



De toestandsvergelijkingen van het isotrope, vaste lichaam

<https://hdl.handle.net/1874/259247>

192 192
Diss. A qu 192. 1914.
van Everdingen M.I.M.

De toestandsvergelijkingen van het
isotrope, vaste lichaam.



M. I. M. VAN EVERDINGEN.

A. Diss.
Utrecht
1914

54.21

DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN VAN HET ISOTROPE,
VASTE LICHAAM.

BOEK- EN STEENDRUKKERIJ EDUARD IJDO. — LEIDEN.

A. gu 192. 1914

DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN VAN HET ISOTROPE, VASTE LICHAAM.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD
VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE
RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN
DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. B. J. KOUWER, HOOG-
LEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,
VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSI-
TEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT
DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP
DONDERDAG 4 JUNI 1914, DES NAMIDDAGS TE
3 UUR, DOOR **MICHAEL IGNATIUS MARIA VAN
EVERDINGEN**, GEBOREN TE CULEMBORG.



LEIDEN. — EDUARD LJDO. — 1914.

AAN MIJNE OUDERS

EN

AAN MIJNE VERLOOFDE.

Bij het voltooien van dit proefschrift betuig ik gaarne mijn dank aan U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, voor het van U genoten onderwijs.

Aan U, Hooggeleerde DEBYE, Hooggeschatte Promotor, ben ik veel grooter dank verschuldigd dan te kleeden is in vorm van woorden. Uw leiding en Uw heldere bespreking van voorkomende moeilijkheden waren oorzaak, dat, met dit proefschrift, bewondering ontstond voor de vakken van Uw richting. In dankbare herinnering zal ik de uren blijven gedenken op Uw gastvrije studeerkamer doorgebracht. Mogen nog velen het voorrecht genieten onder Uwe leiding hun studie aan de Utrechtsche Universiteit te voltooien.

Onder degenen, jegens wie ik mij om het genoten onderwijs verplicht gevoel, treedt Gij, Hooggeleerde KAPTEYN, nog bijzonder naar voren om de groote diensten, die de door U gedoeerde vakken mij herhaaldelijk bewezen.

Hooggeleerde DE VRIES, Uw helder betoog en rake zegen leerden mij vakken kennen, die tot de schoonste behooren der wiskundige wetenschap. Doch wees er van overtuigd, dat ook de voorlichting en steun, die U als mensch en als geleerde schonk, mij steeds met warme dankbaarheid vervullen.

Ook aan U, Zeereerwaarde Dr. KRÜGER, mijn vroegere Leeraar en tegenwoordige Directeur, ben ik groote erkentelijkheid verschuldigd. Dank, als vroeger Leeraar, voor het onderwijs, dat mijn studierichting bepaalde, dank, als Directeur, voor de groote welwillendheid bij de regeling van mijn lessen, doch dank bovenal voor de onverflauwde belangstelling van het oogenblik, dat mij Uw leerling maakte, tot op den dag van heden.

INHOUD.

Bladz.

§ 1.	De vrije energie van een vast lichaam als functie, waaruit de toestandsvergelijking kan bepaald worden.	
	De grootheden, die in de uitdrukking voor de vrije energie berekend moeten worden zijn de potentieele energie W en de karakteristieke temperatuur θ . Beperking tot het isotrope lichaam	1
§ 2.	Berekening van de potentieele energie W bij een eerste uitbreiding van de wet van Hooke	5
§ 3.	Over de wijze, waarop θ als functie der straincomponenten bepaald wordt.	
	I. Algemeene methode. II. Beperking der berekeningen door te onderstellen, dat hoogere dan tweede-graadstermen der straincomponenten mogen weggelaten worden. Er blijven nog slechts vier coëfficiënten α , β , γ en δ ter berekening over, waartusschen nog de betrekking $4\delta + \gamma = 2\beta$	12
§ 4.	Berekening van θ bij de aangenomen beperking.	
	Het blijkt wederom, dat θ niet afhankelijk is van de eerste machten der verschuivingen e_4 , e_5 en e_6 . Uitdrukkingen voor α , β , γ en δ	19
§ 5.	Berekening der toestandsvergelijkingen	48
§ 6.	Berekening van den uitzettingscoëfficiënt uit de toestandsvergelijkingen	52
§ 7.	Over de afhankelijkheid van den torsiemodulus μ en den elasticiteitsmodulus E van de temperatuur . .	55
§ 8.	Berekening volgens de afgeleide formules van α , β , γ en δ voor eenige elementen	59
Stellingen		65

§ 1.

De vrije energie van een vast lichaam als functie, waaruit de toestandsvergelijking kan bepaald worden.

De toestand van een vast lichaam is niet, als die van een gas, volkomen bepaald door twee der grootheden volumen, druk en temperatuur. In de plaats van het volumen treden de zes straincomponenten, in de plaats van den druk de zes componenten van stress. De toestandsvergelijking van een gasvormig lichaam

$$p = f(VT)$$

zal dus voor een vast lichaam worden vervangen door zes betrekkingen, gevend het verband tusschen de stresscomponenten, de straincomponenten en de temperatuur. In verband met de thermodynamica kan echter vooropgezet worden, dat deze betrekkingen gegeven zijn als een der thermodynamische potentialen, b.v. de vrije energie van het lichaam als functie van de straincomponenten en T bekend is.

Volgens Boltzmann geldt voor de vrije energie van een systeem resonatoren met n vrijheidsgraden

$$\mathcal{F} = -kT \log I$$

waarin k = constante van Boltzmann = $1,35 \times 10^{-16}$ erg,

T = absolute temperatuur en $I = \frac{1}{h^n} \int e^{\frac{-\epsilon}{kT}} dq_1 dp_1 \dots dq_n dp_n$.

In I_1 (toestandsintegraal) is $h = 6,55 \times 10^{-27}$ erg. sec., terwijl ϵ ,

de totale energie van het lichaam, in het algemeen een functie is van de verschuivingen q en de bijbehorende impuls-coördinaten p .

Voor een systeem met één vrijheidsgraad en waarvoor de totale energie ε een quadratische functie der verschuivingen en der impulsen is, vindt men door bovenstaande formule

$$\mathfrak{F} = -kT \log \frac{kT}{h\nu}$$

waarin ν het trillingsgetal voorstelt.

Uitbreidend tot een systeem resonatoren met n vrijheidsgraden wordt dus volgens Boltzmann

$$\mathfrak{F} = -kT \sum_1^n \log \frac{kT}{h\nu}.$$

Volgens de quantentheorie treedt echter in de plaats van de toestandsintegraal een product van toestandssommen, waarvan ieder de waarde heeft

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

De toestandsintegraal wordt dus vervangen door

$$\Sigma = \prod_1^n \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

en derhalve wordt

$$\mathfrak{F} = kT \sum_1^n \log \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right).$$

Heeft het lichaam bovendien nog tengevolge van zijn toestand van strain per eenheid van volume een potentieele energie W , dan bedraagt de totale vrije energie van het lichaam

$$\mathfrak{F} = WV + kT \sum_1^n \log \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) = WV + \mathfrak{F}_\nu$$

Door aan te nemen, dat de dichtheid der spectraallijnen van een lichaam die is, welke uit de elastische vergelijkingen voor een continu lichaam volgt, vindt prof. Debye ¹⁾ het aantal trillingen z , onder een bepaald trillingsgetal ν , evenredig met de derde macht van dit trillingsgetal

$$z = \nu^3 VF$$

(F is hierin een functie, afhankelijk van de dichtheid en de elastische constanten).

Hiervan gebruik makend wordt voor de vrije energie van een één-atomig lichaam de uitdrukking gevonden:

$$\mathcal{F} = WV + \frac{9 N k T}{\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \nu^2 \log \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) d\nu$$

waarin N = aantal atomen van het beschouwde lichaam, terwijl ν_m , het grenstrillingsgetal, bepaald is door

$$3 N = \nu_m^3 VF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Door invoering van de nieuwe variabelen

$$\xi = \frac{h\nu}{kT}$$

$$\text{en } \theta = \frac{h\nu_m}{k} \text{ (karakteristieke temperatuur)} \quad (2)$$

wordt ten slotte de vrije energie

$$\mathcal{F} = WV + 9 N k T \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \xi^2 \log (1 - e^{-\xi}) d\xi \quad (3).$$

Deze uitdrukking leert de vrije energie kennen als een functie van W en θ (en T). De vrije energie zal dus als functie van de straincomponenten bekend zijn, zoodra wij W en θ als functie dezer grootheden kennen. Met de bepaling van W en θ als functie der straincomponenten kunnen wij dus ons onderzoek als geeindigd beschouwen. Immers

¹⁾ Vgl. Annalen der Physik, Band 39, p. 795. Debye: Zur theorie der spezifischen Wärme.

kennen wij de vrije energie als functie der straincomponenten, dan levert differentiatie naar deze grootheden direct de zes betrekkingen, die de toestandsvergelijking voor een vast lichaam uitmaken ¹⁾.

Daar θ berekend wordt uit de elastische differentiaalvergelijkingen van het lichaam en deze wederom gevonden worden uit den vorm W , die de potentieele energie van het lichaam voorstelt, zullen we beginnen met de berekening van W . In 't algemeen zal deze functie W zeer ingewikkeld wezen. We zullen ons daarom beperken tot het *isotrope* lichaam.

¹⁾ Zie Ortvay. Zur Theorie der festen Körper. Verhandlungen der Deutschen Physik-Gesellsch. 1913. p. 775.

§ 2.

Berekening van de potentieele energie van een isotroop lichaam bij een eerste uitbreiding van de wet van Hooke.

In de elasticiteitstheorie wordt gewoonlijk volstaan met slechts quadratische termen van de straincomponenten in de uitdrukking voor de vrije energie aan te nemen. Inderdaad zullen geen hogere-graadstermen optreden, indien, zooals de wet van Hooke zegt, elk der stresscomponenten een lineaire functie is van de zes componenten van strain.

$$X_x = c_{11} e_{xx} + c_{12} e_{yy} + c_{13} e_{zz} + c_{14} e_{yz} + c_{15} e_{zx} + c_{16} e_{xy}$$

$$Y_y = c_{21} e_{xx} + c_{22} e_{yy} + \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_y = c_{61} e_{xx} + c_{62} e_{yy} + c_{63} e_{zz} + c_{64} e_{yz} + c_{65} e_{zx} + c_{66} e_{xy}.$$

De wet van Hooke is echter slechts een benaderingswet, geldig voor kleine waarden der straincomponenten. Haar aanname voert bovendien tot een uitzettingscoëfficiënt 0, dus bij eindige uitzettingen, als wij willen beschouwen tot een resultaat, dat in directe tegenspraak is met de werkelijkheid (zie p. 53). Een allereerste uitbreiding nl. medenamen van de quadratische termen in de uitdrukking voor de stresscomponenten en dus van derde-graadstermen in de uitdrukking voor de potentieele energie is derhalve noodzakelijk. Tot deze uitbreiding zullen wij ons echter beperken en dus aannemen, dat hogere dan derde-graadstermen in de uitdrukking voor de potentieele energie W (ook wel

strain-energiefunctie genoemd) mogen verwaarloosd worden.

De meest algemeene functie van den *tweeden* graad van zes grootheden bevat 21 constanten. Bekend is, dat dit aantal voor een *isotroop* lichaam, zooals wij willen beschouwen, zich reduceert tot 2. Hoe groot 't aantal constanten wordt door medenaming van de *derde-graadstermen* blijft nog te onderzoeken over.

Om dit aantal te vinden moet teruggegaan worden tot de oorspronkelijke beteekenis van de straincomponenten.

Heeft een punt x, y, z door den toestand van strain de coördinaten $x + u, y + v, z + w$ gekregen, dan zal een naburig punt $x + dx, y + dy, z + dz$ verplaatsingen hebben ondergaan $u + du, v + dv, w + dw$. Volgens de hier gebruikte notatie van Stokes beteekent dan:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots (4) \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Hoe veranderen deze grootheden door draaiing van het — rechthoekig ondersteld — coördinatenstelsel om een as, of door spiegeling t.o.v. een der coördinatenvlakken?

Laten, zooals bijgaande tabel aangeeft, l_1, m_1 en n_1

	X	Y	Z
X'	l_1	m_1	n_1
Y'	l_2	m_2	n_2
Z'	l_3	m_3	n_3

de cosinussen zijn van de hoeken, die de X'-as maakt met de assen van het oorspronkelijk coördinatenstelsel enz. dan

is, de straincomponenten in het nieuwe stelsel door accen-
ten aanduidend

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} (l_1 u + m_1 v + n_1 w) = \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) (l_1 u + m_1 v + n_1 w) \\ &= l_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} + m_1 n_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + n_1 l_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + l_1 m_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= e_{xx} l_1^2 + e_{yy} m_1^2 + e_{zz} n_1^2 + e_{yz} m_1 n_1 + e_{zx} n_1 l_1 + e_{xy} l_1 m_1. \end{aligned}$$

Door verdere uitwerking krijgt men de volgende zes
transformatie-formules:

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx} l_1^2 + e_{yy} m_1^2 + e_{zz} n_1^2 + e_{yz} m_1 n_1 + e_{zx} n_1 l_1 + e_{xy} l_1 m_1 \\ e_{y'y'} &= e_{xx} l_2^2 + e_{yy} m_2^2 + e_{zz} n_2^2 + e_{yz} m_2 n_2 + e_{zx} n_2 l_2 + e_{xy} l_2 m_2 \\ e_{z'z'} &= e_{xx} l_3^2 + e_{yy} m_3^2 + e_{zz} n_3^2 + e_{yz} m_3 n_3 + e_{zx} n_3 l_3 + e_{xy} l_3 m_3 \\ e_{y'z'} &= 2e_{xx} l_2 l_3 + 2e_{yy} m_2 m_3 + 2e_{zz} n_2 n_3 + e_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \\ &\quad + e_{zx} (n_2 l_3 + n_3 l_2) + e_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) \\ e_{z'x'} &= 2e_{xx} l_1 l_3 + 2e_{yy} m_1 m_3 + 2e_{zz} n_1 n_3 + e_{yz} (m_1 m_3 + m_3 n_2) + \\ &\quad + e_{zx} (n_1 l_3 + n_3 l_1) + e_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) \\ e_{x'y'} &= 2e_{xx} l_1 l_2 + 2e_{yy} m_1 m_2 + 2e_{zz} n_1 n_2 + e_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \\ &\quad + e_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) + e_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) \end{aligned}$$

Bij het onderzoek welke derde-graadsfuncties van de strain-
componenten door bovenstaande transformatie niet veran-
deren maken wij er van gebruik, dat volgens Rankine
volgende vormen invariant blijven ¹⁾.

$$I_1 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \dots \dots \dots (5)$$

$$I_2 = e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx} + e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2)$$

$$I_3 = e_{xx} e_{yy} e_{zz} + \frac{1}{4} (e_{yz} e_{zx} e_{xy} - e_{xx} e_{yz}^2 - e_{yy} e_{zx}^2 - e_{zz} e_{xy}^2).$$

Love toonde aan ²⁾, dat I_1 de eenige eerste graads- en
 I_1^2 en I_2 de eenige tweede graads-invarianten zijn. Of er
meer derde graads-functies dan I_1^3 , $I_1 I_2$ en I_3 zijn, die bij
transformatie niet veranderen, blijft nog te onderzoeken.

De algemeene vorm van den derden graad van zes ver-
schillende grootheden bevat $\overline{C}_6^3 = 56$ termen.

1) Zie Rankine Phil. Transactions 1856 p. 264.

2) Zie Love. A Treatise on the Math. Theory of Elasticity p. 152.

Spiegeling ten opzichte van de coördinaatvlakken laat e_{xx} , e_{yy} en e_{zz} onveranderd, terwijl van de overige straincomponenten er telkens twee veranderen en een niet verandert.

Hieruit volgt, dat door deze spiegelingen moeten verdwijnen:

1^e. de derde machten van e_{yz} , e_{zx} of e_{xy} (3 termen)

2^e. de termen, bevattend een kwadraat en een eerste macht van e_{yz} , e_{zx} en e_{xy} (15 termen)

3^e. alle termen, bestaande uit het product van drie verschillende componenten, met uitzondering van $e_{xx}e_{yy}e_{zz}$
 $e_{yz}e_{zx}e_{xy}$ (18 termen).

Door bovenstaande spiegelingen verdwijnen dus reeds zes-en-dertig termen. De twintig overblijvende staan in de eerste rij van onderstaande tabel vermeld. (Coefficients $a, b \dots$).

$$\begin{array}{cccccc}
 a e^3_{xx} + b e^3_{yy} + c e^3_{zz} + d e^2_{xx} e_{yy} + f e^2_{xx} e_{zz} + g e^2_{yy} e_{xx} + & & & & & \\
 b & a & c & g & h & d \\
 c & b & a & i & j & f \\
 + h e^2_{yy} e_{zz} + i e^2_{zz} e_{xx} + j e^2_{zz} e_{yy} + k e^2_{yz} e_{xx} + l e^2_{yz} e_{yy} + & & & & & \\
 f & j & i & o & n & \\
 d & h & g & s & r & \\
 + m e^2_{yz} e_{zz} + n e^2_{zx} e_{xx} + o e^2_{zx} e_{yy} + p e^2_{zx} e_{zz} + q e^2_{xy} e_{xx} + & & & & & \\
 p & l & k & m & r & \\
 q & p & o & n & m & \\
 + r e^2_{xy} e_{yy} + s e^2_{xy} e_{zz} + t e_{xx} e_{yy} e_{zz} + u e_{yz} e_{zx} e_{xy}. & & & & & \\
 q & s & t & u & & \\
 l & k & t & u & &
 \end{array}$$

Een rotatie om de Z-as over een hoek van 90° bewerkt de transformatie:

$$\begin{array}{l}
 e_{x'x'} = e_{yy} \\
 e_{y'y'} = e_{xx} \\
 e_{z'z'} = e_{zz} \\
 e_{y'z'} = -e_{zx} \\
 e_{z'x'} = e_{yz} \\
 e_{x'y'} = -e_{xy}.
 \end{array}$$

In de tweede rij van vorenstaande tabel staan de coëfficiënten vermeld na deze transformatie:

Een draaiing over een hoek van 90° om de Y -as heeft de volgende omzetting ten gevolge

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{zz} \\ e_{y'y'} &= e_{yy} \\ e_{z'z'} &= e_{xx} \\ e_{y'z'} &= -e_{xy} \\ e_{z'x'} &= -e_{zx} \\ e_{x'y'} &= e_{yz} \end{aligned}$$

De coëfficiënten van de twintig termen der strain-energie-functie, na deze draaiing om de Y -as, staan in de derde rij der tabel vermeld.

De volgende betrekkingen moeten dus bestaan

$$\begin{aligned} a &= b = c \\ d &= f = g = h = i = j \\ l &= m = n = p = q = r. \\ k &= o = s. \end{aligned}$$

De functie wordt

$$\begin{aligned} &a (e^3_{xx} + e^3_{yy} + e^3_{zz}) + d (e^2_{xx} e_{yy} + e^2_{yy} e_{xx} + e^2_{zz} e_{yy} + \\ &+ e^2_{yy} e_{zz} + e^2_{xx} e_{zz} + e^2_{zz} e_{xx}) + k (e^2_{yz} e_{xx} + e^2_{zx} e_{yy} + \\ &+ e^2_{xy} e_{zz}) + l (e^2_{yz} e_{yy} + e^2_{zx} e_{xx} + e^2_{xy} e_{yy} + e^2_{zx} e_{zz} + \\ &+ e^2_{xy} e_{xx} + e^2_{yz} e_{zz}) + t e_{xx} e_{yy} e_{zz} + u e_{yz} e_{zx} e_{xy}. \end{aligned}$$

Zes constanten zijn nog over. Drie invariante derde-gradsfuncties zijn bekend. Hoogstens drie betrekkingen zijn dus nog mogelijk.

Draaiing over een hoek van 45° om de Z -as maakt

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} (x + y) \sqrt{2} \\ y' &= \frac{1}{2} (-x + y) \sqrt{2} \\ z' &= z. \end{aligned}$$

In de transformatieformules moeten dus de volgende waarden ingevoerd worden

$$\begin{array}{lll}
l_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} & m_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} & n_1 = 0 \\
l_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} & m_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} & n_2 = 0 \\
l_3 = 0 & m_3 = 0 & n_3 = 1
\end{array}$$

De transformatieformules worden

$$\begin{aligned}
e_{x'x'} &= \frac{1}{2} (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\
e_{y'y'} &= \frac{1}{2} (e_{xx} + e_{yy} - e_{zz}) \\
e_{z'z'} &= e_{zz} \\
e_{y'z'} &= \frac{1}{2} (e_{yz} - e_{zx}) \sqrt{2} \\
e_{z'x'} &= \frac{1}{2} (e_{yz} + e_{zx}) \sqrt{2} \\
e_{x'y'} &= -e_{xx} + e_{yy}
\end{aligned}$$

Na invoering dezer transformatie in den verkregen vorm voor de strain-energie-functie levert gelijkstelling van coëfficiënten nieuwe betrekkingen. Daar dit maximaal drie kan bedragen zal, indien drie nieuwe betrekkingen gevonden zijn, verder onderzoek overbodig wezen.

Bepaling der coëfficiënten van e^3_{xx} , $e_{xx} e_{yy} e_{zz}$ en $e_{yz} e_{zx} e_{xy}$ levert de condities

$$\begin{array}{ll}
a = \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} d + l & \text{of } d = 3a - 4l \\
t = d - 2k + \frac{1}{2} t & t = 6a - 8l - 4k \\
u = -k + l & u = l - k
\end{array}$$

De derde-graadsfunctie van de straincomponenten, die bij draaiing en spiegeling niet verandert is dus:

$$\begin{aligned}
& a(e^3_{xx} + e^3_{yy} + e^3_{zz}) + (3a - 4l)(e^2_{xx} e_{yy} + e^2_{yy} e_{xx} + \\
& + e^2_{zz} e_{yy} + e^2_{yy} e_{zz} + e^2_{xx} e_{zz} + e^2_{zz} e_{xx}) + k(e^2_{yz} e_{xx} + \\
& + e^2_{zx} e_{yy} + e^2_{xy} e_{zz}) + l(e^2_{yz} e_{yy} + e^2_{zx} e_{xx} + e^2_{xy} e_{yy} + \\
& + e^2_{zx} e_{zz} + e^2_{xy} e_{xx} + e^2_{yz} e_{zz}) + (6a - 8l - 4k) e_{xx} e_{yy} e_{zz} + \\
& + (l - k) e_{yz} e_{zx} e_{xy}.
\end{aligned}$$

Daar in dezen vorm zich nog slechts drie constanten bevinden, moet hij geschreven kunnen worden als

$$CI_1^3 + DI_1 I_2 + EI_3 \dots \dots \dots (5)$$

wat door uitwerking inderdaad het geval blijkt te zijn.

De tweede graadsinvarianten zijn I_1^2 en I_2 .

De uitdrukking, die aangeeft de potentieele energie per eenheid van volume, is derhalve, aannemend, dat met een eerste uitbreiding van de wet van Hooke mag worden volstaan

$$W = AI_1^2 + BI_2 + CI_1^3 + DI_1I_2 + EI_3 \dots\dots (6)$$

Hiermede is W als functie van de straincomponenten gevonden.

§ 3.

Over de wijze, waarop θ als functie der strain-componenten berekend wordt.

Deze § wordt in twee deelen gesplitst. In het eerste deel zal worden aangetoond, hoe voor het isotrope lichaam θ geheel algemeen als functie der straincomponenten is te berekenen. In het tweede gedeelte zal worden aangegeven, waartoe deze ingewikkelde berekeningen zich reduceeren, als wij onderstellen, dat hogere dan tweede-graadstermen der straincomponenten mogen verwaarloosd worden.

I.

Uit de waarde van $\theta = \frac{h\nu_m}{k}$ (2) volgt reeds direct, dat θ als functie der straincomponenten bekend is, zoodra wij het grenstrillingsgetal ν_m kennen.
 ν_m was bepaald door (1).

$$3N = \nu_m^3 VF.$$

Volgens Born en Karman¹⁾ geldt voor F

$$F = \frac{4\pi}{3} \sum_1^3 \frac{1}{q^3} \dots\dots\dots (7)$$

waarin q_1 , q_2 en q_3 de drie in het lichaam bestaانبare voortplantingssnelheden zijn

¹⁾ Zie Physikalische Zeitschrift 14^{er} Jahrgang p. 17 en 71.

Dus
$$\theta = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi V \sum_1^3 \frac{1}{q^3}} \right)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (8)$$

en daar

$$V = V_0 (1 + e_{xx})^3$$

is θ als functie der straincomponenten bekend, zoodra wij bepaald hebben, hoe de voortplantingssnelheden q van deze afhangen. De berekening van θ komt dus neer op de berekening der q 's.

Om de voortplantingssnelheden q als functies der straincomponenten te vinden gaan wij uit van de elastische differentiaalvergelijkingen van beweging

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx} \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy} \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx} \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy} \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots\dots\dots (9) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx} \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zz} \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

In de gewone elasticiteitstheorie, in die namelijk, waarin de wet van Hooke wordt aangenomen, is W een functie van den tweeden graad der straincomponenten

$$W = AI_1^2 + BI_2$$

of bij invoering der meer gebruikelijke coefficienten λ en μ

$$W = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right) I_1^2 - 2\mu I_2 \dots\dots\dots (10)$$

De elastische vergelijkingen (9) krijgen dan den vorm

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

en door te stellen

$$\begin{aligned} u &= a e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ v &= b e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \dots\dots\dots (11) \\ w &= c e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \end{aligned}$$

wordt gemakkelijk voor de drie voortplantingssnelheden gevonden

$$q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$q_3 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

en dus voor θ

$$\theta = \frac{h}{k} \left[\frac{9N}{4\pi V \left\{ 2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}} \right]^{\frac{1}{3}} \dots (12)$$

De uitbreiding van de wet van Hooke en het onmiddellijk gevolg hiervan, dat W een derde-gradsfunctie is van de strain-componenten, maakt echter, dat de elastische differentiaalvergelijkingen niet meer den eenvoudigen boven aangegeven vorm behouden. Er treden nu termen op, bestaande uit het product van een tweede en een eerste differentiaalquotient en de oplossing wordt veel moeilijker. Door physische overleggingen kunnen wij echter deze moeilijkheid op de volgende wijze vermijden.

De bewegingen, die in vergelijking gebracht moeten worden zijn kleine elastische trillingen om een evenwichtsstand. Bij verandering van den toestand van het lichaam door samendrukking, uitrekking of vervorming zullen deze trillingen in 'talgemeen veranderen en bovendien uitgevoerd worden om een nieuwen evenwichtsstand. Laat voor een bepaald deeltje deze de coördinaten hebben u^0 , v^0 en w^0 ten opzichte van den oorspronkelijken evenwichtsstand, dan kunnen wij voor de uitwijkingen van zoo'n deeltje stellen

$$u = u^0 + u'$$

$$v = v^0 + v'$$

$$w = w^0 + w'$$

1) Vlg. ook P. Debye. Zur Theorie der spezifischen Wärme. Annalen der Physik. Band. 89, p. 815 en 837.

waarin dan u' , v' en w' , de uitwijkingen uit den nieuwen nulstand, klein zijn.

Uit de beteekenis der strain-componenten volgt (4)

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e^0_{xx} + e'_{xx} \\ e_{yy} &= e^0_{yy} + e'_{yy} \\ e_{zz} &= e^0_{zz} + e'_{zz} \\ e_{yz} &= e^0_{yz} + e'_{yz} \\ e_{zx} &= e^0_{zx} + e'_{zx} \\ e_{xy} &= e^0_{xy} + e'_{xy}. \end{aligned}$$

Hierin zijn dan ook $e'_{xx} \dots e'_{yy}$ kleine grootheden, waarvan dus de derde machten mogen verwaarloosd worden.

De strain-energiefunctie had den vorm:

$$W = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu\right) I_1^2 - 2\mu I_2 + CI_1^3 + DI_1 I_2 + EI_3 \quad (6) \text{ en } (10)$$

waarin

$$\begin{aligned} I_1 &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \\ I_2 &= e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx} + e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) \\ I_3 &= e_{xx} e_{yy} e_{zz} + \frac{1}{4} (e_{yy} e_{zx} e_{xy} - e_{xx} e_{yz}^2 - e_{yy} e_{zx}^2 - e_{zz} e_{xy}^2) \quad (5) \end{aligned}$$

Substitutie van $e_{xx} = e^0_{xx} + e'_{xx}$ enz. in deze drie invarianten levert, na weglating van de derde machten der met accenten gemerkte straincomponenten:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^0 + I_1' \\ I_2 &= I_2^0 + I_2' + e^0_{yy} e'_{zz} + e^0_{yy} e'_{xx} + e^0_{zz} e'_{xx} + e^0_{zz} e'_{yy} + \\ &\quad + e^0_{xx} e'_{zz} + e^0_{xx} e'_{yy} - \frac{1}{2} (e^0_{yz} e'_{yz} + e^0_{zx} e'_{zx} + e^0_{xy} e'_{xy}) \\ I_3 &= I_3^0 + e^0_{xx} e^0_{yy} e'_{zz} + e^0_{xx} e^0_{zz} e'_{yy} + e^0_{yy} e^0_{zz} e'_{xx} + \\ &\quad + e^0_{zz} e'_{xx} e'_{yy} + e^0_{yy} e'_{xx} e'_{zz} + e^0_{xx} e'_{yy} e'_{zz} + \\ &\quad + \frac{1}{4} (e^0_{yz} e^0_{zx} e'_{xy} + \dots - e^0_{zz} e'^2_{xy}). \end{aligned}$$

Uit den vorm der elastische vergelijkingen volgt, dat ook de termen in W , die slechts eerste-graadsfuncties bevatten der met accent gemerkte factoren, op de vergelijkingen geen invloed zullen hebben. Noemen wij den vorm, die de straincomponenten bevat, welke wel invloed hebben op den vorm der vergelijkingen, W' , dan is

$$\begin{aligned}
W' = & \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) I_1'^2 - 2\mu I_2' + 3CI_1^0 I_1'^2 + DI_1^0 I_2' + \\
& + DI_1' \{ e_{yy}^0 e_{zz}' + e_{zz}^0 e_{yy}' + e_{zz}^0 e_{xx}' + e_{xx}^0 e_{zz}' + e_{xx}^0 e_{yy}' + \\
& + e_{yy}^0 e_{xx}' - \frac{1}{2} (e_{yz}^0 e_{yz}' + e_{zx}^0 e_{zx}' + e_{xy}^0 e_{xy}') \} + \\
& + E \{ e_{xx}' e_{yy}' e_{zz}^0 + e_{xx}' e_{zz}' e_{yy}^0 + e_{yy}' e_{zz}' e_{xx}^0 + \\
& + \frac{1}{4} (e_{yz}' e_{zx}^0 e_{xy}^0 + e_{yz}' e_{xy}^0 e_{zx}^0 + e_{zx}' e_{xy}^0 e_{yz}^0 - e_{yz}'^2 e_{xx}^0 - \\
& - 2 e_{xx}' e_{yz}' e_{yz}^0 - e_{zz}'^2 e_{yy}^0 - 2 e_{yy}' e_{zx}' e_{zx}^0 - e_{xy}'^2 e_{zz}^0 - \\
& - 2 e_{zz}' e_{xy}' e_{xy}^0) \} \dots\dots\dots (13).
\end{aligned}$$

Om nu geheel algemeen de drie voortplantingssnelheden als functies der straincomponenten te berekenen zouden wij als volgt te werk moeten gaan. Door differentiatie van W' naar de geaccentueerde straincomponenten en naar x, y en z zouden eerst de drie elastische vergelijkingen gevonden moeten worden. Daar W' een functie van den *tweeden* graad der straincomponenten is, zouden deze vergelijkingen lineair zijn. Vervolgens zouden wij een oplossing der vergelijkingen onderstellen in den vorm

$$\begin{aligned}
u &= a e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\
v &= b e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \dots\dots\dots (11) \\
w &= c e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}
\end{aligned}$$

Substitutie dezer uitdrukkingen in de differentiaalvergelijkingen zou dan leiden tot drie ten opzichte van a, b en c homogene vergelijkingen en dus tot een conditie voor de bestaanbaarheid van de onderstelde oplossingen. Deze conditie zou drie waarden voor $\rho\omega^2$ leveren en uit deze zouden dan weer gemakkelijk de drie waarden der voortplantingssnelheden q volgen. En hiermede was dan geheel algemeen θ als derde-graadsfunctie der straincomponenten bekend.

Deze algemeene oplossing zou echter tot zeer aanzienlijke berekeningen aanleiding geven. Daarom zullen wij voorop stellen, dat hoogere dan tweede-graadstermen der straincomponenten in θ verwaarloosd mogen worden en daarna nagaan tot welke berekeningen de bepaling van θ zich voor het isotrope lichaam dan beperkt.

II.

Voeren wij in

$$\begin{array}{ll} e_{xx} = e_1 & e_{yz} = e_4 \\ e_{yy} = e_2 & e_{zx} = e_5 \\ e_{zz} = e_3 & e_{xy} = e_6 \end{array}$$

dan kunnen wij bij bovenstaande onderstelling opzetten

$$\theta = \theta_0 \left(1 + \sum_1^6 \alpha_k e_k + \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{ik} e_i e_k \right) \dots \dots \dots (14)$$

Voor het isotrope lichaam zijn de 27 hierin optredende coëfficiënten terug te brengen tot 3. Daartoe gaan wij uit van de uitdrukking voor W .

Daar echter slechts het doel is een benaderde waarde voor θ te vinden, waarin nl. geen hoogere dan tweede-graadsfuncties der straincomponenten optreden, zullen wij ter verdere vereenvoudiging ook in de uitdrukking voor de potentieele energie de derde-graadstermen weglaten. Dan wordt

$$W = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2\mu \{ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \} - \frac{1}{4} (e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \dots \dots \dots (10)$$

De vrije energie, beschouwd als functie van de straincomponenten, zal voor een isotroop lichaam ook slechts deze invariante vormen kunnen bevatten. Volgens (3) bestaat de vrije energie uit twee deelen, waarvan het eerste de potentieele energie is, terwijl het tweede deel slechts door de daarin optredende grootheid θ van de straincomponenten afhangt. Derhalve zullen in θ ook geen andere dan de invariante functies der straincomponenten kunnen voorkomen.

θ moet dus als volgt geschreven kunnen worden.

$$\theta = \theta_0 \left[1 + a(e_1 + e_2 + e_3) + b(e_1 + e_2 + e_3)^2 + c \{ e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 \} - \frac{1}{4} (e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \right]$$

of ook

$$\theta = \theta_0 \{ 1 + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \gamma(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) + \\ + \delta(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \} \dots\dots\dots (15)$$

met de betrekking

$$4\delta + \gamma = 2\beta \dots\dots\dots (16)$$

Volgens form (14) is 't aantal te berekenen constanten in θ 27. Door (15) en (16) is dit aantal teruggebracht tot 3. Om deze te berekenen gaan wij als volgt te werk.

Wij onderstellen eerst $e_4 = e_5 = e_6 = 0$ en $e_1 = e_2 = e_3 = e$, berekenen voor dit eenvoudige geval de voortplantingssnelheden q en daaruit weer θ . Volgens (15) zal dan de coëfficiënt van e in θ gelijk zijn aan 3α , de coëfficiënt van e^2 gelijk aan $3(\beta + \gamma)$.

Daarna onderstellen wij $e_1 = e_2 = e_3 = e_5 = e_6 = 0$ en $e_4 = \varepsilon$. Dan zal moeten blijken, dat de coëfficiënt van ε in θ verdwijnt, terwijl de coëfficiënt van ε^2 den coëfficiënt δ geeft.

Hiermede zijn dan in verband met (16) de in θ optredende coëfficiënten bekend.

§ 4.

Berekening van θ als functie der strain-componenten.

I.

Ter berekening van den coefficient α zouden wij $e_4 = e_5 = e_6 = 0$ en de componenten e_1 , e_2 en e_3 onderling gelijk onderstellen. Beschouwd wordt dus een naar de drie richtingen even groote uitzetting zonder verschuivingen. Zij $e_1 = e_2 = e_3 = e$.

De functie, die alle termen bevat, die de elastische vergelijkingen beïnvloeden, wordt voor dit speciale geval volgens (13)

$$W' = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu + 3CI_1 + 2De\right)I_1'^2 + (-2\mu + DI_1 + Ee)I_2'$$

of $W'' = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu + 9Ce + 2De\right)I_1'^2 + (-2\mu + 3De + Ee)I_2'$.

Voor de elastische vergelijkingen (9) vindt men gemakkelijk, de accenten bij u , v en w weglatend

$$\left\{\lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E\right)e\right\} \frac{\partial I_1'}{\partial x} + \left\{\mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E\right)e\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\left\{\lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E\right)e\right\} \frac{\partial I_1'}{\partial x} + \left\{\mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E\right)e\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\left\{\lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E\right)e\right\} \frac{\partial I_1'}{\partial x} + \left\{\mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E\right)e\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Wij onderstellen een oplossing

$$u = a e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$v = b e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$w = c e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

Substitutie dezer waarden van u , v en w in de drie elastische vergelijkingen geeft na uitwerking de drie volgende in a , b en c homogene lineaire vergelijkingen

$$\left[\rho\omega^2 - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \alpha^2 - \left\{ \mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \times \right. \\ \left. \times (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] a - \left[\left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \alpha\beta \right] b - \\ - \left[\left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \alpha\gamma \right] c = 0.$$

$$\left[- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \alpha\beta \right] a + \left[\rho\omega^2 - \left\{ \lambda + \mu + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \beta^2 - \left\{ \mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \times \right. \\ \left. \times (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] b - \left[\left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \beta\gamma \right] c = 0.$$

$$\left[- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \alpha\gamma \right] a - \left[\left\{ \lambda + \mu + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \beta\gamma \right] b + \left[\rho\omega^2 - \left\{ \lambda + \mu + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(18C + \frac{11}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \gamma^2 - \left\{ \mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} \times \right. \\ \left. \times (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] c = 0.$$

Stelt men $x = \rho\omega^2 - \left\{ \mu - \left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E \right) e \right\} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ dan moet verdwijnen de determinant

$$\begin{vmatrix}
x - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha^2 & & & \\
- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha \beta & & & \\
- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha \gamma & & & \\
- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha \beta & & & \\
x - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \beta^2 & & & \\
- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \beta \gamma & & & \\
- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha \gamma & & & \\
- \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \beta \gamma & & & \\
x - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \gamma^2 & & &
\end{vmatrix}$$

Voegt men bij $\beta \times$ de eerste kolom $-\alpha \times$ de tweede en bij $\beta \times$ derde kolom $-\gamma \times$ de tweede dan krijgt men

$$\beta^2 x^2 \begin{vmatrix}
1 & - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha & 0 \\
-\alpha & x - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \beta^2 & \gamma \\
0 & - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \gamma & -1
\end{vmatrix} = 0.$$

Telt men nu bij de tweede rij $\alpha \times$ de eerste en $\gamma \times$ de tweede rij op dan wordt de determinantenvergelijking

$$\beta^2 x^2 \begin{vmatrix}
1 & - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \alpha & 0 \\
0 & x - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) & 0 \\
0 & - \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} \gamma & 1
\end{vmatrix} = 0$$

waaruit volgt

$$x^2 = 0$$

$$x = \left\{ \lambda + \mu + \left(18C + \frac{11}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} (x^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Van de drie waarden voor $\rho\omega^2$ vallen er dus twee samen, wat bij deze speciale onderstelling, waarbij het lichaam isotroop blijft, te verwachten was.

$$\rho\omega_1^2 = \rho\omega_2^2 = \left\{ \mu - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \right\} (x^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$\rho\omega_3^2 = \left\{ \lambda + 2\mu + (18C + 4D)e \right\} (x^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

ω = aantal trillingen in den tijd 2π . Stelt men $\alpha = \frac{\omega\alpha'}{q}$,
 $\beta = \frac{\omega\beta'}{q}$, $\gamma = \frac{\omega\gamma'}{q}$, waarbij $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, dan beteekent q de voortplantingssnelheid.

Dus

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{q^2}$$

en

$$q_1^2 = q_2^2 = \frac{\mu - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e}{\rho} \dots\dots\dots (17)$$

$$q_3^2 = \frac{\lambda + 2\mu + (18C + 4D)e}{\rho}.$$

Volgens (8) wordt dus

$$\theta = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{V \left[2 \left\{ \frac{\rho}{\mu - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e} \right\}^{\frac{3}{2}} + \left\{ \frac{\rho}{\lambda + 2\mu + (18C + 4D)e} \right\}^{\frac{3}{2}} \right]} \right]^{\frac{1}{3}}$$

waarin

$$V = V_0 (1 + e)^3$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 + e)^3}$$

als V_0 en ρ_0 betrekking hebben op den toestand bij $T=0$.
 Het eischt verder overleg of wij aan de in deze formule

optredende grootheden λ en μ dezelfde waarden mogen toekennen als zij bij het absolute nulpunt zouden bezitten. Dit is uit de voor de θ gevonden waarde af te leiden. Bij aanname van de met de wet van Hooke atomistisch overeenkomende onderstelling, dat de trillingen uitgevoerd worden onder de werking van krachten, die evenredig zijn met de uitwijking uit den evenwichtsstand, volgt direct uit de dan geldende bewegingsvergelijkingen, dat het trillingsgetal door de werking van een standvastige kracht niet beïnvloed wordt¹⁾. Dus wordt geëischt het constant blijven van θ .

Volgens voorgaande is

$$\theta = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (V_0 \rho_0)^{-\frac{1}{3}} \left[\frac{\rho_0^{\frac{1}{2}}}{(1+e)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{2}{\left\{ \mu - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} \right) \right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left\{ \lambda + 2\mu + (18C + 4D) e \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] \right]^{-\frac{1}{3}}$$

Zal θ bij aanname van de wet van Hooke, dus bij $C = D = E = 0$ constant blijven en nemen wij — ondanks de aanname van de wet van Hooke — een eindige uitzetting aan, dan blijkt uit de waarde voor θ , dat wij aan λ en μ vóór en na deze eindige uitzetting niet dezelfde waarde mogen toekennen, doch dat moet gelden

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+e} \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{1+e}$$

Deze waarden van λ en μ invoerend wordt

$$\theta = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (V_0 \rho_0)^{-\frac{1}{3}} \left[\rho_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\left\{ \mu_0 - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e (1+e) \right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left\{ \lambda_0 + 2\mu_0 + (18C + 4D) e (1+e) \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (18)$$

¹⁾ Zie ook p. 53.

Wij stelden

$$\theta = \theta_0 \{ 1 + x(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \gamma(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) + \\ + \delta(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \} \dots \dots \dots (15)$$

Voor $e_4 = e_5 = e_6 = 0$ en $e_1 = e_2 = e_3 = e$ wordt
 $\theta = \theta_0 \{ 1 + 3xe + 3(\beta + \gamma)e^2 \}.$

Ontwikkeling van de in (18) gevonden waarde voor θ leert dus zoowel $3x$ als $3(\beta + \gamma)$ kennen.

De hoogere dan de eerste machten van e verwaarloozend, is volgens (18)

$$\theta = \theta_0 \left[1 + \frac{\left(\frac{9}{2} D + \frac{3}{2} E \right) e (1+e) \mu_0^{-\frac{5}{2}} - (27C + 6D) e (1+e) (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{5}{2}}}{2\mu_0^{-\frac{3}{2}} + (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{3}{2}}} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

of $\theta = \theta_0 \left[1 - \frac{\left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} E \right) e \mu_0^{-\frac{5}{2}} - (9C + 2D) (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{5}{2}}}{2\mu_0^{-\frac{3}{2}} + (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{3}{2}}} \right] \quad (19)$

waaruit volgt

$$x = - \frac{\left(\frac{1}{2} D + \frac{1}{6} E \right) (\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} - \left(3C + \frac{2}{3} D \right) \mu_0^{\frac{5}{2}}}{2\mu_0 (\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} + \mu_0^{\frac{5}{2}} (\lambda_0 + 2\mu_0)} \quad (20).$$

Tweede-graads-componenten van e komen voor met den coefficient

$$\theta_0 \left\{ - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} E \right) \mu_0^{-\frac{5}{2}} - \left(\frac{45}{16} D^2 + \frac{5}{16} E^2 + \frac{15}{8} DE \right) \mu_0^{-\frac{7}{2}} + \right. \\ \left. + (9C + 2D) (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{5}{2}} - \left(202 \frac{1}{2} C^2 + 10D^2 + 90CD \right) \times \right. \\ \left. \times (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{7}{2}} \right\} : \left\{ 2\mu_0^{-\frac{3}{2}} + (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{3}{2}} \right\} + \theta_0 Q$$

$$Q = \left\{ \left(\frac{9}{2} D + \frac{3}{2} E \right) \mu_0^{-\frac{5}{2}} - (27C + 6D) (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{5}{2}} \right\}^2 : \left\{ 2\mu_0^{-\frac{3}{2}} + (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{3}{2}} \right\}^2$$

Dus vindt men

$$3(\beta + \gamma) = - \frac{\left(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}E\right)\mu_0^{-\frac{5}{2}} + \left(\frac{45}{16}D^2 + \frac{5}{16}E^2 + \frac{15}{8}DE\right)\mu_0^{-\frac{7}{2}} -}{2\mu_0^{-\frac{3}{2}} +} \\ - \frac{(9C + 2D)(\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{5}{2}} + \left(\frac{405}{2}C^2 + 20D^2 + 180CD\right)(\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{7}{2}}}{+ (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-\frac{3}{2}}} + Q \quad (21).$$

Na berekening van δ zal deze betrekking, gecombineerd met (8), de coëfficiënten β en γ geven. Hiermede is dan θ als functie der straincomponenten bekend.

II.

Wij willen thans de afhankelijkheid van θ van de verschuivingscomponenten berekenen. Wij stellen

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_5 = e_6 = 0 \\ e_4 = \varepsilon.$$

Bij deze aanname is

$$W' = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)I_1'^2 - 2\mu I_2' - \frac{1}{2}D\varepsilon I_1'e_4' + \frac{1}{4}E\varepsilon e_5'e_6' - \frac{1}{2}E\varepsilon e_1'e_4'.$$

Deze waarde van W' substitueerend in de elastische vergelijkingen (9) vindt men na uitvoering der differentiatie

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial I_1'}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{2}(D + E)\varepsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}\right) + \\ + \frac{1}{4}E\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right) + \frac{1}{4}E\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial I_1'}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{4}E\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \\ - \frac{1}{2}D\varepsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right) - \frac{1}{2}D\varepsilon\frac{\partial I_1'}{\partial z} - \frac{1}{2}E\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + \mu) \frac{\partial I_1'}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{4} E \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - \frac{1}{2} D \varepsilon \frac{\partial I_1'}{\partial y} - \frac{1}{2} E \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} D \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Stellen wij wederom

$$u = a e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$v = b e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$w = c e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

dan is

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial I_1'}{\partial x} = -(\lambda + \mu) \alpha (a\alpha + b\beta + c\gamma) e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\mu a (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \dots \dots \dots$$

$$- \frac{1}{2} (D + E) \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right) = \frac{1}{2} (D + E) \varepsilon (c\alpha\beta + b\alpha\gamma) \dots \dots$$

$$\frac{1}{4} E \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{1}{4} E \varepsilon (a\beta\gamma + c\alpha\beta) \dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{4} E \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) = -\frac{1}{4} E \varepsilon (b\alpha\gamma + a\beta\gamma) \dots \dots \dots$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho a \omega^2 \dots \dots \dots$$

De eerste vergelijking wordt dus

$$\begin{aligned}
& \{ -(\lambda + \mu) \alpha^2 - \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{1}{2} E \varepsilon \beta\gamma + \rho \omega^2 \} a + \\
& + \{ -(\lambda + \mu) \alpha\beta + \frac{1}{4} (2D + E) \varepsilon \alpha\gamma \} b + \{ -(\lambda + \mu) \alpha\gamma + \\
& + \frac{1}{4} (2D + E) \varepsilon \alpha\beta \} c = 0.
\end{aligned}$$

Verder is

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial I_1'}{\partial y} = -(\lambda + \mu) \beta (a\alpha + b\beta + c\gamma) e^{i\omega t} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = -\mu b (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{4} E \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{4} E \varepsilon (a \alpha \gamma + c \alpha^2) \dots\dots\dots$$

$$-\frac{1}{2} D \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = \frac{1}{2} D \varepsilon (c \beta^2 + b \beta \gamma) \dots\dots\dots$$

$$-\frac{1}{2} D \varepsilon \frac{\partial I_1'}{\partial z} = \frac{1}{2} D \varepsilon \gamma (a \alpha + b \beta + c \gamma) \dots\dots\dots$$

$$-\frac{1}{2} E \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} E \varepsilon a \alpha \gamma \dots\dots\dots$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho b \omega^2 \dots\dots\dots$$

Dus wordt de tweede vergelijking

$$\begin{aligned} & \{ -(\lambda + \mu) \alpha \beta + \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha \gamma + \frac{1}{2} D \varepsilon \alpha \gamma \} a + \\ & + \{ -(\lambda + \mu) \beta^2 - \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + D \varepsilon \beta \gamma + \rho \omega^2 \} b + \\ & + \{ -(\lambda + \mu) \beta \gamma - \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon \beta^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon \gamma^2 \} c = 0. \end{aligned}$$

Ten slotte heeft men

$$-(\lambda + \mu) \frac{\partial I_1'}{\partial z} = -(\lambda + \mu) \gamma (a \alpha + b \beta + c \gamma) e^{i \omega t} e^{i (\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = -\mu c (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{4} E \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{1}{4} E \varepsilon (b \alpha^2 + a \alpha \beta) \dots\dots\dots$$

$$-\frac{1}{2} D \varepsilon \frac{\partial I_1'}{\partial y} = \frac{1}{2} D \varepsilon \beta (a \alpha + b \beta + c \gamma) \dots\dots\dots$$

$$-\frac{1}{2} E \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2} E \varepsilon a \alpha \beta \dots\dots\dots$$

$$-\frac{1}{2} D \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{2} D \varepsilon (c \beta \gamma + b \gamma^2) \dots\dots\dots$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho c \omega^2 \dots\dots\dots$$

waaruit voor de derde vergelijking volgt

$$\begin{aligned} & \{ -(\lambda + \mu) \alpha \gamma + \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha \beta + \frac{1}{2} D \varepsilon \alpha \beta \} a + \\ & + \{ -(\lambda + \mu) \beta \gamma - \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon \gamma^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon \beta^2 \} b + \\ & + \{ -(\lambda + \mu) \gamma^2 - \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + D \varepsilon \beta \gamma + \rho \omega^2 \} c = 0. \end{aligned}$$

Deze drie homogene lineaire vergelijkingen hebben slechts dan een oplossing als hun determinant verdwijnt

$$\begin{vmatrix} -(\lambda + \mu) \alpha^2 - \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{1}{2} E \varepsilon \beta \gamma + \rho \omega^2 & -(\lambda + \mu) \alpha \beta + \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha \gamma + \frac{1}{2} D \varepsilon \alpha \gamma & -(\lambda + \mu) \alpha \gamma + \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha \beta + \frac{1}{2} D \varepsilon \alpha \beta \\ -(\lambda + \mu) \alpha \beta + \frac{1}{4} (2D + E) \varepsilon \alpha \gamma & -(\lambda + \mu) \beta^2 - \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + D \varepsilon \beta \gamma + \rho \omega^2 & -(\lambda + \mu) \beta \gamma - \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon \beta^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon \gamma^2 \\ -(\lambda + \mu) \alpha \gamma + \frac{1}{4} (2D + E) \varepsilon \alpha \beta & -(\lambda + \mu) \beta \gamma - \frac{1}{4} E \varepsilon \alpha^2 + \frac{1}{2} D \varepsilon (\beta^2 + \gamma^2) & -(\lambda + \mu) \gamma^2 - \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + D \varepsilon \beta \gamma + \rho \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Gelijk bekend is (en zooals eveneens volgt uit de drie voor $\rho \omega^2$ gevonden waarden bij een naar alle richtingen even groote uitzetting e^1) heeft men voor het geval, dat alle straincomponenten $= 0$ zijn

$$\begin{aligned} \rho \omega_1^2 &= \rho \omega_2^2 = \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ \rho \omega_3^2 &= (\lambda + 2\mu) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Stellen wij dus om een benaderde waarde voor de thans

¹⁾ Zie p. 22.

na de verschuiving ε geldende voortplantingssnelheden te verkrijgen vooreerst

$$\rho\omega^2 = \mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + A\varepsilon$$

en trachten wij met deze waarde van $\rho\omega^2$ aan de determinantenvergelijking te voldoen.

De determinant (22) wordt

$$\begin{vmatrix} -(\lambda + \mu)\alpha^2 + \left(A - \frac{E}{2}\beta\gamma\right)\varepsilon & & & & & & & & \\ -(\lambda + \mu)\alpha\beta + \frac{2D + E}{4}\varepsilon\alpha\gamma & & & & & & & & \\ -(\lambda + \mu)\alpha\gamma + \frac{2D + E}{4}\varepsilon\alpha\beta & & & & & & & & \\ & -(\lambda + \mu)\alpha\beta + \frac{2D + E}{4}\varepsilon\alpha\gamma & & & & & & & \\ & -(\lambda + \mu)\beta^2 + (A + D\beta\gamma)\varepsilon & & & & & & & \\ & -(\lambda + \mu)\beta\gamma + \left\{-\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2)\right\}\varepsilon & & & & & & & \\ & & -(\lambda + \mu)\alpha\gamma + \frac{2D + E}{4}\varepsilon\alpha\beta & & & & & & \\ & & -(\lambda + \mu)\beta\gamma + \left\{-\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2)\right\}\varepsilon & & & & & & \\ & & & -(\lambda + \mu)\gamma^2 + (A + D\beta\gamma)\varepsilon & & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

De termen, waarin geen ε optreedt, zullen moeten verdwijnen, hetgeen bij uitwerking ook blijkt het geval te wezen.

De coëfficiënt van ε wordt

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \mu)\alpha^2 \left[-(\lambda + \mu) \left[(\gamma^2 + \beta^2)(A + D\beta\gamma) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2\beta\gamma \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\} \right] \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu) \alpha \beta \left[-(\lambda + \mu) \left[-\alpha \beta (A + D\beta\gamma) - \frac{2D+E}{4} \alpha \gamma^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \alpha \gamma - \frac{2D+E}{4} \alpha \beta^2 \gamma \right] \right] - \\
& -(\lambda + \mu) \alpha \gamma \left[-(\lambda + \mu) \left[\left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \alpha \beta + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2D+E}{4} \alpha \beta \gamma^2 - (A + D\beta\gamma) \alpha \gamma + \frac{2D+E}{4} \alpha \beta^3 \right] \right].
\end{aligned}$$

Hoogere machten van ε worden verwaarloosd. Aan de determinantenvergelijking zal voldaan zijn als de coëfficiënt van $\varepsilon = 0$ is. Uit deze conditie zal de waarde van A moeten bepaald worden.

A komt voor met den coëfficiënt

$$(\lambda + \mu)^2 \{ \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \gamma^2 \} = 0.$$

De termen, waarin A niet optreedt zijn

$$\begin{aligned}
& (\lambda + \mu)^2 \alpha^2 \beta \gamma \left[D (\beta^2 + \gamma^2) - 2 \left\{ \frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} - \right. \\
& - D \beta^2 - \frac{2D+E}{4} \gamma^2 + \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} - \frac{2D+E}{4} \beta^2 + \\
& \left. + \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) + \frac{2D+E}{4} \gamma^2 - D \gamma^2 + \frac{2D+E}{4} \beta^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

Bij uitwerking blijken ook deze geheel te verdwijnen.

Dat de coëfficiënt van ε verdwijnen moest was echter *à priori* in te zien. In verband met de twee samenvallende waarden voor $\mu\omega^2$ in den toestand zonder strain moeten wij immers een tweede-machts-vergelijking voor A verwachten.

Bepalen wij nu den coëfficiënt van ε^2 . Deze wordt

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu) \alpha^2 \left[(A + D\beta\gamma)^2 - \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\}^2 \right] + \\
& + \left(A - \frac{E}{2} \beta\gamma \right) \left[-(A + D\beta\gamma)(\lambda + \mu)\beta^2 - (A + D\beta\gamma)(\lambda + \mu)\gamma^2 + \right. \\
& + 2(\lambda + \mu)\beta\gamma \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \left. \right] + (\lambda + \mu) \alpha\beta \times \\
& \times \left[\frac{2D+E}{4} \alpha\gamma (A + D\beta\gamma) - \frac{2D+E}{4} \alpha\beta \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \right] - \\
& - \frac{2D+E}{4} \alpha\gamma \left[-(A + D\beta\gamma)(\lambda + \mu) \alpha\beta - \frac{2D+E}{4} (\lambda + \mu) \alpha\gamma^3 + \right. \\
& + (\lambda + \mu) \alpha\gamma \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} + \frac{2D+E}{4} (\lambda + \mu) \beta^2 \gamma \alpha \left. \right] - \\
& - (\lambda + \mu) \alpha\gamma \left[\frac{2D+E}{4} \alpha\gamma \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} - \frac{2D+E}{4} \alpha\beta \times \right. \\
& \times (A + D\beta\gamma) \left. \right] + \frac{2D+E}{4} \alpha\beta \left[-\left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} (\lambda + \mu) \alpha\beta - \right. \\
& \left. - \frac{2D+E}{4} (\lambda + \mu) \alpha\beta\gamma^2 + (A + D\beta\gamma)(\lambda + \mu) \alpha\gamma + \frac{2D+E}{4} (\lambda + \mu) \alpha\beta^3 \right]
\end{aligned}$$

Zal aan de determinantenvergelijking voldaan zijn dan moet deze coëfficiënt nul wezen. Hieruit volgt een vierkantsvergelijking voor A .

De termen waarin A optreedt zijn de volgende

$$\begin{aligned}
& \{ -(\lambda + \mu) \alpha^2 - (\lambda + \mu) \beta^2 - (\lambda + \mu) \gamma^2 \} A^2 + \left[-2(\lambda + \mu) \alpha^2 \beta\gamma D - \right. \\
& - (\lambda + \mu) \beta^3 \gamma D - (\lambda + \mu) \beta\gamma^3 D + 2(\lambda + \mu) \beta\gamma \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} + \\
& + (\lambda + \mu) \beta^3 \gamma \frac{E}{2} + (\lambda + \mu) \beta\gamma^3 \frac{E}{2} + (\lambda + \mu) \alpha^2 \gamma \beta \frac{2D+E}{4} + \\
& \left. + (\lambda + \mu) \alpha^2 \beta\gamma \frac{2D+E}{4} + 2(\lambda + \mu) \alpha^2 \beta\gamma \frac{2D+E}{4} \right]
\end{aligned}$$

hetgeen na uitwerking blijkt te worden

$$-(\lambda + \mu) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \left(A^2 - \frac{E}{2} \beta\gamma A \right).$$

De termen, waarin A niet voorkomt zijn

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda + \mu)\alpha^2 \left[D^2\beta^2\gamma^2 - \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\}^2 \right] + \frac{E}{2}D\beta^4\gamma^2(\lambda + \mu) + \\
 & + \frac{E}{2}D\beta^2\gamma^4(\lambda + \mu) - \frac{E}{2}2(\lambda + \mu)\beta^2\gamma^2 \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\} \left[+ \right. \\
 & + (\lambda + \mu)\alpha\beta \left[D\frac{2D+E}{4}\alpha\beta\gamma^2 - \frac{2D+E}{4}\alpha\beta \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\} \right] - \\
 & - \frac{2D+E}{4}\alpha\gamma \left[-D(\lambda + \mu)\alpha\beta^2\gamma - \frac{2D+E}{4}(\lambda + \mu)\alpha\gamma^3 + (\lambda + \mu)\alpha\gamma \times \right. \\
 & \times \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\} + \frac{2D+E}{4}(\lambda + \mu)\beta^2\gamma\alpha \left. \right] - (\lambda + \mu)\alpha\gamma \times \\
 & \times \left[\alpha\gamma\frac{2D+E}{4} \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\} - D\frac{2D+E}{4}\alpha\beta^2\gamma \right] + \\
 & + \frac{2D+E}{4}\alpha\beta \left[-(\lambda + \mu)\alpha\beta \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\} - \frac{2D+E}{4} \times \right. \\
 & \times (\lambda + \mu)\alpha\beta\gamma^2 + D(\lambda + \mu)\alpha\beta\gamma^2 + \frac{2D+E}{4}(\lambda + \mu)\alpha\beta^3 \left. \right].
 \end{aligned}$$

Door uitwerking en rangschikking naar de verschillende machten van α , β en γ blijkt, dat in de laatste uitdrukking de coëfficiënten van $\beta^4\gamma^2$ en van $\beta^2\gamma^4$ verdwijnen, terwijl die van α^6 , $\alpha^2\beta^4$ en $\alpha^2\gamma^4$ alle $\frac{E^2(\lambda + \mu)}{16}$, die van $\alpha^4\beta^2$, $\alpha^4\gamma^2$ en van $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ alle $\frac{E^2(\lambda + \mu)}{8}$ worden.

Dus wordt ten slotte de vergelijking, waaruit A moet bepaald worden

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda + \mu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \left(A^2 - \frac{E}{2}\beta\gamma A \right) + \frac{E^2}{16}(\lambda + \mu)\alpha^2 \times \\
 & \times (2\beta^2\gamma^2 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2) = 0
 \end{aligned}$$

of

$$-(\lambda + \mu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \left\{ A^2 - \frac{E}{2}\beta\gamma A - \frac{E^2}{16}\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\} = 0$$

waaruit volgt

$$A_1 = \frac{E}{4} \beta \gamma + \sqrt{\frac{E^2}{16} \{ \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \}}$$

$$A_2 = \frac{E}{4} \beta \gamma - \sqrt{\frac{E^2}{16} \{ \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \}}$$

Hiermede zijn twee der trillingsgetallen gevonden

$$\rho \omega_1^2 = \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \left[\frac{E}{4} \beta \gamma + \sqrt{\frac{E^2}{16} \{ \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \}} \right] \varepsilon$$

$$\rho \omega_2^2 = \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \left[\frac{E}{4} \beta \gamma - \sqrt{\frac{E^2}{16} \{ \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \}} \right] \varepsilon. \quad (23)$$

Voor $\varepsilon = 0$ was het derde trillingsgetal bepaald door

$$\rho \omega_3^2 = (\lambda + 2\mu) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Stellen wij derhalve om een benaderde waarde voor het thans geldende derde trillingsgetal te verkrijgen

$$\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + A_3 \varepsilon.$$

Wij substitueeren deze waarde van $\rho \omega^2$ in de determinantenvergelijking, waardoor deze den vorm aanneemt:

$$\begin{vmatrix} -(\lambda + \mu)(\beta^2 + \gamma^2) + \left(A - \frac{E}{2} \beta \gamma\right) \varepsilon & -(\lambda + \mu) \alpha \beta + \frac{2D + E}{4} \varepsilon \alpha \gamma \\ -(\lambda + \mu) \alpha \beta + \frac{2D + E}{4} \varepsilon \alpha \gamma & -(\lambda + \mu) (\alpha^2 + \gamma^2) + (A + D \beta \gamma) \varepsilon \\ -(\lambda + \mu) \alpha \gamma + \frac{2D + E}{4} \varepsilon \alpha \beta & -(\lambda + \mu) \beta \gamma + \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \varepsilon \\ -(\lambda + \mu) \alpha \gamma + \frac{2D + E}{4} \varepsilon \alpha \beta & -(\lambda + \mu) \beta \gamma + \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \varepsilon \\ -(\lambda + \mu) (\alpha^2 + \beta^2) + (A + D \beta \gamma) \varepsilon & \end{vmatrix} = 0.$$

De term met eindige grootheden is wederom nul. De termen, waarin eerste machten van ε optreden zijn:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + \mu) (\beta^2 + \gamma^2) \left[(\lambda + \mu) (\alpha^2 + \gamma^2) (A + D\beta\gamma) \varepsilon + (\lambda + \mu) \times \right. \\
 & \times (\alpha^2 + \beta^2) (A + D\beta\gamma) \varepsilon + 2(\lambda + \mu) \beta\gamma \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \varepsilon \left. \right] + \\
 & + \left(A - \frac{E}{2} \beta\gamma \right) [(\lambda + \mu)^2 (\alpha^2 + \beta^2) (\alpha^2 + \gamma^2) - (\lambda + \mu)^2 \beta^2 \gamma^2] \varepsilon + \\
 & + (\lambda + \mu) \alpha \beta \left[-(\lambda + \mu) (A + D\beta\gamma) \varepsilon + \frac{2D + E}{4} (\lambda + \mu) \alpha \gamma (\alpha^2 + \beta^2) \varepsilon + \right. \\
 & + (\lambda + \mu) \alpha \gamma \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \varepsilon + \frac{2D + E}{4} \alpha \beta^2 \gamma (\lambda + \mu) \varepsilon \left. \right] + \\
 & + \frac{2D + E}{4} \alpha \gamma [(\lambda + \mu)^2 \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) + (\lambda + \mu) \alpha \beta \gamma^2] \varepsilon + \\
 & + (\lambda + \mu) \alpha \gamma \left[(\lambda + \mu) \alpha \beta \left\{ -\frac{E}{4} \alpha^2 + \frac{D}{2} (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \varepsilon + \frac{2D + E}{4} \alpha \beta \gamma^2 \times \right. \\
 & \times (\lambda + \mu) \varepsilon - (\lambda + \mu) \alpha \gamma (A + D\beta\gamma) \varepsilon + \frac{2D + E}{4} (\lambda + \mu) \alpha \beta (\alpha^2 + \gamma^2) \varepsilon \left. \right] + \\
 & + \frac{2D + E}{4} \alpha \beta [(\lambda + \mu)^2 \alpha \beta^2 \gamma + (\lambda + \mu)^2 \alpha \gamma (\alpha^2 + \gamma^2)] \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Zal door de aangenomen waarde voor $\rho\omega^2$ aan de determinantvergelijking voldaan worden, dan zullen niet alleen de bekende termen, doch ook die, waarin ε optreedt moeten verdwijnen. Hoogere dan eerste machten van ε worden verwaarloosd.

Door uitwerking wordt voor den coëfficient van ε gevonden

$$(\lambda + \mu)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 A_3 + (\lambda + \mu)^2 D\beta\gamma (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2$$

waaruit volgt

$$A_3 = -D\beta\gamma.$$

Dus

$$\rho\omega_3^2 = (\lambda + 2\mu) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - D\beta\gamma\epsilon \dots \dots (24)$$

Stelt men wederom $\alpha = \frac{\omega\alpha'}{q}$ enz., dan is q de voortplantingssnelheid, terwijl $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$.

Uit de drie gevonden waarden voor $\rho\omega^2$ volgen dan direct de drie voortplantingssnelheden

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{\mu}{\rho} \left\{ 1 + \frac{E}{4\mu} (\beta'\gamma' + \sqrt{\beta'^2\gamma'^2 + \alpha'^2}) \epsilon \right\} \\ q_2^2 &= \frac{\mu}{\rho} \left\{ 1 + \frac{E}{4\mu} (\beta'\gamma' - \sqrt{\beta'^2\gamma'^2 + \alpha'^2}) \epsilon \right\} \dots \dots (25) \\ q_3^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left(1 - \frac{D}{\lambda + 2\mu} \beta'\gamma'\epsilon \right). \end{aligned}$$

Voor het isotrope lichaam waren de drie voortplantingssnelheden onafhankelijk van richting en de in θ optredende factor F was gelijk aan $F = \frac{4\pi}{3} \sum_1^3 \frac{1}{q_i^3} = \frac{4\pi}{q_m^3}$, waarin q_m de gemiddelde voortplantingssnelheid is.

Door de verschuiving ϵ is het lichaam niet meer isotroop en in verschillende richtingen bestaan verschillende snelheden. Stellen wij ook nu nog den factor F gelijk aan het product van 4π en het omgekeerde van de derde macht der gemiddelde snelheid, dan is dus

$$F = \frac{4\pi}{q_m^3} = \frac{1}{3} \int \sum_1^3 \frac{1}{q_i^3} d\omega \dots \dots \dots (26)$$

waarbij de integratie is uit te voeren over een bol met straal 1.

In eerste benadering is

$$\frac{1}{q_1^3} = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{E}{4\mu} \left\{ \beta'\gamma' + \sqrt{\beta'^2\gamma'^2 + \alpha'^2} \right\} \epsilon \right]$$

$$\frac{1}{q_2^3} = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{E}{4\mu} \left\{ \beta' \gamma' - \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2} \right\} \varepsilon \right]$$

$$\frac{1}{q_3^3} = \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{D}{\lambda + 2\mu} \beta' \gamma' \varepsilon \right].$$

Dus

$$F = \frac{1}{3} \int \left\{ \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{3E}{4\mu} \beta' \gamma' \varepsilon \right) + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{D}{\lambda + 2\mu} \beta' \gamma' \varepsilon \right) \right\} d\omega.$$

Bij invoering van poolcoördinaten geldt

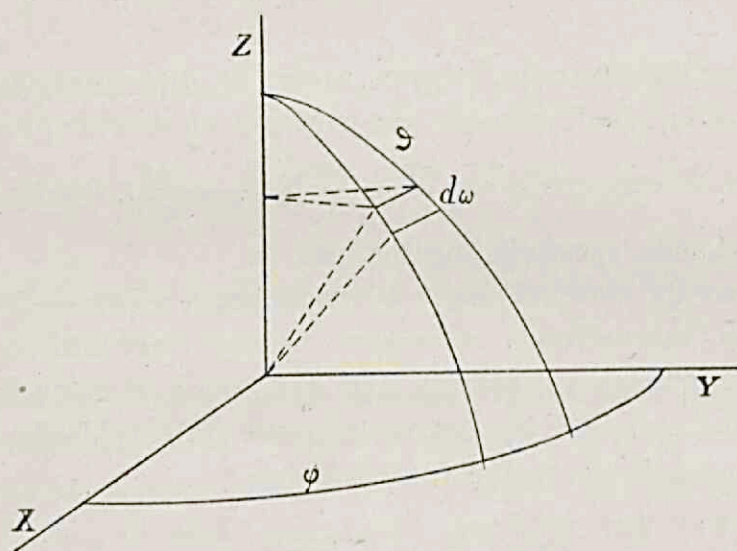
$$\alpha' = \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\beta' = \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\gamma' = \cos \vartheta$$

terwijl het bolelement

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$



$$\text{Dus} \quad \int^{\text{bol}} \beta' \gamma' d\omega = \int^{\text{bol}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi = 0.$$

Derhalve wordt ook thans gevonden

$$F = \frac{4\pi}{3} \left[2 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Het blijkt dus, dat de factor F en hiermede θ geen functie

is van de eerste machten der verschuivingen ε , een resultaat, dat volgens (15) gevonden moest worden ¹⁾,

Berekenen wij thans, hoe θ van de tweede machten der verschuivingen afhangt. Daarbij kan van voorgaande berekeningen, waarbij slechts eerste machten van ε beschouwd werden, met succes worden gebruik gemaakt.

Stellend

$$\rho\omega^2 - \mu(x^2 + \beta^2 + \gamma^2) = x$$

kan de determinantenvergelijking geschreven worden in den vorm

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Aan deze vergelijking willen wij thans voldoen door

$$x = A\varepsilon + B\varepsilon^2.$$

Werd gesteld $x = A\varepsilon$, dan bleek, dat bij substitutie van deze waarde van x in de vergelijking, de coëfficiënt van ε nul werd.

Dus zal in de coëfficiënt b geen term mogen voorkomen zonder ε , terwijl in c slechts tweede- en hoogere-graads termen van ε mogen optreden.

De vergelijking moet dus geschreven kunnen worden in den vorm

$$x^3 - (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots)x^2 + (b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots)x - (c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3) = 0.$$

Is $x = A\varepsilon + B\varepsilon^2$ van deze vergelijking een wortel dan bestaan ook de volgende twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} A^3 - 2a_0AB - a_1A^2 + b_1B + b_2A - c_3 &= 0 \\ -a_0A^2 + b_1A - c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Voor de laatste vergelijking werd reeds op pag. 32 gevonden

$$-(\lambda + \mu)(x^2 + \beta^2 + \gamma^2) \left\{ A^2 - \frac{E}{2}\beta\gamma A - x^2 \frac{E^2}{16}(x^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\} = 0$$

¹⁾ Zie ook p. 52.

en als wortels van deze

$$A_1 = \frac{E}{4} \beta \gamma + \frac{E}{4} \sqrt{\beta^2 \gamma^2 + x^2 (x^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

$$A_2 = \frac{E}{4} \beta \gamma - \frac{E}{4} \sqrt{\beta^2 \gamma^2 + x^2 (x^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

terwijl uit de eerste vergelijking volgt

$$B = \frac{-A^3 + a_1 A^2 - b_2 A + c_3}{b_1 - 2a_0 A}.$$

De noemer van B wordt gevonden door $-a_0 A^2 + b_1 A - c_2$ naar A te differentieeren.

Maar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} (-a_0 A^2 + b_1 A - c_2) &= \frac{d}{dA} \{-a_0 (A - A_1)(A - A_2)\} \\ &= -a_0 \{2A - (A_1 + A_2)\} \end{aligned}$$

terwijl

$$a_0 = (\lambda + \mu) (x^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

De noemer van B is dus bekend. Van den teller blijft nog te berekenen a_1 , b_2 en c_3 .

De bovenstaande derde-graadsvergelijking in x is in de determinantvorm

$$\begin{vmatrix} x - (\lambda + \mu) x^2 - \frac{1}{2} E \beta \gamma \varepsilon & & & & \\ -(\lambda + \mu) x \beta + \frac{1}{4} (2D + E) x \gamma \varepsilon & & & & \\ -(\lambda + \mu) x \gamma + \frac{1}{4} (2D + E) x \beta \varepsilon & & & & \\ & -(\lambda + \mu) x \beta + \frac{1}{4} (2D + E) x \gamma \varepsilon & & & \\ x - (\lambda + \mu) \beta^2 + D \beta \gamma \varepsilon & & & & \\ & -(\lambda + \mu) \beta \gamma - \frac{1}{4} E x^2 \varepsilon + \frac{1}{2} D (\beta^2 + \gamma^2) \varepsilon & & & \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} & -(\lambda + \mu) \alpha \gamma + \frac{1}{4} (2D + E) \alpha \beta \varepsilon \\ & -(\lambda + \mu) \beta \gamma - \frac{1}{4} E \alpha^2 \varepsilon + \frac{1}{2} D (\beta^2 + \gamma^2) \varepsilon \\ & x - (\lambda + \mu) \gamma^2 + D \beta \gamma \varepsilon \end{aligned} \right| = 0$$

waaruit volgt

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} E - 2D \right) \beta \gamma$$

$$b_2 = \left(\frac{1}{2} D^2 - DE \right) \beta^2 \gamma^2 - \left(\frac{1}{4} D^2 + \frac{1}{16} E^2 \right) (\alpha^2 \gamma^2 + \alpha^2 \beta^2) - \\ - \frac{1}{16} E^2 \alpha^4 - \frac{1}{4} D^2 \beta^4 - \frac{1}{4} D^2 \gamma^4.$$

$$c_3 = -\frac{1}{8} D^2 E \beta \gamma (\beta^2 - \gamma^2)^2 + \frac{1}{8} (D^2 E + DE^2) \alpha^4 \beta \gamma + \\ + \frac{1}{8} D^2 E \alpha^2 \beta^3 \gamma + \frac{1}{8} DE^2 \alpha^2 \beta \gamma^3$$

of bij invoering van $\alpha = \frac{\omega \alpha'}{q}$, $\beta = \frac{\omega \beta'}{q}$, $\gamma = \frac{\omega \gamma'}{q}$

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} E - 2D \right) \beta' \gamma' \frac{\omega^2}{q^2}$$

$$b_2 = \left\{ \left(\frac{1}{2} D^2 - DE \right) \beta'^2 \gamma'^2 - \left(\frac{1}{4} D^2 + \frac{1}{16} E^2 \right) (\alpha'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2 \beta'^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{16} E^2 \alpha'^4 - \frac{1}{4} D^2 \beta'^4 - \frac{1}{4} D^2 \gamma'^4 \right\} \frac{\omega^4}{q^4}$$

$$c_3 = \left\{ -\frac{1}{8} D^2 E \beta' \gamma' (\beta'^2 - \gamma'^2)^2 + \frac{1}{8} (D^2 E + DE^2) \alpha'^4 \beta' \gamma' + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} DE^2 \alpha'^2 \beta'^3 \gamma' + \frac{1}{8} DE^2 \alpha'^2 \beta' \gamma'^3 \right\} \frac{\omega^6}{q^6}$$

terwijl A_1 en A_2 den vorm aannemen

$$A_1 = \frac{E}{4} \left\{ \beta' \gamma' + \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2} \right\} \frac{\omega^2}{q^2}$$

$$A_2 = \frac{E}{4} \left\{ \beta' \gamma' - \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2} \right\} \frac{\omega^2}{q^2}.$$

Kiezen we $A = A_1$ dan levert substitutie van de voor A_1 , a_0 , a_1 , b_2 en c_3 gevonden uitdrukkingen de bijbehorende waarde van B

$$B_1 = \left[\left\{ -\frac{E^3}{64} (\beta' \gamma' + \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2})^3 + \frac{E^2}{32} (E - 4D) \beta' \gamma' \times \right. \right. \\ \times (\beta' \gamma' + \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}) \left\{ \frac{\omega^6}{q^6} + \frac{E}{4} \right\} \left(-\frac{1}{2} D^2 + DE \right) \beta'^2 \gamma'^2 + \\ + \left(\frac{1}{4} D^2 + \frac{1}{16} E^2 \right) (\alpha'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2 \beta'^2) + \frac{1}{16} E^2 \alpha'^4 + \frac{1}{4} D^2 \beta'^4 + \\ + \frac{1}{4} D^2 \gamma'^4 \left\{ (\beta' \gamma' + \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}) \frac{\omega^6}{q^6} + \left\{ -\frac{1}{8} D^2 E \beta' \gamma' \times \right. \right. \\ \times (\beta'^2 - \gamma'^2) + \frac{1}{8} (D^2 E + DE^2) \alpha'^4 \beta' \gamma' + \frac{1}{8} DE^2 \alpha'^2 \beta'^3 \gamma' + \\ \left. \left. + \frac{1}{8} DE^2 \alpha'^2 \beta' \gamma'^3 \right\} \frac{\omega^6}{q^6} \right\} : a_0 (A_2 - A_1). \right.$$

Na uitwerking vindt men

$$B_1 = \left[\left[-\frac{1}{16} D^2 E \beta' \gamma' (2\beta'^2 \gamma'^2 - \alpha'^2 \gamma'^2 - \alpha'^2 \beta'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4 - 2\alpha'^4) + \right. \right. \\ + \frac{1}{16} D^2 E (-2\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2 \beta'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4) \times \\ \left. \left. \times \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2} \right] \frac{\omega^6}{q^6} : a_0 (A_2 - A_1) \right.$$

of bij invoering van $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$.

$$B_1 = \frac{\frac{1}{8} D^2 \{ \beta' \gamma' (1 - 3\alpha'^2) - (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2} \}}{(\lambda + \mu) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}} \frac{\omega^2}{q^2} \quad (27)$$

Om B_2 , de bij $A = A_2$ behorende waarde van B , te vinden, kunnen wij bedenken, dat het eenige verschil tussen B_1 en B_2 hierin bestaat, dat overal, waar in B_1 de vorm $+\sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}$ optreedt, in B_2 de vorm $-\sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}$ voorkomt.

Dus is

$$B_2 = \frac{-\frac{1}{8} D^2 \{ \beta' \gamma' (1 - 3\alpha'^2) - (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2} \}}{(\lambda + \mu) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}} \frac{\omega^2}{q^2} \quad (28)$$

en rest nog slechts de berekening van de derde waarde, welke B kan hebben nl. de waarde, behoorend bij $A_3 = -D\beta\gamma$.

Stellen wij $x = \rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$, dan kan de in $\rho\omega^2$ derde-graadsvergelijking wederom geschreven worden in den vorm

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

In r moeten alle termen machten van ε zijn, want voor $\varepsilon = 0$ is x een wortel der vergelijking. De vergelijking zal derhalve de gedaante moeten hebben

$$x^3 - (p_0 + p_1\varepsilon + p_2\varepsilon^2 + \dots)x^2 + (q_0 + q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2 + \dots)x - (r_1\varepsilon + r_2\varepsilon^2 + \dots) = 0.$$

Stellen we $x = A_3\varepsilon + B_3\varepsilon^2$, dan moet, derde en hogere machten van ε verwaarloozend, voldaan worden aan de volgende twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} q_0 A_3 - r_1 &= 0 \\ -p_0 A_3^2 + q_0 B_3 + q_1 A_3 - r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Gevonden werd reeds

$$\begin{aligned} q_0 &= (\lambda + \mu)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ r_1 &= D(\lambda + \mu)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \beta\gamma \\ A_3 &= -D\beta\gamma. \end{aligned}$$

Dus moeten nog berekend worden p_0 , q_1 en r_2 .

Bij bovenstaande aanname voor x heeft de derde-graadsvergelijking in determinantvorm de gedaante

$$\begin{vmatrix}
x + (\lambda + \mu)(\beta^2 + \gamma^2) - \frac{E}{2}\beta\gamma\epsilon \\
-(\lambda + \mu)\alpha\beta + \frac{2D + E}{4}\alpha\gamma\epsilon \\
-(\lambda + \mu)\alpha\gamma + \frac{2D + E}{4}\alpha\beta\epsilon \\
-(\lambda + \mu)\alpha\beta + \frac{2D + E}{4}\alpha\gamma\epsilon \\
x + (\lambda + \mu)(\alpha^2 + \gamma^2) + D\beta\gamma\epsilon \\
-(\lambda + \mu)\beta\gamma + \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\}\epsilon \\
-(\lambda + \mu)\alpha\gamma + \frac{2D + E}{4}\alpha\beta\epsilon \\
-(\lambda + \mu)\beta\gamma + \left\{ -\frac{E}{4}\alpha^2 + \frac{D}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \right\}\epsilon \\
x + (\lambda + \mu)(\alpha^2 + \beta^2) + D\beta\gamma\epsilon
\end{vmatrix} = 0.$$

Door uitwerking van dezen determinant vindt men

$$p_0 = -2(\lambda + \mu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$q_1 = \left(4D - \frac{E}{2}\right)(\lambda + \mu)\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$\begin{aligned}
r_2 = (\lambda + \mu) \left\{ \frac{D^2}{4}(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\beta^2\gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \right. \\
\left. + ED\beta^2\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\}.
\end{aligned}$$

De gevonden waarden voor q_0 , r_1 , A_3 , p_0 , q_1 en r_2 substitueerend wordt

$$B_3 = \frac{-2D^2\beta^2\gamma^2 + D\left(4D - \frac{E}{2}\right)\beta^2\gamma^2 + \frac{D^2}{4}(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\beta^2\gamma^2) + ED\beta^2\gamma^2}{(\lambda + \mu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

of bij invoering, als vroeger, van $\alpha = \frac{\omega\alpha'}{q}$ enz.

$$B_3 = \frac{(6D^2 + 2ED)\beta'^2\gamma'^2 + D^2(\alpha'^2\beta'^2 + \alpha'^2\gamma'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4)}{4(\lambda + \mu)} \frac{\omega^2}{q^2} \dots\dots (29).$$

Hiermede zijn ook de drie coëfficiënten van ε^2 in de drie voortplantingssnelheden q bekend. Deze worden dus in verband met (25)

$$q_1^2 = \frac{\mu}{\rho} \left[1 + \frac{E}{4\mu} (\beta' \gamma' + \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}) \varepsilon + \frac{D^2}{8\mu(\lambda + \mu)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\beta' \gamma' (1 - 3\alpha'^2) - (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}}{\sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}} \varepsilon^2 \right]$$

$$q_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \left[1 + \frac{E}{4\mu} (\beta' \gamma' - \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}) \varepsilon - \frac{D^2}{8\mu(\lambda + \mu)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\beta' \gamma' (1 - 3\alpha'^2) + (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}}{\sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}} \varepsilon^2 \right] \quad (30)$$

$$q_3^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left[1 - \frac{D}{\lambda + 2\mu} \beta' \gamma' \varepsilon + \frac{D}{4(\lambda + 2\mu)} \times \right. \\ \left. \times \frac{(6D + 2E) \beta' \gamma'^2 + D(\alpha'^2 \beta'^2 + \alpha'^2 \gamma'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4)}{\lambda + \mu} \right].$$

Volgens (26) is

$$F = \frac{1}{3} \int \sum_1^3 \frac{1}{q_i^3} d\omega$$

terwijl, wederom hoogere dan de tweede-machten van ε verwaarloozend volgens (30)

$$\frac{1}{q_1^3} = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{E}{4\mu} (\beta' \gamma' + \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}) \varepsilon - \frac{3D^2}{16\mu(\lambda + \mu)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\beta' \gamma' (1 - 3\alpha'^2) - (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}}{\sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}} \varepsilon^2 \right]$$

$$\frac{1}{q_2^3} = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{E}{4\mu} (\beta' \gamma' - \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}) \varepsilon + \frac{3D^2}{16\mu(\lambda + \mu)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\beta' \gamma' (1 - 3\alpha'^2) + (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}}{\sqrt{\beta'^2 \gamma'^2 + \alpha'^2}} \varepsilon^2 \right]$$

$$\frac{1}{q_3^3} = \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{D}{\lambda + 2\mu} \beta' \gamma' \varepsilon - \frac{3D}{8(\lambda + 2\mu)} \times \right. \\ \left. \times \frac{(6D + 2E) \beta' \gamma'^2 + D(\alpha'^2 \beta'^2 + \alpha'^2 \gamma'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4)}{\lambda + \mu} \right].$$

Door substitutie dezer uitdrukkingen voor de omgekeerde derde-machten der voortplantingssnelheden wordt

$$F = \frac{1}{3} \int^{\text{bol}} \left[\left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ 2 - \frac{3E}{4\mu} \beta' \gamma' \varepsilon + \frac{3D^2}{8\mu(\lambda + \mu)} (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \varepsilon^2 \right\} + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{2}{3}} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \frac{3D}{2(\lambda + 2\mu)} \beta' \gamma' \varepsilon - \frac{3D(6D + 2E)\beta'^2 \gamma'^2 + D(\alpha'^2 \beta'^2 + \alpha'^2 \gamma'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4)}{8(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \varepsilon^2 \right\} \right] d\omega.$$

Bij integratie verdwijnen de termen, waarin eerste machten van ε optreden. Dus

$$F = \frac{1}{3} \int^{\text{bol}} \left[\left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ 2 + \frac{3D^2}{8\mu(\lambda + \mu)} (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) \varepsilon^2 \right\} + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{2}{3}} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - \frac{3D}{8(\lambda + 2\mu)} \frac{(6D + 2E)\beta'^2 \gamma'^2 + D(\alpha'^2 \beta'^2 + \alpha'^2 \gamma'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4)}{\lambda + \mu} \varepsilon^2 \right\} \right] d\omega.$$

Ter uitvoering der integratie voeren we wederom pool-coördinaten in ¹⁾

$$\begin{aligned} \alpha' &= \sin \vartheta \cos \varphi \\ \beta' &= \sin \vartheta \sin \varphi \\ \gamma' &= \cos \vartheta \\ d\omega &= \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int^{\text{bol}} (1 - \alpha'^2 - 3\beta'^2 \gamma'^2) d\omega &= \int^{\text{bol}} (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta) \times \\ &\times \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \left(\sin \vartheta - \frac{1}{2} \sin^3 \vartheta - \frac{3}{2} \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \right) d\vartheta \\ &= 2\pi \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{28}{15} \pi \end{aligned}$$

$$\int^{\text{bol}} \beta'^2 \gamma'^2 d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi d\vartheta d\varphi = \frac{4}{15} \pi$$

$$\int^{\text{bol}} \alpha'^2 \beta'^2 d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi = \frac{1}{4} \pi \int_0^\pi \sin^5 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{15} \pi$$

¹⁾ Zie p. 36.

$$\int^{\text{bol}} \alpha'^2 \gamma'^2 d\omega = \frac{4}{15} \pi.$$

$$\int^{\text{bol}} \beta'^4 d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \vartheta \sin^4 \varphi d\vartheta d\varphi$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} \cos 4\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \right) d\varphi = \frac{3}{4} \pi. \end{aligned}$$

Dus

$$\int^{\text{bol}} \beta'^4 d\omega = \frac{3}{4} \pi \int_0^\pi \sin^5 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{5} \pi.$$

$$\int^{\text{bol}} \gamma'^4 d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{5} \pi.$$

Derhalve

$$\int^{\text{bol}} (\alpha'^2 \beta'^2 + \alpha'^2 \gamma'^2 + \beta'^4 + \gamma'^4) d\omega = \frac{32}{15} \pi.$$

Hiermede zijn de noodige integraties verricht en wordt

$$\begin{aligned} F &= \frac{4\pi}{3} \left[2 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{7 D^2 \pi}{30 \mu (\lambda + \mu)} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^2 - \\ &\quad - \frac{D}{8(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \left(\frac{24D + 8E}{15} \pi + \frac{32D}{15} \pi \right) \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^2. \\ F &= \frac{4\pi}{3} \left[2 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{7 D^2 \pi}{30 \mu (\lambda + \mu)} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^2 - \\ &\quad - \frac{(7 D^2 + DE) \pi}{15 (\lambda + 2\mu) (\lambda + \mu)} \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^2 \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

Volgens (8) is

$$\theta = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi V \Sigma \frac{1}{q^3}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{k} \left(\frac{3N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} F^{-\frac{1}{3}}$$

Bij substitutie der gevonden waarde voor F wordt

$$\theta = \theta_0 \left[1 - \frac{7D^2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} + (14D^2 + 2DE)\mu_0^{\frac{5}{2}}}{120(\lambda_0 + \mu_0)\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)\{2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{3}{2}} + \mu_0^{\frac{3}{2}}\}} \varepsilon^2 \right]$$

Hiermede is de coëfficiënt δ uit form. (15) gevonden

$$\delta = \frac{-7D^2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} - (14D^2 + 2DE)\mu_0^{\frac{5}{2}}}{120(\lambda_0 + \mu_0)\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)\{2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{3}{2}} + \mu_0^{\frac{3}{2}}\}} \dots (32)$$

Door (16) en (21) kunnen verder in verband met (32) de coëfficiënten β en γ bepaald worden.

Men vindt

$$\beta = \frac{-(15D+5E)(\lambda_0+\mu_0)(\lambda_0+2\mu_0)^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{225}{8}D^2 + \frac{25}{8}E^2 + \frac{75}{4}DE\right)(\lambda_0+\mu_0)\mu_0^{-1} \times}{90 \times} \\ \times (\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} + (90C + 20D)(\lambda_0 + \mu_0)\mu_0^{\frac{5}{2}} - (2025C^2 + 200D^2 + 1800CD) \times \\ \times \mu_0(\lambda_0 + \mu_0)(\lambda_0 + 2\mu_0) \times \\ \times (\lambda_0 + \mu_0)\mu_0^{\frac{5}{2}}(\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1} - 7D^2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} + (14D^2 + 2DE)\mu_0^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}Q(33) \\ \times \{2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{3}{2}} + \mu_0^{\frac{3}{2}}\}$$

$$\gamma = \frac{-(15D+5E)(\lambda_0+\mu_0)(\lambda_0+2\mu_0)^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{225}{8}D^2 + \frac{25}{8}E^2 + \frac{75}{4}DE\right)\mu_0^{-1}(\lambda_0+\mu_0) \times}{45 \times} \\ \times (\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} + (90C + 20D)\mu_0^{\frac{5}{2}}(\lambda_0 + \mu_0) - (2025C^2 + 200D^2 + 1800CD) \times \\ \times \mu_0(\lambda_0 + \mu_0)(\lambda_0 + 2\mu_0) \times \\ \times \mu_0^{\frac{5}{2}}(\lambda_0 + \mu_0)(\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1} + \frac{7}{2}D^2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} - (7D^2 + DE)\mu_0^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9}Q^1) \\ \times \{2(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{3}{2}} + \mu_0^{\frac{3}{2}}\}$$

¹⁾ Voor de beteekenis van Q zie p. 24.

Voor den coefficient van $(e_1 + e_2 + e_3)$ werd gevonden

$$\alpha = - \frac{\left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{6}E\right)(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} - \left(3C + \frac{2}{3}D\right)\mu_0^{\frac{5}{2}}}{2\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{5}{2}} + \mu_0^{\frac{5}{2}}(\lambda_0 + 2\mu_0)} \quad (20).$$

Hiermede zijn de vier coefficienten, die volgens (15) in θ optreden, verkregen en is de vrije energie $\mathcal{F}$ bekend, zoodra de elastische constanten van het lichaam gegeven zijn. Differentiatie naar de zes straincomponenten levert verder de zes vergelijkingen, die voor het isotrope, vaste lichaam de toestandsvergelijkingen voorstellen.

In de elasticiteitstheorie, waarbij de wet van Hooke geldig wordt ondersteld, worden dikwijls in plaats van de constanten λ en μ twee andere constanten gebruikt, die dan functies zijn van λ en μ . Zoo kunnen wij hier ook in plaats van de drie constanten C , D en E , die bij een eerste uitbreiding van de wet van Hooke optreden, de vier constanten α , β , γ en δ , verbonden door de betrekking $2\beta = 4\delta + \gamma$, invoeren. De aanname dezer constanten wordt hierdoor gewettigd, dat in de uitdrukkingen voor den uitzettingscoefficient en voor de verandering van de elastische constanten, die volgens de wet van Hooke optreden, niet de grootheden C , D en E zelf voorkomen, doch slechts α , β , γ en δ . Wij zullen dus in 't vervolg zóó handelen, alsof α , β , γ en δ (waartusschen de betrekking $2\beta = 4\delta + \gamma$) de constanten zijn, die bij uitbreiding van de wet van Hooke optreden, terwijl wij ons om de grootheden C , D en E , die *practisch* niet op den voorgrond treden, niet verder zullen bekommeren.

§ 5.

Berekening der toestandsvergelijkingen.

Voor de vrije energie per eenheid van volumen werd gevonden

$$\mathfrak{F} = W + 9NkT \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \xi^2 \log(1 - e^{-\xi}) d\xi = W + \mathfrak{F}_v$$

waarin

$$W = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) I_1^2 - 2\mu I_2 + CI_1^3 + DI_1 I_2 + EI_3$$

$$\text{en} \quad \theta = \theta_0 \{ 1 + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \\ + \gamma(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) + \delta(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \}$$

terwijl

$$I_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$I_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 - \frac{1}{4}(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2)$$

$$I_3 = e_1 e_2 e_3 + \frac{1}{4}(e_4 e_5 e_6 - e_1 e_4^2 - e_2 e_5^2 - e_3 e_6^2).$$

Differentiatie van de uitdrukking $\mathfrak{F}$ voor de vrije energie naar de zes straincomponenten levert bij verwaarloozing der termen, waarin hoogere dan eerste machten der straincomponenten optreden

$$X_1 = \lambda I_1 + 2\mu e_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial \theta} \theta_0 \{ \alpha + 2\beta e_1 + \gamma(e_2 + e_3) \}$$

$$X_2 = \lambda I_1 + 2\mu e_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial \theta} \theta_0 \{ \alpha + 2\beta e_2 + \gamma(e_3 + e_1) \}$$

$$X_3 = \lambda I_1 + 2\mu e_3 + \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta} \{ \alpha + 2\beta e_3 + \gamma (e_1 + e_2) \}$$

$$X_4 = \mu e_4 + 2\delta \theta_0 \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta} e_4$$

$$X_5 = \mu e_5 + 2\delta \theta_0 \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta} e_5$$

$$X_6 = \mu e_6 + 2\delta \theta_0 \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta} e_6.$$

Uit de uitdrukking voor $\mathcal{F}_v$ volgt

$$\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta} = 9Nk \left(\frac{T}{\theta} \right)^4 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi.$$

Deze waarde van $\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta}$ staat in eenvoudig verband met de uitdrukking voor de trillingsenergie U_v . Gelijk bekend is geldt: $U_v = \mathcal{F}_v - T \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial T}$.

Men vindt

$$\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial T} = 3Nk \log \left(1 - e^{-\frac{\theta}{T}} \right) - 12Nk \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi$$

en, eveneens door partieele integratie, voor $\mathcal{F}_v$

$$\mathcal{F}_v = 3NkT \log \left(1 - e^{-\frac{\theta}{T}} \right) - 3NkT \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi.$$

Dus wordt

$$U_v = \mathcal{F}_v - T \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial T} =$$

$$U_v = 9NkT \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi \dots\dots\dots (34)$$

of in verband met de gevonden uitdrukking voor $\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta}$

$$U_v = \theta \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta}.$$

Dus
$$\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta} = \frac{U_v}{\theta}.$$

Deze waarde voor $\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \theta}$ substitueerend in de uitdrukking voor X_1 krijgt men

$$X_1 = \lambda I_1 + 2\mu e_1 + \frac{U_v}{\theta} \theta_0 \{ \alpha + 2\beta e_1 + \gamma(e_2 + e_3) \}.$$

Bij verwaarloozing van hogere dan eerste machten der straincomponenten is

$$\frac{\theta_0}{\theta} = 1 - \alpha(e_1 + e_2 + e_3).$$

Dus wordt de benaderde uitdrukking voor X_1

$$X_1 = \lambda I_1 + 2\mu e_1 + U_v \{ \alpha + 2\beta e_1 + \gamma(e_2 + e_3) - \alpha^2(e_1 + e_2 + e_3) \}$$

Evenzoo

$$X_2 = \lambda I_1 + 2\mu e_2 + U_v \{ \alpha + 2\beta e_2 + \gamma(e_1 + e_3) - \alpha^2(e_1 + e_2 + e_3) \}$$

$$X_3 = \lambda I_1 + 2\mu e_3 + U_v \{ \alpha + 2\beta e_3 + \gamma(e_1 + e_2) - \alpha^2(e_1 + e_2 + e_3) \}$$

$$X_4 = \mu e_4 + 2U_v \delta e_4 \quad (35)$$

$$X_5 = \mu e_5 + 2U_v \delta e_5$$

$$X_6 = \mu e_6 + 2U_v \delta e_6.$$

Hiermede zijn voor een isotroop lichaam en bij lage temperatuur de betrekkingen gevonden, die aangeven het verband tusschen de stresscomponenten, de straincomponenten en de temperatuur. Ze treden in de plaats van de betrekking

$$p = f(VT)$$

voor het gasvormige lichaam en mogen dus de toestandsvergelijkingen in gewonen zin van het isotrope vaste lichaam genoemd worden,

Naast deze betrekkingen volgt uit formule (34) nog voor de totale energie U

$$U = W + U_r =$$

$$= W + 9NkT \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi \dots\dots\dots (36)$$

Hierdoor is U als functie van de straincomponenten en de temperatuur, en dus ook nog de zoogenaamde calorische toestandsvergelijking van het lichaam bekend.

§ 6.

Berekening van den uitzettingscoëfficiënt uit de toestandsvergelijkingen.

De toestandsvergelijkingen (35) geven bij constante temperatuur het verband tusschen stress- en straincomponenten, bij constante stresscomponenten het verband tusschen uitzetting en temperatuur. In de praktijk interesseert de laatste betrekking het meest.

Onderstellen wij, dat op het lichaam geen uitwendige krachten werken.

Is $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0$ dan is ook volgens de laatste drie vergelijkingen

$$e_4 = e_5 = e_6 = 0$$

m. a. w. door temperatuursveranderingen treden geen verschuivingen in 't lichaam op. Daar dit, om niet in botsing te komen met de resultaten der ervaring, gevonden moest worden, blijkt ook thans weder, dat θ geen functie *mag* zijn van de eerste machten der verschuivingscomponenten.

Uit $X_1 = X_2 = X_3 = 0$
volgt $x_1 = x_2 = x_3$.

Wij vinden dus, geheel in overeenstemming met de praktijk, dat een isotroop lichaam zich bij verwarming in alle richtingen in even sterke mate uitzet.

Door sommatie der eerste drie vergelijkingen van (35) krijgt men

$$I_1 = \frac{-3\alpha U_v}{3\lambda + 2\mu + (2\beta + 2\gamma - 3\alpha^2) U_v}.$$

Bij lage temperaturen mag $(2\beta + 2\gamma - 3\alpha^2) U_v$ verwaarloosd worden tegen $(3\lambda + 2\mu)$.

En dus krijgen wij voor de kubieke uitzetting

$$I_1 = \frac{-3\alpha U_v}{3\lambda + 2\mu}$$

of daar voor de compressibiliteit k genomen mag worden

$$k = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

$$I_1 = -\alpha U_v k \dots \dots \dots (37)$$

Als resultaat dezer beschouwingen wordt dus gevonden, dat (in de omgeving van het absolute nulpunt) de uitzetting van een lichaam evenredig is met zijn inwendige bewegings-energie, met de compressibiliteit k en met de elastische constante α . Hiermede is de het eerst door Grüneisen afgeleide betrekking teruggevonden.

Bij aanname van de wet van Hooke bestaat er een lineair verband tusschen de stresscomponenten en de strain-componenten. De potentieele energie W is dan een quadratische functie van de straincomponenten. De elastische constanten C , D en E en dus ook α zijn nul. Bij aanname dier wet zet een lichaam zich dus slechts uit door uitwendige krachten, niet door temperatuursverhooging. Aanname van de wet van Hooke sluit in zich negatie van een thermischen uitzettingscoëfficiënt.

Debye¹⁾ berekende voor het eenvoudige geval van den asymmetrischen oscillator de thermische uitzetting door uit te gaan van de bewegingsvergelijking van den oscillator en vindt deze uitzetting (gemiddelde uitwijking uit den evenwichtsstand) ook evenredig met de energie van het trillende deeltje. Het bleek bovendien, dat ook dan slechts van een thermische uitwijking sprake kan zijn, als de oscillator aan zijn evenwichtsstand gebonden is door krachten die *niet*-lineaire functies der verplaatsingen zijn.

¹⁾ Zie Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen 1913. Die Bewegung eines asymmetrischen Oszillators p. 21—24.

De uitdrukking (37) voor de uitzetting stelt ons in staat de elastische constante α te berekenen. Differentiatie van I_1 naar $\mathcal{F}$ levert immers de kubieke uitzettingscoëfficiënt K

$$K = \frac{\partial I_1}{\partial T} = -\alpha k \frac{\partial U_v}{\partial T} = -\alpha k c_v \rho \dots\dots\dots (38)$$

waarin c_v de soortelijke warmte bij constant volume en ρ de dichtheid voorstelt.

Experimenteele bepalingen, waaruit de andere grootheden β , γ en δ kunnen bepaald worden komen slechts sporadisch in de litteratuur voor. Wij bezitten o.a. eenige in de bepalingen omtrent den invloed van de temperatuur op den torsiemodulus μ en den elasticiteitsmodulus E , die — voor zoover juist — in staat stellen β , γ en δ te berekenen. Wij zullen daarom in de volgende § eerst theoretisch de veranderingen van μ en E met T uit de toestandsvergelijkingen bepalen.

§ 7.

Over de afhankelijkheid van den torsiemodulus μ en den elasticiteitsmodulus E van de temperatuur.

Uit de laatste drie der toestandsvergelijkingen (35) volgt reeds direct, als μ_T den torsiemodulus bij de temperatuur T voorstelt

$$\mu_T = \mu_0 + 2\delta U_v$$

of

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = 2\delta c_v \rho \dots\dots\dots (39).$$

Uit de verandering van den torsiemodulus met de temperatuur kan dus de elastische constante δ berekend worden.

Niet zoo eenvoudig is de afhankelijkheid van temperatuur en elasticiteitsmodulus. Onder laatste wordt verstaan de verhouding van de kracht, die men in de lengterichting van een staaf of draad laat werken tot de verlenging door die kracht veroorzaakt.

Laat de lengterichting van de staaf samenvallen met de richting der X -as. Er werkt slechts een kracht volgens de lengterichting der staaf. Dus

$$\begin{aligned} X_2 &= X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0. \\ X_1 &= X. \end{aligned}$$

Uit de toestandsvergelijkingen (35) volgt

$$\begin{aligned} X &= \lambda I_1 + 2\mu e_1 + U_v \{ \alpha + 2\beta e_1 + \gamma (e_1 + e_3) - \alpha^2 I_1 \} \\ 0 &= \lambda I_1 + 2\mu e_2 + U_v \{ \alpha + 2\beta e_2 + \gamma (e_3 + e_1) - \alpha^2 I_1 \} \\ 0 &= \lambda I_1 + 2\mu e_3 + U_v \{ \alpha + 2\beta e_3 + \gamma (e_1 + e_2) - \alpha^2 I_1 \}. \end{aligned}$$

Door optelling dezer vergelijkingen vindt men

$$I_1 = \frac{X - 3\alpha U_v}{3\lambda + 2\mu + (2\beta + 2\gamma - 3\alpha^2) U_v}$$

en door substitutie dezer waarde van I_1 in de uitdrukking voor X

$$X = \frac{\lambda X - 3\alpha \lambda U_v}{3\lambda + 2\mu + (2\beta + 2\gamma - 3\alpha^2) U_v} + 2\mu e_1 + U_v(\alpha + 2\beta e_1 - \gamma e_1) + \\ + (\gamma - \alpha^2) U_v \frac{X - 3\alpha U_v}{3\lambda + 2\mu + (2\beta + 2\gamma - 3\alpha^2) U_v}.$$

Laat U_v klein wezen, zoodat hogere dan de eerste machten van de energie mogen verwaarloosd worden. Door ontwikkeling naar U_v vindt men dan gemakkelijk voor X , als men nog λ en μ door λ_0 en μ_0 vervangt

$$X = \frac{1}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \left[2\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0 + 2\beta U_v + 2\gamma U_v - 3\alpha^2 U_v) e_1 + 2\mu_0 \alpha U_v + \right. \\ \left. + (3\lambda_0 + 2\mu_0)(2\beta - \gamma) U_v e_1 - \frac{\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + \mu_0} (2\beta + \gamma - 2\alpha^2) U_v e_1 \right].$$

Differentiatie van X naar e_1 geeft den elasticiteitsmodulus E . Daarbij treedt op $\frac{\partial U_v}{\partial e_1}$, waarvan wij eerst de orde van grootte willen bepalen

$$U_v = 9NkT \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1}.$$

$$\text{Dus } \frac{\partial U_v}{\partial e_1} = \frac{\partial U_v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial e_1} = \alpha \theta_0 \frac{\partial U_v}{\partial \theta} = \alpha \theta \frac{\partial U_v}{\partial \theta} \text{ (bij benadering)}$$

$$= 9NkT \alpha \left\{ \frac{\frac{\theta}{T}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} - 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} \right\}$$

De vorm $\frac{\frac{\delta}{T}}{e^{\frac{\delta}{T}} - 1}$ verdwijnt voor lage temperaturen ex-

ponentieel. Bij het absolute nulpunt wordt $\frac{\partial U_v}{\partial e_1}$ dus $-3\alpha U_v$. Derhalve mogen bij de differentiatie van X naar e_1 vormen als $\mu\beta e_1 \frac{\partial U_v}{\partial e_1}$ weggelaten worden tegen $\mu\beta U_v$. Van deze verwaarloozing gebruik makend wordt

$$\frac{\partial X}{\partial e_1} = E = \frac{1}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \left[2\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0 + 2\beta U_v + 2\gamma U_v - 3\alpha^2 U_v) + \right. \\ \left. + 3\lambda_0 U_v(2\beta - \gamma) + 2\mu_0 U_v(2\beta - \gamma) - \frac{\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + \mu_0} (2\beta + \gamma - 2\alpha^2) U_v + 2\mu_0 \alpha \frac{\partial U_v}{\partial e_1} \right]$$

en na uitwerking

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \left[2\mu_0(\gamma - 6\alpha^2) + (3\lambda_0 + 2\mu_0)(2\beta - \gamma) + 4\mu_0\alpha^2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} (2\beta + \gamma - 2\alpha^2) \right] c_v \rho = \frac{1}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \left[\left(\frac{2\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} - 8\mu_0 \right) \alpha^2 + \right. \\ \left. + \left(3\lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} \right) 2\beta - \left(3\lambda_0 + \frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} \right) \gamma \right] c_v \rho \dots \dots (40)$$

Gerekend van het absolute nulpunt zijn dus de veranderingen van μ zoowel als van E bij verhooging van de temperatuur evenredig met de soortelijke warmte en dus met de derde machten der absolute temperatuur.

Resumeerend krijgen wij de volgende vergelijkingen ter berekening van de grootheden α , β , γ en δ .

$$K = -\alpha k c_v \rho \dots \dots \dots (38)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = 2\delta c_v \rho \dots \dots \dots (39)$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \left[\left(\frac{2\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} - 8\mu_0 \right) x^2 + \left(3\lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} \right) 2\beta - \right. \\ \left. - \left(3\lambda_0 + \frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} \right) \gamma \right] c_v \rho \dots \dots \dots (40)$$

terwijl vroeger nog tusschen β , γ en δ de betrekking gevonden was

$$4\delta + \gamma = 2\beta. \dots \dots \dots (16)$$

§ 8.

Berekening van α , β , γ en δ voor eenige elementen.

De formules (38), (39) en (40) voor den uitzettingscoëfficiënt en voor de verandering van torsie- en elasticiteitsmodulus werden verkregen door te onderstellen, dat hogere dan de eerste machten van U , mochten verwaarloosd worden. Bovendien was bij alle berekeningen ondersteld, dat met een eerste uitbreiding van de wet van Hooke kon worden volstaan, terwijl in de uitdrukking voor de karakteristieke temperatuur θ geen derde- of hogere-graadstermen der straincomponenten werden opgenomen. Uit al deze onderstellingen vloeit voort, dat de formules (38), (39) en (40) theoretisch slechts in de omgeving van het absolute nulpunt geldig zijn. Niettemin zullen wij de grootheden α , β , γ en δ gaan berekenen alsof de formules ook voor hoge temperaturen gebruikt mogen worden. Vooreerst is 't slechts de bedoeling een idee te krijgen over de grootte van α , β , γ en δ , daar de experimenteele waarnemingen toch te zeer uiteen loopen om een eenigszins nauwkeurige waarde van β , γ en δ te kunnen verwachten. Maar bovendien heeft de ervaring geleerd, dat van dergelijke extrapolaties in de theoretische physica dikwijls met succes gebruik gemaakt kan worden.

In de volgende tabel zijn torsiemodulus μ , elasticiteitsmodulus E en de veranderingen dezer grootheden met de temperatuur overgenomen van de tabellen, die Cl. Schaefer ¹⁾ daarvoor geeft. De opgaven gelden voor kamertemperatuur.

¹⁾ Annalen der Physik V, 1901, p. 220.

De soortelijke warmten zijn overgenomen uit de tabellen van Debye ¹⁾ en — voor zoover noodig — uit de aldaar opgegeven waarden bij andere temperaturen door lineaire interpolatie voor kamertemperatuur afgeleid. Uit deze gegevens en uit de dichtheden, de atoomgewichten en de uitzettingscoëfficiënten zijn α , β , γ en δ berekend. Bij deze berekeningen is alles herleid tot C. G. S. eenheden.

De opgaven voor lood staan op de laatste plaats, omdat gegevens over de verandering van den elasticiteitsmodulus ontbreken. In verband daarmede komen bij lood geen waarden voor van β en γ .

Formule (40) werd gebruikt na invoering van den elasticiteitsmodulus E ter vervanging van λ . Uit

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

volgt

$$\lambda = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}.$$

Substitutie van deze waarde van λ in form. (40) levert na uitwerking de voor de berekeningen van β en γ gebruikte formule (40¹)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3\mu - E}{\mu^2} \left[-(6\mu - E)\alpha^2 + \left(\frac{\mu E}{3\mu - E} - E + 2\mu \right) \beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{3\mu E - 6\mu^2}{3\mu - E} + E - 2\mu \right) \gamma \right] c_v \rho \dots\dots (40^1). \end{aligned}$$

Na de bepaling van α volgens form. (38) uit den uitzettingscoëfficiënt ²⁾ en de bepaling van δ volgens form. (39) uit de verandering van den torsiemodulus werden uit de twee betrekkingen (40¹) en (41) β en γ berekend.

¹⁾ Annalen der Physik 39, 1912, p. 789.

²⁾ Voor den uitzettingscoëff. (kubieken) werd genomen $3 \times$ den bij Schaefer voorkomenden lineairen.

	μ	E	$\frac{\partial \mu}{\partial T}$ in procenten.	$\frac{\partial E}{\partial T}$ in procenten.	Atoom- warmte.
Aluminium ..	2329 $\frac{\text{KG}}{\text{mm}^2}$	6330 $\frac{\text{KG}}{\text{mm}^2}$	0,2472	0,2132	5,4
Zilver	2467	5897	0,08209	0,0765	5,74
Koper	3967	9897	0,04489	0,03627	5,66
Lood	550,2	1493	0,7867		5,98

Atoomgew.	Dichtheid.	α	β	γ	δ
27	2,71	— 2,3	31,1	111,8	— 12,4
108	10,53	— 2,6	10,5	37,8	— 4,2
63	8,96	— 2,0	11,2	32,8	— 2,6
207	11,32	— 3,2			— 15,4

Zooals uit bovenstaande gegevens blijkt neemt de torsie-modulus met toename der temperatuur af. Dit strookt dus met de onderstelling, dat μ bij nadering tot het smeltpunt kleiner moet worden. Een smeltpuntbepaling door voor het smeltpunt die waarde van T te nemen, waarvoor $\mu = 0$ wordt, levert echter geen bevredigende resultaten. Dit was overigens door de zeer uiteenloopende waarden der experimenteële bepalingen niet te verwachten.

Het uitzetten der lichamen met verhooging der temperatuur en daardoor het bestaan van een positieven uitzettingscoëfficient heeft ten gevolge, dat de coëfficienten α van de eerste machten der straincomponenten in de uitdrukking voor de karakteristieke temperatuur negatief worden. Zooals verder reeds werd opgemerkt kan een thermische uitzettingscoëfficient slechts bestaan, als wij aannemen, dat de atomen door niet-lineaire krachten aan hun evenwichtsstand gebonden zijn. Wij moeten aannemen, dat een grootere kracht vereischt wordt om de atomen tot elkander

te doen naderen dan om de atomen over denzelfden afstand te verwijderen. Dit is trouwens in overeenstemming met de ervaring, want zooals bekend is, neemt de compressibiliteit k met verhooging van den druk af. Hieronder volgen de resultaten van eenige waarnemingen over deze veranderlijkheid ¹⁾. Gekozen zijn de waarnemingen van de vier elementen waarvoor de elastische constante α , β , γ en δ berekend worden. Tevens zijn de veranderingen van de compressibiliteit met de temperatuur opgenomen. k is gegeven met atmosfeeren per cm^2 als drukeenheid.

Element.	Onderzoeker	t	p in atmosf.	$k.10^6$
Aluminium .	Richards	20	100—500	1,31
	Buchanan	9	1—256	1,67
	Bridgman	20	6500	1,21
	Grüneisen	— 191	10—150	1,36
		15		1,50
		125		1,75
	Lussana	14,7	2000	0,88
		27		0,96
		71		1,03
		103		1,10
Zilver.....		126		1,18
	Richards	20	100—500	0,85
	Grüneisen	— 191	10—150	0,71
		16		0,77
		134		0,85
Koper.....		166		0,88
	Amagat	12		0,86
	Buchanan	10	1—282	0,86
	Regnault			1,23
Lood.....	Amagat			2,76
	Richards	20	100—150	2,23
	Lussana	10	100	3,87
			500	3,81
			1000	3,75
			2000	3,64
			3000	3,53
	Grüneisen	— 191	10—150	2,58
		14,2		3,30

¹⁾ Zie W. Schut. Piëzochemie der gecondenseerde systemen p. 72. Dissertatie 1912. Utrecht.

Voor zoover uit vorenstaande gegevens een conclusie getrokken kan worden neemt K af met verhooging van den druk. Hetzelfde geldt ook voor de andere dan vorenstaande elementen, voor zooverre onderzocht. Bridgeman meent echter uit zijn experimenten te mogen besluiten, dat aluminium (en ook staal) geen kleinere samendrukbaarheid bij hooger en druk hebben. Richards en Lussana vinden echter *steeds* een vermindering van k met verhooging van den druk, niet slechts bij bovenstaande elementen, doch bij alle, welke zij onderzochten.

Verder volgt uit bovenstaande tabel een toename van k met de temperatuur. Hetzelfde wordt bij alle elementen waargenomen. Echter laat de overeenstemming tusschen de waarden dezer toename veel te wenschen over.

Wij zouden uit (35) een uitdrukking voor de compressibiliteit k kunnen afleiden en daaruit de afhankelijkheid van k van de temperatuur kunnen bepalen. Uit de afhankelijkheid van de elastische constanten μ en E van de temperatuur volgt echter reeds direct, dat bij lage T veranderingen van k evenredig met T^3 zijn en dat dus k evenredig met T^4 is. Grüneisen vond inderdaad bij *Al*, *Fe*, *Cu* en *Ag* een snellere dan lineaire stijging van k met T . Volgens Lussana neemt bij *Al* k vrijwel evenredig toe met T , evenals bij *Bi* en *Sb*. Meer overeenstemmende en daarmede meer betrouwbare resultaten waren zeer zeker gewenscht. Dit geldt niet alleen voor de verandering van k met T , doch in 't algemeen voor den loop der waarden van al die physische grootheden, welke met de elastische constanten verband houden.

607

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

. Op theoretische gronden mag bij lage temperatuur de thermische uitzettingscoëfficient en de thermische verandering van torsie — en elasticiteitsmodulus evenredig verwacht worden met de derde machten der absolute temperatuur.

II.

Het is wenschelijk, dat betrouwbare experimenteele bepalingen verricht worden over de veranderlijkheid van de bij een vast lichaam volgens de Hookeesche theorie optredende elastische constanten.

III.

Ten onrechte meent Schaefer in zijn waarnemingen over de verandering van de elasticiteit met de temperatuur een bevestiging te mogen zien van de verwachting, dat de Poissonsche constante bij het smeltpunt de waarde $\frac{1}{2}$ moet hebben.

IV.

De aannamen van Ortway:

$$W = \sum_1^6 i \sum_1^6 k c_{ik} x_i x_k$$

en
$$\frac{\theta}{T} = \frac{\theta_0}{T} \left(1 + \sum_1^6 k \alpha_k x_k + \sum_1^6 i \sum_1^6 k \beta_{ik} x_i x_k \right)$$

zijn met elkaar in strijd.

Verhandl. der Deutschen Physik. Gesellsch. XV Jahrg. 1913,
Nr. 16, p. 774 en 775.

V.

De uitdrukking welke Ortway voor X_i afleidt is verkregen door een niet geoorloofde verwaarloozing en moet vermeerderd worden met

$$\frac{9 N k_0 T^4}{\theta^3} \alpha_i \sum_1^6 k \alpha_k x_k \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Zie vorige stelling.

VI.

Het bewijs door Rouché en De Comberousse gegeven voor de stelling dat een vierhoek koordenvierhoek is, als tusschen de diagonalen en de zijden de betrekking be-

staat $\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$ is onvolledig.

Traité de Géométrie I, p. 148, 6e druk.

VII.

De wet, dat een gebeurtenis een aantal malen kan verwacht worden evenredig aan de kans, die deze gebeurtenis bezit, vloeit niet voort uit het theorema van Bernouilli.

VIII.

De vergelijkingen (1) p. 243 van Schuster zijn geen uitdrukking voor een homogene deformatie volgens de definitie van Thomson en Tait, tenzij de afgeleiden van α , β en γ naar x , y en z constanten zijn.

Schuster. Einführung in die theoretische Optik.

IX.

De formule van Landré voor de sterftekans

$$q = \frac{d}{b + \frac{1}{2}(t-u) + \frac{1}{3}t'}$$

behoort vervangen te worden door

$$q = \frac{d}{b + \frac{1}{2}(t-u)}.$$

Mathem. techn. Kapitel zur Lebensversicherung p. 63, 3e druk.

X.

Door het onderzoek van Bridgman is de gletscherbeweging niet meer te verklaren door de regelatie.

Zeitschr. Anorg. Chemie. Deel 77, p. 377.

XI.

Aan de afleiding door Grotendorst van de formule

$$\int_a^b \sum_1^\infty u_n(x) dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n(x) dx.$$

Voor het geval, dat $\sum_1^\infty u_n(x)$ tusschen a en b convergent, maar voor b divergent is, terwijl $\sum_1^\infty \int_a^b u_n(x) dx$ convergeert, mag niet de waarde van een bewijs gegeven worden.

Beginselen der Diff. en Integr.rekening p. 35, 3e druk

XII.

Het bewijs, dat Goursat geeft voor de tweede middelwaardestelling is om den daarin voorkomenden limietovergang te verkiezen boven het bewijs, dat van die stelling bij Serret voorkomt.

Goursat. Cours d'Analyse. Math. I, p. 182, 2e druk.

Serret-Scheffers. Lehrb. der Diff. und Integr. Rechn.
II, p. 48, 3e druk.



