



# Cauchy's integratie van partieele differentiaalvergelijkingen door residuen

<https://hdl.handle.net/1874/255549>



A<sup>n</sup> 192.  
1909.

GAUGHY's Integratie  
van partieele  
Differentiaalvergelijkingen  
door Residuen.

G. VAN HASSELT.



A. qu.  
192









CAUCHY's Integratie van  
partieele Differentiaalvergelijkingen  
door Residuen.



A<sup>u</sup> 192 (1909)

# CAUCHY's Integratie van partieele Differentiaalver- gelijkingen door Residuen.

---

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD  
VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE, AAN  
DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN  
DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. H. ZWAARDEMAKER,  
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEES-  
KUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER  
UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE  
FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE  
VERDEDIGEN OP DONDERDAG 16 DECEMBER 1909, DES  
NAMIDDAGS TE 4 UUR, DOOR GERARD VAN HASSELT  
GEBOREN TE UTRECHT. \* \* \* \* \*

---

BIBLIOTHEEK DER  
RIJKSUNIVERSITEIT  
UTRECHT.

J. VAN BOEKHOVEN, — UTRECHT.







*Hooggeleerde KAPTEIJN, mijn Promotor, na het voltooien van dit proefschrift wil ik U gaarne mijn dank betuigen. Ten eerste voor het onderwerp, dat ik op Uwe aanwijzing gevonden heb, en vervolgens voor de welwillendheid, die gij mij bij het bewerken daarvan hebt bewezen en voor de moeite, die gij U voor mij hebt getroost. Ik gevoel mij aan U zeer verplicht voor de vriendelijke en aanmoedigende wijze, waarop gij mij, toen ik mij om hulp tot U wendde, zijt tegemoet gekomen.*

*Den hoogleeraren en oud-hoogleeraren, wier colleges ik aan de gemeentelijke Universiteit te Amsterdam heb gevolgd, zeg ik dank voor hun onderricht. In het bijzonder denk ik daarbij aan U, hooggeleerde KORTEWEG. Ik blijf U erkentelijk voor de mij betoonde hulpvaardigheid en belangstelling.*





# INHOUD.

---

|                                                                                                                | Bladz. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| INLEIDING . . . . .                                                                                            | 1      |
| HOOFDSTUK I. . . . .                                                                                           | 8      |
| Uiteenzetting van het Vraagstuk en eerste Opzet van de<br>Oplossing.                                           |        |
| HOOFDSTUK II. . . . .                                                                                          | 19     |
| Ligging van de Nulpunten van $\delta(r)$ op grooten Afstand van<br>den Oorsprong.                              |        |
| HOOFDSTUK III . . . . .                                                                                        | 42     |
| Bepaling van $\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu$ .        |        |
| HOOFDSTUK IV . . . . .                                                                                         | 69     |
| Vervorming van de in het vorige Hoofdstuk afgeleide Reeks-<br>ontwikkeling.                                    |        |
| HOOFDSTUK V. . . . .                                                                                           | 95     |
| Samenvatting van de Resultaten en Toepassing op een bijzonder<br>Geval van het Vraagstuk der trillende Staven. |        |

---

# INHOUD

|     |                           |
|-----|---------------------------|
| 1   | INHOUD                    |
| 2   | 1. Inleiding              |
| 3   | 2. Doel van de studie     |
| 4   | 3. Methode                |
| 5   | 4. Resultaten             |
| 6   | 5. Conclusies             |
| 7   | 6. Literatuurverwijzingen |
| 8   | 7. Bijlagen               |
| 9   | 8. Samenvatting           |
| 10  | 9. Dankwoord              |
| 11  | 10. Aankomst              |
| 12  | 11. Afsluiting            |
| 13  | 12. Bijlagen              |
| 14  | 13. Samenvatting          |
| 15  | 14. Dankwoord             |
| 16  | 15. Aankomst              |
| 17  | 16. Afsluiting            |
| 18  | 17. Bijlagen              |
| 19  | 18. Samenvatting          |
| 20  | 19. Dankwoord             |
| 21  | 20. Aankomst              |
| 22  | 21. Afsluiting            |
| 23  | 22. Bijlagen              |
| 24  | 23. Samenvatting          |
| 25  | 24. Dankwoord             |
| 26  | 25. Aankomst              |
| 27  | 26. Afsluiting            |
| 28  | 27. Bijlagen              |
| 29  | 28. Samenvatting          |
| 30  | 29. Dankwoord             |
| 31  | 30. Aankomst              |
| 32  | 31. Afsluiting            |
| 33  | 32. Bijlagen              |
| 34  | 33. Samenvatting          |
| 35  | 34. Dankwoord             |
| 36  | 35. Aankomst              |
| 37  | 36. Afsluiting            |
| 38  | 37. Bijlagen              |
| 39  | 38. Samenvatting          |
| 40  | 39. Dankwoord             |
| 41  | 40. Aankomst              |
| 42  | 41. Afsluiting            |
| 43  | 42. Bijlagen              |
| 44  | 43. Samenvatting          |
| 45  | 44. Dankwoord             |
| 46  | 45. Aankomst              |
| 47  | 46. Afsluiting            |
| 48  | 47. Bijlagen              |
| 49  | 48. Samenvatting          |
| 50  | 49. Dankwoord             |
| 51  | 50. Aankomst              |
| 52  | 51. Afsluiting            |
| 53  | 52. Bijlagen              |
| 54  | 53. Samenvatting          |
| 55  | 54. Dankwoord             |
| 56  | 55. Aankomst              |
| 57  | 56. Afsluiting            |
| 58  | 57. Bijlagen              |
| 59  | 58. Samenvatting          |
| 60  | 59. Dankwoord             |
| 61  | 60. Aankomst              |
| 62  | 61. Afsluiting            |
| 63  | 62. Bijlagen              |
| 64  | 63. Samenvatting          |
| 65  | 64. Dankwoord             |
| 66  | 65. Aankomst              |
| 67  | 66. Afsluiting            |
| 68  | 67. Bijlagen              |
| 69  | 68. Samenvatting          |
| 70  | 69. Dankwoord             |
| 71  | 70. Aankomst              |
| 72  | 71. Afsluiting            |
| 73  | 72. Bijlagen              |
| 74  | 73. Samenvatting          |
| 75  | 74. Dankwoord             |
| 76  | 75. Aankomst              |
| 77  | 76. Afsluiting            |
| 78  | 77. Bijlagen              |
| 79  | 78. Samenvatting          |
| 80  | 79. Dankwoord             |
| 81  | 80. Aankomst              |
| 82  | 81. Afsluiting            |
| 83  | 82. Bijlagen              |
| 84  | 83. Samenvatting          |
| 85  | 84. Dankwoord             |
| 86  | 85. Aankomst              |
| 87  | 86. Afsluiting            |
| 88  | 87. Bijlagen              |
| 89  | 88. Samenvatting          |
| 90  | 89. Dankwoord             |
| 91  | 90. Aankomst              |
| 92  | 91. Afsluiting            |
| 93  | 92. Bijlagen              |
| 94  | 93. Samenvatting          |
| 95  | 94. Dankwoord             |
| 96  | 95. Aankomst              |
| 97  | 96. Afsluiting            |
| 98  | 97. Bijlagen              |
| 99  | 98. Samenvatting          |
| 100 | 99. Dankwoord             |
| 101 | 100. Aankomst             |
| 102 | 101. Afsluiting           |
| 103 | 102. Bijlagen             |
| 104 | 103. Samenvatting         |
| 105 | 104. Dankwoord            |
| 106 | 105. Aankomst             |
| 107 | 106. Afsluiting           |
| 108 | 107. Bijlagen             |
| 109 | 108. Samenvatting         |
| 110 | 109. Dankwoord            |
| 111 | 110. Aankomst             |
| 112 | 111. Afsluiting           |
| 113 | 112. Bijlagen             |
| 114 | 113. Samenvatting         |
| 115 | 114. Dankwoord            |
| 116 | 115. Aankomst             |
| 117 | 116. Afsluiting           |
| 118 | 117. Bijlagen             |
| 119 | 118. Samenvatting         |
| 120 | 119. Dankwoord            |
| 121 | 120. Aankomst             |
| 122 | 121. Afsluiting           |
| 123 | 122. Bijlagen             |
| 124 | 123. Samenvatting         |
| 125 | 124. Dankwoord            |
| 126 | 125. Aankomst             |
| 127 | 126. Afsluiting           |
| 128 | 127. Bijlagen             |
| 129 | 128. Samenvatting         |
| 130 | 129. Dankwoord            |
| 131 | 130. Aankomst             |
| 132 | 131. Afsluiting           |
| 133 | 132. Bijlagen             |
| 134 | 133. Samenvatting         |
| 135 | 134. Dankwoord            |
| 136 | 135. Aankomst             |
| 137 | 136. Afsluiting           |
| 138 | 137. Bijlagen             |
| 139 | 138. Samenvatting         |
| 140 | 139. Dankwoord            |
| 141 | 140. Aankomst             |
| 142 | 141. Afsluiting           |
| 143 | 142. Bijlagen             |
| 144 | 143. Samenvatting         |
| 145 | 144. Dankwoord            |
| 146 | 145. Aankomst             |
| 147 | 146. Afsluiting           |
| 148 | 147. Bijlagen             |
| 149 | 148. Samenvatting         |
| 150 | 149. Dankwoord            |
| 151 | 150. Aankomst             |
| 152 | 151. Afsluiting           |
| 153 | 152. Bijlagen             |
| 154 | 153. Samenvatting         |
| 155 | 154. Dankwoord            |
| 156 | 155. Aankomst             |
| 157 | 156. Afsluiting           |
| 158 | 157. Bijlagen             |
| 159 | 158. Samenvatting         |
| 160 | 159. Dankwoord            |
| 161 | 160. Aankomst             |
| 162 | 161. Afsluiting           |
| 163 | 162. Bijlagen             |
| 164 | 163. Samenvatting         |
| 165 | 164. Dankwoord            |
| 166 | 165. Aankomst             |
| 167 | 166. Afsluiting           |
| 168 | 167. Bijlagen             |
| 169 | 168. Samenvatting         |
| 170 | 169. Dankwoord            |
| 171 | 170. Aankomst             |
| 172 | 171. Afsluiting           |
| 173 | 172. Bijlagen             |
| 174 | 173. Samenvatting         |
| 175 | 174. Dankwoord            |
| 176 | 175. Aankomst             |
| 177 | 176. Afsluiting           |
| 178 | 177. Bijlagen             |
| 179 | 178. Samenvatting         |
| 180 | 179. Dankwoord            |
| 181 | 180. Aankomst             |
| 182 | 181. Afsluiting           |
| 183 | 182. Bijlagen             |
| 184 | 183. Samenvatting         |
| 185 | 184. Dankwoord            |
| 186 | 185. Aankomst             |
| 187 | 186. Afsluiting           |
| 188 | 187. Bijlagen             |
| 189 | 188. Samenvatting         |
| 190 | 189. Dankwoord            |
| 191 | 190. Aankomst             |
| 192 | 191. Afsluiting           |
| 193 | 192. Bijlagen             |
| 194 | 193. Samenvatting         |
| 195 | 194. Dankwoord            |
| 196 | 195. Aankomst             |
| 197 | 196. Afsluiting           |
| 198 | 197. Bijlagen             |
| 199 | 198. Samenvatting         |
| 200 | 199. Dankwoord            |
| 201 | 200. Aankomst             |
| 202 | 201. Afsluiting           |
| 203 | 202. Bijlagen             |
| 204 | 203. Samenvatting         |
| 205 | 204. Dankwoord            |
| 206 | 205. Aankomst             |
| 207 | 206. Afsluiting           |
| 208 | 207. Bijlagen             |
| 209 | 208. Samenvatting         |
| 210 | 209. Dankwoord            |
| 211 | 210. Aankomst             |
| 212 | 211. Afsluiting           |
| 213 | 212. Bijlagen             |
| 214 | 213. Samenvatting         |
| 215 | 214. Dankwoord            |
| 216 | 215. Aankomst             |
| 217 | 216. Afsluiting           |
| 218 | 217. Bijlagen             |
| 219 | 218. Samenvatting         |
| 220 | 219. Dankwoord            |
| 221 | 220. Aankomst             |
| 222 | 221. Afsluiting           |
| 223 | 222. Bijlagen             |
| 224 | 223. Samenvatting         |
| 225 | 224. Dankwoord            |
| 226 | 225. Aankomst             |
| 227 | 226. Afsluiting           |
| 228 | 227. Bijlagen             |
| 229 | 228. Samenvatting         |
| 230 | 229. Dankwoord            |
| 231 | 230. Aankomst             |
| 232 | 231. Afsluiting           |
| 233 | 232. Bijlagen             |
| 234 | 233. Samenvatting         |
| 235 | 234. Dankwoord            |
| 236 | 235. Aankomst             |
| 237 | 236. Afsluiting           |
| 238 | 237. Bijlagen             |
| 239 | 238. Samenvatting         |
| 240 | 239. Dankwoord            |
| 241 | 240. Aankomst             |
| 242 | 241. Afsluiting           |
| 243 | 242. Bijlagen             |
| 244 | 243. Samenvatting         |
| 245 | 244. Dankwoord            |
| 246 | 245. Aankomst             |
| 247 | 246. Afsluiting           |
| 248 | 247. Bijlagen             |
| 249 | 248. Samenvatting         |
| 250 | 249. Dankwoord            |
| 251 | 250. Aankomst             |
| 252 | 251. Afsluiting           |
| 253 | 252. Bijlagen             |
| 254 | 253. Samenvatting         |
| 255 | 254. Dankwoord            |
| 256 | 255. Aankomst             |
| 257 | 256. Afsluiting           |
| 258 | 257. Bijlagen             |
| 259 | 258. Samenvatting         |
| 260 | 259. Dankwoord            |
| 261 | 260. Aankomst             |
| 262 | 261. Afsluiting           |
| 263 | 262. Bijlagen             |
| 264 | 263. Samenvatting         |
| 265 | 264. Dankwoord            |
| 266 | 265. Aankomst             |
| 267 | 266. Afsluiting           |
| 268 | 267. Bijlagen             |
| 269 | 268. Samenvatting         |
| 270 | 269. Dankwoord            |
| 271 | 270. Aankomst             |
| 272 | 271. Afsluiting           |
| 273 | 272. Bijlagen             |
| 274 | 273. Samenvatting         |
| 275 | 274. Dankwoord            |
| 276 | 275. Aankomst             |
| 277 | 276. Afsluiting           |
| 278 | 277. Bijlagen             |
| 279 | 278. Samenvatting         |
| 280 | 279. Dankwoord            |
| 281 | 280. Aankomst             |
| 282 | 281. Afsluiting           |
| 283 | 282. Bijlagen             |
| 284 | 283. Samenvatting         |
| 285 | 284. Dankwoord            |
| 286 | 285. Aankomst             |
| 287 | 286. Afsluiting           |
| 288 | 287. Bijlagen             |
| 289 | 288. Samenvatting         |
| 290 | 289. Dankwoord            |
| 291 | 290. Aankomst             |
| 292 | 291. Afsluiting           |
| 293 | 292. Bijlagen             |
| 294 | 293. Samenvatting         |
| 295 | 294. Dankwoord            |
| 296 | 295. Aankomst             |
| 297 | 296. Afsluiting           |
| 298 | 297. Bijlagen             |
| 299 | 298. Samenvatting         |
| 300 | 299. Dankwoord            |
| 301 | 300. Aankomst             |
| 302 | 301. Afsluiting           |
| 303 | 302. Bijlagen             |
| 304 | 303. Samenvatting         |
| 305 | 304. Dankwoord            |
| 306 | 305. Aankomst             |
| 307 | 306. Afsluiting           |
| 308 | 307. Bijlagen             |
| 309 | 308. Samenvatting         |
| 310 | 309. Dankwoord            |
| 311 | 310. Aankomst             |
| 312 | 311. Afsluiting           |
| 313 | 312. Bijlagen             |
| 314 | 313. Samenvatting         |
| 315 | 314. Dankwoord            |
| 316 | 315. Aankomst             |
| 317 | 316. Afsluiting           |
| 318 | 317. Bijlagen             |
| 319 | 318. Samenvatting         |
| 320 | 319. Dankwoord            |
| 321 | 320. Aankomst             |
| 322 | 321. Afsluiting           |
| 323 | 322. Bijlagen             |
| 324 | 323. Samenvatting         |
| 325 | 324. Dankwoord            |
| 326 | 325. Aankomst             |
| 327 | 326. Afsluiting           |
| 328 | 327. Bijlagen             |
| 329 | 328. Samenvatting         |
| 330 | 329. Dankwoord            |
| 331 | 330. Aankomst             |
| 332 | 331. Afsluiting           |
| 333 | 332. Bijlagen             |
| 334 | 333. Samenvatting         |
| 335 | 334. Dankwoord            |
| 336 | 335. Aankomst             |
| 337 | 336. Afsluiting           |
| 338 | 337. Bijlagen             |
| 339 | 338. Samenvatting         |
| 340 | 339. Dankwoord            |
| 341 | 340. Aankomst             |
| 342 | 341. Afsluiting           |
| 343 | 342. Bijlagen             |
| 344 | 343. Samenvatting         |
| 345 | 344. Dankwoord            |
| 346 | 345. Aankomst             |
| 347 | 346. Afsluiting           |
| 348 | 347. Bijlagen             |
| 349 | 348. Samenvatting         |
| 350 | 349. Dankwoord            |
| 351 | 350. Aankomst             |
| 352 | 351. Afsluiting           |
| 353 | 352. Bijlagen             |
| 354 | 353. Samenvatting         |
| 355 | 354. Dankwoord            |
| 356 | 355. Aankomst             |
| 357 | 356. Afsluiting           |
| 358 | 357. Bijlagen             |
| 359 | 358. Samenvatting         |
| 360 | 359. Dankwoord            |
| 361 | 360. Aankomst             |
| 362 | 361. Afsluiting           |
| 363 | 362. Bijlagen             |
| 364 | 363. Samenvatting         |
| 365 | 364. Dankwoord            |
| 366 | 365. Aankomst             |
| 367 | 366. Afsluiting           |
| 368 | 367. Bijlagen             |
| 369 | 368. Samenvatting         |
| 370 | 369. Dankwoord            |
| 371 | 370. Aankomst             |
| 372 | 371. Afsluiting           |
| 373 | 372. Bijlagen             |
| 374 | 373. Samenvatting         |
| 375 | 374. Dankwoord            |
| 376 | 375. Aankomst             |
| 377 | 376. Afsluiting           |
| 378 | 377. Bijlagen             |
| 379 | 378. Samenvatting         |
| 380 | 379. Dankwoord            |
| 381 | 380. Aankomst             |
| 382 | 381. Afsluiting           |
| 383 | 382. Bijlagen             |
| 384 | 383. Samenvatting         |
| 385 | 384. Dankwoord            |
| 386 | 385. Aankomst             |
| 387 | 386. Afsluiting           |
| 388 | 387. Bijlagen             |
| 389 | 388. Samenvatting         |
| 390 | 389. Dankwoord            |
| 391 | 390. Aankomst             |
| 392 | 391. Afsluiting           |
| 393 | 392. Bijlagen             |
| 394 | 393. Samenvatting         |
| 395 | 394. Dankwoord            |
| 396 | 395. Aankomst             |
| 397 | 396. Afsluiting           |
| 398 | 397. Bijlagen             |
| 399 | 398. Samenvatting         |
| 400 | 399. Dankwoord            |
| 401 | 400. Aankomst             |
| 402 | 401. Afsluiting           |
| 403 | 402. Bijlagen             |
| 404 | 403. Samenvatting         |
| 405 | 404. Dankwoord            |
| 406 | 405. Aankomst             |
| 407 | 406. Afsluiting           |
| 408 | 407. Bijlagen             |
| 409 | 408. Samenvatting         |
| 410 | 409. Dankwoord            |
| 411 | 410. Aankomst             |
| 412 | 411. Afsluiting           |
| 413 | 412. Bijlagen             |
| 414 | 413. Samenvatting         |
| 415 | 414. Dankwoord            |
| 416 | 415. Aankomst             |
| 417 | 416. Afsluiting           |
| 418 | 417. Bijlagen             |
| 419 | 418. Samenvatting         |
| 420 | 419. Dankwoord            |
| 421 | 420. Aankomst             |
| 422 | 421. Afsluiting           |
| 423 | 422. Bijlagen             |
| 424 | 423. Samenvatting         |
| 425 | 424. Dankwoord            |
| 426 | 425. Aankomst             |
| 427 | 426. Afsluiting           |
| 428 | 427. Bijlagen             |
| 429 | 428. Samenvatting         |
| 430 | 429. Dankwoord            |
| 431 | 430. Aankomst             |
| 432 | 431. Afsluiting           |
| 433 | 432. Bijlagen             |
| 434 | 433. Samenvatting         |
| 435 | 434. Dankwoord            |
| 436 | 435. Aankomst             |
| 437 | 436. Afsluiting           |
| 438 | 437. Bijlagen             |
| 439 | 438. Samenvatting         |
| 440 | 439. Dankwoord            |
| 441 | 440. Aankomst             |
| 442 | 441. Afsluiting           |
| 443 | 442. Bijlagen             |
| 444 | 443. Samenvatting         |
| 445 | 444. Dankwoord            |
| 446 | 445. Aankomst             |
| 447 | 446. Afsluiting           |
| 448 | 447. Bijlagen             |
| 449 | 448. Samenvatting         |
| 450 | 449. Dankwoord            |
| 451 | 450. Aankomst             |
| 452 | 451. Afsluiting           |
| 453 | 452. Bijlagen             |
| 454 | 453. Samenvatting         |
| 455 | 454. Dankwoord            |
| 456 | 455. Aankomst             |
| 457 | 456. Afsluiting           |
| 458 | 457. Bijlagen             |
| 459 | 458. Samenvatting         |
| 460 | 459. Dankwoord            |
| 461 | 460. Aankomst             |
| 462 | 461. Afsluiting           |
| 463 | 462. Bijlagen             |
| 464 | 463. Samenvatting         |
| 465 | 464. Dankwoord            |
| 466 | 465. Aankomst             |
| 467 | 466. Afsluiting           |
| 468 | 467. Bijlagen             |
| 469 | 468. Samenvatting         |
| 470 | 469. Dankwoord            |
| 471 | 470. Aankomst             |
| 472 | 471. Afsluiting           |
| 473 | 472. Bijlagen             |
| 474 | 473. Samenvatting         |
| 475 | 474. Dankwoord            |
| 476 | 475. Aankomst             |
| 477 | 476. Afsluiting           |
| 478 | 477. Bijlagen             |
| 479 | 478. Samenvatting         |
| 480 | 479. Dankwoord            |
| 481 | 480. Aankomst             |
| 482 | 481. Afsluiting           |
| 483 | 482. Bijlagen             |
| 484 | 483. Samenvatting         |
| 485 | 484. Dankwoord            |
| 486 | 485. Aankomst             |
| 487 | 486. Afsluiting           |
| 488 | 487. Bijlagen             |
| 489 | 488. Samenvatting         |
| 490 | 489. Dankwoord            |
| 491 | 490. Aankomst             |
| 492 | 491. Afsluiting           |
| 493 | 492. Bijlagen             |
| 494 | 493. Samenvatting         |
| 495 | 494. Dankwoord            |
| 496 | 495. Aankomst             |
| 497 | 496. Afsluiting           |
| 498 | 497. Bijlagen             |
| 499 | 498. Samenvatting         |
| 500 | 499. Dankwoord            |

## INLEIDING.

---

§ 1. CAUCHY behandelt in zijn „*Mémoire sur l'Application du Calcul des Résidus à la Solution des problèmes de Physique Mathématique*” (Parijs 1827) <sup>1)</sup> de integratie van een klasse van partieele differentiaalvergelijkingen met bijzondere nevenvoorwaarden. Noemen wij de onafhankelijk veranderlijken, die twee in getal zijn,  $x$  en  $t$  en zijn  $t_0$ ,  $x_0$  en  $x_1$  constanten, dan kunnen wij deze voorwaarden aldus beschrijven. Ten eerste moeten voor  $t = t_0$  en  $x_0 \leq x \leq x_1$  de oplossing en een zeker aantal van hare afgeleiden-naar- $t$  gegeven functiën van  $x$  zijn, en ten tweede moet, voor willekeurige waarden van  $t$ , de oplossing, aan de grenzen  $x_0$  en  $x_1$ , aan zekere lineaire differentiaalvergelijkingen, met  $x$  als onafhankelijk veranderlijke, voldoen. Wordt  $t$  als tijd opgevat, dan kunnen wij de nevenvoorwaarden dus onderscheiden in rand- en initiaalcondities. De uitkomst van CAUCHY levert i. h. a. slechts een schijnbare oplossing, want de optredende reeksen convergeeren i. h. a. niet. Toch is zijne behandeling zeer merkwaardig en van groot belang, en wel om de volgende reden.

Het blijkt niet moeilijk eenvoudige, van  $x$ ,  $t$  en een

---

<sup>1)</sup> Deze verhandeling zal verschijnen in Tome XV van de 2<sup>e</sup> serie der Oeuvres Complètes.



parameter  $r$  afhangende, functiën samen te stellen, die voor elke waarde van  $r$  aan de partieele differentiaalvergelijking voldoen en bovendien de randvoorwaarden vervullen, wanneer  $r$  een wortel  $\alpha_v$  van een zekere transcendente vergelijking is. Stelt men in de functiën, die verkregen worden door voor  $r$  achtereenvolgens de oneindig vele wortels dezer vergelijking te nemen,  $t = t_0$ , dan verschijnt een reeks functiën  $\varphi(\alpha_v, x)$ . Het komt er nu op aan de in de initiaalvoorwaarden optredende functiën te ontwikkelen naar de functiën  $\varphi(\alpha_v, x)$ . *Deze ontwikkeling kan door toepassing van de residuenrekening volkomen streng geschieden* en de ontstaande reeks convergeert gelijkmatig in het interval  $x_0 - x_1$ . Hiermede hebben wij de zekerheid, dat wanneer de i. h. a. divergeerende reeksen van de „oplossing” na een eindig, voldoende groot, aantal termen wordt afgebroken, een functie verkregen wordt, die aan partieele diff. verg. en randvoorwaarden volkomen, en aan de initiaalvoorwaarden met gegeven benadering voldoet. De waarde van CAUCHY's behandeling is dus gelegen in de afleiding van de reeksontwikkelingen voor  $t = t_0$ . Hij grondt deze op de formule:

$$\mathcal{E} \frac{\chi(r)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{r(x-\mu)} f(\mu) d\mu = f(x),$$

(zie pag. 3 v. h. Mém.), waarvan echter het bewijs, zooals dit op pag. 1 en 2 gegeven wordt, ontoereikend is <sup>1)</sup>. De voorwaarden aan  $\chi(r)$  en  $\delta(r)$  opgelegd, zijn aldaar vaag en zeker te ruim.

Een verscherpte afleiding van deze formule heeft hij in

---

<sup>1)</sup> BURKHARDT heeft in zijn: *Entwicklungen nach Oscillirenden Functionen* (Jahresber. der Deutschen Math. Ver. X, 2tes Heft, Bd. I) het Mémoire in kwestie gerefereerd en de ontoereikende afleiding op pag. 690 aldaar weergegeven, echter zonder kritiek, gelijk in het kader van zijn werk past.

hetzelfde jaar 1827 in de verhandeling: „*Sur les Residus des Fonctions exprimées par des Intégrales définies*” <sup>1)</sup> gegeven. Leemten, in dit bewijs nog overgebleven, zijn door PICARD (*Traité d'Analyse* II, p. 179, 2<sup>e</sup> ed.) aangevuld. Het was nu de vraag of de toepassing van bovenstaande formule, ter afleiding van de vermelde reeksontwikkelingen, met de scherpere eischen, die aan  $\chi(r)$  en  $\delta(r)$  moesten worden gesteld, in overeenstemming kon worden gebracht. Het is ons gebleken, dat dit inderdaad het geval is.

Wij stellen ons voor in dit proefschrift een vrije behandeling van CAUCHY's probleem te geven, en daarbij niet name de reeksontwikkeling voor den initiaaltoestand streng af te leiden. De omstandigheid, dat in het *Mémoire* de aan  $\chi(r)$  en  $\delta(r)$  gestelde eischen niet scherp genoeg zijn omlijnd, heeft CAUCHY veroorloofd zijne afleiding van de reeksontwikkelingen in kwestie in drie pagina's uiteen te zetten. Een strenge behandeling moest, gelijk voor de hand ligt, uitvoeriger worden, en zij beslaat dan ook de hoofdstukken II en III van dit proefschrift. Dat CAUCHY op een zoo wankel basis zijne resultaten verkregen heeft, getuigt zeker van de grootheid zijner wiskundige intuïtie, al heeft het geluk hem hierbij natuurlijk ook gediend.

Van de ontwikkelingen, die ter sprake zullen komen, zijn de reeks van FOURIER en de bekende reeks uit theorie der warmtegeleiding in een bol (temperatuur slechts van  $r$  afhankelijk) zéér bijzondere voorbeelden. PICARD heeft deze beide in zijn *Traité d'Analyse* met behulp van de residuenrekening afgeleid. Ook POINCARÉ behandelt het warmtevraagstuk in zijn: „*Théorie analytique de la Propagation de la Chaleur*” op deze wijze, en zegt, dat zonder van genoemde

---

<sup>1)</sup> Oeuvres Complètes, Série II, T. VII, pag. 393.



rekening gebruik te maken, geen bewijs voor de ontwikkeling die bij dat vraagstuk optreedt, gevonden is. (Vgl. pag. 179). Wij hebben getracht ons bewijs voor het algemeene geval even nauwkeurig te maken als zijne behandeling van dit bijzondere vraagstuk.

Behalve de afleiding door toepassing van de residuenrekening geeft CAUCHY in zijn *Mémoire* op pag. 23—27, nog eene andere behandeling voor een bijzonder geval. Hoewel hij het residu-teeken aldaar gebruikt, speelt dit toch geen essentiële rol en het kan, zelfs met bevordering van de overzichtelijkheid, geëlimineerd worden. Deze bladzijden bevatten slechts een bepaling van de coëfficiënten, wanneer aangenomen wordt, dat de ontwikkeling mogelijk is. BURKHARDT bespreekt deze methode vrij uitvoerig (p. 693 e. v. t. a. p.), terwijl hij de algemeene, die in het volgende zal worden uiteengezet, slechts met een paar regels vermeldt (p. 698). Hoe vernuftig zij ook is, heeft CAUCHY's behandeling van het bijzondere geval geen principieele beteekenis, daar het bestaan van de ontwikkelingen langs dezen weg natuurlijk niet bewezen wordt. Wij zullen in het vierde hoofdstuk de formules, die CAUCHY verkrijgt, en die hij niet met zijne algemeene uitkomst in verband brengt, uit deze laatste afleiden, waarmede eerst het bewijs van hare geldigheid zal zijn geleverd.

§ 2. Voor wij met het vraagstuk beginnen, zullen wij de te gebruiken notaties aangeven. Wij bezigen de teekens, die CAUCHY zelf heeft ingevoerd en die o. a. ook gebruikt worden in LINDELÖF: „*Le Calcul des Résidus*”, (Parijs 1905).

Onder het residu van een analytische functie in een pool  $z_0$ , wordt, zooals bekend is, verstaan: de coëfficiënt van  $(z - z_0)^{-1}$  in de reeksontwikkeling naar machten van  $z - z_0$ , die in den omtrek van de pool voor de functie geldt.



Dit residu wordt aangewezen met:

$$\mathcal{E} f(z)_{z=z_0},$$

en wij hebben dus:

$$\mathcal{E} f(z)_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(k)} f(z) dz,$$

indien  $k$  een kleine gesloten kromme om  $z_0$  is. Heeft  $f(z)$  een eindig aantal polen, dan wordt met:

$$\mathcal{E} [f(z)],$$

de som van de residuen in al deze polen bedoeld. Men noemt dit het *totaalresidu* van  $f(z)$ .

Met:

$$\mathcal{E} [f(z)] \psi(z),$$

wordt aangeduid de som van de residuen der functie  $f(z) \cdot \psi(z)$  in de polen van  $f(z)$ .

Voor:

$$\mathcal{E} \left[ \frac{1}{f(z)} \right] \psi(z) \text{ en } \mathcal{E} \frac{1}{f(z)} (\psi(z)),$$

wordt ter bekorting resp. geschreven:

$$\mathcal{E} \frac{\psi(z)}{f(z)} \text{ en } \mathcal{E} \frac{[\psi(z)]}{f(z)}.$$

Is het aantal polen van  $f(z)$  oneindig groot, dan wordt onder het totaalresidu  $\mathcal{E} [f(z)]$  verstaan de limiet tot welke de som van de residuen nadert.

Deze limiet zal natuurlijk kunnen afhangen van de volgorde in welke men de polen neemt en daaromtrent zal dus in elk bijzonder geval een afspraak moeten worden gemaakt.

Onder het residuteeken, mag, wanneer het residu in een

eindig aantal polen moet genomen worden, gedifferentieerd en geïntegreerd worden naar een parameter, dus:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} \{f(z, t)\} = \mathcal{E} \left[ \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} \right],$$

en:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E} \{f(z, t)\} dt = \mathcal{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} f(z, t) dt \right].$$

Dit volgt uit de omstandigheid, dat het residu als integraal langs een der polen omhullende gesloten kromme geschreven kan worden. Onder het integraalteeken mag toch, indien integrand en integratieweg eindig zijn, gedifferentieerd en geïntegreerd worden.

Bij totaalresiduen, die op een oneindig groot aantal polen betrekking hebben, komt verwisseling van differentiatie resp. integratie met residu name natuurlijk neer op het differentieeren resp. integreeren van een oneindige reeks term-voor-term. Hier zal dus op gelijkmatige convergentie gelet moeten worden. CAUCHY doet dit niet, en dit is de reden waarom, ook al worden de in de verhandeling slechts vaag aangeduide bewijzen, aangevuld, zooals wij ons voorstellen te doen, toch van een oplossing van het vraagstuk in het algemeen geen sprake is. In het algemeen is de gelijkmatige convergentie der voorkomende reeksen niet te bewijzen.

Uit de definitie van het residu volgt, dat voor een enkelvoudige pool  $z_0$ :

$$\mathcal{E} f(z)_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \dots \dots (1)$$

en voor een  $m$ -voudige pool  $z_0$ :

$$\mathcal{E} f(z)_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \quad (2)$$

Het totaalresidu van een gebroken rationale functie, wier graad gelijk aan of kleiner dan  $-2$  is, is nul. Dit blijkt, door

het residu als integraal te schrijven, en de integratiekromme grooter en grooter te laten worden. Is de graad  $-1$ , dan is het totaalresidu gelijk aan het quotient van de coëfficiënten der hoogste machten in teller en noemer.

Teneinde in een residu:

$$\oint f(z)_{z=z_0},$$

een nieuwe veranderlijke  $t$ , die met  $z$  samenhangt door de betrekking  $z = \varphi(t)$ , in te voeren, schrijven wij het residu als integraal. Wij onderstellen, dat  $\varphi(t_0) = z_0$ , en dat  $\varphi(t)$  in  $t_0$  geen vertakkingspunt heeft. Er komt dan:

$$\begin{aligned} \oint f(z)_{z=z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(k)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{(k')} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \\ &= \oint f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)_{t=t_0}, \quad . \quad . \quad . \quad (3) \end{aligned}$$

$k'$  is een gesloten kromme om  $t_0$  in het  $t$ -vlak.



## HOOFDSTUK I.

### Uiteenzetting van het Vraagstuk en eerste Opzet van de Oplossing.

§ 1. De partieele differentiaal-vergelijking zij:

$$F(D_x, D_t)z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of voluit geschreven:

$$D_x^{2m} z + k_1 D_x^{2m-1} z + \dots + k_{2m} z + l_0 D_t^{n-1} z + \dots + \\ + l_{n-1} D_t z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Gemengde differentiaal-quotienten komen dus niet voor *en de coëfficiënten zijn constant*. De randvoorwaarden luiden als volgt:

1°. Voor  $x = x_0$ :

$$f_0(D_x)z = 0, \dots, f_{m-1}(D_x)z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

2°. voor  $x = x_1$ :

$$f_m(D_x)z = 0, \dots, f_{2m-1}(D_x)z = 0, \quad . \quad . \quad (3)$$

d. w. z. voor vermelde waarden van  $x$  moet de oplossing aan twee stellen homogene lineaire differentiaal-vergelijkingen in  $x$  voldoen. CAUCHY onderstelt de coëfficiënten in deze vergelijkingen constant. Daar ze echter slechts voor bepaalde waarden van  $x$  behoeven te gelden, is deze beperking niet noodig.

Wij nemen aan, dat de orden van (2) en (3) alle lager dan  $2m$  zijn. Zonder beperking kan worden ondersteld dat de orden van (2) alle verschillend zijn. Door geschikte onderlinge aftrekking is dit toch steeds te verkrijgen. Hetzelfde geldt voor (3).

De initiaalvoorwaarden zijn:

$$z = f_0(x), D_t z = f_1(x), \dots D_t^{n-1} z = f_{n-1}(x). \quad (4)$$

voor

$$t = t_0 \text{ en } x_0 \leq x \leq x_1.$$

Van deze functiën  $f$  zal het voldoende blijken te onderstellen, dat zij in het interval  $x_0 - x_1$  *à variation limitée* zijn. (Zie JORDAN Cours d'Analyse III p. 567).

De constante  $x_1 - x_0$  zullen wij in het vervolg  $a$  noemen.

§ 2. Wij zullen trachten de oplossing op te bouwen uit elementair-oplossingen van den vorm:

$$e^{rx+st},$$

met coëfficiënten, die functiën van  $r$  en  $s$  zijn. Kennelijk wordt vereischt:

$$F(r, s) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De wortels der vergelijking in  $q$ :

$$F(r, s) - F(q, s) \equiv F(r, o) - F(q, o) = 0 \quad . \quad (6)$$

noemen wij:

$$r, r_1, \dots, r_{2m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Het zijn algebraïsche functiën van de eerste,  $r$ .

De wortels der vergelijking in  $\sigma$ :

$$F(r, \sigma) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

noemen wij:

$$s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ook deze zijn algebraïsche functiën van  $r$ .

Aan de diff. verg. (1) zal voldaan worden door uitdrukkingen van den vorm:

$$(A_0 e^{s_0(t-t_0)} + A_1 e^{s_1(t-t_0)} + \dots + A_{n-1} e^{s_{n-1}(t-t_0)}) (B_0 e^{r(x-x_0)} + B_1 e^{r_1(x-x_0)} + \dots + B_{2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)}), \dots \quad (10)$$

alwaar voor  $r$  nog een willekeurige waarde kan genomen worden, en

$$A_0 \dots A_{n-1}, B_1 \dots B_{2m-1}$$

willekeurige functiën van  $r$  voorstellen.

De randvoorwaarden (2) en (3) zullen vereischen:

$$B_0 f_p(r) + B_1 f_p(r_1) + \dots + B_{2m-1} f_p(r_{2m-1}) = 0. \quad (11)$$

$$p = 0, 1, \dots, m-1$$

en

$$B_0 e^{ar} f_p(r) + B_1 e^{ar_1} f_p(r_1) + \dots + B_{2m-1} e^{ar_{2m-1}} f_p(r_{2m-1}) = 0 \quad (12)$$

$$p = m, m+1, \dots, 2m-1.$$

De stellen vergelijkingen (11) en (12) hebben slechts een van nul verschillende oplossing, indien de determinant op de coëfficiënten, dien wij  $\mathfrak{F}(r)$  zullen noemen, nul is, en  $r$  zal dus moeten voldoen aan de transcendente-vergelijking:

$$\mathfrak{F}(r) \equiv \begin{vmatrix} f_0(r) & f_0(r_1) & \dots & f_0(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m-1}(r) & f_{m-1}(r_1) & \dots & f_{m-1}(r_{2m-1}) \\ e^{ar} f_m(r) & e^{ar_1} f_m(r_1) & \dots & e^{ar_{2m-1}} f_m(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{ar} f_{2m-1}(r) & e^{ar_1} f_{2m-1}(r_1) & \dots & e^{ar_{2m-1}} f_{2m-1}(r_{2m-1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$



De functiën  $B \dots B_{2m-1}$  kunnen nu opgelost worden uit de vergelijkingen:

$$B_0 f_p(r) + B_1 f_p(r_1) + \dots + B_{2m-1} f_p(r_{2m-1}) = R_p \delta(r) \quad (14)$$

$$p = 0, 1, \dots, m-1$$

en

$$B_0 e^{\alpha r} f_p(r) + B_1 e^{\alpha r_1} f_p(r_1) + \dots + B_{2m-1} e^{\alpha r_{2m-1}} f_p(r_{2m-1}) =$$

$$= R_p \delta(r), \dots \dots \dots (15)$$

$$p = m, m+1, \dots, 2m-1,$$

alwaar  $R_0, R_1, \dots, R_{2m-1}$  nog nader te bepalen geheele eenwaardige functiën van  $r$  zijn. De keus, die voor deze functiën gedaan wordt, verandert de onderlinge verhouding der  $B$ 's niet, mits voor  $r$  een wortel van (13) genomen wordt. De  $B$ 's verhouden zich dan toch als de minoren der elementen in onverschillig welke rij van  $\delta(r)$ .

Ter bekorting wordt:

$$B_0 e^{r(x-x_0)} + B_1 e^{r_1(x-x_0)} + \dots + B_{2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)} = v(r, x)$$

gesteld, en dus is:

$$v(r, x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{r(x-x_0)} & \dots & e^{r_{2m-1}(x-x_0)} \\ R_0 & f_0(r) & \dots & f_0(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m-1} & f_{m-1}(r) & \dots & f_{m-1}(r_{2m-1}) \\ R_m & e^{\alpha r} f_m(r) & \dots & e^{\alpha r_{2m-1}} f_m(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{2m-1} & e^{\alpha r} f_{2m-1}(r) & \dots & e^{\alpha r_{2m-1}} f_{2m-1}(r_{2m-1}) \end{vmatrix} \quad (16)$$

§ 3. Beschouwen wij vervolgens het totaalresidu:

$$\mathcal{E}_s \frac{s^p [F(r, s) - F(r, \alpha)]}{[F(r, s)](s - \alpha)}, \quad \dots \quad (17)$$

$$p = 0, 1 \dots n - 1,$$

alwaar  $\alpha$  een veranderlijke, die alle waarden kan aannemen, voorstelt.

Daar de teller voor  $s = \alpha$  nul is, mogen wij in den noemer  $s - \alpha$  binnen de residuhaken nemen. Het residu in den pool  $\alpha$  is toch nul. Voor (17) kunnen wij dan schrijven:

$$\mathcal{E}_s \frac{s^p}{[s - \alpha]} - \mathcal{E}_s \frac{s^p F(r, \alpha)}{[(s - \alpha) F(r, s)]} \quad \dots \quad (18)$$

Het laatste residu is nul, want de graad in  $s$  van den teller is minstens twee eenheden lager dan die van den noemer. Het eerste heeft de waarde  $\alpha^p$  en er komt dus:

$$\mathcal{E}_s \frac{s^p [F(r, s) - F(r, \alpha)]}{[F(r, s)](s - \alpha)} = \alpha^p \quad \dots \quad (19)$$

$$p = 0, 1 \dots n - 1.$$

Denken wij:

$$\frac{F(r, s) - F(r, \alpha)}{s - \alpha}$$

naar de machten van  $\alpha$  ontwikkeld. Lettende op (1), vinden wij, indien:

$$\left. \begin{aligned} l_0 s^{n-1} + l_1 s^{n-2} + \dots + l_{n-1} &= q_0(s) \\ l_0 s^{n-2} + l_1 s^{n-3} + \dots + l_{n-2} &= q_1(s) \\ &\vdots \\ l_0 s + l_1 &= q_{n-2}(s) \\ l_0 &= q_{n-1}(s) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

gesteld worden:

$$\frac{F(r, s) - F(r, \alpha)}{s - \alpha} = q_0(s) + \alpha q_1(s) + \alpha^2 q_2(s) + \dots + \alpha^{n-1} q_{n-1}(s). \quad (21)$$

Daar (19) voor alle waarden  $\alpha$  geldt, kunnen wij er voor de functiën  $q$  het volgende uit afleiden:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_s \frac{s^p q_k(s)}{[F(r, s)]} &= 1, \text{ voor } p = k \\ &= 0, \text{ " } p \neq k. \end{aligned} \right\} \dots \quad (22)$$

$p$  en  $k$  beide  $\leq n - 1$ .

De betrekkingen (22) gelden onafhankelijk van de waarde van  $r$ .

§ 4. Met behulp van  $v(r, x)$  (16) en de functiën  $q(s)$  (20) stellen wij nu de volgende uitdrukking op:

$$\mathcal{E}_r \frac{v(r, x) \cdot u(r, t)}{[\mathfrak{F}(r)]}, \dots \quad (23)$$

alwaar:

$$u(r, t) = \mathcal{E}_s \frac{(q_0(s) \cdot \omega_0(r) + \dots + q_{n-1}(s) \cdot \omega_{n-1}(r)) e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \quad (24)$$

$\omega_0(r) \dots \omega_{n-1}(r)$  zijn nader te bepalen geheele eenwaardige functiën van  $r$ . De functie  $u(r, t)$  is een geheele eenwaardige functie van  $r$ .

Mochten voor een bepaalde waarde van  $r$  twee of meer van de functiën:

$$s_0 \dots s_{n-1}$$

samenvallen, dan weten wij uit (2) p. 6, hoe in zulk een meervoudige pool het residu bepaald wordt.

Uit de gedaante van  $\mathfrak{F}(r)$  (13) ziet men, dat deze functie tweewaardig zal kunnen zijn. Het zal toch mogelijk zijn, dat bij een gesloten omloop van  $r$  in zijn vlak, de functiën:

$$r_1 \dots r_{n-1}$$



een oneven permutatie ondergaan. Dit zal kunnen gebeuren indien  $r$  een eventueel vertakkingspunt van de door (6) bepaalde algebraïsche functie  $\varrho(r)$  omloopt. Na zulk een omloop zal  $\delta(r)$  van teeken omkeeren. Wij zien echter uit (16), dat dan ook  $v(r, x)$  van teeken omkeert en kunnen besluiten, dat  $v(r, x)/\delta(r)$  en dus ook de functie onder het residuteeken in (23) eenwaardig is. Wij zullen in hoofdstuk II aantoonen, dat  $\delta(r)$  oneindig veel nulpunten heeft en het residu in (23) moet dus genomen worden in een oneindig aantal polen, over welker volgorde een afspraak zal worden gemaakt. Noemen wij deze polen:

$$r', r'', r^{(3)}, \dots r^{(v)}, \dots,$$

dan wordt (23):

$$\sum_{v=1}^{\infty} \oint \frac{v(r, x) \cdot u(r, t)}{\delta(r)}_{r=r^{(v)}} \cdot \dots \quad (25)$$

*Wij onderstellen nu omtrent deze oneindig voortlopende reeks functiën van  $x$  en  $t$ , dat zij convergeert, en dat zij term voor term naar  $x$  en naar  $t$  mag gedifferentieerd worden, zoovele malen en voor zoodanige waarden van deze veranderlijken als ter verificatie van differentiaal-vergelijking, rand- en initiaalvoorwaarden noodig is.*

Om aan te toonen, dat (23) aan differentiaal-vergelijking (1) en randvoorwaarden (2) en (3) voldoet, kunnen wij dan volstaan dit van een afzonderlijken term der reeks (25) te bewijzen.

Beschouwen wij dus:

$$\oint_r \frac{v(r, x) \cdot u(r, t)}{\delta(r)}_{r=r^{(v)}} = E_v \cdot \dots \quad (26)$$

Indien:

$$D_x^{2m} + k_1 D_x^{2m-1} + \dots + k_{2m-1} D_x = G_0(D_x)$$

en

$$l_0 D_t^n + l_1 D_t^{n-1} + \dots + l_{n-1} D_t = G_1(D_t)$$

gesteld worden, zal:

$$F(D_x, D_t), z = G_0(D_x)z + G_1(D_t)z + k_{2m}z. \quad (27)$$

zijn. Bedenken wij, dat bij een residu in een eindig aantal polen verwisseling van differentiatie en residu name geoorloofd is, en verder, dat  $r, r_1 \dots r_{2m-1}$  de wortels van verg. (6) zijn, dan volgt:

$$\begin{aligned} G_0(D_x) E_v &= \sum_r \frac{G_0(r) \cdot v(r, x) \cdot u(r, t)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)} = \\ &= \sum_r \frac{v(r, x) u_1(r, t)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)}, \quad \dots \quad (28) \end{aligned}$$

alwaar:

$$u_1(r, t) = \sum_s \frac{G_0(r) [q_0(s) \cdot \omega_0(r) + \dots + q_{n-1}(s) \omega_{n-1}(r)] e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]}.$$

Evenzoo is:

$$G_1(D_t) E_v = \sum_r \frac{v(r, x) u_2(r, t)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)} \quad \dots \quad (29)$$

indien:

$$u_2(r, t) = \sum_s \frac{G_1(s) [q_0(s) \omega_0(s) + \dots] e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]},$$

en wij vinden:

$$\begin{aligned} F(D_x, D_t) E_v &= [G_0(D_x) + G_1(D_t) + k_{2m}] E_v = \\ &= \sum_r \frac{v(r, x) u_3(r, t)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)}, \end{aligned}$$

alwaar:

$$u_3(r, t) = \sum_s \frac{F(r, s) [q_0(s) \omega_0(s) + \dots] e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]}.$$

Daar dit laatste residu, door de aanwezigheid van  $F(r, s)$  in den teller, nul is, is aangetoond, dat de term  $E_v$  uit de reeks (25) aan (1) voldoet.

Even gemakkelijk blijkt, dat de  $E_v$  aan de randvoorwaarden

(2) en (3) voldoet. Wij zullen het laten zien voor de eerste voorwaarde (2). Lettende op (14) vinden wij:

$$f_0(D_x) E_v = \oint_r \frac{R_0 \delta(r) \cdot u(r, t)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)} = 0$$

voor  $x = x_0$ ,

en aan deze conditie is dus voldaan. Analoog voor de overige.

Teneinde de waarde van de functie (23) en haar eerste  $n - 1$  afgeleiden naar  $t$ , voor  $t = t_0$ , te vinden, mogen wij, bij de onderstelling van pag. 15, de afzonderlijke termen  $E_v$  (26) eerst naar  $t$  differentieëren, dan  $t = t_0$  stellen en vervolgens sommeeren. Wij hebben nu:

$$D_t^p \cdot E_v = \oint_r \frac{v(r, x) u_4(r, t)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)} \cdot \cdot \cdot \quad (30)$$

alwaar:

$$u_4(r, t) = \oint_s \frac{[q_0(s) \omega_0(r) + \dots + q_{n-1}(s) \omega_{n-1}(r)] s^p e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \cdot \quad (31)$$

Ter berekening van  $D_t^p E_v$  voor  $t = t_0$ , mag onder het residuteeken in (30) eerst  $t = t_0$  gesteld en daarna het residu genomen worden. Dit blijkt gemakkelijk, indien men het residu schrijft als integraal langs een  $r(v)$  omhullende kleine kromme. Evenzeer wordt  $u_4(r, t_0)$  gevonden, door binnen het residuteeken in (31)  $t = t_0$  te stellen en derhalve is:

$$D_t^p E_v \Big|_{t=t_0} = \oint_r \frac{v(r, x) \cdot u_4(r, t_0)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)} \cdot \cdot \cdot \quad (32)$$

$$u_4(r, t_0) = \oint_s \frac{[q_0(s) \omega_0(r) + \dots + q_{n-1}(s) \omega_{n-1}(r)] s^p}{[F(r, s)]} \cdot \quad (33)$$

Maken wij nu gebruik van de betrekkingen (22), dan blijkt ten slotte:

$$D_t^p E_v \Big|_{t=t_0} = \oint_r \frac{v(r, x) \omega_p(r)}{\delta(r)} \Big|_{r=r(v)} \cdot \cdot \cdot \quad (34)$$

$p \leq n - 1.$



Bij  $t = t_0$ , vinden wij derhalve voor de  $p^e$  afgeleide naar  $t$  van (23), mits  $p \leq n - 1$  is:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \oint_r \frac{v(r, x) \omega_p(r)}{\mathfrak{F}(r)}_{r=r(v)} = \oint_r \frac{v(r, x) \cdot \omega_p(r)}{[\mathfrak{F}(r)]}. \quad (35)$$

In het voorgaande is dus aangetoond, dat de functie:

$$\oint_r \frac{v(r, x) u(r, t)}{[\mathfrak{F}(r)]}, \quad . . . . . (23)$$

indien de voorwaarde op pag. (15) vervuld is, aan de differentiaalvergelijking (1) en de randvoorwaarden (2) en (3) voldoet, en dat, voor  $t = t_0$ , haar  $p^e$  afgeleide naar  $t$  gelijk is aan:

$$\oint_r \frac{v(r, x) \omega_p(r)}{[\mathfrak{F}(r)]} . . . . . (35)$$

$p = 0, 1 \dots n - 1.$

Is aan genoemde voorwaarde niet voldaan, dan zullen de residuen (23) en (35) slechts in een eindig polen moeten genomen worden, wil deze uitspraak blijven gelden.

§ 6. Heeft  $\mathfrak{F}(r)$  slechts enkelvoudige nulpunten en heeft bovendien in geen van deze nulpunten de vergelijking  $F(r, s) = 0$  meervoudige wortels, dan zal de ontwikkeling van (23), een reeks functiën van den vorm (10) opleveren. Heeft hetzij  $\mathfrak{F}(r)$  meervoudige nulpunten, hetzij in een nulpunt van  $\mathfrak{F}(r)$  de vergelijking  $F(r, s) = 0$  meervoudige wortels, dan ziet men, door toepassing van (2) pag. 6, dat de exponentieele termen in (10) vermenigvuldigd worden met rationale geheele functiën van  $x$  en  $t$ . Ons bewijs blijft echter gelden, want wij hebben omtrent al of niet samenvallen van nulpunten geen enkele onderstelling behoeven te maken. Betrekking (2) pag. 6 geeft steeds volkomen duidelijk aan hoe (23) berekend moet worden. Reeds voor het eenvoudigste geval, dat  $\mathfrak{F}(r)$  een tweevoudig nulpunt heeft,

wordt de uitdrukking voor het residu zeer samengesteld.

In (23) kan nu nog beschikt worden, over de functiën  $R_0 \dots R_{2m-1}$  uit de eerste kolom van  $v(r, x)$  en over  $\omega_0(r) \dots \omega_{n-1}(r)$  uit  $u(t, r)$ .

CAUCHY stelt:

$$\left. \begin{array}{ll} R_0 & = -f_0(r), & R_m & = 0 \\ R_1 & = -f_1(r), & R_{m+1} & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ R_{m-1} & = -f_{m-1}(r), & R_{2m-1} & = 0 \end{array} \right\} \dots (36)$$

en:

$$\omega_p(r) = \int_{x_0}^{x_1} f_p(\mu) e^{-r(\mu-x_0)} d\mu \quad \dots (37)$$

$$p = 0, 1 \dots n-1.$$

In (37) zijn  $f_0 \dots f_{n-1}$ , de functiën uit de initiaalcondities (4). Wij zullen in hoofdstuk III onderzoeken, welke waarde de uitdrukkingen (35), in de onderstellingen (36) en (37), aannemen, maar moeten hiervoor eerst de ligging der nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  bepalen. Wij gaan in het volgend hoofdstuk daartoe over.

## HOOFDSTUK II.

### Ligging van de Nulpunten van $\tilde{\delta}(r)$ op grooten Afstand van den Oorsprong.

§ 1.

$$\tilde{\delta}(r) = \begin{vmatrix} f_0(r) & f_0(r_1) \dots \dots \dots f_0(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m-1}(r) & f_{m-1}(r_1) \dots \dots \dots f_{m-1}(r_{2m-1}) \\ e^{ar} f_m(r) & e^{ar_1} f_m(r_1) \dots \dots \dots e^{ar_{2m-1}} f_m(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{ar} f_{2m-1}(r) & e^{ar_1} f_{2m-1}(r_1) \dots \dots \dots e^{ar_{2m-1}} f_{2m-1}(r_{2m-1}) \end{vmatrix} \cdot (1)$$

$f_0 \dots f_{2m-1}$  zijn geheele rationale functiën resp. van de graden  $g_0 \dots g_{2m-1}$ . De getallen  $g_0 \dots g_{m-1}$  zijn alle van elkaar verschillend en kleiner dan  $2m$ . Hetzelfde geldt van  $g_m \dots g_{2m-1}$ . De coëfficiënten van de hoogste machten worden gelijk een gedacht.

De functiën:

$$r, r_1 \dots r_{2m-1} \dots \dots \dots (2)$$



zijn de wortels van de vergelijking in  $q$ :

$$F(r, 0) - F(q, 0) = 0. \quad (3)$$

In plaats van  $\mathfrak{F}(r)$  zullen wij de functie  $\mathfrak{F}(r + b)$  onderzoeken, alwaar  $b$  een nader te bepalen constante voorstelt. Indien  $r$  door  $r + b$  vervangen wordt, gaan de functiën (2) over in:

$$r'_0, r'_1 \dots r'_{2m-1}, \quad (3)$$

waarmede de wortels van de vergelijking:

$$F(r + b, 0) - F(q, 0) = 0 \quad (4)$$

worden aangeduid. Natuurlijk is  $r'_0 = r + b$ . Heeft de door (4) bepaalde algebraïsche functie  $q(r)$ , vertakkingspunten bij omloop waarvan de wortels (3) een oneven permutatie ondergaan, dan zullen bij zulk een omloop ook de kolommen van  $\mathfrak{F}(r + b)$  een dergelijke permutatie ondergaan en zal deze laatste functie dus van teeken omkeeren. Wij zien hieruit, dat  $\mathfrak{F}(r + b)$  tweewaardig kan zijn.  $q(r)$  heeft voor  $r = \infty$  geen vertakkingspunt, zooals uit (4) blijkt. Er kan dus een cirkel om 0 als middelpunt beschreven worden, buiten welken de verschillende bladen van  $q(r)$  gescheiden zijn. Wij gaan de ontwikkelingen van de functiën (3) naar machten van  $r^{-1}$ , voor dit, zich tot  $\infty$  uitstrekke-  
kende, gebied opmaken.

Bij definitie is:

$$F(r, 0) \equiv r^{2m} + k_1 r^{2m-1} + \dots + k_{2m},$$

en (4) luidt dus, voluit geschreven:

$$\begin{aligned} & [(r + b)^{2m} + k_1 (r + b)^{2m-1} + \dots + k_{2m}] - \\ & - [q^{2m} + k_1 q^{2m-1} + \dots + k_{2m}] = 0 \quad (4a) \end{aligned}$$

Wij zoeken de ontwikkelingen van de wortels  $q$  van deze vergelijking voor groote waarden van  $r$ . Daár deze wortels voor  $r = \infty$  zelf  $\infty$  worden, voeren wij als nieuwe onbekende

het quotient  $q/r = q''$  in, en vervolgens vervangen wij, om in het eindige te kunnen werken  $r$  door  $r''$ , alwaar  $r'' = r^{-1}$ . Deze substituties voeren (4 a) over in:

$$[(1 + b r'')^{2m} + k_1 r'' (1 + b r'')^{2m-1} + \dots + k_{2m} r''^{2m}] + [q''^{2m} + k_1 r'' q''^{2m-1} + \dots + k_{2m} r''^{2m}] = 0 \quad (5)$$

en wij moeten nu de ontwikkelingen van de wortels  $q''$  van deze vergelijking bepalen, in den omtrek van  $r'' = 0$ . Voor  $r'' = 0$  wordt (5):  $q''^{2m} = 1$ . Noemen wij de wortels van (5):

$$q''_0, q''_1, \dots, q''_{2m-1};$$

en stellen:

$$e^{i\pi/m} = \varepsilon, \quad (6)$$

zoodat  $\varepsilon$  een primitieve  $2m^e$ -machts eenheidswortel is, dan is dus:

$$q''_p = \varepsilon^p \text{ voor } r'' = 0. \quad (7)$$

Door differentiatie van (5) naar  $r''$  komt verder:

$$\frac{d q''_p}{d r''} = \frac{(2m b + k_1) \varepsilon^p - k_1}{2m}, \text{ voor } r'' = 0 \quad (8)$$

Uit (7) en (8) volgt:

$$q''_p = \varepsilon^p + \frac{(2m b + k_1) \varepsilon^p - k_1}{2m} r'' P_p(r''), \quad (9)$$

indien door  $P_p$  met een *beginnende* positieve macht reeksen in  $r''$  worden aangeduid. De reeks  $P_p$  convergeert binnen den cirkel die om  $O$  als centrum beschreven wordt door het vertakkingspunt, in het blad van de tak  $q''_p$  het dichtst bij  $O$  gelegen. Daar het de machtreeksontwikkeling van een analytische functie betreft, is de convergentie absoluut en gelijkmatig.

Substitueeren wij in (9) voor  $q''_p$  en  $r''$  resp.  $r'_p/r$  en  $r^{-1}$  dan krijgen wij de gezochte ontwikkelingen van de funtiën (3).

Deze luiden dus:

$$r'_p = r \varepsilon^p + \frac{(2m b + k_1) \varepsilon^p - k_1}{2m} \cdot P_p(r^{-1}) \quad (10)$$

Daar  $r'_0 = r + b$  is, zal de reeks  $P_0$  met de eenheid afbreken. Wij kunnen nu over de constante  $b$  zoo beschikken, dat de constante termen in de  $2m$  ontwikkelingen (10) alle dezelfde zijn, hetgeen voor ons verder onderzoek voordeelig zal blijken. Wij stellen daartoe:

$$b = -k_1 / 2m, \quad (11)$$

en kunnen dan het resultaat van deze § als volgt samenvatten.

Indien  $r$  vervangen wordt door  $r - k_1 / 2m$ , gaan de functiën (2) over in:

$$r'_0, r'_1 \dots r'_{2m-1},$$

alwaar:

$$r'_p = r \varepsilon^p - \frac{k_1}{2m} \cdot P_p(r^{-1}) \quad (12)$$

Deze uitdrukkingen stellen derhalve, op voldoende afstand van  $O$ , de  $2m$  takken van de door:

$$F(r - k_1 / 2m, 0) - F(\varrho, 0) = 0 \quad (13)$$

gedefinieerde algebraïsche functie  $\varrho(r)$  voor.

De reeksen  $P$  zijn met de eenheid aanvangende positieve machtreeksen in  $r^{-1}$ .  $P_p$  convergeert gelijkmatig en absoluut buiten den cirkel, die om  $O$  als centrum beschreven wordt door het vertakkingspunt, in het blad van de tak  $r'_p$  het verst van  $O$  verwijderd. De reeks  $P_0$  breekt met de eenheid af.

§ 2. Duiden wij met de letter  $\delta$  aan: positieve machtreeksen in  $r^{-1}$  zonder constanten term, dan kunnen wij schrijven:



$$\left. \begin{aligned} r'_0 &= r - k_1 / 2 m \\ r'_1 &= r \varepsilon - k_1 / 2 m + \delta \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ r'_{2^m-1} &= r \varepsilon^{2^m-1} - k_1 / 2 m + \delta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14)$$

De reeksen  $\delta$  convergeeren zeker gelijkmatig en absoluut buiten den cirkel om  $O$  als centrum door het 't verst van  $O$  verwijderde vertakkingspunt der door (13) bepaalde functie beschreven. Wij noemen dezen cirkel  $K_0$  en zijn straal  $\varrho_0$ . Sommige van de reeksen  $\delta$  zullen i. h. a. reeds buiten kleinere cirkels convergeeren, maar dit doet voor ons niet ter zake. Daar in de  $\delta$ 's geen constante termen voorkomen, kunnen wij hare absolute waarden zoo klein maken als wij willen, door  $|r|$  groot genoeg te nemen.

De functie  $\tilde{f}(r - k_1 / 2 m)$ , die wij willen onderzoeken, ontstaat uit  $\tilde{f}(r)$  (1), wanneer wij aldaar de functiën (2) door (14) vervangen. De onderste  $m$  rijen kunnen dan alle door  $e^{-a k_1 / 2 m}$  gedeeld worden. Is verder:

$$f_p(r) \equiv r^{g_p} + a_1 r^{g_p-1} + \dots + a_{g_p},$$

dan is:

$$\begin{aligned} \frac{f_p(r'_q)}{r^{g_p}} &= \frac{f_p(r \varepsilon^q - k_1 / 2 m + \delta)}{r^{g_p}} = (\varepsilon^q - k_1 / 2 m r + \delta)^{g_p} + \\ &+ \frac{a_1}{r} (\varepsilon^q - k_1 / 2 m r + \delta)^{g_p-1} + \dots + \frac{a_{g_p}}{r^{g_p}} = \varepsilon^{q g_p} + \delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Want machtsverheffing van absoluut convergente machtsreeksen, levert reeksen, die eveneens absoluut convergeeren.

Stellen wij:

$$e^{a k_1 / 2} \cdot \tilde{f}(r - k_1 / 2 m) = \Phi(r) \quad \dots \quad (16)$$

en is dus:

$$\Phi(r) = \begin{vmatrix} f_0(r'_0), & f_0(r'_1), & \dots & f_0(r'_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha r} f_m(r'_0), & e^{\alpha(r\varepsilon+\delta)} f_m(r'_1), & \dots & e^{\alpha(r\varepsilon^{2m-1}+\delta)} f_m(r'_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (17)$$

dan volgt uit (15):

$$\Phi(r) = r^{A+B} \cdot \begin{vmatrix} 1 + \delta, & \varepsilon^{g_0} + \delta, & \dots & \varepsilon^{(2m-1)g_0} + \delta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha r} (1 + \delta), & e^{\alpha(r\varepsilon+\delta)} (\varepsilon^{g_m} + \delta), & \dots & e^{\alpha(r\varepsilon^{2m-1}+\delta)} (\varepsilon^{(2m-1)g_m} + \delta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (18)$$

wanneer nog de volgende afkortingen ingevoerd worden:

$$g_0 + g_1 + \dots + g_{m-1} = A \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

en

$$g_m + g_{m+1} + \dots + g_{2m-1} = B \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

De  $\delta$ 's in (18) duiden als boven positieve machtreeksen in  $r^{-1}$  aan, zonder constante termen, en convergeeren buiten  $K_0$  gelijkmatig en absoluut.

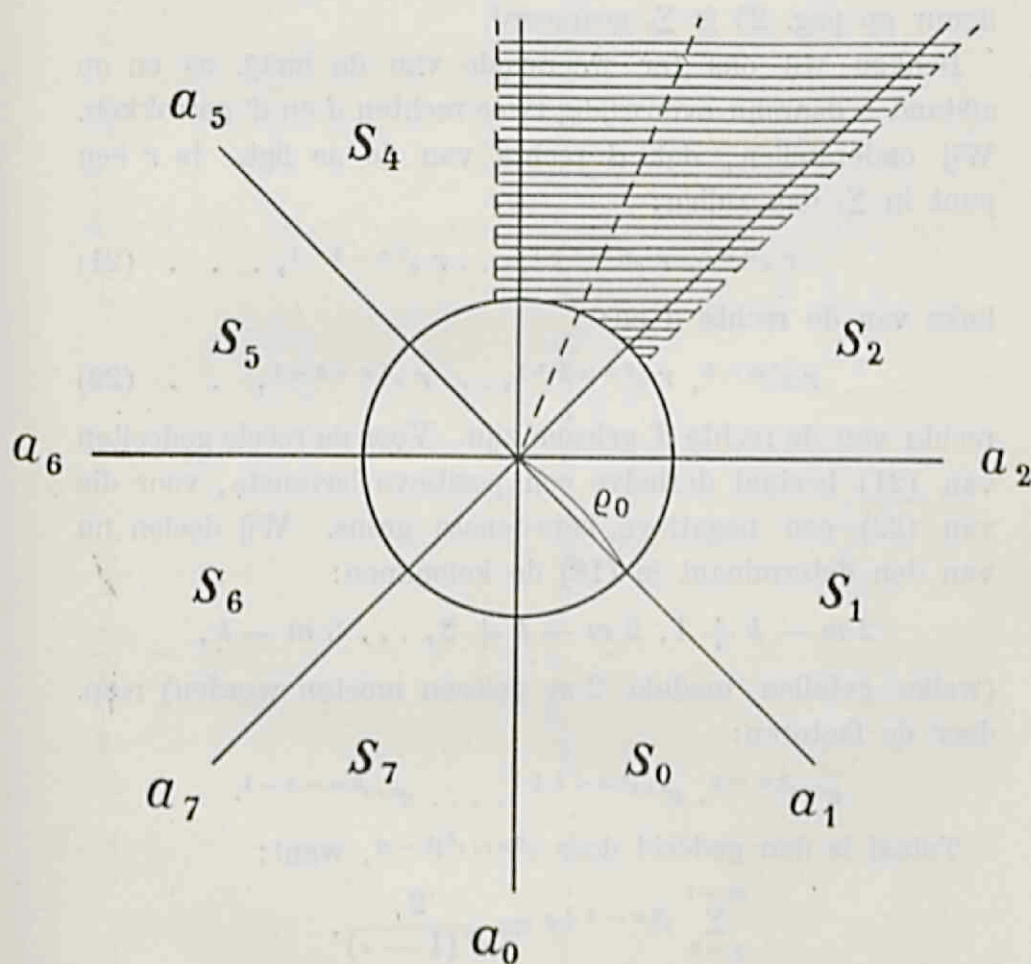
§ 3. Wij verdeelen nu het  $r$ -vlak door  $2m$  van  $O$  uitgaande stralen:

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{2m-1}$$

in  $2m$  gelijke sectoren:

$$S_0, S_1 \dots S_{2m-1}.$$

Den straal  $\alpha_0$  doen wij samenvallen met de negatief-imaginaire as, zijn argument is dus  $-\pi/2$ . Wij gaan tegen de richting van het uurwerk in, het argument van  $\alpha_p$  is derhalve  $-\pi/2 + p\pi/m$ . De sector  $S_p$  wordt begrensd door  $\alpha_p$  en  $\alpha_{p+1}$ .



Deze figuur stelt het geval  $2m = 8$  voor. Behalve de sectoren  $S$  willen wij nog gebieden beschouwen, die de stralen  $\alpha$  bevatten, en er niet zooals  $S$  door begrensd worden.



Voegen wij aan beide grenzen van  $S_p$  een strook ter breedte  $c$  toe, dan zullen wij het zoo verkregen gebied, voor zoover het buiten den cirkel  $K_0$  ligt  $\Sigma_p$  noemen. Omtrent  $c$  maken wij slechts de onderstelling, dat deze niet grooter is dan  $\varrho_0 \sin \pi / 2m$ , zoodat de gebieden  $\Sigma_p$  en  $\Sigma_{p+2}$  buiten elkaar vallen. Verdeelen wij  $\Sigma_p$  door den halveeringsstraal van  $S_p$  in twee gelijke deelen, dan zullen wij het deel, dat den straal  $\alpha_p$  bevat,  $\Sigma_{p,1}$  en het andere  $\Sigma_{p,2}$  noemen. In de figuur op pag. 25 is  $\Sigma_3$  gearseerd.

Denken wij ons ter weerszijde van de imag. as en op afstand  $c$  daaraan evenwijdig twee rechten  $d$  en  $d'$  getrokken. Wij onderstellen, dat  $d$  rechts van de as ligt. Is  $r$  een punt in  $\Sigma_k$  dan zullen:

$$r \varepsilon^{m-k}, r \varepsilon^{m-k+1}, \dots, r \varepsilon^{2m-k-1}, \dots \quad (21)$$

links van de rechte  $d$  en:

$$r \varepsilon^{2m-k}, r \varepsilon^{2m-k+1}, \dots, r \varepsilon^{3m-k-1}, \dots \quad (22)$$

rechts van de rechte  $d'$  gelegen zijn. Voor de reële gedeelten van (21) bestaat derhalve een positieve bovenste, voor die van (22) een negatieve benedenste grens. Wij deelen nu van den determinant in (18) de kolommen:

$$2m - k + 1, 2m - k + 2, \dots, 3m - k,$$

(welke getallen modulo  $2m$  gelezen moeten worden) resp. door de factoren:

$$e^{ar\varepsilon^{2m-k}}, e^{ar\varepsilon^{2m-k+1}}, \dots, e^{ar\varepsilon^{3m-k-1}}.$$

Totaal is dan gedeeld door  $e^{2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)}$ , want:

$$\sum_{p=0}^{m-1} \varepsilon^{2m-k+p} = \frac{2}{\varepsilon^k(1-\varepsilon)},$$

en (18) wordt, indien wij nog de eerste  $m - k$  kolommen van den determinant naar achteren brengen:

$$\Phi(r) = (-1)^{m-k} \cdot r^{d+B} \cdot e^{2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)} \cdot D \dots \quad (23)$$

$$\cdot (24)$$

§ 4. Wij onderstellen nu, dat  $r$  in  $\Sigma_{k,1}$  ligt, en beschouwen, ter vergelijking met  $D$  den volgenden vereenvoudigden determinant:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon^{(m-k)g_0}, & \varepsilon^{(m-k+1)g_0}, \dots, \varepsilon^{(2m-k-1)g_0}, \varrho - a r \varepsilon^{2m-k}, \varepsilon^{(2m-k)g_0}, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho^{a r \varepsilon^{2m-k}}, \varepsilon^{(m-k)g_m}, 0, \dots, 0, & \varepsilon^{(2m-k)g_m}, & \varepsilon^{(2m-k+1)g_m}, \dots, \varepsilon^{(3m-k-1)g_m} \end{vmatrix} \quad (25)$$



Het is gemakkelijk te zien, dat de moduli der verschillen tusschen de corresponderende elementen in  $D$  en  $D_1$  door  $|r|$  groot genoeg te nemen, beneden elke positieve grens kunnen worden gebracht. Voor de bovenste helften der voorste  $m$  kolommen volgt dit onmiddellijk uit de beteekenis van  $\delta$ , evenzeer voor de onderste helften der achterste  $m$  kolommen, indien men bedenkt, dat:

$$e^{a\delta} (\epsilon^{(2m-k)g_m} + \delta) = (1 + \delta) (\epsilon^{(2m-k)g_m} + \delta) = \epsilon^{(2m-k)g_m} + \delta.$$

Dat in  $D$  de elementen in de onderste helften van de kolommen 2, 3 ...  $m$ , zoo klein kunnen gemaakt worden als wij willen, zien wij uit de exponenten. Ligt  $r$  in  $\Sigma_k$ , dan zullen toch van:

$$r \cdot \epsilon^{m-k+1}, r \cdot \epsilon^{m-k+2}, \dots, r \cdot \epsilon^{2m-k-1},$$

met het aangroeien van  $(r)$ , de reële gedeelten in absolute waarde toenemen en negatief zijn. De elementen in kwestie worden dan al spoedig heel klein. Daar de corresponderende elementen in  $D_1$  nul zijn, worden ook de verschillen klein. Hetzelfde geldt voor de bovenste helften van de kolommen:

$$m+2, m+3, \dots, 2m.$$

Blijven over de onderste helft van de eerste en bovenste van de  $m^e$  kolom. Voor deze elementen blijkt de waarheid van onze bewering, wanneer wij bedenken, dat  $e^{a\delta} = 1 + \delta$  en, bij onze onderstelling over  $r$ , de moduli van:

$$e^{ar\epsilon^{m-k}} = e^{-ar\epsilon^{2m-k}}$$

hoogstens gelijk  $e^{ae}$  zijn. Wij kunnen dus de verschillen tusschen alle paren corresponderende elementen in  $D$  en  $D_1$  in absolute waarde kleiner dan een willekeurig te geven klein getal maken, indien wij  $|r|$  slechts groot genoeg nemen.

Zijn alle elementen van een determinant van orde  $2m$  eindig, dan zal door variatie van deze elementen met een bedrag, waarvan de absolute waarde niet grooter is dan een klein getal  $\eta$ , de waarde van den determinant varieeren met een bedrag, welks absolute waarde hoogstens gelijk is aan  $\eta$  vermenigvuldigd met een slechts van  $2m$  en van den modulus van het grootste element in den ongevarieerden determinant afhangende constante<sup>1)</sup>. De moduli der elementen van  $D_1$  zijn, daar  $r$  in  $\Sigma_{k,1}$  ligt, hoogstens gelijk  $e^{ac}$ , en wij besluiten nu gemakkelijk dat, indien een kleine waarde  $\eta$  willekeurig wordt aangenomen, er altijd een eindige getallenwaarde  $\varrho_n$  te vinden is, zóódanig, dat voor de punten in  $\Sigma_{k,1}$ , die op afstand  $\varrho_n$  of verder van 0 liggen, de modulus van het verschil tusschen  $D_1$  en  $D$  hoogstens gelijk  $\eta$  is. Het getal  $\varrho_n$  zal met het kleiner worden van  $\eta$  toenemen, doch steeds eindig zijn.

§ 5). Ligt  $r$  in  $\Sigma_{k,2}$ , dan vergelijken wij  $D$ , i. p. v. met  $D_1$ , met den volgenden vereenvoudigden determinant:

---

<sup>1)</sup> Aangenomen wordt, dat  $\eta$  nimmer de waarde een overschrijdt.

$$D_2 = \begin{vmatrix} \epsilon^{(m-k)g_0}, & \epsilon^{(m-k+1)g_0}, & \dots & \epsilon^{(2m-k-1)g_0}, & 0, & 0, & \dots & e^{-ar} \epsilon^{3m-k-1} \epsilon^{(3m-k-1)g_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0 & \dots & e^{ar} \epsilon^{3m-k-1} \epsilon^{(2m-k-1)g_m}, & \epsilon^{(3m-k)g_m}, & \epsilon^{(3m-k+1)g_m}, & \dots & \epsilon^{(3m-k-1)g_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

(26) 31



Analoog aan § 4, vinden wij dan, dat, de kleine waarde  $\eta$  gegeven zijnde, er een eindig getal  $q_\eta$  bepaald kan worden, zóódanig, dat voor de punten in  $\Sigma_{k,2}$  op afstand  $q_\eta$  of verder van 0 gelegen de modulus van  $D - D_2$  kleiner dan  $\eta$  is.

Wij mogen de stralen  $q_\eta$  in § 4 en in dezen paragraaf met hetzelfde teeken aanduiden, want mochten de straalwaarden vereischt om in  $\Sigma_{k,1}$  en  $\Sigma_{k,2}$  de moduli van  $D - D_1$  resp.  $D - D_2$  kleiner dan  $\eta$  te maken verschillend zijn, dan kunnen wij altijd veilig voor beide de grootste van deze twee waarden nemen.

Wij kunnen  $q_\eta$  als functie van  $\eta$  beschouwen en definiëren als het *kleinste* aan de volgende voorwaarde voldoende getal  $q$ :

*Voor de punten van  $\Sigma_{k,1}$  resp.  $\Sigma_{k,2}$ , gelegen op of buiten den met straal  $q$  om 0 beschreven cirkel, zijn  $|D - D_1|$  resp.  $|D - D_2|$  hoogstens gelijk  $\eta$ .*

Met het afnemen van  $\eta$  neemt  $q_\eta$  toe.

§ 6. De determinanten  $D_1$  (25) en  $D_2$  (26) kunnen gemakkelijk berekend worden door ze te ontwikkelen naar de minoren van de bovenste  $m$  rijen.

De ontwikkelingen bestaan slechts uit twee termen. Voeren wij de afkortingen:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^{g_0} & \dots & \dots & \varepsilon^{(m-1)g_0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{g_{m-1}} & \dots & \dots & \varepsilon^{(m-1)g_{m-1}} \end{vmatrix} \quad \dots \quad (27)$$

en:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^{g_m} & \dots & \dots & \varepsilon^{(m-1)g_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{g_{2m-1}} & \dots & \dots & \varepsilon^{(m-1)g_{2m-1}} \end{vmatrix} \quad \dots \quad (28)$$

in, dan vinden wij voor  $D_1$  de waarde:

$$\epsilon^{(m-k)A + (2m-k)B} \cdot P \cdot Q - \epsilon^{(m-k+1)A + (2m+k+1)B} \cdot e^{2ar\epsilon^m - k} \cdot P \cdot Q.$$

(zie voor  $A$  en  $B$ , (19) en (20)),

of:

$$D_1 = (-1)^B \epsilon^{(m-k)(A+B)} [1 - \epsilon^{A+B} \cdot e^{2ar\epsilon^m - k}] \cdot P \cdot Q. \quad (29)$$

Analoog komt er:

$$D_2 = (-1)^B \epsilon^{(m-k)(A+B)} [1 - \epsilon^{-(A+B)} \cdot e^{-2ar\epsilon^m - k - 1}] \cdot P \cdot Q. \quad (30)$$

Wij hebben ondersteld, dat noch in de rij  $g_0 \dots g_{m-1}$  noch in de rij  $g_m \dots g_{2m-1}$  gelijke getallen voorkomen, en bovendien, dat de  $g$ 's kleiner zijn dan  $2m$ . Dit heeft tengevolge, dat  $P$  en  $Q$  van nul verschillen<sup>1)</sup>. Hadden wij, de laatste onderstelling niet gemaakt, dan zouden er onder de getallen  $g$  kunnen voorkomen, die *mod*  $2m$  aan elkaar gelijk waren, en zouden dus  $P$  of  $Q$  nul kunnen worden. Voor ons bewijs is het noodig, dat dit niet gebeurt. CAUCHY noemt de laatste restrictie, die er op neer komt, dat de orde van geen der randvoorwaarden hooger dan  $2m - 1$  is, niet. Men behoeft die inderdaad niet te maken. Indien er onder de  $g$ 's twee voorkomen, wier verschil een veelvoud van  $2m$  is, kan in den determinant  $\mathfrak{F}(r)$  door geschikte onderlinge aftrekking van rijen deze omstandigheid opgeheven worden, en dan toch, behoudens in zéér bijzondere gevallen, voor  $\mathfrak{F}(r)$  het onderzoek van dit hoofdstuk onveranderd uitgevoerd worden. Wij gaan hier echter niet nader op in, daar in de meeste toepassingen de orden der randvoorwaarden lager zullen zijn dan de orde  $2m$  van de partieele differentiaalvergelijking t. o. v.  $x$ .

---

<sup>1)</sup> Dit blijkt onmiddellijk, wanneer men bedenkt, dat  $P$  en  $Q$  zoogen. determinanten van VANDERMONDE zijn.

De nulpunten van  $D_1$  (29) liggen op den straal  $\alpha_k$ , op afstanden van 0, die bepaald worden door de betrekking:

$$(A + B) \pi i / m + 2 a \varrho i \equiv 0 \pmod{2 \pi i},$$

of:

$$\varrho \equiv - \frac{(A + B) \pi}{2 a m} \pmod{\pi / a} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Wij beschouwen van deze nulpunten slechts de in het gebied  $\Sigma_{k,1}$  liggende. De afstand  $\varrho$  zal dus gelijk aan of grooter dan  $\varrho_0$  (zie pag. 23) zijn. Wij leggen er cirkels om met een kleinen straal  $\tau$ , en noemen het geheel van de door deze cirkels omsloten kleine gebieden:  $\gamma_1$ , waarbij de begrenzende cirkels niet tot  $\gamma_1$  gerekend worden, maar tot het overblijvende gebied  $\Sigma_{k,1} - \gamma_1$ .

Analoog liggen de nulpunten van  $D_2$  op  $\alpha_{k+1}$ , eveneens op afstanden (31) van 0. Ook om deze, voor zoover binnen  $\Sigma_{k,2}$  gelegen, slaan wij cirkels met straal  $\tau$ , en noemen de omsloten gebieden  $\gamma_2$ . Voor den modulus van  $D_1$  bestaat in  $\Sigma_{k,1} - \gamma_1$  een positieve onderste grens <sup>1)</sup>. Zoo ook voor den modulus van  $D_2$  in  $\Sigma_{k,2} - \gamma_2$ . De kleinste van deze grenswaarden noemen wij  $\eta_\tau$ , daarmede uitdrukkende, dat zij afhangt van den kleinen straal  $\tau$ . Wordt deze kleiner dan zal natuurlijk ook  $\eta_\tau$  kleiner worden. Nemen wij nu een kleine waarde  $\eta_1$  in gedachte, die slechts aan de voorwaarde  $\eta_1 < \eta_\tau$  moet voldoen, en bepalen de bij  $\eta_1$  behorende straalwaarde  $\varrho_{\eta_1}$  (zie pag. 32). Wij weten dan, dat in de punten van  $\Sigma_{k,1}$  resp.  $\Sigma_{k,2}$ , buiten den cirkel met straal  $\varrho_{\eta_1}$  om 0 beschreven,  $|D_1 - D|$  resp.  $|D_2 - D|$  hoogstens de waarde  $\eta_1$  hebben. Buiten dezen cirkel is dus in  $\Sigma_{k,1} - \gamma_1$ :

$$\left. \begin{array}{l} |D_1| \leq \eta_\tau \\ |D_1 - D| \leq \eta_1 \end{array} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

<sup>1)</sup> Verg. LINDELÖF, Calcul des Résidus, pag. 32 noot.



en in  $\Sigma_{k,2} - \gamma_2$ :

$$\left. \begin{aligned} |D_2| &\leq \eta_\tau \\ |D_2 - D| &\leq \eta_1 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (33)$$

Bedenken wij, dat  $\eta_\tau > \eta_1$  is, en noemen het geheel van de gebieden  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$ :  $\gamma$  dan volgt onmiddellijk, dat in  $\Sigma_k - \gamma$ , voor zoover buiten den cirkel, met straal  $\varrho_{\eta_1}$  om 0 beschreven:

$$|D| \leq \eta_\tau - \eta_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (34)$$

zal zijn, en  $D$  aldaar dus geen nulpunten zal hebben. De ongelijkheden (32) gelden ook nog op de cirkels die  $\gamma_1$  begrenzen, en wij zien er met behulp van een bekende stelling (zie b. v. PICARD, *Traité d'Analyse* II, pag. 291) uit, dat  $D$  en  $D_1$  binnen elk van de cirkelvormige gebieden  $\gamma_1$ , die buiten den cirkel, met straal  $\varrho_{\eta_1}$  om 0 beschreven, liggen, evenveel nulpunten hebben. Voor  $D_1$  bedraagt dit aantal één en dus heeft ook  $D$  in elk van die gebieden een enkelvoudig nulpunt. Hetzelfde volgt uit (33) voor  $\gamma_2$ .

Onze uitkomst kan aldus worden samengevat:

*Wij gaan uit van een, naar willekeur te kiezen, kleine waarde  $\tau$  en zoeken de minima van  $|D_1|$  resp.  $|D_2|$  in de door  $\tau$  bepaalde gebieden  $\Sigma_{k,1} - \gamma_1$  resp.  $\Sigma_{k,2} - \gamma_2$ . Het kleinste van deze minima zij  $\eta_\tau$ . Wij nemen vervolgens een getal  $\eta_1$ , dat kleiner is dan  $\eta_\tau$ , in gedachte en bepalen de daarbij behorende waarde  $\varrho_{\eta_1}$ , gelijk op pag. 32 is aangegeven. Met den straal  $\varrho_{\eta_1}$  beschrijven wij een cirkel om 0. Buiten dezen cirkel zal nu  $D$  in elk van de kleine gebieden  $\gamma$  een enkelvoudig nulpunt hebben en zal in het gebied  $\Sigma_k - \gamma$  de modulus van  $D$  niet kleiner zijn dan  $\eta_\tau - \eta_1$ .*

Gaan wij met  $r$  naar  $\infty$  volgens een binnen  $S_k$  gelegen richting, dan worden van  $2ar^{m-k}$  en  $-2ar^{m-k-1}$  de reële gedeelten negatief oneindig en dus volgt uit (29)

en (30) voor deze richtingen:

$$\lim D_1 = \lim D_2 = (-1)^B \cdot \varepsilon^{(m-k)(A+B)} \cdot P \cdot Q.$$

Daar verder bij elk klein getal  $\eta$  een eindige straalwaarde  $\varrho_\eta$  berekend kan worden zóódanig, dat voor  $|r| \geq \varrho_\eta$ , in  $\Sigma_{k,1}$  de modulus van  $D - D_1$  en in  $\Sigma_{k,2}$  de modulus van  $D - D_2$  kleiner zijn dan  $\eta$ , zien wij dat, indien het argument van  $r$  binnen den sector  $S_k$  ligt:

$$\lim D = (-1)^B \cdot \varepsilon^{(m-k)(A+B)} \cdot P \cdot Q \quad . \quad . \quad (35)$$

voor  $\lim |r| = \infty$ .

Voor de grensstralen  $\alpha_k$  en  $\alpha_{k+1}$  geldt dit niet meer.

§ 7. Uit de betrekking:

$$\Phi(r) = (-1)^{m-k} \cdot r^{A+B} \cdot e^{2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)} \cdot D, \quad . \quad (23)$$

zien wij, dat de nulpunten van  $\Phi(r)$  en  $D$  binnen  $\Sigma_k$  samen-vallen. De factor waarmede  $D$  vermenigvuldigd wordt heeft in dat gebied toch geen nulpunten, daar het reële gedeelte van  $2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)$  er steeds positief is. Wanneer wij nu  $k$  de waarden  $0, 1 \dots 2m-1$  laten doorloopen, weten wij omtrent de nulpunten van  $\Phi(r)$  op voldoende afstand van 0, alles wat wij noodig hebben. Ons resultaat luidt als volgt.

*Op de  $2m$  van 0 uitgaande stralen worden de punten, wier afstanden tot 0 door (31) bepaald worden, gemerkt. Om deze punten worden cirkels met straal  $\tau$  getrokken, die zoo klein kan zijn als wij willen. Het is mogelijk een, van  $\tau$  afhangende, eindige waarde  $\varrho$  te bepalen, zoodat in het gebied buiten den cirkel met straal  $\varrho$  om 0 beschreven het volgende geldt: Binnen elk van de kleine cirkels met straal  $\tau$  heeft  $\Phi(r)$  een enkelvoudig nulpunt en daarbuiten liggen geen nulpunten.*

Daar:

$$\mathfrak{F}(r - k_1/2m) = e^{-ak_1/2} \Phi(r) \quad . \quad . \quad (16)$$

is, geldt dit resultaat ook voor  $\mathfrak{F}(r)$ , indien in de plaats



van 0 het punt  $r = -k_1 / 2m$  wordt gesteld, en het doel, dat wij ons in dit hoofdstuk gesteld hebben, is hiermede in hoofdzaak bereikt.

Uit (16), (23) en (35) kunnen wij voor  $\mathfrak{F}(r - k_1 / 2m)$  nog het volgende afleiden:

1<sup>o</sup>.

$$\lim_{|r|=\infty} \left[ \mathfrak{F}(r - k_1 / 2m) : \{(-1)^{m-k+B} r^{A+B} \cdot \varepsilon^{(m-k)(A+B)} \cdot e^{-a k_1 / 2 + 2 a r / \varepsilon^k (1-\varepsilon)} P \cdot Q\} \right] = 1, \dots (36)$$

indien  $r$  volgens een *binnen*  $S_k$  gelegen straal naar  $\infty$  gaat. De betrekking (36) geldt gelijkmatig t. o. v. het argument van  $r$ . Voor  $\alpha_k$  en  $\alpha_{k+1}$  geldt zij niet.

2<sup>o</sup>.

In het gebied  $\Sigma_k - \gamma$ , voor zoover dit buiten den cirkel met straal  $\varrho_{n_1}$  om 0 beschreven ligt (zie pag. 32), bestaat voor den modulus van de in (36) onder het limietteken staande functie een positieve onderste grens.

1<sup>o</sup>. en 2<sup>o</sup>. zullen ons in hoofdstuk III te pas komen.

§ 8. De ontwikkelingen in §§ 1—7 stellen ons in staat te bepalen het totaal aantal nulpunten van  $\Phi(r)$ , gelegen binnen een cirkel met voldoende grooten straal om 0 beschreven, of, wat op hetzelfde neerkomt, van  $\mathfrak{F}(r)$  binnen een dergelijken cirkel om  $r = -k_1 / 2m$ . Wij weten, dat op voldoende afstand van 0 de nulpunten van  $\Phi(r)$  bij benadering op de stralen  $\alpha$  liggen en dat hun afstanden tot 0, eveneens bij benadering, bepaald worden door (31).

Wij beschrijven nu om 0 een cirkel met straal:

$$= \frac{(A+B)\pi}{2am} + \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \dots (37)$$

waar  $n$  een groot positief geheel getal is, en noemen dezen  $c_n$ .



Wij bepalen het aantal binnen  $c_n$  gelegen nulpunten van  $\Phi(r)$  door de argumentstoename van deze functie bij omloop van  $c_n$  in positieven zin op te maken. Is  $\Phi(r)$  tweewaardig, dan moet  $n$  minstens zoo groot zijn, dat buiten  $c_n$  de beide bladen gescheiden zijn (de straal (37) zal dus grooter dan  $\varrho_0$  (zie pag 23) moeten zijn). Wij beschrijven dan den cirkel in beide bladen en bepalen de argumentstoename bij omloop van beide cirkels in positieven zin. Aangezien  $\Phi(r)$  in corresponderende punten op het teeken na gelijke waarden heeft, zullen beide toenamen gelijk zijn. De totale toename gedeeld door  $2\pi$  levert dan het binnen den cirkel (of de cirkels)  $c_n$  gelegen aantal nulpunten, daar  $\Phi(r)$  in het eindige geen singulariteiten heeft en er dus geen polen voorkomen. Is de functie tweewaardig dan worden de nulpunten in boven- en onderblad geteld. De vertakkingspunten, die, zooals wij gezien hebben, ook nulpunten zijn, worden natuurlijk slechts eenmaal gerekend.

Gaan wij na, wat er gebeurt wanneer  $r$  op  $c_n$  de eerste helft van  $S_k$  doorloopt, d. w. z. gaat van het punt:

$$[-(A+B)\pi/2am + (2n+1)\pi/2a] e^{(-\pi/2 + k\pi/m)i}$$

naar het punt:

$$[-(A+B)\pi/2am + (2n+1)\pi/2a] e^{(-\pi/2 + (2k+1)\pi/2m)i}$$

welke punten wij resp.  $P_1$  en  $P_2$  zullen noemen.

Beide liggen in  $\Sigma_{k,1}$  en in beide geldt dus: (zie (23) en (29)):

$$\begin{aligned} \Phi(r) = & (-1)^{m-k+B} \cdot r^{A+B} \cdot e^{2ar/\epsilon^k(1-\epsilon)} \cdot \epsilon^{(m-k)(A+B)} \cdot P \cdot Q \cdot \\ & \cdot [1 - \epsilon^{A+B} \cdot e^{2ar/\epsilon^{m-k}} + A]. \quad \dots \quad (38) \end{aligned}$$

Wij weten bovendien, dat, voor  $|r| \geq \varrho_\eta$ , de modulus van  $D - D_1$  hoogstens gelijk  $\eta$  is en derhalve in (38):

$$|A| \leq \eta : |P \cdot Q|$$

zal zijn. Kiezen wij  $n$  (en daarmee  $|r|$ ) slechts groot

genoeg, dan kan  $|A|$  dus zoo klein gemaakt worden als wij willen. In het punt  $P_1$  is verder:

$$\epsilon^{A+B} \cdot e^{2ar\epsilon^m - k} = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

en in  $P_2$ :

$$|\epsilon^{A+B} \cdot e^{2ar\epsilon^m - k}| = e^{[(A+B)\pi/m - (2n+1)\pi] \sin \pi/2m}, \quad (40)$$

gelijk door substitutie van de affixen van  $P_1$  en  $P_2$  in de eerste leden van (39) resp. (40) blijkt. Door  $n$  groot te nemen, kunnen wij het tweede lid van (40) naar willekeur klein maken. Voor:

$$1 - \epsilon^{A+B} e^{2ar\epsilon^m - k} + A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

vinden wij derhalve in  $P_1$  en  $P_2$ , op kleine grootheden na, resp. de waarden 2 en 1 en wij zien, dat het mogelijk is  $n$  zóó groot te nemen, dat, wanneer  $r$  langs den cirkel  $c_n$  van  $P_1$  naar  $P_2$  gaat, de argumentstoename van (41) minder dan een te geven kleine waarde bedraagt.

De argumentstoename van  $r^{A+B}$  tusschen  $P_1$  en  $P_2$  is  $(A+B)\pi/2m$ . In  $P_1$  heeft het imaginaire gedeelte van  $2ar/\epsilon^k(1-\epsilon)$  de waarde:

$$[(A+B)/m - (2n+1)]i\pi/2,$$

in  $P_2$  is het nul; het argument van:

$$e^{2ar/\epsilon^k(1-\epsilon)},$$

neemt dus toe met:

$$[-(A+B)/m + (2n+1)]\pi/2,$$

en derhalve het argument van:

$$r^{A+B} e^{2ar/\epsilon^k(1-\epsilon)},$$

met  $(2n+1)\pi/2$ .

Samenvattende zien wij nu uit (38), dat, mits  $n$  groot genoeg is, de argumentstoename van  $\Phi(r)$  tusschen de op

$c_n$  gelegen punten  $P_1$  en  $P_2$  minder dan een te geven kleine waarde van  $(2n+1)\pi/2$  verschilt.

Dezelfde redeneering kan voor de overige  $4m-1$  halve sectoren  $S$  gehouden worden, en het resultaat is, dat er een getal  $n_0$  bepaald kan worden, zoodanig, dat, indien  $r$  den cirkel  $c_n$  met straal:

$$-(A+B)\pi/2am + (2n+1)\pi/2a,$$

alwaar  $n \geq n_0$  ondersteld wordt, éénmaal in positieven zin omloopt, de toename, welke bij dien omloop het argument van  $\Phi(r)$  ondergaat, minder dan een te geven waarde van  $m(2n+1)2\pi$  verschilt.

Zorgen wij dus,  $n_0$  zoo groot te nemen, dat dit verschil kleiner is dan  $\pi$ , dan zijn wij zeker, dat voor éénwaardige  $\Phi(r)$  binnen een cirkel  $c_n$  ( $n \geq n_0$ ) het aantal nulpunten  $m(2n+1)$  bedraagt. Is  $\Phi(r)$  tweewaardig, dan moet dit aantal verdubbeld worden.

§ 9. Wij besluiten dit hoofdstuk met een toepassing van de uitkomst van § 8 op de functie:

$$\Phi(r) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & ri & -r & -ri \\ e^{ar} & e^{ari} & e^{-ar} & e^{-ari} \\ r e^{ar} & ri e^{ari} & -r e^{-ar} & -ri e^{-ari} \end{vmatrix}, \quad (42)$$

die in de theorie van de trillende staven gebruikt wordt.

$\Phi(r)$  is een bijzonder geval van onze functie  $\mathfrak{F}(r)$ , wanneer genomen wordt:

$$F(r, 0) = r^4$$

$$f_0(r) = f_2(r) = 1$$

$$f_1(r) = f_3(r) = r.$$

$A$  en  $B$  zijn dus 1 en  $m=2$ . § 8 levert het volgende. Mits  $n_0$  groot genoeg is zal het aantal nulpunten van  $\Phi(r)$



binnen een cirkel met straal  $n\pi/a$  om 0 beschreven  $4n + 2$  bedragen ( $n \geq n_0$ ).

Door eenvoudige herleiding volgt verder uit (42):

$$\phi(r) = 8r^2 i (\cos ar \operatorname{Ch} ar - 1), \dots (43)$$

en hieruit zien wij gemakkelijk, dat  $\phi(r)$  in 0 een zesvoudig nulpunt heeft, en dat bovendien op de reële as in elk van de segmenten:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{a} \text{ tot } \frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a} \text{ tot } \frac{3\pi}{a}, \text{ enz.} \\ & -\frac{\pi}{a} \text{ tot } -\frac{2\pi}{a}, -\frac{2\pi}{a} \text{ tot } -\frac{3\pi}{a}, \text{ enz.} \end{aligned}$$

een enkelvoudig nulpunt ligt. Daar  $\phi(r)$  door de substitutie  $r = ri$  niet verandert, geldt hetzelfde voor de imaginaire as. Wij hebben dus binnen elken cirkel met straal  $n\pi/a$  reeds  $4(n-1) + 6 = 4n + 2$  nulpunten aangewezen. Wij weten echter uit onze algemeene beschouwing, dat het aantal niet grooter dan  $4n + 2$  kan zijn, en hebben daarmede bewezen, dat  $\phi(r)$  (42) slechts reële of zuiver-imaginaire nulpunten heeft.

CAUCHY heeft dit, langs geheel anderen weg, (Oeuvres Complètes Série II, Tome VI p. 366) aangetoond. In Rayleigh, Sound I p. 263 wordt, volgens een methode, die aan Poisson wordt toegeschreven, bewezen, dat de vierdemachten van de wortels reëel moeten zijn. De mogelijkheid blijft dan over, dat op de stralen, die de assenhoeken halveeren, nulpunten liggen, hetgeen niet het geval is.

## H O O F D S T U K III.

Bepaling van  $\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu.$

§ 1. Wij vatten nu het einde van hoofdstuk I weer op en gaan over tot de bepaling van:

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu. \quad (1)$$

Bij  $f(u)$  laten wij ter vereenvoudiging den index tijdelijk weggelaten. De functie  $v(r, x)$  luidt, wanneer voor  $R_0 \dots R_{2m-1}$  de waarden (36) pag. 18 worden gesubstitueerd:

[illegible]

Er moet vervolgens een afspraak worden gemaakt over de volgorde der polen. Lettende op hetgeen wij omtrent de ligging der nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  in hoofdstuk II hebben gevonden komen wij van zelf tot de volgende rangschikking.

Om het punt  $r = -\frac{k_1}{2m}$  worden concentrische cirkels beschreven met stralen:

$$\varrho \equiv -\frac{(A+B)\pi}{2ma} + \frac{\pi}{2a} \left( \text{mod } \frac{\pi}{a} \right) . . . \quad (3)$$

Op voldoende afstand van het middelpunt zullen op geen van deze cirkels nulpunten liggen. Mocht dit voor een der kleinere cirkels het geval zijn, dan vergrooten wij dezen een weinig, zoodat het nulpunt er binnen valt. Wij noemen deze cirkels:

$$c_0, c_1 . . . c_v, . . .$$

en hun stralen:

$$\varrho_0^1), \varrho_1, . . . \varrho_v, . . . . . \quad (3a)$$

Wij nemen nu de tusschen twee opvolgende cirkels gelegen polen bijeen. Hun aantal is steeds eindig en voor voldoende groote stralen steeds gelijk  $2m$ .

Deze volgorde brengt mede, dat:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\mathfrak{F}(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu = \\ & = \lim_{v=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_v} \left[ \frac{v(r, x)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu \right] dr . \quad (4) \end{aligned}$$

Wij onderstellen, dat  $x$  in het interval  $x_0 \leq x \leq x_1$  besloten blijft, en splitsen de onder het residuteeken voorkomende

---

<sup>1)</sup> Verwarring met de op pag. 23 gedefinieerde  $\varrho_0$  behoeft niet gevreesd te worden.



integraal in twee deelen door voor het eerste lid van (4) te schrijven:

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^x + \mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_x^{x_1} \dots \quad (5)$$

Wij zoeken de waarde van den eersten van deze twee termen, dien wij deze gedaante kunnen geven:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{v(r - k_1/2m, x)}{\delta(r - k_1/2m)} \int_{x_0}^x e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu \right] i r d\psi \quad (6)$$

alwaar  $r = \rho e^{i\psi}$ .

Wij zullen hierbij een stelling noodig hebben, die wij in de volgende § zullen afleiden, en in dezen vorm met eenige uitbreiding ontleenen aan het boven aangehaalde werk van LINDELÖF (aldaar p. 32).

§ 2. Zij  $L(r, \psi)$  een functie, die afhangt van  $\psi$  en het geheele getal  $r$ , en in  $\psi$  de periode  $2\pi$  heeft.

Wanneer  $\psi$  tusschen:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m} \text{ en } -\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m}$$

ligt, en ook gelijk aan deze grenswaarden mag worden, zullen wij, in overeenstemming met het vorige hoofdstuk, zeggen, dat  $\psi$  zich in  $S_k$  bevindt. Moeten de grenswaarden uitgesloten worden, dan zullen wij zeggen dat  $\psi$  zich binnen  $S_k$  bevindt. De stelling luidt nu aldus.

Indien ten eerste:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L(r, \psi) = A_k, \text{ voor } \psi \text{ binnen } S_k \quad (7)$$

( $k = 0, 1 \dots 2m - 1$ ),

en ten tweede:

$|L(r, \psi)|$  kleiner dan een eindige waarde  $M$  blijft voor alle geheele waarden  $r$  en voor alle waarden  $\psi$ , dan is:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(r, \psi) d\psi = \frac{1}{2m} (A_0 + A_1 + \dots + A_{2m-1}). \quad (8)$$

De limietgelijkheden (7) moeten in de voor  $\psi$  aangegeven gebieden gelijkmatig vervuld zijn<sup>1)</sup>.

Voor het bewijs schrijven wij:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}} [L(r, \psi) - A_0] d\psi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \delta} + \int_{-\frac{\pi}{2} + \delta}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} - \delta} + \\ + \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} - \delta}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}} \dots \dots \dots (9)$$

De eerste en de derde integraal in het tweede lid zijn in absolute waarde niet grooter dan  $(M + |A_0|) \delta$ . De tweede is in absolute waarde niet grooter dan  $\left(\frac{\pi}{m} - 2\delta\right) \eta$ , alwaar, wegens (7), nadat voor  $\delta$  een willekeurig kleine waarde is gekozen,  $\eta$  beneden elke positieve grens kan gebracht worden, door  $r$  slechts groot genoeg te nemen. De modulus van het eerste lid van (9) kan dus zoo klein gemaakt worden als men wil. Schrijven wij de aan (9) analoge vergelijkingen voor de andere deelintervallen van het gebied  $0 \leq \psi \leq 2\pi$  op, en sommeeren, dan besluiten wij gemakkelijk, dat  $r$  steeds zoo groot genomen kan worden, dat:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(r, \psi) d\psi - \frac{1}{2m} (A_0 + A_1 + \dots + A_{2m-1}),$$

in absolute waarde kleiner dan een gegeven grootheid is.

De limietbetrekking (8) is dus bewezen.

<sup>1)</sup> Hiermede wordt het volgende bedoeld.

Indien:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m} + \delta \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m} - \delta,$$

moet er een eindig getal  $r_0$  te vinden zijn, zóódanig dat voor  $r \geq r_0$  de absolute waarde van  $L(r, \psi) - A$  beneden een willekeurig aan te nemen positieve grens ligt;  $\delta$  mag daarbij zoo klein zijn als men wil.

N.B. Indien  $L(\nu, \psi)$  nog afhankelijk is van een parameter  $x$  en de betrekkingen (7) gelijkmatig vervuld zijn voor  $x_0 \leq x \leq x$ , dan zal de limietvergelijking (8) aldaar gelijkmatig t. o. v.  $x$  gelden. De grootheden  $A_0 \dots A_{2m-1}$  zullen dan in het algemeen functiën van  $x$  zijn.

§ 3. Stellen wij:

$$r \frac{v(r - k_1/2m, x)}{\mathfrak{F}(r - k_1/2m)} \int_{x_0}^x e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu = L(x, \nu, \psi), \quad (10)$$

alwaar  $r = q, e^{i\psi}$ . Om de stelling in § 2 voor de bepaling van (6) te kunnen gebruiken, zullen wij de functiën  $A_0(x) \dots A_{2m-1}(x)$  trachten te vinden.

Wij beginnen daartoe de limietwaarden van den factor  $v(r - k_1/2m)$  van  $L(x, \nu, \psi)$  te zoeken. Dat de waarde  $|r|$  bij het aangroeien niet continu toeneemt, doch de reeks (3a) doorloopt, is voor dezen factor niet van belang. Uit hoofdstuk II weten wij, dat, indien in de algebraïsche functiën van  $r$ :

$$r, r_1 \dots r_{2m-1}, \dots \dots \dots (11)$$

voor  $r$  gesubstitueerd wordt  $r - k_1/2m$ , deze overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} r - k_1/2m \\ r_1 - k_1/2m + \delta \\ \vdots \\ r_{2m-1} - k_1/2m + \delta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

De  $\delta$ 's zijn machtreeksen in  $1/r$ , zonder bekende termen, die buiten cirkel  $K_0$  (zie pag. 23) absoluut en gelijkmatig convergeeren.

Uit (2) volgt dan:

$$v(r - k_1/2m, x) = r^{A+B} \cdot e^{-(x-x_0)k_1/2m - k_1\alpha/2} \cdot H(r, x), \quad (13)$$



alwaar:

$$H(r, x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{r(x-x_0)}, & e^{(r\varepsilon+\delta)(x-x_0)} \dots e^{(r\varepsilon^{2m-1}+\delta)(x-x_0)} \\ 1+\delta, & 0 & (\varepsilon^{g_0}+\delta) \dots \varepsilon^{(2m-1)g_0}+\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & e^{ar}(1+\delta), & e^{a(r\varepsilon+\delta)(\varepsilon^{g_m}+\delta)} \dots e^{a(r\varepsilon^{2m-1}+\delta)(\varepsilon^{g_m(2m-1)}+\delta)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

§ 4. Zoeken wij eerst de limiet van  $H(r, x)$  in het geval, dat  $r$  binnen een der aan de positieve zijde van de imag. as gelegen sectoren  $S_k$  naar  $\infty$  gaat,  $k$  is dus  $0, 1 \dots$  of  $m-1$ .

De reële gedeelten van:

$$r, r\varepsilon \dots r\varepsilon^{m-k-1}, r\varepsilon^{2m-k} \dots r\varepsilon^{2m-1}$$

zijn dan positief. Wij deelen derhalve de kolommen:

$$2, 3 \dots m-k+1, 2m-k+2 \dots 2m+1$$

van  $H(r, x)$  door de in de onderste helften voorkomende expon. factoren. In het geheel is dan gedeeld door  $e^{2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)}$ . Gelijk gezegd werd, onderstellen wij, dat  $r$  binnen  $S_k$  naar het  $\infty$  gaat. Voor zijn argument  $\psi$  geldt dus steeds:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m} + \delta \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m} - \delta, \quad (14)$$

hoe klein  $\delta$  ook moge zijn. Gaat men nu het resultaat van de deelingen voorzichtig na, dan blijkt dat, de kleine positieve waarde  $\delta$  eenmaal vaststaande, steeds een eindige afstand van 0 kan gevonden worden, zóódanig, dat voor punten verder van 0 gelegen het verschil in de corresponderende elementen van den determinant, die door de deelingen ontstaat, en den volgenden vereenvoudigden determinant:

|   |                                                                                                                                                                                    |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0 | $e^{r(x-x_1)} \dots e^{r\epsilon^m - k - 1(x-x_1)}, e^{r\epsilon^m - k(x-x_0)} \dots e^{r\epsilon^{2m-k-1}(x-x_0)}, e^{r\epsilon^{2m-k}(x-x_1)} \dots e^{r\epsilon^{2m-1}(x-x_1)}$ |
| 1 | $0 \dots \dots \dots 0, \quad \xi^{g_0(m-k)} \dots \dots \dots \xi^{g_0(2m-k-1)}, \quad 0 \dots \dots \dots 0$                                                                     |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| 0 | $1 \dots \dots \dots \xi^{g_m(m-k-1)}, \quad 0 \dots \dots \dots 0, \quad \xi^{g_m(2m-k)} \dots \dots \dots \xi^{g_m(2m-1)}$                                                       |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |
| . | .                                                                                                                                                                                  |

, (15) 48

dien wij  $H_1(r, x)$  zullen noemen, minder dan een te geven kleine waarde bedraagt, en dat wel onafhankelijk van de waarde van  $x$ . Daar verder de elementen van  $H_1(r, x)$  steeds eindig zijn (in absolute waarde hoogstens gelijk de eenheid) zal het verschil tusschen beide determinanten, door  $|r|$  groot genoeg te nemen, zoo klein kunnen gemaakt worden als wij willen.

Wij hebben dus:

$$H(r, x) : e^{2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)} = H_1(r, x) + \eta \quad (16)$$

indien  $\psi$  aan (14) voldoet. Door  $|r|$  groot genoeg te nemen kan  $|\eta|$  naar willekeur klein gemaakt worden.

$H_1(r, x)$  is het product van den minor uit de onderste  $m$  rijen, die, in de notaties van hoofdstuk II,  $\varepsilon^{B(2m-k)} \cdot Q$  luidt, en den complementairen minor:

$$M_k(r, x - x_0) = \begin{vmatrix} 0 & e^{r\varepsilon^{m-k}(x-x_0)} \dots e^{r\varepsilon^{2m-k-1}(x-x_0)} \\ 1 & \varepsilon^{g_0(m-k)} \dots \varepsilon^{g_0(2m-k-1)} \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ 1 & \varepsilon^{g_{m-1}(m-k)} \dots \varepsilon^{g_{m-1}(2m-k-1)} \end{vmatrix} \quad (17)$$

en dus:

$$H_1(r, x) = (-1)^{m-k} \cdot \varepsilon^{B(2m-k)} \cdot Q \cdot M_k(r, x - x_0). \quad (18)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_k(r, x - x_0) = 0, \text{ voor } r \text{ binnen } S_k \text{ en } x > x_0.$$

Op den grensstraal  $\alpha_k$  geldt (16) niet. Aldaar moet het resultaat van de deeling van  $H(r, x)$ , i. p. v. met (15), vergeleken worden met een anderen determinaat, die uit (15) ontstaat, wanneer de nullen uit de  $(m-k+2)^e$  en  $(2m-k+2)^e$  kolommen resp. vervangen worden door:

$$e^{ar\varepsilon^{m-k}} \varepsilon^{g_m} \dots e^{ar\varepsilon^{m-k}} \cdot \varepsilon^{g_{2m-1}},$$

en:

$$e^{-ar\varepsilon^{2m-k}} \varepsilon^{g_0} \dots e^{-2ar\varepsilon^{2m-k}} \cdot \varepsilon^{g_{m-1}}.$$



Analoog voor  $\alpha_{k+1}$ .

Wij zien langs dezen weg gemakkelijk in, dat in het geheele gebied  $S_k$ , met inbegrip van de randstralen  $\alpha_k$  en  $\alpha_{k+1}$ , het eerste lid van (16) althans eindig blijft.

§ 5. Vervolgens moet de limiet van  $H(r, x)$  gezocht worden, wanneer  $r$  aan den negatieven kant der imag. as naar  $\infty$  gaat. Wij onderstellen dus, dat  $r$  in  $S_k$  ligt ( $k = m, m+1, \dots, 2m-1$ ). Wij deelen nu de kolommen:

$$2m-k+2 \dots 3m-k+1$$

door de expon. factoren van hare onderste elementen, en bovendien de tweede kolom (die anders bij de limiet geheel nul zou worden) door  $e^{r(x-x_0)}$ . Verder verloopt alles als in § 4, en de uitkomst is de volgende:

$$H(r, x) : e^{r(x-x_0) + 2ar/\epsilon^k(1-\epsilon)} = (-1)^{m-k-1} \cdot \epsilon^{A(m-k)} \cdot P \cdot N_k(r, x_1 - x) + \eta \dots \dots \dots (19)$$

indien voor  $\psi$  geldt:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m} + \delta \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m} - \delta, \quad (20)$$

$$k = m, m+1, \dots, 2m-1.$$

In (19) is:

$$N_k(r, x_1 - x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{r\epsilon^{2m-k}(x-x_1)} \dots e^{r\epsilon^{3m-k-1}(x-x_1)} \\ e^{r(x_1-x)} & \epsilon^{g_m(2m-k)} \dots \epsilon^{g_m(3m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{r(x_1-x)} & \epsilon^{g_{2m-1}(2m-k)} \dots \epsilon^{g_{2m-1}(3m-k-1)} \end{vmatrix} \quad (21)$$

en kan, door  $|r|$  groot te nemen,  $|\eta|$  zoo klein gemaakt worden als wij willen. Voor  $x < x_1$  is:

$$\lim_{r=\infty} N_k(r, x_1 - x) = \epsilon^{B(2m-k)} \cdot Q \dots \dots (22)$$

Op de grenzen  $\alpha_k$  en  $\alpha_{k+1}$  blijft het eerste lid van (19) eindig.

§ 6. Uit (13), (16) en (19) volgt:

$$v(r - k_1/2m, x) : [r^{A+B} \cdot e^{-(x-x_0)k_1/2m - k_1a/2 + 2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)}] = \\ = (-1)^{m-k} \cdot \varepsilon^{-kB} \cdot Q \cdot M_k(r, x - x_0) + \eta, \quad (23)$$

voor  $r$  binnen  $S_k$  en  $k = 0, 1 \dots$  of  $m - 1$ ,

$$v(r - k_1/2m, x) : [r^{A+B} \cdot e^{(r-k_1/2m)(x-x_0) - k_1a/2 + 2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)}] = \\ = (-1)^{m-k-1} \cdot \varepsilon^{(m-k)A} \cdot P \cdot N_k(r, x_1 - x) + \eta, \quad (24)$$

voor  $r$  binnen  $S_k$  en  $k = m, m+1, \dots$  of  $2m - 1$ .

De verg. (23) en (24) gelden voor  $x_0 \leq x \leq x_1$ , en er is altijd een  $|r|$  te vinden zóó groot, dat de moduli van de  $\eta$ 's beneden een te geven positieve grens liggen.

In het geheele gebied  $S_k$ , met inbegrip van  $\alpha_k$  en  $\alpha_{k+1}$  blijven de eerste leden eindig. Hiermede weten wij van  $v(r - k_1/2m, x)$ , wat wij noodig hebben.

§ 7. Voor den noemer van  $L(x, v, \psi)$  (10):

$$\mathfrak{F}(r - k_1/2m),$$

kunnen wij verwijzen naar hoofdstuk II, § 7. Wij vonden daar het volgende:

$$\mathfrak{F}(r - k_1/2m) : [(-1)^{m-k+B} \cdot r^{A+B} \cdot e^{-ak_1/2 + 2ar/\varepsilon^k(1-\varepsilon)} \cdot \\ \cdot \varepsilon^{(m-k)(A+B)} \cdot P \cdot Q] = 1 + \eta, \quad (25)$$

voor  $r$  binnen  $S_k$  ( $k = 0, 1 \dots 2m - 1$ ).

Door  $|r|$  groot genoeg te nemen, kan  $|\eta|$  naar willekeur klein gemaakt worden.

De uitkomst sub 2º, p. 37 leert verder, dat, op de bogen, die door  $S_k$  uit de cirkels  $c_v$  (p. 43) gesneden worden, voor den modulus van het eerste lid van (25) een positieve benedenste grens bestaat. Deze cirkelbogen liggen toch binnen het gebied, waarvan aldaar sprake is.



§ 8. Combinatie van §§ 6 en 7 levert, voor  $r$  binnen  $S_k$ :

$$v(r - k_1/2m, x) : \mathfrak{F}(r - k_1/2m) = \\ = e^{-(x-x_0)k_1/2m} \cdot \varepsilon^{-(m-k)A} \cdot P^{-1} \cdot M_k(r, x - x_0) + \eta, \quad (26) \\ k = 0, 1 \dots m-1,$$

$$v(r - k_1/2m, x) : [\mathfrak{F}(r - k_1/2m) \cdot e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)}] = \\ = -\varepsilon^{kB} \cdot Q^{-1} \cdot N_k(r, x_1 - x) + \eta, \quad (27) \\ k = m, m+1, \dots 2m-1.$$

Door  $|r|$  groot genoeg te nemen, kunnen de  $\eta$ 's in (26) en (27) zoo klein als men wil gemaakt worden.

Op de cirkelbogen door  $S_k$  uit de cirkels  $c_r$  gesneden, blijven de moduli van de eerste leden in (26) en (27) eindig. De betrekkingen (26) en (27) gelden voor het geheele interval  $x_0 \leq x \leq x_1$ .

§ 9. Van  $L(x, r, \psi)$  blijft ter bespreking over de factor:

$$I = r \int_{x_0}^x e^{-(r-k_1/2m)(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu, \dots (28)$$

dien wij nu zullen onderzoeken. In PICARD, *Traité d'Analyse* II, p. 182—184, wordt deze integraal behandeld, met het onderscheid, dat  $k_1$  daar nul is. Wij verwijzen ter vergelijking naar de uiteenzetting aldaar. Wij volgen die ongeveer, maar kunnen niet volstaan met eenvoudig het resultaat over te nemen, daar wij een iets scherper uitkomst zullen noodig hebben. Wij zoeken de limiet van  $I$  voor groote waarden van  $|r|$  en onderstellen eerst, dat  $r$  aan den positieven kant van de imag. as blijft, zoodat voor  $\psi$  geldt:

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \dots (29)$$

waar  $\delta$  een, desnoods zeer kleine, positieve waarde heeft. Daar wij aannemen, dat  $f(\mu)$  *continu* en *à variation limitée* is, kunnen wij deze functie beschouwen als het verschil van



twee, in het interval  $x_0 \leq \mu \leq x_1$  continue en niet afnemende, functiën  $f(\mu)$  en  $f'(\mu)$  <sup>1)</sup>. Wij voeren het onderzoek voor deze functiën afzonderlijk uit, en nemen dan het verschil van de uitkomsten. Wij mogen dus onderstellen, dat in (28)  $f(\mu)$  een, in het integratie-interval nimmer afnemende, continue functie is, eenvoudigheidshalve het accent van  $f'(\mu)$  weglatende.

Wij bepalen nu het positieve getal  $\varepsilon$  zoo, dat:

$$f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = \eta \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

is, waar  $\eta$  een, naar willekeur te nemen, kleine waarde heeft en splitsen de integraal in  $I$  in twee deelen:

$$I = r \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} + r \int_{x_0 + \varepsilon}^x, \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

daarbij dus aannemende, dat  $x_0 + \varepsilon$  kleiner dan  $x$  uitvalt. Voor den eersten term in het tweede lid van (32) kunnen wij schrijven:

$$\begin{aligned} & f(x_0) \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} r e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} d\mu + \\ & + \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} r [f(\mu) - f(x_0)] e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} d\mu \quad (33) \end{aligned}$$

Wij stellen:

$$r e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} = P + i Q, \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$P$  en  $Q$  zijn beide reëel. De laatste term van (33) wordt dan:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} P [f(\mu) - f(x_0)] d\mu + i \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} Q [f(\mu) - f(x_0)] d\mu \quad (35)$$

Bedenkt men, dat  $f(\mu) - f(x_0)$  in het integratie-interval, niet afneemt, dan kan, met behulp van de zoogen. *tweede*

<sup>1)</sup> Zie JORDAN *Cours d'Analyse* III, p. 568.

stelling over het gemiddelde (vgl. b.v. PICARD I p. 7), voor (35) geschreven worden:

$$[f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)] \left[ \int_{x_0 + \vartheta \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} P d\mu + \int_{x_0 + \vartheta' \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} i Q d\mu \right], \quad (36)$$

waar  $\vartheta$  en  $\vartheta'$  echte breuken voorstellen, die ook nul kunnen zijn. De eerste integraal in (36) is het reële gedeelte van:

$$[e^{-(r - k_1/2m)\vartheta \varepsilon} - e^{-(r - k_1/2m)\varepsilon}] \cdot r / (r - k_1/2m), \quad (37)$$

en de tweede het imaginaire van dezelfde uitdrukking, wanneer  $\vartheta$  door  $\vartheta'$  wordt vervangen. Laten wij op (29), dan zien wij dus, dat, wanneer wij ons buiten een bepaalden afstand van 0 bevinden, de modulus van den tweeden factor van (36), hoe groot  $|r|$  ook is, steeds beneden een eindige waarde, stel  $M$ , blijft. De tweede term in (33), dien wij  $\alpha$  zullen noemen, zal dus, wat de absolute waarde betreft, hoogstens gelijk  $M\eta$  zijn. Voor den eersten vinden wij:

$$f(x_0) [1 - e^{-(r - k_1/2m)\varepsilon}] \cdot r / (r - k_1/2m) = f(x_0) + \beta^1$$

en (32) levert dus:

$$I = f(x_0) + \beta + \alpha + r \int_{x_0 + \varepsilon}^x e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu, \quad (38)$$

$$|\alpha|, |\beta| \leq M\eta.$$

Letten wij weer op (29), dan zien wij in, dat een  $|r_0|$  kan gevonden worden, zóó groot, dat voor  $|r| \geq |r_0|$  de modulus van den laatsten term in het tweede lid van (38) hoogstens gelijk  $M\eta$  is, en dat bovendien:

$$|f(x_0) e^{-(r - k_1/2m)(x - x_0)}| \leq M\eta$$

wordt.

---

<sup>1)</sup> Wordt  $|r|$  slechts groot genoeg genomen, dan kan  $|\beta|$  beneden iedere positieve waarde gebracht, en dus ook kleiner dan  $M\eta$  gemaakt worden.



Dan volgt, dat, voor  $|r| \geq |r_0|$ , het verschil tusschen  $I$  en:

$$f(x_0) [1 - e^{-(r - k_1/2m)(x - x_0)}] \dots \dots (39)$$

in absolute waarde hoogstens  $4 M \eta$  bedraagt.

Er werd aangenomen, dat  $x_0 + \varepsilon < x$  is. Is deze voorwaarde niet vervuld, dan laten wij den tweeden term in (32) eenvoudig weg, en vervangen de bovenste grens in den eerste term door  $x$ . Er komt:

$$I = f(x_0) \int_{x_0}^x r e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} d\mu + \\ + \int_{x_0}^x r [f(\mu) - f(x_0)] e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} d\mu.$$

Als boven bewijzen wij, dat de modulus van de laatste integraal hoogstens gelijk  $M \eta$  is, en voor de eerste komt <sup>1)</sup> (39), zoodat voor de waarden van  $x$ , die wij nu beschouwen, de modulus van het verschil tusschen  $I$  en (39) hoogstens  $2 M \eta$  bedraagt.

Samenvattend kunnen wij zeggen:

De kleine waarden  $\delta$  en  $\zeta$  gegeven zijnde, kan steeds een eindige waarde  $|r_0|$  gevonden worden, zoodat:

$$\left| r \int_{x_0}^x e^{-(r - k_1/2m)(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu - f(x_0) [1 - e^{-(r - k_1/2m)(x - x_0)}] \right| \leq \zeta, (40)$$

$$\text{indien } |r| \geq |r_0|$$

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

en dus:

$$\lim I = f(x_0), \text{ indien } x > x_0 \dots \dots (41)$$

$$= 0 \quad \quad \quad \text{,,} \quad x = x_0 \dots \dots (42)$$

De betrekkingen (41) en (42) volgen onmiddellijk uit

<sup>1)</sup> Op een grootheid na, die, door  $|r|$  groot genoeg te nemen, zoo klein als wij willen, en dus kleiner dan  $M \eta$ , kan gemaakt worden.



PICARD'S behandeling. Nadert  $x$  tot  $x_0$ , dan zal de  $|r|$ , vereischt om  $I$  met een te geven benadering aan  $f(x_0)$  gelijk te maken, onbepaald toenemen. In (40) is deze ongelijkmatigheid door toevoeging van den term  $f(x_0) e^{-(r-k_1/2m)(x-x_0)}$  gecompenseerd. Schrijven wij (40) achtereenvolgens op voor  $f'(u)$  en  $f''(u)$ , en trekken af, dan behoudt de betrekking denzelfden vorm, zoodat zij geldt voor functiën, die *continu* en *à variation limitée* zijn.

Teneinde te laten zien, dat  $I$ , voor alle waarden  $r$  op de imag. as of aan den positieven kant van die as gelegen, eindig blijft, schrijven wij, weer onderstellende, dat  $f(u)$  niet afneemt:

$$I = [f(x) - f(x_0)] \left[ \int_{x_0 + \Im(x-x_0)}^x P d\mu + \int_{x_0 + \Im(x-x_0)}^x i Q d\mu \right].$$

De integralen zijn resp. reëel en imag. gedeelte van uitdrukkingen, van welke men gemakkelijk inziet, dat zij eindig blijven.

§ 10. Het onderzoek naar  $I$  voor het halfvlak links van de imag. as loopt geheel analoog. Het resultaat is:

De kleine waarden  $\delta$  en  $\zeta$  gegeven zijnde, kan steeds een eindige waarde  $|r_1|$  gevonden worden, zoodat:

$$\left| r \cdot e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)} \int_{x_0}^x e^{-(r-k_1/2m)(\mu-x_0)} f(u) d\mu + \right. \\ \left. + f(x) [1 - e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)}] \right| \leq \zeta, \quad (43)$$

indien  $|r| \geq |r_1|$

$$\frac{\pi}{2} + \delta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} = \delta$$

$$x_0 \leq x \leq x_1.$$

Derhalve:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)} \cdot I = -f(x), \text{ indien } x > x_0. \quad (44)$$

$$= 0 \quad \text{„} \quad x = x_0. \quad (45)$$

In (43) wordt ondersteld, dat  $f(x)$  *continu* en *à variation limitée* is. De betrekking (44) geldt ook indien  $f(x)$  discontinuïteiten heeft, mits in het tweede lid  $-f(x-0)$  wordt gelezen. Bij zulk een discontinuïteit, zal echter de  $|r|$  vereischt om de functie in het eerste lid met een gegeven benadering gelijk  $-f(x-0)$  te maken, onbepaald toenemen, evenals dit bij nadering van  $x_0$  het geval is. De betrekking (43) geldt in het geheele interval  $x_0 \leq x \leq x_1$ , maar nu kunnen ook binnen dat interval geen discontinuïteiten toegelaten worden. De ongelijkmatigheid bij de nadering van  $x$  tot  $x_0$  hebben wij opgeheven door toevoeging van den term:

$$-f(x) e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)}.$$

Op en aan den negatieven kant van de imaginaire as blijft:

$$e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)} I$$

steeds eindig.

*Opmerking.* Voor het afleiden van de vergelijking (63) (zie onder) zouden wij met de betrekkingen (41), (42), (44) en (45), kunnen volstaan en (63) zal diensengevolge gelden, zelfs wanneer  $f(x)$  discontinuïteiten heeft. Wij hebben echter (40) en (43) afgeleid om van de reeks (63) nog bovendien de gelijkmatige convergentie in het geheele interval  $x_0 \leq x \leq x_1$  te kunnen aantonen, en deze zal natuurlijk vereischen, dat  $f(x)$  continu is. Bij de afleiding van (43) moet dan ook  $f(x)$  continu ondersteld worden.

§ 11. De uitkomsten van §§ 8, 9 en 10 combineerende, vinden wij het volgende voor:

$$L(x, r, \psi) = r \cdot \frac{v(r-k_1/2m, x)}{\mathfrak{F}(r-k_1/2m)} \int_{x_0}^x e^{-(r-k_1/2m)(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu, \quad (10)$$

alwaar  $r = \rho e^{i\psi}$ .



Er kan een eindig getal  $\nu_0$  bepaald worden, zóódanig, dat, voor  $\nu \geq \nu_0$ ,  $L(x, \nu, \psi)$  minder een te geven grootheid verschilt van:

$$e^{-(x-x_0)k_1/2m} \cdot \varepsilon^{-(m-k)A} \cdot P^{-1} \cdot M_k(r, x-x_0) [1 - e^{-(r-k_1/2m)(x-x_0)}] f(x_0) \quad (46)$$

indien  $k = 0, 1 \dots m-1$ .

en van:

$$\varepsilon^{kB} \cdot Q^{-1} \cdot N_k(r, x_1-x) [1 - e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)}] f(x) \quad (47)$$

indien  $k = m, m+1 \dots 2m-1$ .

Ondersteld wordt, dat voor  $\psi$  geldt:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m} + \delta \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m} - \delta.$$

Zie voor  $M_k$  en  $N_k$  (17) en (21).

Dit geldt voor het geheele interval  $x_0 \leq x \leq x_1$ .

Hoe klein  $\delta$  en het toegelaten verschil ook zijn, steeds zal  $\nu_0$  eindig uitvallen. Op de cirkelbogen, door  $S_k$  (grens-stralen inbegrepen) uit de cirkels  $c_\nu$  gesneden, blijft  $L(x, \nu, \psi)$  eindig.

Wij weten nu van  $L(x, \nu, \psi)$  alles wat wij behoeven om de stelling van § 2 te kunnen toepassen. In de notaties van die paragraaf hebben wij:

$$a. \quad x_0 < x < x_1,$$

$$A_0(x) = A_1(x) = \dots = A_{m-1}(x) = 0,$$

$$A_m(x) = A_{m+1}(x) = \dots = A_{2m-1}(x) = f(x),$$

$$b. \quad A_0(x_0) = A_1(x_0) = \dots = A_{2m-1}(x_0) = 0,$$

$$c. \quad A_0(x_1) = A_1(x_1) = \dots = A_{m-1}(x_1) = 0,$$

$$A_k(x_1) = \varepsilon^{kB} \cdot Q^{-1} \cdot N_k(r, 0) f(x_1),$$

$$k = m, \dots, 2m-1.$$



De stelling levert nu:

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^x e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu = \frac{1}{2} f(x), \dots \dots \dots (48)$$

indien  $x_0 < x < x_1$ ,

$$= 0, \dots \dots \dots (49)$$

indien  $x = x_0$ ,

$$= \frac{f(x_1)}{2mQ} \sum_m^{2m-1} \epsilon^{kB} \cdot N_k(r, 0), (50)$$

indien  $x = x_1$ .

Het tweede lid van (50) kan gemakkelijk vereenvoudigd worden. Wij onderstellen daarbij, dat geen van de getallen  $g_m \dots g_{2m-1}$  nul is. Is dit het geval, dan heeft  $N_k(r, x_1 - x)$  twee gelijke rijen, en vinden wij dus voor genoemd tweede lid nul.

Wij moeten bepalen:

$$\sum_m^{2m-1} \epsilon^{kB} \cdot N_k(r, 0),$$

en vinden daarvoor, wanneer wij bedenken, dat:

$$N_k(r, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon^{g_m(2m-k)} & \dots & \dots & \dots & \epsilon^{g_m(3m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \epsilon^{g_{2m-1}(2m-k)} & \dots & \dots & \dots & \epsilon^{g_{2m-1}(3m-k-1)} \end{vmatrix}$$

is, den volgende determinant:

$$\begin{vmatrix} m & , & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \epsilon^{g_m^m} + \epsilon^{g_m^{(m+1)}} + \dots + \epsilon^{g_m^{(2m-1)}} & , & 1 & \epsilon^{g_m} & \dots & \dots & \epsilon^{g_m^{(m-1)}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \epsilon^{g_{2m-1}^m} \dots \dots \dots + \epsilon^{g_{2m-1}^{(2m-1)}} & , & 1 & \epsilon^{g_{2m-1}} & \dots & \dots & \epsilon^{g_{2m-1}^{(m-1)}} \end{vmatrix}.$$

Tellen wij de laatste  $m$  kolommen bij de eerste op, dan worden van de eerste kolom alle elementen behalve het bovenste nul en wij hebben:

$$\sum_{m=1}^{2m-1} \varepsilon^{k B} N_k(r, 0) = 2m Q.$$

Verg. (50) wordt dus:

$$\oint \frac{v(r, x_1)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu = f(x_1). \quad (51)$$

$$\text{indien } g_m, g_{m+1}, \dots, g_{2m-1} \neq 0,$$

$$,, \quad \quad \quad = 0 \dots \quad (52)$$

$$\text{indien } g_m \dots \text{ of } g_{2m-1} = 0.$$

Is  $g_m \dots$  of  $g_{2m-1}$  nul, dan beteekent dit, dat de oplossing voor  $x = x_1$  nul moet zijn, daar een van de randvoorwaarden dan luidt:

$$z = 0.$$

Dan zal natuurlijk ook  $f(x_1) = 0$  zijn, daar er anders strijd tusschen initiaalvoorwaarden zou zijn.

Gaat men onze afleiding na, dan blijkt, dat *binnen* het interval  $x_0 - x_1$ , de reeks, in welke het residu in (48) ontwikkeld wordt, gelijkmatig convergeert. Wij herinneren er aan, dat wij ondersteld hebben, dat  $f(x)$  continu is. Aan de grenspunten zal deze reeks in het algemeen (wanneer  $f(x)$  daar niet nul is) een discontinue functie voorstellen, en dus niet gelijkmatig kunnen convergeeren. De bepaling van den eersten term in (5) is hiermede afgeloopen.

§ 13. Indien wij voor den tweeden term van (5) den er aan gelijken vorm:

$$\oint \frac{e^{r(x-x_0)} \delta(r) + v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_x^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu \quad (53)$$

in de plaats stellen, kunnen wij hiervoor een onderzoek uitvoeren, dat geheel evenwijdig loopt aan §§ 3—12. Wij zullen het resultaat daarvan hier aangeven. Voor (53) kan, indien :

$$\frac{e^{(r-k_1/2m)(x-x_0)} \mathfrak{F}(r-k_1/2m) + v(r-k_1/2m, x)}{\mathfrak{F}(r-k_1/2m)} \cdot r \int_x^{x_1} e^{(r-k_1/2m)(x_0-\mu)} f(\mu) d\mu = L'(x, v, \psi) \quad (54)$$

gesteld wordt, geschreven worden :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L'(x, v, \psi) d\psi \dots \dots \dots (55)$$

In (54) is weer  $r = \varrho, e^{i\psi}$  ondersteld. Omtrent  $L'(x, v, \psi)$  kan nu het volgende aangetoond worden.

Er is een eindig getal  $v_0$  te vinden, zóódanig dat, indien  $v \geq v_0$  is,  $L'(x, v, \psi)$ , minder dan een te geven grootheid verschilt van :

$$\varepsilon^{-(m-k)A} \cdot P^{-1} [1 - e^{(r-k_1/2m)(x-x_1)}] N'_k(r, x-x_0) \cdot f(x) \quad (56)$$

indien  $k = 0, 1 \dots m-1$ ,

en van :

$$e^{(x_1-x)k_1/2m} \cdot \varepsilon^{kB} \cdot Q^{-1} [1 - e^{-(r-k_1/2m)(x-x_1)}] M'_k(r, x_1-x) f(x_1) \quad (57)$$

indien  $k = m, \dots 2m-1$ .

Ondersteld wordt, dat :

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m} + \delta \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m} - \delta.$$

In (56) is :

$$N'_k(r, x-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & e^{r\varepsilon^{m-k}(x-x_0)} \dots e^{r\varepsilon^{2m-k-1}(x-x_0)} \\ e^{-r(x-x_0)} \varepsilon^{g_0(m-k)} \dots \varepsilon^{g_0(2m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-r(x-x_0)} \varepsilon^{g_{m-1}(m-k)} \dots \varepsilon^{g_{m-k}(2m-k-1)} \end{vmatrix} \quad (58)$$



en in (57):

$$M'_k(r, x_1 - x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{r \varepsilon^{2m-k}(x-x_1)} & \dots & e^{r \varepsilon^{3m-k-1}(x-x_1)} \\ 1 & \varepsilon^{g_m(2m-k)} & \dots & \varepsilon^{g_m(3m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{g_{2m-1}(2m-k)} & \dots & \varepsilon^{g_{2m-1}(3m-k-1)} \end{vmatrix}. \quad (59)$$

Dit geldt voor  $x_0 \leq x \leq x_1$ . Hoe klein  $\delta$  en het tusschen  $L'(x, r, \psi)$  en (56) resp. (57) toegelaten verschil ook zijn, steeds zal  $r_0$  eindig zijn.

Op de cirkelbogen, door  $S_k$  (grensstralen inbegrepen) uit de cirkels  $c_r$  gesneden, blijft  $L'(x, r, \psi)$  eindig.

De stelling van § 2 geeft:

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_x^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu = \frac{1}{2} f(x), \quad \dots \quad (60)$$

indien  $x_0 < x < x_1$ ,

$$\begin{aligned} &= \frac{f(x_0)}{2m} \cdot P^{-1} \cdot \sum_0^{m-1} \varepsilon^{-(m-k)A} \cdot \\ &\cdot N'_k(r, 0) = f(x_0)^1. \end{aligned} \quad (61)$$

indien  $x = x_0$ ,

$$\begin{aligned} &= 0 \quad \dots \quad (62) \\ &\text{indien } x = x_1. \end{aligned}$$

Samenstelling van (48) en (60), (49) en (61), (51) en (62) levert nu het slotresultaat:

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu = f(x). \quad (63)$$

voor  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,

en hiermede is de bepaling van de boven dit hoofdstuk geplaatste functie afgelopen.

<sup>1)</sup> Mocht van de getallen  $g_0 \dots g_{m-1}$  er een nul zijn, dan wordt  $f(x_0) = 0$  ondersteld.

N.B. Ons bewijs onderstelt, dat  $f(x)$  *continu* en *à variation limitée* is maar men ziet gemakkelijk, dat (63) ook geldt, wanneer  $f(x)$  discontinuïteiten heeft, mits in het tweede lid:

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

gelezen wordt. Dit doet echter voor ons niet ter zake.

§ 14. De reeks (63) is verkregen, door samentelling van twee reeksen, die, indien  $f(x)$  continu is, binnen het interval  $x_0 - x_1$  wèl, doch aan de grenzen in het algemeen nièt gelijkmatig convergeeren, omdat hare sommen daar discontinue functiën zijn. Door de optelling heffen deze discontinuïteiten elkaar juist op, waarmede echter allermint de gelijkmatigheid der convergentie bewezen is. Wij zullen laten zien, dat de gelijkmatigheid inderdaad door de sommatie ingetreden is. Wij beginnen met de grens  $x_0$ . Beschouwen wij eerst de reeks (48), wanneer die afgebroken wordt na een eindig aantal termen. Ondersteld wordt, dat slechts de polen binnen den cirkel  $c_r$  zijn meegeteld, hetgeen wij door een accent aan het residu-teeken zullen aangeven:

$$\oint \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^x e^{-r(\mu-x_0)} f(u) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(x, r', \psi) d\psi. \quad (64)$$

Wij zullen:

$$x - x_0 = \xi, \dots \dots \dots (65)$$

stellen en kunnen aannemen, dat voor  $\xi$  geldt:

$$0 \leq \xi \leq \xi_1, \dots \dots \dots (66)$$

waar  $\xi_1$  een kleine waarde heeft. Bezieet men de uitdrukkingen (46) en (47) dan blijkt gemakkelijk, dat  $r'$  steeds zóó groot kan gekozen worden, dat voor het geheele interval (66):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(x_0 + \xi, r', \psi) d\psi, \dots \dots (67)$$

minder dan een te geven kleine verschilt van:

$$\frac{e^{-k_1 \xi / 2m}}{2\pi} \cdot P^{-1} f(x_0) \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m}} \xi^{-(m-k)A} \cdot$$

$$\cdot (1 - e^{-(r-k_1/2m)\xi}) \begin{vmatrix} 0, & e^{r\xi^{m-k} \cdot \xi} \dots e^{r\xi^{2m-k-1} \cdot \xi} \\ 1, & \xi g_0(m-k) \dots \xi g_0(2m-k-1) \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ 1, & \xi g_{m-1}(m-k) \dots \end{vmatrix} d\psi +$$

$$+ \frac{f(x_0 + \xi)}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - e^{(r-k_1/2m)\xi}) d\psi \quad (68)$$

Den eersten term van (68) deelen wij, door splitsing van:

$$1 - e^{-(r-k_1/2m)\xi}$$

in tweeën. Aangezien:

$$\int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m}} \xi^{-(m-k)A} \begin{vmatrix} 0, & e^{r\xi^{m-k} \cdot \xi} \dots e^{r\xi^{2m-k-1} \cdot \xi} \\ 1, & \xi g_0(m-k) \dots \xi g_0(2m-k-1) \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \end{vmatrix} d\psi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}} \begin{vmatrix} 0, & e^{-r\xi} \dots e^{-r\xi^{m-1}} \\ \xi^{-g_0(m-k)}, & 1, \dots \xi g_0(m-1) \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ \xi^{-g_{m-1}(m-k)}, & 1, \dots \xi g_{m-1}(m-1) \end{vmatrix} d\psi,$$



vinden wij voor het eerste deel:

$$\frac{e^{-k_1 \xi / 2m}}{2\pi} P^{-1} f(x_0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0, & e^{-r\xi}, \dots, e^{-r\xi^{m-1}\xi} \\ \xi^{-mg_0} + \dots, & \xi^{-g_0}, & 1, \dots, \xi^{g_0(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^{-mg_{m-1}} + \dots, & \xi^{-g_{m-1}}, & 1, \dots, \xi^{g_{m-1}(m-1)} \end{vmatrix} d\psi =$$

$$= \frac{e^{-k_1 \xi / 2m}}{2\pi} \cdot f(x_0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-r\xi} d\psi. \quad (69)$$

Voor den tweeden term in (68) kunnen wij schrijven:

$$\frac{1}{2} f(x_0 + \xi) - \frac{e^{-k_1 \xi / 2m}}{2\pi} f(x_0 + \xi) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r\xi} d\psi. \quad (70)$$

De integralen in het tweede lid van (69) en in (70) zijn gelijk, en wij kunnen dus, door  $\xi_1$  klein genoeg te nemen, zorgen dat, wanneer  $\xi$  aan (66) voldoet, het verschil tusschen beide leden van (69) en den tweeden term in (70) kleiner dan een te geven grootheid is. Onze slotsom is, dat wij steeds  $r'$  zóó groot en  $\xi_1$  zóó klein (beide eindig) kunnen nemen, dat, voor:

$$x_0 \overline{\leq} x \overline{\leq} x_0 + \xi_1, \quad (71)$$

beide leden van (64) minder dan een willekeurig te geven kleine waarde verschillen met:

$$- \frac{f(x_0)}{2\pi} \cdot P^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m}} e^{-(m-k)\xi} \cdot$$

$$\cdot e^{-r\xi} \begin{vmatrix} 0, & e^{r\xi^{m-k}\xi}, \dots, e^{r\xi^{2m-k-1}\xi} \\ 1, & \xi^{g_0(m-k)}, \dots, \xi^{g_0(2m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1, & \xi^{g_{m-1}(m-k)}, \dots \end{vmatrix} d\psi + \frac{1}{2} f(x). \quad (72)$$

Wij beschouwen vervolgens de reeks (60), wanneer die afgebroken wordt, nadat de polen binnen  $c_{\nu''}$  in aanmerking zijn genomen, hetgeen wij door een accent aan het residu-teeken zullen aangeven:

$$\mathcal{E}'' \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_x^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L'(x, \nu'', \psi) d\psi. \quad (73)$$

Uit de vormen (56) en (57), volgt gemakkelijk, dat  $\nu''$  zoo groot kan genomen worden, dat het tweede lid van (73) minder dan een te geven kleine waarde verschilt met:

$$\frac{f(x)}{2\pi} \cdot P^{-1} \sum_0^{m-1} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m}} \xi^{-(m-k)A} \begin{vmatrix} 1, & e^{r\xi^{m-k}} \cdot \xi & \dots & e^{r\xi^{2m-k-1}} \cdot \xi \\ e^{-r\xi}, & \xi^{g_0(m-k)} & \dots & \xi^{g_0(2m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-r\xi}, & \xi^{g_{m-1}(m-k)} & \dots & \end{vmatrix} d\psi. \quad (74)$$

Hier is ondersteld:

$$x_0 \overline{\leq} x = x_0 + \xi \overline{\leq} x_0 + \xi_1.$$

Splitsen wij den determinant in (74) in twee determinanten resp. met bovenste rijen:

$$1, 0 \dots 0$$

en

$$0, e^{r\xi^{m-k}} \cdot \xi, \dots e^{r\xi^{2m-k-1}} \cdot \xi.$$

De vorm (74) wordt dan in twee deelen gesplitst, waarvan het eerste gelijk is aan  $\frac{1}{2} f(x)$ . Het resultaat is, dat wij  $\nu''$  steeds zoo groot kunnen bepalen, dat voor:

$$x_0 \overline{\leq} x \overline{\leq} x_0 + \xi_1$$

beide leden van (73) minder dan een te geven kleine waarde

verschillen met:

$$\frac{1}{2} f(x) + \frac{f(x)}{2\pi}.$$

$$P^{-1} \sum_0^{m-1} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{(k+1)\pi}{m}} \xi^{-(m-k)} A \begin{vmatrix} 0, & e^{r\xi^{m-k}\xi} & \dots & e^{r\xi^{2m-k-1}\xi} \\ e^{-r\xi}, & \xi^{g_0(m-k)} & \dots & \xi^{g_0(2m-k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-r\xi}, & \xi^{g_{m-1}(m-k)} & \dots & \end{vmatrix} d\psi \quad (75)$$

Wij kunnen  $\xi_1$  zóó klein nemen, dat, wanneer  $x$  aan (71) voldoet, het verschil tusschen den tweeden term in (75) en den eersten term (met positief teeken genomen) in (72), zoo klein is, als wij zelf willen, en vinden nu, wanneer wij de resultaten, voor (64) en (73) verkregen, samenstellen het volgende:

Er kunnen een eindig getal  $r_0$  en een kleine waarde  $\xi_0$  bepaald worden, zóódanig, dat:

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\mathcal{F}(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

minder dan een te geven kleine waarde met:

$$f(x)$$

verschilt, indien het residu slechts in de binnen cirkel  $c_{r_0}$  gelegen polen genomen wordt en voor  $x$  geldt:

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \xi_0.$$

Analoog zullen wij kunnen bewijzen, dat er een getal  $r_1$  en een kleine waarde  $\xi_1$  te vinden zijn, die dezelfde rol spelen voor de grens  $x_1$ . Daar de twee reeksen, uit welke door optelling (63) verkregen is, binnen het interval  $x_0 - x_1$  gelijkmatig convergeeren, is de gelijkmatige convergentie van de



reeks (63) dus voor het geheele interval:

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

thans vastgesteld.

Bij dit bewijs van de gelijkmatige convergentie van (63) is natuurlijk  $f(x)$  continu ondersteld. Aangezien het eerste lid van die betrekking, wanneer  $f(x)$  een discontinuïteit heeft, een daar ter plaatse discontinue functie voorstelt, kan de reeks dan niet gelijkmatig convergeeren. Ook is in deze paragraaf stilzwijgend aangenomen, dat geen van de getallen  $g_0 \dots g_{2m-1}$  nul is. Is dit wel het geval, dan moet de gelijkmatige convergentie anders bewezen worden. Noodig is dan slechts, dat aan de betreffende grens  $f(x)$  nul is. Het bewijs is eenvoudiger, dan het hier voor het algemeenere geval gegevene, en wij zullen het achterwege laten.

## HOOFDSTUK IV.

### Vervorming van de in het vorige Hoofdstuk afgeleide Reeksontwikkeling.

§ 1. Wij hebben bewezen, dat, voor  $x_0 \leq x \leq x_1$ :

$$\mathcal{E} \frac{v(r, x)}{[\mathfrak{F}(r)]} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu = f(x) \quad . \quad . \quad (1)$$

is, en zullen nu de reeks, waarin het totaalresidu in het eerste lid ontwikkeld wordt, in eenvoudiger gedaante brengen, door de polen  $2m$  aan  $2m$  bijeen te nemen. Wij weten, dat, wanneer  $r^{(\nu)}$  een nulpunt van  $\mathfrak{F}(r)$  is, zulks ook het geval is met:

$$r_1(r^{(\nu)}), \dots, r_{2m-1}(r^{(\nu)}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

alwaar  $r_1 \dots r_{2m-1}$  de  $2m - 1$  takken der door:

$$[F(r, 0) - F(\varrho, 0)] : (r - \varrho) = 0$$

bepaalde algebraïsche functie  $\varrho(r)$  voorstellen. Wij beschouwen in het volgende slechts polen  $r^{(\nu)}$ , voor welke de grootheden (2) alle onderling en van  $r^{(\nu)}$  verschillend zijn. Vallen toch twee of meer van de grootheden  $r, r_1 \dots r_{2m-1}$  samen <sup>1)</sup>,

---

<sup>1)</sup> Uit hoofdstuk II volgt, dat dit buiten een eindigen cirkel om 0 niet meer kan voorkomen.

dan zullen in  $\mathfrak{F}(r)$  kolommen gelijk worden. Dit zal echter evenzeer het geval zijn in  $v(r, x)$ , en het residu in zulk een pool zal dus i. h. a. nul zijn. Het is natuurlijk mogelijk, dat de multipliciteit van het nulpunt in  $\mathfrak{F}(r)$  grooter is dan in  $v(r, x)$ , maar wij zullen ons met dit zeer bijzondere geval niet bezighouden. Mocht het bij een toepassing voor een pool  $\gamma$  intreden, dan moet aan onze algemeene uitkomst de term:

$$\mathfrak{E} \frac{v(r, x)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu \quad r = \gamma$$

worden toegevoegd. Wordt dus in het vervolg over meervoudige polen gesproken, dan wordt steeds gedacht, dat twee polen, die, voor willekeurige waarden van de parameters in  $\mathfrak{F}(r)$ , aan de functie  $F(r, 0)$  verschillende waarden geven, voor bijzondere keuze der parameters zijn samengevallen. Hare geconjugeerden (2) vallen dan natuurlijk ook samen, zoodat zulke meervoudige polen toch ook weer  $2m$  aan  $2m$  optreden. Wij weten uit hoofdstuk II, dat ook deze bijzonderheid, n.l. het samenvallen van twee of meer  $2m$ -tallen nulpunten, slechts binnen een eindigen cirkel om 0 kan voorkomen. Wij voegen nu in het totaalresidu (1) telkens  $r^{(v)}$  en de  $2m - 1$  geconjugeerde polen (2) bijeen. In de omgeving van 0 zal deze groepeerings in het algemeen afwijken van de op pag. 43 beschrevene. Wij zagen echter, dat op voldoende afstand van 0 voor  $r_1 \dots r_{2m-1}$  de voorstellingen:

$$r_p + k_1 / 2m = (r + k_1 / 2m) \varepsilon^p + \delta$$

gelden. (Vgl. (12) pag. 22). Hieruit ziet men, dat aldaar beide groepeerings overeenstemmen. Daar het verschil slechts een eindig aantal termen betreft, zal de som der reeks door de wijziging der volgorde geen verandering ondergaan.



Wij kiezen uit elk der  $\infty$  vele  $2m$ -tallen nulpunten van  $\delta(r)$  één nulpunt, onverschillig welk, uit, en zullen de zoo verkregen reeks aanwijzen met:

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_\nu \dots \dots \dots (3)$$

Hierbij wordt er voor gezorgd, dat met het klimmen van den index  $\nu$  de punten  $\alpha$  verder van 0 liggen. De punten (3) voldoen dus aan de volgende voorwaarden:

$$a. \quad F(\alpha_p, 0) \neq F(\alpha_q, 0), \text{ als } p \neq q.$$

$$b. \quad \alpha_p, r_1(\alpha_p) \dots r_{2m-1}(\alpha_p) \text{ zijn alle verschillend.}$$

Wordt ter bekorting tijdelijk:

$$\frac{v(r, x)}{\delta(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu = g(r)$$

gesteld, dan moeten wij beschouwen:

$$\oint_r g(r)_{r=r^{(\nu)}} + \oint_r g(r)_{r=r_1(r^{(\nu)})} + \dots + \oint_r g(r)_{r=r_{2m-1}(r^{(\nu)})}. \quad (4)$$

Wij voeren in het tweede residu in (4) een nieuwe veranderlijke  $z$  in, die met  $r$  samenhangt door de betrekking  $r = r_1(z)$ .

Uit (3) pag. 7 volgt dat:

$$\oint_r g(r)_{r=r_1(r^{(\nu)})} = \oint_z g[r_1(z)] \frac{dr_1(z)}{dz} \Big|_{z=r^{(\nu)}} \quad (5)$$

is. In het tweede lid van deze betrekking vervangen wij de letter  $z$  weer door  $r$ , en vinden zoo, wanneer ter bekorting i. p. v.  $r_1(r)$  geschreven wordt  $r_1$ , voor dat tweede lid:

$$\oint_r g(r_1) \frac{dr_1}{dr} \Big|_{r=r^{(\nu)}}.$$

Behandelen wij de overige residuen op analoge wijze dan krijgt (4) den vorm:

$$\mathcal{E}_r \left[ g(r) + g(r_1) \frac{dr_1}{dr} + \dots g(r_{2m-1}) \frac{dr_{2m-1}}{dr} \right]_{r=r^{(v)}} \quad (6)$$

Substitueeren wij voor  $v(r, x)$  de waarde (2) pag. 42, dan vinden wij <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} g(r) + g(r_1) \frac{dr_1}{dr} + \dots g(r_{2m-1}) \frac{dr_{2m-1}}{dr} = \\ = \frac{1}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f(\mu) d\mu, \dots \quad (7) \end{aligned}$$

alwaar  $\lambda(r, \mu, x)$  den volgenden determinant voorstelt:

---

<sup>1)</sup> Bij de afleiding van (7) behoeven wij slechts te bedenken, dat, bij substitutie van  $r_p$  voor  $r$  de kolommen van  $\mathfrak{F}(r)$  en de laatste  $m$  kolommen van  $v(r, x)$  dezelfde permutatie ondergaan, zoodat wij, daar het slechts om het quotient  $v(r, x) : \mathfrak{F}(r)$  te doen is, deze kolommen op haar plaats kunnen laten.





De som der residuen van:

$$\frac{v(r, x)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-r(\mu - x_0)} f(\mu) d\mu,$$

in de polen:

$$r^{(\nu)}, r_1(r^{(\nu)}) \dots r_{2m-1}(r^{(\nu)}), \dots \dots \dots (9)$$

is dus:

$$\mathcal{E}_r \frac{1}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f(\mu) d\mu_{r=r^{(\nu)}} \dots \dots (10)$$

Uit de afleiding volgt, dat wij in (10) voor  $r^{(\nu)}$  een willekeurige der geconjugeerde polen (9) in de plaats kunnen stellen, en de reeks (1) is dus in den vorm:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{E}_r \frac{1}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f(\mu) d\mu_{r=a_{\nu}} \dots (11)$$

gebracht.

§ 2. In de reeks (11) kunnen de termen, die door enkelvoudige polen worden opgeleverd, door splitsing van  $\lambda(r, \mu, x)$  in twee, resp. slechts van  $\mu$  en  $x$  afhangelijke, factoren, verder herleid worden. Daar buiten een eindigen cirkel alle nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  enkelvoudig zijn, geldt deze herleiding voor alle termen, wier index grooter is dan een zeker eindig getal. Wij zullen voor de ontbinding van  $\lambda(r, \mu, x)$  een eenvoudige algebraïsche eigenschap gebruiken. Is n.l. de determinant:

$$D \equiv \begin{vmatrix} d_{0,0} & \dots & \dots & d_{0,2m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{2m-1,0} & \dots & \dots & d_{2m-1,2m-1} \end{vmatrix} = 0 \dots (12)$$

en wordt met  $D_{p,q}$  de onderdeterminant van  $p+1^{\circ}$  rij en

$q + 1^{\circ}$  kolom in  $D$  aangeduid, dan zal:

$$E \equiv \begin{vmatrix} 0, & y_0 \dots \dots \dots y_{2m-1} \\ x_0, & d_{0,0} \dots \dots \dots d_{0,2m-1} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ x_{2m-1}, & d_{2m-1,0} \dots \dots \dots d_{2m-1,2m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= - D_{q,p}^{-1} [D_{0,p} x_0 - D_{1,p} x_1 \dots - D_{2m-1,p} x_{2m-1}] \cdot$$

$$\cdot [D_{q,0} y_0 - D_{q,1} y_1 \dots - D_{q,2m-1} y_{2m-1}]. \quad (13)$$

zijn. Dit blijkt, indien men bedenkt, dat bij een determinant, welks waarde nul is, de onderlinge verhouding der minoren van de elementen uit een rij resp. kolom, niet afhangt van den index dier rij resp. kolom. In (13) kunnen aan  $p$  en  $q$  alle waarden  $0, 1 \dots 2m - 1$  gegeven worden.

Daar  $\lambda(r, \mu, x)$  slechts beschouwd zal worden voor waarden  $r$ , die  $\mathfrak{F}(r)$  nul maken, kunnen wij (13) voor de ontbinding gebruiken. Splitsen wij te voren de eerste kolom in  $2m$  deelen, dan krijgen wij  $2m$  determinanten, waarvan de  $i + 1^{\circ}$  is:

$$e^{-r_i(\mu - x_0)} \cdot \frac{d r_i}{d r} \begin{vmatrix} 0 & e^{r(x-x_0)} \dots \dots e^{r_{2m-1}(x-x_0)} \\ f_0(r_i) f_0(r) \dots \dots f_0(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e^{ar} f_m(r) \dots \dots e^{ar_{2m-1}} f_m(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (14)$$

De betrekking (13) levert nu, wanneer wij  $p = i$  nemen, voor (14):

$$\frac{dr_i}{dr} \cdot e^{-r_i(\mu - x_0)} \cdot (-1)^{i+1} \cdot A_{q,i}^{-1} \cdot B_i [A_{q,0} e^{r(x-x_0)} - A_{q,1} e^{r_1(x-x_0)} + \dots - A_{q,2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)}], \quad (15)$$

indien  $A_{p,q}$  den onderdeterminant van  $p + 1^e$  rij en  $q + 1^e$  kolom van  $\mathfrak{F}(r)$  aanwijst, en door  $B_i$  een determinant wordt voorgesteld, dien men uit  $\mathfrak{F}(r)$  verkrijgt, door aldaar de onderste helft van de  $i + 1^e$  kolom te schrappen. Stellen wij de aan (15) analoge uitdrukkingen voor de  $2m - 1$  overige determinanten, bij de splitsing van  $\lambda(r, \mu, x)$  ontstaan, op, en sommeeren, dan komt er:

$$\begin{aligned} \lambda(r, \mu, x) = & \left[ A_{q,0} e^{r(x-x_0)} - A_{q,1} e^{r_1(x-x_0)} \dots - A_{q,2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)} \right] \cdot \\ & \cdot \left[ -\frac{B_0}{A_{q,0}} e^{-r(\mu-x_0)} + \frac{B_1}{A_{q,1}} e^{-r_1(\mu-x_0)} \cdot \frac{dr_1}{dr} - \dots + \right. \\ & \left. + \frac{B_{2m-1}}{A_{q,2m-1}} e^{-r_{2m-1}(\mu-x_0)} \frac{dr_{2m-1}}{dr} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

Wij voeren de afkortingen:

$$\varphi(r, x) \equiv A_{q,0} e^{r(x-x_0)} - A_{q,1} e^{r_1(x-x_0)} \dots - A_{q,2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)}, \quad (17)$$

en

$$\begin{aligned} \psi(r, \mu) \equiv & -\frac{B_0}{A_{q,0}} e^{-r(\mu-x_0)} + \frac{B_1}{A_{q,1}} e^{-r_1(\mu-x_0)} \frac{dr_1}{dr} - \dots + \\ & + \frac{B_{2m-1}}{A_{q,2m-1}} e^{-r_{2m-1}(\mu-x_0)} \frac{dr_{2m-1}}{dr}. \quad (18) \end{aligned}$$

in, en schrijven dus voor (16):

$$\lambda(r, \mu, x) = \varphi(r, x) \cdot \psi(r, \mu), \quad \text{indien } \mathfrak{F}(r) = 0, \quad (19)$$

waarmede de ontbinding geschied is. De index  $q$  kan naar willekeur de waarden  $0, 1 \dots 2m - 1$  aannemen. De functiën  $\varphi$ , die daarbij ontstaan, onderscheiden zich, indien  $\mathfrak{F}(r) = 0$  is, door factoren, die alleen van  $r$  afhangen.



Hetzelfde geldt voor  $\psi$ . Het product  $\varphi \cdot \psi$  hangt van  $q$  niet meer af, gelijk behoort.

Is  $\alpha_\nu$  een enkelvoudig nulpunt van  $\mathfrak{F}(r)$ , dan levert dit als bijdrage tot de reeks (11) den term:

$$\frac{1}{\mathfrak{F}'(\alpha_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(\alpha_\nu, \mu, x) f(\mu) d\mu,$$

die, door toepassing van (19) in den vorm:

$$\frac{\varphi(\alpha_\nu, x)}{\mathfrak{F}'(\alpha_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} \psi(\alpha_\nu, \mu) f(\mu) d\mu. \quad . \quad . \quad (20)$$

wordt geschreven. Zijn alle polen enkelvoudig, dan wordt (11) dus:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha_\nu, x)}{\mathfrak{F}'(\alpha_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} \psi(\alpha_\nu, \mu) f(\mu) d\mu. \quad . \quad (21)$$

$$x_0 \overline{\leq} x \overline{\leq} x_1.$$

Zijn er, wat slechts binnen eindigen afstand van 0 kan gebeuren, meervoudige polen, dan moet daarvoor de vorm (10) behouden blijven. In (21) zien wij de ontwikkeling van een willekeurige functie naar functiën  $\varphi(r, x)$ , waarbij de parameter  $r$  de nulpunten  $\alpha$  (3) doorloopt. Wij zullen in de volgende paragrafen  $\varphi(r, x)$  en  $\psi(r, x)$  nader beschouwen en bewijzen, dat:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(\alpha_p, \mu) \cdot \psi(\alpha_q, \mu) d\mu = 0, \quad p \neq q \quad . \quad . \quad (22)$$

$$= \mathfrak{F}'(\alpha_p), \quad p = q \quad . \quad (23)$$

Zijn deze integraal-eigenschappen bewezen, en wordt aangenomen, dat de ontwikkeling in functiën  $\varphi$  mogelijk en term-voor-term integreerbaar is, dan kunnen, met behulp van (22) en (23) de coëfficiënten dus bepaald worden, gelijk dit bij de reeks van FOURIER gebeurt. Natuurlijk is dit geen bewijs voor (21). Het bewijs van die ontwikkeling is gebaseerd op de beschouwingen van de hoofdstukken II en III, die tot betrekking (1) hebben gevoerd, uit welke door

herleiding (21) is gevonden. De volgende berekeningen zijn slechts een verificatie.

Wij zullen in de §§ 3—5 den index  $q$ , die bij de ontbinding van  $\lambda(r, \mu, x)$  nog onbepaald bleef, gelijk 0 stellen. Deze  $q$  is natuurlijk een geheel andere, dan de in (22) en (23) optredende. Dit ter voorkoming van verwarring.

§ 3. Voor het bewijs van (22) en (23) zullen wij eenige voorbereidselen moeten maken. Wij beginnen met betrekkingen af te leiden voor de functiën  $r, r_1 \dots r_{2m-1}$ , die de wortels zijn van, de vergelijking in  $q$ :

$$F(q, 0) - F(r, 0) \equiv [q^{2m} + k_1 q^{2m-1} + \dots + k_{2m-1} q] - [r^{2m} + k_1 r^{2m-1} + \dots + k_{2m-1} r] = 0 \quad (24)$$

Stellen wij:

$$r^p + r_1^p + \dots + r_{2m-1}^p = s_p$$

en duidt het accent differentiatie naar  $r$  aan, dan willen wij het volgende bewijzen:

$$s'_1 = s'_2 = \dots = s'_{2m-1} = 0. \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{s'_{2m}}{2m} &= F'(r, 0) \\ \frac{k_1 s'_{2m}}{2m} + \frac{s'_{2m+1}}{2m+1} &= 0 \\ \frac{k_2 s'_{2m}}{2m} + \frac{k_1 s'_{2m+1}}{2m+1} + \frac{s'_{2m+2}}{2m+2} &= 0 \\ \vdots & \\ \frac{k_{2m-1} s'_{2m}}{2m} + \dots + \frac{s'_{4m-1}}{4m-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Schrijft men voor de grootheden  $s$  de bekende betrekkingen op, (zie b. v. LOBATTO, Hoogere Algebra 5<sup>e</sup> druk, p. 475 en 476), differentieert deze naar  $r$ , bedenkende, dat van de coëfficiënten in (24) alleen de laatste  $r$  bevat, dan blijkt de waarheid van (25) onmiddellijk, en komen voor:

$$s'_{2m}, s'_{2m+1} \dots s'_{4m-1}$$

de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} s'_{2m} &= 2m F'(r, 0) \\ s'_{2m+1} + k_1 s'_{2m} &= s_1 F'(r, 0) \\ \vdots &\vdots \\ s'_{4m-1} + k_1 s'_{4m-2} + \dots + k_{2m-1} s'_{2m} &= s_{2m-1} F'(r, 0) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

De betrekkingen (26) zullen bewezen zijn, indien aangetoond wordt, dat de oplossingen van (26) en (27) overeenstemmen. Schrijft men beide op, dan blijkt gemakkelijk, dat alles neerkomt op de vraag of de volgende determinant:

$$D_p \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -p \\ k_1 & 1 & 0 & \dots & s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_p & k_{p-1} & \dots & k_1 & s_p \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

is,  $p$  kan de waarden  $0, 1 \dots 2m - 1$  hebben, en de grootheden  $s$  uit de laatste kolom voldoen aan de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -k_1 \\ s_2 + k_1 s_1 &= -2k_2 \\ s_3 + k_1 s_2 + k_2 s_1 &= -3k_3 \\ \vdots &\vdots \\ s_p + k_1 s_{p-1} + k_2 s_{p-2} + \dots + k_{p-1} s_1 &= -pk_p \end{aligned} \right\} \quad (29)$$



Wij zullen dit door inductie bewijzen. Men ziet gemakkelijk, dat  $D_{p-1}, D_{p-2}, \dots, D_1$  kunnen geschreven worden als  $p + 1^e$  graads-determinanten, wier eerste  $p$  kolommen met de eerste  $p$  kolommen van  $D_p$  overeenstemmen, en die resp. tot laatste kolom hebben:

$$\begin{array}{ccc}
 0, & 0, & 0. \\
 -(p-1), & 0, & 0. \\
 s_1, & -(p-2), & \vdots \\
 s_2, & s_1, & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & -1. \\
 s_{p-1}, & s_{p-2}, & s_1.
 \end{array}$$

Hieruit volgt, dat:

$$D_p + k_1 D_{p-1} + k_2 D_{p-2} + \dots + k_{p-1} D_1 \dots \quad (30)$$

in den vorm van een dergelijken  $p + 1^e$  graads-determinant met laatste kolom:

$$\begin{array}{l}
 -p \\
 s_1 - (p-1) k_1 \\
 s_2 + k_1 s_1 - (p-2) k_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 s_{p-1} + k_1 s_{p-2} \dots \dots - k_{p-1} \\
 s_p + k_1 s_{p-1} \dots \dots + k_{p-1} s_1
 \end{array}$$

kan gebracht worden. Met behulp van (29) wordt deze

kolom vereenvoudigd tot:

$$\begin{aligned} & -p, \\ & -p k_1, \\ & -p k_2, \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & -p k_p, \end{aligned}$$

zoodat in den determinant, die (30) voorstelt, de elementen van eerste en laatste kolom aan elkaar evenredig zijn. Deze determinant is dus nul en wij hebben:

$$D_p + k_1 D_{p-1} + \dots + k_{p-1} D = 0.$$

Aangezien nu:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k_1 & s_1 \end{vmatrix} = s_1 + k_1 = 0$$

is, kunnen wij achtereenvolgens besluiten:

$$D_2, D_3 \dots D_p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Hiermede is (28) bewezen, en tevens het bewijs van de betrekkingen (26) voltooid.

§ 4. Vervolgens moeten wij, nog steeds als voorbereiding tot de behandeling van (22) en (23):

$$\psi(r, x), D_x \psi(r, x) \dots D_x^{2m-1} \psi(r, x). \quad (32)$$

voor  $x = x_0$  en  $x = x_1$  beschouwen. Wij hebben, daar  $q = 0$  genomen wordt:

$$\begin{aligned} \psi(r, x) = & -\frac{B_0}{A_{0,0}} e^{-r(x-x_0)} + \frac{B_1}{A_{0,1}} e^{-r_1(x-x_0)} \frac{d r_1}{d r} \dots \\ & \dots + \frac{B_{2m-1}}{A_{0,2m-1}} e^{-r_{2m-1}(x-x_0)} \frac{d r_{2m-1}}{d r} \dots \quad (33) \end{aligned}$$

$B_p$  ontstaat uit  $\mathfrak{F}(r)$  door schrappen van de onderste helft der  $p + 1^{\circ}$  kolom en  $A_{p,q}$  is de onderdeterminant in  $\mathfrak{F}(r)$  van  $p + 1^{\circ}$  rij en  $q + 1^{\circ}$  kolom. Derhalve is:

$$B_p = (-1)^p [f_0(r_p) \cdot A_{0,p} - f_1(r_p) \cdot A_{1,p} \dots \dots + (-1)^{m-1} f_{m-1}(r_p) \cdot A_{m-1,p}]. \quad (34)$$

Wij willen nu (32) slechts beschouwen voor de waarden  $r$ , die wortels zijn van  $\mathfrak{F}(r) = 0$  en voor alle  $p, q, s$  en  $t$  is derhalve:

$$A_{p,q} : A_{p,s} = A_{t,q} : A_{t,s} \dots \dots \dots (35)$$

Substitueeren wij de uitdrukkingen (34) in (33) dan komt:

$$\begin{aligned} \psi(r, x) = & -f_0(r) e^{-r(x-x_0)} - f_0(r_1) \cdot e^{-r_1(x-x_0)} \frac{dr_1}{dr} \dots \\ & \dots - f_0(r_{2m-1}) e^{-r_{2m-1}(x-x_0)} \frac{dr_{2m-1}}{dr} + \\ & + \frac{A_{1,0}}{A_{0,0}} f_1(r) e^{-r(x-x_0)} + \frac{A_{1,1}}{A_{0,1}} f_1(r_1) e^{-r_1(x-x_0)} \frac{dr_1}{dr} + \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

waarvoor wij op grond van (35) kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} \psi(r, x) = & - \left[ f_0(r) e^{-r(x-x_0)} + \dots + f_0(r_{2m-1}) e^{-r_{2m-1}(x-x_0)} \frac{dr_{2m-1}}{dr} \right] + \\ & + \frac{A_{1,0}}{A_{0,0}} \left[ f_1(r) \cdot e^{-r(x-x_0)} + \dots \right] + \\ & \dots \dots \dots \\ & (-1)^m \frac{A_{m-1,0}}{A_{0,0}} \left[ f_{m-1}(r) e^{-r(x-x_0)} + \dots \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

Wij zullen  $f_0, \dots, f_{2m-1}$  alle van den graad  $2m - 1$  onderstellen. In de vorige hoofdstukken hebben wij weliswaar aangenomen, dat  $g_0, \dots, g_{m-1}$  en  $g_m, \dots, g_{2m-1}$  onderling verschillend zijn, doch dit beteekent slechts, dat eenige coëfficiënten in de functiën  $f$  nul worden gedacht. De volgende afleidingen gelden voor alle waarden van deze coëfficiënten, en omvatten





in het vervolg  $C_p$ , dan volgt uit (38):

$$A_{0,0} \cdot \psi(r, x) = -C_0 \sum_0^{2m-1} r_p^{2m-1} e^{-r_p(x-x_0)} \frac{dr_p}{dr} - \\ - C_1 \sum_0^{2m-1} r_p^{2m-2} e^{-r_p(x-x_0)} \frac{dr_p}{dr} - \dots - C_{2m-1} \sum_0^{2m-1} e^{-r_p(x-x_0)} \frac{dr_p}{dr}. \quad (39)$$

Bedenken wij nu, dat:

$$\sum_{p=0}^{2m-1} r_p^q \frac{dr_p}{dr} = \frac{s'_q + 1}{q + 1}$$

is en letten wij op (25), dan leiden wij, voor  $x = x_0$ , uit (39) af:

$$\left. \begin{aligned} A_{0,0} \psi(r, x_0) &= -C_0 \frac{s'_{2m}}{2m} \\ - A_{0,0} D_x \psi(r, x) \Big|_{x=x_0} &= -C_0 \frac{s'_{2m+1}}{2m+1} - C_1 \frac{s'_{2m}}{2m} \\ &\vdots \\ (-1)^{2m-1} A_{0,0} D_x^{2m-1} \psi(r, x) \Big|_{x=x_0} &= -C_0 \frac{s'_{4m-1}}{4m-1} - C_1 \frac{s'_{4m-2}}{4m-2} - \\ &\dots - C_{2m-1} \frac{s'_{2m}}{2m} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Wij zullen, voor het te leveren bewijs van (22) en (23), niet de eerste leden van (40), doch de volgende lineaire functiën daarvan, noodig hebben:

$$\begin{aligned} &A_{0,0} \psi(r, x), \\ &A_{0,0} [k_1 \psi(r, x) - D_x \psi(r, x)], \\ &A_{0,0} [k_1 \psi(r, x) - k_1 D_x \psi(r, x) + D_x^2 \psi(r, x)], \\ &\dots \\ &\dots \\ &A_{0,0} [k_{2m-1} \psi(r, x) - k_{2m-2} D_x \psi(r, x) \dots - D_x^{2m-1} \psi(r, x)], \end{aligned}$$

alles voor  $x = x_0$ . Substitutie van (40) in deze uitdrukkingen voert, wanneer men van de *voor dit doel afgeleide* betrekkingen (26) gebruik maakt, tot het resultaat:

$$\left. \begin{aligned} A_{0,0} \psi(r, x) &= -C_0 F'(r, 0) \\ A_{0,0} [k_1 \psi(r, x) - D_x \psi(r, x)] &= -C_1 F'(r, 0) \\ &\vdots \\ A_{0,0} [k_{2m-1} \psi(r, x) - k_{2m-2} D_x \psi(r, x) \dots - D_x^{2m-1} \psi(r, x)] &= \\ &= -C_{2m-1} F'(r, 0) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

voor  $x = x_0$ .

Ten einde de waarden van de eerste leden van (41) voor  $x = x_1$  te verkrijgen, vervangen wij in (33), ons punt van uitgang, de functiën:

$$B_0 \dots B_{2m-1},$$

resp. door:

$$B_0 - \mathfrak{F}(r), \dots B_{2m-1} - \mathfrak{F}(r),$$

deze laatste zijn dus determinanten, die uit  $\mathfrak{F}(r)$  worden afgeleid door de bovenste helft van een kolom te schrappen en de onderste van teeken om te keeren. Wij kunnen het onderzoek van deze § op dezelfde wijze voor den nieuwen vorm van  $\psi(r, x)$  uitvoeren, en vermelden slechts de uitkomst.

Wordt onder  $D_p$  de determinant verstaan, die uit  $\mathfrak{F}(r)$  wordt afgeleid, wanneer de eerste kolom vervangen wordt door de kolom:

$$\begin{aligned} &0 \\ &0 \\ &\vdots \\ &0 \\ &a_{m,p} \\ &a_{m+1,p} \\ &\vdots \\ &a_{2m-1,p} \end{aligned}$$





de afgeleide is van:

$\psi \cdot D_x^{n-1} \varphi - D_x \psi \cdot D_x^{n-2} \varphi + \dots (-1)^{n-1} \varphi \cdot D_x^{n-1} \psi$ ,  
dan blijkt het eerste lid van (43) de afgeleide naar  $x$  van:

$$\psi \cdot D_x^{2m-1} \varphi + (k_1 \psi - D_x \psi) D_x^{2m-2} \varphi + \dots \\ \dots + (k_{2m-1} \psi - k_{2m-2} D_x \psi + \dots - D_x^{2m-1} \psi) \varphi, \quad (44)$$

zoodat integratie van (43) naar  $x$  tusschen de grenzen  $x_0$  en  $x_1$  voert tot:

$$[F(\varrho, 0) - F(r, 0)] \int_{x_0}^{x_1} \varphi \cdot \psi dx = \left| \psi D_x^{2m-1} \varphi + \right. \\ \left. + (k_1 \psi - D_x \psi) D_x^{2m-2} \varphi + \dots + (k_{2m-1} \psi - \dots - D_x^{2m-1} \psi) \varphi \right|_{x_0}^{x_1}. \quad (45)$$

Wij denken voor  $r$  een wortel  $\alpha_q$  van  $\mathfrak{F}(r) = 0$  gesubstitueerd,  $\varrho$  blijft nog onbepaald. Het tweede lid van (45) kan door toepassing van onze formules (41) en (42) herleid worden tot:

$$\frac{F'(\alpha_q, 0)}{A_{0,0}} \left[ D_0 \cdot D_x^{2m-1} \varphi + D_1 \cdot D_x^{2m-2} \varphi + \dots D_{2m-1} \cdot \varphi \right]_{x=x_1} + \\ + \frac{F'(\alpha_q, 0)}{A_{0,0}} \left[ C_0 \cdot D_x^{2m-1} \varphi + C_1 \cdot D_x^{2m-2} \varphi + \dots C_{2m-1} \cdot \varphi \right]_{x=x_0}. \quad (46)$$

In  $A_{0,0}$ ,  $C_p$  en  $D_p$  moet voor  $r$  de waarde  $\alpha_q$  gesteld worden. Uit de definitie van de determinanten  $C_p$  en  $D_p$  volgt, dat (46) in den vorm:

$$\frac{F'(\alpha_q, 0)}{A_{0,0}} \begin{vmatrix} f_0(D_x) \varphi, & f_0(r_1) \dots \dots \dots f_0(r_{2m-1}) \\ \vdots & \\ f_{m-1}(D_x) \varphi, & f_{m-1}(r_1) \dots \dots \dots f_{m-1}(r_{2m-1}) \\ f_m(D_x) \varphi, & e^{a r_1} f_m(r_1) \dots \dots e^{a r_{2m-1}} f_m(r_{2m-1}) \\ \vdots & \\ f_{2m-1}(D_x) \varphi, & e^{a r_1} f_{2m-1}(r_1) \dots \dots e^{a r_{2m-1}} f_{2m-1}(r_{2m-1}) \end{vmatrix} \quad (47)$$



kan geschreven worden. Voor  $r$  moet in den determinant in (47)  $\alpha_q$ , en in de bovenste resp. onderste helft van de eerste kolom voor  $x$  de waarden  $x_0$  resp.  $x_1$  gesteld worden. Uit den vorm van  $q$  (17) volgt <sup>1)</sup>, dat, onafhankelijk van de waarde van  $q$ , het bovenste element van de eerste kolom gelijk is aan  $\mathfrak{F}(q)$  en de overige elementen van die kolom nul zijn. De determinant is dus gelijk aan  $A_{0,0} \cdot \mathfrak{F}(q)$ , en (47) is derhalve herleid tot:

$$[F(q, 0) - F(\alpha_q, 0)] \int_{x_0}^{x_1} q(q, x) \cdot \psi(\alpha_q, x) dx = F'(\alpha_q, 0) \cdot \mathfrak{F}(q). \quad (48)$$

Stellen wij hierin  $q = \alpha_p$ , en zij  $p \neq q$ , dan is, op grond van de beteekenis der  $\alpha$ 's (zie (3)), de eerste factor van het eerste lid niet nul. Het tweede lid is nul, daar  $\alpha_p$  een wortel van  $\mathfrak{F}(r) = 0$  is, en wij besluiten:

$$\int_{x_0}^{x_1} q(\alpha_p, x) \psi(\alpha_q, x) dx = 0. \quad \dots \quad (22)$$

indien  $p \neq q$ .

Om (23) te bewijzen differentieeren wij (48) naar  $q$ , en stellen na afloop  $q = \alpha_q = \alpha_p$ . Er komt dan:

$$\int_{x_0}^{x_1} q(\alpha_p, x) \cdot \psi(\alpha_p, x) dx = \mathfrak{F}'(\alpha_p) \quad \dots \quad (23)$$

Onze taak is hiermede volbracht.

§ 6. Met behulp van (41) en (42), die wij voor het bewijs van de integraalstellingen (22) en (23) hebben afgeleid, kan  $\psi(r, x)$  en daarmee de reeksontwikkeling (21) in een bijzonder geval aanmerkelijk vereenvoudigd worden. Ten einde ons resultaat met een formule uit de verhandeling van CAUCHY te kunnen vergelijken, zullen wij den index  $q$ , die in de functiën  $q(r, x)$  (17) en  $\psi(r, \mu)$  (18) nog willekeurig was en in de §§ 3—5 de waarde 0 had, thans gelijk  $2m - 1$  nemen.

<sup>1)</sup> Wij herinneren er aan, dat  $q$  gelijk nul is gesteld.



Het bijzondere geval, dat wij gaan behandelen onderstelt, dat de orden der randvoorwaarden alle lager dan  $m$  zijn, wij kunnen dus aannemen:

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = g_m = 0 \\ g_1 = g_{m+1} = 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{m-1} = g_{2m-1} = m-1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

Onze functie  $\mathfrak{F}(r)$  kan, door geschikte onderlinge aftrekking van rijen dan steeds in den vorm:

$$\mathfrak{F}(r) = \left| \begin{array}{ll} 1, & 1, \dots \dots \dots 1 \\ r, & r_1, \dots \dots \dots r_{2m-1} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ r^{m-1}, & r_1^{m-1}, \dots \dots \dots r_{2m-1}^{m-1} \\ e^{ar}, & e^{ar_1}, \dots \dots \dots e^{ar_{2m-1}} \\ r e^{ar}, & r_1 e^{ar_1}, \dots \dots \dots r_{2m-1} e^{ar_{2m-1}} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ r^{m-1} \cdot e^{ar}, & r_1^{m-1} e^{ar_1}, \dots \dots \dots r_{2m-1}^{m-1} \cdot e^{ar_{2m-1}} \end{array} \right| \quad (50)$$

gebracht worden. Voor  $\varphi(r, x)$  hebben wij:

$$\varphi(r, x) = A_{2m-1,0} \cdot e^{r(x-x_0)} - \dots - A_{2m-1,2m-1} \cdot e^{r_{2m-1}(x-x_0)} \quad (51)$$

en deze wordt dus uit  $\mathfrak{F}(r)$  verkregen, wanneer de laatste rij wordt vervangen door:

$$e^{r(x-x_0)} \dots \dots e^{r_{2m-1}(x-x_0)}$$

en het voorteecken wordt omgekeerd.

De met coëfficiënten van de functies (37) gevormde kolom:

$$a_{0,p}, a_{1,p}, \dots a_{m-1,p}, 0, 0, \dots 0,$$

die wij, om  $C_p$  te verkrijgen, in de plaats van de eerste kolom van  $\mathfrak{F}(r)$  moesten stellen, bestaat, wegens de onderstellingen (49), voor  $p = 0, 1 \dots m-1$  uit louter nullen, terwijl voor  $p = m$  slechts het  $m^{\text{e}}$  element  $a_{m-1,m}$  van nul verschilt. Zonder beperking mag  $a_{m-1,m} = 1$  worden genomen.  $C_0, C_1 \dots C_{m-1}$  zullen dus nul zijn en  $C_m$  wordt  $(-1)^{m-1} \cdot A_{m-1,0}$ . Analoog blijkt, dat  $D_0 \dots D_{m-1} = 0$  en  $D_m = (-1)^{2m-1} \cdot A_{2m-1,0}$  zijn. Uit (41) volgt nu, indien aldaar  $q = 2m-1$  (zie N.B. op pag. 86) gesteld wordt:

$$\psi(r, x), D_x \psi(r, x) \dots D_x^{m-1} \psi(r, x) = 0 \quad (51)$$

$$A_{2m-1,0} \cdot D_x^m \psi(r, x) = A_{m-1,0} \cdot F'(r, 0) \quad (52)$$

voor  $x = x_0$ ,

en analoog uit (42):

$$\psi(r, x), D_x \psi(r, x), \dots D_x^{m-1} \psi(r, x) = 0 \quad (53)$$

$$D_x^m \psi(r, x) = (-1)^{m-1} \cdot F'(r, 0) \quad (54)$$

voor  $x = x_1$ .

Wij zien in (18), dat  $\psi(r, x)$  een lineaire functie van:

$$e^{-r(x-x_0)}, e^{-r_1(x-x_0)} \dots e^{-r_{2m-1}(x-x_0)}$$

is, en stellen:

$$\psi(r, x) = V_0 \cdot e^{-r(x-x_0)} + V_1 e^{-r_1(x-x_0)} + \dots$$

$$+ V_{2m-1} e^{-r_{2m-1}(x-x_0)} \dots \quad (55)$$

De eerste  $m-1$  betrekkingen (51), (53) en (54) geven voor de  $V$ 's de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
 &V_0 + \dots + V_{2m-1} = 0 \\
 &\vdots \\
 &r^{m-2} V_0 + \dots + r_{2m-1}^{m-2} V_{2m-1} = 0 \\
 &e^{-r^a} V_0 + \dots + e^{-r_{2m-1}^a} V_{2m-1} = 0 \\
 &\vdots \\
 &r^{m-1} e^{-r^a} V_0 + \dots + r_{2m-1}^{m-1} e^{-r_{2m-1}^a} V_{2m-1} = 0 \\
 &r^m \cdot e^{-r^a} V_0 + \dots + r_{2m-1}^m e^{-r_{2m-1}^a} V_{2m-1} = -F'(r, 0)
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Uit (55) en (56) kunnen de  $V$ 's geëlimineerd worden. De eliminant is, na vermenigvuldiging van kolommen met  $e^{r^a} \dots e^{r_{2m-1}^a}$ :

$$\begin{vmatrix}
 \psi(r, x), & e^{r(x_1-x)}, & \dots & e^{r_{2m-1}(x_1-x)} \\
 0, & e^{r^a}, & \dots & e^{r_{2m-1}^a} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0, & r^{m-2} e^{r^a}, & \dots & r_{2m-1}^{m-2} e^{r_{2m-1}^a} \\
 0, & 1, & & 1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0, & r^{m-1}, & \dots & r_{2m-1}^{m-1} \\
 -F'(r, 0), & r^m, & \dots & r_{2m-1}^m
 \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

of:

$$\begin{aligned}
 &\psi(r, x) = -F'(r, 0) \times \\
 &\times \frac{A_{2m-1,0} e^{r(x_1-x)} - A_{2m-1,1} e^{r_1(x_1-x)} + \dots - A_{2m-1,2m-1} e^{r_{2m-1}(x_1-x)}}{A_{2m-1,0} r^m - A_{2m-1,1} r_1^m + \dots - A_{2m-1,2m-1} r_{2m-1}^m}, \quad (58)
 \end{aligned}$$



indien door de  $A$ 's weer onderdeterminanten van  $\delta(r)$  worden aangeduid.

De functie  $\varphi(r, x)$  (17) luidt, aangezien  $q = 2m - 1$  is genomen:

$$\varphi(r, x) = A_{2m-1, 0} e^{r(x-x_0)} - A_{2m-1, 1} e^{r_1(x-x_0)} - \dots - A_{2m-1, 2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)} \quad (59)$$

Substitueert men deze vormen voor  $\varphi(r, x)$  en  $\psi(r, x)$  in de reeks:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha_{\nu}, x)}{\delta'(\alpha_{\nu})} \int_{x_0}^{x_1} \psi(\alpha_{\nu}, \mu) f(\mu) d\mu, \quad (21)$$

dan blijkt de overeenstemming met formule 159 op pag. 31 der verhandeling gemakkelijk.

Een bijzonder eenvoudig resultaat wordt voor  $\psi(r, x)$  verkregen, wanneer de functie  $F(r, s)$  slechts even machten van  $r$  bevat en bovendien de onderstellingen (49) gelden. De functiën  $r, r_1, \dots, r_{2m-1}$  zijn dan paarsgewijze gelijk op het teeken na en wij kunnen stellen:

$$\psi(r, x) = V_0 e^{r(x-x_0)} + V_1 e^{r_1(x-x_0)} + \dots + V_{2m-1} e^{r_{2m-1}(x-x_0)}. \quad (60)$$

Uit (51), de eerste  $m - 1$  betrekkingen (53) en (54) volgt dan, dat de  $V$ 's moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} V_0 + V_1 + \dots + V_{2m-1} &= 0 \\ \vdots \\ r^{m-1} V_0 + r_1^{m-1} V_1 + \dots + r_{2m-1}^{m-1} V_{2m-1} &= 0 \\ e^{ar} V_0 + e^{ar_1} V_1 + \dots + e^{ar_{2m-1}} V_{2m-1} &= 0 \\ \vdots \\ r^{m-2} e^{ar} V_0 + r_1^{m-2} e^{ar_1} V_1 + \dots + r_{2m-1}^{m-2} e^{ar_{2m-1}} V_{2m-1} &= 0 \\ r^m e^{ar} V_0 + r_1^m e^{ar_1} V_1 + \dots + r_{2m-1}^m e^{ar_{2m-1}} V_{2m-1} &= \\ &= (-1)^{m-1} F'(r, 0) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Eliminatie van de  $V$ 's uit (60) en (61) levert:

$$\begin{aligned} \psi(r, x) & [-r^m e^{ar} \cdot A_{2m-1,0} \dots + r_{2m-1}^m e^{ar_{2m-1}} \cdot A_{2m-1,2m-1}] = \\ & = (-1)^m \cdot F'(r, 0) [e^{r(x-x_0)} \cdot A_{2m-1,0} - \dots - \\ & \quad - e^{r_{2m-1}(x-x_0)} A_{2m-1,2m-1}] \dots \quad (62) \end{aligned}$$

Het tweede lid van (62) is gelijk aan:

$$(-1)^m \cdot F'(r, 0) \cdot \varphi(r, x)$$

en wij vinden dus voor  $\psi(r, x)$  het product van  $\varphi(r, x)$  met een functie van  $r$ . De reeks (21) verkrijgt in dit bijzonder geval de gedaante:

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot F'(r, 0) \cdot \varphi(r, x)}{\delta'(r)}.$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(r, \mu) f(\mu) d\mu$$

$$\cdot \frac{-r^m e^{ar} A_{2m-1,0} + \dots + r_{2m-1}^m e^{ar_{2m-1}} \cdot A_{2m-1,2m-1}}{r = r_v}, \quad (63)$$

welke betrekking met (165) pag. 31 van de verhandeling overeenstemt, op den factor  $(-1)^m$  na, die is uitgevallen, doch ook volgens de afleiding d. t. p. blijkt te moeten optreden.

CAUCHY behandelt de gevallen van deze paragraaf afzonderlijk. Zijne afleiding komt op het volgende neer. Hij neemt stilzwijgend aan, dat de ontwikkeling mogelijk en term-voor-term integreerbaar is en bewijst slechts, dat voor de functiën  $\varphi(r, x)$  (59) en  $\psi(r, x)$  (58) resp. (62) de integraal-stellingen (22) en (23) gelden. Dit laatste toont hij aan op pag. 24 en 30 der verhandeling, waar hij tevens tot opstelling van de functie  $\psi(r, x)$  geraakt. De ontwikkelingen aldaar zijn ons bij het bewijs in § 5 te pas gekomen. Natuurlijk worden op deze wijze zijne formules (159) en (165) niet bewezen, slechts geverifieerd. Na behandeling van de bijzondere gevallen wendt hij zich op pag. 36 tot het algemeene vraagstuk en leidt langs een weg, dien

wij in de voorgaande hoofdstukken hebben getracht te effenen, zijne formule (199) af. Deze stemt geheel overeen met (1) pag. 69. Een poging om de vroegere uitkomsten uit zijne algemeene formule af te leiden, doet hij niet. De wensch om de overeenstemming aan te toonen leidde ons tot de vervorming, die wij in dit hoofdstuk de reeks (1) deden ondergaan, waarbij als resultaat, voor het geval, dat alle polen enkelvoudig zijn, (21) gevonden werd. Met behulp van (41) en (42), afgeleid voor de verificatie van (21), gelukte het de functie  $\psi(r, x)$ , in de bijzondere gevallen van deze paragraaf te herleiden tot (58) en (62). CAUCHY'S formules (159) en (165) zijn hiermede uit zijn algemeene formule (199) afgeleid, en nu eerst *bewezen*. Zij gelden echter slechts, wanneer alle nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  enkelvoudig zijn.



## HOOFDSTUK V.

### Samenvatting van de Resultaten en Toepassing op een bijzonder Geval van het Vraagstuk der trillende Staven.

§ 1. Wij hebben nu de volgende resultaten verkregen.  
In hoofdstuk I werd bewezen, dat:

$$z = \sum_r \frac{v(r, x) \cdot u(r, t)}{[\delta(r)]}, \dots \dots \dots (1)$$

alwaar:

$$u(r, t) = \sum_s \frac{[q_0(s) \omega_0(r) + \dots q_{n-1}(s) \cdot \omega_{n-1}(r)] e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]}, \quad (2)$$

aan de partieele differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden ((1), (2), (3) pag. 8) voldoet en dat, voor  $t = t_0$ :

$$D_t^p z = \sum_r \frac{v(r, x) \cdot \omega_p(r)}{[\delta(r)]} \dots \dots \dots (3)$$

$$p = 0, 1 \dots n - 1.$$

is, mits, na afspraak over de volgorde der polen, de reeks:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_r \frac{v(r, x) \cdot u(r, t)}{\delta(r)}_{r=r^{(\nu)}} \dots \dots \dots (4)$$

convergeert en term-voor-term naar  $x$  en  $t$  mag worden

gedifferentieerd, zoovele malen en voor zoodanige waarden der veranderlijken, als ter verificatie van differentiaal-vergelijking, rand- en initiaalvoorwaarden noodig is.

Voor de functiën  $q$  in (2) hadden wij:

$$\left. \begin{aligned} q_0(s) &= l_0 s^{n-1} + l_1 s^{n-2} + \dots + l_{n-1} \\ q_1(s) &= l_0 s^{n-2} + \dots + l_{n-2} \\ &\vdots \\ q_{n-2}(s) &= l_0 s + l_1 \\ q_{n-1}(s) &= l_0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Voldoet de reeks (4) niet aan de vermelde voorwaarde, dan moet in (1) en (3) niet het totaalresidu doch slechts het residu in een eindig aantal polen genomen worden.

In de hoofdstukken II en III is verder aangetoond, dat, indien voor  $\omega_p(r)$  de functie:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_p(u) e^{-r(\mu-x_0)} d\mu \dots \dots \dots (6)$$

en voor de eerste kolom van  $v(r, x)$ :

$$-f_0(r), -f_1(r), \dots -f_{n-1}(r), 0, 0, \dots 0, \dots (7)$$

gekozen wordt, (3) het volgende levert:

$$D_t^p z \Big|_{t=t_0} = \mathcal{E}_r \frac{v(r, x)}{[\delta(r)]} \int_{x_0}^{x_1} f_p(u) \cdot e^{-r(\mu-x_0)} d\mu = f_p(x) \dots (8)$$

$$x_0 \leq x \leq x_1.$$

$$p = 0, 1 \dots n-1.$$

De functiën  $f_p(x)$  worden *continu* en *à variation limitée* ondersteld. Voor  $v(r, x)$  in (8) geldt:

$$v(r, x) = \begin{vmatrix} 0, & e^{r(x-x_0)} & \dots & e^{r_{2m-1}(x-x_0)} \\ f_0(r), & f_0(r) & \dots & f_0(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & e^{a r} f_m(r) & \dots & e^{a r_{2m-1}} f_m(r_{2m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (9)$$

De volgorde, in welke de polen in (8) moeten genomen worden, is op pag. 43 beschreven. Natuurlijk mag voor een *eindig* aantal polen van deze volgorde worden afgeweken. De reeks in het tweede lid van (8) convergeert gelijkmatig t. o. v.  $x$ , in het geheele integratie-interval, de grenzen inbegrepen. Slechts is aangenomen, dat, indien van een der functiën  $f_0 \dots f_{m-1}$  resp.  $f_m \dots f_{2m-1}$  de graad nul is, de functiën  $f_0 \dots f_{m-1}$  uit de initiaalvoorwaarden voor  $x = x_0$  resp.  $x = x_1$  nul worden. Was hier niet voor gezorgd, dan zouden rand- en initiaalvoorwaarden trouwens met elkander in strijd zijn.

Wij hebben derhalve in (1) een oplossing van ons probleem, mits de reeks (4), wanneer voor  $v(r, x)$  en  $\omega_p(r)$  de uitdrukkingen (9) en (6) worden gesubstitueerd, aan de genoemde voorwaarden voldoet. Splitsen wij de functie  $u(r, t)$  in  $n$  deelen, dan verschijnt (1) als som van  $n$  termen:

$$z = \sum_{p=0}^{n-1} \int_r \frac{v(r, x) u_p(r, t)}{[\delta(r)]} \dots \quad (10)$$

alwaar:

$$u_p(r, t) = \int_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \int_{x_0}^{x_1} f_p(\mu) e^{-r(\mu-x_0)} d\mu. \quad (11)$$



In (10) en (11) vinden wij dus als oplossing een aggregaat van  $n$  functiën van  $x$  en  $t$ , die elk afzonderlijk aan differentiaalvergelijking en randvoorwaarden voldoen. De eerste van deze functiën heeft, voor  $t = t_0$  en  $x_0 \leq x \leq x_1$ , de waarde  $f_0(x)$ , hare afgeleiden naar  $t$  tot en met de  $n - 1^e$  zijn voor deze waarden der veranderlijke nul. De tweede is zelve met hare afgeleiden naar  $t$  van de orden  $2, 3 \dots n - 1$ , nul, en heeft tot eerste afgeleide  $f_1(x)$ , weer voor dezelfde waarden  $x$  en  $t$ . Analoog voor de overige termen, wier som derhalve aan het geheel der initiaalvoorwaarden voldoet.

Is de voorwaarde omtrent convergentie en differentieerbaarheid der reeks (4) niet vervuld, dan moeten voor het residu in (10) slechts de polen in aanmerking genomen worden, die liggen binnen een cirkel, met eindigen straal om het punt  $r = -k_1/2m$  beschreven. Uit de gelijkmatige convergentie van (8) volgt, dat deze straal steeds zoo groot kan gekozen worden, dat de initiaalvoorwaarden met te geven benadering vervuld zijn. Is het aantal in rekening gebrachte polen eindig, dan gelden differentiaalvergelijking en randvoorwaarden natuurlijk volkomen streng. Het belang van III § 14, waar voor (8) de gelijkmatige convergentie bewezen werd, blijkt hier duidelijk.

In het vierde hoofdstuk herleidden wij de reeks (8), door de polen  $2m$  aan  $2m$  bijeen te nemen. Wij vonden de reeks (11) pag. 74 en vervormden de termen, die op enkelvoudige polen betrekking hadden, tot (20) pag. 77. Wij weten, dat op voldoende afstand van 0 geen veelvoudige polen meer voorkomen. Wij kunnen van deze herleidingen op de volgende wijze in onze oplossing (10) gebruik maken.

Zij:

$$r^{(\nu)}, r_1(r^{(\nu)}) \dots r_{2m-1}(r^{(\nu)}) \dots \dots \dots (12)$$

een stel bij elkaar behoorende nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$ , zoodat

$F(r, 0)$  in deze  $2m$  punten gelijke waarden heeft. Een van hen, onverschillig welk, wordt met  $\alpha_v$  aangeduid. In hoofdstuk IV § 1 zagen wij, dat:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r g(r)_{r=r^{(v)}} + \dots + \mathcal{E}_r g(r)_{r=r_{2m-1}^{(v)}} = \\ = \mathcal{E}_r \left[ g(r) + \dots g(r_{2m-1}) \frac{d r_{2m-1}}{d r} \right]_{r=\alpha_v}. \end{aligned} \quad (13)$$

Wordt:

$$g(r) = \left[ \frac{v(r, x)}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} f_p(u) \cdot e^{-r(\mu-x_0)} d\mu \right] \left[ \mathcal{E}_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \right] \quad (14)$$

gesteld, dan staat in het eerste lid van (13) de som van de bijdragen, door de polen (12) geleverd tot de  $p + 1^e$  van de  $n$  functiën, die gezamenlijk de oplossing (10) vormen. Om de totale oplossing te krijgen zullen wij  $v$  van 0 tot  $\infty$  en daarna  $p$  van 0 tot  $n - 1$  moeten laten loopen. Uit de definitie van  $r_1 \dots r_{2m-1}$  blijkt, dat de laatste factor in het tweede lid van (14) geen verandering ondergaat, wanneer voor  $r$  gesubstitueerd wordt:

$$r_1(r), r_2(r) \dots r_{2m-1}(r),$$

en dus zal:

$$\begin{aligned} g(r) + g(r_1) \frac{d r_1}{d r} + \dots g(r_{2m-2}) \frac{d r_{2m-1}}{d r} = \\ = \left[ \frac{1}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f_p(u) d\mu \right] \left[ \mathcal{E}_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

zijn. Zie voor  $\lambda(r, \mu, x)$  (8) pag. 73. Worden de polen op de beschreven wijze  $2m$  aan  $2m$  bijeengenomen, dan wordt de oplossing (10) (11) derhalve in den vorm gebracht:

$$z = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{\infty} \mathcal{E}_r \left[ \frac{1}{\mathfrak{F}(r)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f_p(u) d\mu \right] \left[ \mathcal{E}_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \right]_{r=\alpha_v}. \quad (16)$$

In hoofdstuk IV § 2 zagen wij, dat voor waarden  $r$ , die



$\delta(r)$  nul maken,  $\lambda(r, \mu, x)$  in twee factoren ontbonden kan worden:

$$\lambda(r, \mu, x) = \varphi(r, x) \psi(r, \mu). \quad (17)$$

In (16) kan elke term, die bij een enkelvoudige pool behoort, met behulp van (17) vereenvoudigd worden. Zijn alle polen enkelvoudig, dan krijgt onze oplossing ten slotte den vorm:

$$z = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \frac{\varphi(\alpha_{\nu}, x)}{\delta'(\alpha_{\nu})} \int_{x_0}^{x_1} \psi(\alpha_{\nu}, \mu) f_p(\mu) d\mu \right] \times \\ \times \left[ \mathcal{E}_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(\alpha_{\nu}, s)]} \right]. \quad (18)$$

Indien er meervoudige polen  $\beta$  zijn <sup>1)</sup>, moet het tweede somteken in (18) slechts over de enkelvoudige uitgestrekt worden gedacht. Aan (18) zal dan voor elk van de, in eindig aantal voorkomende, meervoudige polen  $\beta$  moeten worden toegevoegd de uitdrukking:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{E}_r \left[ \frac{1}{\delta(r)} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f_p(\mu) d\mu \right] \left[ \mathcal{E}_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \right]_{r=\beta}. \quad (19)$$

§ 2. De residuen in veelvoudige polen worden bepaald met behulp van betrekking (2) pag. 6. De resulterende uitdrukkingen zijn reeds in het geval van een tweevoudige

<sup>1)</sup> Wij herinneren er aan, dat in dit en in het vorige hoofdstuk steeds ondersteld is, dat het residu in punten  $r^{(v)}$ , waar twee of meer van de grootheden (12) samenvallen, nul is. Vgl. pag. 69 en 70. Geldt deze onderstelling in een uitzonderingsgeval niet, dan moet aan (18) en (19) voor een dergelijke pool  $\gamma$  worden toegevoegd de uitdrukking:

$$\mathcal{E}_r \frac{v(r, x) u(r, t)}{\delta(r)} \quad r=\gamma,$$

waar  $u(r, t)$  de functie (2) voorstelt.



pool ingewikkeld. Stellen wij b. v., dat  $\beta_0$  een tweevoudig nulpunt van  $\mathfrak{F}(r)$  is, dan levert dit als bijdrage tot (19)  $n$  termen, van welke de  $p + 1^e$  als volgt bepaald wordt. Noemt men ter bekorting:

$$\left[ \int_{x_0}^{x_1} \lambda(r, \mu, x) f_p(\mu) d\mu \right] \left[ \mathcal{E}_s \frac{q_p(s) \cdot e^{s(t-t_0)}}{[F(r, s)]} \right]$$

$H(r)$ , dan moet berekend worden:

$$\mathcal{E} \frac{H(r)}{\mathfrak{F}(r)}_{r=\beta_0} = D_r \frac{(r - \beta_0)^2 \cdot H(r)}{\mathfrak{F}(r)}_{r=\beta_0}$$

Voor  $\mathfrak{F}(r)$  hebben wij:

$$\mathfrak{F}(r) = \frac{(r - \beta_0)^2}{2} \cdot \mathfrak{F}''(\beta_0) + \frac{(r - \beta_0)^3}{2 \cdot 3} \cdot \mathfrak{F}^{(3)}(\beta_0) + \dots$$

en derhalve is:

$$\mathcal{E} \frac{H(r)}{\mathfrak{F}(r)}_{r=\beta_0} = \frac{6 \mathfrak{F}''(\beta_0) \cdot H'(\beta_0) - 2 \mathfrak{F}^{(3)}(\beta_0) \cdot H(\beta_0)}{3 \cdot [\mathfrak{F}''(\beta_0)]^2}$$

Ter bepaling van  $H'(r)$  kan in den tweeden factor van  $H(r)$  onder het residuteeken gedifferentieerd worden. Een en ander is voldoende om te doen zien, dat er een vrij samengestelde vorm zal komen, die echter op geheel regelmatige wijze uit (19) berekend wordt. Hier blijkt duidelijk het voordeel, dat in het gebruik van het  $\mathcal{E}$ -teeken gelegen is. Alle bijzondere gevallen van samenvallende nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  zijn in (18) en (19) begrepen <sup>1)</sup>.

Wij weten, dat wij in (18) en (19) slechts een oplossing van ons vraagstuk hebben, wanneer de  $n - 1$  reeksen in (18) convergeeren en het noodig aantal malen term voor

<sup>1)</sup> Wij zien hier tevens, waarom bij meervoudige polen, de herleiding tot den vorm (18) niet kon geschieden. De ontbinding (17) geldt toch uitsluitend voor nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  en wanneer die toegepast is, mag dus niet meer gedifferentieerd worden.

term gedifferentieerd mogen worden. Het eindig aantal termen (19), dat eventueel moet worden toegevoegd, kan hierbij natuurlijk buiten beschouwing blijven. Doch ook, wanneer deze voorwaarde niet vervuld is, en inderdaad zal zij slechts bij uitzondering gelden, hebben wij toch in onze uitkomst, wanneer wij de oneindig voortlopende reeksen na een eindig aantal termen afbreken, eene functie, die aan partieele differentiaalvergelijking en randvoorwaarden volkomen en aan de initiaalvoorwaarden met te geven graad van benadering voldoet.

Dat de reeksen in (18) slechts bij uitzondering convergeeren blijkt op de volgende wijze. Uit het vierde hoofdstuk weten wij, dat de reeks:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha_{\nu}, x)}{\mathfrak{F}'(\alpha_{\nu})} \int_{x_0}^{x_1} \psi(\alpha_{\nu}, \mu) f_p(\mu) d\mu \quad (20)$$

voor  $x_0 \leq x \leq x_1$  convergeert en dat haar som gelijk is aan  $f_p(x)$ . Hierbij is aangenomen, dat de nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  alle enkelvoudig zijn. De  $p+1^e$  van de  $n$  termen, waarop het eerste somteeken in (18) betrekking heeft, wordt nu gevonden door den algemeenen term van (20) met:

$$\int_s \frac{q_p(s) e^{s(t-t_0)}}{[F(\alpha_{\nu}, s)]} \quad (21)$$

te vermenigvuldigen en te sommeeren. Voor (21) komt, wanneer de wortels:

$$s_0 \dots s_{n-1} \quad (22)$$

van de vergelijking:

$$F(\alpha_{\nu}, s) = 0 \quad (23)$$

alle verschillend zijn:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{q_p(s_i) e^{s_i(t-t_0)}}{F'_s(\alpha_{\nu}, s_i)} \quad (24)$$

De nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  liggen, op grooten afstand van 0,



bij benadering op de  $2m$  stralen  $\alpha$ , (zie pag. 25)<sup>1)</sup>. Beschouwen wij in (23) slechts de termen van de hoogste macht, dan blijft over:

$$\alpha_v^{2m} + l_0 s^n = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Uit de orientatie van de stralen  $\alpha$  volgt, dat, voor grooten index  $\nu$ , de punten  $\alpha_v^{2m}$  bij benadering op de reële as liggen. Wij zien nu uit (25) gemakkelijk, dat er, voor  $n \geq 3$ , onder de wortels (22) zullen voorkomen, wier reële deelen met het toenemen van  $\nu$  grooter en grooter (positief) worden. Het is duidelijk, dat deze wortels de oorzaak zullen zijn, dat de factoren (21) de convergentie van (20) voor  $t > t_0$  verstoren. Convergentie blijft slechts mogelijk voor  $n = 1$  en  $n = 2$ .

§ 3. Van  $n = 1$  is een voorbeeld het vraagstuk van de warmtegeleiding in een bol, indien de temperatuur slechts van den afstand tot het middelpunt afhangt. De formule (18) voert tot de bekende oplossing. De reeks convergeert voor  $t > t_0$ . POINCARÉ toont in zijn *Théorie analytique de la Propagation de la Chaleur* aan, dat zij het vraagstuk inderdaad oplost.

CAUCHY maakt in zijne verhandeling een toepassing op de vergelijking:

$$\frac{d^3 z}{dt^3} + k^2 \frac{d^4 z}{dx^4} = 0,$$

die in de theorie der trillende staven gebruikt wordt.

Wij zullen de reeks voor het bijzonder geval, dat de staaf aan beide uiteinden vastgeklemd is, uit de algemeene formule (18) afleiden, om een opmerking over hare convergentie te kunnen maken.

De partieele differentiaalvergelijking luidt dus:

$$F(D_x, D_t) z \equiv D_x^4 z + k^{-2} D_t^3 z = 0. \quad . \quad . \quad (25)$$

1) De stralen  $\alpha$  worden van het punt  $r = -k_1/2m$  uit  $m$  getrokken. Zie pag. 37 bovenaan.



De randvoorwaarden, voor ons bijzonder geval, zijn, indien de lengte der staaf 1 gesteld wordt:

$$z = 0 \text{ en } D_x z = 0, \text{ voor } x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

en

$$z = 0 \text{ en } D_x z = 0, \text{ voor } x = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Als initiaalvoorwaarden nemen wij aan:

$$z = f(x) \text{ en } D_t z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\text{voor } t = 0, \text{ en } 0_0 \leq x \leq 1.$$

Er wordt dus een initiaalafwijking doch geen initiaalsnelheid gegeven. Wij vinden in onze notaties achtereenvolgens:

$$F(r, s) \equiv r^4 + k^{-2} s^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$r_p = i^p r \quad (p = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

$$f_0(r) = f_2(r) = 1.$$

$$f_1(r) = f_3(r) = r.$$

$$\mathfrak{F}(r) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & r i & -r & -r i \\ e^r & e^{r i} & e^{-r} & e^{-r i} \\ r e^r & r i e^{r i} & -r e^{-r} & -r i e^{-r i} \end{vmatrix} = 8 r_2 i (\cos r \operatorname{Ch} r - 1)^1. \quad (31)$$

Wij bevinden ons hier in het geval, dat aan het einde van hoofdstuk IV § 6 werd behandeld en kunnen dus voor  $\varphi(r, x)$  en  $\psi(r, x)$  de uitdrukkingen (59) en (62) pag. 92 en 93 gebruiken. Er komt:

$$\begin{aligned} \varphi(r, x) &= \begin{vmatrix} e^{rx} & e^{irx} & e^{-rx} & e^{-irx} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & i r & -r & -i r \\ e^r & e^{ir} & e^{-r} & e^{-ir} \end{vmatrix} = \\ &= 4 i r [(Ch r - \cos r) (Sh r x - \sin r x) - \\ &\quad - (Sh r - \sin r) (Ch r x - \cos r x)] \quad . \quad . \quad . \quad (32) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Deze herleiding verloopt het gemakkelijkst, indien men in  $\mathfrak{F}(r)$  eerste en derde resp. tweede en vierde kolom onderling optelt en aftrekt.

en

$$\psi(r, x) = 4 r^3 \varphi(r, x) : \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ r, & i r, & -r, & -i r \\ e^r, & e^{i r}, & e^{-r}, & e^{-i r} \\ r^2 e^r, & -r^2 e^{i r}, & r^2 e^{-r}, & -r^2 e^{-i r} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\varphi(r, x)}{2 i (Sh r \cos r - Ch r \sin r)} \cdot \cdot \cdot \quad (33)$$

Ten slotte is:

$$q_0(s) \equiv k^{-2} s \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (34)$$

en dus:

$$\mathcal{E}_s \frac{q_0(s) \cdot e^{s t}}{[\mathfrak{F}(\alpha_v, s)]} = \mathcal{E}_s \frac{s e^{s t}}{[s^2 + k^2 \alpha_v^4]} = \cos k \alpha_v^2 t. \quad (35)$$

De ligging der nulpunten van  $\mathfrak{F}(r)$  hebben wij in hoofdstuk II § 9 onderzocht. Wij vonden in den oorsprong een zesvoudig nulpunt en op de reële en imag. assen een reeks enkelvoudige. In 0 worden  $r, r_1, r_2, r_3$  blijkens (30) nul en wij hebben daar dus een nulpunt van de soort, die in het begin van het vierde hoofdstuk werd uitgesloten. Stelt men  $v(r, x)$  (9) voor ons geval op, dan volgt uit een eenvoudige berekening, die wij achterwege laten, dat de multiplicitéit van het nulpunt 0 voor  $v(r, x)$  minstens zes bedraagt. Het levert dus geen residu en kan buiten beschouwing blijven. De overige wortels van  $\mathfrak{F}(r)$  zijn enkelvoudig en termen (19) behoeven aan de reeks (18) dus niet te worden toegevoegd.

Uit (18), (32), (33), (35) en de betrekking:

$$\mathfrak{F}'(\alpha_v) = 8 \alpha_v^2 i (Sh \alpha_v \cos \alpha_v - Ch \alpha_v \sin \alpha_v). \quad (37)$$

volgt nu:

$$z = \sum_{v=0}^{\infty} \left[ \frac{\varphi(\alpha_v, x)}{-16 \alpha_v^2 (Sh \alpha_v \cos \alpha_v - Ch \alpha_v \sin \alpha_v)^2} \int_0^1 \varphi(\alpha_v, \mu) f(\mu) d\mu \right] \times$$

$$\times \cos k \alpha_v^2 t \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (38)$$



Indien wij de functie:

$$w(r, x) = \frac{\varphi(r, x)}{4 i r (Sh r \cos r - Ch r \sin r)} = \\ = \frac{(Ch r - \cos r)(Sh r x - \sin r x) - (Sh r - \sin r)(Ch r x - \cos r x)}{Sh r \cos r - Ch r \sin r} \quad (39)$$

invoeren, wordt (38):

$$z = \sum_{v=0}^{\infty} \cos k \alpha_v^2 t \cdot w(\alpha_v, x) \int_0^1 w(\alpha_v, \mu) f(\mu) d\mu. \quad (40)$$

De  $\alpha$ 's doorloopen bij de sommatie de positieve reële wortels van de vergelijking  $Ch r \cos r = 1$ .

Met behulp van (33) en (39) volgt uit de stellingen (22) en (23) op pag. 77:

$$\int_0^1 w(\alpha_p, \mu) w(\alpha_q, \mu) d\mu = 0, p \neq q \quad . \quad (41)$$

$$= 1, p = q \quad . \quad (42)$$

In (40) hebben wij de reeks, die onze algemeene uitkomst voor het hier besproken vraagstuk uit de theorie der trillende staven oplevert. Wij weten zeker, dat zij voor  $t = 0$  gelijkmatig convergeert en  $f(x)$  voorstelt, indien  $0 \leq x \leq 1$ , waarbij is aangenomen, dat  $f(0) = f(1) = 0$  is en, dat  $f(x)$  geen discontinuïteiten heeft, onderstellingen, die met den aard van het vraagstuk geheel in overeenstemming zijn.

Wij hebben dus de volgende ontwikkeling van  $f(x)$  naar functiën  $w(r, x)$ :

$$f(x) = \sum_0^{\infty} w(\alpha_v, x) \int_0^1 w(\alpha_v, \mu) f(\mu) d\mu \quad . \quad (43) \\ 0 \leq x \leq 1.$$

In de gebruikelijke theorie der trillende staven (RAYLEIGH *Sound* I Ch. VIII) wordt de mogelijkheid der ontwikkeling (43) a priori aangenomen. Moge dit uit een natuurkundig oogpunt misschien verdedigbaar zijn, analytisch geldt hier natuurlijk hetzelfde bezwaar als bij de reeksen van FOURIER.



De methode van CAUCHY bewijst, dat het tweede lid van (43) gelijkmatig tot  $f(x)$  convergeert, zoodat wij, wanneer de reeks (40) na een eindig aantal termen wordt afgebroken, in  $z$  een functie hebben, die den initiaaltoestand met willekeurigen graad van benadering weergeeft, en overigens aan alle eischen van het vraagstuk voldoet. Of (40) een *volkomen* oplossing van ons probleem is, zal afhangen van het antwoord op de vraag of de reeks ook voor  $t > t_0$  convergeert en het noodig aantal malen term voor term mag worden gedifferentieerd.

Wij zullen nu bewijzen, dat wij in (40) een strenge oplossing van ons vraagstuk hebben, indien voor de functie  $f(x)$  geldt:

$$f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

en bovendien:

$$f^{(IV)}(0) = f^{(IV)}(1) = 0^1 \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Was (44) niet vervuld, dan zouden rand- en initiaalvoorwaarden met elkander in strijd zijn. Slechts (45) vormt een beperking voor  $f(x)$ , die wij voor ons bewijs echter noodig hebben.

Naast:

$$w(r, x) = \frac{(Chr - \cos r)(Shrx - \sin rx) - (Shr - \sin r)(Chrx - \cos rx)}{Shr \cos r - Chr \sin r} \quad (39)$$

beschouwen wij de functiën  $w_1(r, x)$ ,  $w_2(r, x)$ ,  $w_3(r, x)$ , die bepaald worden door:

$$\int^x w(r, x) dx = \frac{w_1(r, x)}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$\int^x w_1(r, x) dx = \frac{w_2(r, x)}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

---

<sup>1)</sup> Ook wordt nog ondersteld, dat  $f(x)$  en haar eerste vier afgeleiden van 0 tot 1 continu zijn.

$$\int^x w_2(r, x) dx = \frac{w_3(r, x)}{r}, \dots \dots (48)$$

waaruit volgt:

$$\int^x w_3(r, x) dx = \frac{w(r, x)}{r}. \dots \dots (49)$$

Wij hebben dus:

$$w_1(r, x) = \frac{(Ch r - \cos r)(Ch r x + \cos r x) - (Sh r - \sin r)(Sh r x - \sin r x)}{Sh r \cos r - Ch r \sin r}$$

en analoge uitdrukkingen voor  $w_2$  en  $w_3$ .

Gemakkelijk blijkt:

$$w(r, 0) = 0, \quad w(r, 1) = 0. \dots \dots (50)$$

$$w_3(r, 0) = 0, \quad w_3(r, 1) = 0. \dots \dots (51)$$

De tweede betrekking (51) onderstelt, dat  $r$  een wortel van de vergelijking:

$$Ch r \cos r - 1 = 0 \dots \dots \dots (51a)$$

is. Schrijven wij  $w(r, x)$  in den vorm:

$$\frac{Sh r (1 - x) - \sin r (1 - x) - Ch r \sin r x - \cos r Sh r x + Sh r \cos r x + \sin r Ch r x}{Sh r \cos r - Ch r \sin r}$$

en deelen teller en noemer door  $Ch r$ , dan zien wij, dat de teller voor  $0 \leq x \leq 1$  zeker eindig in waarde blijft, hoe groot  $r$  ook wordt. De noemer krijgt den vorm:

$$Th r \cos r - \sin r,$$

en nadert dus, wanneer  $r$  de reeks op de positief-reële as gelegen nulpunten van  $Ch r \cos r - 1$  doorloopt, tot  $\pm 1$ . De modulus van  $w(r, x)$  blijft dus zeker eindig. Voor de overige functiën  $w$  geldt hetzelfde en er kan een getal  $M$

bepaald worden, zóódanig, dat voor alle waarden van den index  $\nu$  geldt:

$$\begin{aligned} |w(\alpha_\nu, x)|, |w_p(\alpha_\nu, x)| &\leq M \quad . \quad . \quad (52) \\ 0 &\leq x \leq 1 \\ (p &= 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Splitzen wij  $f(x)$  in twee functiën  $f_1(x)$  en  $f_2(x)$ , die in het interval  $0 - 1$  niet toenemen. Uit de tweede stelling over het gemiddelde volgt dan:

$$\int_0^1 w(r, \mu) f_1(\mu) d\mu = f_1(0) \frac{w_1(r, \vartheta) - w_1(r, 0)}{r} \quad \vartheta < 1$$

en een analoge betrekking voor  $f_2$ . Voor  $w_1, w_2, w_3$  kunnen wij hetzelfde doen en zien dus, lettende op (52), dat er een van  $\nu$  onafhankelijke constante  $A$  kan bepaald worden, zóódanig dat, in absolute waarde:

$$\begin{aligned} \int_0^1 w(\alpha_\nu, \mu) f(\mu) d\mu, \int_0^1 w_p(\alpha_\nu, \mu) f(\mu) d\mu &\leq \frac{A}{r} \quad (53) \\ p &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

is. Door partieele integratie komt nu:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 w(r, \mu) f(\mu) d\mu \right| &= \left| \frac{1}{r} \int_0^1 w_1(r, \mu) f'(\mu) d\mu \right| = \\ &= \left| \frac{1}{r^2} \int_0^1 w_2(r, \mu) f''(\mu) d\mu \right| = \left| \frac{1}{r^3} \int_0^1 w_3(r, \mu) f'''(\mu) d\mu \right| = \\ &= \left| \frac{1}{r^4} \int_0^1 w(r, \mu) f^{IV}(\mu) d\mu \right| = \left| \frac{1}{r^5} \int_0^1 w_1(r, \mu) f^V(\mu) d\mu \right| = \\ &\leq \frac{A}{r^6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54) \end{aligned}$$

Hier is achtereenvolgens gebruik gemaakt van (44), (51), (50), (45) en (53), en aangenomen dat  $f(x)$  met haar eerste vier afgeleiden in het integratie-interval continu is, en dat voor  $r$  een wortel van vergelijking (51a) gesubstitueerd wordt.



Uit (52) en (54) volgt, dat de modulus van den algemeenen term in (40) niet grooter is dan  $M \cdot A \cdot \alpha_v^{-6}$ . Bedenkt men, dat:

$$D_x w(\alpha_v, x) = \alpha_v w_3(\alpha_v, x)$$

$$D_x^2 w(\alpha_v, x) = \alpha_v^2 w_2(\alpha_v, x)$$

$$D_x^3 w(\alpha_v, x) = \alpha_v^3 w_1(\alpha_v, x)$$

$$D_x^4 w(\alpha_v, x) = \alpha_v^4 w(\alpha_v, x),$$

dan ziet men met behulp van (52) gemakkelijk, dat de reeksen, die uit de reeks (40) verkregen worden, door deze term voor term tot vier malen toe naar  $x$  en tot twee malen toe naar  $t$  te differentieeren, voor  $0 \leq x \leq 1$  en willekeurige waarde van  $t$  gelijkmatig zullen convergeeren. Hiermede is bewezen, dat (40) een strenge oplossing van het vraagstuk levert. Hadden wij de onderstelling (45) niet gemaakt, dan zouden wij in (54) niet verder dan  $r^{-5}$  zijn gekomen. De algemeene term van de reeks, die ontstaat door (40) viermaal naar  $x$  of tweemaal naar  $t$  te differentieeren, zou dan van de orde  $r^{-1}$  zijn geweest, zoodat de convergentie nog in het midden zou blijven en in ieder geval slechts door voortteekenwisseling zou worden veroorzaakt. Of de onderstelling (45) noodig is, wordt hiermede natuurlijk niet uitgemaakt, alléén dat zij voldoende is.

## VERBETERING.

---

Op pag. 9 regel 11 v. b. staat: *à variation limitée*,  
dit moet zijn: *continu en à variation limitée*.

---

















