



De leer der quaternions in hare toepassing op de leer van den circulaireren hodograaf

<https://hdl.handle.net/1874/258567>

44

DE LEER DER QUATERNIONS IN HARE TOEPASSING

OP DE LEER VAN DEN

CIRCULAIREN HODOGRAAF.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

NA MAGTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. T. HALBERTSMA,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN

DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

TE VERDEDIGEN

op VRIJDAG 24 JANUARIJ 1873, des namiddags ten 2 ure,

DOOR

Victor August Julius,

geboren te Utrecht.

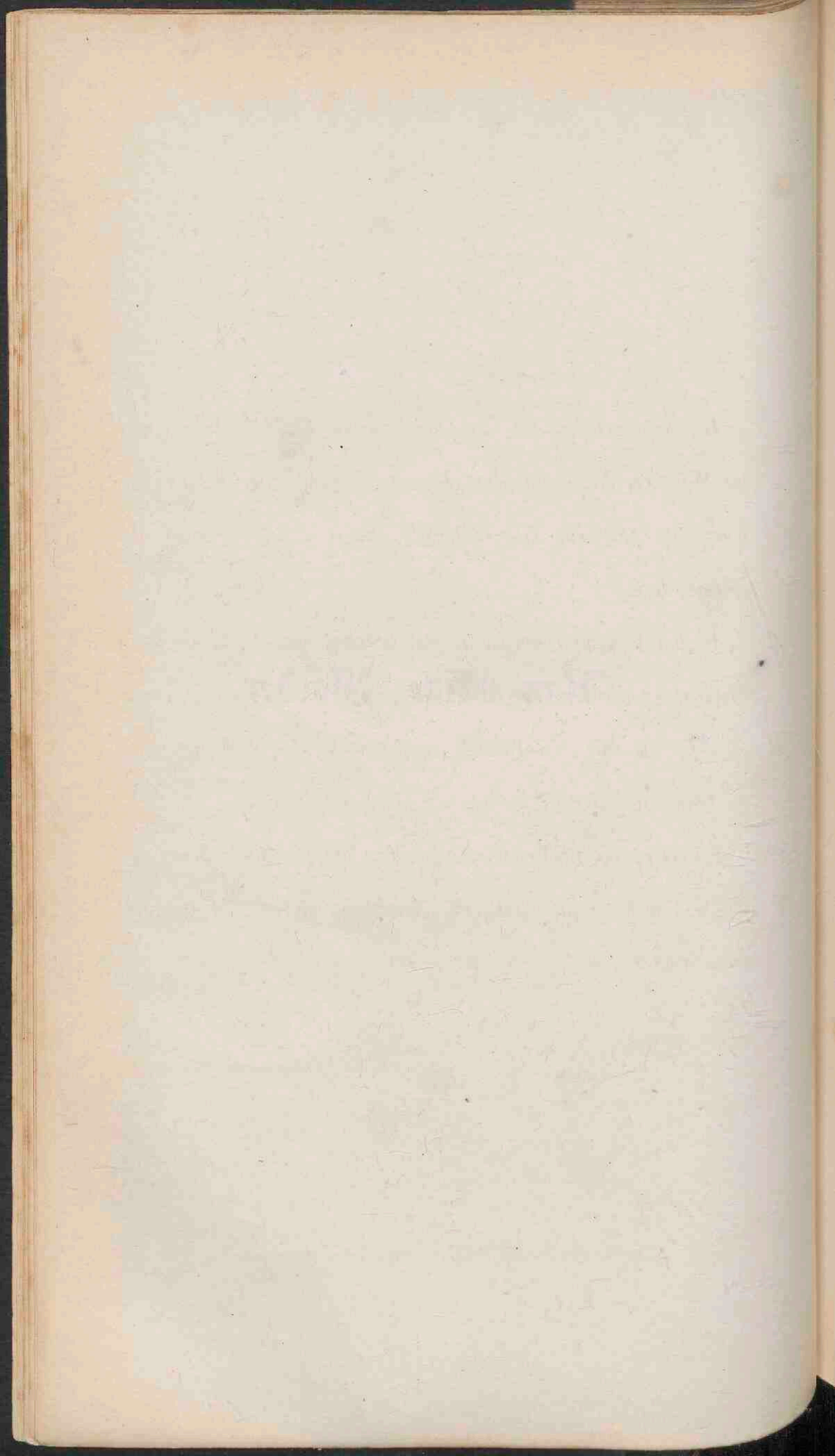


Utrecht,

J. BIJLEVELD.

1873.

Aan mijne Moeder.



Bij het verlaten der Academie zeg ik U, Hooggeleerden in de Wis- en Natuurkundige Faculteit, dank voor hetgeen Gij voor mij geweest zijt; dikwijls waart Gij mij meer dan leermeesters.

In het bijzonder gevoel ik mij verplicht aan U, hooggeleerde GRINWIS, die het zoo bereidwillig op U naamt mijn Promotor te zijn en mij behulpzaam te wezen bij het volbrengen van de taak, die ik mij stelde.

En Gij, mijne Vrienden: het ga U wel; moge de vriendschap, welke wij aan de Academie sloten, blijken een duurzame te zijn.

ERRATA.

Op bl. 6 regel 8 en 9 v. b. staat: „dan het vlak AOB met O vector zijn, die eenig punt van zal γ de veranderlijke verbindt.” Hiervoor moet gelezen worden: dan zal γ de veranderlijke vector zijn, die eenig punt van het vlak AOB met O verbindt.

Op bl. 14 regel 6 v. b. staat „waarin $\frac{\beta}{\alpha}$ ”; dit moet zijn: „waarin $\frac{\gamma}{\beta}$ ”.

Op bl. 47 moeten in de figuur de letters B en B' met elkander verwisseld worden.

Op bl. 57 regel 13 v. b. staat: $U\gamma = mUd + nU\beta$; hiervoor moet gelezen worden: $U\gamma = mU\delta + nU\beta$.

Op bl. 76 regel 8 v. o. staat binnen de haakjes een gelijk-teeken; dit moet een plusteekeken zijn.

Op bl. 95 regel 3 en 4 v. b. staat resp.: „eccentriciteit” en „eccentrisch”; dit moet zijn: „excentriciteit” en „excentrisch.”

INLEIDING.

Het is opmerkelijk, dat een tak van wiskunde als de leer der quaternions tot heden zoo weinig bekend geworden is. In 1843 reeds deelde sir William Rowan Hamilton de gronddenkbeelden van die leer aan de Iersche academie mede; sinds 1848 gaf hij in Trinity College te Dublin een geregelden cursus daarover, en publiceerde dien in 1853 onder den titel van *Lectures on Quaternions*.

Mannen als de gebroeders Graves, De Morgan en Mac Cullagh mogten er belang in stellen, buiten de grenzen van Engeland vonden de quaternions weinig beoefenaars. Cauchy schijnt er intusschen eenigzins mede bekend geweest te zijn. Althans in een verhandeling over zijn „clefs algébriques” (*Comptes rendus* XXXVI pg. 75) maakt hij de opmerking dat de quaternions een bijzonder geval zijn van zijn „clefs”. Dit is inderdaad zoo, wanneer men namelijk de symbolen i , j en k als „clefs” beschouwt, hetgeen mogelijk is, omdat alle begrippen als „clefs” kunnen beschouwd worden.

Vervolgens heeft nog in 1862 Allégret een dissertatie geschreven over de quaternions (*Essai sur le calcul des quaternions de Hamilton*, Paris 1862), waarover

zoo dadelijk meer. Van duitsche zijde is mij uit dien tijd niets bekend; uit de inleiding van Grassmann's *Ausdehnungslehre* blijkt ten duidelijkste, dat deze de quaternions niet kent; in een verhandeling van Grassmann (*Sur les différents genres de multiplication*, Crelle Bnd 49), geschreven naar aanleiding van Cauchy's verhandelingen over de „*clefs algébriques*”, worden ze evenmin genoemd, niettegenstaande hij den naam in Cauchy's verhandelingen had gelezen, en de quaternions zoo nauw aan zijn onderwerp verwant waren. Omgekeerd noemt Hamilton in zijn voorrede van de *Lectures* wel de *Ausdehnungslehre* van Grassmann, maar heeft dat werk klaarblijkelijk slechts vlugtig ingezien; hij zegt toch: „*Nothwithstanding these and perhaps some other coincidences of view, Prof. Grassmann's system and mine appear to be perfectly distinct and independent of each other in their conceptions, methods and results*”.

Hamilton was intusschen nog niet voldaan met de uiteenzetting der quaternions, zooals die in de *Lectures* gegeven wordt. Hij begon zijn *Elements of Quaternions* te schrijven, en gelukkig voor de wetenschap mogt hij ze bijna voltoojen: slechts zeven paragrafen en de voorrede ontbraken, toen Hamilton ziek werd en stierf. Door zijn zoon William Edwin Hamilton werd de uitgave, die reeds begonnen was, voortgezet. Dit was hem mogelijk, omdat het handschrift van zijn vader zoo uitstekend in orde was.

De *Elements* verschenen in 1866. Deze zijn althans in Duitschland meer bekend geworden. Maar waar een Duitscher (Victor Schlegel, *System der Raumlehre*,

Leipzig 1872) klaagt, dat in Deutschland Grassmann zoo weinig gekend en gewaardeerd wordt, kan men niet verwachten, dat Hamilton daar veel bewonderaars zal tellen. In ons land heeft, zoover ik weet, tot nu toe alleen J. Versluys te Groningen over quaternions geschreven; deze heeft namelijk een stukje over quaternion-vermenigvuldiging in de Archives Néerlandaises van 1871 geplaatst.

De voorrede van de Lectures is hoogst belangrijk. Daarin geeft Hamilton een overzicht van hetgeen hem tot de quaternions geleid heeft.

Bespiegelingen over negatieve en imaginaire groot-heden waren het uitgangspunt. Deze bragten hem er toe de Algebra te beschouwen als de „Science of pure time”. Hij stelde zich hierbij op het standpunt van Kant: als ruimte en tijd beide waarnemingsvormen waren, dan moest het ook mogelijk wezen *à priori* een leer van den tijd op te bouwen, evenals reeds een leer van de ruimte bestond. Gelukkig laat hij in zijn ontwikkelingen het *à priori* spoedig varen zonder het te bemerken, en weldra ook het begrip van tijd. Hij gaat over tot de beschouwing van wat hij noemt „Conjugate Functions or Algebraic Couples”; deze brengen hem tot zijn „Triplets”, en „Sets of Moments”, welke hem na veel mislukte pogingen tot de quaternions voeren.

In zijn reeds aangehaalde verhandeling zegt Grassmann, dat hetgeen Cauchy „clefs” noemt hem reeds negen jaren bekend was; dit blijkt werkelijk uit de Ausdehnungslehre. Ik deelde reeds mede dat Cauchy de quaternions een bijzonder geval van zijn „clefs” noemde;

Hamilton zegt dat de „clefs” een bijzonder geval van zijn „sets” zijn. De waarheid is, dat drie groote mannen ongeveer gelijktijdig op dezelfde gedachte kwamen, namelijk: symbolen te beschouwen en de wetten, die de operaties op die symbolen of de combinaties van die symbolen onderling beheerschen, bij definitie vast te stellen. Voor toepassingen in het bijzonder op de geometrie moesten die wetten gelukkig gekozen zijn; onmiskenbaar is Hamilton daarbij het gelukkigst geweest, evenals ook zijn algemeene beschouwingen veel vollediger zijn dan die van de twee andere.

De quaternions zijn een zeer bijzonder geval van de „sets”; Grassmann is in zijn *Ausdehnungslehre* op algemeener standpunt blijven staan dan Hamilton in zijn quaternions maar zijn resultaten zijn niet zoo schitterend.

In de beschouwingen over „triplets” kwamen zeven-en-twintig constanten voor, die willekeurig konden gekozen worden. Hamilton trachtte die keuze zoodanig te doen dat de methode van Argand (*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, 1806), die het eerst de imaginairen op de geometrie in het vlak toepaste, uitgebreid zou worden tot toepassingen op de geometrie in de ruimte. Hij geeft een volledige beschrijving van de pogingen, die daartoe niet alleen door hem, maar ook door John Graves gedaan werden. Merkwaardig is het, dat in 1855 Scheffler een werk uitgaf „*Der Situationskalkul*”, waarin een denkbeeld, dat ook bij Hamilton was opgekomen, nader wordt uitgewerkt. Hamilton had het spoedig laten varen, omdat de vermenigvuldiging niet distributief zou zijn; Scheffler

schijnt dit geen bezwaar geacht te hebben; hij kiest bovendien zijn notaties zoodanig, dat de optelling zelfs niet commutatief is. Terecht zag Hamilton in, dat, wilde de nieuwe methode vruchtbaar zijn voor toepassingen, de analogie met de algebra niet geheel uit het oog mogt verloren worden; een groote kracht der analyse ligt in de transformaties; deze mag men niet bijna onmogelijk maken.

Het product van twee lijnen van bepaalde grootte en rigting in een bepaald vlak was reeds door Argand als een derde lijn geïnterpreteerd ook van bepaalde lengte en rigting. Maar deze methode verloor hare beteekenis voor lijnen in de ruimte. De pogingen van Hamilton waren nu alle hierheen gerigt, dat hij trachtte een bepaalde beteekenis te kunnen hechten aan zulk een product van lijnen in de ruimte. Bij zijn „triplets” waren drie eenheden voorgekomen; voor de eerste stelde hij de gewone getalleneenheid; voor de tweede en derde resp. de symbolen i en j ; en hij meende dat een lijn in de ruimte nu kon voorgesteld worden door het triplet $x + iy + jz$, waarin x , y en z , die hij de constituenten noemde, getallen zijn, en als coördinaten kunnen beschouwd worden. Bij de vermenigvuldiging van zulke triplets kwamen voor de symbolen i^2 , j^2 , ij en ji . Beschouwingen over coördinaten projecties bragten hem er toe te stellen $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $ij = -ji$ of $ij = k$, $ji = -k$, hetgeen zeer goede resultaten gaf, wanneer de lijnen, wier product gezocht werd, in hetzelfde vlak gelegen waren met de eerste eenheid of de as der x . Maar was dit niet het geval, dan kon het product zelf geen triplet worden, maar had een quadrimischen

vorm. Dit bragt Hamilton op de gedachte dat het welligt goed zou zijn de triplets te beschouwen als bijzondere gevallen van quaternions van den vorm $x + iy + jz + ku$, waarin $k = ij$ een vierde eenheid was. Hij zag werkelijk, dat het product van twee quaternions wederom een quaternion was, wanneer hij stelde:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 & j^2 &= -1 & k^2 &= -1 \\ ij &= -ji = k & jk &= -kj = i & ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

Nu kwam hij er ook toe een lijn niet voor te stellen door het triplet $x + iy + jz$ maar door het triplet $ix + jy + kz$. Het product van twee lijnen in de ruimte werd dan een quaternion waarvan de constituenten een zeer eenvoudige geometrische beteekenis kregen. Dit resultaat werd in October 1843 aan de Iersche Academie medegedeeld.

In 1845 ging Hamilton nog verder; hij toonde aan hoe een quaternion in het algemeen als het quotient van twee lijnen kan beschouwd worden. En hier komt hij, naar mijn inzien, eerst op het ware standpunt.

Het begin van de Lectures is uiterst langdradig; het hoofdmoment is, dat het produkt van twee lijnen geïdentificeerd wordt met het quotient van twee andere lijnen. Hamilton heeft in zijn Elements een anderen en beteren weg gevolgd. Daarin zijn de meeste sporen verdwenen van den eenigszins bizarren gedachtenloop, die hem tot de gansche zaak heeft geleid, en die hoewel hoogst belangrijk voor ieder die de quaternions bestudeerd heeft, moeilijk te vatten is voor den beginnende. In de Elements wordt een quaternion

eenvoudig opgevat als het quotient van twee lijnen; het resultaat van eenige combinaties van zulke quotienten onderling wordt bij definitie vastgesteld; bij verdere ontwikkeling treden dan de symbolen i , j en k op als quotienten van lijnen, die de eenheid van lengte hebben en loodrecht op elkander staan; eerst aan het einde van zijn beschouwingen over quotienten, definieert Hamilton het product van twee lijnen als een zeker quotient.

Allégret in zijn genoemde dissertatie gaat uit van de symbolen i , j , k , en de wetten welke hun combinaties onderling volgen en geeft vervolgens een geometrische interpretatie, zooals hij het noemt, van die symbolen. Deze weg scheen mij intusschen te abstract toe voor een eerste kennismaking met een geheel nieuwe methode.

Tusschen Grassmann's *Ausdehnungslehre* en de quaternions zijn vele punten van overeenkomst, zoodra men de *Ausdehnungslehre* op de ruimte toepast en dus onder „Elemente” punten, onder „Strecken” lijnen van beraalde lengte en rigting enz. verstaat. Het „innere Product” van twee „Strecken” α en β is volkomen hetzelfde als $S\alpha\beta$ in de quaternions; het „äussere Product” als $V\alpha\beta$. Maar deze overeenstemming verder te vervolgen zoude mijne inleiding te uitgebreid maken.

De toepassingen van de quaternions, niet alleen op de geometrie, maar ook op de mechanica en de mathematische physica zijn van zeer ingrijpenden aard. Aan het einde der *Elements* worden een tweehonderdvijftig bladzijden aan toepassingen gewijd. Hamilton gaf in de laatste dagen van zijn leven, zoowel aan zijn zoon als aan

Tait herhaaldelijk te kennen, dat naar zijn meening de quaternions voor de theorie van de electriciteit van groot nut zouden worden.

Trouwens, ieder die met de quaternions kennis maakt, gevoelt terstond dat daarin een groote kracht ligt; dat de quaternions de coördinaten van Cartesius voor goed zullen doen verdwijnen.

Ik geloof niet, dat ik mij over de keuze van mijn onderwerp behoef te regtvaardigen; een geometrische analyse, zooals Leibniz zich die voorgesteld heeft, en die door Hamilton zoo volkomen verwezentlijkt is, verdient wel de algemeene aandacht.

In mijne uiteenzetting van de leer der quaternions volg ik bijna geheel de Elements. ¹⁾ Intusschen heb ik mij bepaald tot hetgeen noodig was om de toepassing van de quaternions op de theorie van den circulairen hodograaf begrijpelijk te doen zijn. Deze theorie wordt ook in de Elements gegeven; mijn tweede hoofdstuk kan als een commentaar daarop beschouwd worden.

1) Door Tait is een leerboek over de quaternions geschreven: „An elementary Treatise on Quaternions.” Ik kan evenwel niemand aanraden dit als leerboek te gebruiken, omdat het hier en daar zeer duister is; de „Elements” daarentegen kunnen beschouwd worden als het model van een uitstekend leerboek.

HOOFDSTUK I.

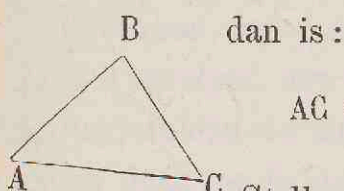
1. BEGRIP VAN EEN VECTOR. Een rechte lijn, waarvan men niet alleen de lengte, maar ook de rigting in aanmerking neemt, noemt men een VECTOR.

Gelijke vectoren zijn zoodanige, die niet alleen gelijke lengte, maar ook gelijke rigting hebben. Omgekeerd zijn alle vectoren, die dezelfde lengte en dezelfde rigting hebben, aan elkander gelijk.

Men mag dus een vector vervangen door iederen anderen vector, die dezelfde lengte en dezelfde rigting heeft.

Men onderscheidt van een vector den oorsprong en het uiteinde; zoo is van den vector AB A de oorsprong, B het uiteinde en van den vector BA B de oorsprong en A het uiteinde. Valt van een vector het uiteinde met den oorsprong zamen, zoo is de vector een nul-vector, en wordt voorgesteld door het gebruikelijke teeken o.

2. SOM VAN VECTOREN. De beteekenis van het plus-teeken wordt aldus gedefinieerd. Wanneer AB en BC twee vectoren zijn,



$$AC = AB + BC \dots\dots\dots (1)$$

Stellen dus de vectoren AB en BC twee krachten voor, werkende op het punt A, dan wordt de resultante gelijk de som der krachten.

Vergelijking (1) geldt algemeen. Laat men C met A zamenvallen, dan heeft men :

$$0 = AB + BA$$

of $AB = -BA \dots\dots\dots (2)$

Deze vergelijking definieert het minusteeken. Uit (1) volgt dan nog:

$$AC - BC = AB \quad \text{of} \quad AC + CB = AB,$$

waarvan de beteekenis duidelijk is; bovendien

$$AC + CB + BA = 0.$$

$$AB + BC + CA = 0.$$

Bij het beschouwde geval viel het uiteinde van den eersten vector zamen met den oorsprong van den tweeden. Zoekt men de som van twee tegenover elkander willekeurig geplaatste vectoren, dan mag men volgens § 1 de vectoren zoodanig evenwijdig aan zichzelf verplaatsen, dat de oorsprong van den eenen zamenvalt met het uiteinde van den anderen, waardoor men dit geval tot het vorige terugbrengt.

3. Korthheidshalve stelt men de vectoren voor door letters uit het Grieksche alphabet.

Is ABCD een parallelogram, $AB = \alpha$ $BC = \beta$ $AC = \gamma$, dan heeft men :

$$AC = AB + BC = AD + DC$$

of

$$\gamma = \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Optelling is dus commutatief.

4. De som van drie vectoren wordt gedefinieerd als de vierde vector, die verkregen wordt wanneer men den derden optelt bij de som van den eersten en tweeden. Dus, wanneer α β γ de gegeven vectoren zijn :

$$\delta = \gamma + (\beta + \alpha) \quad \text{of} \quad \delta = \gamma + \beta + \alpha.$$

Verplaatst men de vectoren α β γ zoodanig evenwijdig aan zich zelve, dat de oorsprong van β met het uiteinde van α , en de oorsprong van γ met het uiteinde van β zamenvalt, dan zal de vector die den oorsprong van α met het uiteinde van γ verbindt, gelijk zijn aan δ . Bij de beschouwing van een vierhoek, ABCD, of deze in een vlak gelegen is of niet, waarvan $AB = \alpha$ $BC = \beta$ $CD = \gamma$ $AD = \delta$ is, ziet men terstond in dat :

$$\delta = \gamma + (\beta + \alpha) = (\gamma + \beta) + \alpha = \gamma + \beta + \alpha.$$

Optelling is dus associatief.

Dit resultaat met dat van § 3 verbindend, verkrijgt men, dat de som van eenig aantal gegeven vectoren eene waarde heeft, die onafhankelijk is van de wijze hunner groepering.

5. **EVENWIJDIGE VECTOREN.** De vector α kan ook voorgesteld worden door 1α of $(+1)\alpha$ of bij definitie door $\alpha(+1)$; evenzoo de som $\alpha + \alpha$ door 2α of $\alpha 2$ enz. In verband met vergelijking (2) van § 2 volgt hieruit:

$$\alpha m \pm \alpha n = m\alpha \pm n\alpha = (m \pm n)\alpha = \alpha(m \pm n),$$

wanneer m en n geheele getallen zijn. De vermenigvuldiging van vectoren met geheele positieve of negatieve getallen is dus commutatief.

Is $\beta = m\alpha$, terwijl m een geheel getal is, dan noemt men β een veelvoud van α , en α een onderdeel van β . Een veelvoud van een onderdeel van een vector is een gebroken van dien vector. Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat bovenstaande vergelijking geldt voor alle reële waarden van m en n .

Wanneer $\beta = m\alpha$, dan is de rigting van den vector β dezelfde ¹⁾ als van die van α , zoo m positief reëel is, tegengesteld aan die van α , zoo m negatief reëel is.

Definieert men, dat

$$\text{als } \beta = m\alpha \quad \text{dan } \frac{\beta}{\alpha} = m,$$

zoo ziet men dat het quotient van twee vectoren, die gelijke of tegenstelde rigting bezitten, eene positieve of negatieve reële grootheid is; zulk eene grootheid wordt door Hamilton een **SCALAR** genoemd.

1) Twee lijnen zijn evenwijdig, wanneer zij beide evenwijdig zijn aan eene derde lijn: zoo worden gedeelten van dezelfde lijn beschouwd als ook evenwijdig aan elkander.

6. De voorwaarde dus dat α en β gelijke of tegengestelde rigting hebben, wordt uitgedrukt door de betrekking:

$$x \alpha + y \beta = 0$$

waarin x en y scalars zijn.

Verplaatst men deze vectoren α en β (zie § 1) zoodanig evenwijdig aan zich zelve, dat het punt O hun gemeenschappelijke oorsprong wordt, terwijl $OA = \alpha$, $OB = \beta$, dan zullen de punten O , A , B op ééne lijn liggen. Denkt men zich nu de scalars x en y , of liever haar verhouding, veranderlijk, zoo zal, als α constant is, β den veranderlijken vector voorstellen, die het punt O met eenig punt van de onbepaalde lijn OA verbindt.

7. VECTOREN IN EEN VLAKE. Zijn de vectoren α en β niet gelijk of tegengesteld van rigting dan kan $x \alpha + y \beta$ niet gelijk nul zijn, maar moet gelijk wezen aan eenigen derden vector, dien wij $-\gamma$ zullen noemen, zoodat:

$$x \alpha + y \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots (1)$$

In dat geval bepalen α en β de rigting ¹⁾ van een vlak of eene vlakrigting.

1) Twee vectoren bepalen niet een enkel vlak; volgens § 1 toch kan men de gegeven vectoren zoodanig evenwijdig aan zich zelve verplaatsen, dat eenig willekeurig punt hun gemeenschappelijke oorsprong wordt. Door die verplaatste vectoren kan men een vlak brengen; daar de oorsprong willekeurig is, is ook alleen de rigting van de normaal bepaald. Maar evenals men van den hoek, dien twee vlakken met elkander maken, spreekt, kan men, dunkt me, ook van de rigting van een vlak en zoo van een vlakrigting spreken, daarmede eenige rigting loodrecht op de normaal bedoelende.

Wanneer deze vectoren α β en γ zoodanig evenwijdig aan zichzelf verplaatst worden, dat zij den gemeenschappelijken oorsprong O hebben, terwijl $OA = \alpha$ $OB = \beta$ $OC = \gamma$, zoo is het volgens § 2 duidelijk dat OC in het vlak ligt gaande door OA en OB. Zijn α en β in lengte en rigting constant en denkt men zich de verhoudingen van x y en z veranderlijk, dan het vlak AOB met O vector zijn, die eenig punt van zal γ de veranderlijke verbindt.

Omgekeerd is vergel. (1) de voorwaarde, opdat drie vectoren α β en γ , zoo zij evenwijdig aan zich zelve met hun oorsprong naar eenig punt verplaatst worden, in één vlak liggen.

8. Ligt het punt C op de lijn, die de uiteinden van OA en OB verbindt, terwijl

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 \dots\dots (1)$$

dan zal volgens § 5

$$\frac{AC}{AB} = t$$

zijn, terwijl t een scalar is. Maar

$$AC = \gamma - \alpha \quad AB = \beta - \alpha,$$

dus

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = t$$

of

$$\gamma - \alpha = t (\beta - \alpha),$$

waaruit volgens § 2 en § 5:

$$\gamma = (1-t) \alpha + t \beta$$

Aan den anderen kant moet de uitdrukking voor γ van den vorm zijn:

$$\gamma = -\frac{x}{z} \alpha - \frac{y}{z} \beta.$$

Hieruit blijkt, dat zoo C in de lijn ligt welke de uiteinden van OA en OB verbindt,

$$-\frac{x}{z} = 1 + \frac{y}{z}$$

of

$$x + y + z = 0 \dots \dots (2)$$

Bestaat dus de betrekking (1), dan geeft (2) de voorwaarde aan opdat bij gemeenschappelijken oorsprong de uiteinden der vectoren in één lijn liggen. Denkt men zich α en β als constante vectoren, γ en de verhoudingen van x , y en z veranderlijk, zoo geven (1) en (2) de vergelijking van de lijn die door de uiteinden van α en β gaat.

Elimineert men uit (1) en (2) achtereenvolgens elk der scalars x , y en z , dan krijgt men:

$$\begin{aligned} y(\beta - \alpha) + z(\gamma - \alpha) &= 0 & z(\gamma - \beta) + x(\alpha - \beta) &= 0 \\ x(\alpha - \gamma) + y(\beta - \gamma) &= 0 \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen drukken betrekkingen uit tusschen segmenten van de lijn AB; immers men kan er voor schrijven:

$$0 = y. AB + z. AC = z. BC + x. BA = x. CA + y. CB,$$

waaruit volgt:

$$x : y : z = BC : CA : AB.$$

De vergelijkingen (3) geven ook nog:

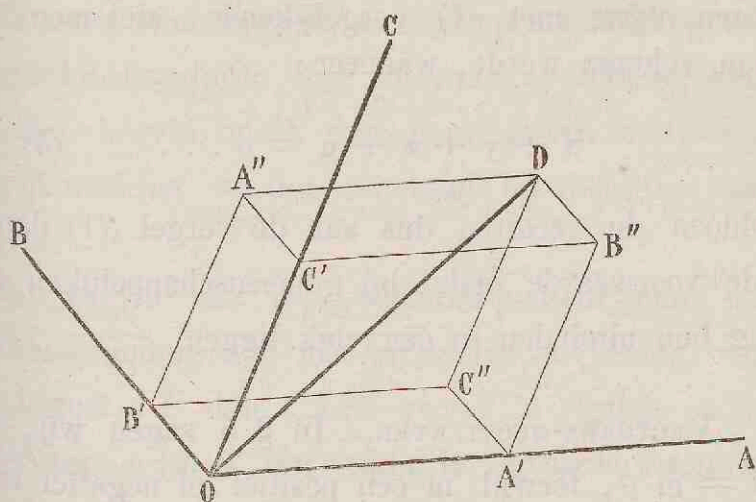
$$\alpha = \frac{y\beta + z\gamma}{y + z} \quad \beta = \frac{z\gamma + x\alpha}{z + x} \quad \gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}.$$

Elk dezer laatste vergelijkingen drukt hetzelfde uit als de vergelijkingen (1) en (2) samen.

9. WILLEKEURIGE VECTOREN. Liggen de vectoren α , β en γ , zoo zij evenwijdig aan zich zelve naar een gemeenschappelijken oorsprong verplaatst worden, niet in één vlak dan kan $x\alpha + y\beta + z\gamma$ ook niet gelijk nul zijn, maar moet gelijk wezen aan een vierden vector, dien wij $u\delta$ zullen noemen, zoodat:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma + u\delta = 0 \dots (1)$$

Zijn de verhoudingen der scalars x , y , z en u veranderlijk en α , β en γ constante vectoren, dan kan δ den vector voorstellen, die eenig punt der ruimte met den aangenomen oorsprong verbindt. Omgekeerd, zoo van de overigens willekeurige vectoren α , β , γ , en δ geen drie in hetzelfde vlak liggen, wanneer alle met den oorsprong naar één punt evenwijdig aan zich zelve verplaatst worden, bestaat er tusschen hen een betrekking van den vorm van (1).



Uit (1) heeft men:

$$\delta = -\frac{x}{u} \alpha - \frac{y}{u} \beta - \frac{z}{u} \gamma \dots (2)$$

Zijn dan in bovenstaande figuur OA, OB, OC en OD resp. de vectoren α , β , γ en δ , $DC'' \parallel B'A' \parallel CO$ enz. zoo zal:

$$OD = OA' + OB' + OC'$$

$$-\frac{x}{u} = \frac{OA'}{OA} \quad -\frac{y}{u} = \frac{OB'}{OB} \quad -\frac{z}{u} = \frac{OC'}{OC} \text{ zijn.}$$

Men ziet hieruit de beteekenis der coëfficiënten in de vergelijking (1).

Het geval kan zich voordoen, dat zoo men de vectoren met den oorsprong naar één punt evenwijdig aan zich zelve verplaatst, de uiteinden der vectoren in één vlak liggen. Dan zouden (zie § 2) de vectoren $\alpha - \delta$, $\beta - \delta$ en $\gamma - \delta$ in één vlak liggen, zoodat volgens § 7 er eene betrekking tusschen die vectoren zoude bestaan van den vorm:

$$a (\alpha - \delta) + b (\beta - \delta) + c (\gamma - \delta) = 0 \dots (3)$$

Dezen vorm met (1) vergelijkende, ziet men, dat hieraan voldaan wordt, wanneer:

$$x + y + z + u = 0 \dots\dots\dots (4)$$

Voldoen de vectoren dus aan de vergel. (1) dan is (4) de voorwaarde opdat bij gemenschappelijken oorsprong hun uiteinden in één vlak liggen.

10. VECTOREN-QUOTIENTEN. In § 5 zagen wij, dat zoo $\alpha = m \beta$, terwijl m een positief of negatief reëel getal is, β eene rigting heeft gelijk of tegengesteld aan die van α . Wij definieerden dan:

$$\frac{\beta}{\alpha} = m \dots\dots\dots (1)$$

en noemden met Hamilton het quotient van twee dergelijke vectoren een scalar. Wij gaan nu over tot de beschouwing van vectorenquotienten, waarin de vectoren geen gelijke of tegengestelde rigting hebben.

Wil men een nieuw begrip invoeren, zooals wij hier wenschen te doen door het quotient van twee willekeurige vectoren te beschouwen, dan moet het eerst in overeenstemming gebragt worden met de begrippen waarop het gegrond is; vervolgens mag het niet in tegenspraak zijn met vroeger reeds vastgestelde begrippen, waartoe het nieuwe begrip zich onder bijzondere omstandigheden kan vereenvoudigen; dan blijft de mogelijkheid nog over dat de uitwerking van sommige operaties op dat begrip of het resultaat van sommige

combinaties van dergelijke begrippen onderling of van dergelijke begrippen met andere niet volledig bepaald zij. Het begrip moet dan gepreciseerd worden door die uitwerking of dat resultaat bij definitie vast te stellen.

Het begrip van een vectorenquotient moet dus in overeenstemming zijn met het begrip van vector, waarop het berust. Is dan α' een vector in rigting en lengte gelijk aan α , en β' een vector in rigting en lengte gelijk aan β , zoo moet volgens § 1:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\alpha'} \text{ zijn (1)}$$

Een vectorenquotient is dus onafhankelijk van de absolute plaats der vectoren in de ruimte.

Vervolgens mag het begrip van een vectorenquotient niet in tegenspraak zijn met het in § 5 ontwikkelde begrip van een quotient van vectoren die gelijke of tegengestelde rigting hebben.

Een vectorenquotient moet dus overgaan in een scalar, wanneer de vectoren gelijke of tegengestelde rigting krijgen; omgekeerd, zoo de vectoren niet hebben gelijke of tegengestelde rigting kan een vectorenquotient ook niet een scalar zijn.

Intusschen is door deze voorwaarden het begrip van een vectorenquotient nog in het geheel niet bepaald. Dit zal dus verder bij definitie moeten geschieden.

11. DEFINITIES. Om redenen, waarop wij later terug-

komen, heeft Hamilton aan een vectorenquotient den naam van QUATERNION gegeven; hij stelt een quaternion in het algemeen door de letter q voor. De uitdrukkingen quaternion en vectorenquotient zullen door ons bij afwisseling gebruikt worden.

De definities waardoor het begrip van een quaternion verder geheel bepaald wordt, zijn door Hamilton meereendeels aan de algebra ontleend. Intusschen gaat deze analogie met de algebra maar tot zekere hoogte, zooals uit het vervolg blijken zal. Ten eerste wordt gedefinieerd, dat, als

$$\frac{\beta}{\alpha} = q \dots \dots \dots (1)$$

dan ook

$$\beta = q \alpha \dots \dots \dots (2)$$

Hieruit volgt, dat men heeft:

$$\frac{\beta}{\alpha} \alpha = \beta \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{q \alpha}{\alpha} = q \dots \dots \dots (4)$$

Ten tweede wordt gedefinieerd, dat als

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ en } \alpha' = \alpha \dots \dots \dots (5)$$

dan ook

$$\beta' = \beta \text{ is } \dots \dots \dots (6)$$

Omgekeerd krijgt men dan, dat ongelijke vectoren, gedeeld door gelijke vectoren, ongelijke quotienten geven.

Ten derde, dat

zoo $q' = q$ en $q'' = q$ ook $q' = q$ is.

Ten vierde, dat twee vectorenquotienten, die denzelfden noemer hebben, bij elkander opgeteld of van elkander afgetrokken worden, door hun tellers bij elkander op te tellen of van elkander af te trekken, en die som of dat verschil door den gemeenschappelijken noemer te deelen. Men heeft dus:

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma + \beta}{\alpha} \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha} \dots \dots \dots (8)$$

Hieruit volgt in verband met § 5, dat zoo m een geheel positief of negatief getal is,

$$m \frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{\alpha} = \frac{\beta m}{\alpha} \dots \dots \dots (9)$$

Door een eenvoudige redenering kan men aantoonen, dat deze vergelijking ook geldt, wanneer m eenige scalar is.

Ten vijfde, dat men teller en noemer van een vectorquotient met eenzelfde scalar mag vermenigvuldigen, zoodat

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{m\alpha} \dots \dots \dots (10)$$

Ten zesde, dat het quotient van twee vectorenquo-

tienten, die gelijke noemers hebben, gelijk is aan het quotient der tellers, zoodat:

$$\frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \dots \dots \dots (11)$$

Ten zevende, dat de volgende vergelijking geldt:

$$\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}, \dots \dots \dots (12)$$

waarin $\frac{\beta}{\alpha}$ het multiplicatorquotient, $\frac{\beta}{\alpha}$ het multiplicandquotient is.

Dit geeft in verband met (9) en (10), zoo m een scalar is:

$$m \cdot q = \frac{m \beta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{m \beta}{\alpha} = \frac{\beta}{m^{-1}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{m^{-1}\alpha} = q \cdot m. \quad (13)$$

De vermenigvuldiging van een quaternion en een scalar is dus commutatief.

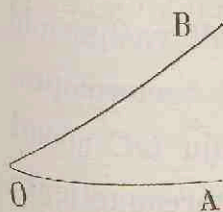
Dat door deze definities het begrip van een vectorenquotient verder volkomen bepaald is, kan natuurlijk eerst later blijken.

12. GEVOLGTREKKINGEN. Volgens (1) van § 10 mogen wij onderstellen, dat de vectoren α en β van het quotient gemeenschappelijke oorsprong hebben.

De voorwaarde, dat een quotient van vectoren, wier rigting gelijk of tegengesteld is, een scalar moet zijn, eischt dat een quotient van willekeurige vectoren onafhankelijk zij van hun absolute rigting. Dit in verband gebragt met (10) van de vorige paragraaf, krijgt men

het resultaat, dat een vectorenquotient alleen afhangt van de relatieve lengte en de relatieve rigting der vectoren. De relatieve lengte wordt voorgesteld door een getal, de relatieve rigting door een hoek.

13. Zij dan $OA = \alpha$ $OB = \beta$ en beschouwen wij het vectoren quotient



$$\frac{\beta}{\alpha} = q.$$

De relatieve rigting van OB ten opzichte van OA wordt niet bepaald alleen door de grootte van den hoek AOB. Zij toch $OB' = \beta'$ een andere vector gelegen op den omwentelingskegel, die OA tot as en hoek AOB tot halven tophoek heeft; en zij de lengte van OB' gelijk aan die van OB. Dan zou wanneer de relatieve rigting van OB ten opzichte van OA door de grootte van den hoek AOB bepaald ware, men hebben:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha},$$

iets dat in strijd is met de tweede definitie van § 11, daar β en β' niet aan elkander gelijk kunnen zijn.

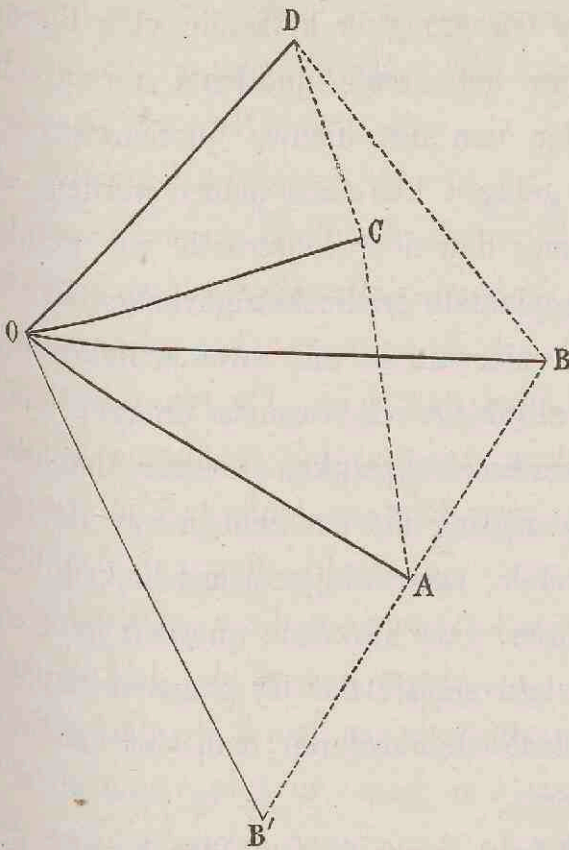
Wil de relatieve rigting van OB ten opzichte van OA bepaald zijn, dan moet men behalve de grootte van den hoek AOB ook kennen de vlakrigting die door de vectoren α en β bepaald wordt; eindelijk nog de rigting van de draaijing van OA naar OB. Om deze twee laatste rigtingen aan te geven, kan men zich denken een

vector OC loodregt op het vlak AOB, zoodanig dat, indien men zich langs OC met de voeten in O geplaatst denkt, de draaijing van OA naar OB zich als positief voordoet, dat is, bij de veronderstelling die wij wenschen te maken: dat de draaijing geschiedt van de regter- naar de linkerhand. Hierbij wordt vastgesteld dat de hoek AOB, die de hoek van het vectorenquotient heet, altijd kleiner dan π is. De lijn OC noemt men dan de positieve as van het vectorenquotient; haar lengte wordt verondersteld gelijk te zijn aan de eenheid van lengte; terwijl de draaijing van den noemvector naar den tellervector om die as positief is.

Een vectorenquotient hangt dus af van de relatieve lengte der vectoren, die gegeven wordt door een getal; van de grootte van den hoek dien de vectoren met elkander maken; van de rigting der positieve as. Deze rigting nu is bepaald, zooals men weet, door twee polaire coördinaten of hoeken. In het geheel hangt dus een vectorenquotient af van vier grootheden. Dit is de reden waarom Hamilton een dergelijk quotient met den naam van quaternion bestempeld heeft.

14. Uit het voorafgaande volgt onmiddellijk, wanneer $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, $OD = \delta$ vectoren zijn, die bij gemeenschappelijken oorsprong in één vlak liggen en wanneer de driehoeken AOB en COD gelijkvormig en gelijkelyk geplaatst zijn, dat dan:

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} \dots \dots \dots (1)$$



Immers zijn de relatieve lengte en de relatieve rigting van de vectoren OA en OB in alle opzigten dezelfde als die van de vectoren OC en OD.

Omgekeerd, wordt door de vectoren α , β , γ en δ aan (1) voldaan, zoo zullen de driehoeken AOB en COD gelijkvorme

mig en gelijkelijk geplaatst zijn, zoodat men kan schrijven:

$$\triangle AOB \propto COD.$$

Denkt men zich dat om OA als as de vector OB zich 180 graden draait en de plaats OB' gaat innemen, zoo zijn de driehoeken AOB' en COD gelijkvormig bij overstand. Hamilton drukt dit uit door het teeken α' , zoodat,

$$\triangle AOB' \propto' COD.$$

Men kan dus een vectorenquotient vervangen door een ander vectorenquotient, waarvan de vectoren bij

gemeenschappelijken oorsprong in hetzelfde vlak liggen als de vectoren van het eerste quotient; terwijl als noemer of als teller van dat nieuwe quotient eenige vector in dat vlak gelegen kan aangenomen worden, en de teller of de noemer dan door constructie van gelijkvormige en gelijk geplaatste driehoeken gevonden wordt.

15. Een gevolg hiervan is dat twee willekeurige vectorenquotienten altijd tot een vorm te brengen zijn, waarbij zij een gemeenschappelijken noemer hebben. Deze noemer zal de rigting moeten hebben van de lijn volgens welke het vlak, waarin bij gemeenschappelijken oorsprong de vectoren van het eene quotient gelegen zijn, een tweede vlak snijdt, dat bij gemeenschappelijken oorsprong door de vectoren van het andere quotient bepaald wordt.

Uit de vierde definitie van § 11 blijkt nu dat de som of het verschil van twee en daarom de som van eenig aantal willekeurige quaternions wederom een quaternion is, dat zich evenwel tot een scalar kan vereenvoudigen.

Zijn van twee vectorenquotienten alle vectoren bij gemeenschappelijken oorsprong in hetzelfde vlak gelegen, of, zooals Hamilton het uitdrukt, zijn twee vectorenquotienten of quaternions *complanair*, zoo kan men elken vector evenwijdig aan dat vlak tot gemeenschappelijken noemer van die quotienten aannemen.

16. Uit de figuur van § 14 is duidelijk, dat, zoo

$$\triangle AOB \propto COD$$

ook

$$\triangle BOA \propto \triangle DOC \text{ en } \triangle AOC \propto \triangle BOD;$$

zoodat,

$$\text{als } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \text{ dan ook } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ en } \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} \dots (1)$$

17. Wij hebben in § 13 vastgesteld, wat de positieve as en wat de hoek van een quaternion is. De as is altijd een geheel bepaalde vector, wanneer niet de vectoren van het quotient dezelfde of een tegengestelde rigting hebben. In het laatste geval evenwel is de as onbepaald en kan elke vector, met de lengte één als zoodanig beschouwd worden. Hebben de vectoren van het quotient dezelfde rigting, zoo is de hoek van het quotient nul; bij tegengestelde rigting der vectoren, is de hoek gelijk π .

18. RECIPROKE QUATERNIONS. Beschouwen wij het quotient:

$$1 : \frac{\beta}{\alpha}.$$

Volgens § 5 en (11) van § 11 mogen wij schrijven:

$$1 : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \dots \dots (1)$$

Men heeft dus dat $\frac{\alpha}{\beta}$ de reciproke is van $\frac{\beta}{\alpha}$; men noemt $\frac{\alpha}{\beta}$ en $\frac{\beta}{\alpha}$ reciproke quaternions.

Het product van twee reciproke quaternions is de positieve eenheid; immers volgens (12) van § 11:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \dots \dots \dots (2)$$

De hoek van een quaternion is klaarblijkelijk gelijk aan dien van zijn reciproke; de positieve as of kortheidshalve de as van een quaternion is tegengesteld in rigting aan die van zijn reciproke (§ 13). Wij kunnen deze resultaten door notaties, die uit zich zelve duidelijk zijn, in de volgende vergelijkingen zetten:

$$\angle \frac{1}{q} = \angle q \quad \text{As } \frac{1}{q} = - \text{As } q \dots (3)$$

Twee willekeurige quaternions q en q' kunnen wij volgens § 15 altijd onder den vorm brengen:

$$q' = \frac{\gamma}{\alpha} \quad q = \frac{\beta}{\alpha}$$

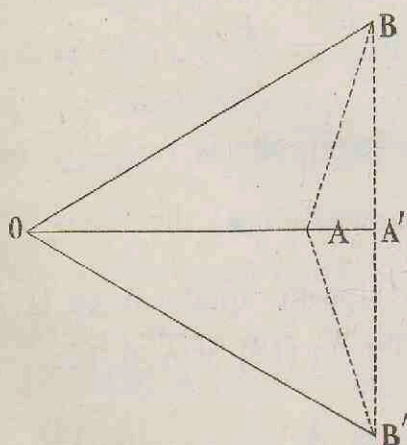
Daarom heeft men in het algemeen:

$$q' : q = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = q' \cdot \frac{1}{q} \dots (4)$$

en

$$(q' : q) q = q' \dots (5)$$

19. GECONJUGEEERDE QUATERNIONS. Wanneer twee drie-



hoeken AOB en AOB', die in hetzelfde vlak liggen, een zijde OA gemeen hebben, en gelijkvormig bij overstand zijn, dan noemt men de quotienten $\frac{OB}{OA}$ en $\frac{OB'}{OA}$ GECONJUGEEERDE QUA-

NIONS. Hamilton voert de letter K in als karakteristiek voor de conjugatie en schrijft:

$$\frac{OB'}{OA} = K \frac{OB}{OA} \dots\dots\dots (1)$$

als $\triangle AOB \propto AOB' \dots\dots\dots (2)$

Wordt het quotient $\frac{OB}{OA}$ voorgesteld door q , dan kan men voor het quotient $\frac{OB'}{OA}$ schrijven Kq .

Omgekeerd, geldt vergelijking (1) dan geldt ook (2). Het is duidelijk dat (§ 13):

$$\angle q = \angle Kq \quad As \, q = - As \, Kq \dots (3)$$

Een scalar kan beschouwd worden als een quaternion, waarvan de hoek nul of π en de as onbepaald is. Daaruit volgt, zoo x een scalar is:

$$Kx = x \dots\dots\dots (4)$$

Is A' het punt waar de lijn BB' de lijn OA snijdt, zoo zal:

$$OB + OB' = 2OA'$$

en dus volgens de vierde definitie van § 11:

$$q + Kq = \frac{2OA'}{OA} \dots\dots\dots (5)$$

De som van een quaternion en zijn geconjugeerde is dus een scalar.

Wanneer de hoek AOB regt is, zoo wordt OA' een

nul-vector en de som (5) een nul-quaternion, dat wij ook door het teeken 0 voorstellen, en men heeft:

$$q + Kq = 0 \quad \text{als } \angle q = \frac{\pi}{2} \dots \dots (6)$$

Dat een nul-vector gedeeld door een actuelen vector werkelijk een nul-quaternion is, leert de volgende vergelijking:

$$\frac{0}{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Men kan (6) ook omkeeren, zoodat:

$$\angle q = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } q + Kq = 0 \dots \dots (7)$$

Een quaternion waarvan de hoek gelijk $\frac{\pi}{2}$ is, noemt men een regt quotient.

20. Wanneer twee vectoren, die gelijke lengte doch tegengestelde rigting hebben, door een zelfden vector gedeeld worden, noemt men die quotienten tegengestelde quaternions; $\frac{\beta}{\alpha}$ en $\frac{-\beta}{\alpha}$ of volgens (9) § 11 $\frac{\beta}{\alpha}$ en $-\frac{\beta}{\alpha}$ zijn dus tegengesteld. De som van twee tegengestelde quaternions is nul; hun quotient -1 . De reciproken van twee tegengestelde quaternions, zijn zelve tegengesteld, zoodat (zie (10) van § 11):

$$\frac{1}{-q} = -\frac{1}{q} \dots \dots \dots (1)$$

De assen van twee tegengestelde quaternions hebben

tegengestelde rigting; hun hoeken zijn elkanders supplementen. of:

$$\angle (-q) = \pi - \angle q, \text{ As } (-q) = - \text{ As } q. (2)$$

Wij mogen nu schrijven:

$$Kq = -q \text{ als } \angle q = \frac{\pi}{2} \dots \dots (3)$$

21. Het is duidelijk dat men heeft:

$$-(-q) = q; \quad 1 : (1 : q) = q; \quad KKq = q. (1)$$

Vervolgens kan men uit een eenvoudige figuur aantoonen dat:

$$K(-q) = -Kq; \quad K \frac{1}{q} = 1 : Kq \dots \dots (2)$$

$$\angle K \frac{1}{q} = \angle q \quad \text{As } K \frac{1}{q} = \text{As } q \dots \dots (3)$$

Uit (2) volgt, dat

$$z_{00} \quad \frac{\beta'}{z} = K \frac{\beta}{z} \quad \text{ook} \quad \frac{z}{\beta'} = K \frac{z}{\beta} \dots \dots (4)$$

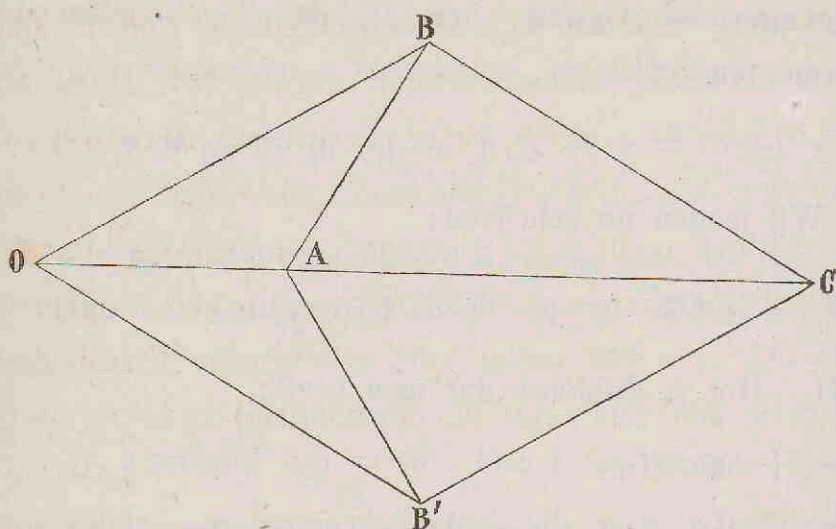
22. NORM. Het product van twee geconjugeerde quaternions wordt hun gemeenschappelijke norm genoemd en aldus aangeduid:

$$qKq = Nq \dots \dots \dots (1)$$

De uitdrukking is door Hamilton aan de getallentheorie ontleend.

Zij dan

$$\frac{\beta'}{z} = \frac{OB'}{OA} = K \frac{OB}{OA} = K \frac{\beta}{z},$$



en zij C een zoodanig punt op de lijn OA, dat

$$\triangle BOC \propto AOB'$$

en dus

$$\triangle B'OC \propto AOB$$

zoo heeft men:

$$N \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OB'}{OA} = \frac{OC}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OA} = \frac{OC}{OA}$$

$$N \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA} \cdot \frac{OB}{OA} = N \frac{OB'}{OA}.$$

Daar OC en OA dezelfde rigting hebben, is hun quotient gelijk aan het quotient hunner lengten, en dus gelijk aan het quotient van het quadraat der lengte van OB en het quadraat der lengte van OA (§ 5).

Zoo krijgt men:

$$Nq = NKq = N \frac{\beta}{\alpha} = N \frac{\beta'}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \quad K \quad \frac{\beta}{\alpha} =$$

$$\left(\frac{\text{lengte van } \beta}{\text{lengte van } \alpha} \right)^2 \dots\dots\dots (2)$$

23. RADIALEN. Wij gaan over tot de beschouwing van

quotienten waarvan de vectoren allen de eenheid van lengte hebben; zulke vectoren worden door Hamilton eenheids-vectoren, zulke quotienten radiale quotienten of radialen genoemd. Hier komt dan alleen de relatieve rigting der vectoren in aanmerking, terwijl beschouwingen over de relatieve lengte later volgen.

Is $OA = \alpha$ een vector van willekeurige lengte, dan wordt de eenheidsvector die dezelfde rigting heeft, voorgesteld door U_α .

Verplaatst men alle eenheidsvectoren evenwijdig aan zich zelve met den oorsprong naar eenig punt O , zoo zullen de uiteinden van die vectoren op een bol liggen, die de eenheidsbol kan genoemd worden.

De positieve eenheid kan beschouwd worden als een radiaal waarvan de hoek nul is, de negatieve eenheid als een radiaal met den hoek π .

Is de hoek van een radiaal $\frac{\pi}{2}$ zoo heet het radiaal een regt radiaal.

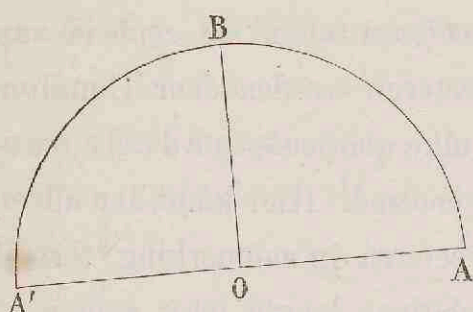
Het ligt voor de hand het product van twee gelijke quaternions het kwadraat van dat quaternion te noemen en te schrijven

$$qq = q^2.$$

Dit aangenomen zijnde, heeft men dat het kwadraat van elk regt radiaal gelijk is aan de negatieve eenheid.

Immers als $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$:

$$\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{OA'}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OA} = -1 \dots (1)$$



Op dezelfde wijze is het gemakkelijk in te zien dat het kwadraat van eenig rekt quotient (§ 19) een negatieve scalar is.

Wanneer r een radiaal quotient is, heeft men:

$$Kr = \frac{1}{r} \dots \dots \dots (2)$$

en omgekeerd, als (2) geldt, is r een radiaal quotient.

Wanneer toch OA en OB eenheidsvectoren zijn en

$$r = \frac{OB}{OA}, \text{ zoo is } \frac{1}{r} = \frac{OA}{OB} \text{ en } \triangle AOB \propto' BOA.$$

Eindelijk (§ 20 (3)):

$$\text{als } \angle r = \frac{\pi}{2} \text{ dan is } Kr = \frac{1}{r} = -r \dots \dots (3)$$

24. VECTORBOGEN. Zijn wederom OA en OB twee eenheidsvectoren met gemeenschappelijken oorsprong, zoodat A en B op den eenheidsbol liggen, dan is het radiale quotient $\frac{OB}{OA}$ geheel bepaald door den boog AB , die op den eenheidsbol gelegen is. Voert men dergelijke bogen in als voorstellende radiale quotienten, zoo moet in de eerste plaats de rigting van de boog in aanmerking genomen worden en dus de boog AB van de boog BA onderscheiden worden; de boog BA stelt dan voor het quotient $\frac{OA}{OB}$ of $K \frac{OB}{OA}$ (zie (2) van de vorige paragraaf). Vervolgens zijn dan bogen van een zelfden grooten

cirkel, die gelijke lengte en rigting hebben, aan elkander gelijk, en kunnen bogen van verschillende groote cirkels in het algemeen niet aan elkander gelijk zijn. Wij zeggen in het algemeen omdat bogen van 0 en 180 graden van alle groote cirkels onderling gelijk worden (vergelijk § 23).

Dergelijke bogen, die radiale quotienten voorstellen, heeten Vectorbogen, waarvan men, even als bij de vectoren, een oorsprong en een uiteinde kan onderscheiden.

25. PRODUCT VAN RADIALEN. Door middel van vectorbogen kan men het product of het quotient van twee willekeurige radialen construeren. Zoo

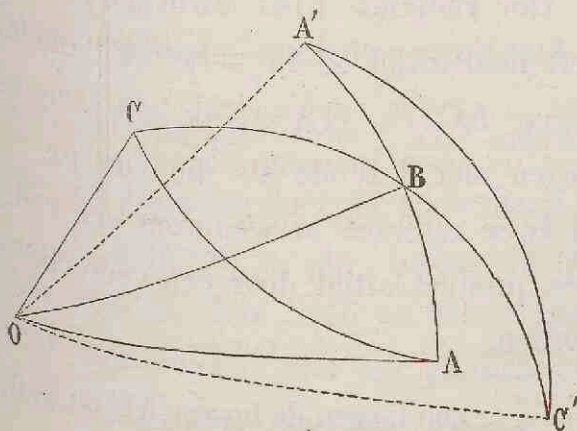
$$\frac{1}{r} = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad r' = \frac{\varepsilon'}{\delta},$$

zijn deze quotienten volgens § 15 tot den vorm te brengen :

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{\beta} \quad r' = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Twee willekeurige radialen en evenzoo twee willekeurige quaternions zijn dus altijd tot den vorm te brengen:

$$r = \frac{\beta}{\alpha} \quad r' = \frac{\gamma}{\beta}.$$



Beschouwen wij nu het product $r'r$ waarbij (vergezende definitie van § 11) r' het multiplicatorquotient, r het multiplicandquotient

is, dan krijgt men :

$$r'r = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \dots \dots \dots (1)$$

De vectorboog AC stelt dus voor het product $r'r$.
Wanneer

$$\text{bg AB} = \text{bg BA'}$$

$$\text{bg BC} = \text{bg C'B is,}$$

dan mogen wij schrijven

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{OA'}{OB} = \frac{\alpha'}{\beta} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{OB}{OC'} = \frac{\beta}{\gamma'}$$

en men heeft :

$$rr' = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma'} = \frac{\alpha'}{\gamma'} \dots \dots (2)$$

Het product rr' wordt dus voorgesteld door de vectorboog $C'A'$.

Maar volgens § 24 kunnen de vectorbogen AC en $C'A'$ in het algemeen niet aan elkander gelijk zijn, omdat zij in het algemeen niet zijn bogen van denzelfden grooten cirkel. Men heeft dus het resultaat dat $r'r$ niet gelijk rr' , of met andere woorden, dat de vermenigvuldiging van radialen niet commutatief is. Intusschen heeft men altijd $\angle r'r = \angle rr'$, omdat de lengten der bogen AC en $C'A'$ gelijk zijn; de as van rr' is daarentegen niet dezelfde als die van $r'r$.

Het product van twee radialen is wederom een radiaal, omdat zulk een product altijd door een vectorboog kan voorgesteld worden.

Is $\angle r = \angle r' = \frac{\pi}{2}$, zoo liggen de bogen AC en $C'A'$

in denzelfden grooten cirkel, doch hebben dan tegengestelde rigting, zoodat (§ 24):

$$rr' = K \cdot r'r = \frac{1}{r'r} \dots \dots \dots (3)$$

als

$$\angle r = \angle r' = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (4)$$

Staan bovendien de quaternionvlakken AOB en BOC loodregt op elkander, zoo is $\angle r'r = \frac{\pi}{2}$ en dus (§ 20 (3))

$$rr' = K \cdot r'r = \frac{1}{r'r} = - r'r \dots \dots (5)$$

als

$$\angle r = \angle r' = \angle r'r = \frac{\pi}{2} \dots \dots (6)$$

Liggen de vectoren α , β en γ in hetzelfde vlak, dan ziet men gemakkelijk in, dat:

$$r'r = rr'$$

en dat $r'r$ evenals rr' complanair is met r en r' .

26. QUOTIENT VAN RADIALEN. Volgens (11) van § 11 heeft men :

$$\frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

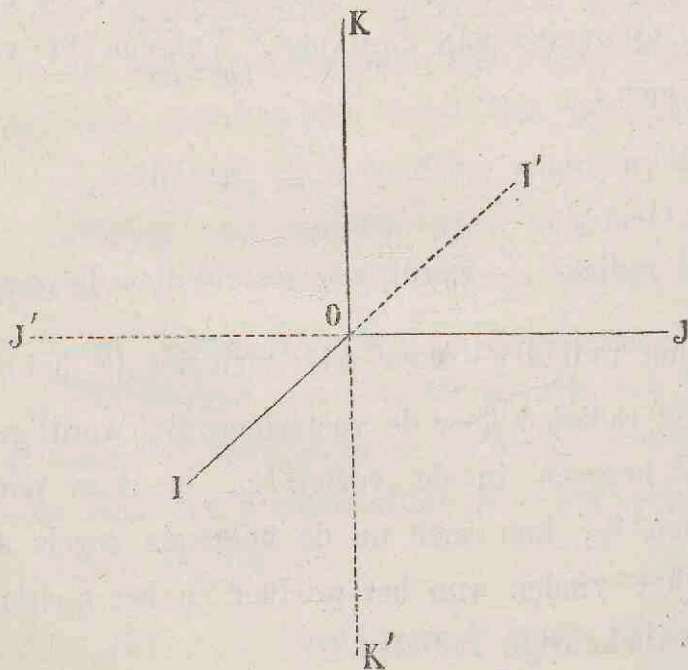
Het radiaal $\frac{\gamma}{\alpha}$ wordt voorgesteld door de vector-boog AC, het radiaal $\frac{\beta}{\alpha}$ door AB; men ziet dat het quotient van die radialen door de vectorboog BC wordt gegeven.

Uit hetgeen in de vorige en in deze paragraaf gebleken is, kan men nu de volgende regels afleiden voor het vinden van het product en het quotient van twee willekeurige radialen.

Zoekt men het product van twee radialen, die voorgesteld worden door vectorbogen, dan verplaatst men de multiplicandboog met het uiteinde naar een snijpunt der groote cirkels, waarin de vectorbogen gelegen zijn, en de multiplicatorboog met den oorsprong naar dat snijpunt. De boog die den oorsprong van de multiplicandboog met het uiteinde van de multiplicatorboog verbindt, stelt dan het product voor.

Zoekt men het quotient van twee radialen, dan verplaatst men de beide vectorbogen met den oorsprong naar een snijpunt der groote cirkels, waarin de vectorbogen gelegen zijn. De boog, die het uiteinde van de divisorboog verbindt met het uiteinde van de dividendboog stelt dan het quotient voor.

27. DE RADIALEN i , j EN k . Bijzonder belangrijk is de beschouwing van drie radialen, wier vlakken loodregt



op elkander staan. Zijn OI , OJ en OK drie onderling loodregte eenheidsvectoren, zoodanig dat de draaijing om OI van OJ naar OK positief is, en stelt men:

$$i = \frac{OK}{OJ} \quad j = \frac{OI}{OK} \quad k = \frac{OJ}{OI}$$

dan zal

$$\text{As } i = OI, \text{ As } j = OJ, \text{ As } k = OK.$$

Laat verder:

$$OI' = - OI$$

$$OJ' = - OJ$$

$$OK' = - OK \text{ zijn.}$$

Dan heeft men:

$$i = OK : OJ = OJ' : OK = OK' : OJ' = OJ : OK';$$

$$j = OI : OK = OK' : OI = OI' : OK' = OK : OI';$$

$$k = OJ : OI = OI' : OJ = OJ' : OI' = OI : OJ';$$

en:

$$- i = OJ : OK = \text{enz.}$$

$$- j = OK : OI = \text{enz.}$$

$$- k = OI : OJ = \text{enz.}$$

Hieruit volgt:

$$i^2 = (OJ' : OK) (OK : OJ) = - 1$$

$$ij = (OJ : OK') (OK' : OI) = OJ : OI = k$$

$$ji = (OJ : OK) (OK : OJ) = OI : OJ = - k.$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$i^2 = - 1 \quad j^2 = - 1 \quad k^2 = - 1 \quad \dots (1)$$

$$ij = k \quad jk = i \quad ki = j \quad \dots (2)$$

$$ji = - k \quad kj = - i \quad ik = - j \quad \dots (3)$$

$$i. jk = i. i = i^2 = - 1. \quad i. j. k = k. k = k^2 = - 1 \quad \dots (4)$$

De betrekkingen (3) volgen ook uit (2) door (5) en (6) van § 25.

Uit (4) blijkt dat de vermenigvuldiging van radialen wier vlakken of assen loodrecht op elkander staan, associatief is, zoodat:

$$i j . k = i . j k.$$

Men kan de punten dus weglaten en schrijven:

$$i j k = - 1 \dots \dots \dots (5)$$

28. **VECTOR.** In § 23 stelden wij reeds vast, dat zoo $OA = \alpha$ een vector is van willekeurige lengte, de eenheidsvector, die dezelfde rigting als α heeft, voorgesteld wordt door $U\alpha$.

Is $q = \frac{\beta}{\alpha}$ een willekeurig quaternion, dan zal $\frac{U\beta}{U\alpha}$ een radiaal zijn. Dit radiaal zullen wij voorstellen door Uq , zoodat:

$$Uq = U \frac{\beta}{\alpha} = \frac{U\beta}{U\alpha} \dots \dots \dots (1)$$

Om redenen waarop wij later terug komen, noemt Hamilton het radiaal Uq den **vector** van q , en even zoo den eenheidsvector $U\alpha$ den **vector** van α . Bovendien wordt elk radiaal ook wel een **vector** genoemd.

Het is duidelijk dat

$$\angle Uq = \angle q \quad \text{As } Uq = \text{As } q \dots \dots \dots (2)$$

of algemeener:

$$\angle q' = \angle q \text{ en } \text{As } q' = \text{As } q \text{ als } Uq' = Uq \dots \dots (3)$$

Bij den **vector** van een vectorenquotient komt alleen de relatieve rigting der vectoren in aanmerking. Deze

relatieve rigting nu is volkomen bepaald door den hoek en de as. Men mag dus (3) omkeeren en schrijven:

$$Uq' = Uq \text{ als } \angle q' = \angle q \text{ en } As q' = As q \dots (4)$$

29. Volgens (3) van § 21 heeft men dus:

$$UKq = U \frac{1}{q} \dots \dots \dots (1)$$

een resultaat, dat ook uit een eenvoudige figuur gemakkelijk te bewijzen is.

Verder is:

$$U \left(1 : \frac{\beta}{z} \right) = U \frac{z}{\beta} = \frac{Uz}{U\beta} = 1 : \frac{U\beta}{Uz} = 1 : U \frac{\beta}{z}$$

en dus:

$$U \frac{1}{q} = \frac{1}{Uq} \dots \dots \dots (2)$$

of

$$Uq \cdot U \frac{1}{q} = 1,$$

en om (1):

$$UKq = \frac{1}{Uq} \text{ of } Uq \cdot UKq = 1 = NUq \dots \dots (3)$$

De norm van een versor is dus altijd gelijk aan de positieve eenheid.

Volgens § 23 en volgens (1) en (2) heeft men:

$$KUq = \frac{1}{Uq} = U \frac{1}{q} = UKq \dots \dots \dots (4)$$

De operaties U en K zijn dus commutatief.

Het is uit de definitie van het symbool U duidelijk, dat:

$$UUz = Uz \quad UUq = Uq \dots \dots \dots (5)$$

Evenzoo dat:

$$Umq = Uq \quad \text{of} \quad Umq = -Uq \dots (6)$$

naarmate m een positieve of een negatieve scalar is.

Eindelijk door een scalar te beschouwen als een quaternion, waarvan de hoek nul of π en de as onbepaald is, krijgt men:

$$Um = +1 \quad \text{of} \quad Um = -1 \dots (7)$$

naarmate m een positieve of een negatieve scalar is.

30. TENSOR. Is de lengte van een vector α a lengte-eenheden, zoo is:

$$\alpha = a.U\alpha = U\alpha.a.$$

De grootheid a wordt door Hamilton de tensor van den vector α genoemd en voorgesteld door $T\alpha$, zoodat

$$\alpha = T\alpha.U\alpha = U\alpha.T\alpha \dots (1)$$

De tensor van een vector is dus altijd positief, en van een eenheidsvector de positieve eenheid.

Moet een veranderlijke vector q voldoen aan de vergelijking:

$$Tq = 1 \dots (2)$$

zoo zullen bij gemeenschappelijken oorsprong de uiteinden van alle vectoren q op den eenheidsbol liggen; (2) is dus een vergelijking van den eenheidsbol.

Op dergelijke wijze is:

$$T(q + \alpha) = T(q - \alpha)$$

de vergelijking van een vlak door den oorsprong loodrecht op α .

Deze voorbeelden mogen doen zien hoe men door alleen de lengten van vectoren in te voeren, vergelijkingen van geometrische plaatsen kan vinden.

Wij stelden in § 28

$$Uq = \frac{U\alpha}{U\beta} \quad \text{als } q = \frac{\alpha}{\beta};$$

het ligt nu voor de hand om te stellen:

$$Tq = \frac{T\alpha}{T\beta}$$

en Tq te lezen als den tensor van q .

Daar nu

$$q = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha.U\alpha}{T\beta.U\beta} \quad \text{is, heeft men}$$

(§ 11 (31)):

$$q = Tq \cdot Uq = Uq \cdot Tq \dots (3)$$

en

$$TUq = 1 \dots (4)$$

31. Het is duidelijk, dat men heeft,

$$T \cdot xq = + xTq \quad \text{of } T \cdot xq = - xTq \dots (1)$$

naarmate x een positieve of een negatieve scalar is. De tensor van een quaternion toch kan even als de tensor van een vector alleen positief zijn, zoodat dan ook:

$$T(-q) = Tq \dots (5)$$

De tensor van een scalar is die scalar zelf maar positief genomen. Daarom:

$$TTx = Tx \quad TTq = Tq \dots (3)$$

Verder:

$$T(1:q) = T(\alpha:\beta) = T\alpha:T\beta = 1:Tq \dots (4)$$

en volgens § 19:

$$TKq = Tq \dots \dots \dots (5)$$

Wanneer $q' = q$ zal ook:

$$Tq' = Tq \quad Uq' = Uq \quad \text{zijn.}$$

32. Volgens § 29 (3) is:

$$UKq = \frac{1}{Uq}$$

Dit in verband gebracht met (5) van de vorige paragraaf, heeft men:

$$Kq = TKq \cdot UKq = \frac{Tq}{Uq} \dots \dots \dots (1)$$

en daar $q = Tq \cdot Uq$, heeft men:

$$Nq = qKq = (Tq)^2 \quad \frac{q}{Kq} = (Uq)^2 \dots \dots \dots (2)$$

Als $\triangle AOB \propto BOC$

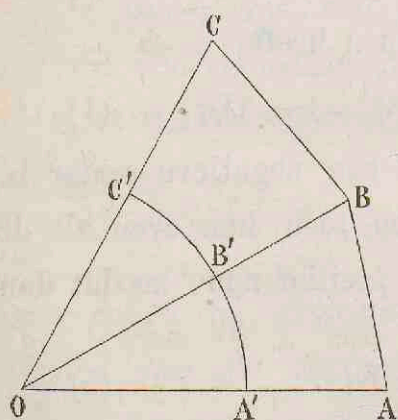
$$OA = \alpha \quad OB = \beta \quad OC = \gamma,$$

dan is:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

en dus:

$$q^2 = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$



Zoo vervolgens

$$OA' = U\alpha, \quad OB' = U\beta, \quad OC' = U\gamma,$$

dan is:

$$(Uq)^2 = \frac{U\gamma}{U\beta} \cdot \frac{U\beta}{U\alpha} = \frac{U\gamma}{U\alpha} = U \cdot q^2 \dots (3)$$

$$(Tq)^2 = \frac{T\gamma}{T\beta} \cdot \frac{T\beta}{T\alpha} = \frac{T\gamma}{T\alpha} = T \cdot q^2 \dots (4)$$

Deze vergelijkingen veroorloven ons om zoowel voor $(Uq)^2$ als $U \cdot q^2$ te schrijven Uq^2 , en evenzoo zoowel voor $(Tq)^2$ als $T \cdot q^2$ te schrijven Tq^2 ; zoodat (2) nu overgaat in:

$$Nq = qKq = Tq^2 \quad \frac{q}{Kq} = Uq^2 \dots (5)$$

en (1) in:

$$Kq = \frac{Tq}{Uq} = \frac{Nq}{q} \dots (6)$$

33. Zooals wij reeds in § 25 gezegd hebben, kunnen twee willekeurige quaternions q en q' altijd onder den vorm gebragt worden:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \quad q' = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Zoo krijgen wij dan:

$$T \cdot q'q = \frac{T\gamma}{T\alpha} = \frac{T\gamma}{T\beta} \cdot \frac{T\beta}{T\alpha} = Tq' \cdot Tq = Tq \cdot Tq' = Tqq' \dots (1)$$

$$U \cdot q'q = \frac{U\gamma}{U\alpha} = \frac{U\gamma}{U\beta} \cdot \frac{U\beta}{U\alpha} = Uq' \cdot Uq \dots (2)$$

Intusschen is volgens § 25 $Uq' \cdot Uq$ niet gelijk aan $Uq \cdot Uq'$ en dus ook $U \cdot q'q$ niet gelijk aan $U \cdot qq'$. Daar evenwel $T \cdot q'q$ wel gelijk $T \cdot qq'$ is, zoo volgt, dat $q'q$ niet gelijk aan qq' kan zijn. De vermenigvuldiging van quaternions onderling is dus niet commutatief. Alleen wanneer de quaternions q en q'

complanair (§ 15) zijn, is $q'q = qq'$. Intusschen is steeds $\angle q'q = \angle qq'$.

Men heeft nog:

$$T \cdot (q' \cdot mq) = T \cdot (mq' \cdot q) = mTq'q \dots (3)$$

als m een positieve scalar is;

$$N \cdot q'q = (T \cdot q'q)^2 = Nq' \cdot Nq = Nq \cdot Nq' \dots (4)$$

Brengt men de quaternions q en q' tot den vorm (§ 15)

$$q = \frac{\alpha'}{\beta} \quad q' = \frac{\gamma}{\beta},$$

zoo volgt daaruit:

$$T(q' : q) = Tq' : Tq \quad U(q' : q) = Uq' : Uq \dots (5)$$

34. Zij wederom $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\gamma}{\beta}$; dan is:

$$1 : q'q = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q'} \dots (1)$$

en volgens (2) van § 23:

$$KUq'q = U \frac{1}{q'q} = U \frac{1}{q} \cdot U \frac{1}{q'} = KUq \cdot KUq' \dots (2)$$

Door beide leden van de laatste vergelijking met $Tq' \cdot Tq$ te vermenigvuldigen, krijgt men (§ 31 (5)):

$$Kq'q = Kq \cdot Kq' \dots (3)$$

en zoo $q' = q$:

$$K \cdot q^2 = (Kq)^2 = Kq^2 \dots (4)$$

Nog heeft men (§ 11 (7) en § 3)

$$q + q' = \frac{\alpha' + \gamma}{\beta} = \frac{\gamma + \alpha'}{\beta} = q' + q \dots (5)$$

Optelling van quaternions is dus commutatief.

Uit een eenvoudige figuur kan men inzien, dat

$$K(q' + q) = Kq' + Kq \dots \dots \dots (6)$$

Zij toch OBDC een parallelogram, en OA' een vector, die in het algemeen niet ligt in het vlak van OBDC; zij vervolgens

$$OA' = \alpha' \quad OB = \beta \quad OC = \gamma \quad OD = \delta;$$

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = K \frac{\beta}{\alpha'} \quad \frac{\gamma'}{\alpha'} = K \frac{\gamma}{\alpha'} \quad \frac{\delta'}{\alpha'} = K \frac{\delta}{\alpha'};$$

$$\beta' = OB' \quad \gamma' = OC' \quad \delta' = OD';$$

zoo zal OB'D'C' ook een parallelogram zijn, waarmee (5) bewezen is.

35. SCALAR. In § 19 toonden wij reeds aan dat de som $q + Kq$ steeds een scalar is; de helft van die som noemt Hamilton de scalar van het quaternion q en deze wordt geschreven Sq ; zoodat

$$q + Kq = Kq + q = 2Sq \dots \dots \dots (1)$$

waaruit terstond volgt:

$$SKq = Sq \dots \dots \dots (2)$$

Beschouwt men een scalar als een quaternion waarvan de hoek nul of π en de as onbepaald is, zoo volgt uit (4) van § 19:

$$Sx = x \dots \dots \dots (3)$$

wanneer x een scalar is.

Hieruit krijgt men verder:

$$SSq = Sq \dots \dots \dots (4)$$

Vervolgens (§ 19 (6)):

$$Sq = 0 \text{ als } \angle q = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (5)$$

Uit de figuur van § 19 blijkt, dat zoo OB met een scalar m vermenigvuldigd wordt, dit ook met OA' gebeurt; waaruit:

$$S \cdot mq = mSq \text{ als } m \text{ een scalar } \dots \dots (6)$$

en

$$Sq = S (Tq \cdot Uq) = Tq \cdot SUq \dots \dots (7)$$

Nog geeft (4) van § 29 en (2) van deze paragraaf:

$$SUq = SKUq = S \frac{1}{Uq} = SU \frac{1}{q} \dots \dots (8)$$

en dus:

$$Sq = Nq \cdot S \frac{1}{q} \dots \dots \dots (9)$$

De figuur van § 19 doet ook zien, dat:

$$Sq = Tq \cdot \cos \angle q \quad SUq = \cos \angle q \dots (10)$$

Daar $\angle q$ altijd kleiner dan π is (§ 13), is ook $\angle q$ geheel bepaald wanneer men SUq kent.

De uitdrukking:

$$\alpha \cdot S \frac{\beta}{\alpha}$$

geeft nu de projectie van den vector β op de rigting van den vector α .

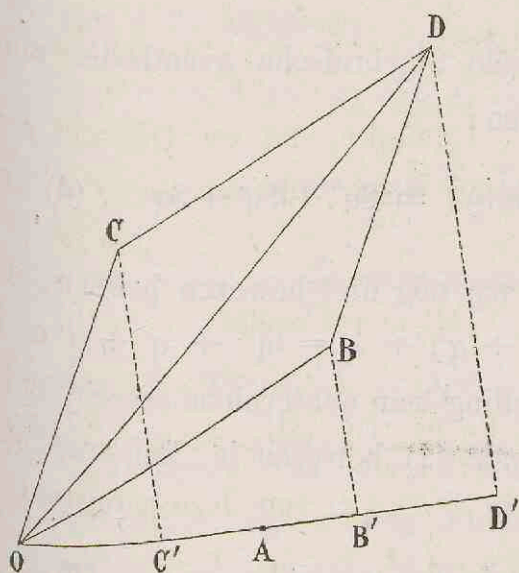
Uit (7) van § 29 en (1) van § 31 is het duidelijk dat:

$$USq = \pm 1 \quad TSq = \pm Sq \dots \dots (11)$$

en uit (4) van § 19 :

$$KSq = Sq = SKq (12)$$

36. Is OBDC een parallelogram en OA een vector



in het algemeen niet in het vlak van OBDC gelegen ; is verder OB' de projectie van OB op de rigting van OA, OC' die van OC, OD' die van OD ; stellen wij eindelijk $OA = \alpha$ $OB = \beta$ $OC = \gamma$ $OD = \delta$ en

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \quad q' = \frac{\gamma}{\alpha} (1)$$

zoo is :

$$q' + q = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Volgens § 19 (5) en § 35 (1) is dan :

$$Sq' = \frac{OC'}{OA} \quad Sq = \frac{OB'}{OA} \quad S(q' + q) = \frac{OD'}{OA}$$

en dus :

$$S(q' + q) = Sq' + Sq (2)$$

Doch twee willekeurige quaternions kunnen onder den vorm (1) gebragt worden ; (2) geldt dus algemeen.

In § 15 zagen wij dat de som van twee quaternions altijd weder een quaternion is. Daarom heeft men door (2):

$$S. [q'' + (q' + q)] = Sq'' + S(q' + q) = Sq'' + (Sq' + Sq) \quad (3)$$

maar daar scalars reële algebraïsche grootheden zijn, mag men ook schrijven:

$$S. [q'' + (q' + q)] = Sq'' + Sq' + Sq \dots (4)$$

Men bedenke, dat wij nog niet bewezen hebben, dat $q'' + (q' + q) = (q'' + q') + q = q'' + q' + q$ of in woorden, dat de optelling van quaternions associatief is.

Op dezelfde wijze als (2) bewezen is, kan men ook aantoonen dat:

$$S(q' - q) = Sq' - Sq \dots \dots \dots (5)$$

37. Uit (10) van § 35 is het duidelijk dat de scalar van een quaternion alleen van den hoek en van den tensor van het quaternion afhangt. Volgens § 33 is dus:

$$Sq'q = Sq q' \dots \dots \dots (1)$$

Zijn $q' = \frac{\gamma}{\alpha}$, $q = \frac{\beta}{\alpha}$ rechte quotienten, en herinneren wij ons wat wij in § 13 de as van een quaternion noemden, zoo volgt:

$$\text{als } \angle q = \frac{\pi}{2} \quad Uq' : Uq = U\gamma : U\beta = Asq' : Asq \dots (2)$$

Immers liggen dan γ , β , $As \frac{\gamma}{\alpha}$ en $As \frac{\beta}{\alpha}$ in het

zelfde vlak en is de hoek, dien β en γ met elkander maken, gelijk aan dien tusschen Asq en Asq' .

Daar twee willekeurige regte quotienten tot den bovenstaanden vorm te brengen zijn, heeft men door (7) en (10) van § 35 algemeen:

$$S(q' : q) = T(q' : q) \cdot \cos \angle (Asq' : Asq) \dots (3)$$

als
$$\angle q' = \angle q = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (4)$$

Zijn $q' = \frac{\gamma}{\alpha}$, $q = \frac{\alpha}{\beta'}$ twee regte quotienten,

zoo zal
$$U \cdot q'q = \frac{U\gamma}{U\beta} = Asq' : (-Asq) \dots (5)$$

Immers liggen dan, zooals door het teekenen van een eenvoudige figuur nog duidelijker wordt, γ , β , Asq' en Asq in hetzelfde vlak, en is de hoek tusschen β en γ het supplement van dien tusschen Asq en Asq' .

Uit (5) volgt nu:

$$Sq'q = -Tq'q \cdot \cos \angle (Asq' : Asq) \dots (6)$$

als
$$\angle q' = \angle q = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (7)$$

38. In § 32 beschouwden wij reeds het quadraat van een quaternion. Het is terstond in te zien, dat:

$$\angle q^2 = 2 \angle q \dots \dots \dots (1)$$

en dus:

$$SU \cdot (q^2) = \cos 2 \angle q = 2 (SUq)^2 - 1 \dots (2)$$

en
$$S(q^2) = 2 (Sq)^2 - Tq^2 \dots \dots \dots (3)$$

In de ontwikkelingen komt de uitdrukking $(Sq)^2$ meer

voor dan de uitdrukking $S(q^2)$. Hamilton slaat daarom voor te schrijven:

$$(Sq)^2 = Sq^2 \dots \dots \dots (4)$$

en

$$S(q^2) = S \cdot q^2 \dots \dots \dots (5)$$

39. Beschouwt men een driehoek OAB, zoo leert de planimetrie:

$$(T \cdot AB)^2 = (T \cdot OA)^2 - 2 (T \cdot OA) (T \cdot OB) \cos \angle AOB + (T \cdot OB)^2 \dots (1)$$

Door te stellen $q = \frac{OB}{OA}$, krijgt men:

$$\frac{AB}{OA} = q - 1.$$

Deelt men nu de beide leden der vergel. (1) door $(T \cdot OA)^2$, zoo geeft deze (§ 30 en (10) van § 35):

$$T(q - 1)^2 = Tq^2 - 2Sq + 1 \dots (2)$$

of

$$N(q - 1) = Nq - 2Sq + 1 \dots (3)$$

Door q in $-q$ te veranderen, heeft men nu ook:

$$N(q + 1) = Nq + 2Sq + 1 \dots (4)$$

Brengt men q' en q onder de vorm $\frac{\gamma}{\alpha}$ en $\frac{\beta}{\alpha}$, zoo is:

$$\left(\frac{q'}{q} + 1\right) q = \left(\frac{\gamma}{\beta} + 1\right) \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma + \beta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma + \beta}{\alpha} = q' + q \dots (5)$$

Volgens (4) is nu:

$$N(q' + q) = N\left(\frac{q'}{q} + 1\right) Nq = Nq' + 2 Nq S \frac{q'}{q} + Nq.$$

Maar [(6) van § 35, (4) van § 18, (6) van § 32, (2) van § 35 en (3) van § 34]:

$$NqS \frac{q'}{q} = S. q' \frac{Nq}{q} = S. q'Kq = S. qKq';$$

zoodat:

$$N (q' + q) = Nq' + S.qKq' + Nq \dots (6)$$

Gaat het quaternion q' in een scalar x over, zoo wordt (6):

$$N (q + x) = Nq + 2xSq + x^2,$$

in welke vergelijking (3) en (4) zijn opgesloten.

40. Evenals wij in § 30 aantoonde, dat men door vergelijkingen tusschen tensoren geometrische plaatsen kan voorstellen, mogen een paar voorbeelden doen inzien, hoe dit ook door vergelijkingen tusschen scalars van quaternions kan geschieden.

Zij q een veranderlijke, α een constante vector, dan wordt aan de vergelijkingen:

$$S \frac{q}{\alpha} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

voldaan door alle vectoren, die bij gemeenschappelijken oorsprong in het vlak liggen loodregt op de rigting van α ; (1) is dus de vergelijking van dat vlak.

Evenzoo is bij gemeenschappelijken oorsprong van den vector α en de vectoren q ,

$$S \frac{q}{\alpha} = 1 \dots \dots \dots (2)$$

de vergelijking van het vlak dat door het uiteinde van α loodregt op de rigting van α staat.

De vergelijking

$$S \frac{\beta}{\rho} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

is die van een bol waarvan de vector β een middellijn is.

De twee vergelijkingen:

$$S \frac{\rho}{\alpha} = 1 \quad S \frac{\beta}{\rho} = 1 \dots \dots (4)$$

geven dus den cirkel volgens welken de bol (3) door het vlak (2) gesneden wordt.

Aan de vergelijking

$$S \frac{\rho}{\alpha} \cdot S \frac{\beta}{\rho} = 1 \dots \dots \dots (5)$$

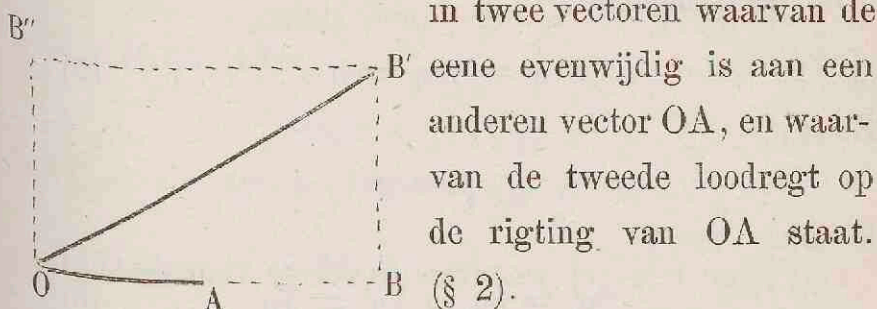
wordt voldaan door alle vectoren, die aan het stel (4) voldoen. Zoo bovendien een vector voldoet aan (5); voldoet ook elk veelvoud of onderdeel van dien vector; (5) is dus de vergelijking van een kegel van den 2^{den} graad, die op den cirkel rust, welke door het stel (4) wordt gegeven.

De twee vergelijkingen

$$S \frac{\rho}{\alpha} \cdot S \frac{\beta}{\rho} = 1 \quad T_{\rho} = 1$$

geven dan een spherische kegelsnede.

41. VECTOR. Een vector OB kan altijd ontbonden worden



(§ 2).

Zij dan $B'B = OB''$ loodrecht op de rigting van OA, zoo zal

$$OB = OB' + B'B = OB' + OB'' \dots (1)$$

en (§ 11 (7)):

$$q = \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA} + \frac{OB''}{OA} \dots (2)$$

Nu is (§ 19 (5) en § 35 (11)):

$$\frac{OB'}{OA} = Sq.$$

$\frac{OB''}{OA}$ is, wat wij een regt quotient genoemd hebben.

Uit (2) volgt dan dat elk quaternion beschouwd kan worden als de som van een scalar en van een regt quotient. Dit regte quotient wordt door Hamilton de VECTOR van het quaternion genoemd en voorgesteld door Vq , zoodat in het algemeen:

$$q = Sq + Vq = Vq + Sq \dots (3)$$

Een scalar als een quaternion beschouwende waarvan de hoek nul of π en de as onbepaald is, krijgt men:

$$Vx = 0 \text{ als } x \text{ een scalar} \dots (4)$$

Volgens deze laatste vergelijking en volgens (5) van § 35 heeft men nu:

$$SVq = VSq = 0 \dots\dots\dots (5)$$

Zoo:

$$q' = q$$

is ook:

$$Sq' = Sq \text{ en } Vq' = Vq \dots\dots\dots (6)$$

Wanneer $\angle q = \frac{\pi}{2}$ is $Vq = q \dots\dots\dots (7)$

Vergelijking (5) kan ook omgekeerd worden, zoodat

$$\text{als } Sq = 0, \text{ is } q \text{ een regt quotient } \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{als } Vq = 0, \text{ is } q \text{ een scalar } \dots\dots\dots (9)$$

Het is duidelijk dat

$$VVq = Vq \quad Vxq = xVq \text{ als } x \text{ een scalar } \dots\dots\dots (10)$$

Uit § 19 (6) en uit de figuur van die paragraaf volgt dat:

$$KVq = -Vq = VKq = NqV\frac{1}{q} \dots\dots\dots (11)$$

$$Kq = Sq - Vq \dots\dots\dots (12)$$

$$q - Kq = 2Vq \dots\dots\dots (13)$$

Vergelijking (10) geeft:

$$Vq = Tq \cdot VUq \quad TVq = Tq \cdot TVUq \dots\dots\dots (14)$$

Maar $TVq = \frac{T \cdot OB''}{T \cdot OA} = Tq \cdot \sin \angle q \dots\dots\dots (15)$

en
$$TVUq = \sin \angle q = TVU \frac{1}{q} \dots (16)$$

zoodat (§ 35 (10)):

$$(SUq)^2 + (TVUq)^2 = 1 \dots (17)$$

en
$$Sq^2 + (TVq)^2 = Tq^2 = Nq \dots (18)$$

Intusschen is (§ 23 (1)):

$$(UVUq)^2 = -1$$

en
$$(VUq)^2 = - (TVUq)^2, \quad (Vq)^2 = - (TVq)^2 \dots (19)$$

Hamilton schrijft voor $(Vq)^2$ korthedshalve ook Vq^2 , terwijl $V(q^2)$ door $V \cdot q^2$ wordt voorgesteld.

Zoo gaat dan (18) over in:

$$Nq = Sq^2 - Vq^2 \dots (20)$$

42. Projecteert men een parallelogram OBDC op het vlak door O dat loodregt op de rigting OA staat, zoo is de geprojecteerde figuur OB'D'C' ook een parallelogram. Daaruit volgt:

$$V(q' + q) = Vq' + Vq \dots (1)$$

en op dezelfde wijze krijgt men:

$$V(q' - q) = Vq' - Vq \dots (2)$$

$$V[q'' + (q' + q)] = Vq'' + V(q' + q) = Vq'' + (Vq' + Vq) \dots (3)$$

Wanneer Vq' en Vq de vectoren zijn van twee quaternions, en wij stellen:

$$t = TVq = Tq \sin \angle q \quad t' = TVq' = Tq' \sin \angle q'$$

$$x = \angle (Asq' : Asq),$$

zoo heeft men (vergelijk § 37 (2) en (5))

$$Vq' : Vq = (TVq' : TVq) (Asq' : Asq) \dots \dots \dots (4)$$

$$Vq'.Vq = - (TVq' . TVq) (Asq' : Asq) \dots \dots \dots (5)$$

$$S (Vq' : Vq) = t't^{-1} \cos x; SU (Vq' : Vq) = \cos x \quad (6)$$

$$S (Vq'.Vq) = - t't \cos x; SU (Vq'.Vq) = - \cos x. \quad (7)$$

$$\angle (Vq' : Vq) = x; \angle (Vq'.Vq) = \pi - x \dots \dots (8)$$

$$TV (Vq' : Vq) = t't^{-1} \sin x; TVU (Vq' : Vq) = \sin x. \quad (9)$$

$$TV (Vq'.Vq) = t't \sin x; TVU (Vq'.Vq) = \sin x \quad (10)$$

43. INDEX. De as van een quaternion is, zooals wij vaststelden (§ 13), een eenheidsvector, zoodanig, dat voor iemand die zich langs dien vector met de voeten in den oorsprong denkt, de draaijing van den divisor naar het dividend positief is. Is het quaternion een regt quotient, zoo noemt Hamilton den INDEX van dat quotient een vector, die de rigting heeft van de as, en waarvan de tensor gelijk is aan den tensor van het quotient.

Zij dan $\angle q = \frac{\pi}{2}$, zoo is:

$$Iq = Tq.Asq \quad TIq = Tq \dots \dots \dots (1)$$

Daar altijd $\angle Vq = \frac{\pi}{2}$ en $AsVq = Asq$,

zoo zal ook:

$$IVq = TVq.Asq \dots \dots \dots (2)$$

Maar, zooals uit de definitie van de as duidelijk is, heeft men in het algemeen:

$$Asq = - As (-q) = - As \frac{1}{q} = - AsKq. \dots (3)$$

zoodat:

$$IVq = -IVKq = -IV(-q) = -Nq.IV \frac{1}{q} \dots (4)$$

en

$$IVq = -IKVq = -I(-Vq) = -NVq.I \frac{1}{Vq} \dots (5)$$

De vergelijkingen (4) en (5) van de vorige paragraaf geven nu:

$$Vq' : Vq = IVq' : IVq \dots \dots \dots (6)$$

$$Vq'.Vq = -(TVq'.TVq)(UIVq' : UIVq) = IVq' : I \frac{1}{Vq} \dots (7)$$

Laten wij nog opmerken dat een regt quotient geheel bepaald is door zijn index, zoodat wanneer de indices van twee regte quaternions aan elkander gelijk zijn, die regte quaternions zelve ook aan elkander gelijk zijn en omgekeerd.

44. Is OBDC een parallelogram en OA een eenheidsvector loodregt op het vlak van OBDC, zoodat:

$$\angle \frac{\beta}{\alpha} = \angle \frac{\gamma}{\alpha} = \angle \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\pi}{2};$$

$$\delta = \gamma + \beta,$$

zoo kunnen de quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ en $\frac{\gamma}{\alpha}$ twee willekeurige regte quotienten q en q' voorstellen, terwijl $\frac{\delta}{\alpha}$ dan hun som is.

Laat OB'D'C' een ander parallelogram zijn in hetzelfde vlak en verkregen door OBDC om OA als as een positieve draaijing van een regten hoek te doen ondergaan. Dan is:

$$\beta' = I \frac{\beta}{\alpha} \quad \gamma' = I \frac{\gamma}{\alpha} \quad \delta' = I \frac{\delta}{\alpha}$$

zoodat:

$$I(q' + q) = Iq' + Iq \quad \text{als} \quad \angle q = \angle q' = \frac{\pi}{2} \quad \dots (1)$$

Dus in het algemeen (§ 42 (1)):

$$IV(q' + q) = IVq' + IVq \quad \dots (2)$$

$$IV(q' - q) = IVq' - IVq \quad \dots (3)$$

$$IV[q'' + (q' + q)] = IVq'' + (IVq' + IVq) \quad (4)$$

Maar de index van een regt quotient is volgens zijn definitie een vector, en § 3 en § 4 leeren dat de optelling van vectoren commutatief en associatief is. Wij mogen (4) dus schrijven:

$$\begin{aligned} IV[q'' + (q' + q)] &= IVq'' + (IVq' + IVq) = (IVq'' + IVq') + IVq \\ &= IVq'' + IVq' + IVq = IV[(q'' + q') + q] = \\ &IV(q'' + q' + q) \quad \dots (5) \end{aligned}$$

Daar door den index een regt quotient geheel bepaald is (zie vorige paragraaf) volgt hier ook uit:

$$\begin{aligned} Vq'' + (Vq' + Vq) &= (Vq'' + Vq') + Vq = Vq'' + Vq' + Vq = \\ &Vq + Vq' + Vq'' = \text{enz.} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

of in woorden:

de optelling van rechte quotienten is commutatief en associatief.

In het algemeen (§ 15 en 36 (4)):

$$\begin{aligned} q'' + (q' + q) &= S[q'' + (q' + q)] + V[q'' + (q' + q)] = \\ Sq'' + Sq' + Sq + Vq'' + Vq' + Vq &= (q'' + q') + q = \\ q + q' + q'' &= \text{enz.} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

Optelling van quaternions in het algemeen is dus commutatief en associatief.

45. Wanneer de vlakken van drie of meer quaternions alle zoodanig evenwijdig aan zich zelve verplaatst worden, dat zij door één punt gaan, en wanneer die vlakken dan een lijn gemeen hebben, noemt men die quaternions collineaire quaternions. De assen van die quaternions liggen in één vlak omdat alle loodregt staan op die gemeenschappelijke lijn. Zijn omgekeerd de assen van drie of meer quaternions in één vlak gelegen, zoo zijn de quaternions collineair.

Complanaire quaternions (§ 15) zijn ook als collineaire te beschouwen; een scalar, als een quaternion waarvan de hoek 0 of π en de as onbepaald is, is collineair met elk tweetal willekeurige quaternions. Zoo zijn de scalars en de vectors Sq , Sq' , Vq , Vq' van twee willekeurige quaternions collineair.

De geconjugeerden van collineaire quaternions zijn wederom collineair.

46. DISTRIBUTIEVE EIGENSCHAP DER VERMENIGVULDIGING. Drie collineaire quaternions zijn altijd onder den vorm te brengen:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \quad q' = \frac{\gamma}{\alpha} \quad q'' = \frac{\alpha}{\delta}$$

waarin α de rigting heeft van de lijn, die de quaternionvlakken gemeen hebben, zoo zij door één punt gaan. Men heeft dan:

$$(q' + q) q'' = \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\gamma + \beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha}{\delta},$$

of $(q' + q) q'' = q'q'' + qq'' \dots (1)$

Evenzoo bewijst men:

$$(q' - q) q'' = q'q'' - qq'' \dots (2)$$

Daar de geconjugeerden van gelijke quaternions wederom aan elkander gelijk zijn geven (1) en (2) (§ 34 (3) en (6)):

$$Kq'' (Kq' + Kq) = Kq''Kq' + Kq''Kq \dots (3)$$

$$Kq'' (Kq' - Kq) = Kq''Kq' - Kq''Kq \dots (4)$$

De beschouwde quaternions q , q' en q'' waren willekeurige collineaire quotienten; volgens de laatste alinea van de vorige paragraaf zijn Kq , Kq' , Kq'' dus ook willekeurige collineaire quotienten.

Wij mogen daarom schrijven:

$$q'' (q' + q) = q''q' + q''q \dots (5)$$

$$q'' (q' - q) = q''q' - q''q \dots (6)$$

Uit (1), (2), (5) en (6) volgt nu, als q''' , q'' , q' en q vier willekeurige collineaire quaternions zijn:

$$\begin{aligned} (q''' + q'') (q' + q) &= q''' (q' + q) + q'' (q' + q) \\ &= q'''q' + q'''q + q''q' + q''q \dots (7) \end{aligned}$$

of in woorden:

de vermenigvuldiging van collineaire quaternions is distributief.

Daaruit volgt reeds terstond, dat:

$$\begin{aligned} q'q &= (Sq' + Vq') (Sq + Vq) = Sq'.Sq + Vq'.Sq + \\ &\quad Sq'.Vq + Vq'.Vq \dots (8) \end{aligned}$$

$$q^2 = Sq^2 + 2Sq.Vq + Vq^2 \dots (9)$$

47. Beschouwen wij nu drie regte quaternions q , q' en q'' , zoodat:

$$\angle q = \angle q' = \angle q'' = \frac{\pi}{2}.$$

Dan is (§ 43 (7)):

$$\begin{aligned} (q'' + q') q &= I (q'' + q') : I \frac{1}{q} \\ &= \left(Iq'' : I \frac{1}{q} \right) + \left(Iq' : I \frac{1}{q} \right) = q''q + q'q. \quad (1) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$Kq (Kq'' + Kq') = Kq.Kq'' + Kq.Kq'. \quad (2)$$

en dus ook:

$$q (q'' + q') = qq'' + qq'. \quad (3)$$

Daar altijd:

$$\angle Vq = \angle Vq' = \angle Vq'' = \frac{\pi}{2}$$

heeft men, wanneer q , q' en q'' willekeurige quaternions zijn:

$$^1) (Vq'' + Vq') Vq = Vq''.Vq + Vq'.Vq \quad (4)$$

$$Vq (Vq'' + Vq') = Vq.Vq'' + Vq.Vq' \quad (5)$$

1) In een stukje van den heer J. Versluys „Démonstration nouvelle de la propriété associative de la multiplication des quaternions" Archives Néerland. T. VII, waarop wij in de volgende paragraaf terugkomen, om er dat bewijs aan te ontleenen, wordt ook in het voorbijgaan de distributieve eigenschap der regte quotienten bewezen op een andere en schijnbaar eenvoudiger wijze dan dit door.

Volgens (8) van § 46, (2) van § 36, (1) van § 42, (7) van § 44 en volgens de twee laatste vergelijkingen heeft men nu, wanneer q , q' en q'' drie willekeurige quaternions zijn:

$$\begin{aligned} (q'' + q') q = \\ S(q'' + q').Sq + V(q'' + q').Sq + S(q'' + q').Vq + V(q'' + q').Vq = \\ Sq''.Sq + Vq''.Sq + Vq.Sq'' + Vq''.Vq + Sq'.Sq + Vq'.Sq + \\ Vq.Sq' + Vq'.Vq = \\ q''q + q'q \dots (6) \end{aligned}$$

Door de geconjugeerden van de uiterste leden dezer vergelijking te nemen, en te bedenken dat Kq , Kq' en Kq'' evenzeer als q , q' en q'' willekeurig zijn, komt men tot de vergelijking:

$$q(q'' + q') = qq'' + qq' \dots (7)$$

Uit (6) en (7) volgt nu, dat algemeen:

$$\Sigma q'.\Sigma q = \Sigma q'q \dots (8)$$

Hamilton gedaan wordt. Intusschen mag dit bewijs bijna geen aanspraak op dien naam maken, omdat bekend verondersteld wordt dat:

$$\frac{Vq'}{Vq} + \frac{Vq''}{Vq} = \frac{Vq' + Vq''}{Vq}.$$

Daar nu $\frac{1}{Vq}$ evenzeer een regt quotient is als Vq , wordt bekend verondersteld wat later bewezen wordt.

Bovenstaande vergelijking volgt dan alleen onmiddellijk uit de vierde definitie van § 11, wanneer men, wat Hamilton eerst aan het einde zijner beschouwingen over vectoren en vectoren-quotienten doet, terstond den index van een regt quotient met dat regt quotient identificeert. Dat het geoorloofd is dit te doen, kan intusschen eerst blijken, wanneer men de wetten kent, waaraan de operaties op vectoren en quaternions en de combinaties van vectoren en van quaternions onderling gebonden zijn. Ik meende daarom van het bewijs van Hamilton niet te mogen afwijken.

48. ASSOCIATIEVE EIGENSCHAP DER VERMENIGVULDIGING.

Drie willekeurige radialen of versors U_q , $U_{q'}$ en $U_{q''}$ kunnen tot den vorm gebragt worden (§ 25 en § 14):

$$U_q = \frac{U_\beta}{U_\alpha}, U_{q'} = \frac{U_\gamma}{U_\beta}, U_{q''} = \frac{U_\epsilon}{U_\delta} \dots (1)$$

waarin bij gemeenschappelijken oorsprong van alle vectoren U_δ een eenheidsvector is, gelegen in het vlak, dat door U_β en U_γ bepaald is. U_δ heeft dan natuurlijk de rigting van de lijn, volgens welke het vlak gaande door U_β en U_γ gesneden wordt door het vlak van het quaternion q'' .

Men mag nu schrijven, als m en n twee scalars zijn (§ 7):

$$U_\gamma = mU_\delta + nU_\beta$$

zoodat (§ 11 (9) en (10)):

$$U_q = \frac{U_\beta}{U_\gamma} \quad U_{q'} = m \frac{U_\delta}{U_\beta} + n = \frac{U_\delta}{m^{-1}U_\beta} + n$$

$$U_{q''} = \frac{U_\epsilon}{U_\delta}$$

en (§ 11 (13), § 47 (6) en (7)):

$$U_{q''}.U_{q'} = m \frac{U_\epsilon}{U_\beta} + n \frac{U_\epsilon}{U_\delta} \dots (2)$$

$$U_{q'}.U_q = m \frac{U_\delta}{U_\gamma} + n \frac{U_\beta}{U_\gamma} \dots (3)$$

Dit geeft (§ 33 (3)):

$$(U_{q''}.U_{q'}).U_q = m \frac{U_\epsilon}{U_\gamma} + n \frac{U_\epsilon}{U_\delta} \cdot \frac{U_\beta}{U_\gamma} \dots (4)$$

$$U_{q''}.(U_{q'}.U_q) = m \frac{U_\epsilon}{U_\alpha} + n \frac{U_\epsilon}{U_\delta} \cdot \frac{U_\beta}{U_\alpha} \dots (5)$$

of:

$$(Uq''.Uq').Uq = Uq''.(Uq'.Uq) \dots \dots (6)$$

waaruit verder volgt, ook krachtens § 33 (3):

$$(q''.q').q = q''.(q'.q) \dots \dots \dots (7)$$

dat is:

de vermenigvuldiging van drie en daarom van eenig aantal willekeurige quaternions is associatief.

Wij mogen nu schrijven:

$$(q''.q').q = q''.(q'.q) = q''q'q \dots \dots (8)$$

Dit bewijs voor de associatieve eigenschap der quaternionvermenigvuldiging is door den heer J. Versluys gegeven in het stukje, dat ik in de noot van de vorige paragraaf reeds aanhaalde. Hamilton geeft van die eigenschap vier bewijzen, op een waarvan wij nog terugkomen, maar die alle veel minder eenvoudig zijn dan dit.

49. BETREKKINGEN TUSSEN WILLEKEURIGE REGTE QUOTIENTEN. Beschouwen wij drie willekeurige quaternions q , q' en q'' en stellen wij:

$$v = Vq \quad v' = Vq' \quad v'' = Vq'' \dots (1)$$

zoo zal (§ 25 (3) en (4), § 35 (1), § 41 (13)):

$$Kv'v = vv' \quad Sv'v = \frac{1}{2}(v'v + vv') \quad Vv'v = \frac{1}{2}(v'v - vv') \dots (2)$$

Schrijven wij kortheidshalve:

$$Sv'v = s_1 \quad Vv'v = v_1$$

zoo heeft men:

$$2 Vv''v_1 = v''v_1 - v_1v'' \quad 0 = v''s_1 - s_1v''$$

en door optelling:

$$2 Vv''v_1 = v''(v_1 + s_1) - (v_1 + s_1)v'' = v''v'v - v'v.v'' \quad (3)$$

Wegens de associatieve en de distributieve eigenschap der quaternionvermenigvuldiging is:

$$v''v'v - v'v.v'' = (v''v' + v'v'')v - v'(vv'' + v''v) = \\ 2(Sv'v'')v - 2v'Sv''v = 2vSv'v'' - 2v'Sv''v.$$

Zoo wordt dan (3):

$$V.v''v_1 = V.v''Vv'v = vSv'v'' - v'Sv''v \dots (4)$$

Daar nu (§ 41 (10) en (7)):

$$V.v''Sv'v = v''Sv'v = v''Svv',$$

heeft men:

$$V.v''v'v = vSv'v'' - v'Sv''v + v''Svv' \dots (5)$$

Deze vergelijking komt bij vectorentransformaties elk oogenblik voor.

Daar de indices van gelijke regte quotienten aan elkander gelijk zijn is (§ 43 (7)):

$$Iv_1 = IVv'v = I \left(Iv' : I \frac{1}{v} \right) \dots (6)$$

Iv' en $I\frac{1}{v}$ staan resp. loodregt op het vlak van v' en op het vlak van v ; Iv_1 loodregt op het vlak waarin Iv en Iv' liggen. Iv_1 is dus evenwijdig aan de lijn volgens welke de vlakken van v' en van v elkander snijden, en zoodanig geplaatst dat de draaijing om dien vector van $I\frac{1}{v}$ naar Iv' positief is; en dus de draaijing van $- Iv$ naar Iv' of van Iv' naar Iv . De as toch van $\frac{1}{v}$ is tegengesteld in rigting aan die van v .

Vervolgens is (§ 43 (1), § 42 (10))

$$TIVv'v = TVv'v = Tv'.Tv. \sin x = Tlv'.Tlv. \sin x \dots (7)$$

waarin x evenals in § 42 de hoek is dien de assen en dus de indices van v' en v met elkander maken.

De index van $Vv'v$ heeft dus eene lengte, welke zich tot de lengte-eenheid verhoudt, als de inhoud van het parallelogram, gevormd door de indices van v' en v , tot de vlakte-eenheid.

50. Wij hebben (§ 35 (5) en (6)):

$$Sv''v'v = S.v''(Vv'v + Sv'v) = S.v''Vv'v \equiv S(Vv''v'.v). \quad (1)$$

Volgens (6) van § 37:

$$Sv''v'v = S.v''Vv'v = - Tv''.TVv'v.\cos \angle (Iv'' : IVv'v). \quad (2)$$

$IVv'v$ staat (zie vorige paragraaf) loodregt op het vlak waarin bij gemeenschappelijken oorsprong van vectoren, Iv' en Iv liggen; $\angle (Iv'' : IVv'v)$ is dus de hoek dien Iv'' maakt met de normaal $IVv'v$ op het vlak van Iv' en Iv . Dat vlak deelt de ruimte in twee deelen; ligt Iv'' in hetzelfde gedeelte als $Iv'v$, zoo is die hoek scherp en de cosinus van dien hoek positief; ligt Iv'' in het andere deel, zoo is die hoek stomp en de cosinus negatief. Denkt men zich Iv'' geprojecteerd op de richting van $Iv'v$, zoo zal in het eerste geval de draaijing van Iv' naar Iv om die projectie evenals om $Iv'v$ positief zijn, (zie vorige paragraaf); in het tweede geval zal de draaijing van Iv' naar Iv om die projectie negatief wezen. Kortheidshalve kan men ook spreken van een draaijing van Iv' naar Iv om Iv'' , daarmede be-

doelende de draaijing van Iv' naar Iv om de projectie van Iv'' op de normaal van het vlak waarin Iv' en Iv liggen. Zoo zal dan de hoek:

$$\angle (Iv'' : Iv'v)$$

scherp of stomp wezen, naarmate de draaijing van Iv' naar Iv om Iv'' positief of negatief is.

Krachtens (7) van de vorige paragraaf is de absolute waarde van het tweede lid van vergelijking (2) gelijk aan de verhouding van zesmaal den inhoud eener pyramide, die gevormd wordt door de vectoren Iv'' , Iv' en Iv , tot de eenheid van inhoud.

Het tweede lid van vergelijking (2) wordt positief, zoo de draaijing van Iv' naar Iv om Iv'' negatief is; negatief, zoo die draaijing positief is.

Laten wij nog opmerken, dat zoo de draaijing van Iv' naar Iv om Iv'' positief of negatief is, dat dan ook de draaijing van Iv naar Iv'' om Iv' en van Iv'' naar Iv' om Iv positief of negatief is.

Door sommige lijnen te beschouwen als negatief tegenover andere lijnen, hebben veel formules in de meetkunde algemeener toepassing gevonden. Om nog meerdere formules algemeen geldig te maken stelt Hamilton voor onderscheid te maken tusschen $\triangle OAB$ en $\triangle OBA$, en evenals in § (2) wij definieerden:

$$AB = - BA$$

te stellen:

$$\triangle OAB = - \triangle OBA.$$

Vervolgens slaat Hamilton voor eene pyramide OABC positief te noemen, wanneer de draaijing van OB naar OC om OA negatief is; die pyramide als negatief aan te nemen, wanneer de draaijing van OB naar OC om OA positief is. Zoo wordt dan:

$$\text{pyr. OABC} = \text{pyr. OBCA} = \text{pyr. OCAB} = - \text{pyr. OCBA} = \\ - \text{pyr. OBAC} = - \text{pyr. OACB} \dots (3)$$

en men heeft, dat

$$Sv''v'v = 6 \times \text{pyr. OP''P'P is} \dots (4)$$

en dus naar grootte en teeken zesmaal de pyramide OP''P'P voorstelt, wanneer:

$$OP'' = Iv'' \quad OP' = Iv' \quad OP = Iv \dots (5)$$

51. Zijn q , q' en q'' drie willekeurige quaternions, zoo heeft men door de associative eigenschap der quaternionvermenigvuldiging en door (1) van § 37:

$$Sq''q'q = S(q'' \cdot q'q) = S(q'q \cdot q'') = S(q' \cdot qq') = S(qq'' \cdot q')$$

en dus:

$$Sq''q'q = Sq'qq'' = Sqq''q' \dots (1)$$

Deze vergelijking is gemakkelijk uit te breiden voor het geval dat men het product van meer dan drie quaternions beschouwt, en men komt tot het resultaat dat de factoren van een quaternionproduct onder het scalarteeiken cyclisch mogen gepermuteerd worden.

Gaan de willekeurige quaternions in regte quotienten v , v' en v'' over, zoo wordt (1)

$$Sv''v'v = Sv'vv'' = Sv''v' \dots (2)$$

een vergelijking die in overeenstemming is met hetgeen wij in de vorige paragraaf zagen in vergelijking (3). Maar die paragraaf leert ook dat:

$$Sv''v'v = - Sv'v'' = - Sv'v''v = - Sv''vv' \dots (3)$$

Dit resultaat kan ook rechtstreeks uit (2) verkregen worden. Immers volgens (2) van § 35, (3) van § 34, en (3) van § 20 heeft men:

$$Sv''v'v = SK(v''v'v) = S(Kv.Kv'.Kv'') = - S'v'v''$$

Liggen Iv'' , Iv' en Iv in één vlak zoo wordt het tweede lid van (2) in de vorige paragraaf nul en men heeft:

$$Sv''v'v = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Omgekeerd, als (4) geldt, zoo liggen Iv'' , Iv' en Iv in één vlak.

Daar volgens (3) van § 34 en (3) van § 20:

$$Kv''v'v = - vv'v'' \dots \dots \dots (5)$$

kan men ook schrijven (§ 35 (1) en § 41 (13)):

$$Sv''v'v = - Sv'v'' = \frac{1}{2} (v''v'v - vv'v'') \dots (6)$$

$$Vv''v'v = + Vv'v'' = \frac{1}{2} (v''v'v + vv'v'') \dots (7)$$

52. STANDAARDVORMEN. Keeren wij even terug tot de beschouwing van de drie radialen of versoren van § 27, wier vlakken dus loodrecht op elkander staan. De index van een regt radiaal (§ 43 (1)) is gelijk aan de as van dat radiaal, en daarom volgens § 27:

$$Ii = Oi, \quad Ij = Oj, \quad Ik = Ok \dots (1)$$

Het is intusschen mogelijk (§ 9) elken willekeurigen vector IVq te brengen tot den vorm:

$$IVq = x.OI + y.OJ + z.OK \dots\dots (2)$$

Uit (1) van § 44 en uit de laatste alinea van § 43 volgt nu:

$$IVq = l (xi + yj + zk) \dots\dots (3)$$

$$Vq = xi + yj + zk = ix + jy + kz \dots\dots (4)$$

De vector van eenig willekeurig quaternion kan dus altijd tot den vorm (4) gebragt worden, die door Hamilton de trinome standaardvorm genoemd wordt. Stelt men de scalar van datzelfde willekeurige quaternion door w voor, zoo heeft men (§ 41 (3)):

$$q = w + ix + jy + kz \dots\dots (5)$$

Dit is de quadrinome standaardvorm, waartoe elk willekeurig quaternion te brengen is, en die regtstreeks aantoot, dat een quaternion in het algemeen van vier scalars afhankelijk is (§ 13).

Doet zich omgekeerd een quaternion q onder den vorm (5) voor, zoo is:

$$Sq = w \text{ en } Vq = ix + jy + kz;$$

$$Kq = w - ix - jy - kz; \quad TVq = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$UVq = (ix + jy + kz) : (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$Tq = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$Uq = (w + ix + jy + kz) : (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}; \text{ enz.}$$

Een der bewijzen nu, welke Hamilton van de asso-

ciatieve eigenschap der vermenigvuldiging geeft, wordt verkregen door te stellen:

$$q = w + ix + jy + kz$$

$$q' = w' + ix' + jy' + kz'$$

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz''.$$

Uit de wetten die de regte radialen i , j en k (§ 27) volgen, wordt dan aangetoond, dat:

$$q'' \cdot q' \cdot q = q'' q' q \text{ is.}$$

53. QUATERNIONS ALS OPERATIESYMBOLEN. De eerste definitie van § 11 was, dat

als
$$\frac{\beta}{\alpha} = q \quad \text{dan} \quad \beta = q\alpha.$$

Men kan daarom q ook beschouwen als een operatiesymbool, waardoor een vector α in een anderen vector β overgaat; die operatie bestaat dan hierin dat zij den vector α den hoek $\angle q$ doet draaijen in het vlak van q en dus om Asq en dat zij vervolgens de lengte van α even zoovele malen grooter doet worden als Tq lengte-eenheden bevat. Het is duidelijk dat het resultaat hetzelfde is of men den vector eerst laat draaijen en daarna de vereischte lengte geeft of dat men eerst de lengte van α verandert en dan de draaijing doet plaats hebben.

Beschouwt men een radiaal als operatiesymbool, zoo bestaat de operatie allcen in een draaijing; dit is de reden, waarom Hamilton (zie § 28) een radiaal ook een versor noemt en Uq leest als den versor van q .

Op dit oogenblik zijn wij nog niet in staat de uitdrukking q^z te interpreteren, tenzij dat α in het vlak van q ligt. Spoedig zullen wij zien, door welke definitie die interpretatie mogelijk wordt.

54. RECIPROKE VECTOREN. Wanneer tusschen twee vectoren α en α' de vergelijking bestaat:

$$\alpha' = - U\alpha : T\alpha \dots \dots \dots (1)$$

noemt men α' de reciproke van α . Waarom die benaming ingevoerd wordt, zal in een volgende paragraaf blijken.

Uit (1) volgt (§ 5 en § 30):

$$U\alpha' = - U\alpha \quad T\alpha' = 1 : T\alpha$$

en dus:

$$U\alpha' + U\alpha = 0 \quad T\alpha'.T\alpha = 1 \dots \dots (2)$$

$$\alpha = - U\alpha' : T\alpha' \dots \dots \dots (3)$$

zoodat α ook de reciproke van α' is.

Zij evenzoo β' de reciproke van β , dan heeft men (§ 32 (6)):

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{T\alpha}{T\beta} \frac{U\beta}{U\alpha} = N \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = K \frac{\alpha}{\beta} \dots \dots (4)$$

Hamilton schrijft, als α' de reciproke van α :

$$\alpha' = R\alpha \dots \dots \dots (5)$$

zoodat (4) ook geschreven kan worden:

$$\frac{R\beta}{R\alpha} = K \frac{\alpha}{\beta} \dots \dots \dots (6)$$

55. PRODUCT VAN VECTOREN. In § 10 en 11 hebben

wij, zooals uit al het voorgaande blijkt, het begrip van een quaternion geheel bepaald. Een quaternion is een vectorenquotient: de leer der quaternions is dus eigenlijk een deel van de leer der vectoren. Wij hebben de vectoren nog niet in alle combinaties onderling beschouwd. Er is namelijk door ons nog geene bepaalde beteekenis gehecht aan het product van twee of meer vectoren. Wij mogen die beteekenis bij definitie vaststellen, mits deze niet in strijd is met de vroeger ontwikkelde begrippen.¹⁾

Hamilton stelt nu als β en α twee vectoren zijn (zie vorige paragraaf):

$$\beta\alpha = \beta : R\alpha \text{ waarin } R\alpha = -U\alpha : T\alpha \dots (1)$$

Het product $\beta\alpha$ van twee vectoren wordt nu beschouwd als een quaternion, waarvan de teller gelijk is aan den multiplicator β , en de noemer aan de reciproke van het multiplicand α .

Men heeft nu ook:

$$\alpha\beta = \alpha : R\beta \dots \dots \dots (2)$$

zoodat (zie vorige paragraaf (6)):

$$\beta\alpha = \frac{\beta}{R\alpha} = K \frac{\alpha}{R\beta} = K\alpha\beta \dots \dots \dots (3)$$

waaruit verder (§ 35 (1) en § 41 (13)):

$$S\beta\alpha = \frac{1}{2} (\beta\alpha + \alpha\beta) = S\alpha\beta \dots \dots \dots (4)$$

1) Zeer belangrijk is het stuk van Grassmann „Sur les différents genres de multiplication” Crelle Bnd. 49, waarin hij voornamelijk het oog heeft op zijn Ausdehnungslehre. Met de leer der quaternions is hij blijkbaar geheel onbekend.

$$V\beta\alpha = \frac{1}{2} (\beta\alpha - \alpha\beta) = - V\alpha\beta \dots (5)$$

Evenzoo is (§ 34 (6)):

$$\beta (\alpha' + \alpha) = \frac{\beta}{R(\alpha' + \alpha)} = K \frac{\alpha' + \alpha}{R\beta} = K \left(\frac{\alpha'}{R\beta} + \frac{\alpha}{R\beta} \right) =$$

$$K \frac{\alpha'}{R\beta} + K \frac{\alpha}{R\beta} = \frac{\beta}{R\alpha'} + \frac{\beta}{R\alpha} = \beta\alpha' + \beta\alpha \dots (6)$$

Op gelijke wijze vindt men:

$$(\alpha' + \alpha) \beta = \alpha'\beta + \alpha\beta \dots (7)$$

zoodat de vermenigvuldiging van vectoren distributief is.

56. Wij mogen ook schrijven:

$$\beta\alpha = - T\beta.T\alpha.U(\beta : \alpha) \dots (1)$$

waaruit volgt:

$$T\beta\alpha = T\beta.T\alpha \quad U\beta\alpha = - U \frac{\beta}{\alpha} = U\beta.U\alpha \dots (2)$$

Verder is (§ 35 (10), § 41 (15) en § 43 (3)), wanneer x de hoek is, dien de vectoren α en β bij gemeenschappelijke oorsprong met elkander maken:

$$S\beta\alpha = S\alpha\beta = - T\beta.T\alpha \cos x \dots (3)$$

$$TV\beta\alpha = T\beta.T\alpha \sin x \dots (4)$$

$$As\beta\alpha = As [- T\beta.T\alpha.U(\beta : \alpha)] = - As \frac{\beta}{\alpha} \dots (5)$$

Uit de laatste vergelijking volgt, dat de draaijing om de as van het product van twee vectoren, van den multiplicator naar het multiplicand positief is.

Vergelijking (4) toont aan, dat $TV\beta\alpha$ gelijk is aan den dubbelen inhoud van den driehoek OAB.

Staan β en α loodregt op elkander, zoodat $x = \frac{\pi}{2}$,
zoo is:

$$S\beta\alpha = S\alpha\beta = 0 \quad V\beta\alpha = \beta\alpha \dots\dots (6)$$

Zijn β en α evenwijdig, zoo is:

$$TV\beta\alpha = 0 \quad V\beta\alpha = 0 \quad S\beta\alpha = \beta\alpha \dots\dots (7)$$

Hieruit heeft men, wanneer men het product van twee
gelijke vectoren het quadraat van dien vector noemt en
 $\alpha\alpha = \alpha^2$ stelt:

$$S.\alpha^2 = \alpha^2 \quad V.\alpha^2 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

Vervolgens heeft men uit (1) van de vorige paragraaf:

$$\alpha^2 = - (T\alpha)^2 = - N\alpha \quad U\alpha^2 = - 1 \dots\dots (9)$$

$$T.\alpha^2 = N\alpha = (T\alpha)^2 = T\alpha^2 \dots\dots\dots (10)$$

$$U.\alpha^2 = - 1 = (U\alpha)^2 = U\alpha^2 \dots\dots\dots (11)$$

waarbij wij in analogie met quaternions, het quadraat
van den tensor eens vectors, diens norm noemen.

57. Is q een veranderlijke vector, die voldoen moet
aan de vergelijking:

$$q^2 = \alpha^2 \dots\dots\dots (1)$$

zoo volgt hieruit:

$$Nq = N\alpha \quad Tq = T\alpha$$

en (1) is dus bij gemeenschappelijken oorsprong van
vectoren de vergelijking van een bol, waarvan de straal
gelijk is aan $T\alpha$.

De vergelijking:

$$(q - \alpha)^2 = \beta^2 \dots\dots\dots (2)$$

stelt voor een bol, die bij gemeenschappelijken oorsprong

van vectoren het uiteinde van α tot middenpunt en de lengte van β tot straal heeft.

Wij zouden nog meer dergelijke voorbeelden kunnen geven van geometrische plaatsen die voorgesteld worden door betrekkingen tusschen vectoren; maar ons bestek laat dit niet toe.

58. REGTE QUOTIENTEN EN INDICES. Volgens § 43 wordt een regt quotient volkomen door zijn index bepaald. Stellen wij het regt quotient, waarvan α de index is, voor door het symbool $I^{-1}\alpha$, zoo volgt (§ 43):

$$I^{-1}\alpha = I^{-1}\beta \quad \text{als } \alpha = \beta; \dots (1)$$

volgens § 44 (2):

$$I^{-1}(\beta \pm \alpha) = I^{-1}\beta \pm I^{-1}\alpha; \dots (2)$$

volgens § 3, § 4 en § 44 (6):

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \quad I^{-1}\alpha + I^{-1}\beta = I^{-1}\beta + I^{-1}\alpha; \dots (3)$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma); \quad (I^{-1}\alpha + I^{-1}\beta) + I^{-1}\gamma = I^{-1}\alpha + (I^{-1}\beta + I^{-1}\gamma) \dots (4)$$

volgens § 43 (1), wanneer m een scalar is:

$$I^{-1}m\alpha = mI^{-1}\alpha; \dots (5)$$

volgens § 5 en de distribut. eigenschap der quaternion-vermenigvuldiging, wanneer m en n scalars zijn:

$$m\alpha \pm n\alpha = (m \pm n)\alpha; \quad mI^{-1}\alpha \pm nI^{-1}\alpha = (m \pm n)I^{-1}\alpha; (6)$$

volgens § 43 en § 44 (2):

$$\sum x I^{-1}\alpha = 0 \quad \text{als } \sum x\alpha = 0; \dots (7)$$

volgens § 43 (6):

$$I^{-1}\beta : I^{-1}\alpha = \beta : \alpha; \dots (8)$$

volgens § 43 (7), § 55 (1) en 43 (1):

$$I^{-1}\beta \cdot I^{-1}\alpha = \beta : I \frac{1}{I^{-1}\alpha} = \beta \cdot RI \frac{1}{I^{-1}\alpha};$$

maar:

$$RI \frac{1}{I^{-1}\alpha} = - As \frac{1}{I^{-1}\alpha} : TI \frac{1}{I^{-1}\alpha} = - TI^{-1}\alpha \cdot As \frac{1}{I^{-1}\alpha} = \\ TI^{-1}\alpha \cdot As I^{-1}\alpha = I \cdot I^{-1}\alpha = \alpha;$$

en dus:

$$I^{-1}\beta \cdot I^{-1}\alpha = \beta\alpha; \dots \dots \dots (9)$$

Ligt de vector α in het vlak van het quaternion q ,
zoo kan men q altijd tot den vorm brengen $q = \frac{\beta}{\alpha}$.

Men heeft dan voor het quaternionproduct $qI^{-1}\alpha$ ((4)
van deze paragr., § 18 (4) en § 48 (8)):

$$qI^{-1}\alpha = \frac{\beta}{\alpha} \cdot I^{-1}\alpha = \frac{I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha} \cdot I^{-1}\alpha = \\ I^{-1}\beta (I^{-1}\alpha)^{-1} I^{-1}\alpha = I^{-1}\beta;$$

zoodat (§ 11 (1) en (2)):

$$\text{als } q = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{dan } \beta = q\alpha \quad I^{-1}\beta = qI^{-1}\alpha \quad (10)$$

Verder heeft men volgens § 11 (7) en (8) en volgens
de distributieve eigenschap der quaternionvermenigvul-
diging:

$$\frac{\gamma}{\alpha} \pm \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma \pm \beta}{\alpha}; \quad \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\alpha} \pm \frac{I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha} = \frac{I^{-1}\gamma \pm I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha}; \quad (11)$$

volgens § 11 (10) en § 33 (1):

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{m\alpha}; \quad \frac{I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha} = \frac{mI^{-1}\beta}{mI^{-1}\alpha} \dots \dots \dots (12)$$

Volgens § 18 (4) en de associatieve eigenschap der quaternionvermenigvuldiging:

$$\frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\alpha} : \frac{I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha} = \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\alpha} \cdot \frac{I^{-1}\alpha}{I^{-1}\beta} = I^{-1}\gamma \cdot \frac{1}{I^{-1}\alpha} \cdot I^{-1}\alpha \cdot \frac{1}{I^{-1}\beta} = \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\beta},$$

zoodat (§ 11 (11)):

$$\frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}; \quad \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\alpha} : \frac{I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha} = \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\beta} \quad \dots (13)$$

en op gelijke wijze (§ 11 (12)):

$$\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\beta} \cdot \frac{I^{-1}\beta}{I^{-1}\alpha} = \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\alpha} \quad \dots (14)$$

59. De vorige paragraaf leert ons, dat men in elke vergelijking, waarin vectoren voorkomen, deze vervangen mag door de regte quotienten, waarvan zij de indices zijn, mits men alle vectoren op die wijze vervange.

Met andere woorden: men mag in de ontwikkelingen de vectoren identificeren met de regte quotienten, waarvan zij de indices zijn. Hamilton laat nu het symbool I eenvoudig weg, zoodat α zoowel kan beteekenen den vector α als het regte quotient waarvan α de index is; of α een vector is of een regt quotient, de ontwikkelingen blijven dezelfde en het resultaat zal op twee wijzen te interpreteren zijn door wederom α of als vector of als regt quotient te beschouwen.

In § 41 zagen wij dat in het algemeen een quaternion gelijk is aan de som van een scalar en een regt-quotient. Het is thans duidelijk waarom Hamilton dit regt quotient den vector van het quaternion noemt.

Wij kunnen nu ook een beteekenis hechten aan het product van drie of meer vectoren, als zijnde het product van drie of meer rechte quotienten; evenzoo aan het product van een quaternion en een vector, die niet in het vlak van het quaternion ligt, dat nu het product van een quaternion en een rechte quotient is.

60. Wij kunnen nu schrijven (§ 23 (3)):

$$R\alpha = -U\alpha : T\alpha = \frac{1}{U\alpha} : T\alpha = \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}. \quad (1)$$

zoodat de benaming van de reciproke van α voor den vector $-U\alpha : T\alpha$ zijn rechte krijgt.

Wanneer α , β en γ drie willekeurige vectoren zijn, heeft men nu (§ 49 (4) en (5)):

$$V.\gamma V\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha \dots \dots \dots (2)$$

$$V.\gamma\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta \dots \dots (3)$$

In 't kort, alle vergelijkingen welke vroeger voor rechte quotienten bewezen zijn, gelden nu voor vectoren.

De uitdrukking $V\beta\alpha$ stelt nu een vector voor loodrecht op de vlakrigting die door α en β bepaald wordt, zoodanig dat de draaijing om dien vector van β naar α positief is.

Moeten de veranderlijke vectoren ϱ en ϱ' voldoen aan de vergelijking:

$$V\varrho'\varrho = \text{constante} \dots \dots \dots (4)$$

zoo bepalen zij eene constante vlakrigting.

Laten we nog opmerken dat (§ 23 (3)):

$$K\alpha = -\alpha \dots \dots \dots (5)$$

61. GEOMETRISCHE PLAATSSEN. In § 9 zagen wij, dat zoo α , β en γ drie constante vectoren zijn, elke willekeurige vector ϱ tot den vorm te brengen is:

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma \dots \dots \dots (1)$$

Bestaan er tusschen de scalars x , y en z drie betrekkingen, zoo zijn x , y en z bepaald en ϱ is een bepaalde vector.

Bestaan er tusschen de scalars x , y en z twee betrekkingen, zoodat x , y en z alle functiën zijn van een veranderlijke scalar t , zoo vormen de uiteinden van de vectoren ϱ een geometrische plaats en stelt (1) een kromme voor, altijd natuurlijk bij gemeenschappelijken oorsprong van vectoren. Men kan dan namelijk slechts op twee wijzen van uit een punt van die geometrische plaats naar een nabijliggend punt komen, door t den aanwas Δt of $-\Delta t$ te geven.

Bestaat er tusschen de scalars x , y en z slechts ééne betrekking, zoo kan men op oneindig veel wijzen van een punt der geometrische plaats naar een nabijliggend punt komen en (1) stelt een oppervlak voor.

62. Zijn de scalars x , y en z alle functiën van de veranderlijke scalar t , zoo kan men schrijven:

$$\varrho = f(t) \dots \dots \dots (1)$$

omdat met elke waarde van t een bepaalde vector overeenkomt.

Zijn ϱ_1 en ϱ_2 twee vectoren, resp. corresponderende met de waarden t_1 en t_2 , zoodat:

$$\varrho_1 = f(t_1) \quad \varrho_2 = f(t_2)$$

zoo zal:

$$q_2 - q_1 = f(t_2) - f(t_1)$$

in rigting en lengte de koorde voorstellen, welke de uiteinden van q_1 en q_2 verbindt.

Algemeen heeft men:

$$q + \Delta q = f(t + \Delta t) \dots \dots (2)$$

waarin Δq de koorde is die de uiteinden van q en $q + \Delta q$ verbindt, en Δt evenals t een scalar is.

Uit (2) volgt:

$$\Delta q = f(t + \Delta t) - f(t)$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t};$$

neemt Δt en daarmede Δq af, zoo krijgt men aan de limiet:

$$\frac{dq}{dt} = f'(t).$$

Intusschen heeft de elementaire vector dq de rigting van de raaklijn aan de kromme in het punt dat met t overeenkomt; daar dt een elementaire scalar is, heeft ook de vector $f'(t)$ de rigting van die raaklijn.

Het is duidelijk, dat als $d^2t = 0$, ook

$$\frac{d^2q}{dt^2} = f''(t) \quad \frac{d^3q}{dt^3} = f'''(t) \text{ enz.}$$

Bovendien zijn $\frac{d^2q}{dt^2}$, $\frac{d^3q}{dt^3}$ enz. evenals $\frac{dq}{dt}$ vectoren.

Is q de veranderlijke vector van een punt, dat zich beweegt, en t de tijd, zoo zal, als $q = f(t)$, de snel-

heid in de baan in rigting en grootte voorgesteld worden door $\frac{dq}{dt} = f'(t)$.

Door Hamilton wordt, evenals door meer Engelsche schrijvers, het differentiaalquotient $\frac{dq}{dt}$ ook geschreven als $D_t q$ of Dq , $\frac{d^2 q}{dt^2}$ als $D_t^2 q$ of $D^2 q$ enz.

Het is gemakkelijk in te zien, dat een vectorfunctie van de som van twee veranderlijke scalars, in het algemeen kan ontwikkeld worden volgens de reeks van Taylor, zoodat:

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \Delta t \cdot \varphi'(t) + \frac{\Delta t^2}{1.2} \varphi''(t) + \text{enz.} \quad (3)$$

$$\text{of: } q_t = q_t + (t' - t) q_t' + \frac{(t' - t)^2}{1.2} q_t'' + \text{enz.} \quad (4)$$

$$\text{en } q_t = q_0 + t q_0' + \frac{t^2}{1.2} q_0'' + \text{enz.} \quad (5)$$

of:

$$q_t = q_0 + t \left[q_0' = \frac{t}{1.2} q_0'' + \frac{t^2}{1.2.3} q_0''' + \text{enz.} \right] \quad (6)$$

$$q_t = q_0 + t q_0' + \frac{t^2}{1.2} \left[q_0'' + \frac{t}{3} q_0''' + \text{enz.} \right] \quad (7)$$

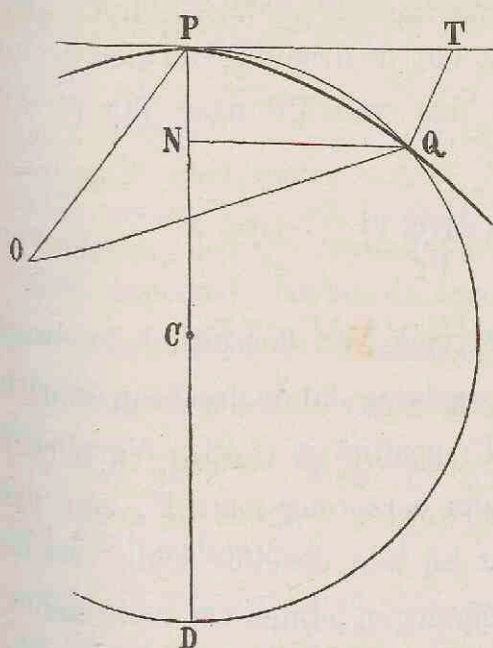
De notaties q_t , q_0 , q_0' enz. zijn uit zichzelf duidelijk.

63. Wanneer P en Q twee punten zijn van eene kromme

$$q = f(t) \quad (1)$$

zoo kan men altijd stellen:

$$q_t = q_0 + t q_0' + \frac{1}{2} t^2 q_0'' \quad (2)$$



waarin u een quaternion is.

Is toch $OP = e_0$
 $OQ = e_t$ $PT = te'_0$ zoo-
 dat PT de rigting heeft
 der raaklijn in P aan
 de kromme, zoo zal :
 $OQ = OP + PT + TQ$;
 wanneer dus

$$\frac{1}{2}t^2u = \frac{TQ}{e''_0},$$

zal (2) geldig zijn.

Uit (7) van de vorige paragraaf blijkt dit ook; immers als men stelt (verg. vorige paragraaf) :

$$u = 1 + \frac{t}{3} \frac{e'''_0}{e''_0} + \text{enz.} \dots \dots \dots (3)$$

zal die vergelijking in (2) overgaan. Kortheidshalve zullen wij voor e_0 , e'_0 enz. schrijven e , e' enz.

Men kan door P en Q een cirkel leggen, zoodanig dat de lijn PT in P ook raaklijn aan dien cirkel is. Zij C het middenpunt van dien cirkel, N het voetpunt van de loodlijn QN , uit Q op PC neergelaten; D het tweede punt waarin de cirkel door de lijn PC gesneden wordt. Zoo heeft men, wanneer de kromme in het punt Q ook convex is ten opzigte van het punt C :

$$PN = \frac{\frac{1}{2}t^2 \nabla . u e'' e'}{e'} \dots \dots \dots (4)$$

Immers is $V.(TQ.PT)$ een vector loodregt op het vlak van den cirkel, zoodanig dat de draaijing om dien vector van TQ naar PT , en dus van TP naar TQ (§ 60) positief is.

Verder is:

$$\frac{V.(TQ.PT)}{PT}$$

een vector gelegen in het vlak van den cirkel, loodregt op de rigting van PT , zoodanig dat de draaijing daarom van PT naar $V.(TQ.PT)$ positief is (§ 43). Verplaatst men dezen vector met zijn oorsprong naar P , zoo ziet men gemakkelijk in, dat hij aan dezelfde zijde van de raaklijn ligt, als de nabijgelegen punten van de kromme. Zijn lengte is de lengte van TQ vermenigvuldigd met de sinus van $\angle PTQ$ en dus $TQ \sin \angle PTQ$. Hamilton stelt namelijk de lengte van een vector AB dikwijls voor door $\overline{AB}$. Daar TQ nu gelijk is aan $\frac{1}{2}t^2uq''$ is vergel. (4) bewezen.

Men heeft ook:

$$PQ = t(q' + \frac{1}{2}tuq'') \dots\dots\dots (5)$$

zoodat, daar $\overline{PN.PC} = -PN.PC$ en $\overline{PQ^2} = -PQ^2$ (§ 56, (9)):

$$\frac{1}{PC} = \frac{2PN}{PQ^2} = \frac{V.uq''q'}{(q' + \frac{1}{2}tuq'')^2.q'} \dots\dots\dots (6)$$

Als t kleiner wordt en tot nul nadert, leert (3) dat u in de eenheid overgaat. Aan die limiet, waar Q en P dus zamenvallen, wordt (6) (§ 56 (9) en (6), § 55 (5)):

$$\frac{1}{PC} = \frac{V_{\varrho''\varrho'}}{\varrho'^3} = \frac{V_{\varrho''\varrho'}^{-1}}{\varrho'} = -\varrho'^{-1} V_{\varrho''\varrho'}^{-1} \dots (7)$$

$$\frac{1}{CP} = \varrho'^{-1} V_{\varrho''\varrho'}^{-1} = \frac{1}{D_{\varrho}} V \cdot \frac{D^2 \varrho}{D \varrho} \dots \dots \dots (8)$$

De vector $\frac{1}{CP}$ wordt door Hamilton de krommingsvector genoemd, omdat de tensor er van aangeeft, wat men gewoonlijk de kromming in het punt P noemt. De reciproke van dezen tensor is dan de kromtestraal voor het punt P. Men ziet dat $\frac{1}{CP}$ de rigting heeft van de hoofdnormaal in P.

64. Beschouwt men den veranderlijken vector ϱ als een functie van de lengte der boog, die een vast punt van de kromme met het uiteinde van ϱ verbindt, zoo kan men om dit aan te geven t door s vervangen en schrijven:

$$\varrho = f(s) \dots \dots \dots (1)$$

Dan wordt intusschen $\frac{d\varrho}{ds}$ een eenheidsvector, omdat de lengte van den elementairen vector $d\varrho$ altijd gelijk is aan de lengte van de elementaire boog ds , en men heeft:

$$T.f'(s) = \text{const.} = 1. \dots \dots \dots (2)$$

In een volgende paragraaf (§ 66 (11)) zullen wij zien dat uit (2) volgt:

$$S.f'(s)f''(s) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

zoodat (§ 56. (6)) $f'(s)$ en $f''(s)$ loodregt op elkander staan.

Maar (7) van § 62 geeft wanneer t tot nul nadert:

$$f''(s) = [e_t - e - tf'(s)] : \frac{t^2}{2} \dots\dots\dots (4)$$

Dus liggen de vectoren $f''(s)$, $f'(s)$ en $e_t - e$ in hetzelfde vlak, en heeft dus volgens (3) $f''(s)$ de rigting van de hoofdnormaal; bovendien is volgens (8) van de vorige paragraaf de lengte van $f''(s)$ gelijk aan de reciproke van de lengte der kromtestraal, omdat $f'(s)$ een eenheidsvector is en loodregt op $f''(s)$ staat (§ 42 (9)).

65. DIFFERENTIALEN. In de vorige paragrafen hebben wij de gewone regels van differentiatie kunnen toepassen, omdat alleen een scalar als onafhankelijke veranderlijke optrad, en de veranderlijke vector expliciet als een functie van die scalar gegeven was.

Maar in het algemeen zullen in de leer der quaternions de gewone definities van differentiaalquotienten en afgeleide functiën niet toe te passen zijn, omdat de quaternionvermenigvuldiging niet commutatief is.

Hamilton heeft daarom gezocht naar een definitie voor differentialen, welke toe te passen is in de leer der quaternions, en bij scalars ons terugvoert tot de gewone differentiaalrekening.

Zoo wordt dan door hem gedefinieerd:

Simultane differentialen zijn limieten van equimultipels van simultane en afnemende veranderingen.

Deze differentialen worden aangeduid door de letter d te

plaatsen vóór het symbool van een variable. Het eigenaardige is hier, dat de differentialen eindig kunnen zijn.

Laten wij bijv. beschouwen de scalarvergelijking:

$$y = x^2.$$

Wanneer Δy en Δx corresponderende veranderingen zijn, zoo is:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Beide leden der vergelijking met n vermenigvuldigende, krijgt men:

$$n\Delta y = 2nx\Delta x + n^{-1} (n\Delta x)^2.$$

Om nu tot de simultane differentialen te komen, moet men Δx en Δy doen afnemen; maar men kan te gelijk n doen toenemen, zoodanig dat $n\Delta x$ een willekeurige bepaalde waarde behoudt, bijv. a . Zoo zal aan de limiet voor $\Delta x = 0$ en $n = \infty$ volgens de definitie

$$dy = 2xa$$

zijn; intusschen is a de willekeurig aangenomen differentiaal van x en men heeft:

$$dy = 2xdx.$$

Is dx eindig aangenomen, zoo is ook dy eindig. Men ziet, dat men voor de verandering Δx ook kan schrijven $n^{-1}dx$.

Algemeen zullen wij definieren, dat de differentiaal van een scalar, wederom een scalar is.

Heeft men een vergelijking van den vorm:

$$Q = F(q, r, \dots)$$

waarin q , r , enz. quaternions of scalars zijn, dan zal:

$$dQ = \lim_{n \rightarrow \infty} n [F(q + n^{-1}dq, r + n^{-1}dr \dots) - F(q, r \dots)].$$

Hierin nu zijn dq , dr enz. simultane differentiaalën, die alle willekeurig kunnen gekozen worden, wanneer q , r enz. onderling onafhankelijk zijn; bestaan er relaties tusschen q , r enz., dan bestaan er ook evenvele betrekkingen tusschen de differentiaalën.

Volgens § 52 (5) kan een quaternion altijd tot den vorm gebragt worden:

$$q = w + ix + jy + kz,$$

waarin i , j en k constante regte quotienten of vectoren zijn; daar wij definieerden, dat de differentiaal van een scalar wederom een scalar is, zal ook de differentiaal van een quaternion in het algemeen weer een quaternion wezen; evenzoo zal de differentiaal van een vector een vector en nooit een willekeurig quaternion of scalar zijn.

66. Zij

$$f(q) = q^2 \dots \dots \dots (1)$$

dan is:

$$df(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} n [(q + n^{-1}dq)^2 - q^2] \dots \dots (2)$$

Maar volgens de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging:

$$(q + n^{-1}dq)^2 = q^2 + n^{-1}q dq + n^{-1}dq.q + n^{-2}(dq)^2$$

en dus:

$$df(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} n [n^{-1}q dq + n^{-1}dq.q + n^{-2}(dq)^2]$$

$$d.q^2 = q dq + dq.q \dots \dots \dots (3)$$

Evenzoo als q een vector (of regt quotient) is (§ 55. (3)):

$$d.q^2 = qdq + dq.q = 2Sqdq \dots \dots (4)$$

Zij $f(q) = q^{-1} \dots \dots \dots (5)$

zoo is :

$$\begin{aligned} df(q) &= \lim_{n=\infty} n [(q + n^{-1}dq)^{-1} - q^{-1}] \\ &= \lim_{n=\infty} n(q + n^{-1}dq)^{-1} [q - (q + n^{-1}dq)] q^{-1} \end{aligned}$$

en

$$d.q^{-1} = - q^{-1}.dq.q^{-1}. \dots \dots \dots (6)$$

Evenzoo :

$$\begin{aligned} d.q'q &= \lim_{n=\infty} n [q' + n^{-1}dq'] (q + n^{-1}dq) - q'q] \\ &= q'dq + dq'.q \dots \dots (7) \end{aligned}$$

Dit zijn een paar voorbeelden van quaternion-differentiatie. Voor ons doel zijn meerdere voorbeelden onnoodig.

Hamilton geeft naar aanleiding van de quaternion-differentiatie een uitstekende beschouwing over de inversie van lineaire functies van vectoren of quaternions, welke inversie nodig wordt zoo men bijv. in (3) dq expliciet wil uitdrukken in $d.q^2$. Door lineaire functies worden hier verstaan functies die distributief zijn ten opzichte van de variabele. Maar hem hierin te volgen zoude ons veel te ver leiden; wij wenschten alleen de aandacht er op te vestigen.

Wij zullen nog de differentiaalen beschouwen van de

symbolen Kq , Sq , Vq , Nq , Tq en Uq . Volgens de algemeene definitie van differentialen, is:

$$dKq = \lim_{n \rightarrow \infty} n [K(q + n^{-1}dq) - Kq],$$

zoodat volgens § 34 (6):

$$dKq = Kdq \dots \dots \dots (8)$$

Evenzoo:

$$dSq = \lim_{n \rightarrow \infty} n [S(q + n^{-1}dq) - Sq],$$

$$dVq = \lim_{n \rightarrow \infty} n [V(q + n^{-1}dq) - Vq],$$

of volgens § 36 (2) en § 42 (1):

$$dSq = Sdq, \quad dVq = Vdq \dots \dots \dots (9)$$

Verder:

$$dNq = \lim_{n \rightarrow \infty} n [N(q + n^{-1}dq) - Nq];$$

volgens § 39 (6):

$$N(q + n^{-1}dq) = Nq + 2n^{-1} S.(Kq.dq) + n^{-2} (dq)^2$$

zoodat:

$$dNq = 2S.(Kq.dq) \dots \dots \dots (10)$$

Wij weten dat $(Tq)^2 = Nq$, en Tq dus de wortel uit Nq is; daar nu Tq en Nq scalars zijn, heeft men (§ 37 (1) en § 23 (2)):

$$dTq = \frac{dNq}{2Tq} = S.(KUq.dq) = S(dq.KUq) = S \frac{dq}{Uq},$$

of:

$$\frac{dTq}{Tq} = S \frac{dq}{q} \dots \dots \dots (11)$$

Eindelijk ((7) van deze paragraaf):

$$\begin{aligned} dU_q &= d \frac{q}{T_q} = \frac{dq}{T_q} - \frac{q}{T_q} \frac{dT_q}{T_q} \\ &= \left(\frac{dq}{q} - s \frac{dq}{q} \right) \cdot \frac{q}{T_q} = v \frac{dq}{q} \cdot U_q. \end{aligned}$$

of:

$$\frac{dU_q}{U_q} = v \frac{dq}{q} \dots \dots \dots (12)$$

Beschouwt men een functie van quaternions of scalars welke alle alleen afhangen van een scalar t , zoo kan men de differentiaal alle door de corresponderende differentiaal dt deelen, en men mag dan die quotienten wederom afgeleide functiën noemen en ze aanduiden door het symbool D_t vóór de veranderlijken te plaatsen. Zoo q alleen van t afhangt, mogen wij bijv. (12) schrijven:

$$\frac{D_t U_q}{U_q} = v \frac{D_t q}{q}.$$

Wij gaan nu over tot de toepassing van de leer der quaternions op de leer van den circulairen hodograaf.

HOOFDSTUK II.

1. KRACHTEN. Een kracht kan in rigting en grootte door een vector voorgesteld worden.

De resultante van krachten werkende op een punt is gelijk aan de som van de vectoren, die de krachten in rigting en grootte voorstellen. (I. 2).

2. MOMENTEN. Het moment van een kracht ten opzichte van een punt C is het product van de grootte der kracht en van den afstand van het punt C tot de lijn waarlangs de kracht werkt. Men kan dat moment voorstellen door een lijn loodregt op het vlak, dat door het punt C en de kracht bepaald wordt; de rigting van die normaal moet zoodanig gekozen worden, dat de draaijing om C welke de kracht aan haar aangrijpingspunt tracht te geven, langs die normaal gezien zich bijv. van regts naar links voordoet. De lengte der normaal moet bovendien numerisch dezelfde zijn als de numerische waarde van het moment, opdat dat moment volledig door die normaal bepaald zij.

Werkt een kracht, die in rigting en grootte voorgesteld wordt door den vector φ , op het uiteinde van den vector $OA = \alpha$, dan wordt volgens het zooeven gezegde het moment van die kracht ten opzichte van het punt C, terwijl $OC = \gamma$, voorgesteld door de uitdrukking $V.(\alpha - \gamma) \varphi$ (I. § 60 en § 56 (4)).

De evenwichtsvoorwaarde voor een systeem van onderling vast verbonden punten wordt dus:

$$\Sigma V.(\alpha - \gamma)\varphi = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

waarin φ , φ' enz. de krachtvectoren, α , α' enz. de vectoren der aangrijpingspunten zijn, terwijl γ de vector is van eenig willekeurig punt der ruimte.

Men kan die vergelijking ook schrijven:

$$\Sigma V\alpha\varphi = V.\gamma\Sigma\varphi$$

of, daar γ geheel willekeurig is:

$$\Sigma V\alpha\varphi = 0 \quad \Sigma\varphi = 0. \quad \dots \dots \dots (2)$$

3. EVENWIGTSVOORWAARDE VOOR EEN WILLEKEURIG SYSTEEM. Het principe der virtuele verplaatsingen wordt uitgedrukt door de vergelijking:

$$\Sigma S.\varphi \delta\alpha = 0$$

zooals duidelijk is uit § 56 (3) van hoofdstuk I. Om uit deze vergelijking de evenwichtsvoorwaarden te verkrijgen, gaat men te werk als bij het gebruik van regtlijnige coördinaten. De voorwaarden, waaraan het systeem moet blijven voldoen, geven evenveel betrekkingen tusschen de vectoren $\delta\alpha$; gelukt het dat aantal

Dan zal:

$$OQ = OP + PT + TQ = f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \cdot f'(t) + \frac{\Delta t^2}{1.2} f''(t) + \text{enz. (I § 62.)}$$

en
$$OT = OP + PT = f(t) + \Delta t \cdot f'(t)$$

zoodat
$$TQ = \frac{\Delta t^2}{1.2} f''(t) + \text{enz.}$$

Neemt Δt af, zoo wordt TQ de deviatie, en gelijk aan $\frac{\Delta t^2}{1.2} f''(t)$ daar de overige termen tegenover $\frac{\Delta t^2}{1.2} f''(t)$ verdwijnen. De versnelling der deviatie is dus gelijk aan

$$f''(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = D^2\alpha.$$

Is s de lengte van den afgelegden weg dan kan men voor $\frac{d\alpha}{dt}$ ook schrijven $\frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt}$ of $\frac{d\alpha}{dt} = v \frac{d\alpha}{ds}$ waarbij dan $v = T \frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}$.

Dit geeft:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \frac{d\alpha}{ds} + v^2 \frac{d^2\alpha}{ds^2}$$

Volgens I § 64 kan dus de versnelling der deviatie ontbonden worden in twee componenten, de eene $\frac{dv}{dt} \frac{d\alpha}{ds}$ in de rigting van de beweging en in grootte gelijk aan de versnelling van de beweging; de andere $v^2 \frac{d^2\alpha}{ds^2}$ in de rigting van de hoofdnormaal en in grootte gelijk aan het kwadraat van de snelheid vermenigvuldigd met de reciproke van de lengte der kromtestraal.

6. Volgens II § 4 wordt dan de bewegende kracht, die op de massa m werkt gelijk $mD^2\alpha$, wanneer namelijk de massa m zich bevindt aan het uiteinde van $OA = \alpha$. Zij φ de gegeven kracht die op m werkt, dan zal volgens het principe van d'Alembert en volgens II § 3 de algemeene bewegingsvergelijking van een puntensysteem zijn:

$$\sum S.(mD^2\alpha - \varphi)\delta\alpha = 0$$

7. De bewegingsvergelijking voor een punt wordt:

$$mD^2\alpha - \varphi = 0$$

Immers de vergelijking $S\lambda\mu = 0$ waarbij μ geheel willekeurig is, eischt $\lambda = 0$.

8. CENTRAALKRACHT. Wordt een vrij punt P aangetrokken door een vast punt O , en stelt men den veranderlijken vector $OP = \alpha$, zoo wordt in de vergelijking van de vorige paragraaf φ gelijk aan $-mFU\alpha$ en dus:

$$D^2\alpha = -F.U\alpha$$

waarin F de versnellende kracht van de aantrekking voorstelt.

9. Opereert men op deze vergelijking met $V.\alpha$ zoo krijgt men (I. § 56 (8))

$$V.\alpha D^2\alpha = 0$$

hetgeen geeft:

$$V.\alpha D\alpha = \text{const.} = \beta \dots \dots (1)$$

Immers (I § 66 (9)): $D.V\alpha D\alpha = V.D(\alpha D\alpha)$

$$= V.\alpha D^2\alpha + V(D\alpha)^2 = V.\alpha D^2\alpha$$

Vergelijking (1) toont volgens I § 60 (4) aan, dat α en $D\alpha$ altijd in hetzelfde vlak gelegen zijn, waaruit volgt dat de geheele baan in een vlak ligt, dat door het krachtcentrum gaat.

De constante vector β staat loodrecht op dat vlak (I § 60); terwijl (§ 56 (4)):

$$T\beta = TV\alpha D\alpha = T\alpha.TD\alpha.\sin \angle(\alpha.D\alpha) \dots (2)$$

Deze laatste uitdrukking stelt de dubbele vlaktesnelheid voor, maar daar $T\beta$ constant is, is ook de vlaktesnelheid constant.

10. HODOGRAAF. Beweegt zich een punt onder de inwerking van willekeurige krachten, terwijl de vector, die zijn veranderlijke plaats met een vast punt O verbindt voldoet aan de vergelijking

$$\alpha = f(t).$$

zoo zal de vector $D\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$ in rigting en grootte de snelheid van het punt voor elk oogenblik aangeven. (I § 62). Verplaatst men al deze snelheids-vectoren met hun oorsprong naar O, dan zullen zij in het algemeen een kegeloppervlak vormen, terwijl de geometrische plaats van hunne uiteinden een kromme is, die op dat kegeloppervlak ligt. Deze kromme is door Hamilton de hodograaf genoemd.

Beweegt zich het punt volgens een kromme van dubbele kromming dan kan ook de hodograaf een lijn van dubbele kromming zijn; grijpt de beweging daarentegen in een vlak plaats, zoo gaat het kegeloppervlak in een plat vlak over, waarin dan de hodograaf gelegen is.

Het is duidelijk, dat zoo de vergelijking van de baan $\varrho = f(t)$ is, de vergelijking van den hodograaf $\varrho = f'(t)$ wordt.

11. Wij zullen terugkeeren tot de beschouwing van beweging tengevolge van een centraalkracht.

In I § 63 (8) zagen wij dat, zoo de vergelijking van een kromme is

$$\varrho = f(t)$$

de krommingsvector wordt voorgesteld door de uitdrukking $\frac{1}{D\varrho} \vee. \frac{D^2\varrho}{D\varrho}$.

Is dus $\alpha = f(t)$ de baan van een punt en daarom $D\alpha = f'(t)$ de hodograaf, dan wordt de krommingsvector van den hodograaf:

$$\frac{1}{D^2\alpha} \vee. \frac{D^3\alpha}{D\alpha}$$

en
$$\frac{1}{h} = T. \left(\frac{1}{D^2\alpha} \vee. \frac{D^3\alpha}{D^2\alpha} \right),$$

wanneer h de kromtestraal is van den hodograaf.

Nu weten wij (II § 8):

$$D^2\alpha = -F.U\alpha, \text{ waaruit (I. § 66 (12))}$$

$$D^3\alpha = -DF.U\alpha - FV(D\alpha.\alpha^{-1}).U\alpha$$

Stellen we, evenals in II § 9 $V.\alpha D\alpha = \beta$ en bovendien kortheidshalve $T\beta = c$, $T\alpha = r$, zoo wordt

$$D^3\alpha = -DF.U\alpha - Fr^{-2}\beta U\alpha$$

en

$$\vee. \frac{D^3\alpha}{D^2\alpha} = r^{-2}\beta,$$

daar $\frac{dF}{F}$ een scalar is.

Dus is de krommingsvector van den hodograaf

$$\frac{c}{Fr^2} \cdot U_{\alpha\beta}$$

terwijl de kromtestraal $h = Fr^2c^{-1}$ wordt.

Wij zien hier het merkwaardige resultaat, dat zoo de kracht werkt omgekeerd evenredig aan het kwadraat van den afstand, de hodograaf een cirkel is. Dan toch wordt de kromtestraal van den hodograaf constant. Bij geen andere wet van aantrekking kan voor een centraalkracht de hodograaf een cirkel worden tenzij r constant wordt, dat wil zeggen, tenzij de baan een cirkel is en het krachteentrum zich in het middenpunt van den cirkel bevindt.

12. CENTRAALKRACHT OMGEKEERD EVENREDIG AAN HET QUADRAAT VAN DEN AFSTAND. Wij gaan nu over tot een nadere beschouwing van de beweging zoo de centraalkracht omgekeerd evenredig aan het kwadraat van den afstand werkt. Dan wordt $F = Mr^{-2}$ en de vergelijking van II § 8:

$$D^2\alpha = -Mr^{-2}U_{\alpha}$$

of daar $r = T_{\alpha}$ en, volgens (3) van § 23, $\frac{1}{U_{\alpha}} = -U_{\alpha}$:

$$D^2\alpha = Mr^{-1} \alpha^{-1}$$

terwijl wederom $V_{\alpha}D\alpha = \beta$ en $T\beta = c$ is.

13. Uit I § 66 (12) weten wij:

$$\begin{aligned} D.U_{\alpha} &= V(D\alpha.\alpha^{-1}).U_{\alpha} = \alpha^{-2}U_{\alpha}.V_{\alpha}D\alpha \quad (\text{I § 55 (5)}) \\ &= \alpha^{-1}.T_{\alpha}^{-1}.V_{\alpha}D\alpha, \end{aligned}$$

zoodat

$$r^{-1}\alpha^{-1} = \frac{DU_{\alpha}}{V_{\alpha}D\alpha} = DU_{\alpha}.\beta^{-1}$$

Stelt men $\gamma = -M\beta^{-1}$, dan wordt volgens I. § 56 (6) en § 55 (5):

$$D^2\alpha = \gamma DU\alpha \dots\dots\dots (1)$$

Deze vergelijking is terstond te integreren en geeft:

$$D\alpha = \gamma(U\alpha - \varepsilon) \dots\dots\dots (2)$$

waarin ε een constante vector is. Wordt γ bekend verondersteld, dan is ε bepaald door de initiale snelheid of liever door de snelheid op een zeker oogenblik, en de rigting van den overeenkomstigen baanvector. Daar $D\alpha$ een vector is, moet

$$S\gamma(U\alpha - \varepsilon) = 0$$

Doch $\gamma \parallel \beta$ en dus loodregt op het baanvlak, zoo- dat $S\gamma U\alpha = 0$, waaruit volgt dat ook $S\gamma\varepsilon = 0$ of met andere woorden dat ε in het baanvlak ligt.

In vergelijking (2) zijn α en $D\alpha$ de vectoren van overeenkomstige punten van de baan en van den hodo- graaf. Uit die vergelijking heeft men:

$$D\alpha + \gamma\varepsilon = \gamma U\alpha$$

en dus

$$(D\alpha + \gamma\varepsilon)^2 = \gamma^2 \dots\dots\dots (3)$$

Volgens I § 57 (2) is (3) de vergelijking van een cirkel waarvan de vector van het middenpunt $-\gamma\varepsilon = \varepsilon\gamma$ (I. § 56 (6) en § 55 (5)) is, en die $T\gamma$ tot straal heeft.

Wij hebben hier dus op nieuw bewezen, dat bij een centraalkracht, die werkt omgekeerd evenredig aan het kwadraat van den afstand, de hodograaf een cirkel is. (Vergelijk II § 11).

14. Laten wij stellen:

$$T\gamma = h \quad T\varepsilon = e \quad -\gamma\varepsilon = \varepsilon\gamma = z, \text{ dan wordt } Tz = he.$$

Men kan e de eccentriciteit noemen van den hodograaf, beschouwd als een cirkel eccentrisch gelegen ten opzichte van het vaste krachtcentrum O .

Wanneer $e < 1$ valt O binnen den hodograaf, zoo $e = 1$ ligt O op den omtrek van den hodograaf, zoo $e > 1$ buiten dien omtrek.

In het eerste geval is de baan een ellips, in het tweede een parabel, in het derde een hyperbel.

Immers uit vergel. (2) van de vorige paragraaf volgt:

$$\varepsilon - U\alpha = -\gamma^{-1} D\alpha = D\alpha.\gamma^{-1}.$$

Opereert men op deze vergelijking met $S.\alpha$ dan krijgt men (I § 50 (1) en § 56 (7)):

$$S\alpha\varepsilon + T\alpha = S.(V\alpha D\alpha.\gamma^{-1}) = S.\beta\gamma^{-1} \dots (1)$$

Maar in de vorige paragraaf stelden wij

$$\gamma = -M\beta^{-1} \dots (2)$$

zoodat, daar

$$T\beta = c$$

$$S\beta\gamma^{-1} = c^2 M^{-1} = p \dots (3)$$

Nu wordt (1)

$$r + S\alpha\varepsilon = p.$$

Intusschen mag men stellen $SU\alpha\varepsilon = \cos v$ (I § 56 (3)) waaruit:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

Wij zien dan dat de baan een kegelsnede is, waarvan de excentriciteit is $e = T\varepsilon$, de parameter $p = c^2 M^{-1}$;

terwijl v , de ware anomalie, de hoek is die α met $-\epsilon$ maakt; ϵ heeft dus de rigting van de lange as der kegelsnede.

Daar $T_\gamma = h$ gesteld is, geven (2) en (3):

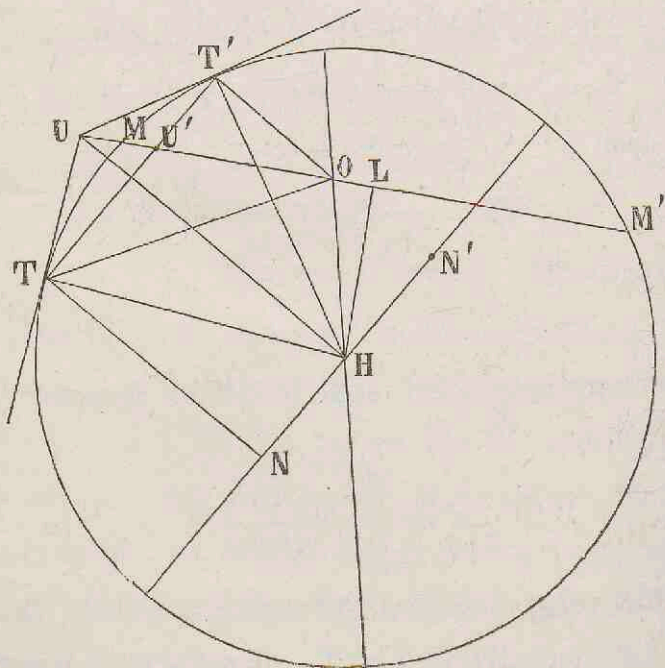
$$h = Mc^{-1} = cp^{-1} \dots \dots \dots (4)$$

terwijl, indien

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$h^2(1 - e^2) = Ma^{-1} \dots \dots \dots (5)$$

15. RAAKLIJNEN AAN EEN CIRKEL. Opdat de verdere uiteenzetting van de theorie van den hodograaf niet behoefte onderbroken te worden, zullen we in deze paragraaf ons bezig houden met het opsporen van eenige relaties, die zich bij de beschouwing van raaklijnen aan een cirkel voordoen.



Zij H het middenpunt van een cirkel met den straal h , U eenig punt buiten den cirkelomtrek en O eenig willekeurig punt, beide gelegen in het vlak van den cirkel. Laten verder UT en UT' de raaklijnen zijn uit U aan den cirkel getrokken en $OH = x$, $OU = v$, $OT = r$, $OT' = r'$, $T.UT = T'.UT' = u$, terwijl OU den cirkelomtrek in M en M' snijde. Zij eindelijk HN loodregt HU, TN en T'N' loodregt HN, $\angle THN = \varphi$, γ een vector loodregt op het vlak van den cirkel zoodat $U\gamma = UV.vr$, en zij $T\gamma = h$.

Dan heeft men:

$$u^2 = \gamma^2 - (v - x)^2 = T(v - x)^2 - h^2 \dots (1)$$

$$S.\gamma r = 0; \quad (r - x)^2 = \gamma^2; \quad S.(r - x)(v - x) = -h^2 = \gamma^2 \quad (2)$$

Vervolgens (I. § 56 (6) en § 60):

$$OT = r = x + HT = x + HN + NT;$$

$$T.HN = H\bar{N} = h \cos \varphi = \frac{hu}{HU}; \quad HN = \frac{hu}{HU} U.\gamma HU;$$

of

$$HN = -u\gamma (v - x)^{-1}.$$

Evenzoo:

$$NT = h \sin \varphi = \frac{h^2}{HU},$$

zoodat:

$$NT = \frac{h^2}{HU} U.HU = -h^2 (v - x)^{-1} = \gamma^2 (v - x)^{-1}.$$

Hieruit volgt:

$$r = x + \gamma(\gamma - u)(v - x)^{-1} \dots (3a)$$

terwijl men op dezelfde wijze vindt:

$$\tau' = z + \gamma(\gamma + u)(v - z)^{-1} \dots (3b)$$

Uit deze laatste vergelijkingen krijgt men in verband met (1):

$$\tau - v = z - v + \gamma(\gamma - u)(v - z)^{-1} = \\ [h^2 + u^2 + \gamma(\gamma - u)](v - z)^{-1},$$

of:

$$\left. \begin{aligned} \tau - v &= u(-\gamma + u)(v - z)^{-1} \\ \tau' - v &= u(\gamma + u)(v - z)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

en evenzoo

waaruit volgt:

$$T(u - \gamma) = T(u + \gamma) = T(v - z) \dots (5)$$

De vergelijking van de lijn, gaande door de punten T en T' is volgens I § 8 (1) en (2):

$$q = x\tau + (1 - x)\tau' \dots (6)$$

Stelt men hierin de waarden van τ en τ' uit (3), zoo krijgt men:

$$q = z + \gamma[\gamma + (1 - 2x)u](v - z)^{-1}$$

of:

$$q = z + \gamma(\gamma + z)(v - z)^{-1} \dots (7)$$

Deze laatste vergelijking is natuurlijk de vergelijking der polaire van het punt U ten opzichte van den gegeven cirkel. Men ziet dat zij in (3) overgaat, wanneer z de bijzondere waarden u en $-u$ aanneemt.

Voor den vector v' van het punt U' waar TT' door

OU gesneden wordt, moet $Vv'v = 0$ zijn (I § 42 (10)); de bijzondere waarde die z dan heeft, wordt dus bepaald door de vergelijking:

$$0 = V[xv + \gamma(\gamma + z)(v - x)^{-1}v].$$

In het oog houdende, dat:

$$(v - x)^{-1} = -\frac{v - x}{T(v - x)^2} = -\frac{v - x}{h^2 + u^2}$$

en $S_{\gamma x} = S_{\gamma v} = 0$ zoodat $V.\gamma xv = \gamma S_{xv}$ (I § 60 (3)), vindt men:

$$z = \frac{u^2 \gamma^{-1} V_{xv}}{v^2 - S_{xv}}.$$

Men krijgt dus:

$$\begin{aligned} v' &= x + \gamma \left[\gamma + \frac{u^2 \gamma^{-1} V_{xv}}{v^2 - S_{xv}} \right] (v - x)^{-1} = \\ &= x + \left[h^2 - \frac{u^2 V_{xv}}{v^2 - S_{xv}} \right] \frac{v - x}{h^2 + u^2}. \end{aligned}$$

Intusschen is $S.[V_{xv} \cdot (v - x)] = 0$

zoodat (I § 60 (3)):

$$\begin{aligned} -V_{xv} \cdot (v - x) &= V \cdot (v - x) V_{xv} = \\ v S_{\gamma x} (v - x) &= x S_{\gamma v} (v - x) \dots \dots (7*) \end{aligned}$$

Dit gesubstitueerd, geeft:

$$v' = v \left[\frac{h^2}{h^2 + u^2} + \frac{u^2 (S_{xv} - x^2)}{(h^2 + u^2) (v^2 - S_{xv})} \right]$$

of,

$$v' = v \left[1 + \frac{u^2}{v^2 - S_{xv}} \right] = \frac{\gamma^2 - x^2 + S_{xv}}{v - v^{-1} S_{xv}} \dots (8)$$

daar

$$u^2 + h^2 = - (v - x)^2 = - v^2 - x^2 + 2S_{xv} \dots (9)$$

Laten wij invoeren den vector

$$OL = \lambda = v^{-1} S_{xv} \dots \dots \dots (10)$$

zoodat : $v\lambda = \lambda v = S_{xv} \dots \dots \dots (11)$

$$\lambda - x = v^{-1} (S_{vx} - vx) = - v^{-1} V_{vx} = v^{-1} V_{xv} \dots (12)$$

$$S_{x\lambda} = \lambda^2; (\lambda - x)^2 = x^2 - \lambda^2; v' = v + \frac{u^2}{v - \lambda}; \dots (13)$$

en ook nog:

$$OM = \mu = \lambda \left[1 + \left(1 + \frac{v^2 - x^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \dots \dots (14)$$

zoodat :

$$\mu - x = \lambda - x + \lambda \left(1 + \frac{v^2 - x^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mu - x)^2 = (\lambda - x)^2 + \lambda^2 \left(1 + \frac{v^2 - x^2}{\lambda^2} \right) = v^2 \dots (15)$$

Wij weten dan dat de punten L en M op de lijn OU liggen.

Uit (15) blijkt, dat M ook op den omtrek van den cirkel ligt, terwijl (12) en (13) geven:

$$S(v' - v)(\lambda - x) = 0,$$

welke vergelijking aanwijst dat HL loodrecht staat op OU.

De bekende harmonische eigenschappen van den cirkel toonen aan dat :

$$LU \cdot LU' = LM^2$$

of

$$(v - \lambda)(v' - \lambda) = (\mu - \lambda)^2 \dots \dots (16)$$

Deze laatste betrekking zou gemakkelijk regtstreeks te bewijzen geweest zijn.

Men heeft nog volgens (13):

$$(v - \lambda) (v' - \lambda) = (v - \lambda)^2 + u^2$$

of

$$(v - \lambda) (v' - v) = u^2 \dots \dots (17)$$

Eindelijk blijkt nog uit de figuur:

$$v = \tau + TU = \tau' + T'U = \tau - \frac{u\gamma(\tau - \kappa)}{h^2} = \tau' + \frac{u\gamma(\tau' - \kappa)}{h^2} \quad (18)$$

16. OVEREENKOMSTIGE PUNTEN VAN DE BAAN EN DEN HODOGRAAF. Laten wij terugkeeren tot de beweging in de baan en den veranderlijken vector $D\alpha$ voorstellen door $OT = \tau$, dan wordt vergelijking (2) van II § 13:

$$\tau = \gamma(U\alpha - \epsilon),$$

zoodat (II § 14):

$$T\tau^2 = T\gamma^2.T(U\alpha - \epsilon)^2 = T\gamma^2(1 + 2S.\epsilon U\alpha + T\epsilon^2)$$

of

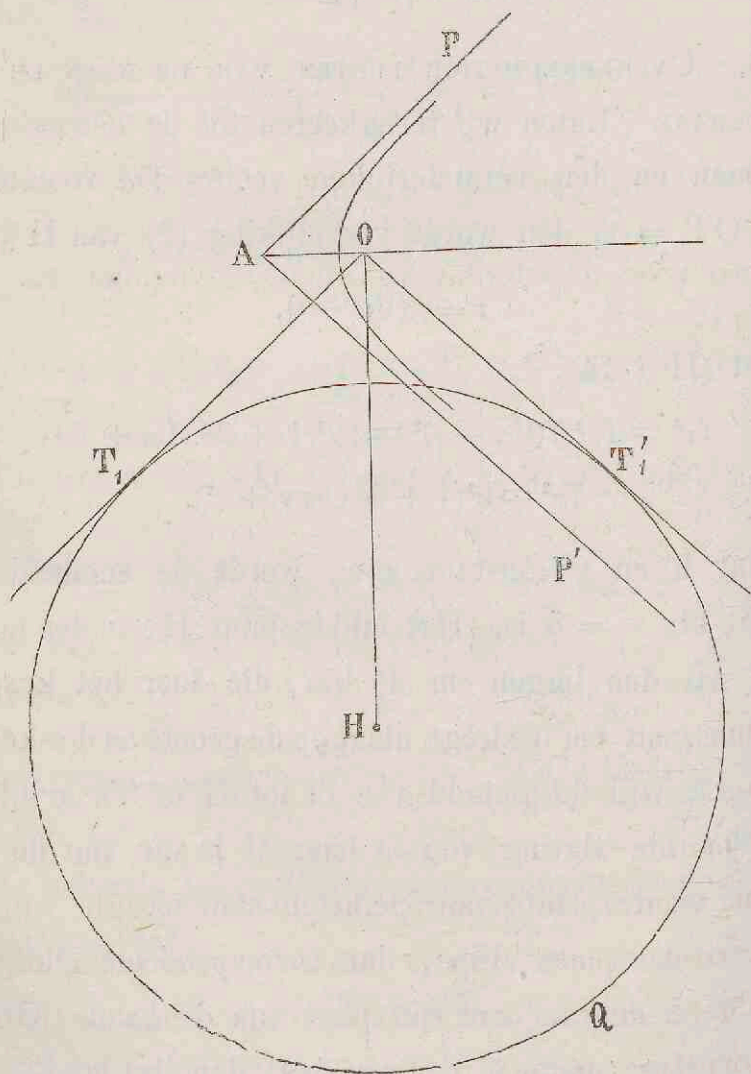
$$T\tau^2 = h^2(1 + 2e \cos v + e^2).$$

Daar h en e constant zijn, wordt de snelheid het grootst als $v = 0$ is. Het middenpunt H van den hodo-graaf zal dus liggen op de lijn, die door het kracht-centrum gaat en loodregt staat op de groote as der kegel-snede, terwijl de afstand van O tot H of $T\tau$ gelijk is aan eh . De rigting van O naar H is die van de be-weging op de plaats van kleinsten afstand.

Is de baan een ellips, dan correspondeert elk punt van den hodograaf met een punt van de baan. Grijpt de beweging plaats in een parabel, dan ligt het kracht-

centrum O op den omtrek van den hodograaf en volgens het zooeven gezegde is dan de zoogenaamde lange as van de parabel raaklijn aan den hodograaf. Ook hier komt elk punt van den hodograaf overeen met een punt van de baan, en wel het punt O van den hodograaf met het punt op oneindigen afstand van de baan.

Doorloopt het zich bewegende punt een hyperbel, zoo ligt het krachtcentrum buiten den hodograaf. De rig-



ting van de snelheid kan in dit geval slechts variëren van de rigting van den eenen asymptoot tot die van den anderen.

Laten wij uit het krachtcentrum O de raaklijnen OT₁ en OT'₁ aan den hodograaf trekken. Dan zien wij dat vergel. (3) van II § 15 geeft:

$$\tau_1 = x - \gamma(\gamma - u)x^{-1}; \quad \tau'_1 = x - \gamma(\gamma + u)x^{-1};$$

$$S_{\tau_1 x} = S_{\tau'_1 x} = x^2 - \gamma^2;$$

$$SU_{\tau_1 x} = \frac{-h^2 e^2 + h^2}{h e h \sqrt{e^2 - 1}} = - \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}.$$

Dus: $\cos \angle HOT_1 = \cos \angle HOT'_1 = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}.$

Maar voor de rigting van den asymptoot zal (zie II § 14):

$$SU_{\alpha \varepsilon} = \cos v = - \frac{1}{e}.$$

moeten zijn, zoodat $\cos \angle PAO = \frac{1}{e}.$

Hieruit volgt:

$$OT_1 \parallel PA \quad OT'_1 \parallel AP';$$

of in woorden: is de baan een hyperbel, zoo zijn de raaklijnen uit het krachtcentrum naar den hodograaf getrokken, evenwijdig aan de asymptoten.

De punten T₁ en T'₁ van den hodograaf, en dus de punten waarin de polaire van O ten opzichte van de geometrische plaats van de uiteinden der snelheidsvectoren deze snijdt, corresponderen alzoo met de punten op oneindigen afstand in de baan.

De hodograaf is hier dan slechts een gedeelte van een cirkelomtrek ¹⁾, in de figuur de boog $T_1QT'_1$; terwijl het andere gedeelte van dezen cirkel de hodograaf is van een punt dat zich bij zekeren initialen afstand en snelheid onder de afstootende inwerking van het krachtcentrum beweegt.

Bij de beweging in een ellips snijdt elke lijn gaande door het krachtcentrum den hodograaf in twee punten M en M'. De rigting van OM is tegengesteld aan die van OM', en het product der tensoren van OM en OM' constant, waaruit volgt, dat het product van eenig stel tegenovergestelde snelheden in de baan constant is. Het bedrag van dat product wordt gegeven door de uitdrukking

$$(T_{\kappa} + h)U_{\kappa} \cdot (T_{\kappa} - h)U_{\kappa} = h^2(1 - e^2) = Ma^{-1}$$

17. POTENTIAAL. De vergelijking (zie vorige paragraaf)

$$\tau = \gamma(U\alpha - \varepsilon)$$

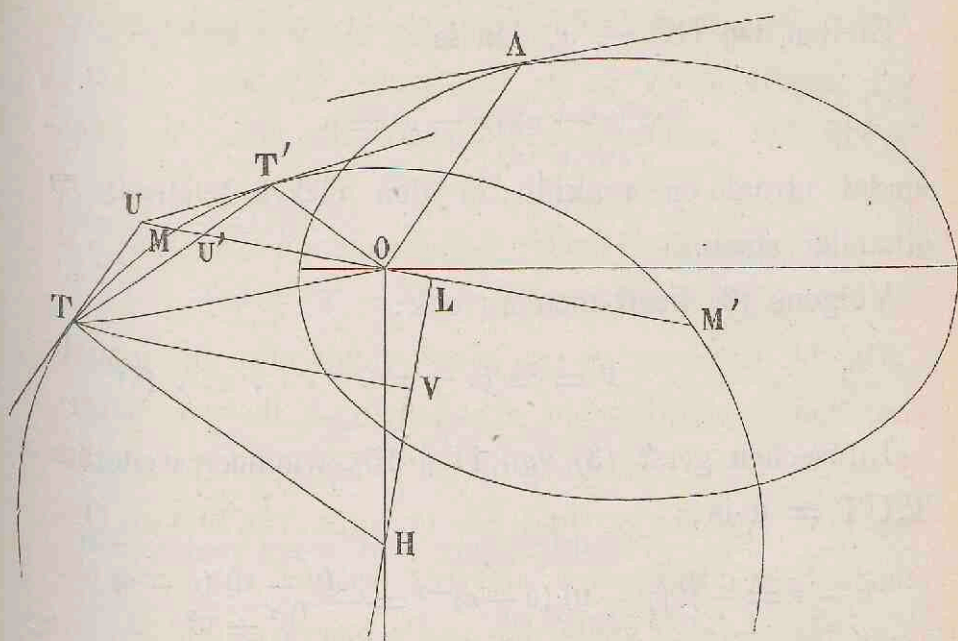
waarin T en A corresponderende punten van den hodograaf en de baan zijn, geeft:

$$\varepsilon - \tau\gamma^{-1} = U\alpha \quad \alpha = r(\varepsilon\gamma - \tau)\gamma^{-1} = r(\alpha - \tau)\gamma^{-1} \quad (1)$$

In II § 13 stelden wij

$$-V_{\alpha\tau} = V_{\tau\alpha} = -\beta = M\gamma^{-1} \dots \dots (2)$$

1) Men zou kunnen vragen of dit niet strijdt met het resultaat van II § 13, dat de geometrische plaats van de uiteinden der snelheidsvectoren een cirkel is; maar in het algemeen, zoo men voor de geometrische plaats van een tweede serie punten, welke corresponderen met een eerste serie, een kromme of een oppervlak vindt, dan geeft dit alleen aan dat alle punten corresponderende met de eerste serie op die kromme of dat oppervlak liggen; niet omgekeerd dat alle punten van die kromme of dat oppervlak corresponderen met punten van de eerste serie.



Hierin de waarde van α uit (1) gesubstitueerd, krijgt men:

$$-\beta = M\gamma^{-1} = rV.\tau\gamma^{-1} - r\tau^2\gamma^{-1}.$$

Maar $V.\tau\gamma^{-1} = \gamma^{-1}S\tau\tau$ omdat $S\tau\gamma = S\kappa\gamma = 0$ (I § 60 (3)),
zoodat:

$$\frac{M}{r} = S.\tau(x - \tau).$$

$\frac{M}{r}$ nu stelt de potentiaal voor; wij zullen deze P noemen.

Zoo wordt dan :

$$P = S.\tau(x - \tau) = T\tau.T(x - \tau) \cos HT0 = T\tau.T(x - \tau) \sin OTU. (3)$$

wanneer U eenig punt is op de raaklijn in T aan den hodograaf.

De potentiaal is dus gelijk aan het product van den straal van den hodograaf en de lengte der loodlijn uit het krachtcentrum op die raaklijn neergelaten.

Stellen wij $OU = v$, dan is

$$S (\tau - \kappa) (\tau - v) = 0$$

omdat straal en raaklijn in den cirkel loodregt op elkander staan.

Volgens (3) heeft men nu ook:

$$P = S.v (\kappa - \tau) \dots \dots \dots (4)$$

Intusschen geeft (3) van II § 15, wanneer wederom $T.UT = u$ is,

$$\kappa - \tau = -\gamma (\gamma - u) (v - \kappa)^{-1} = \frac{\gamma (\gamma - u) (v - \kappa)}{h^2 + u^2}$$

$$S. (\kappa - \tau) v = \frac{\gamma^2}{h^2 + u^2} S. (v - \kappa) v - \frac{u}{h^2 + u^2} S.\gamma (v - \kappa) v.$$

Voert men in:

$$v (\kappa - v) = q \dots \dots \dots (5)$$

en bedenkt men dat $S.\gamma Vq = \gamma Vq$ omdat $\gamma \parallel Vq$, zoo vindt men:

$$P = \frac{M}{r} = \frac{h^2 Sq - u\gamma Vq}{h^2 + u^2} \dots \dots \dots (6)$$

Zij UT' de tweede raaklijn, die uit U aan den hodograaf kan getrokken worden, $OT' = \tau'$, α' de overeenkomstige baanvector met den tensor r' , en P' de overeenkomstige potentiaal. Dan zal men op dezelfde wijze met behulp van II § 15 vinden:

$$P' = \frac{M}{r'} = \frac{h^2 Sq + U\gamma Vq}{h^2 + u^2} \dots \dots \dots (7)$$

Uit (6) en 7 volgt, daar $\gamma \parallel Vq$:

$$PP' = \frac{M^2}{rr'} = \frac{h^2 Sq^2 - u^2 \gamma^2 Vq^2}{(h^2 + u^2)^2}$$

Maar (I § 41 (20)):

$$Vq^2 = Sq^2 - Tq^2 = Sq^2 + (u^2 + h^2)v^2$$

en dus:

$$PP' = \frac{M^2}{rr'} = \frac{h^2(Sq^2 + u^2 v^2)}{h^2 + u^2} \dots \dots \dots (8)$$

Intusschen geeft deze vergelijking:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P'}{PP'} = P^{-1} = \frac{r}{M} &= \frac{Sq - u\gamma^{-1}Vq}{Sq^2 + u^2 v^2} \\ \frac{P}{PP'} = P'^{-1} = \frac{r'}{M} &= \frac{Sq + u\gamma^{-1}Vq}{Sq^2 + u^2 v^2} \end{aligned} \right\} \dots (8a)$$

en

$$\frac{2M}{r+r'} = \frac{2PP'}{P+P'} = Sq + \frac{u^2 v^2}{Sq} \dots \dots \dots (8b)$$

Stellen wij evenals in II § 15:

$$v'S.vv = \lambda,$$

en noemen wij U' het snijpunt van TT' en OU , zoo krijgt men:

$$\frac{2M}{r+r'} = \frac{2PP'}{P+P'} = v(\lambda - v) + \frac{u^2 v}{\lambda - v} =$$

$$v(\lambda - v) = OU.U'L \dots \dots (9)$$

Tot deze relatie kan men nog op andere wijze geraken. Uit II § 15 weten wij dat HL loodregt staat op OU en dat U en U' harmonisch zijn ten opzichte van

M en M'. Zij dan TV en T'V' loodregt op HL, zoo zal wegens (4):

$$P = T_v.T(x - x) \cos HTV = T_v.T(x - v)$$

of, daar OU $\parallel$ VT:

$$P = OU.TV \quad \text{en evenzoo } P' = OU.T'V' \dots (10)$$

Hamilton noemt HL de hodographische as en TV en T'V' de ordinaten van T en T' ten opzichte van die as. U is de pool van TT'; de pool van MM' ligt daarom op de lijn TT', terwijl zij ook op de lijn HL moet gelegen zijn; zij is dus het snijpunt N van TT' en HL.

Bij eenvoudige beschouwingen vindt men nu:

$$U'L = \frac{2TV.T'V'}{TV + T'V'},$$

zoodat U'L harmonisch middeneevenredig is tusschen TV en T'V'. Door (10) kan men nu tot de vergelijking (9) komen.

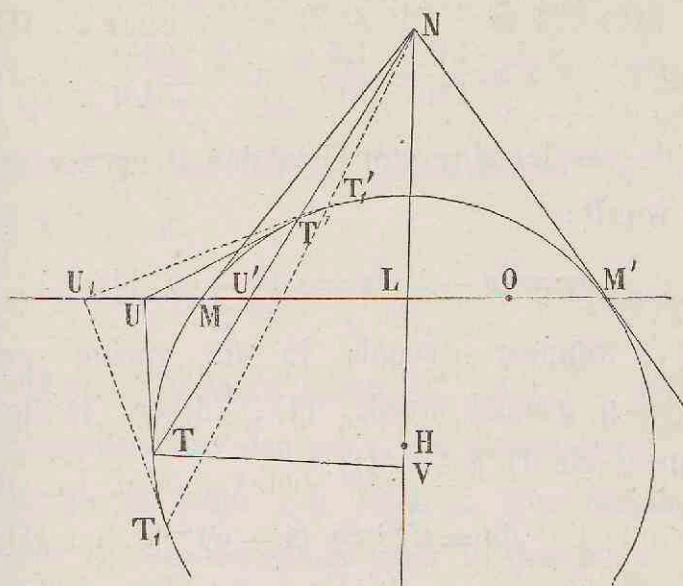
18. ELEMENTAIRE VERPLAATSINGEN. De vergelijkingen (1) en (2) van II § 15 waren:

$$u^2 = T(v - x)^2 - h^2; \quad (x - x)^2 = (x' - x)^2 = \gamma^2;$$

$$S(x - x)(v - x) = \gamma^2.$$

Denkt men zich, dat het punt U eene kleine verplaatsing ondergaat, dan zullen dientengevolge ook T en T' zich verplaatsen en u eene verandering ondergaan.

Bovenstaande vergelijkingen geven dan voor eene verplaatsing van U om dv (I § 66 (9), (11), (4) en (7)):



$$udu = T(v - x)^2 S \frac{dv}{v - x} = S.(x - v) dv. \quad (1)$$

$$S.(x - v) d\tau = 0 \dots \dots \dots (2)$$

en

$$S.[(v - x) d\tau + (x - v) dv] = 0,$$

of wegens (2) :

$$S(x - v) d\tau = S(x - v) dv.$$

Maar $d\tau \parallel \tau - v$, zoodat de laatste betrekking geschreven kan worden :

$$d\tau = (\tau - v)^{-1} S.(x - v) dv \dots \dots \dots (3)$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$d\tau' = (\tau' - v)^{-1} S.(\tau' - x) dv \dots \dots \dots (4)$$

Veronderstellen wij, dat U zich beweegt langs de lijn OU en daar een plaats U_1 gaat innemen, zoo mogen wij schrijven :

$$v = (x - c')(\mu - \lambda) \dots \dots \dots (5)$$

als

$$x = \frac{LU}{LM} = \frac{LM}{LU'} \quad \text{en} \quad e' = \frac{LO}{LM} \dots (6)$$

Bij de verplaatsing van U zal dan alleen x veranderen.
Nu wordt:

$$dv = (\mu - \lambda) dx = v (x - e')^{-1} dx \dots (7)$$

zoodat, wanneer evenals in de vorige paragraaf $v(x-v) = q$ gesteld wordt, (1), (3) en (4) den vorm aannemen (zie II § 17 (4)):

$$du = u^{-1} Sq. (x - e')^{-1} \dots (8)$$

$$d\tau = (v - \tau)^{-1} P(x - e')^{-1} dx; d\tau' = (v - \tau')^{-1} P'(x - e')^{-1} dx \quad (9)$$

terwijl deze laatste vergelijkingen nog geven:

$$T.d\tau = \frac{Pdx}{u(x - e')} \quad T.d\tau' = \frac{P'dx}{u(x - e')} \dots (10)$$

mits namelijk $dx > 0$ en $x > e'$ of in woorden, mits U zich beweegt in de rigting van O naar U en U zich aan dezelfde zijde van de hodographische as HL bevindt als M. (I § 30). Dit laatste zullen wij in het vervolg steeds blijven veronderstellen.

Wij weten, dat de polairen van alle punten gelegen op eene lijn MM' gaan door de pool van MM'. Zij deze N. Dan zal, wanneer UT₁ en UT', de raaklijnen zijn uit het punt U₁ aan den hodograaf getrokken, de lijn T₁T', evenals de lijn TT' door N gaan. De boogjes TT₁ en TT' worden dus begrensd door twee secanten uit N getrokken, en die resp. U en U₁ tot pool hebben.

Volgens (10) zijn de lengten dezer boogjes evenredig

aan de overeenkomstige potentialen en dus (II § 17 (10)) aan de ordinaten TV en $T'V'$ of eindelijk aan de vectoren NT en NT' . Dit toont, dat de elementaire driehoeken NTT_1 en $NT'T'_1$ gelijkvormig bij overstand zijn (I § 14), of:

$$\triangle NTT_1 \propto NT'_1T' \dots \dots \dots (11)$$

19. HODOGRAPHISCHE SNELHEID. Met elk punt in de baan correspondeert een punt van den hodograaf. Heeft het punt in de baan een zekeren weg afgelegd, dan heeft het corresponderende punt in den hodograaf ook een bepaalden boog doorloopen. Zoo komt men tot het begrip van snelheid in den hodograaf of van hodografische snelheid.

In het algemeen stelt de hodografische snelheid in rigting en grootte de versnellende kracht voor welke op het zich bewegende punt werkt wanneer het zich in de overeenkomstige plaats in de baan bevindt.

Eenmaal het begrip van hodografische snelheid ingevoerd hebbende, kan men vragen naar den tijd waarin een zeker gedeelte van den hodograaf afgelegd wordt.

Men heeft nu:

$$\text{hodografische snelheid} = D^2x = \frac{d.Dx}{dt} = \frac{d\tau}{dt},$$

en dus voor den tijd dt , waarin het element $d\tau$ afgelegd wordt:

$$dt = \frac{d\tau}{D^2x},$$

of daar $d\tau \parallel D^2\alpha$ is:

$$dt = \frac{T.d\tau}{T.D^2\alpha} \dots \dots \dots (1)$$

Veronderstellen wij, evenals in de vorige paragraaf dat $d\tau$ en $d\tau'$ de veranderingen zijn welke τ en τ' ondergaan wanneer U zich langs de lijn OU in de rigting van O naar U verplaatst, zoo krijgt men voor de tijden, benoodigd tot het afleggen van de elementaire boogjes $d\tau$ en $d\tau'$ van den hodograaf (II § 12 en § 18):

$$\left. \begin{aligned} dt &= \frac{Mdx}{Pu(x-e')} = \frac{rdx}{u(x-e')} \\ dt' &= \frac{Mdx}{P'u(x-e')} = \frac{r'dx}{u(x-e')} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Deze tijden zijn dus evenredig aan de afstanden van het punt in de baan tot het krachtcentrum, of omgekeerd evenredig aan de potentialen.

20. De som der tijden dt en dt' is:

$$dt + dt' = \left(\frac{M}{P} + \frac{M}{P'} \right) \frac{dx}{u(x-e')} = \frac{(r+r')dx}{u(x-e')} \dots (4)$$

Intusschen geeft (9) van II § 17:

$$\frac{2M}{r+r'} = T_v.T(\lambda - v'),$$

en (16) van II § 15:

$$T(v - \lambda).T(v' - \lambda) = T(\mu - \lambda)^2,$$

zoodat:

$$\frac{2M}{r+r'} = \frac{T_v.T(\mu - \lambda)^2}{T(v - \lambda)} = \frac{T(\mu - \lambda)}{T(v - \lambda)} T_v.T(\mu - \lambda);$$

of volgens (5) en (6) van II § 18:

$$\frac{2M}{r+r'} = \frac{x-e'}{x} T (\mu - \lambda)^2.$$

Stelt men kortheidshalve:

$$T (\mu - \lambda) = g \dots \dots \dots (2)$$

zoo krijgt men:

$$dt + dt' = \frac{2Mx dx}{u (x - e')^2 g^2} \dots \dots \dots (3)$$

In deze vergelijking is, behalve x ook u veranderlijk; u is gemakkelijk daaruit te verdrijven door de betrekking

$$u = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} g \dots \dots \dots (4)$$

welke uit de figuur duidelijk is.

Men kan ook g in andere constante scalars uitdrukken. Zoo heeft men volgens II § 14 (5):

$$Ma^{-1} = h^2 (1 - e^2) = (h + he) (h - he) = \overline{MO} \cdot \overline{OW} = (\overline{ML} - \overline{LO}) (\overline{ML} + \overline{LO}),$$

of

$$Ma^{-1} = (1 - e'^2) g^2 \dots \dots \dots (5)$$

Zoo wordt dan (3):

$$dt + dt' = \frac{2[a(1 - e'^2)]^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(1 - e'x^{-1})^{-2} dx}{x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots (6)$$

Deze laatste uitdrukking kan zeer vereenvoudigd worden door de invoering van een hoek waarvan de secans gelijk x is.

Immers, als

$$x = \sec w \dots \dots \dots (7)$$

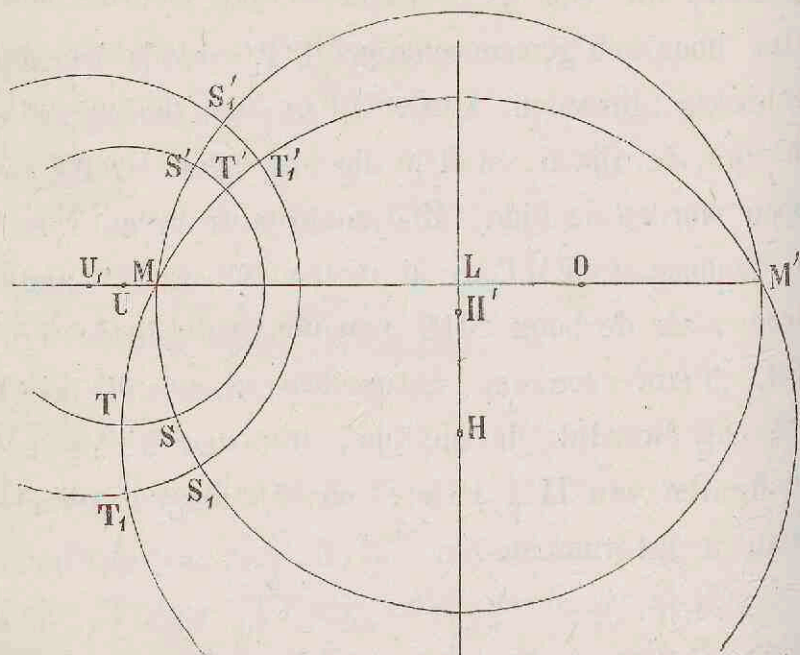
21. GEVOLGTREKKINGEN. In de laatste uitdrukking voor de som $dt + dt'$ komen voor de grootheden M , a , e' , w en dw ; deze zijn alle bekend wanneer de massa M en de vijf punten O , L , M , U en U_1 gegeven zijn, (zie vorige paragraaf (2), (5), (7) en II § 18 (6)) en onafhankelijk van h , den straal van den hodograaf.

Het boogje TT_1 en evenzoo $T'T'_1$ wordt begrensd door de raaklijnen uit U en U_1 aan den hodograaf getrokken, terwijl U en U_1 digt bij elkander liggende punten zijn op de lijn MM' , en de raakpunten T en T_1 aan de eene zijde, de raakpunten T' en T'_1 aan de andere zijde der lijn MM' gelegen zijn (zie de figuur van II § 18). De som van de tijden waarin die boogjes doorloopen worden, is onafhankelijk van h , op welk gedeelte der lijn MM' zich U en U_1 mogen bevinden. Daaruit volgt onmiddellijk, dat die som nog onafhankelijk van h is, wanneer de boogjes TT_1 en $T'T'_1$ eindig worden, tengevolge van het eindig worden van den afstand UU_1 .

Het is duidelijk dat een cirkel met het middenpunt U en den straal u den hodograaf orthogonaal zal snijden in de punten T en T' ; en evenzoo een cirkel met het middenpunt U_1 en den straal $u + \Delta u$ in de punten T_1 en T'_1 . Men kan nu het zooeven bewezene aldus formuleren: wordt de hodograaf orthogonaal gesneden door twee cirkels, waarvan de middenpunten met het krachtcentrum op één lijn liggen, dan is de

som der tijden, waarin de hodograafbogen, die tusschen de orthogonale cirkels begrepen zijn, doorloopen worden, onafhankelijk van den straal h van den hodograaf.

22. Beschouwen wij dan twee hodografen, die een gemeenschappelijke koorde MM' hebben welke door het gemeenschappelijke krachtcentrum gaat.



Is U een punt op de lijn MM' en snijdt de cirkel $TST'S'$, die U tot middenpunt heeft, den hodograaf $TMTM'$ orthogonaal, dan is het gemakkelijk te bewijzen dat die cirkel ook den hodograaf $SMS'M'$ orthogonaal snijdt. Men kan nu nog uit een tweede punt U_1 op de lijn MM' den gemeenschappelijken orthogonalen cirkel $T_1S_1T'_1S'_1$ trekken en de vorige paragraaf leert dan, dat de som der tijden, waarin de bogen TT_1 en $T'T'_1$ van den eenen hodograaf doorloopen worden, ge-

lijk is aan de som der tijden, waarin de bogen SS_1 en $S'S_1$ van den anderen hodograaf worden afgelegd.

Laat men een der punten U met M zamenvallen, dan komt men tot het theoreem van hodografisch isochronisme, dat reeds in 1847 door Hamilton gepubliceerd werd en aldus luidt: Wanneer twee circulaire hodografen, die een gemeenschappelijke koorde hebben welke door het gemeenschappelijk krachtcentrum gaat, regthoekig gesneden worden door een derden cirkel, dan zijn de tijden, waarin de afgesneden bogen doorloopen worden, gelijk. Zoo zal dus de boog TMT' van den hodograaf $TMT'M'$ in denzelfden tijd doorloopen worden, als de boog SMS' van den hodograaf $SMS'M'$.

23. TIJDINTEGRAAL. Intusschen is het uit (8) van II § 20 duidelijk dat de tijd, waarin de boog TMT' (zie figuren van II § 18 en § 20) afgelegd wordt gelijk is aan de uitdrukking:

$$2 \left[\frac{a^3(1 - e'^2)^3}{M} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^w \frac{dw}{(1 - e' \cos w)^2} \dots (1)$$

zoo namelijk $\angle MLW = \angle MLW' = w$ gesteld wordt; en evenzoo de tijd, waarin de boog $T'M'T$ doorloopen wordt, gelijk aan

$$2 \left[\frac{a^3(1 - e'^2)^3}{M} \right]^{\frac{1}{2}} \int_w^{2\pi} \frac{dw}{(1 - e' \cos w)^2}$$

De tijd, waarin een boog van den hodograaf afgelegd wordt, is gelijk aan dien, welken het zich onder den invloed van het krachtcentrum bewegende punt be-

hoeft, om den overeenkomstigen boog in de baan te doorloopen.

Bij een gesloten baan is de omloopstijd in de baan dus gelijk aan den omloopstijd in den hodograaf; zoo dat in het beschouwde geval men voor den omloopstijd in de ellips of den cirkel krijgt:

$$2 \left[\frac{a^3(1 - e'^2)^3}{M} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \frac{dw}{(1 - e' \cos w)^2}.$$

De onbepaalde integraal

$$\int \frac{dw}{(1 - e' \cos w)^2}$$

integreert men het eenvoudigst door te stellen:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{1 - e'}{1 + e'}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} F$$

$$\text{zoodat:} \quad \cos w = \frac{e' + \cos F}{1 + e' \cos F}$$

$$dw = \frac{(1 - e'^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + e' \cos F} dF$$

$$(1 - e' \cos w)^2 = \frac{(1 - e'^2)^2}{(1 + e' \cos F)^2}$$

en dus

$$\int \frac{dw}{(1 - e' \cos w)^2} = \int \frac{(1 + e' \cos F) dF}{(1 - e'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{F + e' \sin F}{(1 - e'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Is n de gemiddelde hoeksnelheid, zoodat de omloopstijd $= \frac{2\pi}{n}$ is, dan heeft men nu:

$$\frac{2\pi}{n} = 2\pi \left(\frac{a^3}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (2)$$

waaruit de bekende vergelijking:

$$M = a^3 n^2 \dots \dots \dots (3)$$

Voor de parabel is de uitdrukking (1) niet te gebruiken; dan toch ligt O op den hodograaf en is $e' = -1$, terwijl a oneindig wordt. Maar volgens (2) en (5) van II § 20 hebben wij algemeen:

$$\left[\frac{a^3(1 - e'^2)^3}{M} \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{M}{g^3},$$

zoodat (1) ook kan geschreven worden:

$$\frac{2M}{g^3} \int_0^w \frac{dw}{(1 - e' \cos w)^2} \dots \dots \dots (4)$$

welke uitdrukking voor de parabel wordt:

$$\frac{2M}{g^3} \int_0^w \frac{dw}{(1 + \cos w)^2}.$$

24. ONTWIKKELING VAN EENIGE RELATIES. In deze paragraaf zullen wij eenige relaties ontwikkelen, die langs anderen weg welligt niet minder eenvoudig te vinden zijn, maar waarvan de ontwikkeling, zooals zij hier volgt, ook dienen moge als voorbeeld van quaternion-transformatie; in een volgende paragraaf gaan wij dan na wat uit de verkregen vergelijkingen is af te leiden.

Zijn dan A en A' de punten in de baan welke corresponderen met de punten T en T' van den hodograaf; OA = α , OA' = α' , T α = r, T α' = r'; zoo geeft (1) van II § 17:

$$\alpha = r(x - \tau)\gamma^{-1} \quad \alpha' = r'(x - \tau)\gamma^{-1}. \quad (1)$$

In deze vergelijkingen kunnen de waarden van r en r' uit (8a) van II § 17 gesubstitueerd worden. Zoo zal men krijgen:

$$\alpha - \alpha' = \frac{MSq \cdot \gamma^{-1}(\tau - \tau') + Muh^{-2}Vq \cdot (\tau + \tau') - 2Muh^{-2}Vq \cdot x}{Sq^2 + u^2v^2}. \quad (2)$$

waarin wederom $q = v(x - v)$ is.

Volgens (4) van II § 15:

$$\tau - v = u(-\gamma + u)(v - x)^{-1} \quad \tau' - v = u(\gamma + u)(v - x)^{-1}$$

zoodat:

$$\tau - \tau' = -2u\gamma(v - x)^{-1} \quad \dots \quad (3)$$

$$\tau + \tau' = 2v + 2u^2(v - x)^{-1} \quad \dots \quad (4)$$

Hierdoor wordt (2):

$$\alpha - \alpha' = \frac{2Mu}{Sq^2 + u^2v^2} [- (v - x)^{-1} Sq + h^{-2} Vq \cdot (v - x) - h^{-2} u^2 Vq \cdot (v - x)^{-1}]$$

In het oog houdende, dat:

$$- (v - x)^{-1} = \frac{v - x}{h^2 + u^2},$$

krijgt men:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2Mu(h^2 + u^2)^{-1}}{Sq^2 + u^2v^2} [(v - x) Sq + Vq \cdot (v - x)]$$

Maar (II § 15 (7*)):

$$Vq \cdot (v - x) = Vvx \cdot (v - x) = vSx(v - x) + xSq,$$

en daarom:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2Mu(h^2 + u^2)^{-1}}{Sq^2 + u^2v^2} v[-v^2 - x^2 + 2Sxv],$$

of (II § 15 (9) en § 17 (8_v)):

$$\alpha - \alpha' = \frac{2Mu\nu}{Sq^2 + u^2 \nu^2} = \frac{(r + r') u \nu}{Sq}.$$

Intusschen is (II § 15 (11)) $Sq = (\lambda - \nu)v$,
en (I § 34 (1)):

$$\alpha - \alpha' = (r + r') u \nu [(\lambda - \nu) \nu]^{-1} = \frac{(r + r') u}{\lambda - \nu}$$

of:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{r + r'} = \frac{u}{\lambda - \nu} \dots \dots \dots (5)$$

Dit is de eerste van de relaties, die wij wenschten te ontwikkelen.

Om tot een tweede te komen, gaan wij uit van vergelijking (6) van II § 17:

$$(h^2 + u^2) P = h^2 S (v\kappa - \nu^2) - u\gamma V.v\kappa.$$

Maar volgens II § 15 (11) en (12):

$$S_{\nu\nu} = S_{v\kappa} = v\lambda = \lambda\nu; \quad -v(\lambda - \kappa) = (\lambda - \kappa)v = V_{v\kappa}$$

zoodat:

$$(h^2 + u^2) \frac{P}{v} = h^2 (\lambda - \nu) - u\gamma (\lambda - \kappa).$$

Hieruit nu krijgt men, als men bedenkt dat $h^2 = -\gamma^2$:

$$(h^2 + u^2) \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) \frac{P}{v} = (h^2 + u^2) (\lambda - \kappa) + \gamma (u - \gamma) (\kappa - \nu).$$

of

$$\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) \frac{P}{v} = \lambda - \kappa - \gamma (\gamma - u) (\nu - \kappa)^{-1},$$

en dus volgens II § 15 (3):

$$\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) \frac{P}{v} = \lambda - \tau \dots \dots \dots (6)$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$\left(1 + \frac{u}{\gamma}\right) \frac{P'}{v} = \lambda - \tau' \dots \dots (7)$$

Vervolgens geeft (4) van II § 15:

$$v - \tau = u (\gamma - u) (v - \kappa)^{-1} = -u (v - \kappa)^{-1} (\gamma + u) \quad (8)$$

omdat γ loodregt staat op het vlak waarin v en κ liggen, en dus:

$$\gamma (v - \kappa)^{-1} = - (v - \kappa)^{-1} \gamma.$$

Evenzoo heeft men:

$$\lambda - \tau = \lambda - v + u (\gamma - u) (v - \kappa)^{-1} \dots (9)$$

Daar $(\gamma + u) (\gamma - u) = - (h^2 + u^2)$

krijgt men:

$$(v - \tau) (\lambda - \tau) = (v - \kappa)^{-1} [-u (\gamma + u) (\lambda - v) + u^2 (h^2 + u^2) (v - \kappa)^{-1}].$$

Men heeft wederom:

$$-u (\gamma + u) (\lambda - v) = u (\lambda - v) (\gamma - u)$$

zoodat:

$$(v - \tau) (\lambda - \tau) = (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda) (v - \kappa) \left[u (v - \kappa)^{-1} (u - \gamma) + u^2 (h^2 + u^2) (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} \right].$$

Nu is $(v - \kappa)^{-1} (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} =$

$$V. (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1},$$

omdat (I § 51 (2)):

$$S. (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} = (v - \kappa)^{-2} S. (v - \lambda)^{-1} = 0$$

zoodat (I § 60 (3)):

$$(v - \kappa)^{-1} (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} = - (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-2} + 2 (v - \kappa)^{-1} S. (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1}$$

Maar:

$$S.(v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} = \\ (v - \lambda)^{-2} (v - \kappa)^{-2} S[v^2 - \lambda v - v\kappa + \lambda\kappa],$$

of (II § 15 (11) en (13)):

$$S.(v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} = (v - \kappa)^{-2}.$$

Zoo wordt, dan:

$$(v - \kappa)^{-1} (v - \lambda)^{-1} (v - \kappa)^{-1} = \\ [- (v - \lambda)^{-1} + 2(v - \kappa)^{-1}] (v - \kappa)^{-2}$$

en:

$$(v - \tau)(\lambda - \tau) = (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda) (v - \kappa) \left[u(u + \gamma) (v - \kappa)^{-1} \right. \\ \left. + u^2(v - \lambda)^{-1} - 2u^2 (v - \kappa)^{-1} \right]$$

of volgens (8)

$$(v - \tau)(\lambda - \tau) = \\ (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda) (v - \kappa) [v - \tau + u^2(v - \lambda)^{-1}],$$

welk resultaat om II § 15 (13) ook kan geschreven worden:

$$\frac{(v - \tau)(\lambda - \tau)}{v' - \tau} = (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda) (v - \kappa).$$

Op dezelfde wijze kan men aantoonen, dat men ook heeft:

$$\frac{(v - \tau)(\lambda - \tau)}{v' - \tau} = \frac{(v - \tau')(\lambda - \tau')}{v' - \tau'} = (v - \kappa)^{-1} (v - \lambda) (v - \kappa). (10)$$

Eindelijk hebben wij nog (II § 17 (9)):

$$\frac{2M}{r + r'} = v(\lambda - v') = (v - \lambda)(\lambda - v') - \lambda(v' - \lambda),$$

of (II § 15 (16) en § 20 (2)):

$$\frac{2M}{r + r'} = \left(1 + \frac{\lambda}{v - \lambda} \right) g^2.$$

Maar II § 18 (6) en § 20 (7) doen deze vergelijking overgaan in:

$$\frac{2M}{r+r'} = (1 - e' \cos w) g^2. \dots\dots\dots (11)$$

Substitueert men hierin de waarde van M uit II § 20 (5), dan krijgt men:

$$\frac{r+r'}{2a} = \frac{1 - e'^2}{1 - e' \cos w} \dots\dots\dots (12)$$

25 GEVOLGTREKKINGEN. Vergelijking (5) van de vorige paragraaf geeft:

$$\frac{T(\alpha - \alpha')}{r+r'} = \frac{s}{r+r'} = \frac{u}{T(\lambda - v)} = \overline{UT} : \overline{UL} = \sin w. \quad (1)$$

waarin dan s de lengte der koorde A'A voorstelt, en w dezelfde beteekenis heeft als in II § 20. Uit de figuur toch van die paragraaf en uit een bekende eigenschap van cirkels, die een gemeenschappelijke koorde hebben, volgt:

$$\overline{UT} : \overline{UL} = \overline{UW} : \overline{UL} = \sin w.$$

Door vergelijking (1) van deze en vergelijking (12) van de vorige paragraaf, wordt men in staat gesteld w en e' uit te drukken als functies van de quotienten

$$\frac{s}{r+r'} \text{ en } \frac{r+r'}{a}.$$

De integraal (1) in II § 23 hangt bij een ellips of hyperbel af van de grootheden $\frac{M}{a^3}$, e' en w; en dus krijgt men een vorm van het theorema van Lambert, daar hier de tijd welke een punt noodig heeft, om onder de in-

werking van de veronderstelde kracht een deel van zijn baan af te leggen, voorkomt als een functie van de quotienten

$$\frac{M}{a^3} \quad \frac{s}{r+r'} \quad \text{en} \quad \frac{r+r'}{a}$$

26. Wij hebben vroeger reeds opgemerkt, dat de raaklijn in eenig punt aan den hodograaf de rigting heeft van de kracht, welke op het zich bewegende punt werkt, als dit zich op de corresponderende plaats in de baan bevindt. Bij centraalkrachten is dus de raaklijn in eenig punt aan den hodograaf evenwijdig aan den corresponderenden baanvector. Noemt men nu Q het punt waar de raaklijnen in A en A' aan de baan getrokken, elkander snijden en stelt men $OQ = \omega$, zoo heeft men:

$$0 = V_{\alpha}(\tau - v) = V_{\alpha'}(\tau' - v) = V_{\tau}(\omega - \alpha) = V_{\tau'}(\alpha' - \omega) \quad (1)$$

$$V_{\alpha v} = V_{\alpha \tau} = \beta = V_{\alpha' \tau'} = V_{\alpha' v} \quad (\text{II § 9 (1)}) \quad \dots (2)$$

$$V_{\tau \omega} = V_{\tau \alpha} = -\beta = V_{\tau' \alpha'} = V_{\tau' \omega'} \quad \dots (3)$$

Uit (2) en (3) volgt:

$$V(\alpha - \alpha')v = 0 \quad V(\tau - \tau')\omega = 0 \quad \dots (4)$$

en dus

$$A'A \parallel OU \quad TT' \parallel OQ.$$

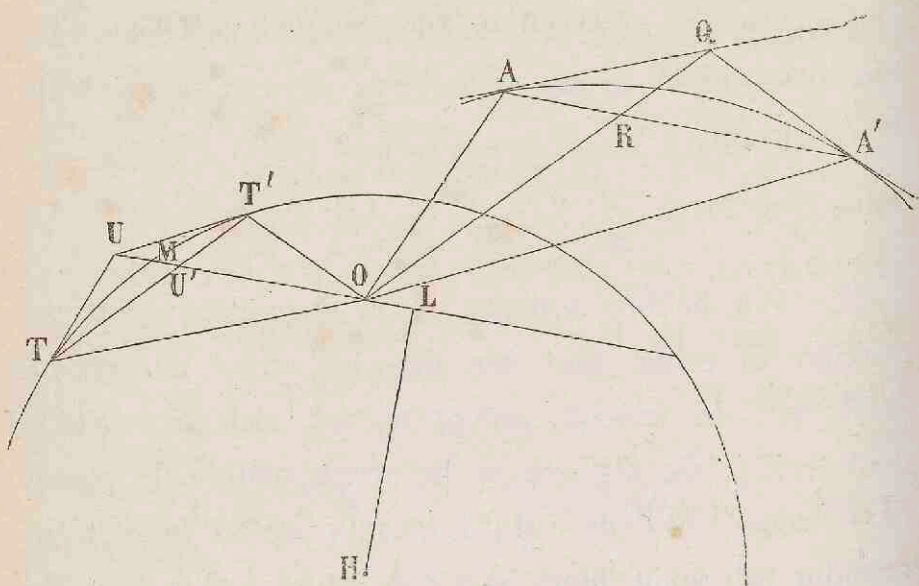
Dat $A'A \parallel OU$ volgt ook onmiddellijk uit II § 24 (5).

De vergelijkingen (6) en (7) van II § 24 geven:

$$T \frac{\tau' - \lambda}{\tau - \lambda} = \frac{P'}{P} = \frac{r}{r'} \quad \dots (5)$$

en

$$P'^{-1}(\tau' - \lambda)v = K.P^{-1}(\tau - \lambda)v \quad \dots (6)$$



omdat (I § 60 (5) en § 31 (5)) :

$$1 + \frac{u}{\gamma} = K. \left(1 - \frac{u}{\gamma} \right)$$

en

$$Tq = TKq.$$

Volgens (5) zijn dus de lijnen LT en LT' in lengte evenredig aan de potentialen P en P' ; terwijl (6) toont dat de hoek TLT' door LU in twee gelijke hoeken wordt gedeeld (I § 19). Daar nu $\overline{TU} = \overline{UT'}$, zullen de punten T , U , T' , en L op een cirkel liggen, welke ook door H gaat en waarvan het middenpunt ligt op het midden van den vector HU .

Uit vergelijking (10) van II § 24 leidt men af:

$$T \frac{v' - \tau}{\lambda - \tau} = T \frac{v' - \tau'}{\lambda - \tau'} = T \frac{\tau - v}{\lambda - v} = \overline{UT} : \overline{UL} \dots (7)$$

De stukken $\overline{TU'}$ en $\overline{UT'}$ van de basis TT' van den driehoek TLT' verhouden zich wegens (5) en (6) als

r' en r ; en (7) geeft nu in verband met (1) van de vorige paragraaf:

$$\overline{OA} : \overline{OA'} : \overline{A'A} = r : r' : s = \overline{LT'} : \overline{LT} : \overline{T'T} \dots (8)$$

zoodat (I § 14),

$$\Delta LT'T \propto OAA' \dots (9)$$

Maar, daar T , T' , L en H op denzelfden cirkelomtrek liggen, is

$$\angle THT' = \angle TLT' = \angle A'OA \dots (10)$$

De hoog TMT stelt dus voor het verschil in ware anomalie van de plaatsen A en A' in de baan.

27. De leer der quaternions is voor de mechanica in het bijzonder van het hoogste belang.

Het aantal simultane differentiaalvergelijkingen, die als bewegingsvergelijkingen van een systeem optreden, is bij toepassing der quaternions slechts een derde van het aantal vergelijkingen, die men bij het gebruik van Cartesiaansche coördinaten verkrijgt.

Theoretisch is het altijd mogelijk de hodografen van de verschillende punten van een systeem te vinden, zonder de banen te kennen. Uit de simultane differentiaalvergelijkingen en de eerste integralen kan men door eliminatie een nieuw stel simultane differentiaalvergelijkingen vinden, waarin alleen de eerste en de hoogere differentiaalquotienten van de veranderlijke baanvectoren voorkomen.

STELLINGEN.

I.

Het denkbeeld van Leibniz een geometrische analyse in het leven te roepen, is door Hamilton volkomen verwezentlijkt in zijn quaternions.

II.

Ten onregte zegt Grassmann (Sur les différents genres de multiplication, Crelle Bnd 49): »La multiplication en général est caractérisée par la propriété, que l'on peut multiplier, chacun par chacun, les termes, dont les facteurs sont composés ou sont censés composés, sans que la valeur du produit total en soit altérée.»

III.

Het is wenschelijk, dat men zich in de geometrie geheel los make van het Cartesiaansche coördinatensysteem.

IV.

De definitie »een breuk is een onuitgevoerde deeling» deugt niet, omdat daaruit de resultaten van de operaties op breuken, of van combinaties van breuken onderling, niet alle af te leiden zijn.

V.

De onderscheiding tusschen verhoudings- en verdeelingsdivisie is niet te verdedigen; hetgeen men door verhoudingsdivisie wil aanduiden, is verdeelingsdivisie.

VI.

Het is verkeerd het symbool $\sqrt{-1}$ te willen verklaren door de beschouwing van twee onderling loodrechte lijnen; verklaard kan het alleen worden, wanneer men het ontstaan er van nagaat.

VII.

Onjuist is de bewering van Smaasen (Hoogere Algebra pg. 8), dat het besluit $1^\infty = 1$ niet geldig is.

VIII.

Door de opbouw van een niet-eulclidische geometrie (imaginaire geometrie volgens Lobatschewsky, absolute geometrie volgens Bolyai) is het bewijs geleverd, dat de ruimte niet is een waarnemingsvorm.

IX.

Het is noodzakelijk, dat meer krachten aan een wijsgeerige ontwikkeling van de wiskunde worden besteed, dan tot nu geschied is.

X.

De verschijnselen der electriciteit maken het waarschijnlijk, dat de zwaartekracht het gevolg is van bewegingen door de hemellichamen in de interstellare middenstof in het leven geroepen.

XI.

Zoo het bewezen wordt, dat alle verschijnselen van aantrekking en afstooting niet op werking op afstand, maar op bewegingen in de middenstof berusten, wordt bij onze tegenwoordige kennis van de materie de wet van het behoud van arbeidsvermogen in laatster instantie onhoudbaar.

XII.

Valt de wet van het behoud van arbeidsvermogen, dan is

men ook gedwongen aan den tijd een aanvang toe te kennen, dat is met andere woorden een scheppingsdaad aan te nemen.

XIII.

Hiertoe wordt men ook genoodzaakt wanneer het resultaat van Thomson juist blijkt te zijn, dat het heelal een grenstoestand nadert.

XIV.

Tyndall's cometenhypothese wordt door Zöllner (Ueber die Natur der Cometen, Leipzig 1872) onbillijk beoordeeld.

XV.

Ongeregtevaardigd is de bewering van Zöllner »dass auch die grössten Massen so lange sie endlich sind, in einem unbegrenzten Raume fortdauernd bis zum Verschwinden verflüchtigen müssen» (Nat. d. kom. pg. 92).

XVI.

De ervaring is in strijd met de hypothese van Zöllner, dat de ruimte, hoewel onbegrensd, eindig zou zijn.

XVII.

De cometentheorie van Zöllner kan als gevestigd beschouwd worden.

XVIII.

Bij den aanstaanden overgang van Venus over de zon zijn betere resultaten te verwachten van photographiën dan van heliometrische bepalingen.

XIX.

Onverantwoordelijk zou het zijn, de berekening van de kleine planeten niet voort te zetten.

XX.

De wet van Mitscherlich is van weinig of geen belang ter bepaling van atoomgewigten.

XXI.

Terecht wordt door Haeckel een afzonderlijk protistenrijk aangenomen.

XXII.

Ten onregte wordt beweerd, dat de systematiek alleen een hulpwetenschap moet zijn.

XXIII.

De benamingen primaire, secundaire, tertiaire enz. plantencelwand moeten gchandhaafd worden.

XXIV.

Zoo de gronden, waarop Max Müller (Lectures on the science of language, London 1864) de taalwetenschap onder de natuurwetenschappen rangschikt, daartoe voldoende zijn, behoort ook de geschiedenis in haren uitgebreidsten zin tot de natuurwetenschappen.

XXV.

Ein Hauppunkt des Beweises, dass die Vernunftsgesetze Naturgesetze sind, ist, dass wir durch Denken aus bekannten Naturgesetzen andere ableiten können, die wir wirklich in der Erfahrung wiederfinden, und dass wir, wenn dieses nicht eintritt, ordentlicherwise entdecken, wie wir irrige Folgerungen gemacht haben. Daraus geht denn hervor, dass die Denkgesetze, nach welchen wir Folgerungen machten, in der Natur selbst gelten.

OERSTED.