



# De waarnemingen der bevolkings-statistiek

<https://hdl.handle.net/1874/255661>

III 21

DE WAARNEMINGEN

DER

BEVOLKINGSSTATISTIEK.



DE WAARNEMINGEN  
DER  
BEVOLKINGS-STATISTIEK.

**Academisch Proefschrift,**

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

**MR. H. P. G. QUACK,**

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE RECHTSELERDE FACULTEIT.

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAAT EN  
VOLGENS BESLUIT VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag den 18 December 1874, des namiddags te 3 uren,

DOOR

**ABRAHAM JOHAN VERWEIJ,**

geboren te *Deventer*.



DEVENTER. — RUTERING EN VERMANDEL. — 1874.

DEPARTMENT OF THE INTERIOR  
BUREAU OF LAND MANAGEMENT

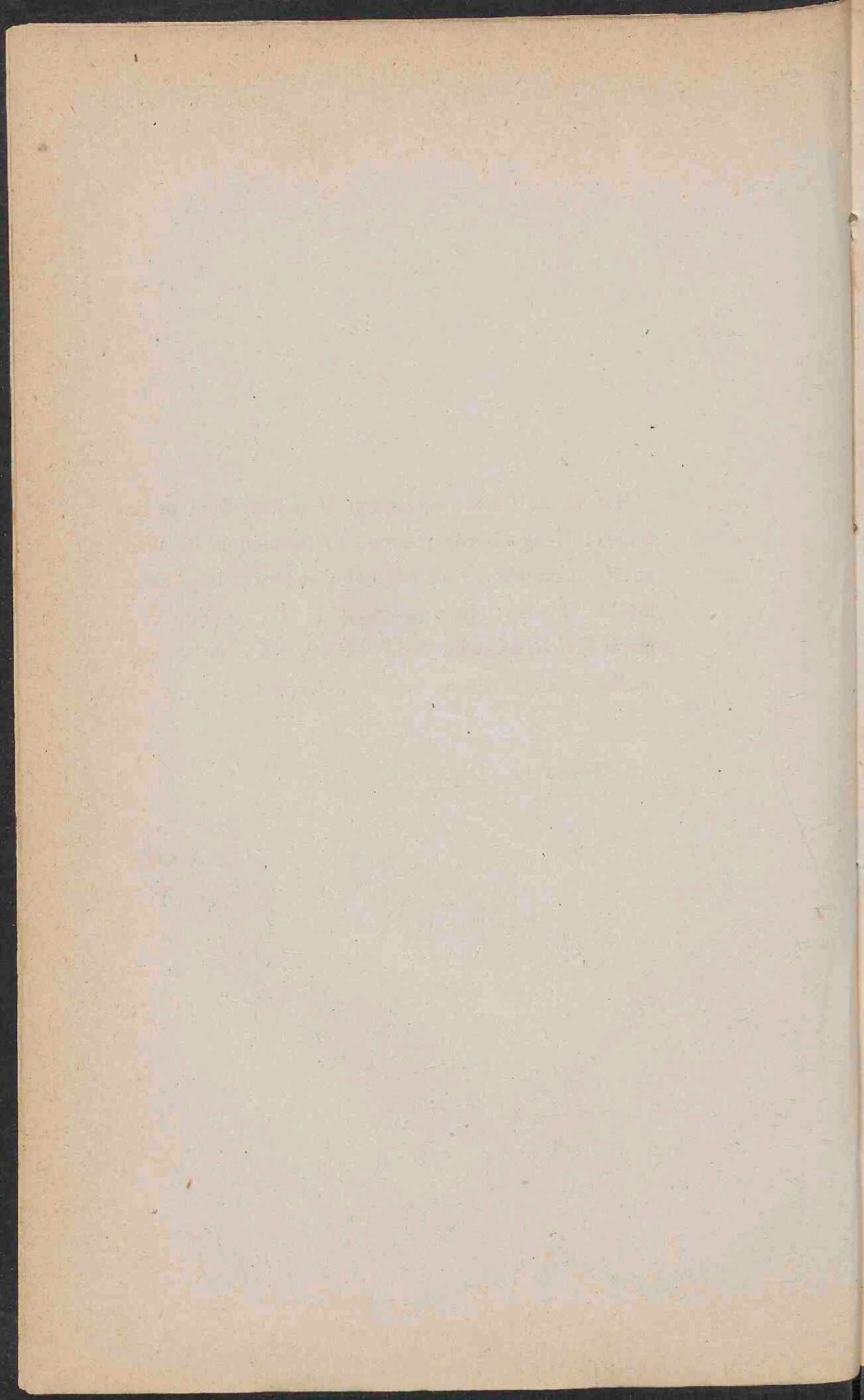
WATER RESOURCES DIVISION

OFFICE OF THE ASSISTANT ATTORNEY GENERAL

WASHINGTON, D. C.



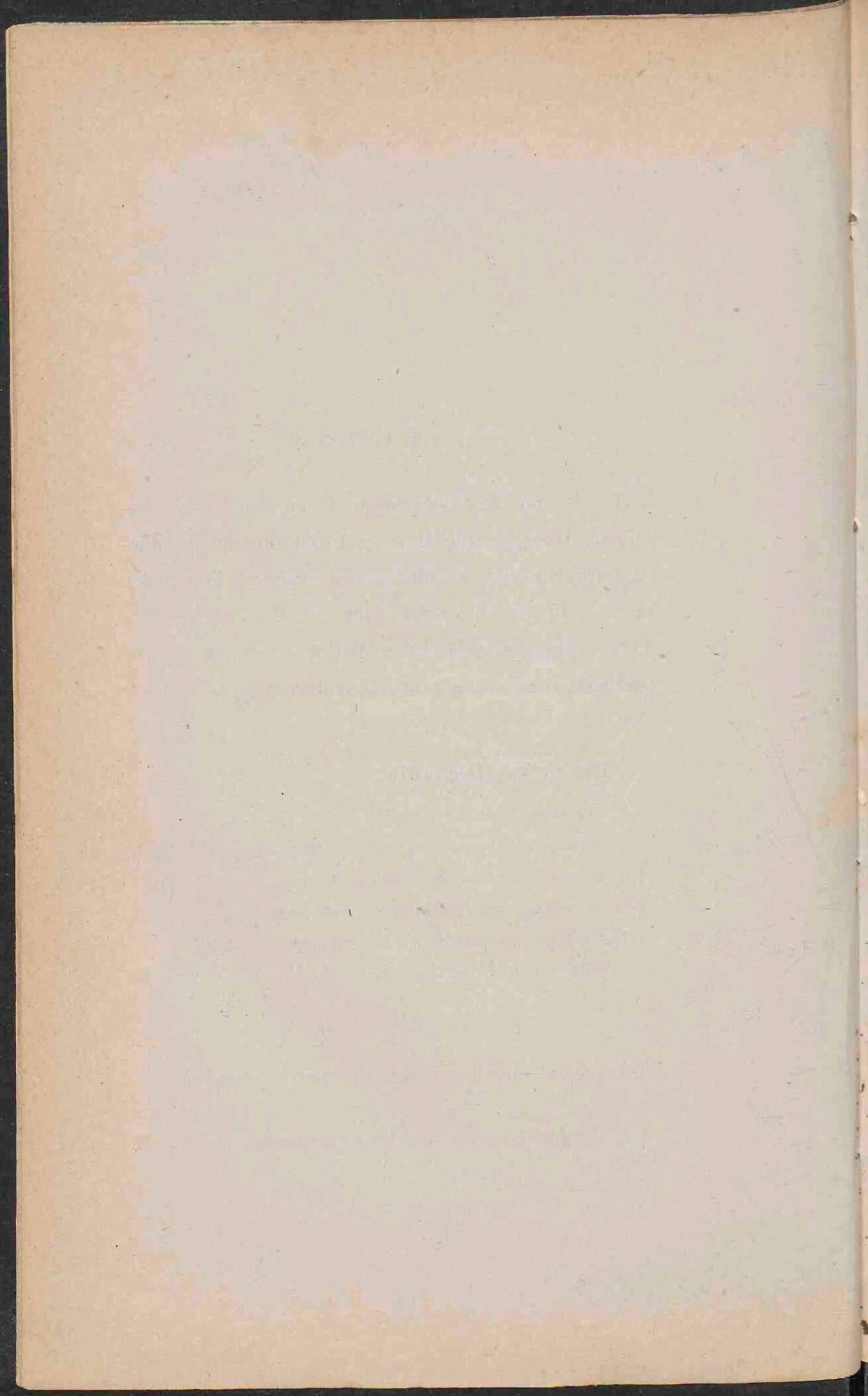
Van mijnne Moeder.



Het is mij zeer aangenaam U mijnen dank te be-  
tuigen, Hooggeleerde Heeren, Professoren in de Wis-  
en Natuurkundige Faculteit, wier onderwijs ik genieten  
mocht. In het bijzonder dank ik U, geachte Pro-  
motor, Hooggeleerde Buijs Ballot, voor de welwil-  
lendheid, die ik steeds van U ondervond.

DEVENTER, Dec. 1874.





## I N H O U D.

---

Inleiding . . . . . bl. 1

### EERSTE HOOFDSTUK.

De grootheden, die bepaald moeten worden, en de  
betrekkingen tusschen die grootheden.

- § 1. Geometrische voorstelling eener bevolking . . . „ 7
- § 2. Afzonderlijke waarnemingen . . . . . „ 9
- § 3. Verzamelingen van levenden . . . . . „ 10
- § 4. Symbolische voorstelling van het voorgaande . . „ 13
- § 5. Primaire verzamelingen van gestorvenen . . . „ 14
- § 6. Secundaire verzamelingen van gestorvenen . . . „ 17
- § 7. Overige verzamelingen van gestorvenen, behan-  
deling in analytischen vorm . . . . . „ 23

### TWEDE HOOFDSTUK

De verandering der bevolking met het jaar als eenheid  
van tijd.

- § 1. Verzamelingen van levenden en gestorvenen . . „ 31

INHOUD.

- § 2. De verandering der grootte eener bevolking . . bl. 37  
§ 3. Bepaling van de wijze, waarop eene bevolking de  
verschillende grenzen van den ouderdom bereikt. „ 40  
§ 4. Nadere bespreking, en getallevoorbeeld . . . „ 43

DERDE HOOFDSTUK.

Bepaling van verhoudingsgetallen.

- § 1. Bepaling der constanten bij een geïsoleerde be-  
volking . . . . . „ 53  
§ 2. Bepaling der constanten, met inachtneming van  
ingekomen en vertrokken personen . . . . . „ 59



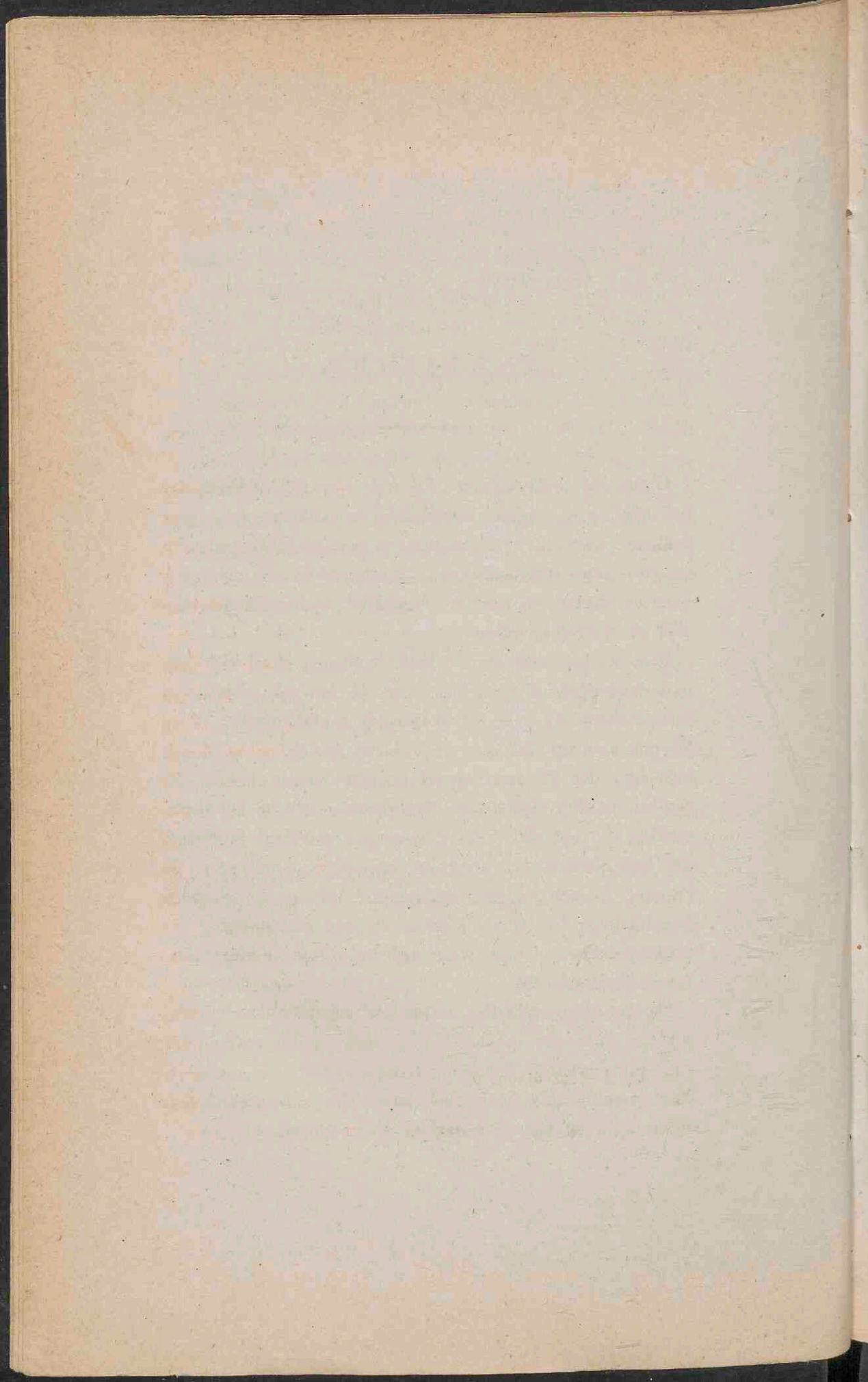
De lezer gelieve de volgende 't meest storende drukfouten en vergissingen te verbeteren:

bladz.	regel	van	Staat:	lees:
8	12	boven	B D	C D.
19	12	boven	3de term links, en 1ste term rechts:	
			$t_2'$	$t_2''$
20	3	boven	$t''$	$t'$
20	17	onder	onder-	waar-
21	15, 16	boven	ouderdomsklasse	geboorteperiode
22	13	boven	met	en met
24	1	boven	§ 5	§ 6
26	3	boven	$[t'' - \theta']$	$[\tau'' - t']$
"	3	boven	J	I
27	2	boven	$-t''$	$-t'$
"	3	boven	$=\tau''$	$=\tau'$
"	11	boven	A J	A I
28	8	boven	A L J K	A L I D
"	17	onder	G F K E	G F K C
29	4	boven	$c$	$e$
"	13	onder	$t_1' t_2'' t_1' \theta_2''$	$(t_1' t_2'' \tau_1' \theta_2'')$
"	5	onder	$\theta'' - ]$	$\theta' - [$
31	13, 15	onder	$\tau$	$t$
35	8	boven	klassen	klasse
36	16	boven	daarvoor	vóór dat bereiken
38	12	boven	zijn,	personen zijn,
43	12	onder	$\theta$	0
50	5	onder	vertrokken	vertrokkenen
56	3	onder	gestorvenen	$\theta$ jarig gestorvenen.
61	11	boven	ieder	ieder vierkante
62	14	onder	aangegeven	aan gegeven
71	12	onder	zonder	Evenwel, zonder

In het laatst gedeelte staat J op verschillende plaatsen; lees: I.

In fig. 4 staat  $\theta$  lees  $\theta'$ .





## INLEIDING.

---

Onder de onderwerpen, die zich voor mij opdeden ter behandeling in mijne dissertatie, en waarvan sommigen wellicht meer in verband stonden met de mathematische en physische wetenschappen, bevond zich een onderzoek naar de sterftewet, hare toepassingen, de bevolkingsstatistiek en dergelijke zaken.

Niet alleen hare groote belangrijkheid, deed mij deze onderzoekingen kiezen, het was ook het feit, dat er in onze taal weinig over dit onderwerp geschreven is. Toen ik mij eenigen tijd er mede bezig had gehouden bleek het mij, dat ik een beperkt gedeelte kiezen moest. Ik zag dat daarbij elementaire onderzoekingen, en een voorstelling in het vlak tot een evengoed resultaat brachten, als het gebruik van integralen en een voorstelling in de ruimte. Ik heb mij dan ook bepaald tot een synthetische behandeling der verschijnselen en een uiteenzetting der waarnemingen noodig voor het ontwerpen eener juiste bevolkingsstatistiek.

De bevolkingsstatistiek is een der natuurwetenschappen, althans voor een gedeelte. Zij rust op de waarneming der wijze waarop bevolkingen naar grootte en hoedanigheid veranderen; haar doel moet zijn het verband dier veranderingen met de oorzaken op te sporen.

Trachten we haar met de andere wetenschappen te vergelijken. Want dat er een verschil bestaat is zeker.

Terwijl men in de physica en chemie proeven kan nemen, d. i. een lichaam, een aggregaat van moleculen, aan de werking van bepaalde oorzaken blootstellen, en ten opzichte van andere isoleeren, is dit bij bevolkingen onmogelijk, terwijl bij de chemische en physische verschijnselen herhaling der proeven mogelijk is, is dit bij bevolkingen een andere zaak; het is een aaneengeschied verschijnsel, en vroegere phasen keeren niet terug.

Aan den anderen kant hebben wo bij physische en chemische verschijnselen met bewegingen van onnoemelijk vele kleinste deeltjes te doen, welke bewegingen niet afzonderlijk worden waargenomen, maar opgaan in de massabeweging; omtrent welke bewegingen dan onderstellingen gemaakt worden; terwijl we bij het probleem der beweging der bevolking in staat zijn de beweging der kleinste eenheden, hier personen, waar te nemen. Daar moeten we tot de onderstelling onze toevlucht nemen, dat de kleinste eenheden van het punt, het oogenblik, waarvan we uitgaan, af, een zelfde beweging hebben en die integreeren; hier nemen we die eenheden zelf waar; daar worden die eenheden gelijksoortig gedacht, hier kunnen we verschillen opmerken in samenstelling, aard en grootte.

In enkele opzichten zou het onderwerp zich laten vergelijken met eenige meteorologische onderzoekingen. Een vergelijking, die nog het minst scheef is, is die met een beek. We stellen ons een beek voor met veranderlijk vermogen ontspringende, die met gelijkmatige snelheid voortstroomt, langzamerhand door verdamping en andere oorzaken haar water verliest en doodloopt.

Daarbij moeten we ons dan de temperatuur, den voch-

tigheidstocstand veranderlijk voorstellen, niet alleen op verschillende tijden, maar ook op verschillende plaatsen van het stroomgebied.

Nu doen zich verschillende vragen voor: hoe groot is op een gegeven oogenblik de geheele watermassa, hoe groot die in enkele vakken, hoeveel water stroomt door de verschillende verticale doorsneden, wat is het verval en vele andere vragen. Vervolgens wordt gevraagd, wat is het verband tusschen de waargenomen atmosferische en andere toestanden, die op den gegeven stroom invloed uitoefenen, en de bij den stroom waargenomen grootheden. Men ziet dit probleem is niet gemakkelijk; wel kan het gemakkelijker voorgesteld worden, kunnen beperkende onderstellingen ingevoerd worden. Dit is echter alleen dan geoorloofd, als de volledige oplossing onmogelijk is.

Bij de bevolkingsprobleemen is hier vroeger niet over gedacht. Toen ik mij een weinig op de hoogte der litteratuur trachtte te stellen, scheen het mij toe dat, met uitzondering van enkele schrijvers, de meesten niet behoorlijk over de zaak hadden nagedacht. Er zijn zeker weinig onderwerpen in het gebied der wetenschap, waarbij zoo duidelijk blijkt, hoeveel er dikwijls op het gezond verstand van den voorganger wordt gebouwd, en hoe gevaarlijk dit is. Menig gegeven, oppervlakkig duidelijk genoeg, is toch niet scherp genoeg onderzocht of geformuleerd.

Zóó heeft b. v. vóór het jaar 1866, niemand er aan gedacht er op te letten, althans behoorlijk uiteen te zetten, dat de personen, die in een eenjarige ouderdomsklasse in een gegeven jaar sterven, afkomstig zijn uit twee verschillende geboortejaren; dat evenzeer het sterven in een eenjarige ouderdomsklasse van personen, die in



een zelfde jaar geboren werden plaats heeft in twee waarnemingsjaren. Hoe jong de wetenschappelijke behandeling is, blijkt daaruit dat de eerste, die hierop opmerkzaam maakte Prof. van Pesch was (1); terstond na hem en vermoedelijk onafhankelijk Dr. G. Meijer (2); daarna Knapp. Deze heeft de overdreven cijferzoekerij, die het doel voorbijzag, of liever niet zag, vinnig gehegeld (3). In het zelfde werk heeft hij de zaak wel wat omslachtig behandeld.

Prof. Zeuner (4) komt met een fraaije analytische behandeling, en een heldere voorstelling in de ruimte tot niet geheel juiste resultaten, benadert namelijk, waar het zich houden aan de werkelijkheid mogelijk, zelfs gemakkelijker is.

Dr. Knapp gaf vervolgens (5) een vrij eenvoudige geometrische voorstelling, en een toepassing op Saksen, die, naar ik meen door het onvoldoende materiaal, nog al te wenschen overlaat. Dr. M. M. van Baumbauer gaf in het programma voor de zevende zitting van het congres van Statistiek de noodzakelijkheid te kennen dat de gestorvenen naar geboortejaren en ouderdomsklassen gescheiden moeten worden. Tot nu toe is zoover ik weet op weinig plaatsen, aan dezen eersten eisch voor een juiste

---

(1) A. J. van Pesch. Iets over Sterftetafels, in het Progr. der H. B. School. Deventer 1866.

(2) Dr. G. Meijer. Mittlere Lebensdauer: Hildebrand's Jahrbücher 1867.

(3) Ermittlung der Sterblichkeit, Dr. G. F. Knapp (Leipzig Henrichs 1868).

(4) Mathematische Statistik, Dr. G. Zeuner (Leipzig, Arthur Felix 1869).

(5) Die Sterblichkeit in Sachsen (Leipzig Duncker und Humblot 69).

behandeling voldaan, terwijl van Baumhauer de verdienste heeft, daaraan in ons vaderland van 1870 af uitvoering te geven.

Binnen een niet ver verwijderd tijdstip zal het dan ook mogelijk zijn een reeds zeer juiste bevolkingsstatistiek van Nederland te geven. Voor de behandeling der provincies en gemeenten zal een dergelijke onderscheiding dor verhuizenenden noodig zijn. Knapp geeft in een derde geschrift (1), een mathematische behandeling des discontenue functies, zooals ze bij dit onderwerp voorkomen; en een keurig geschiedkundig onderzoek, naar dit exposé neem ik de vrijheid te verwijzen.

Ik reken mij gelukkig, dat ik tot de zelfde resultaten kwam, hoewel langs anderen weg, als Director K. Becker (2). Had ik zijn werk eerder gekend, (het kwam mij eerst in handen, toen mijn dissertatie reeds voltooid was), misschien zoude ik dan mijn notatie een weinig gewijzigd hebben. Voor hen, die met het onderwerp niet bekend zijn, moet ik vermelden, dat ik aan de eerstgenoemde werken veel te danken heb; zij, die ze kennen, zullen echter zien dat de geheele wijze van behandeling van die allen verschilt, vooral de notatie en de geometrische voorstelling, die naar ik meen, wat duidelijkheid en eenvoudigheid betreft de voorkeur verdient.

Ieder zal natuurlijk vinden, dat ik de theorie wenschte toe te passen, daartoe lag de gemeente Deventer het naast. Ik mag hier mijn dank betuigen voor de welwillendheid waarmede mij het onderzoek van de bevolkingsregisters toegestaan en gemakkelijk gemaakt werd. Ik

---

(1) Theorie des Bevölkerungswechsels (Vieweg 1874).

(2) Zur Berechnung von Sterbetafeln etc. (Berlin 1874, Dr. Engel).

dien hierbij te zeggen, dat ik aan een eigenlijke sterftetafel niet dacht; het zou een getallenvoorbeeld geweest zijn, van de wijze hoe de verandering eener bevolking plaats heeft en geregistreerd kan worden. Ik heb met vrij veel arbeid uit de bevolkingsregisters in daarvoor gereed gemaakte staten gebracht het aantal der in elk jaar gestorvenen, ingekomenen en vertrokkenen, met opgaaf van het geboortejaar en den ouderdom. Ik moest de toepassing echter weglaten, vooral om twee redenen, 1<sup>o</sup>. kon ik mijn werk niet controleeren, dan door het te herhalen, en had dus geen gewenschte zekerheid voor de numerieke uitkomst; 2<sup>o</sup>. de inschrijving in de bevolkingsregisters, was eerst geruimen tijd na de volkstelling van 1859 begonnen, de resultaten van deze konden dus niet als basis dienen. Ik zou wel uit de bevolkingsregisters opgemaakt hebben de bevolking op 31 Dec. 1862, maar bemerkte bij een paar proeven, dat, wilde ik nauwkeurig werken, elke inschrijving te veel overweging eischte, het werk mij te lang op zou houden, en dan nog misschien vergeefsch zijn. Ik moet wat ik deed dus als een slechts half gelukte proef beschouwen: waar ik iets bij leerde. Wat de symbolische voorstelling betreft, ontveins ik mij niet dat die uitgebreid en gewijzigd kan worden. De methode in het tweede hoofdstuk gegeven kan terstond toegepast worden op de gegevens van levensverzekeringen en dergelijke, als grond voor de berekening van premien en reserves. Even goed had ik kunnen spreken van „groepen,” „maatschappijen” en dergelijke, als van „gebied”, althans voor het grootste gedeelte.

De inhoudsopgave geeft een kort overzicht van het plan der dissertatie.

## Eerste Hoofdstuk.

*De grootheden die bepaald moeten worden en de betrekkingen tusschen die grootheden.*

§ I. Er worden menschen geboren, en menschen sterven, op verschillende plaatsen en onder verschillende omstandigheden. Beperken we ons tot een bepaald gebied, tot een gegeven groep en letten we voorloopig niet op de omstandigheden, niet op de hoedanigheden, die in het gebied weer een kleiner groep in den grooteren groep zouden bepalen. Onderscheidingen naar den burgerlijken stand en het geslacht blijven dus achterwege.

Denken we ons dat elke geboorte wordt aangeteekend, en tevens van denzelfden persoon de tijd waarop hij sterft, of het gebied verlaat; dat van ieder persoon die het gebied binnentreedt, de ouderdom en de geboortetijd aangegeven wordt: dat ieder vertrekkende geschrapd wordt. Daarin vinden we alles wat op het zijn in den tijd der bevolking van het gebied betrekking heeft, daaruit zouden we hoewel met veel moeite alles kunnen vinden wat daarmede in verband staat.

We kunnen dit ook door een geometrische voorstelling doen. (*Fig. 1*) Op een rechte lijn worden, van een vast punt, overeenkomende met een bepaald tijdstip, de tijdstippen der afzonderlijke geboorten aangeteekend; zoodat de afstand van B tot dat punt O, den geboortetijd voorstelt van dien persoon. Uit dat punt B wordt een loodlijn opgericht, en op die loodlijn een stuk uitgezet, dat den levensduur van dien persoon voorstelt.

Die zelfde bewerking wordt voor alle achtereenvolgende geborenen in het gebied verricht. Het geval dat meer personen gelijktijdig geboren worden, zou men b. v. door een gestippelde lijn er naast kunnen aangeven  $\Lambda$  en  $\Lambda'$ .

In deze geometrische voorstelling kunnen de ingekomen personen, ook ingevoerd worden; van zulk een persoon behoeft slechts, behalve den tijd waarop hij inkomt, de ouderdom waarop dit plaats heeft aangegeven te worden. Laat hij ten tijde  $\tau$  ingekomen zijn, oud  $\theta$ ; hij is geboren ten tijde  $t = \tau - \theta$ ,  $t$  en  $\tau$  van den oorsprong af geteld.

Uit het punt C,  $OC = t$ , wordt een loodlijn opgericht; op die loodlijn een stuk  $BD = \theta$  genomen, en een stuk CE gelijk den levensduur.

$CE - CD = DE$  is de tijd, door den ingekomene in het gebied doorleefd.

Het gedeelte CD der loodlijn behoeft niet getrokken te worden.

Dat een persoon de gemeente verlaten heeft wordt aangegeven door een duidelijk teeken, een dwarsstreepje bijvoorbeeld, dat zijn levensduurlijn afsluit op een afstand van de geboortelijn gelijk aan den ouderdom bij het vertrek.

Trekt men een lijn, evenwijdig aan, en op een afstand  $\theta'$  van  $Ol$ , dan zullen alle personen, wier levensduurlijnen door die lijn gesneden worden ouder dan  $\theta'$  worden.

Indien men op een gegeven opnemingsstijd  $OG = \tau$  verschillende geborenen nagaat, zal de ten tijde  $t'$  geborene oud zijn  $\tau - t'$ , de ten tijde  $t''$  geborene oud zijn  $\tau - t''$ ; die afstanden op de levensduurlijnen uitgezet, ook voor tusschen  $t'$  en  $t''$  geborenen, liggen op een lijn, waarvan alle punten voldoen aan de voorwaarde  $t + \theta = \tau$ ; dus op een rechte lijn, die een hoek van  $135^\circ$  met de geboortelijn maakt.

Trekt men uit een punt G,  $OG = \tau$  zulk een lijn, dan

zullen alle personen, wier levensduurlijnen daardoor gesneden worden, na  $\tau$  nog leven.

Immers: is S het snijpunt van de lijnen GT en KL, dan is  $OK + KL$ , de tijd waarop de persoon K sterft, grooter dan  $OK + KS$ , en omdat  $KS = KG$ , grooter dan  $OG = \tau$ .

Ingeval de aantekeningen in een gebied eerst beginnen op een tijd  $\tau = OO'$ ; zal de tellingslijn  $O'T'$  getrokken moeten worden, en zullen alle ten tijde  $\tau$  aanwezigen in de geometrische voorstelling als op dien tijd ingekomen behandeld moeten worden.

Het is bijna onnoodig er oplettend op to maken, dat deze wijze van behandeling in de praktijk zoo goed als onmogelijk zijn zal, zelfs als voor de levensduurlijnen een andere maat aangenomen wordt; alle resultaten blijven dan in vorm dezelfde, slechts wordt de richting der tellingslijnen veranderd.

§ 2. Bij een waarneming, onverschillig wat die zij, omtrent een persoon, heeft men alleen tijdgrootheden; voor den tijd van waarneming gebruiken we de letter  $\tau$ , voor den geboortetijd  $t$ , voor den ouderdom  $\theta$ .

Het spreekt van zelf, dat de tijd van waarneming verminderd met den ouderdom van den waargenomen persoon, verminderd met den geboortetijd, nul is,  $\tau - \theta - t = 0$ . Een uitspraak equivalent met de volgende:

Een ten tijde  $\tau$   $\theta$  oud waargenomene is geboren ten tijde  $t = \tau - \theta$ .

De ouderdom van den ten tijde  $t$  geborene, die ten tijde  $\tau$  waargenomen wordt, is:  $\theta = \tau - t$ .

Een persoon ten tijde  $t$  geboren, wordt  $\theta$  oud waargenomen ten tijde  $\tau = t + \theta$ .

We hebben behalve de geboortees, drie soorten van lijnen: levensduurlijnen, ouderdomslijnen en tellingslijnen, de eerste loodrecht op, de tweede evenwijdig aan, de derde een hoek van  $135^\circ$  makend met de geboortees. Door een willekeurig punt boven de geboortees kunnen altijd drie dergelijke lijnen getrokken worden. Het punt wordt bepaald, 1<sup>o</sup> door de lengte der loodlijn op de geboortees neergelaten en den afstand van het voetpunt der loodlijn tot den oorsprong, met andere woorden door een ouderdomslijn en een levensduurlijn  $\theta$  en  $t$ ; 2<sup>o</sup> door het punt waar de tellingslijn  $Ot$  snijdt en door het voetpunt der loodlijn, met andere woorden, door een tellingslijn en een levensduurlijn, door  $\tau$  en  $t$ ; 3<sup>o</sup>. door een tellingslijn en door een ouderdomslijn; door  $\theta$  en  $\tau$ .

Voor elke waarneming is  $\tau - \theta - t = 0$ ; twee der drie lijnen bepalen de derde.

De afzonderlijke personen kunnen ten opzichte van hun lotgevallen, volgens een register en volgens de geometrische voorstelling nagegaan worden.

Indien groepen gevormd worden kunnen zeer verschillende waarnemingen gedaan worden en wel ten opzichte van levenden en van gestorvenen.

§ 3. a. *Even oud levenden* noemt men de personen, die een gegeven ouderdom  $\theta$  bereiken. De bijzondere personen kunnen nader bepaald worden, hetzij door hun geboortetijd, hetzij door den tijd waarop ze den gegeven ouderdom bereiken. Groepen worden evenzoo bepaald door begrenzingen door die elementen. Worden de in een gegeven tijd geboren nagegaan, dan is het theoretisch mogelijk te bepalen hoever van hen een gegeven ouderdom  $\theta'$  bereiken, practisch uitvoerbaar is dit niet, even-

zeer is dit het geval met de personen, die in een gegeven tijd een gegeven ouderdom bereiken. Uit het latere zal een indirecte bepaling opgemaakt kunnen worden

In de geometrische voorstelling is de verzameling der personen, die uit een gegeven geboorteperiode  $t' t''$  afkomstig een gegeven ouderdom bereiken (fig. 2), bepaald door het aantal punten, dat de levensduurlijnen uit het stuk van de geboortees, dat overeenkomt met de gegeven geboorteperiode, opgericht gemeen hebben met de ouderdomslijn tot den gegeven ouderdom behorende. Daar ook op een voorgaande en op een volgende geboorteperiode gelet moet worden, wordt bepaald dat de ten tijde  $t'$  geborene wél, de ten tijde  $t''$  geborene niet medegetekend wordt. Ook wat het bereiken van den gegeven leeftijd betreft moet nader onderscheiden worden: het is mogelijk dat een persoon juist  $\theta$  jarig sterft (in de geom. voorstelling: dat een levensduurlijn juist in de ouderdomslijn  $\theta$  eindigt). In het geval dat  $\theta = 0$ , valt ouderdomslijn met geboortees samen; een doodgeborene sterft nuljarig. Onderstellen we dat de doodgeborenen geteld worden bij de geborenen, dan dwingt dit grensgeval ons te bepalen dat tot hen, die een gegeven ouderdom  $\theta$  bereiken, ook gerekend worden de personen, die juist  $\theta$  jarig sterven. De personen die in de waarnemingsperiode  $\tau' \tau''$  den ouderdom  $\theta$  bereiken, zijn geboren van  $\tau' - \theta$  tot  $\tau'' - \theta$ ; de ten tijde  $\tau'$  den ouderdom  $\theta$  bereikende wordt, overeenkomende met het bovenstaande, wél, die dit ten tijde  $\tau''$  doet, niet medegetekend. De beide bepalingen geven een zelfde verzameling als  $\tau' - \theta - t' = 0$  en  $\tau'' - \theta - t'' = 0$ .

Nog zij men er opmerkzaam op, dat een verzameling van evenoud levenden ook bepaald wordt door  $t'$  en  $\tau''$  en door  $t''$  en  $\tau'$ , telkens met  $\theta$  verbonden.



*b. Gelijktijdig levenden* worden die personen genoemd, die op een gegeven tijd aanwezig zijn. De afzonderlijke personen kunnen bepaald worden, hetzij door een ouderdom, hetzij door een geboortetijd. Groepen kunnen bepaald worden op verschillende wijze. De personen ten tijde  $\tau$  uit de geboorteperiode  $t' t''$  aanwezig, zijn allen ouder dan  $\tau - t''$ , terwijl de oudste, de ten tijde  $t'$  geborene  $\tau - t'$  oud is. Dit wordt uitgedrukt door te zeggen, dat ze staan in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$ , waarbij  $\theta' = \tau - t''$  en  $\theta'' = \tau - t'$ . Worden ouderdomsgrenzen ter bepaling van een groep gebruikt; wordt een groep aangegeven door  $\theta' \theta''$ , dus de ten tijde  $\tau$  aanwezigen in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$ , dan ziet men in, dat, daar deze geboren moeten zijn van  $\tau - \theta''$  af tot  $\tau - \theta'$ , de eene bepaling met de andere overeenstemt als  $\tau - \theta'' - t' = 0$  en  $\tau - \theta' - t'' = 0$ .

Geometrisch worden de ten tijde  $\tau$  aanwezigen voorgesteld door (fig. 3) de punten, die de tellingslijn  $\tau$  met levensduurlijnen gemeen heeft (de juist ten tijde  $\tau$  stervenden worden bij de aanwezigen geteld). De bepaling van een groep dier punten kan plaats hebben 1<sup>o</sup> door twee verticalen  $t'$  en  $t''$ ; 2<sup>o</sup> door twee ouderdomslijnen  $\theta'$  en  $\theta''$ ; 3<sup>o</sup> door een verticaal  $t'$  en een ouderdomslijn  $\theta'$ ; 4<sup>o</sup> door een verticaal  $t''$  en een ouderdomslijn  $\theta''$ .

*Een oud levenden* en *gelijktijdig levenden* geven geheel verschillende begrippen aan. Hier is een waarnemings-termijn, en een geboorteperiode of ouderdomsklasse; daar is een ouderdomsgrens en een geboorteperiode of waarnemingsperiode. Ze kunnen nooit samenvallen.

Hebben de sterfgevallen één voor één plaats, dan is het mogelijk als een der verzamelingen gegeven is, de

grens der andere zoodanig te bepalen, dat de absolute grootte van beide dezelfde is.

§ 4. Wat tot hiertoe gezegd is, laat zich evenals het volgende symbolisch voorstellen. Een waarneming wordt bepaald door  $t\theta$ ,  $\tau t$  of  $\theta t$ , die of de eenheid of nul zijn.

Bij  $t\theta$  behoort de waarnemingstermijn  $[t + \theta]$ ;

bij  $t\tau$  de ouderdom  $[\tau - t]$ ;

bij  $\tau\theta$  de geboortetijd  $[\tau - \theta]$ .

Een bepaalde waarde van een der elementen wordt in het vervolg door een accent aangegeven; of ingeval het uitgedrukt wordt door twee andere elementen, door haakjes van den vorm [     ]. Dat een bepaalde waarde tevens grens is, wordt voor een beneden grens aangegeven door een 1, voor een bovengrens door een 2 rechts achter de letter of de haakjes.

a.  $t'_1 t''_2 \theta'$ , geeft de som aan der verschillende  $t\theta$  voor een zelfde  $\theta'$  en voor waarden van den geboortetijd, van  $t = t'$  tot  $t = t''$ . Het zijn de evenoudlevenden uit de geboorte-periode  $t' t''$ ; tevens stelt de uitdrukking het aantal snijpunten van een bundel  $t$ -parallellellen met  $\theta'$  voor.

b.  $t'_1 t''_2 \tau'$  geeft de som aan der verschillende  $t\tau$  voor een zelfde  $\tau'$ , en voor waarden van  $t$ , van  $t = t'$  tot  $t = t''$ . Het zijn gelijktijdiglevenden uit de geboorte-periode  $t' t''$ ; het stelt ook voor de snijpunten van een bundel  $t$ -lijnen met de lijn  $\tau'$ .

c.  $\tau'_1 \tau''_2 \theta'$  geeft de som aan der verschillende  $\tau\theta$  voor een zelfde  $\theta'$  en voor waarden van  $\tau = \tau'$  tot  $\tau = \tau''$ . Het zijn evenoudlevenden in een waarnemings-periode; het geeft tevens de snijpunten van een bundel  $\tau$  lijnen, van verschillende lengte met een  $\theta$ -lijn aan.

d.  $\theta'_1 \theta''_2 \tau'$  geeft de som aan der verschillende  $\tau\theta$  voor

een zelfde  $\tau'$  en voor waarden van  $\theta = \theta'$  tot  $\theta = \theta''$ . Het zijn de gelijktijdiglevenden in een ouderdomsklasse; de uitdrukking geeft tevens aan de snijpunten van een bundel  $t$ -lijnen (gelegen tusschen  $[\tau' - \theta'']$  en  $[\tau' - \theta']$ ) en een  $\tau$ -lijn:

*a.* laat zich even goed voorstellen door  $[\theta' + \theta'']_1 [\theta'' + \theta']_2 \theta'$   
*b.* door  $[\tau' - \theta'']_1 [\tau' - \theta']_2 \tau'$ ; *c.* door  $[\tau' - \theta'']_1$   
 $[\tau'' - \theta'_2] \theta'$ ; *d.* door  $[\tau' - \theta'']_1 [\tau' - \theta']_2 \tau'$ .

*a.* en *c.* vallen samen voor een zelfde  $\theta'$  als  $\tau' - \theta' - \theta'' = 0$  en  $\tau'' - \theta' - \theta'' = 0$ .

*b.* en *d.* vallen samen voor een zelfde  $\tau'$  als  $\tau' - \theta'' - \theta' = 0$  en  $\tau' - \theta' - \theta'' = 0$ .

Overeenkomende met het voorgaande hebben we verder:

*e.*  $\theta'_1 [\tau'' - \theta']_2 \theta' = [\theta' + \theta'']_1 \tau'' \theta'$ . Personen die vóór  $\tau''$  den ouderdom  $\theta'$  bereikten, en geboren werden van  $\theta'$  af.

*f.*  $[\tau' - \theta'']_1 \theta'_2 \theta' = \tau'_1 [\theta' + \theta'']_2 \theta'$ . De personen die van  $\tau'$  af den ouderdom  $\theta'$  bereiken, en geboren werden vóór  $\theta''$ .

*g.*  $\theta'_1 [\tau' - \theta']_2 \tau' = \theta'_1 [\tau' - \theta'']_2 \tau'$ . De personen ten tijde  $\tau'$  aanwezig, onder dan  $\theta'$ , die van  $\theta'$  af geboren werden.

*h.*  $[\tau' - \theta'']_1 \theta'_2 \tau' = [\tau' - \theta'']_1 \theta'_2 \tau'$ . De personen ten tijde  $\tau'$  aanwezig  $\theta''$  oud en jonger die geboren werden vóór  $\theta''$ .

§ 5. *Primaire verzamelingen van gestorvenen.* *a.* De personen, die in een gegeven periode geboren worden, zijn bij het einde dier periode niet allen meer aanwezig, evenzoo zijn de personen die in een gegeven periode een gegeven ouderdom bereikten, op het einde van de waarnemingsperiode waarin dit plaats had, niet allen meer aanwezig; er zijn personen gestorven bij dezen overgang van evenoud levenden tot gelijktijdig levenden: zij vormen wat genoemd kan worden de eerste primaire verzameling van gestorvenen.

Laat de geboorteperiode zijn  $t''$ , en  $\theta'$  de ouderdom, die de evenoud levenden nader bepaalt;  $t'' + \theta'$  is de bovengrens der waarnemingsperiode waarin dit bereiken van den ouderdom  $\theta'$  plaats heeft; er kunnen geen personen jonger gestorven zijn dan  $\theta'$ , terwijl  $(t'' + \theta') - t'$  de hoogste ouderdom der gestorvenen is, dus de ouderdomsklasse der gestorvenen  $= (t'' + \theta' - t') - \theta' = t'' - t'$ ; daar het eerste sterfgeval eerst plaats kan hebben van  $t' + \theta'$  af, is de waarnemingsperiode bij deze eerste primaire verzameling  $= (t'' + \theta') - (t' + \theta') = t'' - t'$ ; het zijn gestorvenen in een ouderdomsklasse en in een waarnemingsperiode, wier duur gelijk is aan den duur der geboorteperiode, waaruit zij afkomstig zijn.

In de geometrische voorstelling (zie fig. 4) worden twee lijnen  $t'$  en  $t''$  getrokken, en een ouderdomslijn  $\theta'$ ; door het snijpunt van  $t''$  en  $\theta'$  wordt een tellingslijn getrokken  $t'' + \theta'$ , die de verticale lijn  $t'$  zal snijden in het punt waarvan de ordinaat is  $t'' + \theta' - t'$ .

Deze eerste primaire verzameling van gestorvenen is dan het aantal levensduurlijnen, dat eindigt in den driehoek bepaald door  $t'$ ,  $\theta'$  en  $\tau'' = t'' + \theta'$ , en wordt verkregen door van het aantal punten, dat de levensduurlijnen uit  $t' t''$  opgericht met  $\theta'$  gemeen hebben, af te trekken het aantal punten dat diezelfde levensduurlijnen met  $\tau' = t' + \theta'$  gemeen hebben. Stellen we het symbolisch voor:  $t'$  is een benedengrens der geboorteperiode,  $\theta'$  de benedengrens der ouderdomsklasse,  $\tau'' = t'' + \theta''$  de bovengrens der waarnemingsperiode. Dat van gestorvenen sprake is wordt aangegeven door haakjes; een bepaalde waarde van een der tijdelementen, wordt aangegeven door accenten boven rechts; dat die bepaalde waarde een grens is van een periode van dat element, voor de benedengrens door

1, voor de bovengrens door 2 rechts beneden de letter. Dus  $(t'_1 \theta'_1 \tau''_2)$  stelt voor de gestorvenen,  $\theta'$  jarig en ouder vóór  $\tau''$ , die geboren werden van  $t'$  af; daar van de gestorvenen niemand geboren kan zijn dan vóór  $\tau'' - \theta'$ , komt het overeen met de bovenstaande bepaling der primaire verzameling; de verzameling van hen die uit de geboorteperiode  $t'$ ,  $[\tau'' - \theta']$ , gestorven zijn  $\theta'$  jarig en ouder vóór den tijd  $[\tau'' - \theta'] + \theta' = \tau''$ .

$$\begin{aligned} (t'_1 \theta'_1 \tau''_2) &= t'_1 [\tau'' - \theta']_2 \theta' - t'_1 [\tau'' - \theta']_2 \tau''. & (1) \\ &= t'_1 t''_2 \theta' - t'_1 t''_2 [\theta'' + \theta']. \end{aligned}$$

δ. Tweede primaire verzameling van gestorvenen.

De personen, die uit een gegeven geboorteperiode op een gegeven tijd aanwezig zijn hebben een verschillenden ouderdom, niet allen zullen den ouderdom bereiken, dien de persoon, die bij het begin der geboorteperiode geboren werd, dan heeft.

Er zijn van die aanwezigen gestorven vóór het bereiken van genoemden ouderdom; het is de overgang van gelijktijdiglevenden tot evenoudlevenden, ze vormen de tweede primaire verzameling van gestorvenen.

Laat de geboorteperiode weder zijn  $t'_1 t''_2$ , en  $\tau'$  de tellingstijd die met de  $t'$  en  $t''$  de verzameling van gelijktijdig levenden bepaalt; de ouderdomsklasse der gelijktijdig levenden is  $=(\tau' - t') - (\tau' - t'') = t'' - t'$ . Daar de reeks der sterfgevallen begrensd wordt door  $t'' + (\tau' - t')$ , den tijd waarop de ten tijde  $t''$  geborene den ouderdom  $\tau' - t'$  bereikt, is de waarnemingsperiode ook  $=t'' - t'$ . De tweede primaire verzameling van gestorvenen is dus ook afkomstig uit een geboorteperiode, sterft in een ouderdomsklasse en in een waarnemingsperiode, allen van gelijken duur.

In de geom. voorstelling (zie fig. 5) worden twee verticale lijnen  $t'$  en  $t''$  getrokken, een tellingslijn  $\tau'$ , en door

het snijpunt van  $\tau'$  en  $t'$  (met de ordinaat  $\tau' - t'$ ) de ouderdomslijn  $\theta'' = \tau' - t'$ ; deze snijdt de verticale lijn  $t''$ ; de tellingslijn door dit snijpunt gaande, is  $\tau' + t'' - t'$ .

De lijnen  $\tau'$ ,  $t''$  en  $\theta'' = \tau' - t'$  bepalen een driehoek. De levensduurlijnen die in dien driehoek eindigen, zijn in aantal gelijk aan de tweede prim. verzameling van gestorvenen.

Dit aantal wordt gevonden, door van het aantal der levensduurlijnen, uit  $t''$  opgericht, die een punt met  $\tau'$  gemeen hebben, af te trekken het aantal der levensduurlijnen, die een punt met  $\theta'' = \tau' - t'$  gemeen hebben.

Weder wordt de driehoek aangegeven door de begrensende lijnen, en dat er sprake is van in dien driehoek eindigende levensduurlijnen door haakjes.

$$(t_2'' \theta_2'' \tau_1') = t_1' t_2'' \tau' - t_1' t_2'' \theta'' \quad (2)$$

Of, uitgedrukt in  $t''$ ,  $\theta''$  en  $\tau'$ :

$$= [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \tau' - [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \theta'' \quad (2')$$

De uitdrukking (2) heeft betrekking op de wijze van bepaling in het begin van *b.* gebruikt; de uitdrukking (2)' op den tweeden vorm van bepaling.

(1) en (2) stellen ons nu in staat de primaire verzamelingen van gestorvenen in verzamelingen van levenden uit te drukken.

### § 6. Secundaire verzamelingen van gestorvenen.

#### a. Eerste secundaire verzameling van gestorvenen.

De personen, die in een gegeven geboorteperiode geboren werden, en een gegeven ouderdom bereiken, zijn niet allen aanwezig op het einde der waarnemingsperiode waarin dit bereiken van dien ouderdom plaats heeft; de personen, die dan aanwezig zijn bereiken niet allen den ouderdom van den oudsten dezer aanwezigen. De personen, die den

eerstgenoemden ouderdom bereikten en niet den laatsten, vormen de eerste verzameling van gestorvenen; namelijk, die der personen, die uit een gegeven geboorteperiode afkomstig, in een ouderdomsklasse van gelijken duur stierven.

Zij  $t'$   $t''$  de geboorteperiode en  $\theta'$  de eerstgenoemde ouderdom; dan is de andere ouderdom  $t'' + \theta' - t'$ . Immers: de uit  $t'$   $t''$  ten tijde  $t'' + \theta'$  oudst aanwezende is geboren ten tijde  $t'$ . De ouderdomsklasse is groot  $t'' - t'$ .

Het eerste waargenomen sterfgeval heeft plaats ten tijde  $t' + \theta'$ ; het einde der waarnemingsperiode wordt aangegeven door  $t'' + (t'' + \theta' - t')$ , den tijd waarop de op den tijd  $t'$  geborene den hoogsten ouderdom bereikt; het verschil dier termijnen is  $2(t'' - t')$ , zooals natuurlijk blijken moest bij de wijze van ontstaan onzer verzameling.

In de geometrische voorstelling (zie figuur 6) worden twee verticalen  $t'$  en  $t''$  getrokken, een ouderdomslijn  $\theta'$ ; door het snijpunt van  $t''$  en  $\theta'$ , de tellingslijn  $t'' + \theta'$ ; en door het snijpunt dezer tellingslijn met  $t'$ , de ouderdomslijn  $t'' + \theta' - t' = \theta''$ .

$t'$ ,  $t''$ ,  $\theta'$  en  $\theta''$  bepalen het vierkant A B C D, de levensduurlijnen in dit vierkant eindigend, zijn gelijk in aantal aan de gestorvenen uit de geboorteperiode  $t'$   $t''$  in de ouderdomsklasse  $\theta'$   $\theta''$ . Ze worden verkregen door van het aantal punten dat de levensduurlijnen, uit  $t'$   $t''$  opgericht met  $\theta'$  gemeen hebben, af te trekken, het aantal punten, dat die levensduurlijnen met  $\theta''$  gemeen hebben.

Dit wordt uitgedrukt door:

$$(t'_1 t'_2 \theta', \theta_2'') = t'_1 t'_2 \theta' - t'_1 t'_2 \theta'' \quad (3)$$

Tot de zelfde uitdrukking komt men door bijeenvoeging der beide primaire verzamelingen, waarvan we in het begin uitgingen.

De personen toch, die uit de geboorteperiode  $t' t''$  den ouderdom  $\theta'$  bereikten, ('t geen plaats heeft van  $t' + \theta'$  tot  $t'' + \theta''$ ) en vóór  $t'' + \theta''$  stierven, vormen de eerste primaire verzameling van gestorvenen; uitgedrukt door  $(t'_1 \theta'_1 [t'' + \theta'']_2)$ .

De personen, die uit die zelfde geboorteperiode ten tijde  $t'' + \theta''$  aanwezig waren, en stierven vóór het bereiken van den ouderdom  $t'' + \theta'' - t'$ , vormen een tweede primaire verzameling, uitgedrukt door  $(t''_2 [t'' + \theta'' - t']_2 [t'' + \theta'']_1)$ .

De eerste met behulp van (1), de tweede met behulp van (2) tot verzamelingen van levenden reduceerend, en die uitdrukkingen optellend, verkrijgt men:

$$t'_1 t'_2 \theta' - t'_1 t'_2 [t'' + \theta''] + t'_1 t'_2 [t'' + \theta''] - t'_1 t'_2 [t'' + \theta'' - t'] \\ = t'_1 t'_2 \theta' - t'_1 t'_2 \theta''.$$

Derhalve: de verzameling van hen, die uit de eenheid van geboorteperiode afkomstig in de eenheid van ouderdomsklasse stierven, is gelijk aan het verschil der verzamelingen van hen, die uit die geboorteperiode de beneden en van hen, die de bovengrens der ouderdomsklasse bereikten.

b. De personen, die in een gegeven geboorteperiode geboren zijn, en op een gegeven tijd aanwezig zijn bereiken niet allen den ouderdom van den oudste die aanwezig is; terwijl zij, die dien ouderdom bereiken, niet allen aanwezig zullen zijn ten tijde dat de laatste dien ouderdom bereikt. De personen, die bij de eerste telling wèl en bij de laatste niet aanwezig waren, vormen de tweede secundaire verzameling van gestorvenen, namelijk de gestorvenen uit een gegeven geboorteperiode, in een tellingsperiode van gelijken duur.

Zij  $t' t''$  weder de geboorteperiode, en  $\tau'$  de benedengrens der waarnemingsperiode. De bovengrens der waarnemingsperiode is naar de wijze van ontstaan,  $(\tau' - t') + t''$ . De waarnemingsperiode =  $t'' - t'$ .



De grenzen van den ouderdom der gestorvenen zijn:  $\tau' - t'' =$  de ouderdom van den laatstgeborene ten tijde  $\tau'$ ; en  $\tau'' - t' =$  de ouderdom van den vroegst geborene ten tijde  $\tau''$ . De ouderdomsklasse, dus groot  $(\tau'' - t') - (\tau' - t'') = 2(t'' - t')$ , loopt over een tijdruimte gelijk aan tweemaal de geboorteperiode.

In de geom. voorstelling (zie figuur 7), worden twee verticalen  $t'$  en  $t''$  getrokken, een tellingslijn  $\tau'$ , door het snijpunt van  $\tau'$  en  $t'$  de ouderdomslijn  $\tau' - t'$  en door het snijpunt van deze met  $t''$  de tellingslijn  $\tau'' = \tau' + t'' - t'$ . De lijnen  $t', t'', \tau'$  en  $\tau''$  omsluiten een parallelogram; de levensduurlijnen die in dat parallelogram eindigen, zijn in aantal gelijk aan de tweede verzameling van gestorvenen: de gestorvenen uit de geboorteperiode  $t' - t''$  in een ondernemingsperiode van gelijken duur  $\tau' - \tau''$ , en worden verkregen door van de punten die de levensduurlijnen uit  $t' - t''$  getrokken met  $\tau'$  gemeen hebben, af te trekken het aantal punten dat ze met  $\tau''$  gemeen hebben.

$$(t'_1 t''_2 \tau'_1 \tau''_2) = t'_1 t''_2 \tau' - t'_1 t''_2 \tau''. \quad (4)$$

Uit de beide prim. driehoeken:  $(t''_2 [\tau' - t']_2 \tau'_1) + (t'_1 [\tau' - t']_1 [\tau' + t'' - t']_2) = t'_1 t''_2 \tau' - t'_1 t''_2 [\tau' - t'] + t'_1 t''_1 [\tau' - t'] - t'_1 t''_2 [\tau' + t'' - t']$  wordt natuurlijk dezelfde uitdrukking verkregen. Beide brengen ons tot de stelling:

De verzameling van hen die uit de eenheid van geboorteperiode afkomstig in de eenheid van waarnemingstijd sterven, is gelijk aan de verzameling van gelijktijdig levenden, uit de geboorteperiode bij het begin der waarnemingsperiode aanwezig, verminderd met de verzameling van gelijktijdig levenden bij het einde der waarnemingsperiode aanwezig.

c. Eigenlijk gezegd waren de beide voorgaande samengestelde verzamelingen vereenigingen van primaire verzamelingen, de eerste van een eerste en een tweede, zóó bepaald dat ze een gelijke geboorteperiode en gelijke ouderdomsklasse hadden en dat de bovengrens der waarnemingsperiode in de eerste gelijk was aan de benedengrens der waarneming in de tweede; de tweede een vereeniging van een tweede en eerste primaire verzameling met gelijke geboorteperiode en waarnemingsperiode maar zóó, dat de bovengrens der ouderdomsklasse in de eerste gelijk was aan de benedengrens der ouderdomsklasse in de tweede.

Vereenigen we thans twee primaire verzamelingen, die gelijke tijdseenheden hebben, maar zóó dat het eind der ouderdomsklasse in de eene gelijk is aan het begin der ouderdomsklasse in de tweede, terwijl de ouderdomsklasse en de waarnemingsperiode in de óéne gelijk is aan de ouderdomsklasse en de waarnemingsperiode in de tweede. Zij  $\theta' \theta''$  die ouderdomsklasse,  $\tau' \tau''$  de waarnemingsperiode,  $t$  de beiden gemeenschappelijke grens der geboorteperiode. Natuurlijk is  $\theta'' - \theta' = \tau'' - \tau'$ , daar in een eerste en tweede primaire verzameling ouderdomsklasse en waarnemingsperiode een zelfde tijdruimte omvatten. De gestorvenen in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$  en de waarnemingsperiode van gelijken duur  $\tau' \tau''$  (zoowel tot  $t$  als van  $t$  af gestorvenen) vormen de derde samengestelde verzameling van gestorvenen. Het is duidelijk, dat er geen andere gestorvenen zijn dan afkomstig uit  $\tau' - \theta''$  tot  $t$  en van  $t$  tot  $\tau'' - \theta'$ , dus uit een geboorteperiode groot  $\tau'' - \tau' + \theta'' - \theta'$ , gelijk aan tweemaal de eenheid van tijd bij de beide primaire verzamelingen.

In de geometrische voorstelling (zie fig. 8) wordt uit  $t$  een verticale lijn opgericht en twee ouderdomslijnen  $\theta'$  en

$\theta''$  (of twee tellingslijnen  $\tau'$  en  $\tau''$ ), door de snijpunten van  $t$  met  $\theta'$  en  $\theta''$  de tellingslijnen  $t + \theta'$  en  $t + \theta''$ , (of door de snijpunten van  $t$  met  $\tau'$  en  $\tau''$  de ouderdomslijnen  $\tau' - t$  en  $\tau'' - t$ ).

$\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $t + \theta''$  en  $t + \theta'$  (of  $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau' - t$  en  $\tau'' - t$ ) bepalen een parallelogram; de levensduurlijnen, die in dat parallelogram eindigen stellen de gestorvenen in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$  en de waarnemingsperiode  $t + \theta'$  tot  $t + \theta''$  (of in de waarnemingsperiode  $\tau' \tau''$  en de ouderdomsklasse  $\tau' - t$  tot  $\tau'' - t$ ) voor. Deze worden, zooals uit de figuur blijkt, verkregen door het aantal der levensduurlijnen, die een punt gemeen hebben met het stuk van  $\tau'$  door  $\theta'$  en  $\theta''$  afgesneden, met het stuk door  $\tau'$  en  $\tau''$  van  $\theta''$  afgesneden, te vermeerderen met het aantal der levensduurlijnen, die een punt gemeen hebben met het stuk door  $\tau'$  en  $\tau''$  van  $\theta''$  afgesneden en met het stuk door  $\theta'$  en  $\theta''$  van  $\tau''$  afgesneden.

$$(\tau' \tau'' \theta' \theta'') = [\tau' - \theta'']_1 [\tau' - \theta'']_2 \tau' + [\tau' - \theta']_1 [\tau'' - \theta']_2 \theta' - [\tau' - \theta']_1 [\tau'' - \theta'']_2 \theta'' - [\tau'' - \theta'']_1 [\tau'' - \theta']_2 \tau''. \quad (5)$$

De beide samengevoegde primaire verzamelingen van gestorvenen zijn:  $(t_2 \theta''_2 \tau'_1)$  en  $(t_1 \theta'_1 \tau''_2)$ .

Toepassing der formules (1) en (2) brengt tot dezelfde uitdrukking.

Als derde stelling in nu verkregen:

De verzameling van hen, die in de eenheid van waarnemingstijd in de eenheid van ouderdomsklasse gestorven zijn, wordt verkregen door bij de verzameling van gelijktijdig levenden, bij het begin der waarnemingsperiode in de gegeven ouderdomsklasse aanwezig, te voegen de verzameling van even oudlevenden, die godurende de waarnemingsperiode de benedengrens van den ouderdom bereiken; en deze som te verminderen met de som der verzameling van

evenoudlevenden, die gedurende de waarnemingsperiode de bovengrens van de ouderdomsklasse bereikten en der verzameling van gelijktijdig levenden, die bij het einde der waarnemingsperiode in de ouderdomsklasse aanwezig zijn.

Na het voorgaande is het duidelijk, dat, indien de verzamelingen van ten tijde  $\tau$  aanwezigen uit de verschillende opeenvolgende eenheden van ouderdomsklasse bekend zijn, (of uit de verschillende er bij behorende eenheden van geboorteperiode afkomstig); indien de verzamelingen der van  $\tau$  af in de verschillende eenheden van geboorteperiode geboren en bekend zijn, en indien verder bekend zijn de verschillende verzamelingen van gestorvenen ( $t'_1 t''_2 \tau''_2$ ) en ( $t''_2 t''_2 \tau'_1$ ), met dezelfde tijdseenheid; ook bekend zijn alle volgende verzamelingen van gelijktijdig levenden en evenoudlevenden.

§ 6. *Verdere verzamelingen.* Zonder verder te gaan met het uitvoerig beschrijven, hoe de andere verzamelingen gevormd worden door het bijeen voegen van verschillende primaire verzamelingen, verwijs ik naar de figuren 9, 10, 11, 12 en 13.

a. Wat betreft de figuren 9 en 10, deze maken duidelijk, hoe, door telkens bij een primaire verzameling van gestorvenen, (in figuur 9 een eerste, in figuur 10 een tweede, in beide geschaduwde voorgesteld), een primaire verzameling van de andere soort te voegen, met de zelfde tijdseenheid, maar telkens slechts één der grenzen er mede gemeen hebbend, telkens een secundaire verzameling wordt verkregen, en wél die, waarvan de grenzen zijn die der samenstellende primaire verzamelingen zonder de beiden gemeenschappelijke grens.

b. In § 5 zijn behandeld de drie secundaire verzamelingen van gestorvenen.

Door bij ieder dier verzamelingen, bepaald door  $t_1' t_2'' \theta_1' \theta_2''$ ,  $t_1' t_2'' \tau_1' \tau_2''$  en  $\theta_1' \theta_2'' \tau_1' \tau_2''$ , en die in de figuren 11, 12 en 13 geschadwd voorgesteld zijn, telkens een primaire verzameling te voegen, van welke ééne grens (onder- of bovengrens) overéénkomt met ééne grens (respectievelijk boven- of ondergrens) der gegeven secundaire verzameling, worden verkregen verzamelingen, die tertiaire genoemd kunnen worden.

De haakjes weglatende, en ook de accenten, schrijft men de verzamelingen aldus:

Fig. 11 levert:

1.  $t_1 t_2 \theta_1 \tau_2$ ; 2.  $t_1 \tau_2 \theta_1 \theta_2$ ; 3.  $t_1 t_2 \tau_1 \theta_2$ ; 4.  $\tau_1 t_2 \theta_1 \theta_2$

Fig. 12 levert:

1.  $t_1 t_2 \theta_2 \tau_2$ ; 2.  $t_1 \theta_1 \tau_1 \tau_2$ ; 3.  $t_1 t_2 \tau_1 \theta_2$ ; 4.  $\theta_2 t_2 \tau_1 \tau_2$ .

Fig. 13 levert:

1.  $\theta_1 \theta_2 \tau_1 \tau_2$ ; 2.  $\theta_1 \theta_2 t_1 \tau_2$ ; 3.  $t_1 \theta_1 \tau_1 \tau_2$ ; 4.  $\theta_2 t_2 \tau_1 \tau_2$ .

Dit zijn slechts zes verschillende vormen.

Een willekeurige er uitnemend, b. v. 3 van fig. 12, en haakjes en accenten er bij schrijvende ( $t_1' t_2'' \tau_1' \theta_2''$ ), vermeld ik dat deze voorstelt: de verzameling van hen, die uit de geboorteperiode  $t' t''$  afkomstig, van  $\tau'$  af jonger dan  $\theta''$  gestorven zijn; men zal kunnen aantonen, dat deze verzameling gelijk is aan de verzameling van hen, die uit diezelfde geboorteperiode  $t' t''$  ten tijde  $\tau'$  aanwezig zijn, verminderd met de verzameling van hen, die uit diezelfde geboorteperiode den ouderdom  $\theta''$  bereikten.

Een andere kiezend en symbolisch voorstellend b. v. 2 van fig. 12.

$$(t_1' \theta_1' \tau_1' \tau_2'') = t_1' [\tau' - \theta']_2 \tau' + [\tau' - \theta']_1 [\tau'' - \theta'']_2 \theta_1 - t_1' [\tau'' - \theta'']_2 \tau''.$$

De overblijvende combinaties der elementen vier aan vier zijn zes in aantal;  $t_1 \theta_1 \tau_1 \theta_2$ ;  $t_1 \theta_1 \tau_1 \theta_2$ ;  $t_2 \theta_2 \tau_2 t_1$ ;  $t_2 \theta_2 \tau_2 \theta_1$ ;  $\theta_1 t_2 \tau_1 \tau_2$ ;  $\theta_2 t_1 \tau_1 \tau_2$ .

Zij zijn onbepaald, daar het niet mogelijk is de ontbrekende grenzen uit de gegeven elementen te bepalen.

Het zal niet moeielijk vallen in de figuren te vinden: de zes combinaties der grenzen vijf aan vijf, b.v. ( $t_1 \theta_1 \theta_2 \tau_1 \tau_2$ ).

Men zal uit de figuren ook kunnen opmaken hoe de combinatie van zes grenzen uit primaire verzamelingen gevormd wordt, of uit samengestelde; b. v. uit twee tertiaire, of uit twee secundaire en twee primaire.

c. Het zal niet zonder belang zijn, van de meest algemeene verzameling uit te gaan, namelijk van de zeshoekverzameling, en door bepaling der grenzen tot vijfhoek en vierhoek en driehoek verzamelingen over te gaan, in dit geval zonder gelijke periodes te onderstellen voor de verschillende elementen; en tevens hierbij gebruik te maken, van de symbolische voorstelling.

Zonder onderscheidingen te maken, welke van de periodes  $t' t''$  en  $\theta' \theta''$  de grootste is, wordt ondersteld, dat de drie paren evenwijdige lijnen een zeshoek omsluiten. Laten ( $t', \theta'$ ) ( $t'', \theta''$ ), ( $t'', \theta'$ ) en ( $t', \theta''$ ) de snijpunten zijn van  $t', t'', \theta'$  en  $\theta''$ ; een zeshoek wordt verkregen, als  $\tau'$  en  $\tau''$  aan de voorwaarden voldoen:

$$\theta'' > [\tau' - t'] > \theta'; \theta'' > [\tau'' - t''] > \theta';$$

$$t'' > [\tau' - \theta'] > t'; t'' > [\tau'' - \theta''] > t'.$$

De zeshoek A B C D E F (fig. 14) heeft tot hoekpunten, als de punten bepaald worden door geboortetijd en ouderdom.

A:  $t'$  en  $[\tau' - t']$ ; B:  $t'$  en  $\theta''$ ; C:  $[\tau' - \theta'']$  en  $\theta''$ ; D:  $t''$  en  $[\tau'' - t'']$ ; E:  $t''$  en  $\theta'$ ; F:  $[\tau'' - \theta']$  en  $\theta'$ .

De andere snijpunten der drie paar parallelen zijn:



- b.*  $\tau'' = t' + \theta''$  dus wordt  $C = t_1' t_2'' \theta''$  en  $D = O$ .  
*c.*  $\theta'' = \tau'' - t''$  „ „  $C = O$  en  $D = t_1' t_2'' \tau''$ .  
*d.*  $\theta' = \tau'' - t''$  „ „  $B = O$  en  $A = t_1' t_2'' \tau''$ .  
*e.*  $t' = \tau' - \theta''$  „ „  $A = [\tau' - \theta'']_1 [\tau' - \theta'']_2 \tau'$  en  
 $C = [\tau' - \theta'']_1 [\tau'' - \theta'']_2 \theta''$ .  
*f.*  $t' = \tau'' - \theta'$  „ „  $B = [\tau' - \theta']_1 [\tau'' - \theta']_2 \theta'$  en  
 $D = [\tau'' - \theta']_1 [\tau'' - \theta']_2 \tau''$ .

Deze zes gevallen komen telkens overeen met het wegvallen van een der grenzen. Telkens wordt een vijfhoekverzameling verkregen, ze worden in de figuur voorgesteld door J B C D E; A B H E F; A J D E F; A B C D L; G C D E F, en A B C D L.

Voor elk dezer verzamelingen laat zich door verandering der er bij behorende termen in form. 6, de overeenkomstige symbolische uitdrukking aangeven, die dan verder gemakkelijk in woorden gebracht wordt.

Een willekeurige voorwaarde kiezend, b. v. *a*, dus het geval onderstellend dat  $\tau'$  niet gegeven is, verkrijgt men:  
 $(t_1' t_2'' \theta_1' \theta_2'' \tau_2'') = t_1' t_2'' \theta' - t_1' [\tau'' - \theta'']_2 \theta'' - [\tau'' - \theta'']_1 t_2'' \tau''$ . (7)

De verzameling van hen, die uit de geboorteperiode  $t' t''$  afkomstig, vóór  $\tau''$  in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$  gestorven zijn, is gelijk aan de verzameling van hen, die uit de geboorteperiode  $t' t''$  den ouderdom  $\theta'$  bereikten, verminderd met het aantal van hen, die van  $t'$  af geboren vóór  $\tau''$  den ouderdom  $\theta''$  bereikten, en met het aantal van hen, die voor  $t''$  geboren ten tijde  $\tau''$  oud  $\theta''$  en jünger aanwezig waren.

Worden *a* en *b* gelijktijdig ondersteld, dus ondersteld dat de begrenzingsen ten opzichte van den waarnemingstijd wegvallen, dan wordt verkregen:

$$(t_1' t_2'' \theta_1' \theta_2'') = t_1' t_2'' \theta' - t_1' t_2'' \theta''$$
 (8)

In de figuur is het J B H E. De uitdrukking komt



overeen met de vroeger gevonden eerste secundaire verzameling van gestorvenen.

Indien  $c$  en  $d$  gelijktijdig ondersteld worden, wordt door invoering der boven bepaalde waarden van A, B, C en D in form. (6) gevonden.

$$(t_1' t_1'' \tau_1' \tau_2'') = t_1' t_2'' \tau' - t_1' t_2'' \tau''. \quad (9)$$

In de figuur wordt het voorgesteld door het parallelogram A L J K; de uitdrukking komt overeen met de vroeger gevonden tweede secundaire verzameling van gestorvenen.

Indien  $e$  en  $f$  gelijktijdig ondersteld worden, wordt de form. 6 veranderd in:

$$(\theta_1' \theta_2'' \tau' \tau'') = [\tau' - \theta'']_1 [\tau' - \theta']_2 \tau' + [\tau' - \theta']_1 [\tau'' - \theta'']_2 \tau'' - [\tau' - \theta'']_1 [\tau'' - \theta'']_2 \theta'' - [\tau'' - \theta'']_1 [\tau'' - \theta']_2 \tau'' \quad (10)$$

In de figuur 14 wordt dit voorgesteld door het parallelogram G F K E; de uitdrukking komt overeen met de vroeger gevonden derde secundaire verzameling van gestorvenen.

(10) wordt uitgesproken:

De verzameling van hen, die, gedurende de waarnemingsperiode  $\tau' \tau''$  in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$  gestorven zijn, is gelijk aan de verzameling van gelijktijdig levenden ten tijde  $\tau'$  in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$  aanwezig, vermeerderd met de verzameling van evenoud levenden, die van  $\tau'$  tot  $\tau''$  den ouderdom  $\theta'$  bereikten, verminderd met de verzameling van evenoud levenden, die van  $\tau'$  tot  $\tau''$  den ouderdom  $\theta''$  bereikten, en de verzameling van gelijktijdig levenden ten tijde  $\tau''$  in de ouderdomsklasse  $\theta' \theta''$  aanwezig.

Gelden gelijktijdig twee der voorwaarden, die ieder een grens van verschillende elementen doen wegvallen, dan worden op gelijke wijze de daarmee overeenkomende ver-

zamelingen gevormd. Er zijn er echter die nul worden; omdat:

$a$  en  $d$ ,  $b$  en  $c$  voeren tot  $t'' = t'$ ;

$a$  en  $e$ ,  $b$  en  $f$  voeren tot  $\theta'' = \theta'$ ;

$c$  en  $e$ ,  $d$  en  $f$  voeren tot  $\tau'' = \tau'$ .

Alle andere verbindingen der voorwaarden twee aan twee brengen tot vierhoekverzamelingen; behalve de in (8), (9) en (10) behandelde, nog de volgende:

$a$  en  $c$  leveren den vierhoek J D E I en de formule:

$$(t_1' t_2'' \theta_1' \tau_2'') = t_1' t_2'' \theta' - t_1' t_2'' \tau''. \quad (11)$$

De er mede overeenkomende uitspraak is:

De verzameling van hen, die uit de geboorteperiode  $t' t''$  afkomstig vóór  $\tau''$  gestorven zijn  $\theta'$  en ouder is gelijk aan de verzameling van even oud levenden, die uit de geboorteperiode  $t' t''$  den ouderdom  $\theta'$  bereikten, verminderd met de verzameling van gelijktijdig levenden ten tijde  $\tau''$  uit de geboorteperiode  $t' t''$  aanwezig.

$b$ , en  $d$ , gelijktijdig gesteld geven den vierhoek A L B H; en de overeenkomstige formule:

$$(t_1' t_2'' t_1' \theta_2'') = t_1' t_2'' \tau' - t_1' t_2'' \theta''. \quad (12)$$

Deze en de volgende formule, brengt men gemakkelijk in woorden.  $a$  en  $f$  geven de figuur J B C K en de formule:

$$(\theta_1' \theta_2' t_1' \tau_2'') = t_1' [\tau'' - \theta']_2 \theta' - t_1' [\tau'' - \theta'']_2 \theta'' - [\tau'' - \theta'']_1 [\tau'' - \theta']_2 \tau''. \quad (13)$$

$b$  en  $e$  geven de figuur G H E T, en de formule:

$$(\theta_1' \theta_2'' \tau_1' t_2'') = [\tau' - \theta'']_1 [\tau' - \theta']_2 \tau' + [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \theta'' - [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \theta''. \quad (14)$$

$c$  en  $f$  gelijktijdig ondersteld geven de figuur A F K J en de formule:

$$(\tau_1' \tau_2'' t_1' \theta_1') = t_1' [\tau' - \theta']_2 \tau' + [\tau' - \theta']_1 [\tau'' - \theta']_2 \theta' - t_1' [\tau'' - \theta']_2 \tau''. \quad (15)$$

$d$  en  $e$  geven de figuur G L D C, en de formule:

$$(\tau_1, \tau_2'' t_2'' \theta_2'') = [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \tau' - [\tau' - \theta'']_1 [\tau'' - \theta'']_2 \theta'' - [\tau'' - \theta'']_1 t_2'' \tau''. \quad (16)$$

De verbindingen der voorwaarden drie aan drie, zijn voor zoover ze niet met elkander strijden twee in getal.

De eerste, de verbinding der voorwaarden a, e en f, leidt tot den driehoek J I K, en tot de formule:

$$(t_1' \theta_1' \tau_2'') = t_1' [\tau'' - \theta']_2 \theta' - t_1' [\tau'' - \theta']_2 \tau''. \quad (16).$$

De verzameling van hen, die van  $t'$  af geboren vóór  $\tau''$  sterven  $\theta'$  en ouder, is gelijk aan de verzameling van evenoud levenden, die, geboren van  $t'$  af, voor  $\tau''$  den ouderdom  $\theta'$  bereiken; verminderd met de verzameling van gelijktijdig levenden, die, van  $t'$  af geboren, ten tijde  $\tau''$  ouder dan  $\theta'$  aanwezig zijn.

De verbinding van b, d, en e leidt tot den driehoek G L H, en tot de formule:  $(t_2'' \theta_2'' \tau_1') = [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \tau' - [\tau' - \theta'']_1 t_2'' \theta''$ .

Deze laatste wordt als volgt uitgesproken:

De verzameling van hen, die vóór  $t''$  geboren, van  $\tau'$  af beneden den ouderdom  $\theta''$  gestorven zijn, is gelijk aan de verzameling van gelijktijdig levenden ten tijde  $\tau'$ , oud  $\theta''$  en jonger en geboren vóór  $t''$ , verminderd met de verzameling van evenoud levenden, die, vóór  $t''$  geboren van  $\tau'$  af den ouderdom  $\theta''$  bereiken.

## Tweede Hoofdstuk.

*De verandering der bevolking met het jaar als eenheid van tijd.*

§ 1. De personen, die in een kalenderjaar  $t$  geboren werden, worden ook wel genoemd de generatie  $t$ .

Een kalenderjaar  $\tau$  loopt van 12 uur op den middag van 31 December van het jaar  $\tau-1$  tot 12 uur op den middag van den 31sten Dec. van het jaar  $\tau$ ; dit geldt zoowel voor het kalenderjaar als geboorteperiode, als voor het kalenderjaar als waarnemingsperiode. (1)

Op het einde van een jaar  $\tau$  is de bij het begin van dat jaar geborene op het punt den ouderdom 1 te bereiken; op het einde van  $\tau+1$  is hij op het punt den ouderdom 2 te bereiken, enz.; op het einde van  $\tau+\theta$  is hij op het punt den ouderdom  $\theta+1$  te bereiken.

De op het einde van het jaar  $t$  geborene zal den ouderdom 1 bereiken op het einde van het jaar  $t+1$ , den ouderdom  $\theta$  op het einde van  $t+\theta$ .

De generatie  $t$  bereikt den ouderdom 1 in het jaar  $t+1$ , den ouderdom 2 in het jaar  $t+2$ , enz., den ouderdom  $\theta$  in het jaar  $t+\theta$ .

De van de generatie  $t$  op het einde van dat jaar nog aanwezige personen zijn van 0 tot 1 jaar oud, staan in

---

(1) Ik neem de vrijheid de redeneering algemeen te maken; het zal gemakkelijk vallen speciale gevallen te vinden door voor  $\tau$ ,  $\theta$  en  $t$  respectievelijk bepaalde waarnemingsjaren, ouderdomsklassen en geboortejaren te nemen.

de ouderdomsklasse 0, zijn 0-jarigen; de van de generatie  $t$  op het einde van  $t + \theta$  nog aanwezigen, staan in de ouderdomsklasse  $\theta$ , zijn  $\theta$  jarigen.

De op den 31sten Dec. van het jaar  $\tau$  in de ouderdomsklasse 0 aanwezigen zijn geboren in  $\tau$ , de in de ouderdomsklasse 1 aanwezigen zijn geboren in  $\tau - 1$ , de in de ouderdomsklasse  $\theta$  aanwezigen zijn geboren in  $\tau - \theta$ .

De op den 31sten Dec. van het jaar  $\tau$  aanwezigen, die geboren werden in  $\tau$  staan in de ouderdomsklasse 0; de dan aanwezigen, die geboren werden in  $\tau - 1$ , staan in de ouderdomsklasse 1; de dan aanwezigen uit het geboortjaar  $\tau - \theta$  staan in de ouderdomsklasse  $\theta$ .

De uitdrukking:

„De personen, die in het jaar  $\tau$  den ouderdom 0 bereiken”, heeft dezelfde beteekenis als: „de in het jaar  $\tau$  geboren”.

De personen die in het jaar  $\tau$  den ouderdom 1 bereiken, zijn geboren in  $\tau - 1$ ; de personen, die in het jaar  $\tau$  den ouderdom  $\theta$  bereiken, zijn geboren in het jaar  $\tau - \theta$ .

Personen, die een gegeven ouderdom bereiken worden voorgesteld door  $V$ ; de gegeven ouderdom wordt aangegeven, door een cijfer, vóór en beneden  $V$ , het geboortjaar waaruit zij afkomstig zijn, door een cijfer achter en beneden  $V$ ; zoodat  ${}_{\theta}V$  beteekent: de personen, die den ouderdom  $\theta$  bereiken; en  ${}_{\theta}V_t$ : de personen uit het geboortjaar  $t$  afkomstig, die den ouderdom  $\theta$  bereiken.

Personen, op een 31 Dec. van een jaar  $\tau$  aanwezig, worden aangegeven door  $A^{\tau}$ ; de tellingsdatum wordt dus rechts boven  $A$  geplaatst.

Personen op een 31 Dec. van een jaar  $\tau$  aanwezig in de ouderdomsklasse  $\theta$  worden aangegeven door:  ${}_{\theta}A^{\tau}$ ; de ouderdomsklasse door een cijfer voor en beneden  $A^{\tau}$ .

Personen op een 31 Dec. van een jaar  $\tau$  aanwezig uit het geboortejaar  $t$  worden aangegeven door  $A_t^\tau$ ; het geboortejaar door een cijfer achter en beneden  $A^\tau$ .

$\phi A^\tau$  is gelijk aan  $A_t^\tau$  indien  $\tau - \theta = t$  is.

De splitsing der  $A^\tau$  naar eenjarige ouderdomsklassen en die naar geboortejaren levert hetzelfde resultaat op.

Het is zoo goed als onuitvoerbaar bij een eenigermate uitgebreid gebied  $\phi V_t$  te bepalen door directe waarneming.

Wel kunnen de verzamelingen  $A^\tau$  verkregen worden door middel van volkstellingen. Van zulk een volkstelling kunnen we gerust uitgaan, daar, indien de werkelijke volkstelling op een willekeurigen datum van het jaar  $\tau$  ten uitvoer gebracht is, daaruit zooals later blijken zal, die op den 31 Dec. van het jaar  $\tau$  gevonden kan worden, met behulp van nog te bespreken verzamelingen van waarnemingen.

Bevolkingen veranderen in grootte en samenstelling. Ze worden grooter door geboorten en door in het gebied komende personen; ze ondergaan vermindering door sterfgevallen en door het vertrek van personen.

De geboorten ter zijde latend, worden de sterfgevallen en verhuizingen beschouwd. De generatie  $t$  kan voorgesteld worden door  $N_t$ , of door  $\phi V_t$ , en wordt door directe waarnemingen gevonden.

Een verzameling van gestorvenen wordt aangegeven door  $M$ ; een verzameling van ingekomenen door  $I$  (immigreerenden), en van vertrokkenen door  $E$  (emigreerenden).

Het jaar, waarin de waarnemingen plaats hebben, wordt aangegeven door een cijfer rechts van en boven de letter, die den aard der waarneming aangeeft; het geboortejaar van den waargenomene door een cijfer rechts van en be-

neden die hoofdletter; de ouderdomsklasse, waarin de waargenomene staat, door een cijfer links van en beneden de letter.

$M^\tau$ ,  $E^\tau$  en  $I^\tau$  zijn dan de in het jaar  $\tau$  gestorven, vertrokken en ingekomen personen.

$M_t^\tau$ ,  $E_t^\tau$  en  $I_t^\tau$  zijn de in het jaar  $\tau$  en afkomstig uit het geboortejaar  $t$  gestorven, vertrokken en ingekomen personen.

${}_0M^\tau$ ,  ${}_0E^\tau$  en  ${}_0I^\tau$  zijn de in het jaar  $\tau$ , in de ouderdomsklasse  $\theta$  gestorven, vertrokken en ingekomen personen;

${}_0M_t$ ,  ${}_0E_t$  en  ${}_0I_t$  zijn de uit het geboortejaar  $t$  afkomstig in de ouderdomsklasse  $\theta$  gestorven, vertrokken en ingekomen personen.

Het is duidelijk dat ieder dezer verzamelingen uit registers kan opgemaakt worden.

a. De in het jaar  $\tau$  en afkomstig uit het geboortejaar  $t$  stervende en verhuizende personen, behooren tot twee eenjarige ouderdomsklassen.

De personen op den 31sten Dec. van een jaar  $\tau - 1$  uit de generatie  $t$  nog in leven, staan in de ouderdomsklasse  $\tau - t - 1$ . (Daarvan sterven er in het jaar  $\tau$  in die ouderdomsklasse).

Op den 31 Dec. van het jaar  $\tau$  staan de uit de generatie  $t$  nog levenden in de ouderdomsklasse  $\tau - t$ ; uit de generatie  $t$  zijn er in genoemde ouderdomsklasse in het jaar  $\tau$  gestorven.

Ten einde het nog duidelijker in to zion, bedenke men, dat de bij het begin van  $t$  geboren, bij het begin van  $\tau$  waargenomen wordend, oud is  $\tau - t$ , en bij het einde van  $\tau$  waargenomen wordend, op het punt staat den ouderdom

$\tau - t + 1$  te bereiken; terwijl de persoon op het einde van  $t$  geboren, die bij het begin van  $\tau$  waargenomen wordt, ten tijde dier waarneming den ouderdom  $\tau - t - 1$  bereikt heeft; en op het einde van  $\tau$  waargenomen juist den ouderdom  $\tau - t$  bereikt.

De beide ouderdomsklassen zijn dus  $\tau - t - 1$  en  $\tau - t$ .

Noemen we de in het jaar  $\tau$  uit het geboortjaar  $t$ , in de ouderdomsklassen  $\tau - t - 1$  gestorven, vertrokken en ingekomen personen,

$$\tau - t - 1 M_t^\tau, \quad \tau - t - 1 E_t^\tau \quad \text{en} \quad \tau - t - 1 I_t^\tau,$$

de in de ouderdomsklasse  $\tau - t$  gestorvenen en verhuizenden.

$$\tau - t M_t^\tau, \quad \tau - t E_t^\tau \quad \text{en} \quad \tau - t - 1 I_t^\tau; \quad \text{dan is}$$

$$M_t^\tau = \tau - t - 1 M_t^\tau + \tau - t M_t^\tau. \quad (\alpha)$$

Voor de vertrokken en ingekomen personen wordt een uitdrukking van den zelfden vorm verkregen, door  $M$  te veranderen in  $E$  of in  $I$ .

b. De in het jaar  $\tau$  in de ouderdomsklasse  $\theta$  gestorvenen zijn afkomstig uit twee geboortejaren.

In het jaar  $\tau$  kunnen  $\theta$  jarig sterven: personen, die op het einde van  $\tau - 1$  in de ouderdomsklasse  $\theta$  aanwezig waren; deze zijn geboren in het jaar  $\tau - \theta - 1$ ; maar in het jaar  $\tau$  kunnen ook sterven: personen, die in den loop van dat jaar den ouderdom  $\theta$  bereiken; deze zijn afkomstig uit het jaar  $\tau - \theta$ .

De persoon, die juist  $\theta$  jarig bij het begin van  $\tau$  waargenomen wordt, is geboren bij het begin van  $\tau - \theta$ ; een persoon op het einde van  $\tau$  juist  $\theta$  jarig waargenomen is geboren op het einde van  $\tau - \theta$ ; een persoon juist  $\theta + 1$  jarig bij het begin van  $\tau$  waargenomen is geboren bij het begin van  $\tau - \theta - 1$ ; een persoon juist  $\theta + 1$  jarig waarge-



nomen op het einde van  $\tau$  is geboren op het einde van  $\tau - \theta - 1$ .

De geboortejaren zijn dus  $\tau - \theta - 1$  en  $\tau - \theta$ .

Een zelfde notatie als boven gebruikende:

$${}_{\theta} M^{\tau} = {}_{\theta} M^{\tau - \theta - 1} + {}_{\theta} M^{\tau - \theta}. \quad (b)$$

Voor de vertrokken en ingekomen personen worden uitdrukkingen van den zelfden vorm verkregen, door in plaats van  $M$  te zetten  $E$  en  $I$ .

c. De personen uit de generatie  $t$  in de ouderdomsklasse  $\theta$  stervend of verhuizend, sterven of verhuizen in twee waarnemingsjaren.

Immers: de personen, die de generatie  $t$  vormen, bereiken den ouderdom  $\theta$  in den loop van het jaar  $t + \theta$  en kunnen terstond daarop waargenomen worden; bereiken den ouderdom  $\theta + 1$  in den loop van het jaar  $t + \theta + 1$ , en kunnen terstond daarvoor waargenomen worden.

Een persoon bij het begin van  $t$  geboren bereikt den ouderdom  $\theta$  in het begin van  $t + \theta$ , den ouderdom  $\theta + 1$  bij het begin van  $t + \theta + 1$ ; een persoon bij het einde van  $t$  geboren bereikt den ouderdom  $\theta$  bij het einde van  $t + \theta$ , den ouderdom  $\theta + 1$  bij het einde van  $t + \theta + 1$ .

De waarnemingsjaren zijn dus  $t + \theta$  en  $t + \theta + 1$ .

Een gelijksoortige notatie volgend als boven verkrijgt men:

$${}_{\theta} M_t = {}_{\theta} M_t^{t + \theta} + {}_{\theta} M_t^{t + \theta + 1} \quad (c)$$

En door verandering van  $M$  in  $E$  en  $I$ , uitdrukkingen van gelijken vorm voor de vertrokken en ingekomen personen.

Deze laatste verzamelingen, vroeger direct waargenomen, behoeven zooals blijken zal, niet meer gevormd te worden: ten zij die vroegere waarnemingen misschien konden dienen om met haar hulp, de verzamelingen in a en b behandeld te vormen voor vroeger tijden.

Stellen we in  $a$ ,  $b$  en  $c$ :  $t = \tau - \theta$ ; dan wordt:

$$a: M_{\tau-\theta}^{\tau} = \theta - 1 M_{\tau-\theta}^{\tau} + \theta M_{\tau-\theta}^{\tau};$$

$$b: \theta M^{\tau} = \theta M_{\tau-\theta-1}^{\tau} + \theta M_{\tau-\theta}^{\tau};$$

$$c: \theta M_{\tau-\theta}^{\tau} = \theta M_{\tau-\theta}^{\tau} + \theta M_{\tau-\theta}^{\tau+1};$$

Deze hebben allen gemeen  $\theta M_{\tau-\theta}^{\tau}$ ;

in  $a$  vinden we, de andere samenstellende primaire verzameling met een ouderdomsklasse, één jaar lager;

in  $b$  vinden we de andere primaire verzameling met een voorgaand geboortejahr;

in  $c$  vinden we de andere primaire verzameling met een waarnemingsjaar één jaar hooger. Dit komt natuurlijk overeen met het in het eerste hoofdstuk behandelde.

Bij het volgende wordt ondersteld, dat de primaire verzamelingen in ieder waarnemingsjaar gevormd worden, namelijk: de in ieder waarnemingsjaar uit de verschillende generaties afkomstig, in beide daarbij behoorende ouderdomsklassen gestorven, vertrokken en ingekomen personen.

### § 2. *Verandering der grootte eener bevolking.*

Het punt van uitgang zij een volkstelling op den 31en Dec. van een jaar  $\tau$ ; de dan aanwezigen  $A^{\tau}$  zijn gescheiden naar het kalenderjaar waarin zij geboren zijn; daar het geen bijzondere moeite veroorzaakt, zal niet alleen het geboortejahr maar ook de ouderdomsklasse dier aanwezigen aangegeven worden, dus:

$$A^{\tau} = 0 A_{\tau}^{\tau+1} + 1 A_{\tau-1}^{\tau} + \text{enz.} + \theta A_{\tau-\tau}^{\tau} + \text{enz. tot } w A_{\tau-w}^{\tau}; (1) \text{ waarin } w \text{ voorstelt de hoogste ouderdomsklasse.}$$

Op het eind van het volgende jaar zijn aanwezig:

$$A^{\tau+1} = {}_0 A_{\tau+1}^{\tau+1} + {}_1 A_{\tau}^{\tau-1} + {}_2 A_{\tau-1}^{\tau+1} + \\ \text{enz.} + {}_{\theta+1} A_{\tau-\theta}^{\tau+1} + \text{enz.} + {}_w A_{\tau+1-w}^{\tau+1} \quad (2).$$

Zonder dan weder een volkstelling met alle daarmede verbonden moeite, last en kosten te verrichten, kunnen we met behulp van de boven behandelde verzamelingen van gestorvenen tot de kennis der afzonderlijke termen geraken.

Wat betreft de eerste term rechts in de formule 2, is bekend dat die aanwezigen geboren moeten zijn in het jaar  $\tau+1$  dus uit de  $N_{\tau+1}$  afkomstig zijn.

Daar onder kunnen ook zijn, die in den loop van het jaar  $\tau$  in het gebied  $\theta$  jarig ingekomen zijn, die geboren werden in dit jaar  $= {}_0 I_{\tau+1}^{\tau+1}$ .

Van de geboren en hebben echter ook sommigen het gebied, natuurlijk 0 jarig, verlaten  $= {}_0 E_{\tau+1}^{\tau+1}$ .

Van de geboren en de  ${}_0 I_{\tau+1}^{\tau+1}$  zijn er gestorven en wel  ${}_0 M_{\tau+1}^{\tau+1}$ .

$${}_0 A_{\tau+1}^{\tau+1} = N_{\tau+1} + {}_0 I_{\tau+1}^{\tau+1} - {}_0 E_{\tau+1}^{\tau+1} - \\ {}_0 M_{\tau+1}^{\tau+1} \quad (3)$$

Wat de overige termen betreft, zal de bespreking van den algemeenen term voldoende zijn.

De  ${}_{\theta} A_{\tau-\theta}^{\tau}$  zouden, indien er geen sterfgevallen plaats hadden, op 31 Dec.  $\tau+1$  allen een jaar ouder zijn en staan in de ouderdomsklasse  $\theta+1$ .

Er zijn personen ingekomen, die elders tot een dergelijke verzameling behoord hebben, en wel:  $I_{\tau-\theta}^{\tau+1}$ .

Van de  $A_{\tau-\theta}^{\tau}$  en van  $J_{\tau-\theta}^{\tau+1}$  zijn er in het jaar  $\tau+1$  in het gebied gestorven ten getale van  $M_{\tau-\theta}^{\tau+1}$ .

Van de  $A_{\tau-\theta}^{\tau}$  en van  $J_{\tau-\theta}^{\tau+1}$  zijn er in het waarnemingsjaar naar elders vertrokken  $E_{\tau-\theta}^{\tau+1}$ .

Op den 31sten Dec. zijn dus in het gebied aanwezig, uit het geboortjaar  $\tau-\theta$ , in de ouderdomsklasse  $\theta+1$ :

$$\theta+1 A_{\tau-\theta}^{\tau+1} = \theta A_{\tau-\theta}^{\tau} + J_{\tau-\theta}^{\tau+1} - E_{\tau-\theta}^{\tau+1} - M_{\tau-\theta}^{\tau+1}. \quad (4)$$

Voor de drie laatste termen rechts vinden we met behulp van (a):

$$M_{\tau-\theta}^{\tau+1} = \theta M_{\tau-\theta}^{\tau} + \theta+1 M_{\tau-\theta}^{\tau+1}; \text{ en gelijkvormige uitdrukkingen voor } E \text{ en } M.$$

Tot de aanwezigen op 31 Dec.  $\tau+2$  en volgende tellingstijden komt men op gelijksoortige wijze.

Hier worde ter loops opgemerkt, dat, indien een volkstelling op een anderen datum b. v. op 1 Dec.  $\tau$  ten uitvoer gebracht is, gemakkelijk de aanwezigen op 31 Dec.  $\tau$  gevonden worden. Dan behoeven slechts de verzamelingen der van 1 Dec. tot 31 Dec. uit  $\tau-\theta$  afkomstig, ingekomenen en vertrokkenen en gestorvenen gevormd te worden; terwijl

$$\theta A_{\tau-\theta}^{\tau} = A_{\tau-\theta}^{1 \text{ Dec. } \tau} + (I - E - M)_{\tau-\theta} \text{ van 1 Dec. tot 31 Dec. } \tau.$$

Dat is: de op 31 Dec. van het jaar  $\tau$  aanwezigen uit

het geboortjaar  $\tau - \theta$  zijn in aantal gelijk aan de op 1 Dec. uit dat jaar aanwezigen, vermeerderd met de van 1 Dec. tot 31 Dec., uit de generatie  $\tau - \theta$  afkomstig, ingekomenen, verminderd met de van 1 Dec. tot 31 Dec.; uit de generatie  $\tau - \theta$  afkomstig, vertrokken en met de aan diezelfde bepaling voldoende gestorven personen. Voor  $\theta = 0$  komt er een term bij: N van 1 Dec. tot 31 Dec.

§ 3. Het is van belang te weten, hoe de personen, die achtercenvolgens eene bevolking vormen, de verschillende grenzen van den ouderdom bereiken.

Wordt het gevonden voor eenjarige generaties, b. v., dan is reeds zeer veel bereikt; voor de grenzen van den ouderdom worden dan genomen de ouderdom 0, 1 en w.

Voor de eerste levensjaren, waarin de sterfte groot en sterk veranderlijk is, kan men als eenheid een maand, of periodes van drie maanden nemen.

Het punt, waarvan uitgegaan wordt, is weder een volkstelling op 31 Dec.  $\tau$ .

$$A^\tau = 0 A_{\tau}^\tau + 1 A_{\tau-1}^\tau + 2 A_{\tau-2}^\tau + \text{enz.} \\ + \theta A_{\tau-\theta}^\tau + \text{enz.} \quad (1)$$

De nuljarig op 31 Dec.  $\tau$  aanwezige personen zullen in het jaar  $\tau + 1$  allen in het gebied den ouderdom 1 bereiken, voor zoover ze niet sterven of vertrekken vóór het bereiken van dien ouderdom.

In het gebied zullen bovendien den ouderdom 1 bereiken de personen, die elders tot een verzameling  $0 A_{\tau}^\tau$  behoord hebben, en nuljarig in het gebied inkomen, voor zoover ze na het inkomen niet sterven of vertrekken vóór het bereiken van den ouderdom 1.

Er zijn echter uit het gebied nuljarig vertrokken: per-

sonen, die tot de  ${}_0 A_\tau^\tau$  en tot de nuljarig uit  $\tau$  afkomstig ingekomenen behoord hebben.

Er zijn in het gebied gestorven nuljarig en uit  $\tau$  afkomstig.

In het gebied bereiken dus den ouderdom 1 uit de generatie  $\tau$ :

$${}_1 V_\tau = {}_0 A_\tau^\tau + {}_0 I_\tau^{\tau+1} - {}_0 E_\tau^{\tau+1} - {}_0 M_\tau^{\tau+1} \quad (4)$$

In het algemeen:

De  $\theta$  jarig op 31 Dec.  $\tau$  aanwezige personen zullen in het jaar  $\tau + 1$  allen in het gebied den ouderdom  $\theta + 1$  bereiken, voor zoover ze niet sterven of vertrekken vóór het bereiken van dien ouderdom.

Bovendien zullen in het gebied den ouderdom 1 bereiken: de personen, die, elders tot een verzameling  ${}_\theta A_\tau^\tau - \theta$  behoord hebbende,  $\theta$  jarig in het gebied gekomen zijn, namelijk voor zoover ze niet nog  $\theta$  jarig weder vertrekken of sterven.

Er vertrekken evenwel uit het gebied vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$ : personen die behoorden bij de  ${}_\theta A_\tau^\tau - \theta$  en bij de  ${}_\theta I_\tau^{\tau+1}$ .

Er sterven personen  $\theta$  jarig, die tot die beide verzamelingen behoorden.

$$\text{Men heeft dus: } {}_{\theta+1} V_{\tau-\theta} = {}_\theta A_{\tau-\theta}^\tau + {}_\theta I_{\tau-\theta}^{\tau+1} - {}_\theta E_{\tau-\theta}^{\tau+1} - {}_\theta M_{\tau-\theta}^{\tau+1} \quad (5)$$

Nog moeten vermeld worden, de personen, die in  $\tau + 1$  den ouderdom 0 bereiken:  ${}_0 V_{\tau+1} = N_{\tau+1}$ .

Nu zijn gevonden:

$${}_0 V_{\tau+1}, {}_1 V_\tau, {}_2 V_{\tau-1}, \text{ enz., } {}_{\theta+1} V_{\tau-\theta} \text{ enz. (6)}$$

Met behulp van de volgens § 2 berekende verzamelingen, die in  $\Delta^{\tau+1}$  voorkomen en van de verzamelingen in  $\tau+2$  gevormd, worden op het eind van  $\tau+2$  gevonden.

$$\begin{aligned} \theta V_{\tau+2}, 1 V_{\tau+1}, 2 V_{\tau}, 3 V_{\tau-1} \text{ enz.,} \\ \theta+2 V_{\tau-\theta} \text{ enz.} \end{aligned} \quad (7)$$

Zoo voortgaande bereikt men het doel geheel voor de generaties  $\tau+1$ ,  $\tau+2$  enz.; voor de vroegere generaties natuurlijk slechts voor een gedeelte, zooals het volgende schema aangeeft, waarbij de generaties  $\tau+2$ ,  $\tau+3$ , enz. weggelaten zijn.

$$\begin{array}{l} \text{In } \tau+1. \quad 0 V_{\tau+1} \quad 1 V_{\tau} \text{ enz. } \theta+1 V_{\tau-\theta} \text{ enz.} \\ \text{In } \tau+2. \quad 1 V_{\tau+1} \quad 2 V_{\tau} \text{ enz. } \theta+2 V_{\tau-\theta} \text{ enz.} \\ \text{In } \tau+3. \quad 2 V_{\tau+1} \quad 3 V_{\tau} \text{ enz. } \theta+3 V_{\tau-\theta} \text{ enz.} \quad (8) \\ \text{enz.} \quad \text{enz.} \quad \text{enz.} \quad \text{enz.} \\ \text{In } \tau+\theta. \quad \theta-1 V_{\tau+1} \quad \theta V_{\tau} \text{ enz.} \quad \text{enz.} \end{array}$$

Voor alle rijen voortgezet tot de wijzer links aan den hoogsten ouderdom gelijk is.

De berekening kan ook direct plaats hebben.

Weder moet het punt van uitgang zijn het resultaat eener volkstelling; met behulp der verzamelingen in het volgende jaar opgemaakt, worden, zooals zooeven besproken is, daaruit opgemaakt de grootheden (6), die nu in omgekeerde volgorde geschreven worden; zij w de hoogste ouderdomsgrens die daarbij voorkomt.

$$\begin{aligned} w V_{\tau-w+1}, \text{ enz. } \theta+1 V_{\tau-\theta}, \theta V_{\tau-\theta+1}, \text{ enz.} \\ 1 V_{\tau}, 0 V_{\tau+1}; \end{aligned} \quad (9)$$

Nu wordt bij ieder dezer verzamelingen gevoegd het aantal van hen, die uit het geboortjaar door den wijzer

rechts aangegeven afkomstig, in de ouderdomsklasse door den wijzer links aangegeven, in het gebied ingekomen zijn, en deze som verminderd met het aantal van hen, die aan dezelfde voorwaarde voldoende het gebied verlieten, en met het aantal van hen, die aan dezelfde voorwaarde voldoende in het gebied stierven. De algebraïsche som is de verzameling van hen, die uit het geboortjaar een ouderdom 1 jaar hooger dan de wijzer links bereiken.

Zoo wordt de bewerking bij  ${}_{\theta} V_{\tau-\theta+1}$ :

$${}_{\theta+1} V_{\tau-\theta+1} = {}_{\theta} V_{\tau-\theta+1} + {}_{\theta} I_{\tau-\theta+1} - {}_{\theta} E_{\tau-\theta+1} - {}_{\theta} M_{\tau-\theta+1} \quad (10).$$

Uit de primaire verzamelingen worden de drie laatste secundaire verzamelingen gevonden door middel van Form c in § 1.

Daar  $w$  de hoogste leeftijd is, wordt  ${}_{w+1} V_{\tau-w+1} = 0$

De reeks wordt achtereenvolgens vergroot door  ${}_{0} V_{\tau+2}$ ,  ${}_{\theta} V_{\tau+3}$  enz., terwijl in allen de wijzer links met de eenheid aangroeit.

§ 4. Waarnemingen overeenkomende met het voorgaande, worden sedert 1870 in ons land ten uitvoer gebracht. Van de gestorvenen worden verzamelingen gevormd, die overeenkomen met de primaire verzamelingen. Echter niet van de ingekomen en vertrokken personen. Dat deze voor een klein gebied noodig zijn, zal door de voorbeelden duidelijk worden, die ik voor de hand weg uit de resultaten heb genomen, die ik verkreeg uit het onderzoek der bevolkingsregisters van de gemeente Deventer.

Ik moet bekennen, dat ik geen bijzonder groote juist-



heid aan deze resultaten toeschrijf, echter een voldoende om als voorbeeld te dienen.

Ik heb deze resultaten getrokken uit de bevolkingsregisters, die na de volkstelling van 1859 ingevuld zijn.

De gegeven getallen zijn de som der voor mannen en vrouwen afzonderlijk gevonden getallen. Niet medegedeeld zijn de getallen van het register der militairen; terwijl ook de bewoners van het krankzinnigen gesticht niet in aanmerking zijn genomen.

Staat *A*, bl. 46 bevat de ingekomen en vertrokken personen uit de geboortejaren 1862 en 1861, 1842 en 1841, 1822 en 1821 afkomstig, die van 1862 tot en met 1873 ingekomen en vertrokken zijn in de opeenvolgende ouderdomsklassen.

Kolom *a* geeft de ouderdomsklasse aan. Kolom *b* en *d* geven de uit de of bovenstaande geboortejaren in de respectieve ouderdomsklassen ingekomen personen aan. Kolom *c* en *e* geven de uit het bovenstaande geboortjaar afkomstig en in de ouderdomsklasse, door kolom *a* aangegeven, vertrokken personen aan.

In de kolommen *b*, *c*, *d* en *e* vindt men telkens twee getallen; het eerste komt overeen met een eerste, het tweede met een tweede primaire verzameling; het eerste met de verzamelingen:  ${}_0 I_t^{t+\theta}$  en  ${}_0 E_t^{t+\theta}$ ; het tweede met de verzamelingen:  ${}_0 I_t^{t+\theta+1}$  en  ${}_0 E_t^{t+\theta+1}$ .

Bij staat *A* is gevoegd een vergelijking van de sommen der ingekomen, vertrokken en gestorven, aan dezelfde voorwaarden voldoende personen.

De getallen, in staat *B* direct verkregen, kunnen ook uit staat *A* opgemaakt worden; de getallen van staat *A* kunnen als controle dienen.

Staat *B*, bl. 47 geeft de verzamelingen van de, uit de ge-

boortejaren '62 en '61, '42 en '41, '22 en '21, in de jaren '62, '63, '64 enz. tot en met '73 ingekomen en vertrokken personen. Ieder getal moet gelijk zijn aan de som van een tweede en een eerste primaire verzameling:

$$I_t^{\tau} = \tau - t - 1 I_t^{\tau} + \tau - t I_t^{\tau};$$

deze laatste moeten telkens overeenkomen met een tweede en een eerste primaire verzameling in twee opeenvolgende horizontale rijen eener zelfde kolom van staat *A* voorkomende.

Staat *C*, bl. 48 geeft: de in de jaren '62, '63 enz. tot '73 in de ouderdomsklassen 0, 1, enz. tot 11, uit de geboortejaren '62 en '61 afkomstig, ingekomen en vertrokken personen.

$\theta I^{\tau} = \theta I_{\tau - \theta - 1}^{\tau} + \theta I_{\tau - \theta}^{\tau}$  en een uitdrukking van denzelfden vorm voor *E* dienden als grond voor de berekening.

Het zal gemakkelijk vallen soortgelijke staten op te maken voor de (uit '42 en '41 afkomstig) 20, 21 enz. 31 jarig ingekomenen en vertrokkenen in '62, '63 enz. '73, uit de gegevens van staat *A*, door voor de ingekomenen een tweede cijfer van kolom *d* te vermeerderen met een eerste cijfer van kolom *b*, beide uit dezelfde horizontale rij; en voor de vertrokkenen een tweede cijfer van kolom *e* te vermeerderen met een eerste cijfer van kolom *c*, telkens uit een zelfde horizontale rij.

Op gelijke wijze worden gevonden: de (uit '22 en '21 afkomstig) in de jaren '62, '63, enz. '73 in de ouderdomsklassen 40, 41 enz. 51 ingekomen en vertrokken personen.

STAAT A.

OUDER- DOMS KLASSE.	UIT 62.		UIT 61.		OUDER- DOMS KLASSE.		UIT 42.		UIT 41.		OUDER- DOMS KLASSE.		UIT 22.		UIT 21.	
	INGEK.	VERTR.	INGEK.	VERTR.	a.	INGEK.	VERTR.	INGEK.	VERTR.	INGEK.	VERTR.	a.	INGEK.	VERTR.	INGEK.	VERTR.
a.	b.	c.	d.	e.		b.	c.	d.	e.		b.	c.	d.	e.	d.	e.
0 jarig	4+8	13+11	5	7	19 jarig	12	17			39 jarig	2	3				
1 "	12+2	7+6	6+8	8+4	20 "	17+17	18+17	19	15	40 "	6+4	3+3	10+3	6+0		
2 "	15+12	2+5	10+9	8+6	21 "	15+22	16+18	19+10	14+15	41 "	7+1	2+4	0+3	3+0		
3 "	14+1	15+13	6+10	3+9	22 "	13+26	13+17	10+14	16+15	42 "	2+3	3+2	1+1	0+0		
4 "	8+5	10+4	5+2	10+8	23 "	21+13	22+14	25+19	9+9	43 "	5+3	5+1	7+1	1+4		
5 "	10+6	14+3	8+7	12+7	24 "	16+16	18+11	23+17	23+15	44 "	1+4	3+5	4+2	4+1		
6 "	6+9	10+4	8+5	5+7	25 "	10+20	14+17	12+17	12+21	45 "	2+2	3+3	1+3	5+3		
7 "	7+7	4+5	3+5	2+4	26 "	28+11	18+9	10+23	26+16	46 "	5+0	4+1	2+3	4+3		
8 "	2+3	5+3	6+4	1+4	27 "	16+13	12+16	23+15	16+12	47 "	1+1	2+4	4+0	2+4		
9 "	5+2	6+6	6+3	4+5	28 "	11+15	13+10	17+11	17+15	48 "	3+1	1+4	3+4	2+0		
10 "	4+3	8+6	1+5	10+5	29 "	14+14	11+7	9+9	15+8	49 "	1+2	0+1	4+0	0+1		
11 "	5+	4+	4+7	0+8	30 "	10+5	10+9	11+10	5+10	50 "	3+1	2+0	5+1	2+0		
12 "			6+	3+	31 "	6	8	6+11	13+6	51 "	5+	2	4+1	3+0		
					32 "			11	12	52 "			0+	2+		

De sommen vormende van overeenkomstige ouderdomsklassen dezer van '62 tot en met '73 waargenomen grootheden, worden daarvoor de volgende waarden gevonden; ter vergelijking zijn de gestorvenen er bij gevoegd die aan dezelfde voorwaarden voldoen:

Uit 62 zijn 1 tot en met 10jarig ingekomen en vertrokken 133 en 136, terwijl stierven 106.

Uit 61 zijn 1 tot en met 10jarig ingekomen en vertrokken 117 en 122, terwijl stierven 115.

Uit 42 zijn 21 tot en met 30jarig ingekomen en vertrokken 309 en 275, terwijl stierven 18.

Uit 41 zijn 21 tot en met 30jarig ingekomen en vertrokken 304 en 289, terwijl stierven 21.

Uit 22 zijn 41 tot en met 50jarig ingekomen en vertrokken 48 en 50, terwijl stierven 35.

Uit 21 zijn 41 tot en met 50jarig ingekomen en vertrokken 49 en 39, terwijl stierven 42.

## STAAT B.

IN DE JAREN.	UIT 62.		UIT 61.		UIT 42.		UIT 41.		UIT 22.		UIT 21.	
	IN- GEK.	VER- TR.	IN- GEK.	VER- TR.	IN- GEK.	VER- TR.	IN- GEK.	VER- TR.	IN- GEK.	VER- TR.	IN- GEK.	VER- TR.
	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	i.	j.	k.	l.
62	4	13	11	15	29	35	38	29	8	6	10	9
63	20	18	18	12	32	33	20	31	11	5	4	0
64	17	8	15	9	35	31	39	24	3	7	8	1
65	26	20	15	19	47	39	43	32	8	7	5	8
66	9	23	10	20	29	32	29	27	4	4	3	6
67	15	18	15	12	26	25	27	47	6	8	5	7
68	12	13	8	9	48	35	46	32	7	7	7	5
69	16	8	11	5	27	21	32	29	1	3	3	6
70	9	10	10	8	24	29	20	30	4	5	8	0
71	8	9	4	14	29	21	20	13	2	4	5	3
72	6	14	9	5	24	17	16	23	5	3	5	3
73	8	10	13	11	11	17	22	18	6	2	1	2

## STAAT C.

UIT 62 EN 61.

IN DE JAREN.	OUD.	INGEK.	VERTR.
62	0	4+5	13+7
63	1	12+8	7+4
64	2	15+9	2+6
65	3	14+10	15+9
66	4	8+2	10+8
67	5	10+7	14+7
68	6	6+5	10+7
69	7	7+5	4+2
70	8	2+4	5+4
71	9	5+3	6+5
72	10	4+5	8+5
73	11	5+7	4+8

Zooals gezegd is behoeft staat C voor het vervolg niet opgemaakt te worden. De verzamelingen, in staat A en in staat B gevormd, zijn noodig voor de kennis der veranderingen in de grootte der bevolking en voor de kennis van de wijze, waarop eene bevolking de verschillende klassen van den ouderdom doorloopt.

Het zij mij vergund hier nogmaals te doen uitkomen het verschil van deze beide voortaan te gebruiken verzamelingen en het doel waartoe ze dienen, door de voorstelling, dat de eerste, dienende om de grootte eener bevolking te bepalen als het ware het werk is der gemeente ambtenaren; dat de tweede, dienend tot grondslag voor de berekening der sterfte naar den ouderdom, het werk is der centrale bureaux van statistiek.

Voor het eerste zou voldoende zijn: de scheiding der ingekomen en vertrokken en gestorven personen, naar het geboortjaar waaruit ze afkomstig zijn; voor het tweede moet de scheiding der waargenomen personen plaats hebben naar de ouderdomsklasse *en* het geboortjaar.

Voor het eerste zoude een schema van den volgenden vorm voldoende zijn.

1874. I.

GEBOORTE- JAAR.	INGEKOMEN.	VERTROKKEN.	GESTORVEN.
1874.			
1873.			
1872.			
enz.	enz.	enz.	

Voor het tweede is een schema noodig van den vorm:  
 Waarnemingsjaar 1874. II. Waarnemingsjaar 1875.

OUDERDOMS- KLASSE.	GEBOORTE JAREN.	INGEKOMEN.	VERTROKKEN.	GESTORVEN.	OUDERDOMS- KLASSE.	GEBOORTE- JAREN.	INGEKOMEN.
0/1	1874.				0/1	1875.	
	1873.					1874.	
1/2	1873.				1/2	1874.	
	1872.					1873.	
2/3	1872.				2/3	1873.	
	1871.					1872.	
enz.		enz.		enz.			

Altijd is het laatste geboortjaar, vermeerderd met de benedengrens der er bijbehorende ouderdomsklasse, gelijk aan het vroegste geboortjaar, vermeerderd met de boven-

grens der er bij behorende ouderdomsklasse, gelijk aan het waarnemingsjaar.

In staten van dezen vorm heb ik mijn waarnemingen door streepjes aangegeven. Ik kon dit doen, daar ik alleen nog er bijvoegde een scheidingslijn naar het geslacht. Worden meerdere onderscheidingen geeischt, b. v. of de ingekomenen en vertrokkenen naar en uit een gemeente in de provincie, of buiten de provincie, of het buitenland verhuisd zijn; worden ook onderscheidingen naar burgerlijken stand geeischt, of andere onderscheidingen, dan zullen de staten te groot worden.

Opmerkingen omtrent de wijze waarop dit bezwaar verholpen zou kunnen worden zouden mij te veel tot de techniek brengen, terwijl ik mij hier ook onthouden moet van de beschrijving van bevolkingsregisters enz.

Slechts nog eene opmerking en wel deze: wordt een waarneming van de gestorvenen, ingekomenen en vertrokkenen in de laagste ouderdomsklassen, met kleine tijdseenheden, b. v. van eene maand, of van drie maanden, vereischt, dan gelden dezelfde wetten die vroeger behandeld zijn. Daar het hier niet zoozeer op de grootte der bevolking op bepaalde tijdstippen in de maandklassen aankomt, maar het doel is: te vinden, hoe geboren en vertrokkenen die verschillende maandklassen doorloopen, zal een schema van den vorm II voldoende zijn. De ingekomenen en vertrokkenen kunnen des noods weggelaten worden, zonder dat de juistheid der resultaten aanmerkelijk verminderd wordt.

Het schema III en het schema IV mogen de afzonderlijke bespreking vervangen.

## III.

OPNEMINGSJAAR  $\tau$ .

Opnemingsmaand Januari.		Opnemingsmaand Februari.	
OUDE- DOM IN MAAN- DEN.	GEBOORTE- MAAND.	OUDE- DOM IN MAAN- DEN.	GEBOORTE- MAAND.
0/1	Jan. $\tau$ .	0/1	Febr. $\tau$ .
	Dec. $\tau-1$ .		Jan. $\tau$ .
1/2	Dec. $\tau-1$ .	1/2	Jan. $\tau$ .
	Nov. $\tau-1$ .		Dec. $\tau-1$ .
2/3	Nov. $\tau-1$ .	2/3	Dec. $\tau-1$ .
	Oct. $\tau-1$ .		Nov. $\tau-1$ .
3/4	Oct.	3/4	Nov.
	Sept.		Oct.
4/5	Sept.	4/5	Oct.
	Aug.		Sept.
5/6	Aug.	5/6	Sept.
	Juli.		Aug.
6/7	Juli.	6/7	Aug.
	Juni.		Juli.
7/8	Juni.	7/8	Juli.
	Mei.		Juni.
8/9	Mei.	8/9	Juni.
	April.		Mei.
9/10	April.	9/10	Mei.
	Maart.		April.
10/11	Maart.	10/11	April.
	Febr.		Maart.
11/12	Febr. $\tau-1$ .	11/12	Maart.
	Jan. $\tau-1$ .		Febr. $\tau-1$ .
12/13	Jan. $\tau-1$ .	12/13	Febr. $\tau-1$ .
	Dec. $\tau-2$ .		Jan. $\tau-1$ .

enz.

enz.

Men ziet hoe het schema, voor elke waarnemingsmaand, telkens een dubbel hoekje naar beneden geschoven wordt.



Wil men ouderdomsklassen, geboorteperiodes en waarnemingsperiodes van drie maanden, dan zou van een staat van den volgenden vorm gebruik kunnen gemaakt worden.

## IV.

OPNEMINGSJAAR  $\tau$ .

*Opnemingskwartaal Jan., Febr., Maart  $\tau$ .*

OUDERDOM IN MAANDEN.	GEBORTEKWARTAAL.
0/3	Jan., Febr., Maart $\tau$ .
	Oct., Nov., Dec. $\tau-1$ .
3/6	Oct., Nov., Dec. $\tau-1$ .
	Juli, Aug., Sept. $\tau-1$ .
6/9	Juli, Aug., Sept. $\tau-1$ .
	April, Mei, Juni $\tau-1$ .
9/12	April, Mei, Juni $\tau-1$ .
	Jan., Febr., Maart $\tau-1$ .
12/15	Jan., Febr., Maart $\tau-1$ .
	Oct., Nov., Dec. $\tau-2$ .
15/18	Oct., Nov., Dec. $\tau-2$ .
	Juli, Aug., Sept. $\tau-2$ .
18/21	Juli, Aug., Sept. $\tau-2$ .
	April, Mei, Juni $\tau-2$ .
21/24	April, Mei, Juni $\tau-2$ .
	Jan., Febr., Maart $\tau-2$ .

Voor de volgende waarnemingskwartalen zal het schema telkens een dubbel hoekje naar beneden geschoven worden. Verdere onderscheidingen b. v. naar echtheid en onechtheid kunnen dan in de hoofden der volgende kolommen aangegeven worden.

Men behoeft bij dezen vorm, om te weten, in welke ouderdomsklasse een persoon staat, slechts op te merken of de geboortedatum voor of na den waarnemingsdatum ligt; in het eerste geval moet ingevuld worden beneden de dikke lijn, in het tweede boven de dikke lijn, die de gelijknamige jaren, maanden of kwartalen scheidt.

## Derde Hoofdstuk.

§ 1. In het voorgaande hoofdstuk is nagegaan, door welke waarnemingen men in een gegeven gebied, bij een gegeven groep, komt tot de kennis van de grootte der bevolking op bepaalde tijdstippen, en tot de kennis van de wijze waarop gegeven generaties de verschillende eenjarige ouderdomsklassen doorloopen.

In het algemeen zullen in verschillende groepen verschillende oorzaken van verandering heerschen: deze oorzaken moeten met die veranderingen in verband worden gebracht.

Daartoe moeten verhoudingsgetallen bepaald worden. Ten eerste wordt ondersteld, dat er geen ingekomen en vertrokken personen zijn; of, dat terwijl een persoon vertrekt, een ander, die in alle eigenschappen onder de beschouwing vallende met hem overeenkomt, het gebied binnentreedt; met de hierbij komende onderstelling, dat de verhuizing geen invloed heeft.

De vroeger behandelde verzamelingen geven alle aanleiding tot de bepaling van verhoudingsgetallen; zij zullen achtereenvolgens besproken worden.

Het gedeelte, dat van hen, die in een jaar  $t$  geboren worden, op het einde van dat jaar aanwezig is, wordt

$$\text{aangegeven door: } {}_0 P_t = \frac{{}_0 A_t^t}{{}_0 V_t}$$

Het gedeelte, dat van hen, die in den loop van een jaar geboren werden, in den loop van dat jaar sterft, wordt

$$\text{aangegeven door: } {}_0 m'_t = \frac{{}_0 M_t^t}{{}_0 V_t}$$

Het is duidelijk dat  ${}_0 l'_t + {}_0 m'_t = 1$

Het gedeelte, dat van hen, die, uit een gegeven geboortejaar  $t$  afkomstig, een gegeven ouderdom  $\theta$  bereiken, ('t geen plaats heeft in het jaar  $t + \theta$ ), aanwezig is op

$$\text{het einde van } t + \theta, \text{ wordt aangegeven door: } {}_\theta l'_t = \frac{{}_\theta A_t^{t+\theta}}{\theta V_t}$$

Het gedeelte, dat sterft in  $t + \theta$ , wordt aangegeven

$$\text{door } {}_\theta m'_t = \frac{\theta M_t^{t+\theta}}{\theta V_t}$$

Het is duidelijk dat  ${}_\theta l'_t + {}_\theta m'_t = 1$

Het gedeelte, dat van hen, die op het einde van een gegeven jaar  $t$ , uit dat geboortejaar, dus in de ouderdomsklasse  $0$  aanwezig zijn, den ouderdom  $1$  bereikt, wordt

$$\text{aangegeven door: } {}_0 l''_t = \frac{{}_0 V_t}{{}_0 A_t}$$

Het gedeelte, dat jonger dan  $1$  sterft, door:

$${}_0 m''_t = \frac{{}_0 M_t^{t+1}}{{}_0 A_t}; \text{ terwijl } {}_0 l''_t + {}_0 m''_t = 1.$$

Het gedeelte, dat van hen, die, uit een geboortejaar  $t$  afkomstig, op het einde van het jaar  $t + \theta$  in de ouderdomsklasse  $\theta$  aanwezig zijn, den ouderdom  $\theta + 1$  bereikt,

$$\text{wordt aangegeven door: } {}_\theta l''_t = \frac{\theta + 1 V_t}{\theta A_t^{t+\theta}}$$

Het gedeelte, dat sterft vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$ , wordt aangegeven door:  ${}_{\theta} m''_t = \frac{{}_{\theta} M_t^{t+\theta+1}}{{}_{\theta} A_t^{t+\theta}}$ .

Het is duidelijk, dat:  ${}_{\theta} l''_t + {}_{\theta} m''_t = 1$ .

a. De gebrokens, die aangeven welk gedeelte van hen, die uit de generatie  $t$  den ouderdom  $\theta$  bereiken, ook den ouderdom  $\theta + 1$  bereikt; en welk gedeelte sterft vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$ , vormen samen de eenheid.

Het eerste noemend:  ${}_{\theta} p_t$ , het tweede noemend:  ${}_{\theta} q_t$ , vindt men:

$${}_{\theta} p_t = \frac{\theta + 1 V_t}{\theta V_t}; \quad {}_{\theta} q_t = \frac{\theta M_t}{\theta V_t}; \quad {}_{\theta} p_t + {}_{\theta} q_t = 1.$$

Beide gebrokens laten zich uitdrukken in de reeds behandelde gebrokens.

$${}_{\theta} p_t = \frac{\theta + 1 V_t}{\theta V_t} = \frac{\theta A_t^{t+\theta}}{\theta V_t} \times \frac{\theta + 1 V_t}{\theta A_t^{t+\theta}} = {}_{\theta} l'_t \times$$

$$\frac{{}_{\theta} l''_t}{\theta m'_t \theta m''_t} = (1 - \theta m'_t) (1 - \theta m''_t) = 1 - \theta m'_t - \theta m''_t + \theta m'_t \theta m''_t \quad (1)$$

$$\text{Daar } {}_{\theta} q_t = 1 - {}_{\theta} p_t, \text{ wordt gevonden: } {}_{\theta} q_t = \frac{\theta m'_t + \theta m''_t - \theta m'_t \theta m''_t}{\theta m'_t \theta m''_t} \quad (2)$$

Langs een anderen weg wordt hetzelfde resultaat gevonden:

$${}_{\theta} q_t = \frac{\theta M_t}{\theta V_t} = \frac{\theta M_t^{t+\theta} + \theta M_t^{t+\theta+1}}{\theta V_t} = \theta m'_t +$$

$$\frac{\theta M_t^{t+\theta+1}}{\theta V_t} = \theta m'_t + \frac{\theta M_t^{t+\theta+1}}{\theta A_t^{t+\theta}} \times \frac{\theta A_t^{t+\theta}}{\theta V_t} =$$

$$\theta m'_t + \theta m''_t \times \theta l'_t = \theta m'_t + \theta m''_t - \theta m'_t \theta m''_t$$

b. Het gebroken, dat aangeeft, welk gedeelte van hen, die uit de generatie  $t$  op den 31sten Dec. van een jaar  $\tau$  aanwezig zijn, in de ouderdomsklasse  $\theta$ , ( $\tau$  dus  $t + \theta$ ), op den 31 Dec.  $\tau + 1$  aanwezig is, wordt aangeduid door  ${}_{\theta}P_t$ ; het gedeelte, dat van hen in het jaar  $\tau + 1$  sterft wordt genoemd  ${}_{\theta}Q_t$ . Dan is  ${}_{\theta}P_t + {}_{\theta}Q_t = 1$ ;

$${}_{\theta}P_t = \frac{\theta + 1 A_t^{t+\theta+1}}{\theta A_t^{t+\theta}} ; \quad {}_{\theta}Q_t = \frac{M_t^{t+\theta+1}}{\theta A_t^{t+\theta+1}}$$

$${}_{\theta}P_t = \frac{\theta + 1 A_t^{t+\theta+1}}{\theta + 1 V_t} \times \frac{\theta + 1 V_t}{\theta A_t^{t+\theta}} = \theta + 1 P'_t \times$$

$${}_{\theta}P''_t \quad (3)$$

$${}_{\theta}Q_t = 1 - {}_{\theta}P_t = 1 - \theta + 1 P'_t \times {}_{\theta}P''_t = \theta m''_t + \theta + 1 m'_t - \theta m''_t \times \theta + 1 m'_t \quad (4)$$

Hetzelfde wordt ook op andere wijze verkregen.

c. De derde verzameling, die van de in een jaar in een ouderdomsklasse gestorvenen, geeft aanleiding tot de vraag:

Welk gedeelte van de som van hen, die uit een generatie  $t$  op het einde van een gegeven jaar  $t + \theta$  in een ouderdomsklasse  $\theta$  stonden, en van hen, die uit de generatie  $t + 1$  in het volgende jaar den ouderdom  $\theta$  bereikten, is: 1<sup>o</sup>. de som van hen die uit de generatie  $t$  den ouderdom  $\theta + 1$  bereikten, en van hen die uit het geboortjaar  $t + 1$  op het einde van  $t + \theta + 1$  aanwezig waren; 2<sup>o</sup>. de som van de uit de generatie  $t$  en  $t + 1$  in het jaar  $t + \theta + 1$  gestorvenen?

Noemen we het eerste gebroken:  ${}_{\theta}L^{t+\theta+1}$ ;

het gebroken dat de tweede vraag beantwoordt:  ${}_{\theta}K^{t+\theta+1}$

$$\begin{aligned} {}_{\theta}L^{t+\theta+1} &= \frac{{}_{\theta+1}V_t + {}_{\theta}A_{t+1}^{t+\theta+1}}{{}_{\theta}A_t^{t+\theta} + {}_{\theta}V_{t+1}}; \\ {}_{\theta}K^{t+\theta+1} &= \frac{{}_{\theta}M_t^{t+\theta+1} + {}_{\theta}M_{t+1}^{t+\theta+1}}{{}_{\theta}A_t^{t+\theta} + {}_{\theta}V_{t+1}}; \end{aligned} \quad (5)$$

${}_{\theta}L^{t+\theta+1} + {}_{\theta}K^{t+\theta+1} = 1$ ; uit de optelling der beide voorgaande gebroekens, daar:  ${}_{\theta+1}V_t + {}_{\theta}M_t^{t+\theta+1} = {}_{\theta}A_t^{t+\theta}$  en  ${}_{\theta}A_{t+1}^{t+\theta+1} + {}_{\theta}M_{t+1}^{t+\theta+1} = {}_{\theta}V_{t+1}$ .

L en K laten zich niet uitdrukken in  $l', l'', m', m''$  alleen.

$$\begin{aligned} {}_{\theta}L^{t+\theta+1} &= \frac{{}_{\theta}A_t^{t+\theta} \times {}_{\theta}l_t'' + {}_{\theta}V_{t+1} \times {}_{\theta}l_{t+1}'}{{}_{\theta}A_t^{t+\theta} + {}_{\theta}V_{t+1}}; \\ {}_{\theta}M^{t+\theta+1} &= \frac{{}_{\theta}A_t^{t+\theta} \times {}_{\theta}m_t'' + {}_{\theta}V_{t+1} \times {}_{\theta}m_{t+1}'}{{}_{\theta}A_t^{t+\theta} + {}_{\theta}V_{t+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Dit zijn de eenvoudigste uitdrukkingen, die aantoonen, hoe de verschillende waarden in verschillende jaren afhangen van de verschillende relatieve waarden van gelijktijdiglevenden uit het eerste geboortejaar en evenoudlevenden uit het tweede geboortejaar.

Het is noodig na te gaan, wat bij de drie vragen ondersteld wordt omtrent de verdeeling der verzamelingen van levenden en gestorvenen.

Bij de eerste bepaling wordt ondersteld, dat het feit, dat tot grondslag dient, is: het in den loop van een kalenderjaar geboren zijn; het in den loop van een kalenderjaar een gegeven ouderdom bereiken; daarbij wordt dus niet gelet op het onderscheid, dat in de gelijksoortige gebro-

kens zoude ontstaan, indien gevraagd werd, welk gedeelte van hen, die in de maand Juni b.v. geboren werden, bereikte den ouderdom 1 jaar; welk gedeelte van hen, die in de maand Juni den ouderdom  $\theta$  bereikten, bereikte ook den ouderdom  $\theta + 1$ . Wat de hoogere levensjaren betreft, zal het verschil wel niet merkbaar zijn; voor de eerste levensjaren wordt de invloed gevonden door de daarbij gebruikte maandelijksche of driemaandelijksche opnemingen.

Bij de tweede bepaling: welk gedeelte van hen, die uit een gegeven geboortejaar op het eind van een gegeven jaar aanwezig zijn, is aanwezig op, welk gedeelte sterft vóór het einde van het volgende jaar?, is de voorwaarde, waarvan uitgegaan wordt, het aanwezig zijn op een gegeven datum in een éénjarige ouderdomsklasse, en we behoeven slechts de grensgevallen te beschouwen, om in te zien, dat behalve den bij de eerste vraag behandelenden invloed nog een veel grooter oorzaak van verschillen komt.

Stellen we toch, dat allen bij het begin van het er bij behoorende geboortejaar geboren zijn, en laat de ouderdomsklasse zijn  $\theta$ , dan zou de vraag worden, welk gedeelte van hen, die den ouderdom  $\theta + 1$  bereikten, bereikt ook den ouderdom  $\theta + 2$ ; terwijl, als allen bij het einde van het geboortejaar geboren waren, de vraag zou worden, welk gedeelte van hen, die den ouderdom  $\theta$  bereiken, bereikt ook den ouderdom  $\theta + 1$ . En het valt niet te betwijfelen, dat door de aanhoudende veranderingen in de sterfte, door de ingekomenen en vertrokkenen, de verdeling in de verschillende verzamelingen van gelijktijdiglevenden, in de verschillende jaren tot grondslag der berekeningen dienende, aanmerklijke verschillen kan vertoonen.

Bij de derde bepaling heeft men nog aanmerkeliĳker verschillen te wachten in de waarden der gezochte gebroekens voor een zelfde  $\theta$  en verschillende waarden van  $t$ , daar niet alleen de bij de voorgaande vragen behandelde oorzaken invloed uitoefenen, maar ook de verhouding van de  ${}_{\theta} \Delta_t^{t+\theta}$  tot de  ${}_{\theta} \nabla_{t+1}$  van 'de eene waarde van  $t$  tot de andere veranderen kan en zal.

De bepaling der in deze paragraaf besproken gebroekens zou van groot belang zijn; deze bepaling is volstrekt niet onmogelijk; daarvoor zouden de bevolkingsregisters een betrekkelijk zeer goed materiaal opleveren, als de ingekomenen en vertrokkenen er uit genomen werden.

De grootheden  $l'$ ,  $m'$ ;  $l''$  en  $m''$  zijn voornamelijk als hulpmiddelen ter berekening der grootheden  $p$  en  $q$ ,  $P$  en  $Q$  te beschouwen.

De reeks der  ${}_0 q_t, {}_1 q_t, {}_2 q_t$  enz. geeft een overzicht van de sterfte der generatie  $t$  naar den ouderdom.

De reeks  ${}_0 q_t, {}_0 q_{t+1}, {}_0 q_{t+1}$  enz. geeft een overzicht van de verandering met den tijd, der sterfte van de geboren.

Evenzoo geeft de reeks:  ${}_{\theta} q_t, {}_{\theta} q_{t+1}$  enz. een overzicht van de verandering met den tijd, der sterfte van de den ouderdom  $\theta$  bereikenden.

De reeks der  ${}_{\theta} Q_t$  voor een constante  $t$ , met bijvoeging van  ${}'_0 m_t$ , geeft een overzicht van de sterfte der generatie  $t$ , in de opeenvolgende kalenderjaren.

§ 2. Vergelijking der waarnemingen omtrent levenden en gestorvenen met inachtneming van ingekomen en vertrokken personen.



Tot het vinden der bevolking van een gebied op het einde van ieder kalenderjaar, en tot het vinden der verzamelingen van evenoud levenden voor de verschillende van 0 af met één jaar opklimmende ouderdomsgrenzen in een gebied, is, zooals vroeger aangetoond is, noodig de kennis der bevolking op het einde van een jaar, naar ouderdomsklassen of geboortejaren verdeeld, de kennis der geboren en in de volgende jaren, der verzamelingen van gestorven, vertrokken en ingekomen personen, naar ouderdomsklasse en geboortjaar gescheiden. Al die verzamelingen worden bekend ondersteld.

De ingekomen en gestorven worden als van betrekkelijk geringen storenden invloed ondersteld, en aangenomen dat het onmogelijk is ze ieder afzonderlijk in rekening te brengen. Er zijn dus onderstellingen noodig omtrent hunne verdeling naar den ouderdom en omtrent den tijd waarop de verhuizingen plaats hebben; de bijzondere gevallen worden buiten gesloten, dat in een gezelschap, in een maatschappij, de intredenden en uittredenden dit doen of op bepaalde tijden van het jaar, of bij het bereiken van een bepaalden ouderdom, welke gevallen vrij gemakkelijk in rekening gebragt worden.

Bij het onderzoek der gemeente Deventer, heb ik mij uit de bevolkingsregisters overtuigd dat de verhuizingen tamelijk geregeld over het jaar verspreid zijn, dat, wat den ouderdom betreft, waarop ze plaats hebben, de verdeling over verschillende ouderdomsjaren zonder groote sprongen plaats heeft en voor de verschillende waarnemingsjaren zoo constant is, als men van te voren niet zou vermoeden. Zonderling is het op te merken, hoe de verhuizingen, die toch aan moreele en sociale oorzaken gebonden zijn, zeker even constant zijn als de sterfgevallen,

die toch grootendeels aan physische oorzaken toe te schrijven zijn.

De figuur (17), is een graphische voorstelling van de verdeeling naar den ouderdom voor de ingekomenen en vertrokkenen van 1862 tot 1873.

Op de horizontale as zijn aangegeven de ouderdomsjaren; ieder millimeter komt met een cenjarige ouderdomsklasse overeen.

Op de verticale as geven de getallen millimeters aan.

De figuur is verkleind naar een teekening, wier afmetingen het dubbel bedroegen, waarbij ieder millimeter met een ingekomene of vertrokkenene overeenkwam; gelijksoortige constructies, voor mannen en vrouwen afzonderlijk verricht, laat ik achterwege, daar er toch een groote overeenkomst bestaat.

De constructie is voor onze figuur de volgende.

In de ouderdomsklasse 0, is in de waarnemingsjaren een aantal  $a$  ingekomen; in de ouderdomsklasse 1, een aantal  $b$ ; in de ouderdomsklasse 2 een aantal  $c$ , enz.; een rechthoek wordt geconstrueerd, waarvan de basis een millimeter is en de hoogte  $a/4$ ; een volgende, waarvan de basis is de tweede millimeter en de hoogte  $b/4$ ; een volgende waarvan de hoogte is  $c/4$  enz. enz.

De middenpunten der bovenzijden dier rechthoeken vereenigd geven reeds een tamelijk regelmatig figuur. Vervolgens wordt beproefd een kromme te trekken, die zooveel mogelijk al die lijntjes snijdt, en aan de voorwaarde voldoet, dat de inhoud door die kromme en de assen ingesloten gelijk is aan de som aller rechthoekjes; 't geen vrij spoedig gelukt. Een gelijke constructie heeft plaats voor de vertrokkenen. De kromme der ingekomenen is

aangegeven door een gestippelde lijn; die der vertrokken personen door de volle lijn.

Dat onderzoek heeft mij voldoende aangetoond, dat de hypothese van Zeuner, evenredigheid aan de levenden, (die zeer wel waar kan zijn voor een levensverzekering-maatschappij) althans voor Deventer van de werkelijkheid afwijkt, voor verschillende periodes.

Zoolang geen wet gevonden is, die de sterfte op een bepaalden tijd en bij een bepaalden leeftijd doet kennen, en die zal voorloopig wel tot de wenschelijke maar voor verscheiden ons volgende generaties onbereikbare zaken behooren, moeten we ook onderstellingen maken, waar het de storingen betreft, omtrent de sterfte, zoowel naar den tijd als naar den ouderdom; deze onderstellingen zullen van zelf in het volgende besproken worden.

Het is duidelijk, dat, indien het gedeelte bepaald wordt, dat van een verzameling aangegeven voorwaarden voldoende tevens aan andere voorwaarden voldoet, en het gedeelte, dat niet aan die andere voorwaarden voldoet, die beide gebrokens de eenheid vormen. Zoodat het slechts noodig zijn zal de  $m'$ ,  $m''$ ,  $q$  en  $Q$  te berekenen, en, indien men de derde verzameling er bij wil nemen, de  $K$ .

#### a. Eerste primaire Verzameling.

In de onderstelling dat  ${}_0 m_t'$  de juiste waarde is van het gebroken, aangevende het gedeelte, dat van hen, die uit een geboortjaar  $t$  den ouderdom  $\theta$  bereiken, vóór het einde van  $t + \theta$  gestorven is, zullen er van de  ${}_0 V_t$  sterven:  ${}_0 V_t \times {}_0 m_t'$ .

Maar onder de waargenomen gestorvenen zijn er die niet onder de  ${}_0 V_t$  begrepen waren; terwijl er van de  ${}_0 V_t$  gestorven zijn, die niet onder de waargenomen gestorvenen begrepen zijn.

Was dus bekend, kon men nagaan, hoe groot het aantal der eerste gestorvenen was, en hoe groot het aantal vertrokken en daarna elders gestorvenen was, dan had men deze verbeteringen slechts aan het aantal der waargenomen gestorvenen aan te brengen. Dit is bijna onmogelijk, althans voor de vertrokkenen; voor de ingekomenen zoude het met eenige moeite ten uitvoer kunnen gebragt worden.

Er wordt ondersteld dat de ingekomenen en vertrokkenen bij deze primaire verzameling gelijkmatig verdeeld zijn over den driehoek ABC, die haar voorstelt (fig. 15); dat ze in het punt G, het zwaartepunt van dien driehoek ten opzichte van BC, vereenigd gedacht kunnen worden. Dit komt daarmede overeen, dat de ingekomenen en vertrokkenen gedacht worden te zijn geboren op een  $\frac{1}{3}$  van het jaar  $t$ , en bij het verhuizen oud te zijn  $\theta + \frac{1}{3}$ ; in dit geval zullen zij vóór het einde van  $t + \theta$  nog leven  $\frac{1}{3}$  jaar, en wel, wat den ouderdom betreft, van  $\theta + \frac{1}{3}$  tot  $\theta + \frac{2}{3}$ .

Onderstel dat bekend is  ${}_0 q_t$ ; zonder een fout van groot belang te maken (1) kan ondersteld worden, dat

---

(1) Het volgende diene als benaderende bepaling van de grootte der fout.

Ik onderstel namelijk daarbij, dat de personen, die van een gegeven aantal geboren en  $f(0)$ , den ouderdom  $\theta$  bereiken, voorgesteld worden door  $f(\theta)$ . Op deze wijze wordt de invloed van den geboortetijd en daarmede van

het gedeelte, dat van hen, die uit het geboortejaar  $t$  den ouderdom  $\theta + \frac{2}{3}$  bereikt hebben, vóór het bereiken van den leeftijd  $\theta + \frac{2}{3}$  sterft, gelijk is aan  $\frac{1}{3} \theta q_i$

den waarnemingstijd weggedacht; bovendien wordt de vermindering continu gedacht, 't geen ze niet is.

Zij  $f(\theta + d\theta)$  het aantal, dat den ouderdom  $\theta + d\theta$  bereikt;

$f(\theta) - f(\theta + d\theta)$  het aantal personen, dat van  $f(\theta)$   $\theta$ jarig sterft;

$\frac{f(\theta) - f(\theta + d\theta)}{f(\theta)}$  het gedeelte dat van de personen, die den ouderdom  $\theta$  bereiken,  $\theta$ jarig sterft. Het zal zijn een functie van  $\theta$  en  $= \varphi(\theta) d\theta$ .

Dus is  $\frac{f(\theta + d\theta) - f(\theta)}{f(\theta)} = -\varphi(\theta) d\theta$ ,

of  $\frac{d f(\theta)}{f(\theta)} = -\varphi(\theta) d\theta$ ;  $d \log. f(\theta) = -\varphi(\theta) d\theta$ ;

integreerend tusschen de grenzen  $\theta'$  en  $\theta''$  verkrijgt men:

$$\frac{f(\theta'')}{f(\theta')} = e^{-\int_{\theta'}^{\theta''} \varphi(\theta) d\theta}$$

Als men de eerste levensjaren uitzondert, en de hoogste, (men bedenke, dat bij de eerste levensjaren een maand als eenheid aangenomen wordt, en bij de hoogste bijna geen ingekomenen en vertrokkenen zijn), kan men onderstellen, dat  $\varphi(\theta)$  in den loop van een éénjarige ouderdomsklasse niet verandert; stellen we daarbij dus  $\varphi(\theta) = a$ .

Het gedeelte, dat van de den ouderdom  $\theta$  bereikenden sterft vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$ , wordt:

Bij de in de gemeente waargenomen gestorvenen moeten dus gevoegd worden de elders van de vertrokkenen gestorven personen:  ${}_{\theta} E_t^{\theta} \times \frac{1}{3} {}_{\theta} q_t$ :

Van het aantal moet afgetrokken worden, het aantal, dat van de ingekomenen gestorven is in de gemeente, en wel:  ${}_{\theta} I_t^{\theta} \times \frac{1}{3} {}_{\theta} q_t$ ; zoodat:

$${}_{\theta} q = \frac{f.(\theta) - f.(\theta + 1)}{f.(\theta)} = 1 - e^{-a} = a - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} - \text{enz.}$$

Op ons geval toepassend en het gebroken  $q'$  noemend, wordt gevonden:

$$q' = \frac{f.(\theta + \frac{2}{3}) - f.(\theta + 1)}{f.(\theta + \frac{2}{3})} = \frac{e^{-a(\theta + \frac{2}{3})} - e^{-a(\theta + 1)}}{e^{-a(\theta + \frac{2}{3})}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{3}a} = \frac{a}{3} - \frac{a^2}{1.2.9} + \frac{a^3}{1.2.3.27} - \text{enz.}$$

$$\frac{{}_{\theta} q}{q'} = \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-\frac{1}{3}a}} = 1 + e^{-\frac{1}{3}a} + e^{-\frac{2}{3}a} = 3 - a + \frac{5a^2}{1.2.9} - \text{enz.} + (-1)^n \frac{(2^n + 1)a^n}{1.2 \dots n 3^n}$$

Waar  $a = -\log(1 - {}_{\theta} q)$  klein is, kan gesteld worden

$$q' = \frac{{}_{\theta} q}{3 - a};$$

en voor  $a$  substitueerend  ${}_{\theta} q$ ,  $q' = \frac{{}_{\theta} q}{3 - \frac{{}_{\theta} q}{q'}}$ .

${}_{\theta} q$  is over het algemeen klein genoeg, om met gerustheid te kunnen gebruiken  $\frac{{}_{\theta} q}{3}$ .

$$\frac{1}{3} \theta q_t \times \theta m'_t = \theta M_t^{t+\theta} - \theta (I - E)_t^{t+\theta} \times$$

(1). Hieruit:  $\theta m'_t$ .

b. Tweede primaire Verzameling.

Indien  $\theta A_t^{t+\theta}$  het aantal personen is dat uit het geboortejaar  $t$  op het einde van  $t + \theta$  in de ouderdomsklasse  $\theta$  aanwezig is, zullen daarvan in het jaar  $t + \theta + 1$  sterven  $\theta A_t^{t+\theta} \times \theta m''_t$ .

Daar echter van de aanwezigen enkelen vertrekken en voor een gedeelte van  $t + \theta + 1$  buiten het gebied kunnen sterven, dus niet onder de waargenomen  $\theta M_t^{t+\theta+1}$  begrepen zijn; daar er verder onder de  $\theta M_t^{t+\theta+1}$  zijn, die niet tot de  $\theta A_t^{t+\theta}$  behoord hebben, maar in  $t + \theta + 1$  ingekomen zijn; moeten bij de  $\theta M_t^{t+\theta+1}$  de eersten worden opgeteld, daarvan de laatsten afgetrokken worden.

Tot de directe waarneming niet in staat zijnde, veronderstellen we weder gelijkmatige verdeling over den driehoek, ACD, fig. 15, die de tweede primaire verzameling voorstelt, en dat alle ingekomenen en vertrokkenen in het zwaartepunt E van den driehoek ten opzichte van  $\theta + 1$  vereenigd zijn; dat het dus is, alsof allen geboren waren op  $\frac{2}{3}$  van het jaar  $t$  en bij het verhuizen oud waren  $\theta + \frac{2}{3}$ ; alsof dus allen na hunne verhuizing nog  $\frac{1}{3}$  van de ouderdomsklasse  $\theta$  doorloopen moeten vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$ .

De verbetering aan  $\theta M_t^{t+\theta+1}$  aan te brengen is zoo:  $\frac{1}{3} \theta q_t \theta (I - E)_t^{t+\theta+1}$ .

$${}_0 A_t^{t+\theta} \times {}_0 m_t'' =$$

$${}_0 M_t^{t+\theta+1} + \frac{1}{3} {}_0 q_t {}_0 (1 - E)_t^{t+\theta+1}. \quad (2)$$

Waaruit  ${}_0 m_t''$  berekend wordt;  ${}_0 q$  is hier ook bekend ondersteld.

### Eerste secundaire Verzameling van gestorvenen.

Bij de voorgaande onderzoekingen, werd gevonden: form (1) van III § 1.

$${}_0 q_t = {}_0 m_t' + {}_0 m_t'' - {}_0 m_t' {}_0 m_t''. \quad (3)$$

Als een eerste benadering kan in de zoeven gevonden uitdrukkingen voor  $m'$  en  $m''$  de term met  $\frac{1}{3} {}_0 q_t$  verwaarloosd worden. Met de daardoor gevonden waarden van  $m'$  en  $m''$  wordt  ${}_0 q_t$  berekend; deze waarde in (1) en (2) invoerende, en met de zoo gevonden waarden van  $m'$  en  $m''$  de form (3) berekenende, vindt men een verbeterde waarde van  ${}_0 q_t$ ; wordt daarmede dezelfde bewerking herhaald, dan zal men voor  $m'$ ,  $m''$  en  $q$  reeds zeer juiste waarden gevonden hebben, en behoeft men niet verder te gaan.

Het is zeker niet noodeloos  ${}_0 q_t$  ook direct te zoeken.

Van de  ${}_0 V_t$  zullen vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$  sterven:  ${}_0 V_t \times {}_0 q_t$ . In het algemeen zal het waargenomen aantal,  ${}_0 M_t = {}_0 M_t^{t+\theta} + {}_0 M_t^{t+\theta+1}$  verbetering behoeven.

Onder de  ${}_0 M_t$  zijn er, die niet bij de  ${}_0 V_t$  geweest zijn,  $\theta$ jarig en uit  $t$  afkomstig in het gebied ingekomen



personen, die vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$  in het gebied gestorven zijn, terwijl er van de  ${}_{\theta}V_t$   $\theta$ jarig uit het gebied vertrokken zijn en elders gestorven.

In de onderstelling dat de ingekomenen en vertrokkenen gelijkmatig verdeeld zijn, in de geometrische voorstelling over het vierkant ABCD, Fig. 15, kan men aannemen, dat ze in het zwaartepunt van het vierkant geconcentreerd zijn, aannemen dat ze allen in het midden van het jaar  $t$  geboren zijn en bij de verhuizing allen nog  $\frac{1}{2}$  jaar te leven hebben vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$ .

De verbetering aan te brengen aan  ${}_{\theta}M_t$  is dan:

$$-\frac{1}{2} {}_{\theta}q_t \times {}_{\theta}(J - E)_t;$$

$$\text{men verkrijgt: } {}_{\theta}V_t \times {}_{\theta}q_t = {}_{\theta}M_t - \frac{1}{2} {}_{\theta}q_t \times {}_{\theta}(J - E)_t;$$

$$\text{hieruit: } {}_{\theta}q_t = \frac{{}_{\theta}M_t}{{}_{\theta}V_t + \frac{1}{2} {}_{\theta}(J - E)_t}. \quad (4)$$

De afzonderlijke primaire verzamelingen geven ons nog een andere en waarschijnlijk juistere uitdrukking.

De  ${}_{\theta}(I - E)_t^{t+\theta}$ , beschouwd als in het zwaartepunt van driehoek ABC vereenigd, hebben vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$  nog te leven  $\frac{2}{3}$  jaar; de  ${}_{\theta}(I - E)_t^{t+\theta+1}$  beschouwd als in het zwaartepunt van driehoek ABC vereenigd, hebben vóór het bereiken van den ouderdom  $\theta + 1$  nog te leven  $\frac{1}{3}$  jaar; de verbetering aan  ${}_{\theta}M_t$  aan te brengen wordt dan:  $-\left[\frac{2}{3} {}_{\theta}q_t \times {}_{\theta}(I - E)_t^{t+\theta} + \frac{1}{3} {}_{\theta}q_t \times {}_{\theta}(J - E)_t^{t+\theta+1}\right]$ . Deze uitdrukking wordt voor  ${}_{\theta}(J - E)_t^{t+\theta} = {}_{\theta}(J - E)_t^{t+\theta+1} = \frac{1}{2} {}_{\theta}(J - E)_t$ ,

gelijk aan:  $\frac{1}{2} {}_{\theta} q_t \times {}_{\theta} (J - E)_t$ , 't geen overeenkomt met de bovengevonden uitdrukking (4).

Hier wordt gevonden:

$${}_{\theta} Q_t = \frac{{}_{\theta} M_t}{{}_{\theta} V_t + \frac{2}{3} {}_{\theta} (J - E)_t^{t+\theta} + \frac{1}{3} {}_{\theta} (J - E)_t^{t+\theta+1}} \quad (4')$$

Tweede secundaire Verzameling van gestorvenen.

Bij de voorgaande onderzoekingen is gevonden, waar niet op ingekomenen en vertrokkenen gelet werd:

form. (2) III § 1.

$${}_{\theta} Q_t = {}_{\theta} m_t'' + {}_{\theta+1} m_t' - {}_{\theta} m_t'' \times {}_{\theta+1} m_t' \quad (5)$$

Uit de reeds gevonden waarden van  $m''$  en  $m'$  laat zich  ${}_{\theta} Q_t$  berekenen.

${}_{\theta} Q_t$  kan ook op andere wijze berekend worden.

Van de  ${}_{\theta} A_t^{t+\theta}$  zullen in het jaar  $t+\theta+1$  onder de gegeven omstandigheden sterven:  ${}_{\theta} A_t^{t+\theta} \times {}_{\theta} Q_t$ .

De waargenomen gestorvenen zullen daar in het algemeen van verschillen.

Er zijn er onder, die niet tot de  ${}_{\theta} A_t^{t+\theta}$  behoord hebben, en wel afkomstig uit de  $J_t^{t+\theta+1}$ .

Daarentegen zijn er van de  ${}_{\theta} A_t^{t+\theta}$  vertrokken, en buiten het gebied gestorven, het aantal der vertrokkenen is bekend.

De  $J_t^{t+\theta+1}$  en  $E_t^{t+\theta+1}$  worden weder ondersteld gelijkmatig verdeeld te zijn over het parallelogram ABCD, Fig. 16; worden ze in het zwaartepunt der figuur geconcentreerd gedacht, dan is het alsof ze allen geboren waren op de helft van het jaar  $t$ , en bij hunne verhuizing oud

waren  $\vartheta + 1$ . Dan zullen zij voor het einde van  $t + \vartheta + 1$  nog te leven hebben een half jaar in de ouderdomsklasse  $\vartheta + 1$ . Na de verhuizing zullen dus van de verhuizenden sterven:  $\frac{1}{2} \vartheta q_t \times (J - E)_t^{t + \vartheta + 1}$ ; zoodat indien deze verbetering aan de gestorvenen wordt aangebragt:  ${}_{\vartheta} Q_t =$

$$\frac{M_t^{t + \vartheta + 1} - \frac{1}{2} \vartheta q_t \times (J - E)_t^{t + \vartheta + 1}}{{}_{\vartheta} A_t^{t + \vartheta}}. \quad (6)$$

Het gebruik van de bekende samenstellende primaire verzamelingen zal nauwkeuriger resultaten opleveren.

De  ${}_{\vartheta} J_t^{t + \vartheta + 1}$  en  ${}_{\vartheta} E_t^{t + \vartheta + 1}$ , ondersteld geboren te zijn op  $\frac{2}{3}$  van het jaar  $t$  en verhuisd te zijn in den ouderdom  $\vartheta + \frac{2}{3}$ , hebben voor het einde van  $t + \vartheta + 1$ , daar ze dan oud zullen zijn  $\vartheta + \frac{4}{3}$ , nog te leven  $\frac{2}{3}$  jaar, en wel  $\frac{1}{3}$  in de ouderdomsklasse  $\vartheta$  en  $\frac{1}{3}$  in de ouderdomsklasse  $\vartheta + 1$ .

Van deze verhuizenden zal na de verhuizing vóór het bereiken van den ouderdom  $\vartheta + 1$  sterven een gedeelte  $\frac{1}{3} \vartheta q_t$ , en van het overblijvende gedeelte  $(1 - \frac{1}{3} \vartheta q_t)$  in de ouderdomsklasse  $\vartheta + 1$  een gedeelte  $\frac{1}{3} \vartheta + 1 q_t$ . Van de waargenomen gestorvenen moet dus afgetrokken worden:

$${}_{\vartheta} (J - E)_t^{t + \vartheta + 1} \left( \frac{1}{3} \vartheta q_t + \frac{1}{3} \vartheta + 1 q_t - \frac{1}{3} \vartheta q_t \times \vartheta + 1 q_t \right). \quad (7)$$

De  ${}_{\vartheta + 1} J_t^{t + \vartheta + 1}$  en  ${}_{\vartheta + 1} E_t^{t + \vartheta + 1}$  ondersteld geboren te zijn op  $\frac{1}{3}$  van het jaar  $t$  en bij het verhuizen oud te zijn  $\vartheta + \frac{1}{3}$  hebben voor het einde van  $t + \vartheta + 1$  nog te leven  $\frac{1}{3}$  jaar, en wel in de ouderdomsklasse  $\vartheta + 1$ .

Van de waargenomen gestorvenen moet derhalve nog afgetrokken worden:  ${}_{\vartheta + 1} (J - E)_t^{t + \vartheta + 1} \times \frac{1}{3} \vartheta + 1 q_t$ . (8)

Er wordt dus verkregen:

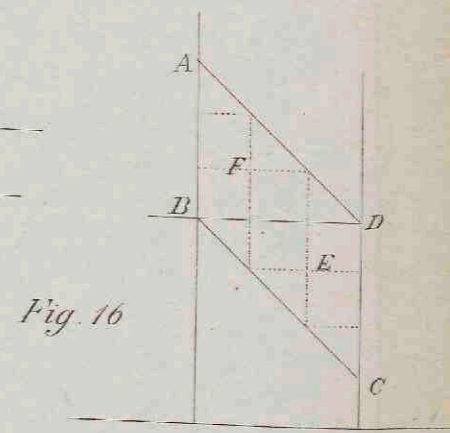
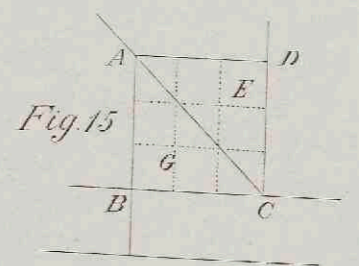
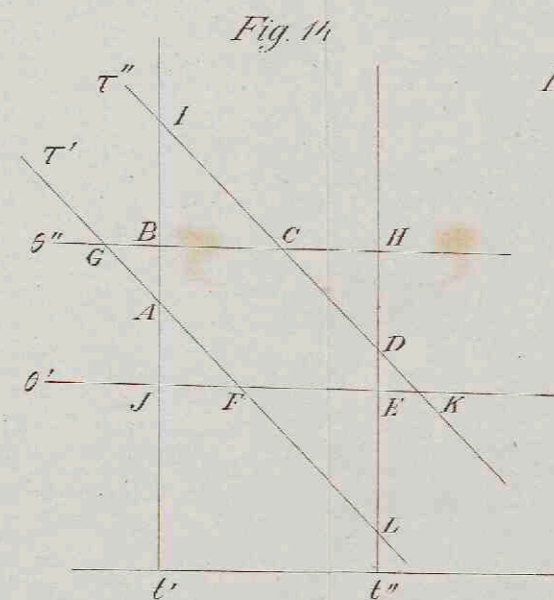
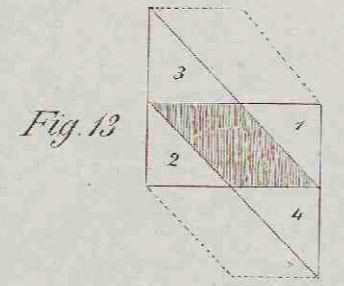
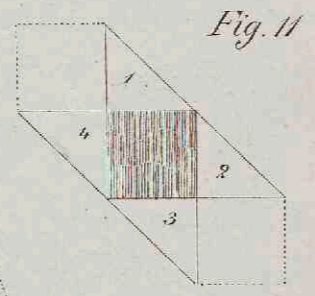
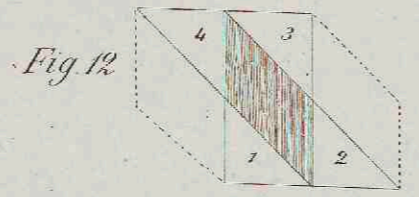
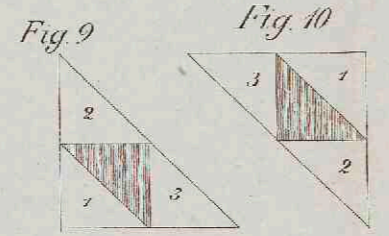
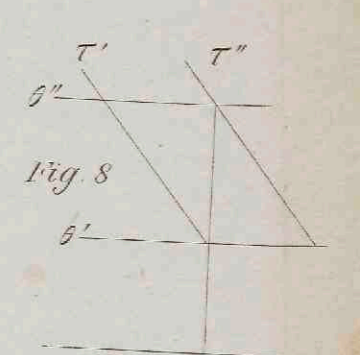
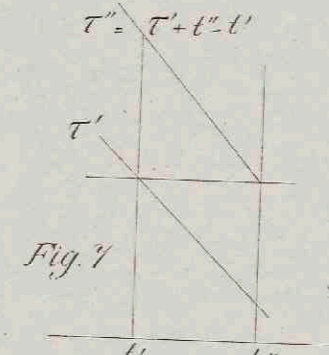
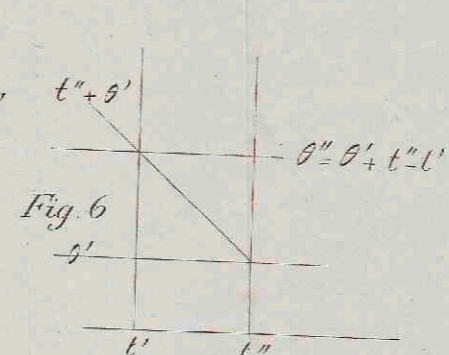
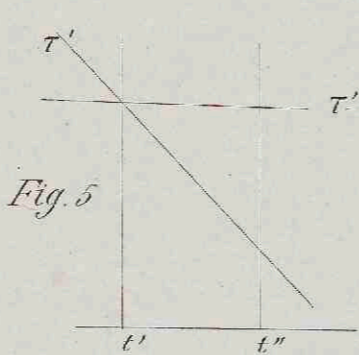
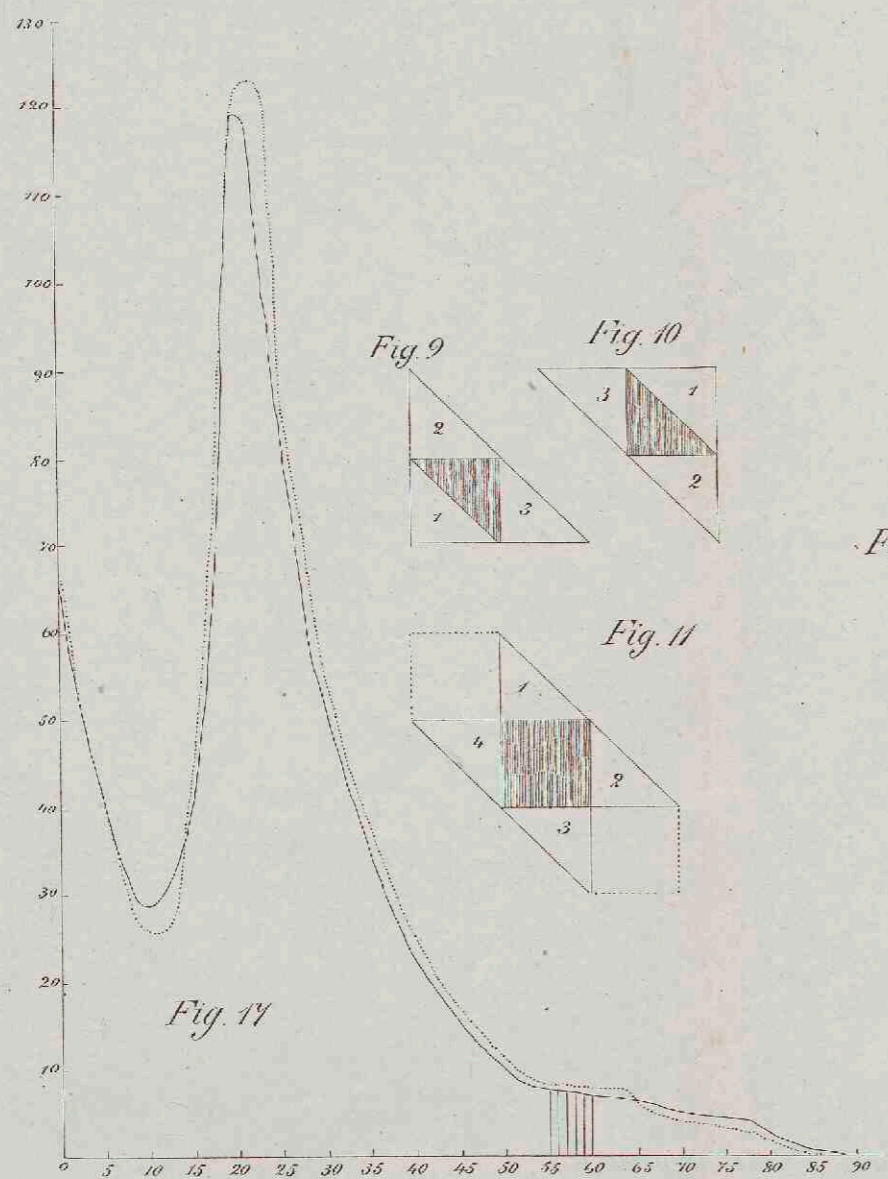
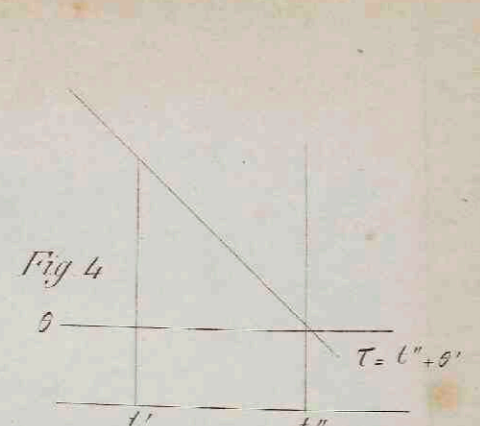
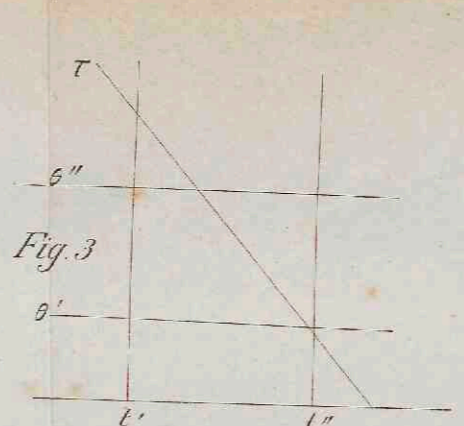
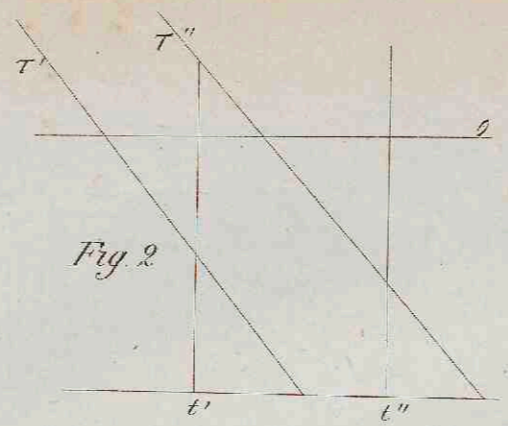
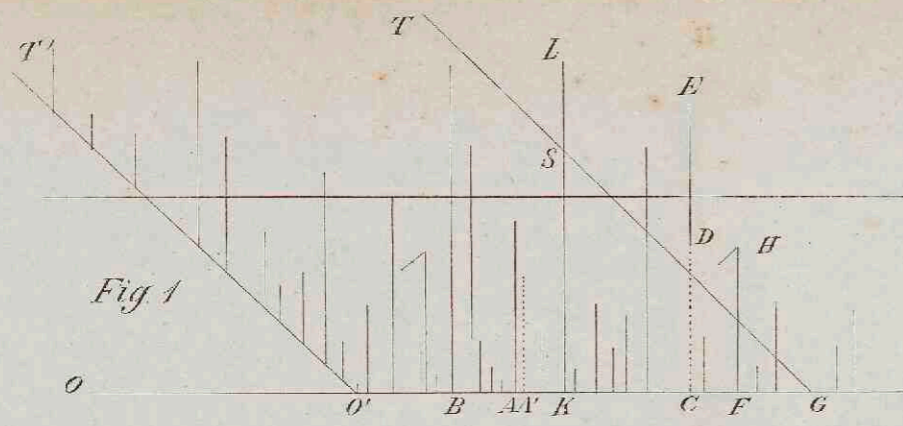
$${}_0 Q_t = \frac{M_t^{t+0+1} - (7) - (8)}{{}_0 A_t^{t+0}}.$$

Den derden term in den tweeden factor van (7) kan men weglaten.

Ik ben mij bewust, dat de in deze paragraaf opgestelde formules, slechts vrij ruwe benaderingsformules zijn; niemand zal zich ook meer verheugen dan ik, indien het iemand gelukken mag, op betere gronden betere resultaten te verkrijgen. Ik zal er zelf mijn best toe doen. Zonder een nauwkeuriger, meer gedetailleerde kennis van de verdeeling der verhuizenden over den tijd en naar den ouderdom te bezitten, kan men deze formules, naar ik meen, met gerustheid gebruiken.

De verkregen verhoudingsgetallen  ${}_0 q_t$  kunnen dienen ter berekening van sterftetafels, tot de constructie van graphische voorstellingen, en dergelijke zaken; zij zullen moeten dienen als basis voor het zoeken eener sterftewet. Gaarne had ik daarover mijne meening medegedeeld; de omstandigheden, de tijd dringen mij dit tot een latere gelegenheid uit te stellen.





Een m m<sup>2</sup> = 4 personen  
 ..... : Ingekomen 11103  
 ————— : Vertrokken 10305

## STELLINGEN.

---

### I.

Niet alleen van de gestorvenen, oock van de ingekomenen en vertrokkenen, behooren de verzamelingen, naar ouderdomsklasse en geboortejaar gescheiden gevormd te worden.

### II.

Het is wenschelijk alle hoofden van huisgezinnen en op zich zelf staande personen te verplichten, houders te zijn van een afschrift van hun blad in het bevolkingsregister.

### III.

Tenzij een andere wijze van tariefberekening gevolgd

II

wordt, is voor levensverzekering-maatschappijen de kennis der waarden van  $\rho$   $Q$  voldoende.

IV.

Onze wijze van verkiezing geeft geen voldoende waarschijnlijkheid dat de keus des volks uitgedrukt is.

V.

Een degelijk onderzoek naar den weerstand bij beweging, bij de verschillende combinaties van vaste lichamen, vloeistoffen en gassen, is noodig.

VI.

Bij contact van paren heterogene stoffen, ontstaat electriciteit.

VII.

Het noorderlicht is een langzame electriche ontlading.

VIII.

Voor eene verklaring der fluorescentie is de zoogenaamde wet van Stokes de basis.

IX.

Elasticiteit onderstelt structuur.

X.

Om tot vollediger kennis van de gedaante der aarde

### III

te geraken zijn noodig talrijker bepalingen van de lengte van den secundeslinger, in verband met graadmetingen; om tot beter kennis van haar inwendigen bouw te geraken zijn waarnemingen aangaande veranderingen in de intensiteit der zwaartekracht wenschelijk.

### XI.

Zee-stroomen hebben hun ontstaan voornamelijk aan den wind te danken.

### XII

Meteorologische waarnemingen moeten op de stations zoo mogelijk op verschillende hoogten plaats hebben.

### XIII.

Daling van den barometerstand kan niet het onmiddelijk gevolg zijn van het grooter worden van den vochtigheids-toestand.

### XIV.

Een goede bepaling van soort is: de verzameling van individuen, die in eigenschappen evenveel met elkander, als met hunne ouders overeenkomen.

### XV.

Pettigrew's „Animal Locomotion”, hoewel in vele opzichten verdienstelijk, behoort niet in een „Scientific Series”.



## XVI.

Het is verkeerd te spreken van „vleeschetende planten.”

## XVII.

In de beginselen der meetkunde is het begrip van beweging onmisbaar.

## XVIII.

De natuurhistorische vakken worden ten onrechte aan de gymnasia verwaarloosd.

## XIX.

De waarheid der bekende stelling: „de wetenschap moet om haarzelf, niet om hare toepassingen, beoefend worden”, hangt af van wat men onder toepassingen verstaat.