwen als de doorgang van eene lijn evenwijdig met de gegevene door het projectiecentrum getrokken. Door deze 2 punten nu is de lijn volkomen bepaald.

Een willekeurig punt wordt nu bepaald door zijne centrale projectie en een willekeurigen drager, dus feitelijk als snijpunt van eene willekeurige lijn met de projecteerende lijn van het punt. Voor den willekeurigen drager wordt dikwijls gekozen eene lijn loodrecht op het projectievlak. Het punt is dan als het ware bepaald door zijne centrale en zijne orthogonale projectie.

b) *De Klinographische of Scheeve Projectie.*

Deze afbeeldingswijze verschilt in wezen niet van de centrale projectie. Het centrum van projectie is in eene bepaalde richting naar het oneindige verplaatst, zoodat de projecteerende lijnen van verschillende punten an de ruimte alle evenwijdige lijnen zijn.

Hetzelfde bezwaar is natuurlijk aan deze methode verbonden als aan de vorige, n.l. dat de projectie van een punt, respectievelijk van eene lijn, overeenkomt met ∞ vele punten en lijnen van de ruimte.

Op kunstmatige wijze is ook hier in dit bezwaar voorzien; het is evenwel duidelijk, dat voor de bepaling van eene lijn het vluchtpunt geen dienst kan doen, daar het projectiecentrum zelf in het oneindige ligt.

Om een punt nader te bepalen wordt bij deze methode gebruik gemaakt van een zoogenaamd *distantievlak*, d. i. een vlak op bepaalden afstand van het projectievlak gelegen, en wel zoodanig, dat bij de bepaling van een punt niet alleen zijne projectie, d. i. het snijpunt van de projecteerende lijn met het beeldvlak, maar bovendien haar snijpunt met het distantievlak eene rol speelt.

De klinographische methode heeft dus om een punt vast te leggen, behalve het beeldvlak of tafereel nog een tweede vlak noodig, dat op bepaalden afstand evenwijdig loopt met dit beeldvlak. We zien dus, dat de scheeve projectie feitelijk een overgang vormt tot de volgende groep:

II. Afbeeldingsmethoden door twee projecties.

a. *Orthogonale Projectie van Monge.*

Deze afbeeldingsmethode is een bijzonder geval van eene meer algemeene, waarvan de beschrijving in het kort als volgt luidt:

Er zijn twee projectievlakken, die een willekeurigen hoek met elkaar maken en 2 centra van projectie. Daar we evenwel slechts één vlak als tekenvlak kunnen gebruiken, is één der projectievlakken met de daarin gelegen projecties om de doorsnede der vlakken gewenteld, tot het met het andere vlak (tevens tekenvlak) samenvalt.

Een punt P wordt op het 1^e projectievlak uit het 1^e centrum, en uit het 2^e centrum op het 2^e vlak geprojecteerd.

De bijzondere voorwaarden bij de methode van *Monge* zijn nu de volgende:

- 1^o de projectievlakken staan loodrecht op elkaar.
- 2^o het 1^e, respectievelijk 2^e projectiecentrum, is zoodanig naar het oneindige verplaatst, dat de 1^e, respectievelijk 2^e projecteerende lijn van een punt loodrecht staat op het 1^e, respectievelijk 2^e projectievlak.

Het groote voordeel van deze methode is:

Een punt P en eene lijn l worden afgebeeld respectievelijk door 2 punten P_1 en P_2 en door 2 lijnen l_1 en l_2 , terwijl omgekeerd bij dit tweetal punten P_1 en P_2 slechts één enkel punt P van de ruimte behoort, en in het algemeen bij l_1 en l_2 slechts ééne enkele lijn l van de ruimte.

In sommige gevallen wordt gebruik gemaakt van een 3^e projectievlak, loodrecht op de beide anderen, en dienovereenkomstig van een 3^e in het oneindige

gelegen projectiecentrum, zoodanig dat de lijn, waardoor een punt op dit 3^e vlak wordt geprojecteerd, loodrecht staat op dit 3^e vlak.

b) *Parallelogram-Projectie.*

Een ander bijzonder geval van de projectiemethode met 2 centra en 2 projectievlakken is de parallelogram-projectie, ook wel kortweg π -projectie genoemd.

Hier staan de projectievlakken niet loodrecht op elkaar, maar sluiten een willekeurigen hoek in. Denkt men zich in het 1^e projectievlak uit een willekeurig punt van de doorsnede (as) X eene loodlijn Z getrokken en uit hetzelfde punt in het 2^e projectievlak $\perp$ as eene lijn Y , dan is hier het 1^e projectiecentrum in het oneindige gelegen in de richting van Y en het 2^e centrum in de richting van Z .

M.a.w. de lijnen, die punten projecteeren op het 1^e projectievlak, zijn alle evenwijdig met Y en die punten projecteeren op het 2^e projectievlak, evenwijdig met Z .

c) *Methode van de Scheeve Projectie met twee onderling loodrechte projectievlakken.*

Bij deze methode wordt één der 2 vlakken, bijv.

het verticale, gekozen als teekenvlak; het andere, dat er loodrecht op staat, dus het horizontale vlak, wordt beschouwd als hulpvlak en *grondvlak* genoemd; het verticale vlak heet *projectievlak*. Het projectiecentrum is in eene bepaalde richting in het oneindige gelegen.

Een punt nu wordt aangewezen door 2 projecties. De 1^e projectie van een punt A is nu het snijpunt van de projecteerende lijn s door A met het projectievlak, het verticale vlak; dit punt worde voorgesteld door a_s .

Om de andere projectie te vinden hebben we noodig de orthogonale projectie a_2 van het punt A op het horizontale vlak. We krijgen n.l. de 2^e projectie van het punt A op het verticale vlak door a_2 op dezelfde wijze uit het oneindig ver gelegen centrum te projecteeren door middel van de projecteerende lijn s' ; deze projectie worde a'_s genoemd.

Gemakkelijk is aan te toonen dat de verbindingslijn a_s, a'_s loodrecht staat op de as , de snijlijn der 2 loodrechte vlakken, terwijl de afstand a_s, a'_s blijkbaar de hoogte aangeeft van A boven het horizontale vlak.

We kunnen deze methode dus kortweg aldus formuleeren:

Een punt wordt aangegeven door 2 projecties op één enkel vlak; de 1^e projectie is de scheeve projectie van het punt zelf en de 2^e projectie is de scheeve projectie van de orthogonale projectie op het grondvlak.

Het voordeel van deze methode is haar aanschouwe-

lijkheid; ze heeft overigens natuurlijk de kenmerkende nadeelen van elke scheeve projectie, n.l. de moeilijkheid bij het bepalen van de lengte van lijnen en de grootte van hoeken, m. a. w. bij het afleiden van metrische betrekkingen.

Immers de scheeve projectie heeft in het algemeen het voordeel, dat ze bijzonder geschikt is voor het afleiden van projectieve betrekkingen, terwijl bij de orthogonale projectie gemakkelijker allerlei metrische betrekkingen worden opgespoord.

Ten einde deze beide voordeelen te combineeren, heeft men de bovenstaande methode eenigszins gewijzigd; men heeft n.l. in plaats van de scheeve projectie de orthogonale afbeeldingswijze gekozen; de methode, die hieruit is ontstaan, draagt den naam van:

d) *Orthographische Parallelperspectief.*

Zooals in bovenstaande regels reeds in het kort werd uiteengezet, is het de bedoeling om in plaats van de scheeve projectie de orthogonale methode toe te passen, niet alleen op het origineel, d.i. de te projecteeren figuur, maar ook op de „grondprojectie”, d.i. de orthogonale projectie op het grondvlak.

Het is evenwel duidelijk, dat bij loodrechten stand van projectievlak en grondvlak de orthogonale projectie van de „grondprojectie” geheel in de as valt; hierdoor zou aan duidelijkheid en aanschouwelijkheid verloren

gaan, wat aan den anderen kant tengevolge van het orthogonaal projecteeren zou worden gewonnen. Om deze redenen heeft men afgezien van het loodrechte systeem, en 2 vlakken gekozen, die scheefhoekig op elkaar staan.

Een punt A wordt nu afgebeeld:

1° door de orthogonale projectie a ,

2° door de orthogonale projectie a' van a_2 d.i. van de orthogonale projectie van A op het grondvlak.

In het kort: Bij de orthographische parallelperspectief wordt niet alleen de ruimtefiguur zelf, maar ook de grondprojectie orthogonaal op het beeldvlak geprojecteerd.

III. Axonometrische Projectie.

Bij deze methode hebben we één hoofdprojectievlak of tafereel, nl. het vlak van teekening. Verder treden op 3 hulpprojectievlakken, die loodrecht op elkaar staan en elkaar dus snijden volgens 3 onderling loodrechte assen X , Y en Z ; de 3 assen snijden elkaar in het punt O .

Nu wordt een punt P achtereenvolgens orthogonaal geprojecteerd op de hulpvlakken, noemen we de projectie op het YZ -vlak P_x , die op het XZ -vlak P_y en die op het XY -vlak P_z . Het is duidelijk, dat PP_x , PP_y en PP_z nu 3 in één punt samenkomende ribben

zijn van een rechthoekig parallelopipedum, waarvan O het tegenover P gelegen hoekpunt is.

De eigenlijke projecties krijgen we op de volgende wijze:

In de eerste plaats worden de in O samenkomende loodrechte assen orthogonaal of klinographisch geprojecteerd op het tafereel; de projecties zijn weer 3 lijnen x , y en z samenkomende in één punt o , de projectie van O . Deze 3 lijnen worden de *axonometrische assen* genoemd.

Op het tafereel worden nu ook geprojecteerd, orthogonaal of klinographisch:

1° het punt P in p

2° de punten P_x , P_y en P_z

respectievelijk in p_x , p_y en p_z .

Het spreekt van zelf, dat er een analoog verband bestaat tusschen p , p_x , p_y en p_z als tusschen O , P_x , P_y en P_z .

Men spreekt van *orthographische axonometrie*, wanneer men op het tafereel orthogonaal projecteert; past men de scheeve projectie toe, dan spreekt men van *klinographische axonometrie*.

Als eene bijzondere soort van projectiemethode, moet volledigheidshalve nog worden vermeld:

IV. Centrale Projectie met Grondvlak.

Bij deze methode treden 2 vlakken op, één projectievlak en één grondvlak. Hierbij wordt niet alleen

de figuur zelf, maar ook de orthogonale projectie op het grondvlak centraal geprojecteerd op het projectievlak. We zien dus eenige overeenkomst met de scheeve projectie met 2 onderling loodrechte vlakken en met de orthographische parallelperspectief.

Uit deze beschouwingen blijkt ten duidelijkste, dat projectiemethoden met één enkel centrum en één enkel projectievlak (zonder hulpvlak) zonder meer onvoldoende zijn voor de afdoende bepaling van punten en lijnen der ruimte.

Op verschillende wijzen is getracht aan dit bezwaar tegemoet te komen:

Bij de centrale projectie, wat de lijn betreft, door invoering van doorgangspunt en vluchtpunt.

Bij de klinographische of scheeve projectie door invoering van het distantievlak.

Bij de orthogonale projectie van Monge en de parallelogram-projectie door invoering van een 2^e projectievlak en een 2^e centrum.

Bij de methode van de scheeve projectie met 2 onderling loodrechte vlakken, bij de orthographische parallelperspectief en bij de centrale projectie met grondvlak door de invoering van een hulpvlak als grondvlak, en ten slotte:

Bij de axonometrische projectie door de invoering van 3 onderling loodrechte hulp-projectievlakken. We zien dus, dat in het algemeen aan het bezwaar is tegemoet gekomen door de invoering van één of meer

hulpvlakken met behoud van één enkel centrum. Bij de projectie van Monge en de parallelogram-projectie zien we behalve een nieuw vlak ook nog een tweede projectiecentrum optreden.

De vraag ligt voor de hand, of de bezwaren ook uit den weg kunnen worden geruimd door:

1°. *één* enkel centrum met 2 projectievlakken, waarvan het eene als teekenvlak wordt gekozen, terwijl het andere evenals bij Monge in dit teekenvlak wordt neergeslagen,

2°. *twee* centra met één enkel projectievlak.

Mijns inziens loont het de moeite om elk van deze twee te onderzoeken. Daar evenwel het geval van één enkel centrum met 2 vlakken reeds meermalen is besproken, al is het dan ook in anderen vorm, in zooverre het 2° vlak hierbij als hulpvlak optreedt, zoo is mijne keuze gevallen op de 2° methode, die ik wil noemen „De bicentrale projectie met één projectievlak”.

Ook andere overwegingen hebben me hiertoe doen besluiten; in het begin van deze inleiding is namelijk betoogd, dat een eisch van elke projectiemethode dient te zijn: „*aanschouwelijkheid*”.

Het dunkt me, dat aan dezen eisch niet beter kan worden tegemoet gekomen dan door de methode zooveel mogelijk te doen overeenkomen met het natuurlijk proces, waardoor op ons netvlies een beeld wordt te voorschijn geroepen, het proces van zien met onze twee oogen.

Hoewel we dus de nadeelen krijgen van alle scheeve projectiemethoden, komt aan den anderen kant de methode met 2 centra en één projectievlak zoozeer overeen met ons natuurlijk proces van zien, dat ik me alleszins gerechtigd acht dit tot onderwerp van mijn proefschrift te kiezen.

We willen evenwel de zaak meer algemeen beschouwen, en dus de beide projectiecentra voorloopig geheel willekeurig kiezen, hetzij beide aan denzelfden kant, hetzij aan verschillende kanten van het tafereel. Later zullen we aan de centra bijzonderen stand ten opzichte van het projectievlak toekennen en terloops de eigenaardigheden in de projecties bespreken, die hiervan het gevolg zijn,

HOOFDSTUK I.

Algemeene Beschouwingen.

We kiezen het teekenvlak als projectievlak.

Bepaling van
het systeem.

Noemen we de beide projectiecentra O_1 en O_2 , dan wordt de ligging van deze punten ten opzichte van het tafereel aangegeven door de beide *distantiecircels*, dat dat zijn cirkels, die als middelpunten hebben $\overline{O_1}$ en $\overline{O_2}$, de voetpunten van de loodlijnen uit O_1 en O_2 op het projectievlak neergelaten, en als stralen de afstanden van de beide centra tot het projectievlak. Tevens wordt door een pijltje aangegeven, aan welken kant van het projectievlak het centrum ligt; dit wordt namelijk steeds aan dien kant gevonden, van waaruit het pijltje eene positieve draaiing aanwijst.

Het snijpunt van de verbindingslijn der centra, dat we O zullen noemen, is uitwendig of inwendig gelijkvormigheidspunt der beide distantiecircels, naar gelang de projectiecentra aan denzelfden kant of aan verschillende zijden van het projectievlak liggen.

Het projectiestelsel is dus volkomen bepaald door de beide distantiecircels; het punt O is dan onmiddellijk te construeeren.

Afbeelding van een punt. Een willekeurig punt P van de ruimte wordt afgebeeld door de snijpunten van de beide projecteerende lijnen O_1P en O_2P met het tafereel. Deze beide projecties worden respectievelijk voorgesteld door P' en P'' . Blijkbaar behoort dus in het algemeen bij één enkel punt P van de ruimte een tweetal punten P' en P'' , terwijl omgekeerd door deze 2 punten het punt P volkomen bepaald is.

Eene uitzondering vormen slechts de punten van de verbindingslijn O_1O_2 . Niet alleen treft het ons, dat in dit geval de beide projecties van een punt samenvallen in het snijpunt O van O_1O_2 met het tafereel, maar wat van meer gewicht is, dat *alle* punten van deze lijn zich op dezelfde wijze projecteeren, zoodat door deze samengevallen projecties het punt P niet bepaald is.

We zagen, dat bij een punt P in het algemeen behooren 2 projecties P' en P'' . De vraag ligt voor de hand, of omgekeerd 2 willekeurig gekozen punten P' en P'' van het projectievlak de projecties kunnen voorstellen van een punt P der ruimte. Denken we ons de beide lijnen O_1P' en O_2P'' getrokken, dan blijkt ons, dat dit alleen het geval is, wanneer deze 2 lijnen elkaar snijden, m. a. w. in één vlak liggen. Maar dan moeten klaarblijkelijk de lijnen $P'P''$ en O_1O_2 in ditzelfde vlak liggen, dus $P'P''$ gaat door het doorgangspunt O van O_1O_2 met het projectievlak.

We krijgen dus de volgende voorwaarde: *Zullen P' en P'' de projecties van een punt P der ruimte*

voorstellen, dan moet de verbindingslijn gaan door het punt O .

a) *Punt van het projectievlak.*

Bijzondere
punten.

Voor een punt P van het projectievlak vallen P' en P'' samen met het punt P zelf, dus $P' \equiv P'' \equiv P$. Een dergelijk punt zullen we kortweg voorstellen door P .

b) *Punten van de lijn $O_1 O_2$.*

Voor elk punt van deze lijn vallen 1° en 2° projectie samen met O ; we merkten reeds op, dat hierdoor het punt niet bepaald was. Om hieraan tegemoet te komen zullen we een 3° projectiecentrum moeten aannemen; hiervoor kiezen we het oneindig vergelegen punt in de richting van de loodlijn op het tafereel, zoodat een dergelijk punt P behalve door de samengevallen projecties $P' \equiv P'' \equiv O$ wordt aangewezen door zijn orthogonale projectie $\bar{P}$.

c) *De punten O_1 en O_2 .*

Blijkbaar is voor $P \equiv O_1$ de 1° projectie P' onbepaald terwijl $P'' \equiv O$. Het punt wordt nader bepaald door zijn orthogonale projectie $\bar{P} \equiv \bar{O}_1$.

Evenzoo is voor $Q \equiv O_2$ de 2° projectie Q'' onbepaald terwijl $Q' \equiv O$. Het punt wordt nader bepaald door zijn orthogonale projectie $\bar{Q} \equiv \bar{O}_2$.

d) *Punten, gelegen in een der 2 vlakken, respectievelijk door O_1 en O_2 gebracht evenwijdig aan het tafereel.*

Deze vlakken worden *eerste en tweede verdwijnvlak* genoemd. Voor punten van het 1^e verdwijnvlak valt P' in het oneindige; het punt is blijkbaar volkomen bepaald door P'' ; immers P is het oneindig vergelegen punt van OP' . Voor punten van het 2^e verdwijnvlak valt de 2^e projectie in het oneindige; deze punten zijn volkomen bepaald door de 1^e projectie. Is Q een dergelijk punt dan is Q' het oneindig vergelegen punt van OQ .

Afbeelding
van een
rechte lijn.

Daar elke rechte lijn volkomen bepaald is door 2 punten, kunnen we dus eene rechte lijn afbeelden door de projecties van twee harer punten, die we in het algemeen *geheel willekeurig* kiezen. Dit is een *kenmerkend verschil* met de centrale projectie, waar slechts 2 bijzondere punten voldoende waren om de lijn volkomen te bepalen.

Zijn P en Q de 2 willekeurige punten van de lijn l , dan stelt blijkbaar $P'Q'$ de 1^e projectie van de lijn voor, en $P''Q''$ de 2^e projectie. Verder gaan $P'P''$ en $Q'Q''$ door het punt O . Noemen we de beide projecties van l respectievelijk l' en l'' , dan is $l' \equiv P'Q'$ en $l'' \equiv P''Q''$.

Het is duidelijk, dat we l' en l'' ook kunnen beschouwen als de doorsneden van de beide projecteerende vlakken van l .

In het algemeen is door de projecties l' en l'' de lijn l der ruimte volkomen bepaald; l is namelijk de snijlijn van het vlak $(l'O_1)$ met het vlak $(l'O_2)$.

In de eerste plaats moet vermeld worden het snijpunt van de lijn met het projectievlak, *doorgangspunt* genoemd. Als punt van het tafereel vallen de beide projecties samen met het punt zelf. We zullen het doorgangspunt van eene lijn l in het vervolg voorstellen door S_l . Blijkbaar is S_l het snijpunt van l en l' . Bijzondere punten van eene lijn.

In de tweede plaats noemen we de *verdwijnpunten* van de lijn; het 1^e verdwijnpunt is het snijpunt van de lijn l met het 1^e verdwijnvlak en wordt voorgesteld door R_l ; het 2^e verdwijnpunt is het snijpunt van l met het 2^e verdwijnvlak en wordt voorgesteld door T_l .

Het 1^e verdwijnpunt R_l heeft de 1^e projectie R'_l in het oneindige en is volkomen bepaald door R'_l ; evenzoo ligt de 2^e projectie van T_l in het oneindige en is T_l volkomen bepaald door T'_l .

Is de lijn l gegeven door de beide projecties l en l' en zijn verder de beide distantiecircels gegeven en dus ook het punt O bekend, dan zijn de punten R'_l en T'_l gemakkelijk te construeeren.

Immers R'_l moet in de eerste plaats liggen op l' ; R'_l ligt in het oneindige op l' ; dus R'_l moet bovendien liggen op de lijn, die O vereenigt met het oneindig vergelegene punt R'_l , dus op de lijn door $O // l$.

We vinden dus R'_l op l' door middel van eene lijn door $O // l$. Eveneens kunnen we T'_l construeeren op l' door middel van eene lijn door $O // l$.

De punten R'_l en T'_l hebben dus eene zeer bijzondere

ligging; de 4 punten O , R_i , S_i en T_i zijn de 4 hoekpunten van een parallelogram.

Het punt O is in het projectiesysteem een vast punt; twee der overige punten zijn dus voldoende om het parallelogram te bepalen.

Ten slotte vermelden we het oneindig ver gelegen punt W van de lijn l . De 1^e en 2^e projectie van dit punt zullen we naar analogie van de centrale projectie noemen 1^e en 2^e vluchtpunt van l en voorstellen door W_i' en W_i'' .

W_i' ligt op l' ; W_i'' op l'' . Is S_i het doorgangspunt van de lijn, dan volgt onmiddellijk uit het feit, dat de projecteerende lijnen van W_i evenwijdig loopen met l : $W_i' S_i \equiv O_1 R_i$ en $W_i'' S_i \equiv O_2 T_i$.

Alvorens verdere eigenschappen op te sporen van bovengenoemde bijzondere punten, vestigen we nogmaals de aandacht er op, dat deze punten hier niet, zooals bij de centrale projectie noodzakelijk zijn om de lijn nader te bepalen *Hier is de lijn door hare beide projecties of liever door de projecties van twee willekeurige punten der lijn volkomen bepaald.*

Het gebruik, dat we in het vervolg van deze bijzondere punten denken te maken, zal moeten berusten op bijzondere eigenschappen dezer punten, waarvan we ongezocht deze reeds ontdekten, dat de punten, O , R_i , S_i , T_i de hoekpunten zijn van een parallelogram.

Deze eigenschap is ook stereometrisch gemakkelijk af te leiden, terwijl we hierdoor tevens in staat zijn

nog eenige nadere bijzonderheden omtrent de onderlinge ligging van doorgangspunt, vluchtpunten en projecties der verdwijnpunten aan te geven.

Zijn O_1 en O_2 de beide projectiecentra, $\bar{O}_1$ en $\bar{O}_2$ de voetpunten van de loodlijnen op het projectievlak neergelaten, dus middelpunten van de beide distantie-cirkels en O het snijpunt van O_1O_2 met het tafereel. Zij verder R het 1^e verdwijnpunt van de lijn l , R' diens 2^e projectie, T het 2^e verdwijnpunt en T' diens 1^e projectie. Daar R verdwijnpunt is van de lijn l , is O_1R evenwijdig aan het projectievlak; elk vlak door O_1R snijdt het tafereel dus volgens eene lijn $// O_1R$; dit geldt dus ook voor de vlakken O_2O_1R en TO_1R .

O_2O_1 snijdt het projectievlak in O , O_2R in R' , dus de snijlijn van het eerste vlak met het tafereel is OR' .

O_1T snijdt het projectievlak in T_1 en TR natuurlijk in S , het doorgangspunt van l , dus de snijlijn van het 2^e vlak met het tafereel is $T'S$. Hieruit volgt:

$$O_1R \parallel OR' \parallel T'S$$

Op volkomen analoge wijze wordt bewezen:

$$O_2T \parallel OT' \parallel R'S,$$

m. a. w. $OR'ST'$ is een parallelagram.

Tevens wordt gemakkelijk uit de figuur afgeleid:

$$OR' : O_1R \equiv OO_2 : O_1O_2$$

maar daar:

$$OR' \equiv T'S \text{ en } O_1R \equiv WS$$

$$ST' : SW' \equiv OO_2 : O_1O_2$$

Tevens is:

$$OO_2 : O_1O_2 \equiv O\bar{O}_2 : \bar{O}_1\bar{O}_2$$

Derhalve:

$$ST' : SW' \equiv O\bar{O}_2 : \bar{O}_1\bar{O}_2 \quad (1)$$

Op volkomen analoge wijze wordt afgeleid:

$$SR' : SW' \equiv O\bar{O}_1 : \bar{O}_1\bar{O}_2 \quad (2)$$

Constructie
der vlucht-
punten.

Hierop berusten nu eenvoudige constructies van de beide vluchtpunten van eene lijn, wanneer de lijn gegeven is door zijne beide projecties l' en l'' .

Stellen we ons in de eerste plaats tot taak het 1^e vluchtpunt W' van eene lijn te zoeken. We zullen dan blijkbaar gebruik maken van de betrekking. (1)

Het punt T' is onmiddellijk te vinden op l' door uit O eene lijn te trekken $\parallel l''$. Van bovenstaande evenredigheid zijn dus de 3 termen ST' , $O\bar{O}_2$ en $\bar{O}_1\bar{O}_2$ bekend, zoodat de constructie neerkomt op het bepalen van de 4^e evenredige tot 3 gegeven lijnen, nl. uit de evenredigheid:

$$\bar{O}_2O : \bar{O}_2\bar{O}_1 \equiv ST' : SW'$$

Wanneer W' bekend is vinden we W op l'' door middel van de hulplijn OW' .

Punten-
reeksen
op l' en l'' .

We zagen reeds, dat bij elk punt P van de lijn l , 2 punten P' en P'' behooren, en wel P' op l' en P'' op l'' . Blijkbaar behoort dus bij elk punt P' op l' één enkel punt P'' op l'' ; omgekeerd behoort bij het punt P'' op l'' weer het punt P' op l' . Merken we verder op, dat voor het doorgangspunt $S \equiv S' \equiv S''$, m. a. w. dat het snijpunt van l' en l'' met zichzelf overeenkomt, dan blijkt dat op l' en l'' liggen twee perspectieve puntenreeksen. De verbindingslijnen van overeenkomstige pun-

ten omhullen eene kromme van de 2^e klasse, die uiteenvalt in het klassepunt O en een waaier, waarvan O de top is.

We kunnen dus eene lijn aangeven door de projecties van 2 willekeurige punten; wanneer ons dit gemakkelijker lijkt, zullen we hiervoor kiezen bijzondere punten, bijv. doorgangspunt en een der verdwijnpunten. Recapitulatie.

De verbindingslijn van de 1^e projecties van de punten is de 1^e projectie van de lijn; blijkbaar krijgen we deze projectie door de snijlijn te bepalen van het 1^e projecteerend vlak van de lijn met het projectievlak. Evenzoo is de 2^e projectie van de lijn de snijlijn van het 2^e projecteerend vlak van de lijn met het tafereel. Stereometrisch is duidelijk, dat in het algemeen ook door de projecties l' en l'' de lijn volkomen bepaald is. Ook uit de constructiefiguur volgt dit, daar de projecties van 3 punten van de lijn onmiddellijk zijn aan te wijzen, nl. $S \equiv S' \equiv S''$, verder R' en R'' en ten slotte T' en T'' , terwijl 2 hiervan reeds voldoende zijn om de lijn te bepalen.

a) *Lijn in het projectievlak.*

Bijzondere
lijnen.

Voor eene lijn l in het projectievlak vallen de beide projecties met de lijn samen, dus $l' \equiv l'' \equiv l$; dit geldt bovendien voor elk punt van de lijn, dus $P \equiv P' \equiv P''$.

- b) *Lijnen, gaande door één der projectiecentra of projecteerende lijnen.*

Voor elke lijn, gaande door O_1 , 1^e projecteerende lijn genoemd, valt de 1^e projectie samen met het doorgangspunt S , is dus een punt, terwijl de 2^e projectie gaat door S en O . $S \equiv W$.

Voor elke lijn, gaande door O_2 , 2^e projecteerende lijn genoemd, valt de 2^e projectie samen met het punt S , is dus een punt, terwijl de 1^e projectie gaat door S en O . $S \equiv W$.

- c) *De verbindingslijn der projectiecentra $O_1 O_2$.*

Voor $O_1 O_2$ zijn zoowel de 1^e als de 2^e projectiepunten en vallen samen met het doorgangspunt van de lijn in O . Derhalve $l \equiv l' \equiv S \equiv O$.

- d) *Lijn, loodrecht op het projectievlak.*

Blijkbaar valt het 1^e vluchtpunt in $\overline{O}_1$ en het 2^e in $\overline{O}_2$, dus $W \equiv \overline{O}_1$ en $W' \equiv \overline{O}_2$. Is het doorgangspunt S bekend, dan is de lijn dus volkomen bepaald; immers $l \equiv S\overline{O}_2$ en $l' \equiv S\overline{O}_1$.

- e) *Lijn, die de verbindingslijn der centra snijdt.*

Is P het snijpunt van de lijn l met $O_1 O_2$, dan

vallen P' en P'' beide in O , dus $O \equiv P' \equiv P''$. Zoowel l' als l'' moet dus gaan door het punt O . Maar l' en l'' moeten elk ook door het punt $S \equiv S' \equiv S''$ gaan. We zien dus, dat l' en l'' samenvallen.

Toch dient dit geval wel onderscheiden te worden van dat vermeld onder a), waar bovendien voor elk punt P van de lijn $P' \equiv P''$. Dit geldt hier n.l. slechts voor 2 bepaalde punten van de lijn, namelijk voor het doorgangspunt S en het snijpunt van de lijn met $O_1 O_2$.

We krijgen hier blijkbaar op eene enkele lijn 2 projectieve puntenreeksen, waarvan de *dubbelpunten* zijn S en $O \equiv P' \equiv P''$.

Voor elke lijn, die $O_1 O_2$ snijdt, krijgen we 2 zulke collocale puntenreeksen; voor alle lijnen, die bovendien hetzelfde doorgangspunt S hebben, krijgen we 2 projectieve puntenreeksen met dezelfde dubbelpunten O en S . Het is dus duidelijk, dat O en S niet voldoende zijn om de lijn volkomen te bepalen. Behalve het punt S moet dus nog een ander punt van de lijn gegeven zijn. Ook kan de lijn natuurlijk gegeven zijn door de projecties van 2 willekeurige punten, dus door A', A'' , en B', B'' .

Stellen we ons nu tot taak het doorgangspunt S van de lijn te vinden. Behalve A' en A'' , B' en B'' is van de collocale puntenreeksen nog een dubbelpunt $O \equiv P' \equiv P''$ bekend. Trekken we door O eene willekeurige lijn en brengen we een der puntenreeksen hierop over door omcirkeling van uit O , dan krijgen

we 2 perspectieve puntenreeksen; de verbindingslijnen van overeenkomstige punten gaan dus alle door één vast punt.

Nemen we aan, dat A'' door omcirkeling is gekomen in a en B'' in b , terwijl $p \equiv P' \equiv P' \equiv O$. De reeksen p, a, b en P', A', B' zijn nu perspectief en het centrum van perspectief Q is het snijpunt van aA' en bB' . Is nu van een punt van de lijn de 1^e projectie X' bekend, dan vinden we eerst het overeenkomstige punt x door middel van de lijn QX' en vervolgens X'' door omcirkeling.

Het 2^e dubbelpunt S vinden we door op te merken, dat het door omcirkeling van s verkregen punt S'' met S' moet samenvallen. We hebben dus slechts uit Q eene lijn te trekken, die van $l' \equiv l''$ en van de willekeurig door O getrokken drager van de reeks $p, a, b \dots$ gelijke stukken afsnijdt, dus loodrecht staat op de bissectrice van den gevormden hoek. Het snijpunt van deze loodlijn met $l' \equiv l''$ is het doorgangspunt van l .

f) *Lijnen evenwijdig met het projectievlak.*

Voor eene lijn // tafereel zijn de beide projecties evenwijdig; het doorgangspunt S ligt in het oneindige; de perspectieve puntenreeksen zijn gelijkvormig.

g) *Lijnen van een der verdwijnvlakken.*

Voor eene lijn van het 1^e verdwijnvlak ligt de

1^e projectie in het oneindige; de 2^e projectie is dus voldoende om de lijn te bepalen.

Voor eene lijn van het 2^e verdwijnvlak ligt de 2^e projectie in het oneindige; deze lijn is voldoende bepaald door hare 1^e projectie.

h) *Lijnen evenwijdig met de verbindingslijn der projectiecentra.*

Dit is natuurlijk op te vatten als een bijzonder geval van snijding; het snijpunt P valt in het oneindige, dus $P \equiv W$. Derhalve wordt nu $O \equiv W \equiv W'$. De 2 dubbelpunten van de collocale puntenreeksen zijn weer S en $O \equiv W \equiv W'$. Het verdient opmerking, dat in dit bijzondere geval deze punten S en O wel voldoende zijn om de lijn volkomen te bepalen.

Het snijpunt van 2 lijnen l en m is zoowel een Voorwaarde punt van l als van m . Zijn eerste projectie moet dus van snijding. zoowel liggen op l' als op m' ; de 1^e projectie van het snijpunt van 2 lijnen l en m is dus het snijpunt van de 1^e projecties, dus van l' en m' . Evenzoo is de 2^e projectie van het snijpunt van l en m nu ook het snijpunt der 2^e projecties l'' en m'' . De snijpunten van l' en m' en van l'' en m'' zijn dus de projecties van een bepaald punt, namelijk van het snijpunt van l en m ; ze moeten derhalve liggen op ééne lijn door O .

In het algemeen is dus de voorwaarde, dat 2 lijnen

l en m elkaar snijden, dat het snijpunt van l en m en dat van l' en m' liggen op eene lijn door O.

In het algemeen kunnen we dus zeggen:

Wanneer l' en m' elkaar snijden in een punt P' en l en m in een punt P, zoodanig, dat P'P'' gaat door O, dan snijden de lijnen l en m elkaar in P.

Voorwaarde
van even-
wijdigheid.

Twee lijnen zijn evenwijdig, als ze dezelfde vluchtpunten hebben en omgekeerd.

Afbeelding
van een vlak
door 3
punten.

Een vlak is door 3 niet op eene rechte lijn gelegen punten volkomen bepaald. Liggen 3 punten op eene rechte lijn, dan is dit eveneens het geval met de 1^e projecties van die punten en ook met de 2^e projecties.

Wanneer dus 3 punten door hunne projecties gegeven zijn, zoodanig, dat niet tegelijkertijd de 3 eerste projecties en de 3 tweede projecties op een lijn liggen, dan is door deze 3 punten het vlak volkomen bepaald.

We willen ons voorloopig bezighouden met willekeurige vlakken. Wordt zoo'n vlak bepaald door de 3 punten A , B en C , dan vormen dus A' , B' en C' de hoekpunten van een driehoek en eveneens A'' , B'' en C'' . Blijkbaar zijn $AB \equiv c$, $BC \equiv a$ en $AC \equiv b$ 3 lijnen van het vlak.

$A'B' \equiv c'$ en $A''B'' \equiv c''$, terwijl het snijpunt van c' en c'' volgens het vooraangaande niets anders is dan het doorgangspunt van de lijn c , dus S_c . Evenzoo is het snijpunt van a' en a'' natuurlijk S_a en van b' en

b'' weer S_b . Daar a , b en c lijnen van het vlak zijn, liggen de doorgangspunten S_a , S_b en S_c in ééne rechte lijn, den doorgang van het vlak.

Dit is een zeer eenvoudig bewijs voor het *theorema van Desargues*.

Immers $A'B'C'$ en $A''B''C''$ zijn twee ten opzichte van het punt O perspectief gelegen driehoeken. De overeenkomstige zijden van de 2 driehoeken snijden elkaar in 3 punten, die op één rechte lijn gelegen zijn.

Stellen we ons nu deze vraag: Een willekeurig vlak ^{Bepaling van een 4^e punt.} is gegeven door 3 punten A , B en C , die niet op eene rechte lijn liggen. Van een 4^e punt D is bekend D' en bovendien, dat het ligt in het vlak (ABC) . Gevraagd D'' te bepalen.

De eenvoudigste oplossing vinden we door op te merken, dat AB en CD als lijnen van een zelfde vlak elkaar moeten snijden. De 1^e projectie van dit snijpunt is natuurlijk bekend, nl. het snijpunt van $A'B'$ en $C'D'$. Noemen we het snijpunt van AB en CD nu L , dan is L' bekend. L'' is nu blijkbaar het snijpunt van $A'B''$ met OL' . Het punt D'' moet nu in de eerste plaats liggen op $C'L'$ en verder op OD' en is dus volkomen bepaald.

Een andere redeneering voert ons ook tot het doel, al is het ook langs een langeren weg. We merken op, dat D' in alle geval moet liggen op OD' . Wanneer we dus in staat zijn nog eene lijn te vinden, waarop

D' moet liggen, dan is D' volkomen bepaald. De lijn, waarop de doorgangspunten van de lijnen van het vlak moeten liggen, wordt gemakkelijk gevonden uit S_{AB} en S_{BC} . Blijkbaar ligt hierop ook S_{AD} ; dit punt is natuurlijk het snijpunt van $A'D'$ met den doorgang van het vlak. Het punt D' ligt dus op de lijn die S_{AD} verbindt met A' en bovendien op OD' . Hiermee is D' dus gevonden. Volledigheidshalve merken we op, dat ook S_{CD} , S_{BD} en S_{AC} liggen op den doorgang van het vlak.

Hieruit volgt: *Liggen 4 punten A , B , C en D in eenzelfde vlak, dan vormen A' , B' , C' , D' en $A'B'C'D'$ twee perspectief gelegen vierhoeken, zoodanig, dat de snijpunten van de overeenkomstige zijden en diagonalen liggen op één zelfde lijn, waarvan we hebben aangetoond, dat ze de doorgang van het vlak is.*

Het spreekt van zelf, dat deze afleiding voor uitbreiding vatbaar is. We toonen gemakkelijk aan:

Wanneer n geheel willekeurige punten liggen in een zelfde vlak, dan zijn de gelijknamige projecties van deze punten de hoekpunten van 2 n -hoeken, die zóódanig perspectief zijn gelegen, dat de snijpunten van de overeenkomstige zijden alle liggen op een zelfde rechte lijn.

a) Projecteerende vlakken.

Bijzondere
vlakken.

Dit zijn vlakken, die gaan of door O_1 of door O_2 . De

vlakken door O_1 noemen we 1^e projecteerende vlakken, die door O_2 2^e projecteerende vlakken. Hoewel dergelijke vlakken feitelijk reeds door 2 punten bepaald zijn, daar als 3^e punt steeds een der projectiecentra kan worden beschouwd, zoo willen we niet van onze eenmaal gegeven bepaling afwijken en ook de projecteerende vlakken aangeven door 3 willekeurige punten.

Voor een 1^e projecteerend vlak, gegeven door 3 willekeurige punten A , B en C , blijken A' , B' en C' weer de hoekpunten te zijn van een driehoek, maar liggen A' , B' en C' in een rechte lijn, deze lijn is blijkbaar de doorgang van het vlak.

Voor een 2^e projecteerend vlak, aangegeven door 3 willekeurige punten A , B en C blijken de 2^e projecties te liggen op eene rechte lijn.

Bij een projecteerend vlak, gegeven door 3 punten, kan men nu onmiddellijk een 4^e punt van het vlak door zijne projecties aangeven. Immers is (ABC) een 1^e projecteerend vlak, zoodat A' , B' en C' liggen op een rechte lijn, dan zal voor elk punt van dit vlak de 1^e projectie op $A' B' C'$ vallen. Omgekeerd zal een punt D in het vlak (ABC) liggen, mits D' op $A' B' C'$ en overigens D' willekeurig, mits op OD' ligt.

b) *Dubbelprojecteerend vlak.*

Een dubbel projecteerend vlak is natuurlijk een vlak, dat gaat door de beide projectiecentra. Feitelijk is een

dergelijk vlak reeds bepaald door een enkel punt. We willen ons evenwel houden aan de afspraak om elk vlak te bepalen door 3 willekeurige punten, Zijn A , B en C deze 3 willekeurige punten. dan liggen blijkbaar de 6 projecties A' , B' , C' , A'' , B'' en C'' alle op eene rechte lijn door O .

Wanneer dus een vlak gegeven is door 3 willekeurige punten, zoodanig, dat zoowel de drie 1^e als de drie 2^e projecties liggen op dezelfde lijn door O , dan hebben we te maken met een dubbelprojecteerend vlak, waarvan bovengenoemde lijn de doorgang is.

Om een ander punt in dit vlak aan te nemen hebben we maar te zorgen, dat de beide projecties liggen op bovengenoemde lijn; overigens zijn deze projecties geheel willekeurig te kiezen.

c) *Verdwijnvlakken.*

Verdwijnvlakken zijn ook projecteerende vlakken; het 1^e verdwijnvlak is 1^e projecteerend en het 2^e is 2^e projecteerend vlak.

Voor het eerste verdwijnvlak bepaald door 3 punten A , B en C , vallen A' , B' en C' op de lijn in het oneindige, die dus is op te vatten als doorgang van het vlak; A'' , B'' en C'' zijn weer de hoekpunten van een driehoek.

Derhalve:

Wordt een vlak gegeven door 3 willekeurige punten

A , B en C , terwijl van deze punten A' , B' en C' in het oneindige vallen, dan hebben we te maken met het 1^e verdwijnvlak.

Wordt een vlak gegeven door 3 willekeurige punten L , M en N , terwijl van deze punten L' , M' en N' in het oneindige vallen, dan hebben we te maken met het 2^e verdwijnvlak.

- a) *Bepaling van de snijlijn van twee overeenkomstige* Elementaire
Constructies.
projecteerende vlakken.

Zijn bijv. twee 1^e projecteerende vlakken gegeven door de punten A , B , C en D , E , F , dan is de snijlijn s eene 1^e projecteerende lijn, waarvan dus de 1^e projectie samenvalt met het doorgangspunt S . Dit punt S is blijkbaar het snijpunt van de rechte lijnen $A'B'C'$ en $D'E'F'$, de doorgangen der 2 vlakken. Derhalve $s' \equiv S$ en $s \equiv SO$.

- b) *Bepaling van het snijpunt van eene willekeurige lijn met een projecteerend vlak.*

Hierbij wordt gebruik gemaakt van bovenstaande methode. Om bijv. het snijpunt te bepalen van eene lijn l met een 1^e projecteerend vlak (ABC), brengen we door l ook het 1^e projecteerend vlak aan. Noemen we de snijlijn van deze beide vlakken s , dan is het

gezochte snijpunt tevens het snijpunt van s en l en dus gemakkelijk te bepalen. Noemen we dit snijpunt X .

Blijkbaar is $A'B'C'$ de doorgang van het gegeven vlak, terwijl l' de doorgang is van het 1^e projecteerend vlak van l . Het snijpunt van $A'B'C'$ en l' is dus blijkbaar het doorgangspunt S van de snijlijn s , tevens s' , terwijl $s'' \equiv SO$. Het snijpunt van s'' en l' is X'' , terwijl $X' \equiv S$.

De oplossing wordt korter, wanneer we aldus redeneeren: Als punt van het gegeven vlak moet X' liggen op $A'B'C'$; als punt van l moet het liggen op l' . Derhalve X' is het snijpunt van $A'B'C'$ en l' . X'' moet liggen op l'' en volgens de grondeigenschap op OX' ; X'' is dus het snijpunt van deze 2 lijnen.

c) *Bepaling van het snijpunt van eene willekeurige lijn met een willekeurig vlak.*

Reeds in de gewone orthogonale beschrijvende meetkunde is ons de weg gewezen om het snijpunt te bepalen van eene lijn l met een vlak, gegeven door 3 niet op eene rechte lijn gelegen punten A , B en C of door de 3 lijnen AB , BC en AC . Hiertoe brachten we door l een willekeurig vlak (bij voorkeur een der projecteerende vlakken) en bepaalden het snijpunt van dit vlak met 2 der gegeven lijnen, bijv. met AB en BC . Noemen we deze snijpunten L en M , dan ligt blijkbaar LM zoowel in het gegeven vlak als in het

aangebrachte projecteerend vlak. De lijn l moet dus LM snijden en dit snijpunt is blijkbaar meteen het snijpunt van l met het oorspronkelijke vlak (ABC) .

We kunnen dezelfde methode toepassen bij onze wijze van projecteeren; immers we stuiten op dit drietal bekende constructies:

1°. door een lijn een projecteerend vlak aanbrengen of althans den doorgang van dit vlak opsporen.

2°. het snijpunt bepalen van eene gegeven lijn met dit projecteerend vlak. (2 maal).

3°. het snijpunt van 2 lijnen opzoeken.

Zij het vlak gegeven door de 3 punten A , B en C of door de lijnen AB , BC en AC ; de lijn l door l' en l'' . Denken we nu door l het 1° projecteerend vlak, dan is l' de doorgang van dit vlak. Bepalen we nu eerst het snijpunt L van AB met dit vlak. Blijkbaar is $L \equiv$ snijpunt van l' met $A'B'$ en ligt L'' op $A''B''$ en op de lijn OL' . Evenzoo vinden we eerst M' en daarna M'' . De 2° projectie van het gezochte snijpunt X is nu het snijpunt van $L''M''$ met l'' . Daar X'' nu bekend is en X een punt is van l , is X het snijpunt van l' met OX'' .

We zijn nu theoretisch ook in staat, om wanneer Bepaling van beide vlakken gegeven zijn door drie willekeurige ^{de snijlijn van} punten, van deze beide vlakken de snijlijn op te sporen. ^{twee vlakken.} Is namelijk het eene vlak gegeven door de 3 punten A , B en C en het andere vlak door D , E en F , dan bepalen we bijv. het snijpunt X van AB met

het vlak (DEF) en het snijpunt Y van BC met (DEF) . Het punt X ligt blijkbaar in beide vlakken, het punt Y eveneens, dus XY is de snijlijn van de 2 vlakken. In de praktijk in de constructie evenwel vrij ingewikkeld.

Veel gemakkelijker wordt de constructie, wanneer één der vlakken projecteerend is. Immers is het willekeurige vlak gegeven door de 3 punten A, B en C en het 1^e projecteerende vlak door D, E en F (D, E, F liggen op ééne rechte), dan is de 1^e projectie van het snijpunt X van AB met vlak (DEF) het snijpunt van $A'B'$ met $D'E'F'$; X' vinden we dan op $A'B'$ door middel van OX' . Op analoge wijze krijgen we Y en Y' . XY is dan de gevraagde snijlijn.

We hebben tot nu toe een vlak steeds aangegeven door 3 willekeurige, niet op eene rechte lijn gelegen punten. Denken we ons 2 van deze punten verbonden door eene rechte lijn, dan is het duidelijk, dat het vlak door deze rechte lijn en het overblijvende punt ook volkomen bepaald is.

Bepaling van een vlak door zijn doorgang en een willekeurig punt.

Nu is eene bepaalde lijn van het vlak reeds herhaaldelijk in onze beschouwingen binnengeslopen, eene lijn, die ten opzichte van ons projectiesysteem een zeer bijzondere rol speelt, nl. de snijlijn van het vlak met het tafereel, of wel de *doorgang* van het vlak.

We zullen in de volgende beschouwingen een willekeurig vlak α aangeven door zijn doorgang s_α en voorloopig nog door een willekeurig punt P van het vlak.

Ook de projecteerende vlakken zullen we op deze wijze aangeven; voor een 1^e projecteerend vlak valt P' in den doorgang; voor een 2^e projecteerend vlak valt de 2^e projectie van het punt in den doorgang.

Onderstellen we, dat het vlak α gegeven is door (s_z , Bepaling van P). Het is duidelijk, dat elke lijn door P , die zijn een punt van doorgangspunt heeft op s_z , eene lijn van het vlak α het vlak. is. Hierdoor zijn we in staat om een willekeurig punt in α aan te nemen, of X' te vinden als X bekend is terwijl X moet liggen in het vlak α .

Immers $X'P'$ moet de 1^e projectie voorstellen van eene lijn van α . Het doorgangspunt van deze lijn is het snijpunt van $X'P'$ met s_z ; noemen we dit punt S , dan is SP' de 2^e projectie van die lijn. Hierop wordt nu X' gevonden door middel van de lijn OX' .

Het is duidelijk, dat, wanneer een vlak gegeven is door 3 punten A , B en C , we gemakkelijk den doorgang van het vlak kunnen opsporen door de doorgangspunten van 2 lijnen, bijv. AB en BC te verbinden. We kunnen dus gemakkelijk van de oude wijze van bepaling op de nieuwe overgaan.

Omgekeerd, wanneer een vlak gegeven is door zijn doorgang en een punt P , kunnen we volgens het bovenstaande gemakkelijk 2 nieuwe punten van het vlak construeeren; immers elke lijn door P die zijn doorgangspunt op s_z heeft, is eene lijn van het vlak; hierop is gemakkelijk een punt aan te nemen. We kunnen

dus ook van de nieuwe methode op de oude overgaan.

We komen dus tot deze *conclusies*:

1°. Een vlak gaat door eene lijn, wanneer de doorgang van het vlak gaat door het doorgangspunt van de lijn, en het bovendien nog een punt met de lijn gemeen heeft.

2°. Eene lijn ligt in een vlak, wanneer haar doorgangspunt ligt in den doorgang van het vlak en de lijn bovendien nog een punt met het vlak gemeen heeft.

Eenvoudige Constructies. De eerste conclusie geeft ons het middel aan de hand voor de volgende constructies:

a) *Een vlak te brengen door eene gegeven lijn.*

Is S_l het doorgangspunt van de gegeven lijn l , dan kunnen we op deze lijn gemakkelijk een willekeurig punt aannemen, bedenkende, dat P' en P'' moeten liggen op eene lijn door O . Elk vlak α , dat als doorgang s_α heeft eene lijn door S_l en bovendien door P gaat, voldoet aan de vraag. Er zijn dus ∞ vele vlakken te construeeren.

b) *Een vlak te brengen door twee elkaar snijdende lijnen.*

Zijn de doorgangspunten van de twee gegeven elkaar

snijdende lijnen S_l en S_m , dan is de doorgang s_z van het gevraagde vlak α blijkbaar de verbindingslijn van S_l en S_m . Voor het punt P , dat verder moet dienen ter bepaling van α kunnen we blijkbaar elk punt van eene der lijnen kiezen, bijv. het snijpunt der beide lijnen. Het vlak is dan bepaald door (s_z, PP^*) .

c) *Een vlak te brengen door 2 evenwijdige lijnen.*

Zijn de gegeven lijnen l en m , dan merkten we reeds vroeger op dat $W_l' \equiv W_m'$ en $W_l'' \equiv W_m''$. De doorgang s_z is weer de verbindingslijn van de doorgangspunten S_l en S_m der beide lijnen. Voor het punt, dat nader ter bepaling van α kan dienen, nemen we een willekeurig punt van eene der lijnen, bijv. W_l . Het vlak α is dan bepaald door s_z, W_l', W_l'' .

d) *Een vlak te brengen door eene lijn en een punt.*

Is de lijn l gegeven door l' en l'' en het punt P door P' en P'' , dan trekken we door P eene lijn m , die l snijdt. Hiermee is het vraagstuk tot een der vorige teruggebracht.

e) *Een vlak te brengen door 3 punten A, B en C .*

We brengen een vlak door de elkaar snijdende lijnen AB en BC .

Van meer gewicht is de constructie die volgt uit de 2^e conclusie, nl.: *het bepalen van de snijlijn van 2 vlakken*. We zullen beginnen met het meest eenvoudige geval:

- a) *De snijlijn te bepalen van 2 projecteerende vlakken, gaande door hetzelfde centrum.*

Zijn de beide projecteerende vlakken α en β respectievelijk gegeven door s_α en $P'P''$ (P' in s_α) en s_β en $Q'Q''$ (Q' in s_β). De snijlijn der beide vlakken is natuurlijk eene 1^e projecteerende lijn, zoodat $l \equiv S_\alpha$, het snijpunt van s_α en s_β , en $l' \equiv S_l O$.

- b) *De snijlijn te bepalen van 2 willekeurige vlakken.*

Blijkbaar is ook hier het doorgangspunt van de snijlijn bekend. De moeilijkheid is, nog een punt van de snijlijn te vinden; hiertoe moeten we zorgen in elk der beide vlakken, bijv. door de gegeven punten, respectievelijk 2 lijnen te trekken, die elkaar snijden en dan het snijpunt van deze lijnen te bepalen.

Zij het vlak α , gegeven door s_α , $P'P''$ en het vlak β door s_β , $Q'Q''$. We kunnen dan in elk geval in het vlak α eene lijn aannemen door het punt P . Noemen we deze lijn l . De moeilijkheid is nu, om in β door Q eene lijn te trekken, die l snijdt. Deze lijn moet

stellig liggen in het vlak door l en Q . De doorgang van dit vlak γ is gemakkelijk te construeeren; hiertoe trekken we door Q eene willekeurige lijn p , die l snijdt (bijv. in P); s_γ gaat nu door S_l en S_p . De gezochte lijn m moet nu liggen in β en γ en bovendien gaan door Q . Van de lijn m is dus bekend S_m (het snijpunt van s_β en s_γ) en bovendien het punt Q . Hiermee is dus m volkomen bepaald. Het snijpunt X van l en m is nu het gezochte tweede punt van de snijlijn der beide vlakken. Noemen we deze snijlijn x , dan is S_x het snijpunt van s_x en s_β ; $x' \equiv S_x X'$ en $x'' \equiv S_x X''$.

Feitelijk behoeven we bij de constructie alleen m' op te sporen en kunnen we m'' missen, daar X'' op l' te vinden is door middel van het punt O . Bij gebruik van de beide projecties hebben we natuurlijk het contrôlemiddel, dat O , X' en X'' op ééne rechte lijn moeten liggen.

Het spreekt van zelf, dat we voor de willekeurige lijn in α door P eene lijn $// s_x$ kunnen kiezen; dan wordt natuurlijk $l' // l''$ en komt S_l in het oneindige op s_x .

Blijkbaar hebben we hier gebruik gemaakt van de 2 snijlijnen van een willekeurig vlak γ (door P en Q) met de vlakken α en β . Veel eenvoudiger wordt de constructie, als we in plaats van een willekeurig vlak een der projecteerende vlakken door P en Q nemen. Is het vlak α weer gegeven door s_x , $P'P''$ en β door

$s\beta$, $Q'Q''$, dan brengen we bijv. het 2^e projecteerend vlak door P en Q aan, zoodat $s_\gamma \equiv P'Q''$.

Noemen we nu de snijlijn van γ en α l , dan is S_l bekend en bovendien weten we dat l moet gaan door P ; derhalve $l \equiv S_lP'$, terwijl $l' \equiv s_\alpha$. Volkomen op dezelfde manier bepalen we de snijlijn m van β en γ ; $m' \equiv S_mQ'$, terwijl $m'' \equiv s\beta$.

Noemen we het gezochte 2^e punt van de snijlijn van α en β weer X , dan is X' het snijpunt van l en m' , terwijl de lijn OX' ons helpt om X'' op $P'Q''$ te vinden. Noemen we de gezochte snijlijn weer x , dan is S_x het snijpunt van s_α en $s\beta$, terwijl $x' \equiv S_xX'$ en $x'' \equiv S_xX''$.

c) *De snijlijn te bepalen van een willekeurig vlak met een projecteerend vlak.*

In dit geval is het, zooals zal blijken, van weinig gewicht, welke der 2 methoden we volgen.

Is het willekeurige vlak gegeven door s_α , PP'' en het projecteerend vlak (bijv. een 2^e projecteerend) door $s\beta$, $Q'Q''$ (Q'' in $s\beta$), dan kunnen we in α door P weereene willekeurige lijn trekken, bijv. $l // s_\alpha$. Daar β een 2^e projecteerend vlak is zal elke 2^e projecteerende lijn, die haar doorgangspunt op $s\beta$ heeft in β liggen. We trekken dus in β eene 2^e projecteerende lijn m , die de lijn l snijdt; daar $m'' \equiv S_m$, dus een punt is, zal S_m het snijpunt zijn van l' met $s\beta$, terwijl $m' \equiv S_mO$. X'' valt dus

blijkbaar ook in S_m . X' vinden we op l' door middel van OX'' . S_x is weer het snijpunt van s_α en s_β ; $x' \equiv S_x X'$ en $x'' \equiv S_x X'' \equiv s_\beta$.

De projecties van de lijn kunnen we feitelijk missen; immers, is X het snijpunt van l en m , dan moet X'' in de eerste plaats liggen op l'' , maar bovendien op s_β , omdat β projecteerend vlak is. X'' is dus het snijpunt van l'' met s_β ; X' op l' is dus ook bepaald.

De andere methode wordt: Breng door P en Q een 2^o projecteerend vlak γ , dus $s_\gamma \equiv P'Q'$. We bepalen de snijlijn l van α en γ ; S_l is het snijpunt van s_α en s_γ en bovendien gaat l door P ; de snijlijn van β en γ is een 2^o projecteerende lijn m ; $m'' \equiv S_m$ is het snijpunt van s_β en s_γ , terwijl $m' \equiv S_m O$. X' is het snijpunt van l' en m' , terwijl $X'' \equiv S_m$. Hiermee is de gezochte snijlijn x bepaald; $x' \equiv S_x X'$ en $x'' \equiv S_x X'' \equiv s_\beta$.

Een probleem, dat zich bij het vorige onmiddellijk aansluit, is:

- d) *Het snijpunt te bepalen van eene lijn met een vlak, gegeven door zijn doorgang en een willekeurig punt van het vlak.*

Beschouwen we eerst de stereometrische oplossing: We brengen door de gegeven lijn l een willekeurig

vlak, bijv. een der projecteerende vlakken (de constructie wordt hierdoor eenvoudiger), en bepalen de snijlijn s van dit projecteerende vlak β met het gegeven vlak α . Het snijpunt van l en s is tevens het snijpunt van l met α .

We onderscheiden deze 2 bijzondere gevallen:

1°. Het gegeven vlak α is zelf projecteerend.

Zij α bijv. 1° projecteerend vlak, gegeven door s_z , $Q'Q''$ (Q' in s_z) en l door l' en l'' . We brengen door l ook het 1° projecteerend vlak β , dus $s_\beta \equiv l'$. De snijlijn s is blijkbaar ook 1° projecteerende lijn, dus $s' \equiv S_s$ is het snijpunt van s_z en s_β en $s'' \equiv S_s O$. Het snijpunt van s en l is nu het gezochte punt X .

Of anders: De 1° projectie van het snijpunt van l met α , zal moeten liggen op l' , en omdat α 1° projecteerend vlak is, ook op s_z . X' is dus bepaald als snijpunt van l' en s_z ; X'' vinden we op l'' door middel van de lijn OX' .

2°. Het gegeven vlak α is willekeurig.

Zij α gegeven door s_z , PP'' en l door l' en l'' . We brengen weer door l bijv. het 1° projecteerend vlak β , zoodat $s_\beta \equiv l'$. De vraag is dus nu in de eerste plaats de snijlijn van α en β te bepalen. Hiertoe brengen we door P ook een 1° projecteerend vlak γ en bepalen de snijlijn van α en γ en van β en γ . Kiezen we voor γ een zoodanig projecteerend vlak, dat s_γ door P' evenwijdig loopt met s_z , dan gaat de snijlijn m van α en γ door P en de projecties loopen

// s_x . De snijlijn p van β en γ is een 1^e projecteerende lijn.

Van de snijlijn s van α en β is nu bekend het doorgangspunt S_s en bovendien nog een 2^e punt L , namelijk het snijpunt van m en p . De lijn s is dus volkomen bepaald en derhalve ook het gezochte punt X , als snijpunt van l en s .

Het spreekt van zelf, dat we een vlak ook kunnen bepalen door 2 elkaar snijdende of evenwijdige lijnen, terwijl we voor één dezer lijnen kunnen kiezen den doorgang van het vlak met het tafereel. Deze bepaling van het vlak verschilt evenwel in wezen niet van de voorafgaande; immers we kunnen onmiddellijk op de lijn een punt aannemen en we hebben het vorige geval terug.

De eenige manier om een nog meer bijzondere bepalingwijze te krijgen, is: We kiezen voor het punt of de lijn een bijzonder punt of een bijzondere lijn. Het ligt voor de hand om voor dit punt een der verdwijnvlakken te kiezen; hiermee correspondeert, dat we voor de lijn kiezen eene lijn, gelegen in één der verdwijnvlakken, dus de snijlijn van het vlak met een der beide verdwijnvlakken. Blijkbaar loopen beide verdwijnlijnen evenwijdig met den doorgang en is dit dus eveneens met hare projecties het geval; de 1^e projectie van de 1^e verdwijnlijn valt in

Bepaling van
een vlak door
zijn door-
gang en een
der verdwijn-
lijnen.

het oneindige; de 2^e projectie van de 2^e verdwynlijn eveneens,

We zullen dus bij de volgende beschouwingen een vlak aangeven door zijn *doorgang en de 2^e projectie van de 1^e verdwynlijn* of door zijn *doorgang en de 1^e projectie van de 2^e verdwynlijn*. Daar deze projecties toch evenwijdig loopen met den doorgang, spreekt het vanzelf, dat de projecties van een enkel punt van de verdwynlijn voldoende zijn.

Wij komen nu weer tot de volgende *conclusies*:

1^o. De voorwaarde, dat een vlak gaat door eene lijn is, dat de doorgang van het vlak gaat door het doorgangspunt van de lijn en de verdwynlijn van het vlak door het overeenkomstige verdwynpunt van de lijn.

2^o. De voorwaarde, dat eene lijn ligt in een vlak is, dat zoowel het doorgangspunt van de lijn in den doorgang van het vlak ligt, als ook het verdwynpunt op de overeenkomstige verdwynlijn van het vlak.

Elementaire Constructies: In de eerste conclusie liggen de volgende problemen opgesloten:

a) *Een vlak α door eene gegeven lijn l te brengen.*

Zij de lijn gegeven door l' en l'' , dan is S_l het snijpunt van l' en l'' . We vinden R_l'' door uit O eene lijn te trekken $// l'$. Er zijn oneindig veel vlakken, die aan de vraag voldoen. Trekken we eene willekeurige

lijn door S_l en eene daarmee evenwijdige door R'' , dan stellen deze twee lijnen s_α en r''_α respectievelijk den doorgang en de 2^e projectie van de 1^e verdwijnlijn r_α voor van een vlak α , dat aan de vraag voldoet.

Bijzondere vlakken door l zijn de projecteerende vlakken. Van het 1^e projecteerend vlak β is $s_\beta \equiv l'$, terwijl $r''_\beta // s_\beta$ gaat door O . Van het 2^e projecteerend vlak γ is $s_\gamma \equiv l''$, terwijl $r''_\gamma \equiv s_\gamma$.

- b) *Een vlak te brengen door 2 elkaar snijvende of door 2 evenwijdige lijnen.*

Zijn de lijnen l en m gegeven door hare projecties l' , l'' en m' , m'' . We zoeken de doorgangspunten S_l en S_m en nu bijv. de 2^e verdwijnpunten, of liever de 1^e projecties hiervan T'_l en T'_m . De verbindingslijn van S_m en S_l in de doorgang s_α van het vlak α en de verbindingslijn van T'_l en T'_m de 1^e projectie t_α' van de 2^e verdwijnlijn t_α van α . Feitelijk is de bepaling van T'_l reeds voldoende.

- c) *Een vlak te brengen door eene lijn l en een punt P .*

We trekken door P eene lijn m , die l snijdt, door gebruik te maken van de bekende voorwaarde voor snijvende lijnen en we hebben het vraagstuk teruggebracht tot het vorige.

d) *Een vlak te brengen door 3 willekeurige punten.*

Dit wordt ook tot het 2^e vraagstuk teruggebracht.

De 2^e conclusie stelt ons in staat, om behalve de voor de handliggende gevallen, als: een lijn in een vlak aan te nemen, of een punt in een vlak te construeeren, de volgende problemen op te lossen:

a) *Onderzoek, of een punt P ligt in een vlak α .*

Is het punt gegeven door P' en P'' en het vlak door s_α en r_α'' . We trekken door P eene lijn l , zoodanig dat haar doorgangspunt S_l ligt op s_α , dan is $l \equiv SP'$ en $l'' \equiv S_l P''$. Ligt nu P in α , dan heeft de lijn l 2 punten met α gemeen, nl. S_l en P ; dan moet dus R_l'' liggen op r_α'' .

Ligt P niet in α , dan heeft l slechts één punt met α gemeen, ligt dus niet in α en dus R_l'' niet op r_α'' .

We zoeken dus van l op R_l'' door middel van het bekende parallelogram. Alleen wanneer R_l'' ligt op r_α'' , ligt l in α en dus P in α .

b) *De snijlijn van 2 vlakken α en β te bepalen.*

Zijn de vlakken gegeven door s_α en r_α'' en s_β en r_β'' . Noemen we de snijlijn l , dan is S_l het snijpunt

van s_α en s_β en R_l het snijpunt van r_α en r_β . Derhalve $l' \equiv S_l R_l$ terwijl l' gaat door S_l en evenwijdig loopt met OR_l .

c) *Het snijpunt van eene lijn l met een vlak α te bepalen.*

Is de lijn gegeven door l' , l'' en het vlak door s_α en r_α . Om het snijpunt van l met α te bepalen, brengen we door l een willekeurig vlak, bijv. één der projecteerende vlakken β en bepalen de snijlijn m van α en β . Is β bijv. 1^o projecteerend vlak, dan is $s_\beta \equiv l'$ en $r_\beta // s_\beta$ door O . S_m en R_m zijn dus bepaald; $m' \equiv S_m R_m$ en $m' \equiv l'$.

Het snijpunt van l'' en m' is X'' en op l' vinden we door middel van OX'' het punt X' , wanneer X is het gezochte snijpunt is.

HOOFDSTUK II.

Metrische Betrekkingen.

Bepaling van a) *Bepaling van de plaats van een punt P , gegeven de ligging door zijne projecties P' en P'' , ten opzichte van het van punten. tafereel, benevens de bepaling van de afstanden van P tot de projecties P' en P'' of tot de projectiecentra O_1 en O_2 .*

Uit de beschouwing van eene stereometrische figuur blijkt ons, dat het voetpunt van de loodlijn uit P op het projectievlak neergelaten, onmiddellijk in de constructiefiguur is aan te wijzen. Zijn O_1 en O_2 de projectiecentra, $\bar{O}_1$ en $\bar{O}_2$ de middelpunten der distantie-cirkels, P' en P'' de projecties van P , dan is dit voetpunt blijkbaar het snijpunt $\bar{P}$ van $\bar{O}_1P'$ en $\bar{O}_2P''$. Immers de vlakken $O_1\bar{O}_1PP$ en $O_2\bar{O}_2P''P$ staan beide loodrecht op het projectievlak, dus ook hun snijlijn $P\bar{P}$. De lengte van die loodlijn vinden we gemakkelijk door bijv. vlak $\bar{O}_1P'O_1$ om $\bar{O}_1P'$ in het projectievlak neer te slaan en in $\bar{P}$ eene loodlijn op $\bar{O}_1P'$ op te richten. Tegelijkertijd vinden we de afstanden $P'P$ en O_1P .

De lengte van $P\bar{P}$ hadden we ook kunnen vinden

door driehoek $O_2\overline{O}_2P'$ neer te slaan; we vinden dan tevens de afstanden $P'P$ en O_2P .

Er zijn nog andere methoden om de ligging van een punt ten opzichte van het projectievlak te bepalen; we willen ons evenwel voorloopig tot deze beperken, omdat de andere bij het neerslaan van vlakken van zelf ter sprake komen.

- b) *Den afstand te bepalen van 2 punten die op eenzelfde projecteerende lijn liggen.*

Zijn de punten P en Q bijv. gelegen op de 1^e projecteerende lijn l , dan kunnen we het orthogonaal projecteerend vlak van l met de lijn l neerslaan om $\overline{O}_1P'$. De ligging van de neergeslagen punten P_n en Q_n op l_n bepalen we nu gemakkelijk door de in de vorige opgave reeds toegepaste eigenschap, dat PP' en QQ' loodrecht staan op het projectievlak. De afstand P_nQ_n is de gevraagde.

- c) *Den afstand te bepalen van 2 willekeurige punten P en Q .*

Om den afstand te bepalen van twee willekeurige punten P en Q , gegeven door P' , P'' en Q' , Q'' zullen we driehoek $P'Q'O_1$ neerslaan in het tafereel om de lijn $P'Q'$; de punten P' en Q' blijven dus op hun plaats.

Het punt O_1 beschrijft een cirkel in een vlak $\perp P'Q'$, waarvan de straal gelijk is aan de loodlijn O_1L uit O_1 op $P'Q'$ neergelaten. Het neergeslagen punt O_1 komt dus neer op de lijn $\overline{O_1L} \perp P'Q'$, op een afstand van L , gelijk aan O_1L , d. w. z. gelijk aan de hypothenusa van een rechthoekigen driehoek, waarvan $\overline{O_1L}$ en de straal van den 1^e distantiecirkel de rechthoekszijden zijn.

Door afzonderlijke constructie bepalen we volgens (a) den afstand $P'P$ en passen dezen afstand van uit P' op de neergeslagen zijde $P'O_1$ uit. Hierna is P_n gevonden.

Het punt Q_n vinden we nu door de eigenschap, dat $P'Q'$, $P''Q''$, PQ , en dus ook P_nQ_n alle moeten gaan door één enkel punt, namelijk het doorgangspunt van de lijn PQ .

Neerslaan
van vlakken.

Wat we in de vorige opgave hebben gedaan, komt eigenlijk neer op het neerslaan van een projecteerend vlak. We hebben namelijk met dit vlak een paar 1^e projecteerende lijnen neergeslagen en toen door een kunstgreep de neergeslagen punten P en Q van elk dier lijnen bepaald. We willen nu trachten dit neerslaan meer methodisch in te richten.

a) *Het neerslaan van een projecteerend vlak.*

Beschouwen we bijv. het 1^e projecteerend vlak α , gegeven door zijn doorgang s_z en de 2^e projectie van

de 1^e verdwijnlijn r''_{α} . We willen dit vlak neerslaan om s_{α} , die dus bij dit proces op zijn plaats blijft; we hebben dus slechts na te gaan, waar het neergeslagen punt O_1 komt te liggen, terwijl dan de neergeslagen 1^e verdwijnlijn door $(O_1)_n$ gaat en evenwijdig is aan s_{α} .

We krijgen dus de volgende figuur: Het punt O_1 beschrijft een cirkel met straal gelijk aan de loodlijn uit O_1 op s_{α} neergelaten, terwijl het voetpunt L van die loodlijn middelpunt is; het vlak van dien cirkel staat loodrecht op s_{α} . Daar $\overline{O_1}L \perp s_{\alpha}$, komt $(O_1)_n$ te liggen op $\overline{O_1}L$, zoodanig dat $(O_1)_n\overline{L} = O_1L$, dus gelijk aan de hypothenusa van een rechthoekigen driehoek, waarvan $\overline{O_1}L$ en $O_1\overline{O_1}$ (of de straal van den 1^e distantiecirkel) de rechthoekszijden zijn.

In de constructiefiguur laten we dus uit $\overline{O_1}$ op s_{α} eene loodlijn $\overline{O_1}L$ neer; we trekken vervolgens in $\overline{O_1} \perp O_1L$ den straal van den distantiecirkel $\overline{O_1}E$ en cirkelen vervolgens LE om, tot we een snijpunt vinden met $L_1\overline{O_1}$. Het zoo verkregen punt is $(O_1)_n$. Eene lijn door $(O_1)_n \parallel s_{\alpha}$ stelt nu de neergeslagen 1^e verdwijnlijn voor.

Eene *projecteerende lijn* l door O_1 in het vlak α gelegen, is nu onmiddellijk in neergeslagen toestand te teekenen. Het doorgangspunt S_l blijft op zijn plaats; een tweede punt O_l van de lijn kennen we ook in neergeslagen toestand, dus $(O_l)_n$ S_l is de neergeslagen lijn l_n .

Wanneer we eene *willekeurige lijn* m van het projecteerend vlak in neergeslagen toestand willen teekenen, dan blijft bij de wenteling om s_z natuurlijk S_m op zijn plaats. Kennen we nog slechts één enkel punt van de lijn in neergeslagen toestand, dan is l_n volkomen bepaald. Om dit 2^e neergeslagen punt P te vinden, trekken we door P eene 1^e projecteerende lijn; deze lijn nu is met het vlak α gemakkelijk neer te slaan en hierop volgens boven aangegeven methode het punt P_n te bepalen; hiermee zijn dus 2 punten van de lijn m in neergeslagen toestand gevonden en is dus m_n bepaald.

We zullen evenwel trachten eene andere methode te vinden, om eene willekeurige lijn m van een projecteerend vlak in neergeslagen toestand te teekenen. Omgekeerd zijn we dan in staat, een punt beschouwende als het snijpunt van eene projecteerende en van eene willekeurige lijn, ook het punt in neergeslagen toestand te vinden.

Is het vlak α gegeven door s_z en $r_z'' // s_z$ door O en de willekeurige lijn m van dit vlak door S_m en R_m'' . In plaats van na te gaan, waar een willekeurig punt P van deze lijn na de wenteling terecht komt, zullen we hiervoor kiezen het 1^e verdwijnpunt R_m . Dit punt komt in de eerste plaats natuurlijk op de neergeslagen verdwijnlijn $(r_z)_n$ van het projecteerend vlak.

Verder hebben we vroeger afgeleid $R_m O_1 = S_m W_m'$, dus ook in neergeslagen toestand:

$$(R_m)_n (O_1)_n = S_m W_m' \quad (1)$$

terwijl we tevens opmerken, dat $(R_m)_n$ juist aan den anderen kant van $(O_1)_n$ komt te liggen als W' van S_m . Het punt W' is gemakkelijk te vinden uit de ook reeds vroeger afgeleide betrekking:

$$O\bar{O}_2 : \bar{O}_1\bar{O}_2 = S_m T_m' : S_m W_m' \quad (2)$$

Daar T_m' onmiddellijk te construeeren is uit het parallelogram $OR_m S_m T_m'$ zijn van de bovenstaande evenredigheid de eerste 3 termen bekend en vinden we W_m' door de bekende constructie van de 4^e evenredige.

Vervolgens zetten we op $(r_\alpha)_n$ van uit $(O_1)_n$ een stuk uit gelijk aan $S_m W_m'$, goed op de richting lettende, en hiermee is het punt $(R_m)_n$ gevonden.

Blijkbaar is nu ook m_n bekend; immers $m_n \equiv S_m(R_m)_n$.

Het spreekt vanzelf, dat we deze methode kunnen gebruiken om te bepalen waar een willekeurig punt van een vlak terecht komt, wanneer men dit vlak om zijn doorgang in het tafereel neerslaat. Denken we ons namelijk door dit punt eene willekeurige lijn en de overeenkomstig projecteerende lijn getrokken, dan kunnen we het projecteerend vlak met deze lijnen neerslaan; het snijpunt der neergeslagen lijnen is het neergeslagen punt.

Een bijzonder voorbeeld van een projecteerend vlak is een *dubbel-projecteerend* vlak. Om de plaats te be-

palen van een punt van dit vlak, wanneer dit vlak om zijn doorgang wordt neergeslagen, beschouwen we dit punt als snijpunt van de beide projecteerende lijnen O_1P en O_2P .

Zij α het gegeven dubbel-projecteerend vlak bepaald door s_z , terwijl $s_z \equiv r_{\alpha''} \equiv t_{\alpha'}$. Voor een willekeurig punt P van dit vlak valt zoowel P' als P'' op s_z , terwijl s_z natuurlijk gaat door O . Trekken we nu door P de 1^e projecteerende lijn l en de 2^e projecteerende lijn m , dan is blijkbaar $l' \equiv S_l \equiv P'$ en $m'' \equiv S_m \equiv P''$, terwijl $l'' \equiv m' \equiv s_z$. Bij de wenteling van α om s_z blijven S_l en S_m op hun plaats; daar l door O_1 en m door O_2 gaat, zoeken we op de gewone wijze $(O_1)_n$ en $(O_2)_n$; dan is $l_n \equiv S_l(O_1)_n$ en $m_n \equiv S_m(O_2)_n$. Het snijpunt van l_n en m_n is nu P_n .

Tegelijkertijd vinden we op deze manier den afstand P tot O_1 en P' , en tot O_2 en P'' en bovendien tot O . Om de plaats van een willekeurig punt P te bepalen, kunnen we dus door P , O_1 en O_2 het dubbel projecteerend vlak α aanbrengen en dit vlak om zijn doorgang $s_z \equiv P'OP''$ neerslaan.

Beschouwen we in dezen geest de reeds vroeger besproken opgave:

Den afstand te bepalen van 2 willekeurige punten P en Q .

Hiertoe brengen we door P en Q een der projecteerende vlakken, bijv. het 1^e projecteerend vlak α . Blijkbaar gaat s_z door P' en Q' en $r_{\alpha''} // s_z$ door O .

Noemen we de 1^e projecteerende lijnen van P en Q respectievelijk p en q en de lijn $PQ \equiv l$, dan zullen we achtereenvolgens p_n , q_n en l_n bepalen. De lijnen p_n en q_n vinden we onmiddellijk door het neergeslagen punt $(O_1)_n$ te bepalen, terwijl $S_p \equiv P'$ en $S_q \equiv Q'$. De lijn l_n is bepaald, wanneer $(R_l)_n$ bekend is; dit laatste punt vinden we door de betrekking $S_l W' \equiv (R_l)_n (O_1)_n$. Nu is $l_n \equiv S_l (R_l)_n$. Blijkbaar is P_n het snijpunt van l_n en p_n en Q_n het snijpunt van l_n en q_n .

$P_n Q_n$ is nu de gevraagde afstand der punten P en Q .

Ook hier hebben we blijkbaar gebruik gemaakt van de eigenschap, dat $P'Q'$, $P''Q''$, PQ en dus ook $P_n Q_n$ alle door één zelfde punt gaan.

Alleen treedt hier duidelijker de meetkundige beteekenis van dit punt op den voorgrond, nl. als doorgangspunt van de lijn $l \equiv PQ$.

Het is duidelijk, dat deze methode van het neerslaan van projecteerende vlakken niet alleen dienst kan doen om den afstand van 2 punten te bepalen. We kunnen ons hiervan bedienen, om omgekeerd, wanneer van 2 punten gegeven is de afstand, de beide projecties van het eene punt, en bijv. alleen de 1^e projectie van het andere punt, hieruit de 2^e projectie van dat punt te vinden.

Maar ook andere problemen kunnen we oplossen; we kunnen den hoek bepalen tusschen 2 lijnen, die in hetzelfde projecteerend vlak gelegen zijn, en omgekeerd, wanneer de hoek tusschen 2 lijnen bekend is,

en verder het vlak der lijnen en bijv. de projecties van één der lijnen, de projecties van de 2^e lijn opsporen. We kunnen de oppervlakte berekenen van vlakke figuren, mits deze gelegen zijn in één der projecteerende vlakken, enz, enz.

Laten we als eenvoudig voorbeeld eens *het oppervlak bepalen van een driehoek ABC , gelegen in het 1^e projecteerende vlak α , gegeven door s_α en $r_\alpha \parallel s_\alpha$ door O .*

Blijkbaar liggen A' , B' en C' op s_α , terwijl A'' , B'' en C'' willekeurig kunnen worden aangenomen, mits voldoende aan de voorwaarde ten opzichte van O . We zullen de zijden van den driehoek op de gewone wijze voorstellen door a , b en c . Daar bij het neerslaan de projecteerende lijnen een groot gemak opleveren, zullen we in onze beschouwing de 3 projecteerende lijnen van A , B en C invoeren, en deze respectievelijk door p , q en r voorstellen, zoodat $S_p \equiv A'$, $S_q \equiv B'$ en $S_r \equiv C'$.

We beginnen met $(O_1)_n$ en $(r_\alpha)_n$ te bepalen. Nu is $p_n \equiv (O_1)_n S_p$, $q_n \equiv (O_1)_n S_q$ en $r_n \equiv (O_1)_n S_r$. Om nu de punten B_n en C_n te vinden, beschouwen we B en C als snijpunten van $BC \equiv a$ met q en r . We bepalen a_n op de gewone wijze; nu is B_n het snijpunt van a_n en q_n , C_n het snijpunt van a_n en r_n . Verder beschouwen we A_n als snijpunt van p_n en $b_n \equiv (AC)_n$. Van b_n kennen we S_b en C_n , dus b_n is bepaald, derhalve A_n ook. $A_n B_n C_n$ is nu de met het vlak α neergeslagen driehoek, geeft ons dus tevens het oppervlak van $\triangle ABC$.

Als contrôlemiddel middel moet $A_n B_n$ gaan door het doorgangspunt van AB , d. w. z. door het snijpunt van $A'B' \equiv s_x$ en $A''B''$.

Onder de lijnen van een vlak nemen die, evenwijdig met den doorgang van het vlak, dus evenwijdig met het tafereel, bij het neerslaan van het vlak een eigenaardige plaats in. Immers zoowel het doorgangspunt als het verdwijnpunt vallen in het oneindige, zoodat de gewone manier om de lijn in neergeslagen toestand te bepalen, ons in den steek laat.

Noemen we de lijn l , dan is blijkbaar $l_n // s_x$; kennen we dus slechts één punt van l_n , dan is deze volkomen bepaald; we zouden dus op l een willekeurig punt kunnen kiezen, en dit beschouwen als snijpunt van een projecteerende lijn en een willekeurige andere drager. We willen evenwel liever anders te werk gaan.

Zij l de gegeven lijn en $O_1 L$ de loodlijn uit O_1 op s_x neergelaten; zij M het snijpunt van deze loodlijn met l , dan beschrijft M evenals O_1 een cirkel met L als middelpunt en loodrecht op s_x , maar nu met straal ML . De moeilijkheid is dus de lengte van ML te bepalen.

Is nu het projecteerend vlak gegeven door s_x en $r_x'' // s_x$ door O en de lijn l door $l' \equiv s_x$ en l'' , dan is het punt L in de constructiefiguur onmiddellijk aan te wijzen als het voetpunt van de loodlijn uit $\bar{O}_1$ op s_x neergelaten. De projecties van M zijn ook aan te wijzen, namelijk $M' \equiv L$ en M'' op MO .

Noemen we het voetpunt van de loodlijn uit M op het tafereel neergelaten $\overline{M}$, dan is, zooals eenvoudige beschouwing van eene stereometrische figuur leert, dit punt het snijpunt van $\overline{O_1M'}$ met $\overline{O_2M''}$. Is $\overline{M}$ bekend, dan vinden we gemakkelijk uit $\triangle O_1\overline{O_1}L$ den werkelijken afstand LM . Hiermee is M_n gevonden en dus ook $l_n // s_z$.

Wil men nu de plaats bepalen, waar een willekeurig punt P bij het neerslaan van een projecteerend vlak α terecht komt, dan kunnen we P dus ook beschouwen als snijpunt van de overeenkomstige projecteerende lijn m met de lijn l door $P // s_z$.

Tot nu toe hebben we ons slechts bezig gehouden met het neerslaan van projecteerende vlakken. Alvorens over te gaan tot het *neerslaan van een willekeurig vlak*, willen we eerst enkele opmerkingen maken over:

Het aannemen van een nieuw projectiecentrum.

Stellen we ons allereerst deze vraag:

Wanneer een vlak gegeven is door zijn doorgang s_z en de 2° projectie van de 1° verdwijnslijn r_z'' , terwijl bovendien de distantiecirkels gegeven zijn, wat verandert dan in deze gegevens, wanneer we in plaats van het 1° centrum een *nieuw 1° projectiecentrum* kiezen, gelegen in de verdwijnslijn van het vlak α ?

We zien onmiddellijk in:

1° de doorgang s_z blijft onveranderd.

2° de 2° projectie van r_z blijft onveranderd.

3° de 2° distantiecirkel blijft onveranderd.

4° de straal van den 1° distantiecirkel blijft onveranderd.

5° alleen de plaats van het middelpunt van den 1° distantiecirkel verandert.

De moeilijkheid is dus dit middelpunt op te sporen; de stereometrische figuur geeft ons een middel aan de hand dit punt gemakkelijk te vinden. Kiezen we namelijk als nieuw projectiecentrum $o_1 \equiv R$, een punt van de 1° verdwijnslijn van het vlak α , en noemen we het middelpunt van den bijbehorenden distantiecirkel $\bar{o}_1$, dan valt blijkbaar het snijpunt van de verbindingslijn der nieuwe projectiecentra met het tafereel in R , zoodat $o \equiv R$. De stereometrische figuur leert ons verder, dat $Oo \parallel O_1o_1$, en daar $\bar{O}_1\bar{o}_1 \parallel O_1o_1$ dus ook $Oo \parallel \bar{O}_1\bar{o}_1$. Verder liggen $\bar{o}_1$, o en $\bar{o}_2 \equiv \bar{O}_2$ op eene rechte lijn. We vinden dus in de constructiefiguur $\bar{o}_1$ als snijpunt van $\bar{O}_2o$ met eene lijn door $\bar{O}_1 \parallel Oo$.

Derhalve is bij het oude systeem een vlak α gegeven door s_x en $r_x \parallel s_x$, dan verandert bij keuze van een nieuw 1° projectiecentrum o_1 op r_x alleen het middelpunt van den 1° distantiecirkel.

Derhalve:

We kiezen op r_x een willekeurig punt R van r_x als 2° projectie van het nieuwe 1° projectiecentrum $o_1 \equiv R$. Blijkbaar is dus $R \equiv o$, terwijl het 2° projectiecentrum onveranderd blijft, dus $\bar{o}_2 \equiv \bar{O}_2$. Het punt $\bar{o}_1 \equiv \bar{R}$ wordt op boven beschreven wijze gevonden.

Voor het nieuwe systeem is α nu 1^e projecteerend vlak geworden.

Stellen we ons in de 2^e plaats de vraag:

Wanneer in een vlak α eene lijn l gegeven is door l' en l'' en dus ook S_l en R_l bekend zijn, en we nemen als nieuw 1^e projectiecentrum een willekeurig punt van de 1^e verdwijnslijn van α , wat gebeurt er dan met R_l'' , S_l , l' en l'' .

We zien gemakkelijk in;

1^o S_l blijft onveranderd

2^a R_l'' blijft onveranderd

3^o l'' blijft onveranderd

4^o alleen l' verandert, valt namelijk samen met s_α .

In het algemeen zullen natuurlijk alle 1^e projecties van lijnen en punten veranderen. Daar deze projecties betrekking hebben op het nieuwe projectiecentrum o_1 , zullen we ze aangeven met den index o .

Derhalve in het bovenstaande geval, valt de nieuwe 1^e projectie van l , namelijk l'_o samen met s_α .

Een bijzonder geval krijgen we, wanneer toevallig voor het nieuwe projectiecentrum o_1 , juist het 1^e verdwijnpunt R_l van de lijn l gekozen wordt.

Voor het nieuwe stelsel wordt dan n.l. l een 1^e projecteerende lijn, zoodat $l'_o \equiv S_l$ en $l''_o \equiv o$ $S' \equiv l''$.

Is in het vlak α een punt P gegeven door zijn beide projecties P' en P'' , dan blijft natuurlijk, bij keuze van een nieuw 1^e projectiecentrum in de 1^e verdwijnslijn

van α , P' onveranderd, dus $P'_0 \equiv P'$; *alleen* P' *verandert*. P'_0 komt te liggen in s_α en wel op de verbindingslijn oP' .

Laten we als eenvoudig voorbeeld van:

b) *Het neerslaan van willekeurige vlakken*

den afstand bepalen van een willekeurig punt P tot de lijn l . Zij het punt gegeven door P' en P'' , en de lijn door l' en l'' , zoodat dus S_l en R_l'' ook bekend zijn.

We brengen nu door l en R een vlak α met behulp van eene lijn s , die l juist in het 1^e verdwijnpunt snijdt. De doorgang van dit vlak α gaat dan blijkbaar door S_l en S_s , en r_α'' door $R_l'' \equiv R_s''$ evenwijdig met s_α . We kiezen nu voor het gemak als nieuw 1^e projectiecentrum het gemeenschappelijk 1^e verdwijnpunt der beide lijnen, dus $o_1 \equiv R_l \equiv R_s$. Blijkbaar is nu $o \equiv R_l'' \equiv R_s''$. Het punt $\bar{o}_1$ wordt nu weer op de gewone wijze bepaald door middel van de lijn $\bar{O}_2 o \equiv \bar{o}_2 o$ en eene lijn door $\bar{O}_1$ evenwijdig aan Oo .

Voor dit projectiesysteem is α nu 1^e projecteerend vlak; bij het neerslaan wordt $(o_1)_n$ op de gewone wijze bepaald, en $(r_\alpha)_n$ gaat nu door $(o_1)_n // s_\alpha$.

Bovendien hebben we door onze keuze van een nieuw 1^e projectiecentrum bereikt, dat in dit stelsel l en s 1^e projecteerende lijnen zijn, zoodat $l'_o \equiv S_l$ en $s'_o \equiv S_s$. Blijkbaar is $l_n \equiv (o_1)_n S_l$ en $s_n \equiv (o_1)_n S_s$.

Om P_n te vinden, trekken we door P in het vlak α nog eene andere lijn m ; blijkbaar blijft voor het nieuwe stelsel m' onveranderd, terwijl $m'_o \equiv s_\alpha$. Voor

dit nieuwe stelsel is m_n gemakkelijk te bepalen; immers m is eene lijn van het 1^e projecteerende vlak α ; we zoeken dus op m_0 het punt W_0' , de nieuwe 1^e projectie van het oneindigvergelegen punt W van m . Hierdoor wordt $(R_m)_n$ bekend en dus ook $m_n \equiv S_m (R_m)_n$.

P_n is nu het snijpunt van s_n en m_n ; ook l_n is bekend; de loodlijn uit P_n op l_n neergelaten is de gevraagde afstand.

De hier gekozen lijn s had met l het 1^e verdwijnpunt gemeen. Derhalve vallen niet alleen R_l' en R_s'' samen, maar is dit eveneens het geval met de oneindig ver gelegen projecties R_l' en R_s' . Blijkbaar loopen dus l en s' evenwijdig. We zien dus, wanneer 2 lijnen hetzelfde 1^e verdwijnpunt hebben, loopen de 1^e projecties evenwijdig. Dus in het algemeen:

Wanneer 2 lijnen een gemeenschappelijk verdwijnpunt hebben, loopen de overeenkomstige projecties evenwijdig.

Tot nu toe hebben we ons slechts bezig gehouden met het neerslaan van vlakken en van figuren in dergelijke vlakken gelegen. We willen nu trachten een dergelijk neergeslagen vlak weer op te richten, of liever van de met een vlak neergeslagen figuren de beide projecties zien op te sporen.

a) *Oprichten van neergeslagen projecteerende vlakken.*

Zij α een 1^e projecteerend vlak, in neergeslagen toestand gegeven door s_α en $(r_\alpha)_n$; zij bovendien gegeven de neergeslagen 1^e projecteerende lijn l_n , bepaald door $(O_1)_n$ en $S_l \equiv$ het snijpunt van l_n met s_α . Blijkbaar wordt de 1^e projectie van lijn l een punt, nl. $l' \equiv S_l$ en de 2^e projectie $l'' \equiv S_l O$.

Zij m_n gegeven van eene willekeurige lijn m van het vlak α . Noemen we S_m het doorgangspunt van m met het tafereel, en R_m haar 1^e verdwijnpunt, dan is S_m het snijpunt van m_n met s_α en $(R_m)_n$ het snijpunt van m_n met $(r_\alpha)_n$. Bij het oprichten van het vlak blijft s_α en dus ook S_m op zijn plaats; r_α'' gaat door O en hierop ligt ook R_m'' . Bovendien is $m' \equiv s_\alpha$.

We weten verder uit vroegere beschouwingen, wanneer W_m het oneindig ver gelegen punt van m is, dat $(O_1)_n (R_m)_n = W_m S_m$; hierdoor is W_m bekend. Door middel van de vroeger afgeleide betrekking

$$\overline{O_1 O_2} : O \overline{O_2} = S_m W_m : S_m T_m'$$

vinden we nu gemakkelijk T_m' en vervolgens door middel van het bekende parallelogram R_m'' . Blijkbaar is nu $m'' \equiv S_m R_m''$.

Is nu in het neergeslagen projecteerend vlak een punt P_n gegeven, dan kunnen we de beide projecties van het punt P gemakkelijk vinden, door P te beschouwen als snijpunt van 2 lijnen, bijv. eene projecteerende en eene willekeurige lijn.

In den regel is het bepalen van de projecties P' en P'' gemakkelijker; we kunnen namelijk vaak door P lijnen trekken, waarvan reeds een punt in opgerichten toestand bekend is.

Om de bedoeling van een en ander nader toe te lichten, beschouwen we het volgende *vraagstuk*:

Van een gelijkzijdigen driehoek liggen 2 hoekpunten op een gegeven 1^e projecteerende lijn l ; ze zijn gegeven door hunne projecties A' en A'' , B' en B'' . Bepaal de projecties van het 3^e hoekpunt C , als bovendien het vlak van dien driehoek gegeven is.

Zij het vlak van den driehoek gegeven door zijn doorgang s_x en de 2^e projectie van de 1^e verdwijnlijn $r_x'' // s_x$ door O , en de lijn l door $l \equiv S_l$ en l' , op l' de punten A' en B' , op l de punten A'' en B'' .

We zullen eerst het vlak α met de punten A en B om s_x in het tafereel neerslaan; hiertoe bepalen we eerst op de gewone wijze $(O_1)_n$ en $(r_x)_n$. Verder beschouwen we bijv. A als snijpunt van l en eene lijn $m // s_x$, en B als snijpunt van l en eene lijn $p // s_x$. Deze lijnen worden op de vroeger beschreven wijze in neergeslagen toestand bepaald; dan is A_n het snijpunt van l_n en m_n , B_n het snijpunt van l_n en p_n .

C_n vinden we nu door op $A_n B_n$ een gelijkzijdigen driehoek te construeeren. Om de projecties C' en C'' te vinden, beschouwen we bijv. C als snijpunt van de 1^e projecteerende lijn van C , nl r , met $AC \equiv b$; van

deze laatste lijn zijn reeds 2 punten bekend, namelijk het doorgangspunt S_b en het punt A . Daar nu C ligt op de projecteerende lijn r , is blijkbaar $C \equiv S_r$. Verder is $b' \equiv S_b A'$ en $r' \equiv S_r O$ en dus $C' \equiv$ het snijpunt van $S_b A'$ en $S_r O$.

b) *Oprichten van willekeurige neergeslagen vlakken.*

Het is duidelijk, dat bij vraagstukken, waarbij het oprichten van een willekeurig vlak wordt verlangd, de moeilijkheid wordt weggenomen, door het invoeren van een nieuw projectiecentrum, zoodanig, dat het willekeurige vlak voor het nieuwe systeem projecteerend vlak wordt.

In het algemeen verdient het aanbeveling, ter verhooging van de duidelijkheid van de figuren, de vlakken naar dien kant neer te slaan, waar de minste projecties van punten en lijnen zijn gelegen.

a) *Bepaling van den hoek tusschen 2 lijnen.* Bepaling van
de grootte
van hoeken.

Wanneer de lijnen elkaar snijden, komt de bepaling van den hoek tusschen die 2 lijnen neer op het neerslaan van het vlak, dat er door kan worden aangebracht.

Het gemakkelijkst wordt de zaak, wanneer we het snijpunt der beide lijnen als nieuw projectie centrum

o_1 kiezen; hierdoor worden de beide lijnen 1^e projecteerende lijnen en zijn dus gemakkelijk in neergeslagen toestand te bepalen.

Wanneer de lijnen elkaar kruisen, kan men door een punt van de eene lijn een derde lijn trekken evenwijdig met de andere gegeven lijn; we maken hierbij gebruik van de eigenschap, dat evenwijdige lijnen dezelfde vluchtpunten hebben. De hoek tusschen de 1^e en 3^e lijn is nu de gevraagde hoek.

We kunnen natuurlijk ook bijv. door O_1 twee lijnen trekken, respectievelijk evenwijdig met de beide gegeven lijnen en den hoek tusschen deze 1^e projecteerende lijnen bepalen.

We zoeken dus in de eerste plaats bijv. de 1^e vluchtpunten W'_l en W'_m van de gegeven lijnen l en m op de vroeger aangegeven wijze. Trekken we nu door O_1 de lijnen $p \parallel l$ en $q \parallel m$, dan vallen blijkbaar de 1^e projecties van deze lijnen p en q samen met hare doorgangspunten S_p en S_q respectievelijk in W'_l en W'_m . Derhalve $p' \equiv S_p \equiv W'_l$ en $q' \equiv S_q \equiv W'_m$, terwijl natuurlijk $p' \equiv S_p O$ en $q' \equiv S_q O$. De hoek tusschen deze projecteerende lijnen is nu gemakkelijk te bepalen.

b) *Bepaling van den hoek die eene lijn met het tafereel maakt.*

Moeten we den hoek bepalen, die bijv. eene 1^e

projecteerende lijn l met het tafereel maakt, dus den hoek tusschen O_1S_l en $S_l\bar{O}_1$, dan slaan we het vlak $O_1\bar{O}_1S_l$ om $\bar{O}_1S_l$ in het tafereel neer. Blijkbaar is $\angle \bar{O}_1, S_l(O_1)_n$ dan de gevraagde hoek.

Wordt de hoek gevraagd, die eene *willekeurige lijn* m met het tafereel vormt, dan herleiden we dit geval tot het vorige door als nieuw 1^e projectiecentrum bijv. het 1^e verdwijnpunt van m te kiezen, dus $o_1 \equiv R_m$.

De lijn m is nu blijkbaar voor dit nieuwe stelsel 1^e projecteerende lijn. We zoeken dus op de gewone wijze $\bar{o}_1$ en $o \equiv R_m$ en vinden nu den gevraagden hoek op de hierboven aangegeven wijze.

c) *Bepaling van den hoek, die een vlak met het tafereel maakt.*

Zeer eenvoudig is deze hoek te bepalen, wanneer we een *projecteerend vlak* hebben. Zij bijv. het 1^e projecteerend vlak gegeven door s_α en $r_\alpha' // s_\alpha$ door O . Uit eene stereometrische figuur blijkt onmiddellijk, wanneer men door $O_1\bar{O}_1$ een standvlak aanbrengt, hetwelk α snijdt volgens O_1L en het tafereel volgens $\bar{O}_1L$, dat de gevraagde hoek $\angle O_1L\bar{O}_1$ is. Blijkbaar is $\bar{O}_1L$ de loodlijn uit $\bar{O}_1$ op s_α neergelaten; de hoek wordt gemakkelijk bepaald door het vlak $O_1\bar{O}_1L$ om $\bar{O}_1L$ in het tafereel neer te slaan.

Is het vlak α *willekeurig*, dan kunnen we een willekeurig punt van de 1^e verdwijnslijn als nieuw 1^e

projectiecentrum kiezen; we nemen dus op r_{α}' een willekeurig punt $R' \equiv o$, terwijl $\bar{o}_2 \equiv \bar{O}_2$. Het punt $\bar{o}_1 \equiv \bar{R}$ wordt op de gewone wijze bepaald. Daar voor dit nieuwe stelsel α 1^e projecteerend vlak is, is het vraagstuk tot het bovenstaande geval teruggebracht.

Kiezen we als nieuw 1^e projectiecentrum niet een willekeurig punt, maar het voetpunt van de loodlijn uit O_1 op de 1^e verdwynlijn van het vlak neergelaten, dan is o blijkbaar het voetpunt van de loodlijn uit O op r_{α}' neergelaten, zooals eene stereometrische figuur onmiddellijk aantoonst. $\bar{o}_2 \equiv \bar{O}_2$. $\bar{o}_1$ ligt op $\bar{o}_2o$ en tevens op eene lijn door $\bar{O}_1 // Oo$ getrokken.

d) *Bepaling van den hoek tusschen 2 overeenkomstige projecteerende vlakken.*

Zijn α en β twee 1^e projecteerende vlakken, gegeven door s_{α} en s_{β} , $r_{\alpha}' // s_{\alpha}$ en $r_{\beta}' // s_{\beta}$ door O . De snijlijn s van deze beide vlakken is natuurlijk eene 1^e projecteerende lijn, gaat namelijk door O_1 . De standhoek is nu de hoek, gevormd door de loodlijn in α uit een willekeurig punt van de snijlijn getrokken, met de loodlijn in het vlak β in ditzelfde punt van de snijlijn opgericht. Kiezen we voor dit willekeurig punt van de snijlijn het punt O_1 , dan hebben we het voordeel dat de beenen van den standhoek ook 1^e projecteerende lijnen zijn. We willen nu trachten van deze lijnen de

doorgangspunten op te sporen en vervolgens het vlak dezer lijnen om zijn doorgang neerslaan.

Om de doorgangspunten der beide lijnen te vinden, slaan we α met s neer om s_α en β met s om s_β . In beide neergeslagen vlakken trekken we uit het neergeslagen punt O , loodlijnen op s_n . De snijpunten van deze loodlijnen met s_α en s_β zijn respectievelijk de doorgangspunten van de beide beenen van den standhoek met het tafereel. Noemen we deze lijnen l en m , dan zijn dus S_l en S_m bekend; de doorgang s_γ van het vlak γ door l en m is nu de verbindingslijn van S_l en S_m . Dit vlak nu slaan we neer met de projecteerende lijnen l en m ; de hoek tusschen l_n en m_n is nu de gevraagde standhoek.

e) *Bepaling van den hoek tusschen twee willekeurige vlakken.*

Zijn de vlakken α en β willekeurig, dan kiezen we het 1^e verdwijnpunt van de snijlijn van α en β als nieuw 1^e projectiecentrum. Hiermee is het vraagstuk tot het vorige geval teruggebracht.

Alvorens over te gaan tot het bepalen van den hoek, die eene lijn, met een vlak maakt, willen we ons eerst bezighouden met eenige andere problemen.

Construeeren
van lood-
lijnen op een
vlak.

- a) *In een punt van een vlak eene loodlijn op dit vlak op te richten.*

We zullen, om de methode duidelijker te doen uitkomen, eerst eene opgave bespreken, die minder ingewikkeld is door het overbodig zijn van eenige bijconstructies, die voor het algemeene geval noodzakelijk zijn. Wij kiezen namelijk een projecteerend vlak, bijv. het 1^e projecteerend vlak α en stellen ons tot taak in O_1 eene loodlijn op α op te richten.

Zij α gegeven door s_x en $r_x' // s_x$ door O ; blijkbaar is O eigenlijk de 2^e projectie van O_1 , terwijl de 1^e projectie van O_1 ligt op s_x .

Is nu x de gevraagde lijn door O_1 , dan kunnen we opmerken:

- 1°. x is eene 1^e projecteerende lijn, zoodat $x' \equiv S_x$.
- 2°. de 2^e projectie x' moet gaan door S_x en O .
- 3°. x ligt in het vlak β door $O_1 \perp s_x$.
- 4°. S_x ligt op s_β , d. i. eene lijn door $\bar{O}_1 \perp s_x$, dus op $\bar{O}_1 L$, wanneer L het voetpunt van deze loodlijn voorstelt.
- 5°. x staat ook $\perp O_1 L$.

Het komt er slechts op neer het punt S_x te bepalen; in de plaats eerste ligt dit op $s_\beta \equiv \bar{O}_1 L$, maar bovendien is $x \equiv O_1 S_x \perp O_1 L$. We slaan dus β neer om $\bar{O}_1 L$ in het tafereel; trekt men in dit neergeslagen vlak door $(O_1)_n$ eene lijn $\perp (O_1)_n L$, dan is dit blijkbaar x_n en het snijpunt van x_n met $s_\beta \equiv \bar{O}_1 L$ is S_x . Nu is $x' \equiv S_x$ en $x' \equiv S_x O$.

Voor het algemeene probleem is het nu vrijwel onverschillig, of het gegeven vlak projecteerend is of niet.

Zij α een willekeurig vlak en P een punt van dit vlak. We brengen de opgave nu onmiddellijk tot het bovenstaande terug door P als nieuw 1^e projectiecentrum aan te nemen. Noemen we dit nieuwe projectiecentrum o_1 , dan is $\bar{o}_1 \equiv \bar{P}$ blijkbaar het snijpunt van $\bar{O}_1P'$ en $\bar{O}_2P'$; verder is $P' \equiv o$. De straal van den nieuwen distantiecirkel is gelijk aan den afstand van P tot het tafereel, die op de gewone wijze wordt bepaald. De projecties van de gevraagde lijn x voor het nieuwe projectiestelsel worden nu evenals boven bepaald; $x'_o \equiv S_x$ en $x'_o \equiv S_x o \equiv S_x P'$.

Gaan we terug naar het oorspronkelijke projectiestelsel, dan is natuurlijk $x' \equiv x'_o \equiv S_x P'$ en $x' \equiv S_x P'$.

b) *Uit een punt buiten een vlak eene loodlijn op dit vlak neer te laten.*

Dit vraagstuk is eenigszins ingewikkelder dan het voorgaande. Zij α een willekeurig vlak, gegeven door s_x en $r_x' // s_x$, en P een punt buiten dit vlak, bepaald door P' en P'' . Het is duidelijk, dat de gevraagde lijn x zal liggen in een vlak β door $P \perp s_x$, zoodat $s_\beta \equiv \bar{P}L$, waarin $\bar{P}$ de orthogonale projectie van P en L het voetpunt van de loodlijn uit $\bar{P}$ op s_x neer-

gelaten, voorstelt. Door middel van eene willekeurige lijn door P , die haar doorgangspunt op $s\beta$ heeft, is $r\beta''$ gemakkelijk te bepalen, zoodat ook de snijlijn van α en β bekend is door haar doorgangspunt S_l (snijpunt van $s\alpha$ en $s\beta$) en de 2^e. projectie van haar verdwijnpunt R_l'' (snijpunt van $r\alpha''$ en $r\beta''$). Kiezen we nu dit verdwijnpunt R_l als nieuw 1^e. projectiecentrum, zoodat dus $o \equiv R_l''$, $o_1 \equiv \bar{R}_l$ en $o_2 \equiv O_2$. dan kunnen we $\bar{o}_1$ op $s\beta$ gemakkelijk bepalen door middel van de lijn $\bar{o}_2 o$. We slaan nu het vlak β om $s\beta$ neer; $l_n \equiv S_l (o_1)_n$, terwijl P_n gemakkelijk bepaald wordt door P te beschouwen als snijpunt van de loodlijn door P op $s\beta$ met de lijn door P en het nieuwe 1^e. projectiecentrum o_1 . Hiermee is de lijn x_n dus ook gevonden en bovendien S_x , het snijpunt van x_n met $s\beta$. Daar de gevraagde lijn x moet gaan door P , is ze nu volkomen bepaald; $x' \equiv S_x P'$ en $x'' \equiv S_x P''$.

c) *In een punt van een vlak eene loodlijn van bepaalde lengte op te richten.*

Zij α het gegeven vlak, bepaald door $s\alpha$ en $r\alpha'' // s\alpha$ en P het gegeven punt in α , (dus op eene lijn in α), bepaald door P' en P'' . Kiezen we als nieuw 1^e projectiecentrum $o_1 \equiv P$, dan is blijkbaar $\bar{o}_1 \equiv \bar{P}$ en $o \equiv P'$, terwijl $\bar{o}_2 \equiv \bar{O}_2$.

De afstand van P tot het projectievlak wordt op de gewone wijze bepaald, waardoor tevens de straal van den nieuwen distantiecirkel bekend is.

We brengen nu door $o_1 \equiv P$ het vlak β loodrecht op s_α en slaan dit met het punt $o_1 \equiv P$ en de vroeger genoemde lijn o_1L (snijlijn van α en β) om s_β in het tafereel neer. Noemen we x de loodlijn in $P \equiv o_1$ op α opgericht, dan is x_n in de neergeslagen figuur de loodlijn in $(o_1)_n \equiv P_n$ op $(o_1)_nL$ opgericht. Passen we van uit P_n hierop de gegeven lengte af, dan is X_n bepaald, wanneer X het uiteinde van de gevraagde loodlijn voorstelt. S_x is het snijpunt van x_n met s_β . Blijkbaar weten we dus reeds, dat X' moet liggen op S_xP' en X'' op S_xP'' . Verder is gemakkelijk de orthogonale projectie $\bar{X}$ te bepalen als voetpunt van de loodlijn uit X_n op s_β neergelaten. Blijkbaar ligt nu X' op $\bar{O}_1\bar{X}$ en X'' op $\bar{O}_2\bar{X}$. Derhalve X' is het snijpunt van S_xP' en $\bar{O}_1\bar{X}$ en X'' dat van S_xP'' en $\bar{O}_2\bar{X}$. Als contrôle blijft over, dat X' en X'' op eene lijn door O moeten liggen.

We kunnen nu ook *den hoek bepalen, die eene willekeurige lijn met een willekeurig vlak maakt.* Bepaling van den hoek die eene lijn met een vlak maakt.

Zij het vlak α gegeven door s_α en r_α en de lijn l door l' en l'' . We trekken door een willekeurig punt P van l een lijn loodrecht op het vlak α en bepalen den hoek tusschen deze loodlijn en de lijn l . De gevraagde hoek is hiervan het complement.

We zien uit het bovenstaande tevens de mogelijkheid om *een vlak te construeeren door een gegeven lijn l loodrecht op een gegeven vlak α .*

We willen volledigheidshalve even opmerken, dat

de constructie van loodlijnen op vlakken tevens dienst kan doen om *den hoek tusschen 2 willekeurige vlakken te bepalen*. Hiertoe richten we in een willekeurig punt van de snijlijn op elk der beide vlakken eene loodlijn op. De hoek tusschen deze loodlijnen is tevens de hoek tusschen de 2 gegeven vlakken.

We zijn nu tevens in staat *de projecties te teekenen van eenvoudige lichamen*.

We willen als voorbeeld hiervan:

De projecties opsporen van een regelmatige driezijdige pyramide, waarvan de zijde van het grondvlak en de hoogte bekend zijn.

We willen om onnoodige complicatie te voorkomen, aannemen, dat het grondvlak ABC bijv. in een 1° projecteerend vlak gelegen is, een geval, waartoe het algemeene onmiddellijk te herleiden is door invoering van een nieuw projectiecentrum.

Blijkbaar is $\triangle ABC$ gelijkzijdig; zij nu het 1° projecteerend vlak α gegeven door s_z en $r_z' // s_z$ door O , dan kunnen we dit vlak met zijn 1° verdwijnslijn neergeslagen denken om s_z in het tafereel. In dit neergeslagen vlak nemen we nu een gelijkzijdigen driehoek $A_n B_n C_n$ aan, waarvan de zijde gelijk is aan de gegeven zijde van het grondvlak en bepalen het middelpunt van den omgeschreven cirkel M_n . M is dus het voetpunt van de hoogtelijn van het viervlak.

Om nu de beide projecties van den driehoek ABC te vinden, benevens die van het punt M , gaan we

aldus te werk. Waar $B_n C_n \equiv \alpha_n$ den doorgang s_z snijdt, ligt S_a en waar ze $(r_z)_n$ ontmoet ligt $(R_a)_n$. Door middel van de bekende hulpconstructie is nu R_a'' gemakkelijk te bepalen en dus ook $\alpha' \equiv S_a R_a''$, terwijl $\alpha' \equiv s_z$.

De punten B' , C' en B'' , C'' vinden we door middel van de 1^e projecteerende lijnen van B en C . Het punt A , dus A' en A'' vinden we door A te beschouwen als snijpunt van AC met de 1^e projecteerende lijn van A ; evenzoo M' en M'' door M te beschouwen als snijpunt van AM met de 1^e projecteerende lijn door M . Hiermee is het vraagstuk teruggebracht tot het meer eenvoudige, namelijk in een punt M van een gegeven vlak α eene loodlijn van gegeven lengte op te richten. We brengen hiertoe een vlak β door $M \perp s_z$, zoodat s_β gaat door $\bar{M}$, het snijpunt van $\bar{O}_1 M$ en $\bar{O}_2 M'$. Slaan we nu het vlak β met M en de snijlijn van β met α om s_β neer. De hoogtelijn van het viervlak staat nu loodrecht op de snijlijn van α en β ; x_n is dus te teekenen, en dus is ook S_x en X_n bekend, wanneer X het 4^e hoekpunt van het viervlak is. $\bar{X}$ ligt op s_β en wordt gevonden door uit X_n eene loodlijn op s_β neer te laten. X' is nu het snijpunt van $S_x P'$ met $\bar{X} \bar{O}_1$; evenzoo is X'' het snijpunt van $S_x P''$ met $\bar{X} \bar{O}_2$.

De projecties van de 4 hoekpunten van de pyramide zijn hiermee bekend, en dus ook de projecties van de pyramide.

HOOFDSTUK III.

Bijzondere Projectiestelsels.

Tot nu toe hebben we ons beziggehouden met het algemeene geval van twee willekeurige projectiecentra, hetzij aan denzelfden kant, hetzij aan verschillende kanten van het tafereel gelegen. We willen nu eens in het kort nagaan, in hoeverre de projecties verandering ondergaan, wanneer we omtrent de ligging dezer centra bijzondere onderstellingen invoeren.

A. *De projectiecentra liggen op gelijken afstand, maar aan verschillende kanten van het tafereel.*

Blijkbaar zijn de stralen der beide distantiecirkels even groot; het punt O ligt dus als inwendig gelijkvormigheidspunt op gelijken afstand van $\bar{O}_1$ als van $\bar{O}_2$.

Wij zullen slechts stilstaan bij die constructiefiguren, welke aanleiding geven tot bijzondere opmerkingen.

Vluchtpun-
ten.

De projecties van eene lijn l zijn blijkbaar weer 2 rechte lijnen l' en l'' , die elkaar snijden in het doorgangspunt S van de lijn. Het bekende parallelogram

$OR'ST'$ levert in zooverre iets bijzonders op, dat de lengten der zijden voor dit speciale geval in zeer eenvoudig verband staan tot de afstanden van de beide verdwijnpunten tot de respectieve projectiecentra.

Immers, zooals uit de beschouwing van eene stereometrische figuur blijkt, is:

$$ST' = OR' = \frac{1}{2} RO_1 = \frac{1}{2} SW'$$

$$SR' = OT' = \frac{1}{2} TO_2 = \frac{1}{2} SW'$$

Dit volgt trouwens ook onmiddellijk uit de voor het algemeene geval afgeleide evenredigheden:

$$ST' : SW' = \overline{OO_2} : \overline{O_1O_2}$$

$$\text{en } SR' : SW' = \overline{OO_1} : \overline{O_1O_2}$$

dit speciale geval overgaan in;

$$ST' : SW' = 1 : 2 \quad (1)$$

$$SR' : SW' = 1 : 2 \quad (2)$$

We vinden dus het 1^e vluchtpunt W' op l' en het 2^e vluchtpunt W'' op l'' door respectievelijk de afstanden ST' en SR' te verdubbelen.

Bedenken we verder, dat WW' door het punt O moet gaan, dan kunnen we het gevonden resultaat ook aldus formuleeren:

Wanneer voor bovengenoemd projectiestelsel van eene lijn l de projecties l' en l'' en dus ook T'_1 en R'_1 bekend zijn, dan vinden we W'_1 en W''_1 als snijpunten van de lijn door O // $R'_1T'_1$ respectievelijk met l' en l'' .

De gemakkelijke bepaling van de vluchtpunten van eene Neerslaan lijn is vooral van belang bij het neerslaan van vlakken. van vlakken.

Laten we om dit toe te lichten ons bepalen tot het eenvoudige voorbeeld:

Den afstand van twee willekeurige punten A en B te bepalen.

Zijn de beide distantiecirkels $\bar{O}_1$ en $\bar{O}_2$ en dus ook het punt O bekend; zijn verder de beide punten gegeven door A' , A'' en B' , B'' .

We brengen door A en B het 2^e projecteerend vlak α , zoodat $s_z \equiv A'B'$ en t_z' gaat door O . We bepalen in de 1^e plaats het doorgangspunt S_l en de 1^e projectie van het 2^e verdwijnpunt T_l' van $l \equiv AB$.

We slaan vervolgens het vlak met t_z en l neer om s_z . Op de gewone wijze vinden we $(O_2)_n$ en dus $(t_z)_n$ door $(O_2)_n // s_z$. Wat de lijn l betreft, blijft S_l op zijn plaats; verder is blijkbaar

$(O_2)_n (T_l)_n = O_2 T_l = W_l' S_l = 2 \times R_l' S_l$
 waarbij we goed dienen te letten op de richting.

Hiermee is dus l_n bepaald. De punten A_n en B_n vinden we door middel van de 2^e projecteerende lijnen door A en B , nl. a en b . A_n is dan het snijpunt van l_n en a_n , B_n dat van l_n en b_n .

Bij verder onderzoek blijkt, dat behalve deze voordeelen voor metrische betrekkingen, waardoor het neerslaan van vlakken met daarin gelegen lijnen aanmerkelijk wordt vergemakkelijkt, deze speciale keuze van projectiecentra geen vereenvoudiging geeft.

B. *De beide projectiecentra liggen op gelijken afstand, aan denzelfden kant van het tafereel.*

Ook hier zijn *de stralen der beide distantiecircels gelijk*. Het is overigens duidelijk, dat dit systeem eenige afwijking zal moeten vertoonen met het algemeene, reeds in zooverre, dat de verbindingslijn der projectiecentra evenwijdig is met het tafereel en dus het doorgangspunt O in het oneindige valt.

We vermoeden dus, dat, wanneer P' en P'' de projecties voorstellen van een punt P , hunne verbindingslijn moet gaan door het oneindig vergelegen punt van $\bar{O}_1\bar{O}_2$, m. a. w. *evenwijdig loopt met de verbindingslijn der middelpunten van de distantiecircels*.

Eenvoudige beschouwing van de ruimtefiguur bevestigt dit vermoeden; immers het vlak O_1O_2P snijdt het tafereel volgens eene lijn $P'P''$, die evenwijdig moetloopen met O_1O_2 en dus ook met $\bar{O}_1\bar{O}_2$.

We komen dus tot deze voorwaarde:

De verbindingslijnen van de beide projecties van verschillende punten van de ruimte gaan alle door het oneindig vergelegen punt van $\bar{O}_1\bar{O}_2$, zijn dus evenwijdig met $\bar{O}_1\bar{O}_2$ en dus ook onderling evenwijdig.

De beide projecties van eene lijn zijn weer 2 rechte lijnen l' en l'' , de doorsneden van de beide projecteerende vlakken van de lijn l . Het snijpunt van l' en l'' is het doorgangspunt S_l .

Wat de verdwijnpunten van de lijn betreft, moeten

we opmerken, dat *de punten R en T voor dit projectiesysteem samenvallen*; de beide projecties van dit verdwijnpunt vallen blijkbaar in het oneindige. Derhalve $R' \equiv T'$ is het oneindig vergelegen punt van l' en $R' \equiv T'$ ligt oneindig ver op l' .

Van het bekende parallellogram vallen dus 3 punten in het oneindige, namelijk R' , T' en O .

Wat de projecties van het oneindig vergelegen punt W betreft, deze zijn gemakkelijk te vinden; immers:

1° WW' loopt evenwijdig met $\overline{O_1O_2}$

2° $WW' = O_1O_2 = \overline{O_1O_2}$.

Men bepaalt de *vluchtpunten* W' en W'' van eene lijn l op de volgende wijze: Zijn l' en l'' de projecties van l en zij A het snijpunt van $\overline{O_1O_2}$ met l' , dan zetten we van uit A op $\overline{O_1O_2}$ een stuk uit gelijk aan $\overline{O_1O_2}$. Uit het zoo verkregen punt B trekken we eene lijn $// l''$, tot ze l' snijdt; dit punt is W' , terwijl W'' op l'' gevonden wordt door middel van eene lijn $// \overline{O_1O_2}$.

Natuurlijk is weer $SW' = RO_1$ en $SW'' = RO_2$, waarvan we gebruik zullen maken bij het neerslaan van vlakken.

Wat de puntenreeksen op de projecties l' en l'' betreft, valt het volgende op te merken:

$S \equiv S' \equiv S''$ is zoowel een punt van de eene reeks als van de andere, juist zooals in het algemeene geval. Verder komt het oneindig ver op l' gelegen punt R' overeen met het oneindig verre punt R'' op l'' .

De puntenreeksen zijn dus gelijkvormig.

De kromme van de 2^e klasse, die omhuld wordt door de verbindingslijnen van overeenkomstige punten, is in dit geval ontaard in een stelsel van evenwijdige lijnen, d.w.z. in een waaijer met top in het oneindige en dezen top als klassepunt.

De voorwaarde, dat 2 lijnen l en m in elkaar snijden, Voorwaarde
van snijding. wordt blijkbaar voor dit speciale geval:

Wanneer l en l' , m en m' de projecties van 2 elkaar snijdende lijnen l en m voorstellen, dan moet de verbindingslijn van het snijpunt van l en m en het snijpunt van l' en m' evenwijdig loopen met $\overline{O_1 O_2}$.

In het algemeen is een vlak weer bepaald door Afbeelding
van een vlak. 3 willekeurige punten A , B en C .

De lijnen $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ loopen blijkbaar evenwijdig met $\overline{O_1 O_2}$. Zij α het vlak door deze 3 punten bepaald, dan is gemakkelijk in te zien, dat de overeenkomstige zijden van de driehoeken $A'B'C'$ en $A''B''C''$ elkaar weer snijden op eene rechte lijn, namelijk op den doorgang van het vlak α .

Ook in dit geval zijn de driehoeken perspectief gelegen ten opzichte van het oneindig ver gelegen centrum van perspectief O (Uitbreiding van Desargues).

De beide methoden om een 4^e punt van het vlak te construeeren, blijven van kracht.

Hetzelfde, wat opgemerkt is omtrent de verdwijnpunten van eene lijn, geldt natuurlijk ook voor de verdwijnlijnen van een vlak. Een vlak α heeft slechts

eene enkele verdwynlijn $r_\alpha \equiv t_\alpha$; zoowel r_α' als r_α'' vallen bij dit projectiestelsel in het oneindige.

Een vlak kan dus niet worden bepaald door zijn doorgang en verdwynlijn, maar door zijn doorgang s_α en een willekeurig punt $P (s_\alpha, P'P')$.

Neerslaan
van vlakken.

Hoewel de beide projecties van de verdwynlijn in het oneindige vallen, zoo is bij het neerslaan bijv. van een 1^e. projecteerend vlak, $(r_\alpha)_n$ gemakkelijk op de gewone wijze te bepalen. Eveneens, wanneer l eene projecteerende lijn van α is, bepaalt men gemakkelijk $l_n \equiv S_l(O_1)_n$.

De eenige moeilijkheid schijnt te zijn, wanneer m eene willekeurige lijn van het 1^e. projecteerend vlak α is, bij het neerslaan van α om zijn doorgang s_α de lijn m_n te bepalen, daar de projecties van het verdwijnpunt R_m in het oneindige vallen.

We weten evenwel, dat $(R_m)_n$ op $(r_\alpha)_n$ moet liggen en zullen door een kunstgreep den afstand $(O_1)_n(R_m)_n$ bepalen. Deze afstand is namelijk gelijk aan $\bar{O}_1 R_m$, als $\bar{R}_m$ de orthogonale projectie van R_m voorstelt.

Zij het vlak α gegeven door $s_\alpha, P'P'$ (P' in s_α) en zij m eene willekeurige lijn in α door P , dus S_m op $s_\alpha, m' \equiv s_\alpha$ en $m'' \equiv S_m P'$. Is nu R_m het verdwijnpunt van m , dan is $O_1 R_m' //$ tafereel; eveneens $O_2 R_m$.

Hieruit volgt $\bar{O}_1 \bar{R}_m // O_1 R_m$ en $\bar{O}_2 \bar{R}_m // O_2 R_m$.

Blijkbaar geeft $O_1 R_m$ en dus ook $\bar{O}_1 \bar{R}_m$ de richting aan, waarin R_m' in het oneindige ligt; evenzoo geeft

$O_2 R_m$ of $\overline{O}_2 \overline{R}_m$ de richting aan, waarin R_m'' in het oneindige ligt.

Derhalve $\overline{O}_1 \overline{R}_m // m'$ en $\overline{O}_2 \overline{R}_m // m''$; we vinden dus het punt $\overline{R}_m$ door uit $\overline{O}_1$ eene lijn te trekken evenwijdig aan $m' \equiv s_z$ en uit $\overline{O}_2$ een lijn $// m'' \equiv S_m P''$. Het snijpunt van deze lijnen is $\overline{R}_m$.

Daar nu $\overline{O}_1 \overline{R}_m = O_1 R_m = (O_1)_n (R_m)_n$ is hiermee $(R_m)_n$ gevonden en dus ook $m_n \equiv S_m (R_m)_n$.

Het spreekt van zelf, dat we om m_n te vinden, ook de volgende methode hadden kunnen toepassen, die omslachtiger is, maar misschien meer voor de hand ligt. Het vlak α is gegeven door s_z en P', P'' . We zouden natuurlijk als nieuw 1^e projectiecentrum $o_1 \equiv P$ kunnen kiezen; hierdoor wordt het bijzondere systeem tot het algemeene teruggebracht. Blijkbaar is $\overline{o}_1$ het snijpunt van $\overline{O}_1 P'$ en $\overline{O}_2 P''$, terwijl de straal van den nieuwen distantiecirkel op de gewone wijze wordt bepaald; verder is $o \equiv P''$ en $\overline{o}_2 \equiv \overline{O}_2$.

Hiermee is α niet alleen 1^e projecteerend vlak gebleven, maar is m bovendien 1^e projecteerende lijn geworden, zoodat de bepaling van m_n slechts neerkomt op het vinden van $(o_1)_n$ of P_n .

Is P een willekeurig punt van het 1^e projecteerend vlak α , dan vinden we P_n door P als snijpunt te beschouwen van eene willekeurige lijn in α en de 1^e projecteerende lijn van P .

Om *willekeurige* vlakken met lijnen en punten om den doorgang neer te slaan, kiezen we weer een nieuw

1^e projectiecentrum, *al of niet* gelegen in de verdwijnslijn van het vlak. In het laatste geval wordt het speciale systeem herleid tot het algemeene, waarbij de afstanden der projectiecentra tot het tafereel willekeurig, niet gelijk zijn.

C. *De beide projectiecentra liggen op eene loodlijn op het projectievlak, hetzij aan denzelfden kant, hetzij aan verschillende kanten van het tafereel.*

Veel bijzonders levert deze keuze van projectiecentra niet op. Het is duidelijk, dat de beide middelpunten der distantiecirkels in dit geval samen vallen met het doorgangspunt van de verbindingslijn der projectiecentra. Derhalve $\bar{O}_1 \equiv \bar{O}_2 \equiv O$. De grootheden, die het projectiesysteem bepalen in de constructiefiguur, nemen in het tafereel weinig plaats in, wat natuurlijk als een voordeel is aan te merken met betrekking tot de duidelijkheid van de teekening, vooral bij het neerslaan van vlakken.

De vereenvoudiging wordt evenwel aanmerkelijk grooter, wanneer *de projectiecentra bovendien op getijken afstand aan weerszijden aan het tafereel zijn gelegen.*

Immers in dit geval vallen niet alleen de middelpunten der distanciecirkels samen, maar deze zelf ook; alleen de pijlen, die aangeven aan welken kant het overeenkomstige centrum wordt gevonden, zijn verschillend.

Bovendien hebben we het groote voordeel, dat voor

eene lijn l $O_1R \equiv 2 \times OR$ en $O_2T \equiv 2 \times OT$, als R en T de beide verdwijnpunten van l voorstellen; zooals we zagen, is deze betrekking van groot belang bij het neerslaan van vlakken, ook in verband met de betrekkingen, geldende voor de vluchtpunten W en W' van l .

Behandelen we als toepassing nog eens het volgende vraagstuk:

Van een vierkant, waarvan de zijde eene gegeven lengte a heeft, is bekend, dat het ligt in een gegeven 1^e projecteerend vlak α . Van dit vierkant $EFGH$ ligt het punt E op gegeven afstand b van s_α , terwijl EF een hoek van 30° maakt met s_α . Gevraagd de projecties van dit vierkant te construeeren.

Zij het vlak α gegeven door s_α en $r_\alpha \parallel s_\alpha$ door O , dan bepalen we eerst op de gewone wijze $(O_1)_\alpha$ en $(r_\alpha)_\alpha$. In dit neergeslagen vlak teekenen we nu het vierkant $E_nF_nG_nH_n$ en zullen het vervolgens weer trachten op te richten.

Noemen we de zijden EF , FG , GH en HE respectievelijk a , b , c en d , dan is het snijpunt van EF met s_α blijkbaar S_a , terwijl $(R_a)_\alpha$ het snijpunt is met $(r_\alpha)_\alpha$. Nu is:

$$OR_a = \frac{1}{2} O_1R_a = \frac{1}{2} (O_1)_\alpha(R_a)_\alpha$$

terwijl R_a ligt op r_α . R_a is dus te vinden en hierdoor is ook $a' \equiv S_aR_a$ bekend, terwijl a' evenals alle 1^e projecties van de zijden van het vierkant met s_α samenvallen.

Gemakkelijk vinden we nu W_z'' uit de betrekking $S_a W_a'' = 2 \times S_a R_a''$. Daar verder $c//a$ is $W_c'' \equiv W_a''$. Hiermee is tevens $c'' \equiv S_c W_c''$ gevonden.

We kunnen nu, om de punten E'' , F'' , G'' en H'' te vinden waarschijnlijk het best gebruik maken van de 1^e projecteerende lijnen van E , F , G en H .

Verder vinden we E' , F' , G' en H' op s_z door middel van de lijn OE'' , OF'' , OG'' en OH'' .

Het spreekt vanzelf, dat we de projecties van de 2 andere zijden van het vierkant op dezelfde wijze hadden kunnen vinden als die van a en c , door gebruik te maken van het gemeenschappelijke vluchtpunt $W_b'' \equiv W_d''$. Als contrôlemiddel blijft ons dus nu over, dat b'' en d'' elkaar moeten snijden in $W_b'' \equiv W_d''$.

Voor het neerslaan van willekeurige vlakken nemen we een nieuw projectiecentrum aan, bij voorkeur in de overeenkomstige verdwijnslijn van het vlak. Immers hierdoor blijft het hoofdvoordeel behouden, dat de projectiecentra aan weerszijden op gelijken afstand van het projectievlak (tafereel) gelegen zijn.

D. Een der projectiecentra ligt in eene bepaalde richting in het oneindige.

Ligt O_1 bijv. op eindigen afstand van het tafereel en O_2 in eene bepaalde, door een pijl aangewezen richting in het oneindige, dan zal de lijn door O_1 in de richting van de pijl getrokken, de rol spelen van de verbindingslijn der projectiecentra en haar snijpunt

met het tafereel worden aangeduid door O . Noemen we $\bar{O}_1$ weer het voetspunt van de loodlijn uit O_1 op het projectievlak neergelaten en $\bar{O}_2$ het voetspunt van de loodlijn uit O_2 , dan ligt blijkbaar $\bar{O}_2$ in het oneindige op de verbindingslijn $O\bar{O}_1$.

Is dus in de constructiefiguur de 1^e distantiecirkel met zijn middelpunt $\bar{O}_1$ en bovendien het punt O gegeven, dan is de richting, waarin O_2 zich in het oneindige bevindt, volkomen bepaald; het stelsel is dus volkomen vastgelegd. $\bar{O}_2$ ligt op de lijn $O\bar{O}_1$ in het oneindige.

De 1^e projectie van een punt P is natuurlijk het snijpunt van de lijn O_1P met het tafereel. De 2^e projecteerende lijn is blijkbaar eene lijn door P in de richting, waarin O_2 in het oneindige ligt, dus eene lijn $// O_1O$. De beide projecteerende lijnen liggen dus met O_1O in één vlak, m. a. w. de snijpunten O , P' en P'' met het tafereel liggen op eene rechte lijn. Projecties
van een punt.

De voorwaarde voor de projecties van een punt blijft onveranderd van kracht.

Bijzondere punten zijn natuurlijk weer:

- a) punten in het tafereel.
- b) punten op de lijn O_1O .
- c) punten in een der verdwijnvlakken.

Is R bijv. een punt van het 1^e verdwijnvlak, dan ligt R' in het oneindige; het merkwaardige is evenwel $OR' =$ en $// O_1R$.

Is W een punt van het 2^e verdwijnsvlak, dan valt W'' in het oneindige, maar W' in het eindige, afhankelijk van de richting, waarin W in het oneindige ligt.

Projecties
van eene lijn.

De 1^e projectie van eene lijn l krijgen we op de gewone wijze door de snijlijn te bepalen van het 1^e projecteerend vlak (vlak door l en O_1) met het tafereel; het 2^e projecteerend vlak is een vlak door l en O_2 , dus een vlak door $l \parallel O_1O$; de snijlijn van dit vlak met het tafereel is l' ; l en l' snijden elkaar in S , het doorgangspunt van l .

Bijzondere punten van l zijn natuurlijk doorgangspunt, verdwijnpunten en vluchtpunten.

Voor het 1^e verdwijnpunt R valt R' in het oneindige op l , R'' in het eindige op l' , zoodanig dat $OR' =$ en $\parallel O_1R$.

Wat het 2^e verdwijnpunt T betreft, zien we gemakkelijk in dat dit punt tegelijkertijd het oneindig gelegen punt W van l is, zoodat $T \equiv W$. We zullen het 2^e verdwijnpunt voor dit stelsel dus voorstellen door W .

Ook uit eene stereometrische figuur volgt onmiddellijk, dat $OR'SW'$ een parallelogram vormt.

W'' ligt op l' in het oneindige, wat volkomen klopt met de voorwaarde, dat W' , O en W'' op één rechte lijn moeten liggen.

We zien dus, dat de projecties van het oneindig

vergelegen punt van eene lijn l , dus de vluchtpunten van l gemakkelijk zijn te construeeren.

W' ligt op l' en is het 4^e hoekpunt van het parallelogram, waarvan O , R'' en S de andere hoekpunten zijn. W'' ligt op l'' in het oneindige.

Zijn l en m evenwijdige lijnen, dan gaan l' en m' door het gemeenschappelijke vluchtpunt W' . l'' en m'' moeten gaan door het gemeenschappelijke oneindig verre vluchtpunt W'' , m. a. w. l' en m' loopen evenwijdig.

Dit is niets anders dan een bijzonder geval van de reeds vroeger genoemde stelling:

Van twee lijnen, die hetzelfde 2^e verdwijnpunt hebben, loopen de 2^e projecties evenwijdig, terwijl de 1^e projecties elkaar snijden in de 1^e projectie van dit gemeenschappelijk verdwijnpunt.

We zijn nu in staat door een punt P eene lijn m te trekken $\parallel$ aan een gegeven lijn l .

Hiertoe bepalen we eerst W'_1 op l' door middel van eene lijn door $O \parallel l'$. We weten nu $W'_m \equiv W'_1$, dus $m' \equiv W'_1 P'$. Verder is $m'' \parallel l''$ door P'' . De constructie verandert niet als in plaats van een willekeurig punt P , van de gevraagde lijn het doorgangspunt bekend is.

We willen alleen even stilstaan bij de bepaling van een vlak door zijn doorgang en een der verdwijnlijnen. Bepaling
van het vlak.

Beschouwen we allereerst de projecteerende vlakken.

Voor een 1^e projecteerend vlak α levert dit niets bijzonders op; dit wordt nl. bepaald door s_α en $r_\alpha'' \parallel s_\alpha$ door O terwijl $t_\alpha' \equiv s_\alpha$.

Een 2^e projecteerend vlak β is een vlak $// OO_1$; $r'_\beta \equiv s_\beta$ door O , terwijl $t_\beta' // s_\beta$ door O .

Voor een dubbelprojecteerend vlak γ is blijkbaar $s_\gamma \equiv r_\gamma' \equiv t_\gamma'$.

Voor een willekeurig vlak α valt op te merken, zooals beschouwing van een stereometrische figuur leert, dat de afstand van O tot r_α'' gelijk is aan die van t_α' tot s_α ; deze afstand is namelijk gelijk aan de loodlijn uit O , op de 1^e verdwijnlijn van het vlak neergelaten.

Neerslaan
van vlakken.

Om willekeurige vlakken neer te slaan kunnen we als nieuw projectiecentrum een punt van de 1^e verdwijnlijn kiezen. Kiezen we bijv. het voetpunt R van de loodlijn uit O_1 op r_α neergelaten, dus $o_1 \equiv R$.

Blijkbaar is $o \equiv R'$ het voetpunt van de loodlijn uit O op r_α' neergelaten, $\bar{o}_1 \equiv \bar{R}$ is het snijpunt van de loodlijn uit $\bar{O}_1$ op s_α neergelaten met eene lijn door $R' // O\bar{O}_1$, m.a.w. $\bar{R} \equiv \bar{o}_1$ is het 4^e. hoekpunt van een parallelogram, waarvan $R', O, \bar{O}_1$ de 3 andere hoekpunten zijn. De straal van den 1^{en}. distantiecirkel is onveranderd gebleven.

Men zou het hier besprokenene door meerdere voorbeelden kunnen toelichten. Ik meen evenwel hiermee dit proefschrift te moeten eindigen, vertrouwend, dat ieder, die dit boekje met aandacht gelezen heeft, in staat zal zijn eenvoudige problemen tot oplossing te brengen.

ERRATA.

- Op blz. 18: laatste regel staat $(l'O_2)$ moet zijn $(l'O_3)$.
 11^e regel van onderen staat $P'Q'$, moet
 zijn $P'Q$.
- Op blz. 28: eerste regel staat l en m , moet zijn l en m' .
- Op blz. 36: 13^e regel van boven staat $A'B$, moet
 zijn $A'B'$.
- Op blz. 63: 9^e regel van boven staat l en R , moet
 zijn l en P .
- Op blz. 69: 4^e regel van boven staat $\angle \overline{O}, S(O_1)_n$ moet
 zijn $\angle \overline{O}_1 S(O_1)_n$.
- Op blz. 72: 6^e regel van onderen staat plaats eerste,
 moet zijn eerste plaats.
- Op blz. 72: 5^e regel van onderen staat O, L , moet
 zijn $\overline{O}_1 L$.
- Op blz. 73: 17^e regel van boven staat $S_x P_1$, moet
 zijn $S_x P'$.
- Op blz. 74: 8^e regel van boven staat $o_1 \equiv \overline{R}_t$, moet
 zijn $o_1 \equiv R_t$.
- Op blz. 85: 3^e regel van boven staat $\overline{O}_2 \overline{R}_m$, moet
 zijn $\overline{O}_2 \overline{R}_m$.
-

STELLINGEN.

I.

De lijn, die in de bicentrale projectie de verbindingslijn der centra snijdt, is analoog met de lijn, die in de orthogonale projectie van Monge de as van projectie loodrecht kruist.

II.

De beide kegelsneden, die in de bicentrale projectie de projecties van een cirkel voorstellen, zijn in het algemeen onvoldoende om dien cirkel te bepalen.

III.

Als men een punt bepaalt door zijne centrale en zijne orthogonale projectie op het zelfde tafereel, dan past men de beginselen der bicentrale projectie toe.

IV.

Het verdient geen aanbeveling om met *Poincaré*, nonsecanten ook parallellen te noemen.

V.

De lijn in het oneindige van het Euclidische vlak is eene Riemannsche lijn.

—

VI.

De arithmetica kan, in tegenstelling met de meetkunde, zonder axioma's worden opgebouwd.

VII.

Het theorema van *Budan* brengt de scheiding der wortels niets verder dan het theorema van *Descartes*.

VIII.

Het is wenschelijk, dat voor de onderscheiden vervalsproducten van radioactieve stoffen afzonderlijke benamingen worden ingevoerd.

IX.

De tegenwoordige stand van de wetenschap maakt het wenschelijk een electrischen stroom in een geleider niet als dubbelstroom op te vatten.

X.

De blauwe kleur van de lucht is een gevolg van de moleculaire verstrooiing van het licht in den dampkring.

XI.

Bismuth dient te worden beschouwd als het eind-product van de radioactieve Thorium omzetting.

XII.

De definitie van kans in de waarschijnlijkheidsrekening is of onvolledig, of men beweegt zich in een vicieusen cirkel.

XIII.

De principes in de mechanica zijn te vergelijken met de axioma's in de meetkunde.

XIV.

De formuleering van het principe der virtueele snelheden in *Thomson* en *Tait* is aan ernstige bedenkingen onderhevig.

XV.

Het is wenschelijk, dat de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening op de H. B. S. onderwezen worden.
