Over de rekening met symbolen en de toepassing daarvan op de integratie van differentiaal-vergelijkingen

I 8

OVER DE

REKENING MET SYMBOLEN

EN DE TOEPASSING DAARVAN OP DE INTEGRATIE VAN DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. T. HALBERTSMA,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag den 14den Junij 1872, des namiddags ten 2 ure,

DOOR

NICOLAAS PIETER KAPTEIJN,

geboren te Barneveld.

UTRECHT. — P. VAN LOON. — 1872.

OPGEDRAGEN AAN MIJNE OUDERS.

Alvorens tot de behandeling van het onderwerp mijner Dissertatie over te gaan, is het mij eene behoefte mijne erkentenis uit te drukken jegens alle Hoogleeraren, wier onderwijs ik heb mogen genieten.

U, Hooggeleerde GRINWIS, geachte Promotor, betuig ik dien dank bovenal voor de groote welwillendheid, waarmede Gij mij ter zijde hebt gestaan, en voor de belangrijke wenken die ik bij de zamenstelling van dit proefschrift van U heb ondervonden.

Ontvangt ook Gij, Hooggeleerde BUIJS BALLOT en HOEK de verzekering mijner innige hoogachting en dankbaarheid voor uwe lessen, die zooveel tot mijne vorming hebben bijgedragen.

Met hooge waardering herdenk ik ook uw onderwijs en vele bewijzen van vriendschap, Hooggeleerde HARTING, die ik in de eerste jaren mijner Akademische studiën vooral heb mogen ondervinden.

Uwe lessen, Hooggeleerde VAN REES, zullen mij een rigtsnoer zijn, indien ik zelf worde geroepen aan anderen onderwijs te geven.

Ten slotte een woord van dank aan U, Hooggel. MULDER, RAUWENHOFF en KERCKHOF voor de welwillendheid mij betoond.

En Gij, mijne vrienden, wier gezellig verkeer mij mijn verblijf aan Utrechts Hoogeschool onvergetelijk heeft gemaakt, — vergunt mij dat ik met den warmsten dank voor Uwe vriendschap, en met de beste wenschen voor Uwe toekomst U vaarwel toeroepe.

Wij scheiden; velen hebben ons reeds verlaten; eerlang hopen wij allen in verschillende werkkringen en in verschillende oorden der wereld werkzaam te zijn. Doch, waarheen het lot ons voere, of welke nieuwe betrekkingen wij aanknoopen, — de herdenking aan de dagen onzer jongelingschap blijve aan ons aller harten dierbaar!

INHOUD.

Het onderwerp waarover dit proefschrift handelt heeft gedurende eene lange reeks van jaren de aandacht van vele wiskundigen getrokken, het schijnt dus niet onbelangrijk de voordeelen die het rekenen met symbolen in de Differentiaal- en Integraal-Rekening, en de Rekening met eindige Differentiën oplevert uit een te zetten; een overzigt van de verschillende methoden daarbij in gebruik zal het eigenaardige dezer rekenwijze nog meer doen uitkomen.

Een kort geschiedkundig overzigt moge der behandeling voorafgaan.

Den grooten Leibnitz komt in dezen de eerste plaats toe. Niet langen tijd na de uitvinding der Differentiaal-Rekening (Acta Eruditorum 1684) toont hij de analogie aan [1]) tusschen de differentialen van alle orden van een product van twee of meer veranderlijken, en de magten derzelfde orde van het binomium of het polynomium, zamengesteld uit de som derzelfde veranderlijken.

---

[1]) Miscellanea Berol. T. I. Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, etc. A^0. 1710.

Eenigen tijd daarna merkt hij dezelfde overeenkomst op tusschen de negatieve magten en de Integralen. [1])

Jean Bernoulli verklaart nog, hoe men in bijzondere gevallen de Integraal van eene gegevene differentiaal kan vinden. [2])

Hiermede zijn voor langen tijd de onderzoekingen gestaakt.

Lagrange vat het onderwerp weder op [3]), en maakt van die analogiën gebruik, om verschillende algemeene theorema's betrekkelijk differentiatie en integratie van functiën van meerdere veranderlijken te ontdekken. De meeste dezer theorema's waren toen geheel nieuw, en volgens andere wegen slechts zeer moeijelijk te verkrijgen.

Hoewel hij de oorzaak niet kent van bovengenoemde analogie tusschen de positieve magten en de differentialen, de negatieve en de integralen, zoo schenkt hij toch volkomen vertrouwen aan hare toepassing, en wel omdat alle conclusiën, á posteriori onderzocht, volkomen waar blijken te zijn.

Van toen af begint men meer opmerkzaamheid te wijden aan de methode welke tot zulke resultaten leidt. Meerdere wiskundigen trachten de theorema's van Lagrange te bewijzen en de rekenwijze gegrond op meergemelde analogiën uittebreiden.

Eene poging van Arbogast [4]) om deze methode te

---

[1]) Commercium Epistolicum. Ep. XVIII.

[2]) Comm. Epist. Ep. XIV.

[3]) Mémoires de l'acad. de Berlin 1772. p. 185.

[4]) Traité du calcul des dérivations et des usages dans la théorie des suites etc. Straszbourg. 1800.

ontheffen van de moeijelijkheden, welke de onophoudelijke overgangen van de exponenten tot de indices der differentialen en omgekeerd medebrengen, geeft op eens een geheel ander voorkomen aan de zaak.

Hij komt op de gelukkige gedachte, om de operatieve symbolen te scheiden van de subjecten waarop zij betrekking hebben, en ze te behandelen als quantitatieve symbolen.

Deze opvatting is stout, en geheel afwijkende van de gewone begrippen; vandaar de ligt te verklaren tegenzin van vele bekende wiskundigen, om deze theorie aantenemen. Volslagen gemis aan bewijs vermeerderde dezen nog.

Niettegenstaande Français [1]) eene poging aanwendt, om in dit gemis te voorzien, en alle zijne resultaten overeenkomen met de uitkomsten, volgens gewone methoden verkregen, is het nog noodig dat eerst vastere grondslagen worden gelegd voor deze theorie, en hare veelzijdige en veelvereenvoudigende werking wordt aangetoond.

Dit doen Lobatto, die in eene reeks verhandelingen [2]) de scheiding der symbolen toepast op allerlei takken der analysis, ontwikkelingen van functiën, differentiaalvergelijkingen, vergelijkingen met eindige Differentiën, reeksen, bepaalde integralen, verder Servois [3]), Murphy [4]),

---

[1]) Annales de Math. pures & appliq. T. III. p. 244. 1811.

[2]) Nieuwe Verh. Kon. Ned. Inst. Dl. VI. 1837.
Verh. der Kon. Akad. v. Wet. Dl. I. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires du premier ordre aux diff. partielles á 4 variables.

[3]) Ann. de Math. vol. V. p. 93.

[4]) Phil. Transact. 1837.

Boole [1]), Gregory [2]), Hargreave [3]), Cayley [4]), Harley [5]) en vele andere wiskundigen.

---

1) Phil. Magazine 1840—50.
Phil. Transact. 1844. 1864.
Cambridge math. Journ. 1847.

2) Transact. Royal Society of Edinburgh. vol. XIV. p. 208. 1838.
Examples of the processes of the Diff. and Integr. Calculus. 1841.

3) Phil. Transact. 1848. p. 31.

4) Manchester Memoirs, vol. XXII. p. 111.

5) Quarterly Journ. of Math. vol. V. p. 337.
Manch. Memoirs, vol. XXII, p. 232.

HOOFDSTUK I.

Algemeene theorie voor het rekenen met symbolen.

---

§ 1. De teekens, welke gebruikt worden om eenvoudige of zamengestelde bewerkingen voor te stellen, welke op eene grootheid (subject) volbragt moeten worden, noemt men operatieve symbolen.

Zij toch drukken op eene zeer verkorte wijze uit, welke operatiën volbragt moeten worden.

Deze symbolen, op zich zelven beschouwd, afgescheiden van hunne subjecten; zijn even als de bewerkingen zelven aan bepaalde wetten onderworpen; de toepassing dezer wetten leidt ons tot rekenwijzen, waarvan de elementen symbolen zijn, — tot de symbolische methoden, of volgens anderen genoemd, de rekenwijze der operatiën, of de methode van de scheiding der symbolen.

Wij volgen hier geen nieuw beginsel, maar eene volkomene gewettigde handelwijze. Wij spreken als het ware eene nieuwe taal, doch zamengesteld uit woorden, welke wel eene andere dan de gewone, maar toch eene bepaalde beteekenis hebben.

Deze methoden zijn van het grootste belang, daar met hare hulp vele en zeer belangrijke theorema's op eene eenvoudige wijze worden bewezen; talrijke zware berekeningen worden overbodig gemaakt, en zij ons leiden tot merkwaardige ontdekkingen.

In de rekening met eindige Differentiën, — de wetenschap, welke zich bezighoudt met de gelijktijdige eindige aangroeijingen van onderling afhankelijke veranderlijken, — en de Differentiaal Rekening, welke de limieten beschouwt, waartoe de redens dier aangroeijingen naderen, als deze laatste oneindig afnemen —, worden deze methoden gebruikt.

Elke bewerking kan men voorstellen door een symbool: vandaar dat het aantal symbolen onbeperkt is. Herinneren wij ons slechts hoe in vroeger tijden de algebra met tallooze symbolische teekens was overladen, waarvan zij nu tot groot gerief der wetenschap is verlost. De beteekenis der symbolen, waarmede wij ons hier zullen bezighouden is algemeen bekend.

Het symbool Δ geplaatst voor u_x, eene functie van x, stelt voor de aangroeijing van die functie, welke overeenkomt met eene gegevene constante aangroeijing Δx van de veranderlijke x.

Eenvoudigheidshalve zullen wij die aangroeijing Δx altijd aannemen gelijk aan de eenheid, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel worde aangegeven.

Zij dus u_x eene willekeurige functie van x, dan volgt uit de bepaling $\Delta u_x = u_{x+\Delta x} - u_x$, evenzoo is in de Differentiaal rekening $d u_x = u_{x+dx} - u_x$.

Het zoeken van Δu_x in de rek. met eind. Differentiën en $d\,u_x$ in de Diff. rek. zijn de fundamentele operatiën. De teekens Δ en d zijn dus ook de fundamentele operatieve symbolen. Laat ons deze twee met nog een derde E, bepaald door de vergelijking

$$E\,u_x = u_x + \Delta\,u_x$$

eerst beschouwen.

Vooraf zullen wij eene grondstelling bewijzen, waarop de symb. methoden geheel berusten.

a. *Stelling.* Elke directe functie van bovengenoemde symbolen en constante grootheden kan behandeld worden alsof die symbolen zelven algebraïsche grootheden waren.

Dezelfde hoofdregels, welke de algebr. grootheden volgen in de zamenstelling van alle rationele en geheele uitdrukkingen, kan men ook bewijzen geldig te zijn voor de operatieve symbolen.

Deze regels zijn de 3 volgende:

1°. Voor de scheiding der grootheden $m(u + v) = mu + mv$.

2°. Voor de omzetting der grootheden $mau = amu$.

3°. Voor de exponenten $m^a\,m^b = m^{a+b}$.

Voor de symbolen bewijst men die als volgt:

$$1°.\quad \Delta\,(u_x + v_x) = \Delta\,u_x + \Delta\,v_x$$

want:

$$\Delta\,(u_x + v_x) = (u_{x+1} + v_{x+1}) - (u_x + v_x) = (u_{x+1} - u_x) + (v_{x+1} - v_x) = \Delta\,u_x + \Delta\,v_x.$$

2°. $\Delta\,a\,u_x = a\,u_{x+1} - a\,u_x = a\,(u_{x+1} - u_x) = a\,\Delta\,u_x$.

3°. $\Delta^m\,\Delta^n\,u_x = (\Delta\,\Delta \cdots m \text{ fact})(\Delta\,\Delta \cdots n \text{ fact})\,u_x = \Delta\,\Delta \cdots (m + n) \text{ fact } u_x = \Delta^{m+n}\,u_x$.

Voor E gelden dezelfde regels, dus ook dezelfde gevolgen.

Uit de diff. rek. weten wij:

$$d(u + v) = du + dv.$$
$$dau = adu.$$
$$d^n d^m u = d^{n+m} u.$$

Daar Δ, E en d aan dezelfde verbindingswetten gehoorzamen als constante grootheden, is het duidelijk, dat wij ze als zoodanig kunnen behandelen; dus afscheiden van hunne subjecten; met elkander en met constante grootheden verbinden; omzetten; enz. mits men altijd in het oog houde, welke hunne ware beteekenis zij.

Gregory geeft de gronden van de symbolische methoden aan in deze woorden:

«Er zijn een aantal theorema's in de gewone algebra, welke, hoewel schijnbaar alleen voor symbolen, getallen voorstellende, bewezen, eene veel wijdere toepassing veroorloven.

Die theorema's welke alleen steunen op de verbindingswetten, waaraan de symbolen onderworpen zijn, zijn daarom waar voor alle symbolen, welke ook hunne natuur zij, mits zij aan dezelfde verbindingswetten gehoorzamen.» [1])

Het schijnt ons niet overbodig, vooral wat aangaat de onderlinge betrekking der symbolen, deze algemeene stelling door een paar bewijzen te versterken. Uit de stelling volgt:

$$\Delta E u_x = E \Delta u_x.$$

Eenvoudig bewijst men hetzelfde aldus:

$$\Delta u_x = E u_x - u_x.$$

[1]) Gregory. Examples, Ch. XV. p. 237. 1846.

Verander x in x + 1:

$\Delta\, u_{x+1} = E\, u_{x+1} - u_{x+1} = E\, u_{x+1} - E\, u_x =$
$E\, (u_{x+1} - u_x) = E\, \Delta\, u_x \therefore \Delta\, E\, u_x = E\, \Delta\, u_x.$

Eveneens zou men kunnen bewijzen:

$$\mathrm{d}\, \Delta\, E = \mathrm{d}\, E\, \Delta = \Delta\, \mathrm{d}\, E = \Delta\, E\, \mathrm{d} = \text{enz.}$$

$$E\, u_x = u_x + \Delta\, u_x$$

geeft aanleiding, als men de symbolen van de subjecten scheidt, en de beide leden der vergelijking door het subject u_x deelt, tot de symbolische relatie:

$$E = 1 + \Delta \text{ en daaruit } E^n = (1 + \Delta)^n.$$

Hetzelfde verkrijgen wij ook nog op de navolgende wijze:

$$E\, u_x = u_{x+1} = u_x + \Delta\, u_x$$
$$E\, (E\, u_x) = u_{x+2} = u_{x+1} + \Delta\, u_{x+1}$$
$$= u_x + \Delta\, u_x + \Delta\, (u_x + \Delta\, u_x)$$
$$E^2\, u_x = (1 + \Delta)^2\, u_x.$$

En op dezelfde wijze in 't algemeen:

$$E^n\, u_x = (1 + \Delta)^n\, u_x.$$

Wij zien hieruit tevens de beteekenis der exponenten. Zij wijzen het aantal herhalingen der operatie aan, doch volgen dezelfde wetten, alsof het ware exponenten zijn.

Dit zij voldoende om overtuigd te zijn van de waarheid der stelling.

b. Voor het geval dat genoemde symbolen in den loop der bewerking een' negatieven exponent krijgen, neme men het navolgende in aanmerking.

Het symbool $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ en elke magt daarvan, stelt eene bepaalde bewerking voor, evenzoo Δ, E en hunne magten, wij noemen die daarom «directe» operatieve symbolen.

Zijn zij echter voorzien van negatieve exponenten, dan zijn de daarmede bedoelde operatiën niet onmiddellijk te voltrekken; doch wij hebben de volgende beschouwing:

De directe operatie $\frac{d}{dx}$ wordt, zooals wij uit de relatie

$$\frac{d}{dx} \cdot \left.\frac{d}{dx}\right)^{-1} = \left.\frac{d}{dx}\right)^{\circ} = 1$$

zien, geheel opgeheven door $\left.\frac{d}{dx}\right)^{-1}$.

Wij noemen daarom $\left.\frac{d}{dx}\right)^{-1}$ en alle dergelijken «inverse» operatieve symbolen.

$\left.\frac{d}{dx}\right)^{-1}$ heeft dus dezelfde beteekenis als $\int dx$, want uit

$\frac{du}{dx} = X$ volgt: $\quad u = \int X\, dx$

en ook symbolisch $u = \left.\frac{d}{dx}\right)^{-1} X$

dus ook $\left.\frac{d}{dx}\right)^{-1} = \int dx.$

en daar $\left.\frac{d}{dx}\right)^{n} \left.\frac{d}{dx}\right)^{-n} = 1$, zoo is ook $\left.\frac{d}{dx}\right)^{-n} = {}^{n}\!\!\int dx^{n}.$

Immers:

$$\left.\frac{d}{dx}\right)^{-n} \cdot \left.\frac{d}{dx}\right)^{m} = \left.\frac{d}{dx}\right)^{m-n}.$$

Ook is ${}^{n}\!\!\int dx^{n}.\ \left.\frac{d}{dx}\right)^{m} = {}^{n}\!\!\int \left.\frac{d}{dx}\right)^{n} dx^{n} \left.\frac{d}{dx}\right)^{m-n} = \left.\frac{d}{dx}\right)^{m-n}$

$$\therefore {}^{n}\!\!\int dx^{n} = \left.\frac{d}{dx}\right)^{-n}$$

In de rekening met eindige differentiën wordt het inverse van de operatie Δ dus Δ^{-1} ook integratie genoemd en meest aangeduid door het teeken Σ.

Wordt dus gevraagd, u_x te integreren, dan moet men zoodanige functie v_x van x zoeken, dat:

$$\Delta v_x = u_x \text{ of } \Delta^{-1} u_x = \Sigma u_x = v_x \text{ is.}$$

Zamengestelde inverse symbolen missen evenzeer het directe karakter.

Hoe de bewerkingen, daarmede bedoeld, volbragt worden, zullen wij later zien.

c. Indien men op eene functie verscheidene operatiën moet voltrekken, bv. a, bΔ, c d, fΔ^2 enz., dan kunnen wij de som dezer operatiën door één symbool vervangen, en noemen dit dan eene zamengestelde symbool. Zoo is in

$$P u_x = a u_x + b \Delta . u_x + c d u_x + f \Delta_2 u_x + \text{enz.}$$

P een zamengesteld symbool. Blijkbaar zullen de zamengestelde symbolen aan dezelfde wetten onderworpen zijn, als de enkelvoudige, daar al hunne onderdeelen zich gedragen als constante grootheden.

Zamengestelde symbolen van den vorm

$\Delta^2 + 2 a \Delta + a^2$ kan men dan ook in de gedaante schrijven, $(\Delta + a)(\Delta + a)$ of $(\Delta + a)^2$. Evenzoo

$\Delta^2 + (a+b)\Delta + ab = (\Delta + a)(\Delta + b) = (\Delta + b)(\Delta + a)$,

en in 't algemeen

$\Delta^n + a_1 \Delta^{n-1} + a_2 \Delta^{n-2} \ldots + a_n = (\Delta + a')(\Delta + a'') \ldots (\Delta + a^n)$

waarin a', a'', ... a^n. de wortels voorstellen van de vergelijking $m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_n = o$.

De orde waarin de factoren van het tweede lid voorkomen, is willekeurig. Uitdrukkingen in $\frac{d}{dx}$ en E kunnen op dezelfde wijze herleid worden.

Deze transformatiën hebben buiten hare practische waarde nog dit voordeel, dat vele zamengestelde operatiën op zeer verkorte wijze kunnen worden voorgesteld. B. v.:

$$(1 + \Delta + \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{2.3}\Delta^3 + \text{enz.})\, u_x = (e^{\Delta})\, u_x$$

$$(1 - \tfrac{1}{2} E^2 + \tfrac{1}{2.3.4} E^4 - \text{enz.})\, u_x = u_x - \tfrac{1}{2}\, u_{x+2}$$
$$+ \tfrac{1}{2.3.4}\, u_{x+4} - \text{enz.} = (\cos E)\, u_x$$
$$(1 + n\, d + \tfrac{n(n-1)}{2}\, d^2 + \text{enz.})\, u_x = (1 + d)^n\, u_x.$$

Tusschen Δ en E bestaat, zooals reeds is aangetoond, een zeer naauw verband, uitgedrukt door de vergelijking $\Delta + 1 = E$.

De relatie tusschen deze twee en $\frac{d}{dx}$ is ook te vinden.

Schrijven wij daartoe het theorema van Taylor in symbolischen vorm:

$$f(x+1) = f(x) + \frac{d}{dx} f(x) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} f(x) + \text{enz.}$$

$$E\, f(x) = \left(1 + \frac{d}{dx} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \text{enz.}\right) f(x), \text{ en hieruit}$$

$$E = 1 + \frac{d}{dx} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \text{enz.} = e^{\frac{d}{dx}} = 1 + \Delta.$$

Lagrange bewijst ditzelfde op eene geheel andere wijze, doch ook met behulp van het theorema van Taylor [1].

Het is niet onbelangrijk, nategaan, op welke wijze Lobatto komt tot deze merkwaardige betrekking [2]).

Zij u_x eene functie van x. Dan is $u_x = E^x u_0$, waarin x wel niet een ware exponent is, maar toch geheel als

---

[1]) Mémoires de l'Acad. royale de Berlin. 1772. p. 185.

[2]) Nieuwe verh. Kon. Ned. Inst. dl. VI. bl. 10. 1837.

zoodanig kan behandeld worden. Differentieert men deze vergelijking ten opzigte van x, dan verkrijgen wij, in het oog houdende dat

$$d\,c\,a^x = c\,a^x\,l\,a.\,d\,x,$$

$$\frac{d}{dx}\,u_x = \frac{d}{dx}.\,E^x\,u_0,$$

u_0 is nu eene constante, E^x eene variabele grootheid dus

$$\frac{d}{dx}\,E^x\,u_0 = l\,E.\,E^x\,u_0 = l\,E.\,u_x;$$

en hieruit de symb. relatie

$$\frac{d}{dx} = l\,E \text{ en dus } e^{\frac{d}{dx}} = E = 1 + \Delta$$

Lobatto heeft de veranderlijkheid van de functie overgebragt op het symbool, waardoor dit eene ware functie van x wordt, en dientengevolge kan gedifferentieerd en geïntegreerd worden, in 't algemeen alle operatiën kan ondergaan, die men op veranderlijke grootheden kan toepassen. De wettigheid van deze handelwijs kan wel door geen streng bewijs gestaafd worden, doch de resultaten, getoetst aan die, welke men op andere wijzen verkregen heeft, pleiten voor hare consequente toepassing.

Wij vinden toch onmiddelijk door toepassing dezer relatie $E = e^{\frac{d}{dx}}$, het theorema van Taylor:

$$u_{x+h} = E^h\,u_x = e^{h\frac{d}{dx}}\,u_x = \left\{1 + h\frac{d}{dx} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \right\}u_x.$$

Ook het theorema van Maclaurin:

$$u_x = E^x\,u_0 = e^{x\frac{d}{dx}}\,u_0 = \left\{1 + x\,\frac{d}{dx} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \right\}u_0.$$

§ 2. *Ontwikkeling van functien met ééne veranderlijke.*

a. Met behulp van deze symbolische betrekkingen kunnen wij al aanstonds op eenvoudige wijze tot een aantal formules geraken, waarvan velen op de gewone wijze slechts zeer moeijelijk te vinden zijn.

Uit de talrijke voorbeelden, welke hiervan te geven zijn, zullen wij slechts eenige der voornaamste en meest bekende beschouwen.

Vele der volgende formulen waren reeds gegeven door Laplace [1]), Stirling [2]), Lagrange, Euler, en anderen voordat de rekening met de symbolen afgescheiden van hunne subjecten vele vorderingen had gemaakt.

Ontwikkel u_{x+n} in eene reeks bestaande uit u_x en zijne opeenvolgende differentiën.

$u_{x+1} = E\,u_x\,,\ u_{x+2} = E^2\,u_x$, enz.

$$u_{x+n} = E^n\,u_x = (1 + \Delta)^n\,u_x$$

$$= \left(1 + n\,\Delta + \frac{n\,(n-1)}{1.\,2}\,\Delta^2 + \right)u_x$$

$$= u_x + n\,\Delta\,u_x + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\Delta^2\,u_x +$$

Evenzoo vindt men:

$$u_{x-n} = u_n - n\,\Delta\,u_x + \frac{n\,(n+1)}{2}\,\Delta^2\,u_x -$$

Geef eene uitdrukking voor $\Delta^n\,u_x$ in u_x en zijne opeenvolgende waarden.

$\Delta\,u_x = (E - 1)\,u_x$

$\Delta^n\,u_x = (E - 1)^n\,u_x$

---

[1]) Théorie Analytique des Probabilités. 1814.

[2]) Tract. de summatione & interpol. Serierum infinitarum.

$$= \left(E^n - n E^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} E^{n-2} - \right) u_x$$

$$= u_{x+n} - n u_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{2} u_{x+n-2} - \cdots (-1)^n u_x$$

$\varDelta^n u_x$ wordt ontwikkeld in de differentiaal coefficienten van u_x als volgt:

$$\varDelta = e^{\frac{d}{dx}} - 1$$

$$\varDelta^n = (e^{\frac{d}{dx}} - 1)^n$$

Daar $(e^t - 1)^n = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2.3} + \right)^n$

$$= t^n + A_1 t^{n+1} + A^2 t^{n+2} +$$

$$\therefore \varDelta^n u_x = \left(\frac{d}{dx}\right)^n u_x + A_1 \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} u_x +$$

b. Tot hiertoe heeft het symbool $\varDelta$ de eindige Differentie voorgesteld, welke overeenkomt met eene aangroeijing van x, gelijk aan de eenheid. Maar indien $\varDelta\ x = n$ wordt, dan zal de vergelijking $\varDelta = E - 1$ veranderen in $\varDelta_n = E^n - 1$. En dus volgt:

$$\varDelta_n^r u = (E^n - 1)^r u = (e^{n\frac{d}{dx}} - 1)^r u$$

De betrekking welke er bestaat tusschen de grootheden $\varDelta$, $\varDelta^n$, E en E_n kan men voorstellen door de navolgende formulen.

$$E^n = (1 + \varDelta_n) = e^{n\frac{d}{dx}}, E = 1 + \varDelta = e^{\frac{d}{dx}}$$

hieruit $E = (1 + \varDelta^n)^{\frac{1}{n}}$ en $E^n (1 + \varDelta)^n$ dus

$$\varDelta = E - 1 = (1 + \varDelta_n)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

$$\varDelta_n = E^n - 1 = (1 + \varDelta)^n - 1.$$

$$e^{\frac{d}{dx}} = E = 1 + \varDelta = (1 + \varDelta_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Door middel van deze formule kan men de differentie van elke orde uitdrukken in eene functie der differentiaal coefficienten van hooger orden. Bijv.

De eindige diff. van $a^x u$ zal, als de aangroeijing van x gelijk n is, wezen:

$$\varDelta_n a^x u = a^{x+n} u_n - a^x u = a^x (a^n E^n - 1) u.$$

Indien men hierin voor u eene nieuwe functie $a^n u_n - u = (a^n E^n - 1) u$ substitueert, dan verandert de verg. in:

$$\varDelta_n a^x (a^n E^n - 1) u = \varDelta_n{}^2 a^x u = a^x (a^n E^n - 1)^2 u.$$

Herhaalt men dezelfde bewerking, dan verkrijgt men de algemeene formule:

$$\varDelta_n^r a^x u = a^x (a^n E^n - 1)^r u = a^x (a^n e^{n\frac{d}{dx}} - 1)^r u. \qquad \text{(a)}$$

Neemt men r negatief, dan volgt hieruit: (zie bl. 11)

$$\Sigma_n^r a^x u = a^x (a^n E^n - 1)^{-r} u = a^x (a^n e^{n\frac{d}{dx}} - 1)^{-r} u. \text{(b)}$$

Differentieert men hetzelfde product, dan verkrijgt men:

$$\frac{d}{dx} a^x u = a^x \frac{d}{dx} u + a^x u \, l\, a = a^x \left(\frac{d}{dx} + l\, a\right) u.$$

$$= a^x (l\, E + l\, a) u = a^x l\, (a E) u.$$

en in 't algemeen:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n a^x u = a^x (l\,(a E))^n u = a^x \left\{l\, a\, (1 + \varDelta)\right\}^n u \text{ (c); en ook}$$

$$^n\!\!\int a^x u\, dx^n = a^x \left\{l\, a\, (1 + \varDelta)\right\}^{-n} u. \qquad \text{(d)}$$

Deze 4 formulen zijn het eerst door Laplace gegeven; blijkbaar moeten wij (b) en (d) door zulk eene functie φ (x) aanvullen,

dat $\left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi(x) = 0$; dus

$$\varphi(x) = a + b x + c x^2 + \cdots + p x^{n-1}.$$

Eene merkwaardige formule verkrijgt men nog op de navolgende wijze:

$E^{\xi} = 1 + \Delta_{\xi}$, en $E^{\theta} = 1 + \Delta_{\theta}$.

(Ten einde verwarring te voorkomen voeren wij hier de notatiën Δ_{ξ} en Δ_{θ} in)

$E^{\theta} = (E^{\xi})^{\frac{\theta}{\xi}} = (1 + \Delta_{\xi})^{\frac{\theta}{\xi}} = 1 + \Delta_{\theta}$. Waaruit volgt:

$\Delta^{n}_{\theta} = \left\{(1 + \Delta_{\xi})^{\frac{\theta}{\xi}} - 1\right\}^{n}$.

Vermenigvuldigt men beide leden met eene functie van de variabele, dan is dat de interpolatie formule van Lagrange [1]) welke de oplossing bevat van de vraag:

«Gegeven de differentie van eene functie voor eene bepaalde aangroeijing (ξ) van de veranderlijke, bepaal dan de differentie van eene willekeurige orde voor eene andere aangroeijing ϑ der veranderlijke.»

Wij zullen ter opheldering hiervan een eenvoudig voorbeeld geven, en kortheidshalve de differentie *eerste* orde zoeken voor eene nieuwe aangroeijing ϑ.

Zij gevraagd log. 3.14159 = ?
en gegeven log. 3.14 = . 4969296
log. 3.15 = . 4983106
log. 3.16 = . 4996871
log. 3.17 = . 5010593
log. 3.18 = . 5024271

Hierin is dus $\xi = .01$, $\vartheta = .00159$ — Nemen wij liever $\xi = 1$ dus $\vartheta = .159$.

Uit deze gegevens volgen aanstonds de waarden voor $\Delta_{\xi}, \Delta^{2}_{\xi}$ enz.

1) Mém. de l'Acad. de Berlin. 1772. p. 207.

Δ_ξ	13810	13765	13722	13678
Δ_ξ^2	—45	—43	—44	
Δ_ξ^3	2	—1		
Δ_ξ^4	—3			

Volgens de formule $\Delta_\theta = -1 + 1 + \frac{\theta}{\xi}\Delta_\xi + \frac{\theta(\theta-\xi)}{\xi^2.2}\Delta_\xi^2 + \frac{\theta(\theta-\xi)(\theta-2\xi)}{\xi^3 2.3}\Delta_\xi^3 +$

$$\Delta_\theta = .159\times 13810 + \frac{.159(.159-1)}{2}(-45) + \frac{.159(.159-1)(.159-2)}{2.3}\,2 +$$
$$= 2195.790 \quad + \quad 3.008655 \quad + \quad .082058893$$
$$= 2198.88$$

$\therefore \log 3.14159 \quad = \quad .\,4969296 \;+\; .\,0002198.88.. \;=\; .\,4971495$

Uit de fundamentele vergelijking $u_{x+a} = E^a u_x$ volgt aanstonds

$$\Delta_a u_x = u_{x+a} - u_x = (E^a - 1)\, u_x.$$

Stelt men voor $E^a - 1$ de factoren $(E^{\frac{a}{2}} - E^{-\frac{a}{2}})$ en $E^{\frac{a}{2}}$, dan is $\Delta_a u_x = (E^{\frac{a}{2}} - E^{-\frac{a}{2}})\, u_{x+\frac{a}{2}}$, waaruit men besluit:

$$\Delta_a^n u_x = (E^{\frac{a}{2}} - E^{-\frac{a}{2}})^n u_{x+\frac{na}{2}}$$
$$= (e^{\frac{a}{2}\frac{d}{dx}} - e^{-\frac{a}{2}\frac{d}{dx}})^n u_{x+\frac{na}{2}}$$

Deze formule is door Laplace verkregen door middel van genererende functiën [1]).

Maakt men nog $a = 1$, en vervangt men $x + \frac{n}{2}$ door x, dan wordt deze formule:

$$\Delta^n u_{x-\frac{n}{2}} = \left(e^{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}} - e^{-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}}\right)^n u_x. \qquad (a)$$

---

[1]) Théor. Anal. des Prob. p. 41.

Deze leidt ons tot eene zeer merkwaardige reeks, welke wij te danken hebben aan Stirling.

In aanmerking nemende dat $\sin(\varphi\sqrt{-1}) = \dfrac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2\sqrt{-1}}$, volgt, indien men i schrijft voor $\sqrt{-1}$

$$e^{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}} - e^{-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}} = -2\,i\sin\frac{i}{2}\frac{d}{dx}.$$

Stelt men nu in (a) 2n in plaats van n, dan wordt die formule:

$$\Delta^{2n} u_{x-n} = \pm\left(2\sin\frac{i}{2}\frac{d}{dx}\right)^{2n} u_x \quad \left(\text{voor n even} +, \text{ en n oneven} -\right) \qquad \text{(b)}$$

Vervangt men nu in de twee bekende ontwikkelingen: [1])

$$\cos 2nx = 1 - \frac{n^2}{2}(2\sin x)^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{2.3.4}(2\sin x)^4 -$$

$$\sin 2nx = n\sin 2x\left(1 - \frac{n^2-1}{2.3}(2\sin x)^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-4)}{2.3.4.5}(2\sin x)^4 - \right)\cos 2x$$

x door $\frac{i}{2}\frac{d}{dx}$, dan geeft de eerste reeks eene ontwikkeling van den symbolischen vorm $\cos in\frac{d}{dx}$. Men zal, als men die symbolische operatie toepast op u_x, en acht geeft op (b), verkrijgen:

$$\cos\left(in\frac{d}{dx}\right)u_x = u_x + \frac{n^2}{2}\Delta^2 u_{x-2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2.3.4}\Delta^4 u_{x-4} +.$$

Op dergelijke wijze vindt men:

$$-i\left(\sin in\frac{d}{dx}\right)u_x = \frac{n}{2}\left\{\Delta u_{x-1} + \Delta u_x + \frac{n^2-1}{2.3}\left(\Delta^3 u_{x-2} + \Delta^3 u_{x-1}\right) + \right\}$$

---

[1]) Verdam. Summarium der Goniom. & vlakke Trigon. p. 37. de twee formulen I. A· waarin men n vervangt door 2n.

Daar nu

$$\cos in\frac{d}{dx} - i \sin in \frac{d}{dx} = e^{n\frac{d}{dx}} = E^n \text{ is},$$

geeft de som dezer beide laatste vergelijkingen:

$$E^n u_x = u_{x+n} = u_x + \frac{n^2}{2} \Delta^2 u_{x-1} +$$

$$+\frac{n}{2}\left\{\Delta\left(u_{x-1} - u_x\right) + \frac{n^2-1}{2.3}\Delta^3\left(u_{x-2} + u_{x-1}\right) + .\right\}$$

Stelt men hierin $x = o$ dan komt deze formule nagenoeg overeen met die van Stirling [1]).

Laplace heeft ook van deze formulen een bewijs gegeven, door de methode der genererende functiën.

Vergelijkt men dit met bovengenoemd bewijs, dan is er geen twijfel aan, of ons bewijs wint het ver in kortheid en duidelijkheid. Kortom, de betrekkingen $E = 1 + \Delta = e^{\frac{d}{dx}}$ geven aanleiding tot zoovele algemeene theorema's als men verkiest.

Een andere bron, even rijk in hare toepassingen, zijn de vergelijkingen tusschen constante grootheden. Wij hebben er in het laatste bewijs reeds gebruik van gemaakt. Een enkel voorbeeld is dus voldoende, om de bewerking te verduidelijken.

Nemen wij bv. de formule [2]).

$$\frac{\pi}{4} a = \sin a - \frac{1}{3^2} \sin 3a + \frac{1}{5^2} \sin 5a - ;$$

zet men deze onder den exponentiëlen vorm, en wordt bovendien $a\sqrt{-1}$ vervangen door $\frac{d}{dx}$, dan volgt daaruit,

1) Tract. Summ. & Interp. Ser. Inf. p. 105.

2) Verdam. Summ. der Goniom. en der Regtl. Trigon. p. 60. 201 b.

omdat $e^{\frac{d}{dx}} = E$ is,

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx} = (E - E^{-1}) - \frac{1}{3^2}(E^3 - E^{-3}) + \frac{1}{5^2}(E^5 - E^{-5}) -$$

Vermenigvuldig beide leden met eene functie van x.

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}u_x = (u_{x+1} - u_{x-1}) - \frac{1}{3^2}(u_{x+3} - u_{x-3}) +$$

Maak hierin bv. $u_x = x$, dan verkrijgt men aanstonds de bekende formule van Leibnitz.

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$$

Deze formule op geheel andere wijze gevonden regtvaardigt dus de handelwijze welke wij hier hebben gevolgd.

Door andere waarden aan u_x te geven, krijgt men andere formulen.

Vervangt men bv. $a\sqrt{-1}$ door $h\frac{d}{dx}$ dan is:

$$\frac{\pi}{2}h\frac{d}{dx} = e^{h\frac{d}{dx}} - e^{-h\frac{d}{dx}} - \frac{1}{3^2}\left(e^{3h\frac{d}{dx}} - e^{-3h\frac{d}{dx}}\right) - \text{en}$$

$$\frac{\pi}{2}h\frac{d}{dx}\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x-h) - \frac{1}{3}\left\{\varphi(x+3h) - \varphi(x-3h)\right\} +$$

Op geheel dezelfde wijze verkrijgt men uit de formule:

$$\frac{1}{2} = \cos a - \cos 2a + \cos 3a - \cos 4a +$$

$$\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x+2h) + \varphi(x+3h) -$$
$$+ \varphi(x-h) - \varphi(x-2h) + \varphi(x-3h) -$$

§ 3. *Ontwikkelingen van functiën met twee of meer veranderlijken.*

Het zou ons te ver leiden, indien wij hiervan zoo talrijke voorbeelden aanhaalden als van de ontwikkelingen van functiën met éene veranderlijke.

Wij zullen ons dus vergenoegen, de voornaamste relatiën tusschen de verschillende symbolen op te sporen, en enkele zeer bekende ontwikkelingen symbolisch volbrengen.

Stelt $u_{x.y}$ eene functie van x en y voor, dan kan men, de symbolische notatie van hierboven volgende, ook schrijven:

$$u_{x.y} = E^x u_{o.y} \text{ en } u_{x.y} = E^y u_{x.o}.$$

In de eerste vergelijking heeft E alleen betrekking op de veranderlijke x, in de tweede alleen op y.

Ten einde alle verwarring te voorkomen, maakt men aan het symbool zelf ook wel kenbaar, op welke veranderlijke het betrekking heeft. Zoo beteekent de uitdrukking $E_x u_{x.y}$ dat E alleen betrekking heeft op x en niet op y. E_y alleen op y.

De bovengenoemde vergelijkingen worden volgens deze schrijfwijze:

$$u_{x.y} = E_x^x u_{o.y}\,;\; u_{x.y} = E_y^y u_{x.o}\,;\; u_{x.y} = E_x^x . E_y^y u_{o.o}.$$

Differentieert men de beide eerste dezer drie vergelijkingen, dan volgt daaruit, daar $d.a^x = la.a^x.dx$.

$$\frac{d}{dx} u = l(E_x) E_x^x u_{o.y} = (l E_x) u \quad (u = u_{x\,y});$$

en dus is $e^{\frac{d}{dx}} = E_x$. Eveneens $e^{\frac{d}{dy}} = E_y$.

Wij kunnen nu aantoonen, wat $u_{x.y}$ wordt voor willekeurige aangroeijingen van x en y.

$$u_{x+h,\, y+k} = E_x^h \,.\, E_y^k\, u_{x.y} = e^{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}}\, u_{x.y}.$$

$$= \left\{ 1 + \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right)^2 + \right\} u_{x.y}$$

Dit is juist het theorema van Taylor, toegepast op eene functie van twee veranderlijken.

Het theorema van Maclaurin volgt uit:

$$u_{x.y} = e^{x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}}\, u_{o.o}.$$

Het is duidelijk, dat dezelfde redenering kan gevolgd worden voor een willekeurig aantal veranderlijken, en tevens dat de wijze, waarop men de symbolische vergelijkingen verkrijgt, overeenkomt met die, welke wij volgden bij functiën met éene veranderlijke.

Zoo is bv. de Interpolatie formule:

$$\Delta^{m.n}_{\theta.\omega} u_{x.y} = \left\{ (1 + \Delta_\xi)^{\frac{\theta}{\xi}} - 1 \right\}^m \left\{ (1 + \Delta_\nu)^{\frac{\omega}{\nu}} - 1 \right\}^n u_{x.y}$$

geheel op dezelfde wijze te vinden, als de formule op bl. (17.)

Zijn u en v functiën van x, dan is:

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Accentueren wij nu het symbool $\frac{d}{dx}$, dat betrekking heeft op de veranderlijke in v, om het te onderscheiden van $\frac{d}{dx}$, dat alleen werkt op x in u, dan schrijven wij:

$\frac{d}{dx}(uv) = \left(\frac{d}{dx} + \frac{d^1}{dx}\right) uv$; en dus ook:

$$\left.\frac{d}{dx}\right)^n uv = \left(\frac{d}{dx} + \frac{d^1}{dx}\right)^n uv.$$

$$= v\left.\frac{d}{dx}\right)^n u + n\frac{d}{dx}\, v\left.\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{2}\left.\frac{d}{dx}\right)^2 v\left.\frac{d}{dx}\right)^{n-2} u +$$

Dit is het theorema van Leibnitz; door inductie verkreeg hij deze formule voor geheele exponenten; doch zij is altijd waar hetzij n geheel of gebroken, positief of negatief is.

Dit theorema kan uitgebreid worden op het product van een willekeurig aantal functiën, en het resultaat geschreven worden:

$$\left.\frac{d}{dx}\right)^n (uvw..) = 1\,2.3.n\,\Sigma\left\{\frac{\left.\frac{d}{dx}\right)^\alpha u.\left.\frac{d}{dx}\right)^\beta v.\left.\frac{d}{dx}\right)^\gamma w\ldots}{1.2\ldots\alpha.\,1.2\ldots\beta.\,1.2\ldots\gamma\ldots}\right\}.$$

hierin $\alpha + \beta + \gamma + \quad = n$

Als n negatief is in het theorema van Leibnitz:

$$\left.\frac{d}{dx}\right)^{-n} uv = {}^n\!\!\int uv\,dx^n, \text{ en dus}$$

$${}^n\!\!\int uv\,dx^n = v\,{}^n\!\!\int u\,dx^n - n\frac{dv}{dx}\,{}^{n+1}\!\!\int u\,dx^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}\left.\frac{d}{dx}\right)^2 v\,{}^{n+2}\!\!\int u\,dx^{n+2} -,$$

Dit is de algemeene formule voor integratie bij gedeelten, en stellen wij hierin u = 1, dan is:

$${}^n\!\!\int u\,dx^n = \frac{x^n}{1.2..n}$$

$${}^n\!\!\int v\,dx^n = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{x}{n}v - \frac{n.x^2}{n(n+1)}\frac{dv}{dx} + \frac{n(n+1)}{2.n(n+1)}\frac{x^3}{(n+2)}\frac{d^2v}{dx^2} - \right)$$

en voor n = 1,

$$\int v\,dx = xv - \frac{x^2}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2v}{dx^2} -,$$

de serie van Jean Bernoulli [1]).

---

[1]) Nova acta Erud. Lips. 1694. Mém. de Berlin 1772. p. 221.

Tot dezelfde formule geraken wij door in de bekende formule

$$\int u\,dx = ux - \int x\,du$$

den laatsten term van het tweede lid:

$\int x\,du = \int x \frac{du}{dx}\,dx$ bij gedeelten te integreren.

Op vrij gemakkelijke wijze komt men ook door de theorie der symbolen tot het algemeene theorema van Laplace, over de ontwikkeling van functiën; als bijzonder geval is daarin opgesloten het theorema van Lagrange [1]).

Zij $u = F(a + xz)$, waarin z eene willekeurige functie is van u.

Differentieert men u ten opzigte van de grootheden a en x, dan ziet men, dat:

$$\frac{du}{dx} = z\frac{du}{da}$$

waaruit de symbolische vergelijking:

$$\frac{d}{dx} = z\frac{d}{da}. \qquad \text{(a)}$$

omdat echter

$$du = \left(\frac{d}{dx}\,dx + \frac{d}{da}\,da\right)u \text{ is,}$$

$$\therefore z\,du = \left(z\frac{d}{dx}\,dx + z\frac{d}{da}\,da\right)u;$$

of tengevolge van (a),

$$z\,du = \left(z^2\frac{d}{da}dx + \frac{d}{dx}\,da\right)u.$$

---

[1]) Zooals wij weten was Lagrange de ontdekker. Mémoires de Berlin 1768 p. 251; Laplace heeft het uitgebreid. Mém. de l'Acad des Sciences. 1777 p. 99.

Dewijl het eerste lid eene exacte differentiaal is, moet het tweede het ook zijn, en dus:

$$\frac{d}{da}\left(z^2\frac{d}{da}\right) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2;$$

en zoo voortgaande komt men tot het resultaat:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u = \left(\frac{d}{da}\right)^{n-1}\left(z^n \frac{d}{da}\right) u.$$

Maakt men nu gebruik van het theorema van Maclaurin:

$$u = u_o + x \left.\frac{du}{dx}\right)_o + \frac{x^2}{2}\left.\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_o +$$

Hierin de waarden substituërende van $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$ enz. verkrijgt men:

$$u = F(a) + x\, z \left.\frac{du}{da}\right)_o + \frac{x^2}{2}\frac{d}{da}\left(z^2 \left.\frac{du}{da}\right)_o\right) + \quad [1].$$

§ 4. De theorie der symbolen kunnen wij ook met vrucht toepassen op onderzoekingen, welke eigenlijk op het gebied der Integraal-Rekening te huis behooren. Met een eenvoudig voorbeeld zullen wij dit ophelderen.

Wij kunnen de quadratuur van elke kromme, of de waarde van $\int y\, dx$ tusschen de grenzen $x = o$ en $x = n$, bij benadering bepalen, welke ook de functie y zij, door middel der bijzondere waarden van y, welke overeenkomen met $x = 0, 1, 2 \ldots$

Hoe men in deze hypothese $\int_o^n y_x\, dx$ kan benaderen

[1]) De Morgan. Calculus. p. 170. 1842.

zonder integreren, ziet men, indien $\int y_x\,dx$ symbolisch geschreven wordt.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} E^x y_0 = \frac{E^x}{l\,E}\,y_0 = \frac{(1+\Delta)^x}{l\,(1+\Delta)}\,y_0.$$

Deze waarde, genomen tuschen de grenzen $x = o$ en

$$x = n,\ \text{geeft}\ \frac{(1+\Delta)^n - 1}{l\,(1+\Delta)}\,y_0.$$

Deze symbolische uitdrukking moet men nu volgens de positieve magten van Δ ontwikkelen, doch daarbij in het oog houden, dat de vergelijking der parabolische kromme hoogstens van den n^{den} graad is, en dat daarom de eindige differentiën van hooger orde dan de n^{de} allen verdwijnen.

De ontwikkeling zal van den vorm zijn:

$$a_0 + a_1\,\Delta + a_2\,\Delta^2 \ldots . + a_n\,\Delta^n.$$

De coefficiënten a_0, $a_1 \ldots a_n$ verkrijgt men uit de vergel:

$$\frac{n\,\Delta\left\{1 + \frac{n-1}{2}\,\Delta + \frac{(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\,\Delta^2 + \ldots \frac{1}{n}\Delta^{\,n-1}\right\}}{\Delta\left(1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{3} - \qquad\right)} = a_0 + a_1\,\Delta + \text{--}\ a_n\,\Delta^n$$

Vermenigvuldig beide leden met den noemer van het eerste lid.

Men kan dan n vergelijkingen verkrijgen ter bepaling der n coefficiënten, door de coeffic. van dezelfde magten van Δ in beide leden gelijk te stellen. Dus:

$$a_0 = n.$$

$$a_1 - \frac{1}{2}\,a_0 = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

$$a_2 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_0 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} - \ldots \pm \frac{1}{n+1}a_0 = 0.$$

Voor elke waarde van n vindt men hieruit een stel bepaalde coefficiënten;

$$\therefore \int_0^n y_x\,dx = (a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2 + \quad)\,y_0.$$

Of, indien men de symbolen Δ nog vervangt door $E - 1$, dan verkrijgt men eene uitdrukking in de opeenvolgende ordinaten y_0, y_1, - - y_n.

Voorbeelden van zulke benaderingen vindt men bij Gauss [1]); ook bij Stirling [2]) en Cotes.

Nemen wij als het eenvoudigste geval $n = 2$. De parabolische kromme zal dan door de uiteinden der drie ordinaten y_0, y_1 en y_2 gaan en wij verkrijgen voor dat geval:

$$a_0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^2 y_x\,dx = \left(2 + 2\Delta + \frac{1}{3}\Delta^2\right)y_0 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}E + \frac{1}{3}E^2\right)y_0$$

$$= \frac{1}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right). -$$

Door telkens de abscis in meer gelijke deelen te verdeelen, of, wat hetzelfde is, n grooter te nemen, verkrijgt men telkens meer benaderde waarden van de Integraal.

---

1) Theoria motus Corporum Coelestium § 86. 1809.

2) Tract. de Summ. &c. p. 140.

Ook door middel van het theorema van Maclaurin komen wij tot hetzelfde resultaat:

$$y_x = y_0 + n\varDelta y_0 + \frac{n(n-1)}{2}\varDelta^2 y_0 +$$

$$\int_0^n y_x\,dx = y_0\int_0^n dx + \varDelta y_0\int_0^n x\,dx + \frac{\varDelta^2 y_0}{2}\int_0^n x(x-1)\,dx +$$

$$\int_0^n y_x\,dx = ny_0 + \frac{n^2}{2}\varDelta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{\varDelta^2 y_0}{2} -$$

$$\left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{\varDelta^3 y_0}{2.3} +$$

Daar y_0, y_1, - - - y_n, bekend zijn, kunnen alle differentiën van y_0 tot en met $\varDelta^n y_0$ berekend worden. En nemen wij aan, alle hoogere te kunnen verwaarloozen, dan geeft het bovenstaande ons eene benadering van de gezochte integraal.

Nemen wij $n = 2$, dan volgt onmiddellijk:

$$\int_0^2 y_x\,dx = 2y_0 + 2\varDelta y_0 + \frac{1}{3}\varDelta^2.$$

Maar $\varDelta y_0 = y_1 - y_0$, $\varDelta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ en dus

$$\int_0^2 y_x\,dx = \frac{1}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

De onderstelling dat de oppervlakte in 6 deelen is gesneden door 7 evenwijdige ordinaten brengt ons tot eene zeer merkwaardige uitkomst: [1])

$$\int_0^6 y_x\,dx = 6y_0 + 18\varDelta y_0 + 27\varDelta^2 y_0 + 24\varDelta^3 y_0$$

$$+ \frac{123}{10}\varDelta^4 y_0 + \frac{33}{10}\varDelta^5 y_0 + \frac{41}{140}\varDelta^6 y_0.$$

Ware nu de laatste coëfficient $\frac{40}{140}$ in plaats van $\frac{41}{140}$ dan

[1]) Weddle. Math. Journal, vol. IX p. 79.

zou, na reductie, als boven de zeer eenvoudige vergelijking te voorschijn komen:

$$\int_0^6 y_x\,dx = \frac{3}{10}\left(y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + 5\,(y_1 + y_5) + 6\,y_3\right).$$

De verwaarloozing van $\frac{1}{140}\Delta^6 y_0$ zal in de uitkomst slechts zeer weinig verandering brengen, daar de 6[de] differentiën zeer klein zijn, de 7[de] en verdere geheel verdwijnen.

Nog eene andere methode, en wel die van Lagrange tot bereiking van hetzelfde doel vindt men in de Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1772, p. 201.

Simpson geeft ons eene algemeene formule in Sturm Anal. T. II, p. 267, wel niet door dezelfde methode, maar door gelijkvormigheid zich aan bovengenoemde benaderingen aansluitende.

$$\int_0^{2h} y_x\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 \ldots + y_{n-2}) + 4\,(y_1 + y_3 \ldots + y_{n-1})\right].$$

In alle opzigten beveelt zich dus het gebruik der symbolen, afgescheiden van hunne subjecten aan. Geene van alle behandelde formulen kan zoo eenvoudig gevonden worden, als hier heeft plaats gehad; zooals wij reeds hebben opgemerkt, ontsluit deze methode den weg, om zonder grootere inspanning dan eenvoudige substitutiën, een oneindig aantal nieuwe betrekkingen te vinden, wier juistheid echter later dient te worden betoogd, hetzij door controle, of zoo mogelijk door den gewonen strengen weg in te gaan.

HOOFDSTUK II.

SYMBOLISCHE OPLOSSING DER DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

De schoonste en belangrijkste toepassingen der symbolische rekenwijze kunnen evenwel gemaakt worden bij de oplossing der Differentiaal-vergelijkingen en de vergelijkingen met eindige Differentiën.

Bij de ontwikkelingen der functiën in het eerste hoofdstuk waren de symbolen Δ en E onmisbaar.

Daar de oplossings-methoden in zeer vele gevallen veel overeenkomst bezitten bij de Differentiaal-vergelijkingen en die met eindige Differentiën, zoo zullen wij, om te groote uitgebreidheid te vermijden, de laatstgenoemde vergelijkingen met stilzwijgen voorbijgaan.

A. GEWONE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

§ 1. *Oplossing van Lineaire vergelijkingen met constante coefficiënten.*

Deze vormen de grootste klasse, welke volgens dezelfde methode kan opgelost worden; en daar vele zulke vergelijkingen in de toepassing der natuurkunde voorkomen in dezen vorm, of daartoe kunnen herleid worden, zoo zijn zij van groot belang.

a. *Eerste orde.* Zij gegeven:

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right) u = X, \text{ dan volgt daaruit:}$$

$$u = \left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1} X$$

Wij weten uit de gewone methoden:

$$u = e^{ax} \int e^{-ax} X \, dx;$$

en dus is

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1} X = e^{ax} \int e^{-ax} X \, dx.$$

Wij zien hieruit de beteekenis van de inverse zamengestelde operatie $\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1}$, en de bekende bewerking, welke daarmede overeenkomt.

b. *Hooger orde.*

Elke lineaire vergelijking hooger orde kan men beschouwen als het resultaat van eene zekere operatie, voltrokken op eene functie, welke de eerste integraal van die vergelijking is.

Deze integraal weer evenzoo als de uitkomst van eene dergelijke bewerking op de tweede integraal, enz. Zoodat de gegevene vergelijking niets anders is dan het resultaat van eene reeks operatiën, volbragt op de primitieve functie, die de complete integraal van de vergelijking is.

Denkt men zich al die operatiën door eene zelfde soort van symbolen voorgesteld, dan is het duidelijk, dat de zamenstelling in den vorm van een product een gemakkelijk middel aan de hand geeft, om eene diff. vergelijking uittedrukken; tevens begrijpt men daaruit dat de successieve integratie neerkomt op de ontbinding van genoemd product, om dan door eene opeenvolging van inverse en analoge bewerkingen tot de primitieve functie opteklimmen.

Deze methode is aanmerkelijk eenvoudiger dan de gewone wijze van integreren. Lossen wij bv. de algemeene vergelijking hooger orde op:

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^n + A\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + B\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} \ldots + P\right\} u = X$$

zijn a_1, $a_2 \ldots a_n$ de wortels van $t^n + A t^{n-1} \ldots + P = o$, dan kan men deze vergelijking ook schrijven:

$$\left(\frac{d}{dx} - a_1\right)\left(\frac{d}{dx} - a_2\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - a_n\right) u = X$$

Opereert men nu aan beide zijden met $\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1}$, dan verkrijgt men de eerste integraal van de vergelijking. Op deze uitkomst weer met $\left(\frac{d}{dx} - a_2\right)^{-1}$, enzoovoorts.

Na n zulke inverse operatiën komt men tot de complete waarde van u.

Veel eenvoudiger wordt dit vraagstuk opgelost, indien men op de navolgende wijze handelt[1]).

$$u = \left\{\left(\frac{d}{dx} - a_1\right)\left(\frac{d}{dx} - a_2\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - a_n\right)\right\}^{-1} X.$$

$$= \left\{A_1\left(\frac{d}{dx} - a_1\right)^{-1} + A_2\left(\frac{d}{dx} - a_2\right)^{-1} \ldots + A_n\left(\frac{d}{dx} - a_n\right)^{-1}\right\} X. \quad (a)$$

[1]) Gewoonlijk wordt Boole voor de eerste gehouden, die deze vergel. zoo behandeld heeft. Zie Cambr. Math. journ. 1st Series, vol. II. p. 114. Doch Lobatto heeft ditzelfde reeds gedaan in 1834. Verh. 1ste kl. Kon. Ned. Inst. dl. VI.

$A_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)}$, en A_2, A_3 gelijk aan daaraan overeenkomstige uitdrukkingen.

Uit (a) volgt nu gemakkelijk het eindresultaat:

$$u = A_1 e^{a_1 x} \int e^{-a_1 x} X\, dx + A_2 e^{a_2 x} \int e^{-a_2 x} X\, dx + \quad (b.)$$

Elke integraal geeft aanleiding tot eene arbitraire constante; de waardė (complete) voor u krijgt dus de gedaante:

$$u = \Sigma A_1 e^{a_1 x} \left\{ \int e^{-a_1 x} X\, dx + C \right\}$$

Indien eenige of alle wortels van het symbolisch polynomium gelijk waren, zouden wij op deze laatste wijze niet tot de oplossing komen, daar het laatste lid dan niet in de gedaante van een polynomium kan gebragt worden.

Zijn alle wortels gelijk, dan komt men tot de complete solutie door herhaalde toepassing van

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1} X = e^{a x} \int e^{-a x} X\, dx;$$

terwijl bij elke dergelijke operatie eene constante te voorschijn treedt.

Zijn niet alle wortels gelijk, maar slechts eenige, dan geraakt men tot de navolgende behandeling.

Zij het ontbondene symbolische gedeelte van den vorm: $\left(\frac{d}{dx} - a\right)^r \left(\frac{d}{dx} - a_1\right) \ldots$, dan kan men dit, in het tweede lid gebragt en invers geworden, transformeren in:

$$\left\{ N_1 \left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-r} + N_2 \left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-r+1} \ldots + N_r \left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1} \right\} X$$

$$+ \left\{ M \left(\frac{d}{dx} - a_1\right)^{-1} + \right\} X$$

of nog anders in:

$$\left\{A + B\frac{d}{dx} + C\frac{d^2}{dx^2} + \right\}\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-r} X + \left\{M\left(\frac{d}{dx} - a_1\right)^{-1} + \right\} X.$$

Deze laatste uitdrukking verdient de voorkeur wegens hare eenvoudigheid.

Zijn er een paar onbestaanbare wortels, welke dan den vorm $a \pm b\sqrt{-1}$ hebben moeten, dan zijn de coefficiënten van de corresponderende termen in (b) van de gedaante $\frac{1}{A + B\sqrt{-1}}$ en $\frac{1}{A - B\sqrt{-1}}$ en daar

$$e^{(a + b\sqrt{-1})x} = e^{ax}\left\{\cos b x + \sqrt{-1}\sin b x\right\}.$$

en $e^{(a - b\sqrt{-1})x} = e^{ax}\left\{\cos b x - \sqrt{-1}\sin b x\right\}$ is,

zoo is de som van bedoelde twee termen gelijk aan:

$$\frac{2 e^{ax}\left\{A\cos b x + B\sin b x\right\}\int e^{-ax}\cos b x\, X\, dx}{A^2 + B^2}.$$

$$+\frac{2 e^{ax}\left\{A\sin b x - B\cos b x\right\}\int e^{-ax}\sin b x\, X\, dx}{A^2 + B^2}.$$

Stellen wij nu $\frac{A}{(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos\Theta$, $\frac{B}{(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin\Theta$

dan wordt eenvoudiger deze som

$$= \frac{2 e^{ax}\left\{\cos(b x - \Theta)\int e^{-ax}\cos b x\, X\, dx + \sin(b x - \Theta)\int e^{-ax}\sin b\, X\, dx\right\}}{A^2 + B^2};$$

en de som der termen, voortvloeijende uit de constanten der twee integralen,

$$e^{ax}\left\{C_1 e^{bx\sqrt{-1}} + C_2 e^{-bx\sqrt{-1}}\right\} = e^{ax}(C\cos b x + C^1 \sin b x)$$
$$= C e^{ax}\cos(b x + k).$$

In geval van meerdere paren onbestaanbare wortels, wordt de algemeene oplossing vrij ingewikkeld.

Het is niet onbelangrijk na te gaan, hoe men in een bijzonder geval door inductie komen kan tot de complete solutie van eene Diff. vergelijking zonder tweede lid. Alle wortels van het operatieve gedeelte gelijk.

Nemen wij aan $u = e^{-ax} X$, en volvoeren wij daarop de operatie $\frac{d}{dx} + a$, dan verkrijgen wij:

$\left(\frac{d}{dx} + a\right) u = e^{-ax} \frac{d}{dx} X$, na herhaling der zelfde operatie:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^2 u = e^{-ax} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 X, \text{ enz.}$$

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n u = e^{-ax} \left(\frac{d}{dx}\right)^n X.$$

Wij zien dat e^{-ax} zich onder deze operatiën als eene constante gedraagt. Stellen wij alzoo u zulk eene functie van x, dat $\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n u = o$, dan volgt daaruit, dat de uitdrukking $\left(\frac{d}{dx}\right)^n X$ ook gelijk o wordt, of dat X van den vorm is:

$$A x^{n-1} + B x^{n-2} \ldots + P. —$$

De verg. $\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n = o$ heeft dus tot complete integraal:

$$u = e^{-ax} \{ A x^{n-1} + \ldots . P \}.$$

c. Eenige vergelijkingen kunnen wij op eene meer eenvoudige wijze integreren. Het zijn die waarin het tweede lid eenen bijzonderen vorm heeft;

1°. wanneer het is eene geheele rationele functie van x;

2°. een polynomium, bestaande uit termen van den vorm $P e^{mx}$, waarin P of constanten of geheele rationele functiën van x voorstelt;

3°. indien het bestaat uit termen van den vorm $A \begin{smallmatrix}\sin \\ \cos\end{smallmatrix} mx$.

Volgens de gewone methoden kunnen deze vergelijkingen ook eenvoudiger worden opgelost.

1°. Het tweede lid eene rationele geheele functie van x.

De integratie kan dan worden teruggebragt op die van dezelfde vergelijking zonder tweede lid.

Want stelt men de gegevene verg. in den vorm:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) u = X \text{ dan is}$$

$$u = f\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} X + f\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} o.$$

Eene particuliere waarde van den eersten term zal verkregen worden door $f\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$ te ontwikkelen in opklimmende positieve magten van $\frac{d}{dx}$, en dan die zamengestelde directe operatie op X te volbrengen.

De generale solutie van den tweeden term zal het vereischte aantal constanten opleveren.

2°. Het tweede lid van den vorm $P e^{mx}$.

Men maakt hierbij gebruik van de eigenschappen:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{mx} = f(m)\, e^{mx}$$

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{mx} X = e^{mx} f\left(\frac{d}{dx} + m\right) X.$$

Want:

$$\frac{d}{dx} e^{mx} = m\, e^{mx}, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{mx} = m^n e^{mx}$$

leidt ons tot de eerste formule.

De tweede bewijst men als volgt. Splits de operatie $\frac{d}{dx}$ in $\frac{d'}{dx}$ en $\frac{d''}{dx}$; $\frac{d'}{dx}$ nemen wij aan, heeft alleen betrekking op x, in zooverre die veranderlijke bevat is in e^{mx}, $\frac{d''}{dx}$ alleen op de veranderlijke in X. Wij hebben dus:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)e^{mx}X = f\left(\frac{d'}{dx}+\frac{d''}{dx}\right)e^{mx}X$$
$$= e^{mx}\, f\left(m+\frac{d''}{dx}\right)X.$$

Het accent van $\frac{d''}{dx}$ kan nu blijkbaar gemist worden, daar alleen X achter het operatieve symbool voorkomt.

In elk geval, wat ook de vorm van X zij, wordt door deze eigenschap de oplossing zeer vereenvoudigd.

De formule $f\left(\frac{d}{dx}\right)e^{mx}X = e^{mx}\, f\left(\frac{d}{dx}+m\right)X$ hebben wij aan Murphy te danken [1].

3°. Het tweede lid bestaat uit termen van den vorm:

$$A \sin mx \text{ of } A \cos mx.$$

Men kan in dit geval sin mx en cos mx in exponentiële gedaante brengen, waardoor de vergelijking wordt teruggebragt tot het tweede geval, of gebruik maken van de eigenschap:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} mx = f\left(-m^2\right) \begin{matrix}\sin mx\\ \cos mx\end{matrix}.$$

Deze formule volgt onmiddellijk uit:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \sin mx = -m^2 \sin mx,$$

[1]) Phil. Transact. 1837, p. 197.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \sin mx = (-m^2)^2 \sin mx\,,\ \text{enz.}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^n \sin mx = (-m^2)^n \sin mx. \text{ Evenzoo } \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right)^n \cos mx$$

$$= (-m^2)^n \cos mx.$$

Hiervan een enkel voorbeeld:

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^4 + 5\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + 6\right\} u = \sin mx$$

$$u = \left\{\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 3\right)\right\}^{-1} \sin mx$$

$$= \frac{\sin mx}{(2-m^2)(3-m^2)} + c\cos(x\sqrt{2}+c_1) + c_2\cos(x\sqrt{3}+c_3)$$

d. Volgens de hierboven aangegevene algemeene methode kunnen wij nog andere vergelijkingen integreren; nl. alle, welke ook hare natuur of subject zij, welke in den vorm $(\pi^n + A_1\pi^{n-1} + \ldots + A_n)\,u = X$ kunnen geschreven worden, waarin π een operatief symbool is, onderworpen aan de wetten

$$\pi\, a\, u = a\, \pi\, u\,,\ \pi\,(u + v) = \pi\, u + \pi\, v$$

$$\text{en } \pi^m \pi^n\, u = \pi^{m+n}\, u.$$

Het is duidelijk, dat, wanneer symbolen, hetzij enkelvoudige, hetzij zamengestelde, van dien aard zijn, dat het eene niet werkt op het andere, dan hunne combinatien aan dezelfde wetten onderworpen zijn, als de quantitatieve symbolen. In geval zij niet onafhankelijk zijn, d. w. z. dat het eene symbool wel op het andere werkt, zal dit niet meer het geval zijn, en er moeten andere wetten worden opgespoord. Hierin ligt de groote moeijelijkheid, welke de oplossing der vergelijkingen met variabele coëfficiënten oplevert. Daarin toch komen de symbolen x en $\frac{d}{dx}$ verbonden voor, terwijl door x niet aan dezelfde wetten wordt gehoorzaamd, als door $\frac{d}{dx}$.

Uit $u = (\pi^n + A_1 \pi^{n-1} + .. + A_n)^{-1} X$

zullen wij verkrijgen, als de wortels a_1, a_2 .. van de vergel.:

$m^n + A_1 m^{n-1} .... + A_n =$ reëel en ongelijk zijn;

$u = N_1 (\pi - a_1)^{-1} X + N_2 (\pi - a_2)^{-1} X ... + N_n (\pi - a_n)^{-1} X$;

de coefficiënten $N_1 ... N_n$ worden op de bekende wijze gevonden, en de complete waarde van u verder gemakkelijk verkregen.

Immers elk gedeelte $(\pi - a_1)^{-1} X$ kan men oplossen.

Stel $z = (\pi - a_1)^{-1} X \therefore (\pi - a_1) z = X$.

$\therefore \quad z = f(X)$.

De eenige moeijelijkheid is nu nog: 1°. hoe vindt men den vorm voor π, opdat het mogelijk zij, de gegevene symbolische coefficiënt van het subject in $f(\pi)$ te transformeren; en 2°. hoe is dan de gedaante van $f(\pi)$?

Wij zullen trachten aantetoonen, welke regels hiervoor kunnen gegeven.

Beginnen wij met eene vergelijking 2^de^ orde.

Vooraf merk ik, opdat, zoo in π voorkomt een term mx, en daarop eene operatie moet volbragt worden, waarin $\frac{d}{dx}$ gevonden wordt, deze term aanleiding geeft van twee andere.

Want $\frac{d}{dx}(mx)\,u = \left(m + mx\frac{d}{dx}\right) u$, en niet, zooals uit vermenigvuldiging zou volgen:

$$\frac{d}{dx}(mx)\,u = \left(mx\,\frac{d}{dx}\right)u.$$

Zij de vorm van π: $\frac{d}{dx} + mx + n$; en hebben wij uit de vergelijking door ontbinding verkregen $\pi(\pi + t)\,u = 0$, dan is het duidelijk, dat de vergelijking was:

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (2(mx+n)+t)\frac{d}{dx} + m^2x^2 + 2mnx + n^2 + (mx+n)t + m\right\}u = 0. \quad (a)$$

Deze beschouwing leidt ons op den weg, sommige vergelijkingen met variabele coefficiënten optelossen volgens de methode gegeven voor vergelijkingen met constante coefficiënten. Zij bv.

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (4x+10)\frac{d}{dx} + 4x^2 + 20x + 23\right\}u = 0, \qquad (b)$$

dan vindt men aanstonds door (b) te toetsen aan (a), de vergelijkingen:

$$2m = 4,\ 2n + t = 10,\ m + nt + n^2 = 23,$$

waaruit de coefficiënten gevonden worden:

$$m = 2,\ n = 3,\ t = 4 \quad \text{of}$$
$$m = 2,\ n = 7,\ t = -4$$

Men kan dus vergel: (b) transformeren in:

$$\pi(\pi+4)\,u = 0 \qquad \left(\pi = \frac{d}{dx} + 2x + 3\right), \text{ of}$$

$$\pi(\pi-4)\,u = 0 \qquad \left(\pi = \frac{d}{dx} + 2x + 7\right).$$

Beide vormen geven hetzelfde resultaat.

$$\pi(\pi+4)\,u = 0,$$
$$u = \tfrac{1}{4}\pi^{-1}0 - \tfrac{1}{4}(\pi+4)^{-1}0,$$

Stel $\pi^{-1}0 = z$, wij weten dat $\pi = \frac{d}{dx} + 2x + 3$, dus

$$\frac{dz}{dx} + 2xz + 3z = o \therefore z = ce^{-x^2-3x}.$$

$$\text{evenzoo } (\pi + 4)^{-1} o = z' \therefore z' = c' e^{-x^2-7x}.$$

$$\therefore u = ce^{-x^2-3x} + c' e^{-x^2-7x}. —$$

Wordt gevraagd te integreren:

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (4x^2 + 6x + 13)\frac{d}{dx} + 4x^4 + 12x^3 + 31x^2 + 43x + 39\right\} u = o?$$

Vorm dan weer de algemeene vergelijking.

Evident moeten wij voor π nemen $\frac{d}{dx} + mx^2 + nx + p$.

$\pi(\pi + t) u = o$ geeft voor deze aangenomen waarde van π de algemeene vergelijking:

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \{2(mx^2 + nx + p) + t\}\frac{d}{dx} + m^2x^4 + n^2x^2 + p^2 + 2mnx^3 + 2pmx + 2pnx + (mx^2 + nx + p)t + 2mx + n\right] u = o.$$

Deze stelt ons weêr in staat de coefficiënten te vinden:

$$m = 2,\ n = 3,\ t = -5,\ p = 9,$$
$$t = 5,\ p = 4.$$

en hieruit verder de oplossing.

Voor vergelijkingen derde en hooger orde, kan men op dezelfde wijze redeneren; doch de vergelijkingen worden dan zoo ingewikkeld, dat zij ons slechts in zeer bijzondere gevallen van eenig nut zouden kunnen zijn. Daarom verlaten wij voor het oogenblik deze methode, om haar later bij de partiële diff. vergelijkingen verder in toepassing te brengen.

§ 2. *Vergelijkingen met veranderlijke coefficiënten.*

Door middel der gewone methoden kunnen slechts weinige vergelijkingen met variabele coefficiënten worden opgelost, tenzij men zijne toevlugt neme tot ontwikkeling door reeksen.

Eene groote dienst heeft Prof. Boole der wetenschap bewezen, toen hij den weg aanwees[1]), om met behulp eener bijzondere symbolische methode vele zwarigheden, welke bij die vergelijkingen voorkomen, te ontgaan.

Wij hebben bij het naastvoorgaande reeds kunnen opmerken, hoe ingewikkeld de gevolgen zijn, indien in eene operatie, op een subject te volbrengen, de veranderlijke x en het symbool $\frac{d}{dx}$ gecombineerd voorkomen.

a. De methode, welke men vóór Boole volgde, om vergelijkingen met veranderlijke coefficiënten optelossen, voerde meestal reeds bij vergelijkingen tweede orde tot onoverkomelijke zwarigheden.

Wij zullen de gronden uiteenzetten, waarop zijne methode berust.

Stel $x = e^{\theta}$, dan is indien X eene functie van x voorstelt,

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = e^{-\theta}\frac{dX}{d\theta},$$

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = e^{-\theta}\frac{d}{d\theta}\left(e^{-\theta}\frac{d}{d\theta}X\right) = e^{-2\theta}\left(\frac{d}{d\theta}-1\right)\frac{d}{d\theta}X,$$

en in 't algemeen:

$$\frac{d^nX}{dx^n} = e^{-n\theta}\left(\frac{d}{d\theta}-n+1\right)\left(\frac{d}{d\theta}-n+2\right)\dots\frac{d}{d\theta}X.$$

Ook is dan

$$X\,dx = X\,e^{\theta}\,d\theta,$$

---

[1]) Phil. Transact. 1844 p. 232.

$$\int X\,dx = \int X e^{\theta}\,d\theta \quad \therefore \left.\frac{d}{dx}\right)^{-1} X = \left.\frac{d}{d\theta}\right)^{-1} e^{\theta} X;$$

$$\int dx \int X\,dx = \int e^{\theta}\,d\theta \int X e^{\theta}\,d\theta;$$

$$\therefore \left.\frac{d}{dx}\right)^{-2} X = \left.\frac{d}{d\theta}\right)^{-1} e^{\theta} \left.\frac{d}{d\theta}\right)^{-1} X e^{\theta}$$

$$= \left.\frac{d}{d\theta}\right)^{-1} \left(\frac{d}{d\theta} - 1\right)^{-1} e^{2\theta} X;$$

en in 't algemeen:

$$\left.\frac{d}{dx}\right)^{-n} X = \left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta} - 1\right) \ldots \left(\frac{d}{d\theta} - n + 1\right)\right\}^{-1} e^{n\theta} X.$$

Stellen wij in 't vervolg $\frac{d}{d\theta} = D$.

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n} X = (D - n + 1)(D - n + 2) \ldots D.X$$

$$\left.\frac{d}{dx}\right)^{-n} X = \left\{D(D-1) \ldots (D - n + 1)\right\}^{-1} e^{n\theta} X.$$

Deze transformatiën zijn bij uitstek geschikt om differentiaal vergelijkingen op te lossen, waarin de operatie $\frac{d}{dx}$ gecombineerd voorkomt met x.

Door de stelling $x = e^{\theta}$, verdwijnt na transformatie uit de vergelijking elke gecombineerde operatie, en verkrijgen wij een operatief symbool D, hetwelk als quantitatieve grootheid kan behandeld worden.

Vooraf brengen wij twee relatiën in herinnering, welke wij vroeger reeds hebben aangetoond:

$$f(D)\,e^{m\theta} = f(m)\,e^{m\theta}, \text{ en}$$

$$f(D)\,e^{m\theta} u = e^{m\theta} f(D + m)\,u.$$

Zoowel voor $\frac{d}{d\theta}$ als voor $\frac{d}{dx}$ zijn deze formulen waar.

Door deze laatste formule zijn wij in staat gesteld, exponentialen van den vorm e^{mx} over te brengen van de eene naar de andere zijde van $f(D)$, zoo is bv.

$$e^{m\theta} f(D) u = f(D - m) e^{m\theta} u.$$

Elke lineaire diff. vergel. welke in den vorm

$$(a + bx + cx^2 +) \frac{d^n u}{dx^n} + (a_1 + b_1 x + e_1 x^2 +)$$

$\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots = X$ voorkomt, kunnen wij nu transformeren in zuiver symbolische gedaante.

$$f_0(D) u + f_1(D) e^{\theta} u + f_2(D) e^{2\theta} u + \qquad = F(e^{\theta})$$

Want, vermenigvuldig de gegevene vergelijking met x^n, stel dan $x = e^{\theta}$, dan is:

$$(a + bx + cx^2 +) x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n = (a + bx +)(D(D-1)\ldots$$
$$(D - n + 1))u$$
$$= a D (D-1) \ldots (D - n + 1)$$
$$+ b (D-1)(D-2) \ldots (D-n) e^{\theta}$$
$$+ c (D-2)(D-3) \ldots (D-n-1) e^{2\theta}$$
$$+$$

Op gelijke wijze kan elke term van het eerste lid der originele vergelijking herleid worden; de som dezer vormen voert ons dan tot genoemde symbolische uitdrukking.

Het omgekeerde, nl. den symbolischen vorm tot den gewonen terugtebrengen, volvoert men, door eerst de exponentialen $e^{i\theta}$ door de symbolische functiën heen daarvoor te brengen; $f_m(D)$ verandert daardoor in $f_m(D + i)$.

Splits daarna $f_m(D + i)$ in eene reeks factorialen van den vorm $D(D-1)(D-2)\ldots(D - n + 1)$.

Eene symbolisch geschrevene vergelijking, welke twee, drie of meer termen in het eerste lid heeft, noemt men bi-, tri- of polynomisch.

Aan de primitieve diff. vergel. kunnen wij reeds zien, tot welke van deze klassen zij kan gebragt worden.

Vermenigvuldig daartoe de vergelijking met zulk eene magt van x, dat wij haar kunnen schrijven in de gedaante:

$$\left\{A\left(x\frac{d}{dx}\right)^n + B\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \quad \ldots\right\}u = X;$$

waar A, B,.. algebraïsche polynomia van x zijn; het getal verschillende magten van x, de o^{de} magt niet uitgezonderd, welke in deze polynomia voorkomt, zal het aantal termen in de symbolische vergelijking aangeven.

Vergelijkingen in den symbolischen vorm geschreven hebben dus de gedaante:

$$f_o(D)\,u + f_1(D)\,e^{\theta}u + \ldots + f_n(D)\,e^{n\theta}u = \Theta. \qquad \text{(a)}$$

Doen wij op beide leden de operatie $\left\{f_o(D)\right\}^{-1}$, dan wordt (a)

$$u + \frac{f_1(D)}{f_o(D)}e^{\theta}u + \ldots . \frac{f_n(D)}{f_o(D)}e^{n\theta}u = \frac{\Theta}{f_o(D)}.$$

$$\text{Stel}\,\frac{f_1(D)}{f_o(D)} = \varphi_1(D), \ldots \frac{f_n(D)}{f_o(D)} = \varphi_n(D), \frac{\Theta}{f_o(D)} = V.$$

$$\therefore\; u + \varphi_1(D)\,e^{\theta}u + \varphi_2(D)\,e^{2\theta}u + \ldots\ldots = V.$$

In dezen vorm zullen wij de vergelijkingen veelal eerst brengen, voordat wij tot de behandeling er van overgaan.

Wij zullen eerst de eenvoudigste gevallen behandelen, om daarna tot de meer ingewikkelde over te gaan.

Vergelijkingen als:

$$u + a_1 \varphi(D) e^\theta u + a_2 \varphi(D) \varphi(D-1) e^{2\theta} u + \ldots +$$
$$a_n \varphi(D) \varphi(D-1) \ldots \varphi(D-n+1) e^{n\theta} u = U,$$

kunnen gemakkelijk in een systeem vergelijkingen worden ontbonden $u^1 - q_1 \varphi(D) e^\theta u^1 = U$; de waarden van q_1 bepaald zijnde uit de vergelijking

$$q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Want $\varphi(D) \varphi(D-1) e^{2\theta} = \varphi(D) e^\theta \varphi(D) e^\theta = \left\{ \varphi(D) e^\theta \right\}^2$;

en in 't algemeen:

$$\varphi(D) \varphi(D-1) \ldots \varphi(D-n+1) e^{n\theta} = \{ \varphi(D) e^\theta \}^n.$$

zoodat, indien wij het symbool $\varphi(D) e^\theta$ voorstellen door ϱ, de symbolische vergelijking wordt:

$$\{1 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \ldots\} u = U$$
$$u = \{1 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \ldots\}^{-1} U$$
$$= N_1 \{1 - q_1 \varrho)^{-1} U + N_2 (1 - q_2 \varrho\}^{-1} U + .$$

De oplossing van vergelijking (a) is dus teruggebragt op die van het systeem van den vorm:

$$(1 - q_1 \varrho)^{-1} U = u_1 \qquad \text{(b)}$$
$$\therefore u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + .$$

De bijzondere vormen van ϱ, welke deze vergelijking integrabel doen zijn, zullen hierna bepaald worden.

De belangrijkste is wel, zoo om zijne algemeenheid als om zijne veelvuldige toepassing.

$$\varphi(D) = \frac{a_1 D + b_1}{a D + b}.$$

Genoemde vergelijkingen (b) zijn dan van de eerste orde.

Voor den bijzonderen vorm $\varphi(D) = D^{-1}$ zal vergelijking (a) de symbolische voorstelling zijn van eene lineaire differentiaal vergelijking n^{de} orde met constante coefficiënten; voor elken anderen vorm van $\varphi(D)$ is zij de voorstelling van eene vergel. met variabele coefficienten.

Zij als voorbeeld hiervan gegeven de vergelijking.

$$(x^2 + mx^3 + nx^4)\frac{d^2u}{dx^2} + \left\{2bx + (a+b+2)x^2 + (2a+4)nx^3\right\}\frac{du}{dx}$$
$$+ \left\{b(b-1) + (a+1)bmx + (a+2)(a+1)nx^2\right\} u = o.$$

Brengt men deze vergelijking in symbolischen vorm dan is:

$$u + m\frac{D+a}{D+b}e^{\theta}u + n\frac{(D+a)(D+a-1)}{(D+b)(D+b-1)}e^{2\theta}u = o,$$

$$\left\{1 + m\frac{D+a}{D+b}e^{\theta} + n\left(\frac{D+a}{D+b}e^{\theta}\right)^2\right\}u = o.$$

Zijn nu q_1 en q_2 de wortels der vergelijking:

$$q^2 + mq + n = o$$

$$\therefore u = \frac{q_1}{q_1 - q_2}\left(1 - q_1\frac{D+a}{D+b}e^{\theta}\right)^{-1} o - \frac{q_2}{q_1 - q_2}$$
$$\left\{1 - q_2\frac{D+a}{D+b}e^{\theta}\right\}^{-1} o.$$

$$\text{Stel } \left\{1 - q_1\frac{D+a}{D+b}e^{\theta}\right\}^{-1} o = u_1$$

$$\therefore (x - q_1x^2)\frac{du_1}{dx} + \left\{(b_1 - (a+1))q_1x\right\}u_1 = o$$

$$\left(-\frac{b}{x} + \frac{-b+a-1}{1-q_1x}\right)dx = \frac{du_1}{u_1}$$

$$\therefore u_1 = \frac{c_1}{x^b(1-q_1x)^{a-b+1}}.$$

Evenzoo vindt men voor den tweeden term:

$$u_2 = \frac{c_2}{x^b(1-q_2x)^{a-b+1}} \text{ en dus:}$$

$$u = \frac{c_1(1-q_2x)^{a-b+1} + c_2(1-q_1x)^{a-b+1}}{x^b(1-q_1x)^{a-b+1}(1-q_2x)^{a-b+1}}.$$

b. De klasse van vergelijkingen, welke wij nu moeten beschouwen, bevat die welke niet integrabel zijn in de gedaante waarin zij voorkomen, doch die door goed gekozene transformatiën kunnen teruggebragt worden tot oplosbare binomiale vergelijkingen.

Daar de theorie van de algemeene vergelijking:

$$u + \varphi_1(D)\, e^{\theta} u + \varphi_2(D)\, e^{2\theta} u \ldots = U$$

afgeleid kan worden uit die van de binomiale

$$u + \varphi(D)\, e^{r\theta} u = U,$$

zoo zullen wij eerst deze laatste behandelen.

Daar deze niet altijd onmiddellijk voor oplossing vatbaar is, zoo is het noodig, veranderingen aantebrengen welke haar daarvoor geschikt maken. Die verschillende veranderingen zullen wij achtereenvolgens nagaan.

1°. Der functie $\varphi(D)$ in de vergelijking

$$u + \varphi(D)\, e^{r\theta} u = U$$

kunnen wij, zonder overigens den vorm van het eerste lid te veranderen, een constanten factor toevoegen. Stel daartoe:

$$e^{\theta} = a^{\frac{1}{r}} e^{\theta^1}$$

$$\therefore \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\theta^1}$$

$$u + a\varphi\left(\frac{d}{d\theta^1}\right) e^{r\theta^1} u = V.$$

V is de waarde die U verkrijgt, als men daarin de nieuwe waarde $e^{\theta^1}.a^{\frac{1}{r}}$ substitueert voor e^{θ}. Schrijf nu nog D^1 voor $\frac{d}{d\theta}$, dan is de veranderde vergelijking:

$$u + a\varphi(D^1)\, e^{r\theta^1} u = V.$$

2°. $$u + \varphi(D)\, e^{r\theta} u = U$$

kan gebragt worden in den vorm:

$$v + \varphi(D + n)\, e^{r\theta} v = V,$$

door aantenemen $u = e^{n\theta} v$, en $U = e^{n\theta} V$.

Want na substitutie hiervan verkrijgen wij:

$$e^{n\theta} v + \varphi(D)\, e^{(n+r)\theta} v = e^{n\theta} V,$$

$$\therefore v + \varphi(D + n)\, e^{r\theta} v = V.$$

3°. $\varphi(D)$ kan omgezet worden in $\{\varphi(-D)\}^{-1}$

Stel daartoe $\vartheta = -\vartheta^1$, $\therefore \frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta^1}$,

$$u + \varphi(-D^1)\, e^{-r\theta_1} u = V,$$

$$\text{en } u + e^{-r\theta_1} \varphi\{-(D^1 - r)\}\, u = V;$$

$$e^{r\theta_1} u + \varphi(r - D^1)\, u = e^{r\theta_1} V.$$

Deelt men nu door $\varphi(r - D^1)$,

$$\therefore u + \{\varphi(r - D^1)\}^{-1} e^{r\theta_1} u = \{\varphi(r - D^1)\}^{-1} e^{r\theta_1} V.$$

Stel nu nog $u = e^{r\theta_1} V$, dan is, volgens 2°

$$\therefore v + \{\varphi(-D^1)\}^{-1} e^{r\theta^1} v = \{\varphi(-D^1)\}^{-1} V.$$

4°. Ook den exponent r kunnen wij veranderen.

$$\text{Stel } \vartheta = \frac{\vartheta^1}{a} \therefore \frac{d}{d\vartheta} = a\frac{d}{d\vartheta^1}$$

$$u + \varphi(a D^1)\, e^{\frac{r\theta_1}{a}} u = V.$$

Bij deze verandering van exponent verandert tevens D in $a D^1$; wij kunnen dus, door combinatie van 2 en 4, $\varphi(D)$ veranderen in $\varphi(a D + b)$, en door 3 in $\left\{\varphi(a D + b)\right\}^{-1}$

5°. Door te stellen:

$$u = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} v, \text{ en } U = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} V,$$

wordt

$$u + \varphi(D)\, e^{r\theta} u = U, \qquad v + \psi(D)\, e^{r\theta} v = V.$$

$P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)}$ beteekent het oneindig symbolisch product

$$\frac{\varphi(D)\,\varphi(D-r)\,\varphi(D-2r)\ldots.}{\psi(D)\,\psi(D-r)\,\psi(D-2r)\ldots.}. —$$

Bewijs:

Na substitutie van $u = f(D)\, v$ in de oorspronkelijke vergel. verkrijgt men:

$$f(D)\, v + \varphi(D)\, e^{r\theta} f(D)\, v = U;$$

$$\therefore f(D)\, v + \varphi(D)\, f(D-r)\, e^{r\theta} v = U,$$

$$v + \frac{\varphi(D)\, f(D-r)}{f(D)} e^{r\theta} v = \left\{ f(D) \right\}^{-1} U.$$

Vergelijkt men deze met de gegevene, dan hebben wij voor de nieuwe functie $\psi(D)$ verkregen:

$$\psi(D) = \frac{\varphi(D)}{f(D)} f(D-r) \text{ of } f(D) = \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} f(D-r).$$

$$\text{Nu is ook } f(D-r) = \frac{\varphi(D-r)}{\psi(D-r)} f(D-2r) \text{ enz.}$$

$\therefore$ moet men, om tot de bepaalde nieuwe functie $\psi(D)$ te geraken, voor $f(D)$ stellen het oneindige product:

$$\frac{\varphi(D)\,\varphi(D-r)\,\varphi(D-2r)\ldots.}{\psi(D)\,\psi(D-r)\,\psi(D-2r)\ldots.} = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)}.$$

Met deze laatste transformatie stelt men zich voor de gegevene vergelijking eenen integrabelen vorm te geven, en dit dient zoodanig volbragt te worden, dat $P_r \frac{\varphi D}{\psi(D)}$ eene eindige operatie blijve.

Men rigte zich dus in de keuze van $\psi(D)$ altijd naar dezen tweeledigen eisch.

Opdat $P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)}$ eindig worde, zoo moet eene reeks factoren in den teller verdwijnen tegen dezelfde reeks in den noemer;

bv. $P_r \dfrac{\varphi(D)}{\varphi(D-ir)} = \dfrac{\varphi(D)\,\varphi(D-r)\ldots\varphi(D-ir)\,\varphi(D-ir-r)\ldots}{\varphi(D-ir)\,\varphi(D-ir-r)\ldots.}$

$$= \varphi(D)\,\varphi(D-r)\ldots.\varphi(D-ir+r).$$

Indien in $\varphi(D)$ een factor $\chi(D)$ voorkomt, welke men alleen veranderen wil in $\chi(D \pm ir)$, dan kan dit geschieden.

Zij $\varphi(D) = \chi(D)\,\chi_1(D)$

nb. $\chi_1(D) =$ product van alle andere factoren van $\varphi(D)$.

Stel dus $\psi(D) = \chi(D \pm ir)\,\chi_1(D)$,

$$\therefore P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} = P_r \frac{\chi(D)}{\chi(D \pm ir)}.$$

Dit is, zooals hierboven is aangetoond, eene eindige operatie; dus de voorgenomene verandering van $\chi(D)$ in $\chi(D \pm ir)$ kan geschieden.

Bevat $\varphi(D)$ een factor van den vorm $\dfrac{\chi(D)}{\chi(D \pm ir)}$, dan kan men dien geheel doen verdwijnen.

$$\text{Zij } \varphi(D) = \frac{\chi(D)}{\chi(D \pm ir)}\,\chi_1(D).$$

Stel dan $\psi(D) = \chi_1(D)$,

$$\therefore P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} = P_r \frac{\chi(D)}{\chi(D \pm ir)}.$$

Dit is dus ook uitvoerbaar.

In de toepassing dezer twee laatste transformatiën komt men al spoedig tot eene belangrijke opmerking. Zij is deze:

Telkens wanneer men $\varphi(D)$ verandert in $\psi(D)$, en dan de reductiën bestaan in veranderingen van factoren in den noemer van $\varphi(D)$, en nog wel in het grooter worden daarvan, of het kleiner worden van factoren in den teller, dan zal de bewerking, waardoor u uit v wordt afgeleid, bestaan uit differentiatie, terwijl indien wij ψ (D) zoo kiezen, dat de factoren in den noemer van φ (D) kleiner, en in den teller grooter worden, dezelfde operatie zal bestaan uit integratie.

Natuurlijk geeft men de voorkeur aan het eerste, indien het mogelijk is.

Menigmaal kan men door middel der eerste transformatie de symbolische uitdrukking zoo voorbereiden, dat de bepaling van u uit v weer op differentiatie neêrkomt.

Als een duidelijk voorbeeld hiervan zij gegeven:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + q^2u - \frac{bu}{x^2} = o$$

(Dit is eene vergelijking welke voorkomt in de theorie over de gedaante der aarde.)

De symbolische vorm is:

$$u + \frac{q^2}{(D+2)(D-3)} e^{2\theta} u = o$$

Stellen wij hierin $u = P_2 \frac{D+1}{D-3} v = (D+1)(D-1) v.$

$$\therefore v + \frac{q^2}{(D+2)(D+1)} e^{2\theta} v = o;$$

of $\qquad v + q^2 \left\{(D+2)^{-1} e^{\theta}\right\}^{-2} v = o.$

Deze kan men in twee vergelijkingen eerste orde ontbinden, en dan verder oplossen.

Hierna zal u door differentiatie gevonden worden uit v, omdat wij den factor (D — 3) in den noemer van φ (D) doen toenemen tot (D + 1) in ψ (D).

Wij doen echter beter, de vergelijking te transformeren in:

$$v + \frac{q^2}{D\,(D-1)}\,e^{2\vartheta}\,v = o.$$

(Kan men ooit eene vergelijking tot deze gedaante vervormen, dan is dit zeer aan te raden, daar deze de symbolische voorstelling is van

$$\frac{d^2v}{dx^2} + q^2v = o,$$

en $v - \frac{q^2}{D\,(D-1)}\,e^{2\vartheta}\,v = o$, van $\frac{d^2v}{dx^2} - q^2v = o$.

Aanstonds kent men dan zonder verdere moeite de waarde van v.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + q^2\,v = o \text{ geeft } v = c_1 \sin(qx + c_2)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} - q^2v = o \quad \therefore \quad v = c_1\,e^{qx} + c_2\,e^{-qx}\,..\Big).$$

Om hiertoe te geraken, stelt men eerst $u = e^{-2\vartheta}\,w$,

$$\therefore \quad w + \frac{q^2}{D\,(D-5)}\,e^{2\vartheta}\,w = o, \text{ en dan}$$

$$w = P_2\,\frac{D\,(D-1)}{D\,(D-5)}\,v = (D-1)\,(D-3)\,v\,; \text{ dus}$$

$$v + \frac{q^2}{D\,(D-1)}\,e^{2\vartheta}\,v = o \quad \therefore \quad v = C \sin(qx + c_1)\,;$$

$$u = e^{-2\vartheta}\,(D-1)\,(D-2)\,v$$

$$= \frac{1}{x^2}\left\{ x^2\frac{d^2}{dx^2} - 3x\,\frac{d}{dx} + 3 \right\} c \sin(qx + c_1).$$

Ook hier zien wij, wordt u uit v verkregen door differentiatie, daar de factor (D—5) uit den noemer van φ (D), aangroeit tot (D—1).

Hadden wij in eens de transformatie ondernomen, dan was de eene factor afgenomen tot D, de andere (D—3) aangegroeid tot (D—1), en men hadde u uit v niet door differentiatie alleen gevonden.

De geheele bewerking komt dus hierop neer:

$$u + \varphi(D)\, e^{r\theta}\, u = U$$

wordt opgelost in de drie volgende vergelijkingen:

$$u = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} v \quad ; \quad U = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} V;$$

$$\text{en } v + \psi(D)\, e^{r\theta}\, v = V.$$

Uit deze drie worden achtereenvolgens V, v en u bepaald.

De twee eersten noemt men gewoonlijk auxiliaire, de laatste de getransformeerde vergelijking.

De regels voor de bepaling der constanten zijn de volgende:

1°. Indien alle factoren van $\varphi(D)$ aanwezig blijven in $\psi(D)$, hetzij geheel onveranderd, met verandering van D in $D \pm ir$, dan behoeven geene constanten in de solutiën der auxiliaire vergelijkingen te worden ingevoerd, daar uit de oplossing der getransformeerde vergelijking, die van dezelfde orde als de vorige is, het noodige en noodzakelijke aantal van zelf voortvloeit.

2°. Verdwijnende factoren, in 't algemeen van den vorm $\frac{D + a}{D + b}$, ((a—b) een veelvoud van r), veroorzaken eene daling in de orde der getransformeerde vergelijking;

Evident moet het aantal constanten, dat daardoor tevens verminderen zal, in de oplossing dezer vergelijking aangevuld worden; hetzij in de oplossing van

$$u = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} v, \text{ of in } U = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} V.$$

Wij moeten dus regels vaststellen voor de behandeling der constanten in deze verschillende gevallen.

De geheele bewerking bestaat uit de oplossing van de drie vraagstukken:

1°. De bepaling van V uit $U = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} V$.

2°. De bepaling van v uit $v + \psi(D) e^{r\theta} v = V$.

3°. De bepaling van u uit $u = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} v$.

Beschouwen wij deze afzonderlijk, in de onderstelling vooreerst, dat $\varphi(D)$ een enkelen factor $\frac{D+a}{D+b}$ bevat, welken men doet verdwijnen bij het vormen van $\psi(D)$.

De conditie hiertoe noodig is:

$$\frac{a-b}{r} = \pm i.$$

De gegevene vergelijking is dus van den vorm:

$$u - \frac{D+a}{D+b} \psi(D) e^{r\theta} u = U, \quad (a)$$

$$\therefore v - \psi(D) e^{r\theta} v = V.$$

Beter is het nog, eerst de vergelijking (a) te brengen in den vorm:

$$u - \frac{D}{D-a} \psi(D) e^{r\theta} u = U.$$

Stellen wij hierin $a = nr$ dan kunnen wij transformeren in

$$v - \psi(D) e^{r\theta} v = V, \quad (b)$$

door de suppositiën

$$u = P_r \frac{D}{D-a} v = D(D-r) \ldots (D-nr+r) v.$$

$$U = P_r \frac{D}{D-a} V = D(D-r) \ldots (D-nr+r) V.$$

$$\therefore V = \left\{D(D-r)\ldots(D-nr+r)\right\}^{-1} U.$$

$$u = D(D-r)\ldots(D-nr+r)\left\{1-\psi(D)e^{r\theta}\right\}^{-1} V.$$

$$u = D(D-r)\ldots(D-nr+r)\left\{1-\psi(D)e^{r\theta}\right\}^{-1}\left\{U_0 + c_0 + c_1 e^{r\theta}\ldots c_{n-1} e^{(nr-r)\theta}\right\}. \qquad (c)$$

Hierin is U_0 eene particuliere waarde van

$$\left\{D(D-r)\ldots(D-nr+r)\right\}^{-1} U.$$

Het gedeelte dat de constanten bevat, zal bestaan uit termen van den vorm

$$D(D-r)\ldots(D-nr+r)\left\{1-\psi(D)e^{r\theta}\right\}^{-1} c_i e^{ir\theta}, 0 < i < n$$

$$= D(D-r)\ldots(D-nr+r)\left\{1+\psi(D)e^{r\theta}+\psi(D)e^{r\theta}\psi(D)e^{r\theta}+\right\}c_i e^{ir\theta}$$

$$= C D(D-r)\ldots(D-nr+)\left\{e^{ir\theta}+\psi(D)e^{(i+1)r\theta}+\psi(D)\psi(D-r)e^{(i+2)r\theta}+\right\}$$

Al deze termen nu, tot op die, welke $e^{nr\theta}$ bevat, verdwijnen ten gevolge der directe operatie

$$D(D-r)\ldots(D-nr+r).$$

Wij behoeven deze operatie dus alleen te voltrekken op het volgende gedeelte

$$\psi(D)\psi(D-r)\ldots\psi(D-jr)e^{nr\theta}+\psi(D)\psi(D-r)\ldots\psi(D-jr-r)e^{(nr+r)\theta}+$$

$$= \psi(D)\psi(D-r)\ldots\psi(D-jr)e^{nr\theta}+\psi(D)e^{\theta}\psi(D)\psi(D-r)\ldots\psi(D-jr)e^{nr\theta}+$$

nu is:

$$\psi(D)\psi(D-r)\ldots\psi(D-jr)e^{nr\theta} = \psi(nr)\psi(nr-r)\ldots\psi(nr-jr)e^{nr\theta} = B e^{nr\theta}$$

Dus verkrijgen wij:

$$B C D(D-r)\ldots(D-nr+r)\left\{e^{nr\theta}+\psi(D)e^{\theta}e^{nr\theta}+\right\}$$

$$= B C D(D-r)\ldots(D-nr+r)\left\{1+\psi(D)e^{\theta}+\psi(D)e^{\theta}\psi(D)e^{\theta}+\right\}e^{nr\theta}.$$

Deze uitdrukking is dezelfde in vorm voor alle waarden van i; daarom zullen alle termen, welke in (c) eene arbitraire constante bevatten, tot één term worden.

Stel ten tweede $a = -nr$, dan is:

$$u = \left\{ D(D-r) \ldots . (D-nr+r) \right\}^{-1} v,$$

$$V = \left\{ D(D-r) \ldots . (D-nr+r) \right\} U.$$

Hier zijn dus geene constanten ontstaan in V door de directe operatie. Maar wel ontstaan er n uit de oplossing van u uit de vorige vergelijking, niet gerekend die welke in v voorkomen. Het aantal constanten is dus te groot; haar aantal moet verminderd worden, en daar geene volgende bewerking ze vernietigt, of haar onderling afhankelijk maakt, zoo moet door vergelijking onzer solutie met die, welke men volgens de gewone methode van ontwikkeling in reeksen verkrijgt, de onderlinge afhankelijkheid dezer constanten worden opgespoord.

De regels voor de constanten zijn dus:

De constanten zijn geheel arbitrair, indien zij voortvloeijen uit $\left\{ P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} \right\}^{-1} U = V$; doch één behoeft men er slechts van te behouden; indien zij echter ontstaan uit de oplossing van $\left\{ P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} \right\}^{-1} u = v$, zoo is er slechts een willekeurig, en de anderen zullen bepaald moeten worden met behulp der primitieve differentiaal-vergelijking.

De reden, waarom de constanten in verband met de verdwijnende factoren allen arbitrair zijn in V, is, dat V in geene andere vergelijking voorkomt, dan juist in die, waarvan de oplossing die constanten doet geboren worden.

Indien men toch alle constanten in V behoudt, zullen zij bij overgang tot u, door opeenvolgende differentiatiën allen, éene uitgezonderd verdwijnen, zooals even te voren uitvoerig is aangetoond.

Steunende op bovenstaande beschouwingen, kunnen wij nu overgaan tot de behandeling der differentiaal-vergelijkingen, waarvan de oplossing afhangt van die der vergelijking:

$$\frac{d^n v}{dx^n} \pm q^n v = X$$

De symbolische vorm daarvan is:

$$v \pm \frac{q^n}{D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)} e^{n\theta} v = V \qquad \text{(h)}$$

$$V = \left\{ D(D-1)\ldots \right\}^{-1} X;$$

waarin e^{θ} is gesubstitueerd voor x in X, en geene constanten zijn ingevoerd bij deze integratie.

Vergelijkingen welke in de algemeene gedaante

$$u \pm \frac{q^n}{(D+a_1)(D+a_2)\ldots(D+a_n)} e^{n\theta} u = U \qquad \text{(k)}$$

voorkomen, zullen wij tot den vorm (h) kunnen terugbrengen, daar wij alle factoren in den noemer, indien $a_1, a_2, a_3 \ldots$ aan bepaalde conditiën voldoen, door eene reeks transformatiën of in eens kunnen reduceren tot de factoren van $\varphi(D)$ in (h).

Wij zullen eenvoudigheidshalve onderstellen, dat de factoren in den noemer gerangschikt zijn naar de grootten van $a_1\, a_2 \ldots, a_1 > a_2$

$$\text{Stel } u = e^{-a_1\theta} u_1$$

$$\therefore u_1 \pm \frac{q^n}{D(D+a_2-a_1)\ldots(D+a_n-a_1)} e^{n_1\theta} u_1 = e^{a_1\theta} U.$$

De eerste factor komt nu in φ (D) van deze vergel. overeen met den eersten van φ (D) in (h).

In elk der overigen kunnen wij D in D $\pm$ i n omzetten (i een geheel getal), en dus hebben wij als conditiën van integrabiliteit, dat de grootheden

$$a_2 - a_1 + 1,\ a_3 - a_1 + 2,\ a_4 - a_1 + 3, \text{ etc}$$

veelvouden zijn van n; zoo ja, dan kunnen wij ze in overeenstemming brengen met die in (h).

Men handele daartoe als volgt:

Den factor $(D + a_2 - a_1)$ transformere men in $D - 1$).

Stel daartoe

$$P_n \frac{D-1}{D + a_2 - a_1} u_2 = u_1$$

$$\therefore\ (D-1)(D-n-1)\ldots(D + a_2 - a_1 + n)\, u_2 = u_1.$$

Hierdoor is de tweede factor veranderd.

Evenzoo transformere men de overige factoren.

Al deze reductiën bestaan uit differentiatiën daar, omdat $a_1 \overline{\gtrless} a_2 + 1$ en $a_2 - a_1 \overline{\lessgtr} - 1$, de factor in den noemer aangroeit.

De geheele berekening komt nu te staan, als volgt:

$$u = P_n \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} v\ ,$$

$$\varphi(D) = \frac{1}{D(D + a_2 - a_1)\ldots(D + a_n - a_1)}\ ,$$

$$\psi(D) = \frac{1}{D(D-1)\ldots(D-n+1}\ ,$$

$$u = e^{-a_1\theta} u_1\ ,$$

$$\therefore\ u = e^{-a_1\theta} P_n \frac{(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)}{(D-a_2-a_1)\ldots(D+a_n-a_1)}\ v.$$

Als voorbeeld hiervan zullen wij oplossen de vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{i(i+1)}{x^2}u \pm h^2 u = o. \quad ^{1)}$$

De symbolische vorm is:

$$u \pm \frac{n^2}{(D+i)(D-i-1)} e^{2\theta} u = o.$$

Vergelijken wij deze met den algemeenen vorm (k), dan hebben wij:

$a_1 = +i \quad , \quad a_2 = -i-1, \quad n = 2 \quad , \quad q = h;$

en dus

$$u = e^{-i\theta} P_2 \frac{D-1}{D-2i-1} v,$$

$$v \pm \frac{h^2}{D(D-1)} e^{2\theta} v = o; \qquad \therefore v = c \sin(hx + c_1)$$

$$\text{of} \quad v = ce^{hx} + c_1 e^{-hx}.$$

$$P_2 \frac{D-1}{D-2i-1} = (D-1)(D-3)\ldots(D-2i+1).$$

Herstelt men nu voor D de uitdrukking $x\frac{d}{dx}$, dan is;

$$u = \frac{1}{x^i}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\left(x\frac{d}{dx}-3\right)\ldots\left(x\frac{d}{dx}-2i+1\right)v.$$

Dit resultaat kan men nog anders schrijven, door op te merken dat

---

[1]) (Deze vergelijking is behandeld door Mossotti, Paoli, Plana e. a. ook door Kelland. in Transact. of the royal Society of Edinburgh vol. XX 1853. Het is belangrijk, zijne eigenaardige methode, geheel berustende op het gebruik der Γ functie nategaan, waardoor hij niet alleen deze maar ook andere zeer bekende vergelijkingen, b. v. $(1-\mu^2)\frac{d^2 \upsilon}{d\mu^2} + 2(a-1)\mu\frac{d\upsilon}{d\mu} + \left\{n(n+1) - a(a-1)\right\}\upsilon = o$ (de vergelijking voor Laplacés functiën) oplost, en nog wel in wijderen zin dan gewoonlijk, wat aangaat de waarde der constante grootheden daarin.

$$D - 1 = e^{\theta} D e^{-\theta} = x\left(x\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{x} = x^2 \frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x}$$

$$D - 3 = \qquad x^4 \frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$D - 2i + 1 = \qquad x^{2i}\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x^{2i-1}}.$$

Substitueert men deze uitdrukkingen in de algemeene waarde van u, nl:

$$u = e^{-i\theta}(D-1)(D-3)\ldots(D-2i+1)\,v,$$

dan vinden wij:

$$u = \frac{1}{x^i}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{x}\left(x^4\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{x^3}\ldots\left(x^{2i}\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x^{2i-1}}\right)v$$

$$= \frac{1}{x^{i+1}}\left(x^3\frac{d}{dx}\right)\left(x^3\frac{d}{dx}\right)\ldots\left(x^3\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{x^{2i-1}}v$$

$$= \frac{1}{x^{i+1}}\left(x^3\frac{d}{dx}\right)^i\frac{1}{x^{2i-1}}v.$$

De oplossingen van de twee vergelijkingen zijn dus:

$$u = \frac{1}{x^{i+1}}\left(x^3\frac{d}{dx}\right)^i\frac{c\sin(hx+c_1)}{x^{2i-1}},$$

$$\text{en } u = \frac{1}{x^{i+1}}\left(x^3\frac{d}{dx}\right)^i\frac{c\,e^{hx} + c_1\,e^{-hx}}{x^{2i-1}}$$

Als toelichting der regel voor de constanten bij verdwijnende factoren, moge nog het navolgende voorbeeld dienen:

$$(x^2 + qx^3)\frac{d^2u}{dx^2} + \left\{(a+3)\,qx^2 + (b-i+1)\,x\right\}\frac{du}{dx}$$

$$+ \Big((a+1)\,qx - bi\Big)\,u = X. \quad (a)$$

(i een geheel getal). De symbolische vorm is:

$$u + q\,\frac{(D+a)\,D}{(D+b)(D-i)}\,e^{\theta}\,u = U. \quad (b)$$

$u = \left\{(D + b)(D - i)\right\}^{-1} X$, waarbij in $X\, e^{\theta}$ voor x is gesubstitueerd. Reduceeren wij (b) tot

$$v + q\frac{D + a}{D + b} e^{\theta} v = V. \quad (c)$$

Deze transformatie sluit in zich de suppositiën:

$$P_1 \frac{\varphi\,(D)}{\psi\,(D)} = P_1 \frac{D}{D - i} = D\,(D - 1) \ldots (D - i + 1)$$

en dus $u = D\,(D - 1) \ldots (D - i + 1)\, v \quad$ (d)

$$U = D\,(D - 1) \ldots (D - i + 1)\, V. \quad (e)$$

Nu is uit (c)

$$(D + b)\, v + q e^{\theta} (D + a + 1)\, v = (D + b)\, V,$$

$$x\frac{dv}{dx} + bv + qx\left(x\frac{d}{dx} + a + 1\right) v = (D + b)\, V,$$

hieruit vindt men daar het eene gewone lineaire vergelijking 1^{ste} orde is op de volgende wijze:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{b + aqx + qx}{x + qx^2} v = \frac{(D + b)\, V}{x + qx^2}$$

$$v = e^{-\int \frac{b + aqx + qx}{x + qx^2} dx} \left(\int \frac{(D + b)\, V}{x + qx^2} e^{\int \frac{b + aqx + qx}{x + qx^2} dx} dx + C.\right)$$

en daar $\displaystyle\int \frac{b + aqx + qx}{x + qx^2} dx = \int \left\{ \frac{bdx}{x} + \frac{(a + 1 - b)\, q}{1 + qx} \right\} dx$

$$= l \left\{ x^b (1 + qx)^{a + 1 - b} \right\}$$

zoo is aanstonds:

$$v = \frac{1}{x^b (1 + qx)^{a - b + 1}} \left(\int x^{b - 1} (1 + qx)^{a - b} (D + b)\, V dx + C\right). \quad (f)$$

Uit (e) vindt men:

$$V = \left\{ D\,(D - 1) \ldots (D - i + 1) \right\}^{-1} U,$$

$$\therefore (D + b)\, V = \left\{ D\,(D - 1) \ldots (D - i + 1) \right\}^{-1} (D + b)\, U;$$

$$\text{maar } (D + b)\, U = (D - i)^{-1} X,$$

$$(D + b)\, V = \left\{ D\,(D - 1) \ldots (D - i) \right\}^{-1} X.$$

Bij de volvoering van deze laatste inverse operatie moeten wij, volgens de vroeger aangegevene regel, slechts ééne arbitraire constante behouden. Wij kiezen die welke ontstaat uit den factor D^{-1}.

Daar $\{D(D-1 \ldots (D-i)\}^{-1} = \left\{x^{i+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{i+1}\right\}^{-1}$

$$\therefore (D+b)\,V = \frac{d}{dx}\Big)^{-(i+1)} \frac{X}{x^{i+1}} + C.$$

Dit substitueerende in (f)

$$\therefore\ v = \frac{\int \left\{ x^{b-1}(1+q\,x)^{a-b}\left(^{i+1}\int \frac{X}{x^{i+1}}\,dx^{i+1} + c_1\right)\right\} dx + C}{x^b(1+q\,x)^{a-b+1}}$$

en $u = x^i \frac{d}{dx}\Big)^i v$.

Voor $X = o$ geeft dit b. v.:

$$u = x^i \ \frac{d}{dx}\Big)^i \frac{c_1\int x^{b-1}(1+q\,x)^{a-b}\,dx + C.}{x^b(1+q\,x)^{a-b+1}}$$

Wij zien uit dit alles welke wegen wij kunnen inslaan voor de oplossing der binomiale vergelijking.

Belangrijk is de vraag, welke zich hierbij als van zelve voordoet, welke primaire vormen zijn integrabel?

Primair noemen wij met Boole die vormen van binomiale vergelijkingen welke direct integrabel zijn, doch niet door toepassing van eene der reductiën 1—5, en waartoe juist door aanwending dezer vijf transformatiën andere vergelijkingen kunnen gebragt, en uit dien hoofde integrabel worden.

Wij hebben alle reden om te onderstellen, dat het getal werkelijk primaire vormen uiterst gering is.

Voor het tegenwoordige schijnt het niet mogelijk, daarop een algemeen antwoord te geven, maar voor zoover wij ze kennen, staan zulke vormen, indien zij behooren tot de diff. vergelijkingen van de tweede of hooger orde, in een merkwaardig verband met de theorie der algebraïsche vergelijkingen.

Uit elke algebraïsche vergelijking van den n^{den} graad, waarvan de coefficiënten functiën van eene veranderlijke zijn, kan eene differentiaal-vergelijking worden afgeleid van de orde $n-1$, en aan deze zal voldaan worden door elke der wortels van de gegevene algebraïsche vergelijking [1]).

Deze betrekking tusschen algebraïsche en differentiaal-vergelijkingen is een zeer belangrijk feit, en wij kunnen met grond verwachten, dat de verdere ontwikkeling dezer methode meerder licht zal verspreiden over de binomiale symbolische vergelijkingen.

Er bestaan nog wel andere primaire vergelijkingen welke eene eindige oplossing toelaten, evenwel zijn zij niet van dat overwegende belang als de algemeene vormen zoo even behandeld, daar de oplossing kunstgrepen vereischt welke niet altijd even gemakkelijk kunnen gevonden worden. Wij noemen als zoodanig bv. de primaire vormen [2]):

$$v + \frac{a\,(D-2)^2 \pm n^2}{D\,(D-1)}\,e^{2\theta}\,v = o \qquad \text{(a)}$$

$$v + \frac{(D-1)\,(D-2)}{a\,D^2 \pm n^2}\,e^{2\theta}\,v = o \qquad \text{(b)}$$

---

[1]) Cockle. Phil. magazine. May 1861. On Transcend & Algebr. Solutions.
[2]) Boole. Diff. Equat. p. 428.

Deze twee vormen zijn aan elkaar verwant, dat (b) uit (a) kan afgeleid worden door ϑ in $-\vartheta$ te veranderen.

(a) is de symbolische vorm van de vergelijking:

$$(1+ax^2)\frac{d^2u}{dx^2}+ax\frac{du}{dx}\pm n^2u=o$$

Deze kan men terugbrengen tot den eenvoudigen vorm.

$\frac{d^2u}{dt^2}\pm n^2u=o$ door de onderstelling

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax^2}}.$$

(b) is de symbolische vorm van de vergelijking:

$$x^2(x^2+a)\frac{d^2u}{dx^2}+(2x^2+a)x\frac{du}{dx}\pm n^2u=o$$

evenzoo als de eerste te reduceren tot $\frac{d^2u}{dt^2}\pm n^2u=o$

door de suppositie

$$t=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}}.$$

Evident verkrijgen wij dus de solutiën van (a) en (b) door

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax^2}}\text{ en }t=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}}$$

te substitueren in de solutie van

$$\frac{d^2u}{dt^2}\pm n^2u=o. —$$

Zoolang echter algemeen integrabele vormen ontbreken, moet men zich wel te vreden stellen met bijzondere. Elke geïsoleerde vergelijking, elke methode heeft dus haar nut, al leert zij ons slechts de oplossing van ééne vergelijking.

Wij kunnen daarom eene methode welke ons niet alleen vele integrabele vormen doet vinden, maar tevens de integralen daarvan onmiddellijk aan de hand doet, niet met stilzwijgen voorbijgaan.

Wij zullen deze methode behandelen na de Partiële vergelijkingen.

B. PARTIËLE DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN DIE ALS GEWONE WORDEN BEHANDELD.

§ 1. Door het gebruik der symbolische methoden wordt de integratie van Lineaire partiële Diff. vergelijkingen teruggebragt tot dezelfde bewerkingen, als die bij de integratie der gewone vergelijkingen van dezelfde klasse.

Elke gewone differentiaal vergelijking heeft, zooals uit het volgende nader blijken zal, een analogon onder de partiële, en de vormen der oplossingen zijn in beiden hetzelfde; met dien verstande, dat op de plaats waar wij bij oplossingen der gewone vergelijkingen vormen aantreffen, als $c e^{ax}$, bij partiële gevonden wordt

$$e^{ax \frac{d}{dy}} \varphi(y).$$

Deze laatste uitdrukking is de symbolische schrijfwijze voor het theorema van Taylor:

$$f(x+h) = \left\{1 + h\frac{d}{dx} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \right\} f(x) = e^{h\frac{d}{dx}} f(x);$$

zoo ook

$$f(x+h, y+k) = \left\{1 + \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right) + \tfrac{1}{2}\left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right)^2 + \right\} f(xy)$$

$$= e^{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}} f(xy).$$

Hiervan maakt men een ruim gebruik bij de symbolische oplossingen der partiële vergelijkingen, zooals duidelijker zal worden bij de behandeling. Men zij daarbij vooral voorzigtig met de teekens. Uit de formule $e^{\pm ax \frac{d}{dy}} f(y) = f(y \pm ax)$ volgt de regel dat wij het argument ax met hetzelfde teeken moeten aanbrengen in de functie.

Nemen wij nu voor f(y) bv. e^{-y} dan is echter zooals aanstonds uit de ontwikkeling zal blijken

$$e^{ax \frac{d}{dy}} e^{-y} = e^{-y-ax}.$$

men dient dus te letten op den vorm der functie.

Lossen wij bv. op de vergelijking

$$a \frac{du}{dx} + b \frac{du}{dy} = c.$$

Deze wordt geheel opgelost als:

$$a \frac{du}{dx} + b\,ku = c.$$

Stellen wij dus $\frac{d}{dy}$ constant, en lossen wij op als deze laatste,

$$\therefore u = \left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy}\right)^{-1} c = \frac{1}{a}\left(\frac{d}{dx} + \frac{b}{a}\frac{d}{dy}\right)^{-1} c$$

$$\therefore u = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a} x \frac{d}{dy}} \int e^{\frac{b}{a} x \frac{d}{dy}} . c\,dx.$$

Ontwikkel den vorm onder het integratie teeken dan zien wij dat $e^{\frac{b}{a} x \frac{d}{dy}} c = c$

$\therefore = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a} x \frac{d}{dy}} \int c\,dx = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a} x \frac{d}{dy}} (cx + c')$ en ontwikkelt men weêr, $(c' = \varphi(y))$

$$\therefore u = \frac{cx}{a} + \frac{1}{a} \varphi\left(y - \frac{b}{a} x\right).)$$

of daar φ geheel arbitrair is ook $u = \frac{cx}{a} + \varphi(ay - bx)$.

Men had natuurlijk even goed $\frac{d}{dx}$ als constante kunnen beschouwen; de oplossing ware dan geweest:

$$z = \frac{cy}{b} + \frac{1}{b}\varphi\left(x - \frac{a}{b}y\right) = \frac{cy}{b} + \varphi(bx - ay).$$

Uitdrukkingen als:

$$e^{\left(ax\frac{d}{dy}\right)^n}\varphi(y) \text{ of } e^{\left(ax\frac{d}{dy}\right)^{1/n}}\varphi(y)$$

kunnen wij niet anders dan door reeksen interpreteren of wel door bepaalde integralen voorstellen. Bij deze omzettingen heeft men het groote voordeel de niet te begrijpen vormen $e^{\left(x\frac{d}{dy}\right)^n}\varphi(y)$ te kunnen doen verdwijnen.

bv. Uit $\frac{dz}{dt} = a\frac{d^2z}{dx^2} - bz$ volgt:

$$z = e^{-bt} e^{at\frac{d^2}{dx^2}} f(x)$$

$$= e^{-bt}\left\{1 + at\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \tfrac{1}{2}a^2t^2\left(\frac{d}{dx}\right)^4 + \right\} f(x).$$

Zij nog gegeven:

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - a^2\left(\frac{d}{dy}\right)^2\right\} u = o.$$

Hieruit is op dezelfde wijze als hierboven te vinden, als men eerst $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - a^2\left(\frac{d}{dy}\right)^2$ in factoren ontbindt, kortom geheel zooals op bl. 33 is aangegeven voor vergelijkingen met constante coefficiënten;

$$u = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$$

Ware er een tweede lid geweest, dan hadde men de inverse operatie ook nog daarop moeten toepassen.

Stel bv. gegeven:

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - a^2\left(\frac{d}{dy}\right)^2\right\} u = xy,$$

Dan volgt:

$$u = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax) + \left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - a^2\left(\frac{d}{dy}\right)^2\right\}^{-1} xy.$$

Ontwikkelt dezen laatsten term, men vindt dan

$$= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{-2} + a^2\left(\frac{d}{dy}\right)^2\left(\frac{d}{dx}\right)^{-4} + \quad\right) xy.$$

$$\therefore \text{ omdat } \left(\frac{d}{dy}\right)^2 xy = 0 \qquad \left(\frac{d}{dy}\right)^2 y.f(x) = 0 \qquad \left(\frac{d}{dy}\right)^4 y.\varphi(x) = 0 \text{ enz.}$$

zoo kan men alle termen na de eerste weglaten, en is deze uitdrukking gelijk aan $\frac{x^3y}{6}$.

Voor meerdere veranderlijken is deze methode evenzeer toetepassen. Nemen wij bv. de bewegingsvergelijking van elastische platen van Poisson:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0.$$

$$\text{Stel daarin } a\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) = b,$$

$$\therefore z = \cos bt\,\varphi(x,y) + \sin bt\,\psi(x,y).$$

Ontwikkelt men de waarde van cos bt en sin bt; herstelt men daarin de waarde van b, en schrijft men dan nog:

$$\chi(xy) \text{ voor } \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\psi(x,y),$$

dan is

$$z = \varphi(xy) - \frac{a^2t^2}{2}\left(\frac{d^2}{dx} + \frac{d^2}{dy^2}\right)^2 \varphi(xy) + \frac{a^4t^4}{2.3.4}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)^4 \varphi(xy) +$$

$$+ \, a t \chi (xy) - \frac{a^3 t^3}{2.3} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right)^2 \chi (xy) + \ldots\ldots$$ [1])

Ook nog $\frac{d^2 z}{dx\,dy} - az = o$,

$$\therefore \; z = \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dy} - a \right)^{-1} o = \left.\frac{d}{dy}\right)^{-1} \left(\left(\frac{d}{dx} - a \frac{d}{dy} \right)^{-1} \right)^{-1} o.$$

$$z = \left.\frac{d}{dy}\right)^{-1} \left. e^{ax \frac{d}{dy}} \right)^{-1} \varphi (y) = \left. e^{ax \frac{d}{dy}} \right)^{-1} \int \varphi (y)\, dy. -$$

Los op de vergelijking:

$$\frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{d^3 z}{dy^3} = o.$$

De wortels der vergelijking $u^3 - a^3 = o$ zijn:

$$a, \; a \left\{ \cos \frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{3} \right\} \text{en } a \left\{ \cos \frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$\therefore \; z = e^{x \frac{d}{dy}} \varphi (y) + e^{-\frac{x}{2} \frac{d}{dy}} \cos \left(\frac{x \sqrt{3} \frac{d}{dy}}{2} \right) \varphi_1 (y)$$

---

[1]) Deze vorm van oplossing is slechts zeer zelden te gebruiken hoewel de juistheid bij proefneming volkomen wordt gestaafd. Dewijl zeer vele physische vraagstukken aanleiding geven tot partiële differentiaal vergelijkingen van bovengenoemden vorm, of wat hetzelfde is van den vorm

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a^2 \frac{d^2 u}{dy^2} = o$$

zouden wij zeer gebaat zijn met eene oplossing in eindigen vorm.

Wel heeft Fourrier in de Theor. Math. de la Chaleur de algemeene Integraal gegeven in den vorm van de som van twee bepaalde Integralen;

Ook Poisson, zie Mémoires de l'Institut 1818. Doch beide oplossingen hebben weinig waarde voor de praktijk.

Merkwaardig is nog de Integratie van nieuwer dagteekening door Carl Neumann. Hij spoort voor u eene functie van x en y op welke als potentiaal over een oppervlak beschouwd, aan de conditiën voldoet dat zij zelve en hare eerste diff. quotienten binnen bepaalde grenzen overal eindig en continu blijven, terwijl $\Delta^2 u = o$ is binnen dezelfde grenzen. Crelle bd. 59. p. 335. 1861.

$$+ e^{-\frac{x}{2}\frac{d}{dy}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}\,\frac{d}{dy}}{2}\right)\varphi_2(y).$$

Wij moeten altijd in het oog houden, dat het noodige aantal arbitraire functiën des noodig kan verkregen worden door de inverse operatie mede te voltrekken op O.

Al deze resultaten worden dus langs zeer eenvoudigen weg verkregen. De bewerking steunt geheel op die der gewone differentiaal vergelijkingen.

§ 2. *Partiële vergelijkingen opgelost volgens de algemeene methode van Lobatto.*

a. PARTIËLE VERG. 1ste ORDE.

De algemeene vergelijking is

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R$$

waarin P, Q en R functiën van x, y en z voorstellen.

Zeer wenschelijk zoude het zijn dat deze algemeene vergelijking kon opgelost worden; vooral zou het de behandeling, nu overladen met tal van bijzondere gevallen aanmerkelijk bekorten.

De pogingen die Lagrange heeft in het werk gesteld om volgens de gewone methoden tot de oplossing te geraken hebben zooals wij weten tot hetzelfde resultaat geleid.

Wij zullen de voornaamste gevallen dus laten volgen en daarbij geheel symbolisch te werk gaan. [1])

---

[1]) Lobatto van wien wij grootendeels deze methode ontleenen, gebruikt zeer verkorte notatien, welke de bewerking aanmerkelijk vereenvoudigen.

I. $$\frac{Q}{P} = a \qquad R = o$$

$$\frac{dz}{dx} + a\frac{dz}{dy} = o$$

De wijze van oplossing waarbij $\frac{d}{dy}$ voor een oogenblik constant gesteld wordt is in de vorige paragraaph behandeld. Wij zullen daarom een anderen weg inslaan, en daartoe gebruik maken van het symbool E uit het eerste hoofdstuk.

Schrijven wij daartoe de vergelijking in de gedaante:

$$\{l(E_x) + a\,l(E_y)\}\, z = o$$

dus $\{\,l\,E_x) + a\,l\,E_y\} = o$, waaruit aanstonds

$$E_x = (E_y)^{-a}$$

Dit gesubstitueerd in $z = E^x_x\, z_y$ geeft:

$$z = E^{-ax}_y\, z_{y.o} = e^{-ax\frac{d}{dy}} z_y = z_{y-ax} = \varphi(y - ax)$$

II. P, Q, en R functiën van x en y dan is de algemeene vergelijking

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R \qquad (1)$$

Stellen wij aanvankelijk R = o dus

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dx} = o \qquad (2)$$

Hieruit volgt

$$\frac{dz}{Qdx} + \frac{dz}{Pdy} = o.$$

Stellen wij vervolgens $\int Q\,dx = u$ en $\int P\,dy = t$, u en t zijn dan nog functiën van x en y en wij verkrijgen in plaats van (2)

$$\frac{dz}{du} + \frac{dz}{dt} = o \text{ waaruit de integraal}$$

$$z = \varphi\,(t-u)$$

D en telkens wanneer $P\,dy - Q\,dx$ eene exacte Differentiaal $d\,U$ voorstelt zullen wij hebben

$$t - u = \int (P\,dy - Qdx) = U$$

$$\therefore\ z = \varphi\,(U).$$

Is dit niet het geval dan zal men $(t-u)$ toch integrabel kunnen maken door een integrerenden factor μ en weer verkrijgen, als U dan de integraal er van voorstelt:

$$z = \varphi\,(U).$$

Indien $P = \varphi\,(y)$ en $Q = \psi\,(x)$ dan zal, indien wij stellen:

$$\int P\,dy = P^1 \text{ en} \int Q\,dx = Q^1$$

$$z = \varphi\,(P^1 - Q^1)$$

$$\text{b. v. } y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = o \text{ of } \frac{dz}{xdx} - \frac{dz}{ydy} = o$$

$$\therefore\ z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

Indien $P = \varphi\,(x)$ en $Q = \psi\,(y)$, zal men nemen

$$\int \frac{dx}{P} = P^1, \int \frac{dy}{Q} = Q^1 \text{ en}$$

$$z = \varphi\,(P^1 - Q^1)$$

$$\text{bv. } x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = o \therefore P^1 = lx,\ Q^1 = ly$$

en dus

$$z = \varphi\left(l\frac{x}{y}\right) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Stellen wij eenvoudigheidshalve $\frac{Q}{P} = p$ dan wordt (2) als wij ook nog $\frac{d}{dx} + p\frac{d}{dy}$ voorstellen door D_p

$$D_p\, z = o.$$

Deze vergelijking zal dus tot integraal hebben $z = \varphi(u)$.

Zij nu meer algemeen $z = P\,\varphi(u)$

waarin P eene functie van x en y, dan zal men achtereenvolgens hebben:

$$D_p\, z = D_p\, P.\,\varphi(u)$$

$$D_p^2\, z = D_p^2\, P.\,\varphi(u)$$

$$D_p^n\, z = D_p^n\, P.\,\varphi(u)$$

evenzeer $\left(\text{indien } D_p^{-1} = S_p\right)$

$$S_p^n\, z = S_p^n\, P\,\varphi(u)$$

Is P eene functie van y alleen, dan wordt:

$D_p = p\frac{dP}{dy}\varphi(u)$ terwijl de volgende differentiatiën hoe langer hoe ingewikkelder worden, wegens de aanwezigheid van p. Stelt men in de laatste vergelijking:

$$\frac{dP}{dy} = P^1$$

$$\therefore\; S_p\left(p\,P^1\,\varphi(u)\right) = \int P^1\,dy\,.\,\varphi(u).$$

De eerste integraal van de vergelijking

$D_p^n\, z = o$ zal nu zijn:

$D_p^{n-1}\, z = \varphi(u)$ terwijl de tweede ten gevolge der voorgaande formulen

$$D_p^{n-2}\, z = x\,\varphi(u) + \varphi^1(u)$$

en in 't algemeen

$$z = x^{n-1}\,\varphi(u) + x^{n-2}\,\varphi^1(u) + \ldots \varphi^{n-1}(u)$$

waarin n arbitraire functiën voorkomen van u; deze uitdrukking zal men bij het tweede lid der vergelijking $S_p^n z = S_p^n P \varphi(u)$ moeten voegen om de complete waarde van $S_p^n z$ te verkrijgen.

Vatten wij nu de volledige verg.:

$$P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} = R \text{ weer op.}$$

Stellen wij daarin $\frac{Q}{P} = p$, $\frac{R}{P} = M$ dan wordt de vorm

$$D_p z = M.$$

$$z = S_p M + S_p o = S_p M + \varphi(u)$$

(u even als te voren de integraal zijnde van $dy - p\,dx$).

De hoofdzaak is nu nog de waarde te verkrijgen van $S_p M$. Stellen wij daartoe M ontwikkeld in eene reeks termen van de algemeene gedaante $X \varphi(u)$ (X alleen eene functie van x). Nu is het duidelijk, daar $S_p X \varphi(u) = \int X\,dx\ \varphi(u)$, dat de geheele bewerking neerkomt op het elimineren van y met behulp der vergel. $u = f(x \cdot y)$ en vervolgens te integreren.

$M\,dx = \psi(x \cdot u)\,dx$, terwijl men daarin u eerst als constante beschouwt en na de integratie vervangt door hare waarde in x en y.

Ter opheldering dezer theorie zullen wij een paar voorbeelden hiervan geven:

1°. $$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = n \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$\therefore p = \frac{y}{x},\ M = n \sqrt{\left((1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}$$

Uit $dy - \frac{y}{x} dx = o$ volgt $u = \frac{y}{x}$

$$\therefore M = n\sqrt{(1+u^2)}, \int M\,dx = nx\sqrt{(1+u^2)} = n\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$\therefore z = n\sqrt{(x^2+y^2)} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2°. $$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$p = \frac{y}{x} \quad u = \frac{y}{x} \quad M = ax + by + \frac{cy^2}{x}$$

$$\int m dx = \frac{1}{2}\left(a + bu + cu^2\right)x^2$$

$$z = \frac{1}{2}\left(ax^2 + bxy + cy^2\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. P, Q en R functien van x, y en z.

In 't algemeen is de vergelijking niet optelossen zooals reeds gezegd is. Wel voor een groot aantal bijzondere gevallen, bv. voor:

1°. $R = o$

2°. $\alpha P + \beta\varphi + \gamma R = o$ (α, β, γ constante factoren)

3°. $R = Py + Qx$

4°. $R = \dfrac{Qx - Py}{x^2}$

5°. $R = PY\dfrac{d}{dx}X + QX\dfrac{d}{dy}Y$ (X en Y respectief functiën van x en y)

6°. $R = z(P + aQ)$

7°. $R = az\left(\dfrac{P+Q}{x+y}\right)$

enz.

1°. Wordt geheel opgelost alsof z constant ware.

2°. De algemeene vergel. wordt dan

$$\frac{dz}{dx} + \frac{Q}{P}\frac{dz}{dy} = -\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\frac{Q}{P} \text{ of}$$

$$D_p z = -\frac{1}{\gamma}(\alpha + \beta p) \text{ en daar } S_p p = y$$

$$\therefore\ z = -\frac{\alpha x + \beta y}{\gamma} + \varphi(u)$$

3°. $D_p z = y + px = D_p\, xy$

$$\therefore\ z = xy + \varphi(u).$$

4°. $D_p z = \frac{px - y}{x^2} = D_p \frac{y}{x}$

$$\therefore\ z = \frac{y}{x} + \varphi(u).$$

enz.

Kortom zoo er eenige betrekking bestaat tusschen de grootheden P, Q en R en ook voor de bijzondere gevallen dat een of twee dezer grootheden functien van x en y alleen zijn, dan bestaat er groote waarschijnlijkheid dat de vergelijking integrabel is.

b. PARTIËLE VERGELIJKINGEN TWEEDE ORDE.

I. De oplossing van vergelijkingen met constante coëff. biedt voor het geval dat het tweede lid constant is in 't geheel geene zwarigheden. De vergelijking kan volgens dezelfde notatie als in a geschreven worden

$$D_a D_{a^1} z = 0$$

waaruit onmiddellijk de twee eerste integralen volgen

$$D_a z = 0 \qquad D_{a^1} z = 0$$

en dus $z = \varphi(y - ax) \qquad z = \psi(y - a^1 x)$.

De som dezer vormt de complete integraal van z.

Zijn de wortels gelijk, dus

$$D_a^2 z = 0$$

dan volgt hieruit

$$z = \varphi(y - ax) + x\,\varphi_1(y - ax).$$

Is er een tweede lid aanwezig dan zoeke men eerst de eerste integraal

$$D_{a^1} z = S_a V + \varphi (y - ax)$$

$S_a V = V^1$ kan men vinden volgens het vorige

$$\therefore z = S_{a^1} V^1 + \varphi^1 (y - a^1 x)$$

bv. $$\frac{d^2z}{dx^2} + 2a \frac{d^2z}{dx\,dy} + (a^2 - b^2) \frac{d^2z}{dy^2} = xy$$

$$D_{a+b} D_{a-b} z = xy$$

$$V_1 = S_{a+b}\, xy = \frac{x^2y}{2} - \frac{ax^3}{6}$$

dus $$S_{a-b} V^1 = S_{a+b} S_{a-b}\, xy = S_{a+b} \frac{x^2y}{2} - S_{a+b} \frac{ax^3}{6}$$

$$= \frac{1}{6} x^3y - \frac{1}{24} (a + b + a - b)\, x^4$$

en

$$z = \frac{1}{6} x^3y - \frac{a}{12} x^4 + \varphi (y - (a + b) x) + \varphi^1 (y - (a - b)\, x)$$

II. Meer algemeen is de navolgende vergelijking waarin z en haar eerste differentiaal coefficiënten voorkomen

$$\frac{d^2z}{dx^2} + A \frac{d^2z}{dx\,dy} + B \frac{d^2z}{dy^2} + C \frac{dz}{dx} + D \frac{dz}{dy} + Ez = V \quad (1)$$

Zijn a en a^1 de wortels der vergelijking $m^2 - Am + B = o$ dan worden de drie eerste termen

$D_a D_{a^1} z$, en uit de relatie

$$D_a z = \frac{dz}{dx} + a \frac{dz}{dy}, \quad D_{a^1} z = \frac{dz}{dx} + a^1 \frac{dz}{dy}$$ oplossende

$\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ zoo vinden wij

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a^1 - a} (a^1 D_a z - a D_{a^1} z), \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{a^1 - a} (D_{a^1} z - D_a z)$$

en dus na de vereenvoudigende stelling

$$\frac{Ca - D}{a - a^1} = n \qquad \frac{Ca^1 - D}{a^1 - a} = n^1 \qquad \therefore n + n^1 = C$$

wordt (1)

$$D_a D_{a^1} z + n D_a z + n^1 D_{a^1} z + E z = V.$$

$$\text{of } \{(D_a + n)(D_{a^1} + n^1)\} z + (E - nn^1) z = V$$

Beschouwen wij afzonderlijk de vergelijking 2de orde:

$$(D_a + n)(D_{a^1} + n^1) z = o$$

dan kunnen wij daaruit aanstonds de eerste integralen afleiden

$$D_a z + nz = o \qquad D_{a^1} z + n^1 z = o$$

$$\text{of } \frac{D_a z}{z} = -n \qquad \frac{D_{a^1} z}{z} = -n^1$$

en hieruit de particuliere waarden voor de tweede integraal

$$z = e^{-nx} \varphi (y - ax) \qquad z = e^{-n^1x} \psi (y - a^1x) \quad \text{dus}$$

de complete waarde dezer integraal is:

$$z = e^{-nx} \varphi (y - ax) + e^{n^1x} \psi (y - a^1x)$$

Is dus de term $E - nn^1 = o$ dan zal bovenstaande vergel. (1) integrabel zijn.

III. Voor vergelijkingen met variabele coefficiënten 2de orde is het duidelijk dat volgens dezelfde methode conditiën van integrabiliteit kunnen opgespoord worden. Dat de vele coefficiënten der algemeene vergelijking

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{d^2 z}{dx\,dy} + Q\frac{d^2z}{dy^2} + R\frac{dz}{dx} + S\frac{dz}{dy} + Tz = V$$

aanleiding geven tot zeer vele bijzondere gevallen is uit het voorgaande genoegzaam nategaan.

Om te groote wijdloopigheid te vermijden zullen wij deze eigenaardige methoden, zoo meesterlijk bewerkt door Lobatto verlaten, en voor enkele andere belangrijke oplossingen eene kleine plaats inruimen.

IV. Door verandering der onafhankelijk veranderlijken kan men veelal ook de vergelijkingen 1ste orde integreren, hoewel de vorm der coefficiënten vrij beperkt blijft bij deze methode.

Zij bv. 1°. $x\dfrac{dz}{dx} - y\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{x^2}{y}$

Stel dan $\dfrac{dx}{x} = du$, $\dfrac{dy}{y} = dv$

$$\therefore \left(\frac{d}{du} - \frac{d}{dv}\right) z = e^{2u}\, e^{-v}$$

$$z = \left(\frac{d}{du} - \frac{d}{dv}\right)^{-1} e^{2u}\, e^{-v}$$

$$= e^{u\frac{d}{dv}} \int e^{-u\frac{d}{dv}} e^{2u}\, e^{-v}\, dv$$

$$e^{-u\frac{d}{dv}} e^{-v} = e^{-v+u}$$

wat uit de ontwikkeling blijkt zie bl. (67)

$$\therefore z = e^{u\frac{d}{dv}} \left\{ \frac{1}{3} e^{-v+3u} + \varphi(v) \right\}.$$

$$= \frac{1}{3} e^{-v+2u} + \varphi(u+v).$$

Herstelt men de waarden voor u en v dan is het eindresultaat

$$z = \frac{x^2}{3y} + \psi(x,y).$$

2°. In de vergelijking $\sec x \dfrac{dz}{dx} + a\dfrac{dz}{dy} = 2 \operatorname{ctg} y$

stelle men eenvoudig $\sin x = u$, om aanstonds de integraal te vinden

$$z = e^{\sin x \operatorname{cotg} y}\, \varphi\,(y - a \sin x).$$

3°. Ook nog

$$x\frac{dz}{dx} + (1+y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{dy} = xy$$

$$\text{stel } \frac{dx}{x} = du \qquad \frac{dy}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = dv \text{ dan is:}$$

$$\frac{dz}{du} + \frac{dz}{dv} = \frac{e^u}{2}(e^v - e^{-v}) \text{ waaruit}$$

$$z = \frac{e^{u+v}}{4} - \frac{u\,e^{u-v}}{2} + \varphi(v-u)$$

Substitueert men hierin voor u en v hunne waarden in x en y

$$\therefore z = \frac{x}{4}\left\{(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + y\right\} - \frac{x}{2}\left\{(1+y^2)^{\frac{1}{2}} - y\right\}\log x$$

$$+ f\left\{\frac{(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + y}{x}\right\}. -$$

Vergelijkingen van tweede en hooger orde laten deze handelwijze niet toe, tenzij eene symmetrische gedaante de transformatien mogelijk maakt.

Zoo kan op deze wijze geïntegreerd worden:

$$x^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n z + n x^{n-1} y\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} z + \ldots y^n\left(\frac{d}{dy}\right)^n z = 0.$$

Stel weer $x = e^u$, $y = e^v$. Nu is volgens bl. (44)

$$x^r y^s \frac{d^{r+s} z}{dx^r\, dy^s}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - r + 1\right) \times \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dy} - 1\right)\ldots\left(\frac{d}{dy} - s + 1\right) z.$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\right]^r \left[\frac{d}{dy}\right]^s z. \quad ^{1)}$$

De gegevene vergelijking krijgt dus den vorm:

$$\left[\frac{d}{du}\right]^n + n\left[\frac{d}{du}\right]^{n-1}\left[\frac{d}{dv}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{d}{du}\right]^{n-2}\left[\frac{d}{dv}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{d}{dv}\right]^n 0.$$

Nu is, volgens het theorema van Vandermonde, het eerste lid dezer laatste vergelijking gelijk aan:

$$\left[\frac{d}{du} + \frac{d}{dv}\right]^n$$

---

[1]) Zie Boole Finite Diff. p. 6 & Diff. Eq. Suppl. p. 191.

$$\left[\frac{d}{du}+\frac{d}{dv}\right]^n z = \left(\frac{d}{du}+\frac{d}{dv}\right)\left(\frac{d}{du}+\frac{d}{dv}-1\right)\ldots\ldots) z = o;$$

$$\therefore z = \varphi(v-u) + e^u \varphi_1(v-u) + \ldots + e^{(n-1)u}\varphi_{n-1}(v-u)$$

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) + n f_1\left(\frac{y}{x}\right) + .$$

Zulke symmetrische vormen als deze komen slechts zeldzaam voor.

c. Meer van belang is de integratie van eene klasse vergelijkingen hooger orde, geheel volgens dezelfde methode, als uiteengezet is op bl. (39).

Stellen wij eene homogene functie van den a^{den} graad van de veranderlijken $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ voor door u_a, dan is [1]):

$$x_1 \frac{du_a}{dx_1} + x_2 \frac{du_a}{dx_2} + \ldots x_n \frac{du_a}{dx_n} = a\, u_a.$$

Verder volgt hieruit, dat, indien wij het zamengestelde symbool

$$x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + \ldots x_n \frac{d}{dx_n}$$

voorstellen door π

$$\pi\, u_a = a\, u_a, \qquad \pi^2 u_a = a^2 u_a$$

$$\text{en } f(\pi)\, u_a = f(a)\, u_a.$$

Van deze vergelijking is het laatste lid f (a) u de voorstelling van de complete waarde van het eerste lid, omdat het de eenige waarde daarvan is, indien $f(\pi)$ eene geheele en rationele functie is van π, — en van eene particuliere waarde, wanneer $f(\pi)$ inverse factoren bevat.

Indien wij dus hebben de vergelijking:

---

[1]) Sturm, Anal. I, p. 156.

$$f(\pi)\,u_a = X_a + X_b +$$

(nb. $f(\pi)$ van den vorm $\pi^n + A_1\,\pi^{n-1} + \ldots . A_n$ en X_a; $X_b, \ldots .$ homogene functiën van $x_1, x_2 \ldots .$)

$$\therefore u = f(\pi) \Big\}^{-1} X_a + f(\pi)\Big\}^{-1} X_b + \ldots . f(\pi)\Big\}^{-1} o$$

$$= f(a)\Big\}^{-1} X_a + f(b)\Big\}^{-1} X_b + \ldots . f(\pi)\Big\}^{-1} o.$$

De waarde van $f(\pi)\Big\}^{-1} o$ vinden wij, door deze functie in eene reeks termen te ontbinden van den vorm:

$A_1\,(\pi - a_1)^{-1}$, waarin $a_1, a_2 \ldots .$ de wortels zijn van

$$f(m) = o$$

$$(\pi - a)^{-1}\,o = u_a + v_a + w_a + \ldots .$$

waarin u_a, v_a, $w_a \ldots .$ arbitraire homogene functiën van den a^{den} graad zijn van $x_1, x_2, \ldots .$

Komen er i gelijke wortels a, dan zal men door inductie, gegrond op herhaalde toepassing van Lagrange's methode, tot oplossing van partiële lineaire differentiaal vergelijkingen 1^{ste} orde vinden:

$$(\pi - a)^{-i}\,o = u_a\,(l\,x_1)^{i-1} + v_a\,(l\,x_1)^{i-2} + .$$

Er blijft nu nog over te beslissen, wanneer eene gegevene vergelijking tot den vorm $f(\pi) = X_a + X_b + \ldots .$ kan gebragt worden.

Scheiden wij elk symbool $\frac{d}{dx}$ in twee deelen $\frac{d'}{dx}$ en $\frac{d''}{dx}$;

$\frac{d'}{dx}$ alleen werkende op x, waar deze in u,

$\frac{d''}{dx}$ waar zij in π voorkomt. Zij dus:

$$x_1\frac{d^1}{dx_1} + x_2\frac{d^1}{dx_2} + \ldots . = \pi'$$

$$\text{en } x_1\frac{d''}{dx_1} + x_2\frac{d''}{dx_2} + \ldots . = \pi''$$

$$\therefore \pi = \pi' + \pi''.$$

Uit het gestelde volgt ook:

$$\pi' u = (\pi - \pi'') u = \pi u$$

(nb. daar π'' niet op u opereert, maar alleen op π) en dus ook:

$$\pi_1^2 u = (\pi - \pi'') \pi u \qquad (a)$$

Doch daar π'' hierin alleen betrekking heeft op de variabele, voor zoover deze voorkomt in π, en deze symbool eene homogene functie is van den eersten graad, zoo kunnen wij π'' vervangen door de eenheid.

$$\therefore \pi_1^2 u = (\pi - 1) \pi u$$

Op dezelfde wijze wordt aangetoond:

$$\pi_1^r u = (\pi - r + 1)(\pi - r + 2) \ldots (\pi - 1) \pi u.$$

Wij kunnen hieruit opmaken, dat elk partiële differentiaal vergelijking welke in den vorm $f(\pi)$ kan gebragt worden, in de onderstelling dat $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2} \ldots$ alleen opereren op de variabelen, voorkomende in u, — veranderd kunnen worden in:

$$\varphi(\pi) u = X$$

waarin deze beperking is opgeheven.

Zij tot voorbeeld hiervan:

$$\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 + 2\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}\right) + \left(y\frac{d}{dy}\right)^2 - n\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}\right) + n\right\} u$$
$$= x^2 + y^2 + x^3.$$

Stel $x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} = \pi$

Dan is in de eerste onderstelling, nl. dat $\frac{d}{dx}$ en $\frac{d}{dy}$ alleen werken op de variabelen x en y in u:

$$(\pi_1^2 - n\pi_1 + n) u = x^2 + y^2 + x^3$$

Na de opheffing dezer restrictie:

$$\{\pi(\pi-1)-n\pi+n\}\,u=x^2+y^2+x^3$$

$$(\pi-n)(\pi-1)\,u=x^2+y^2+x^3$$

$$u=\{(\pi-n)(\pi-1)\}^{-1}(x^2+y^2+x^3)+\{(\pi-n)(\pi-1)\}^{-1}o$$

$$u=\frac{x_2+y^2}{(2-n)(2-1)}+\frac{x^3}{(3-n)(3-1)}+u_n+v_1$$

u_n eene homogene functie n^{de}.

v_1 eene homogene functie 1^{ste} orde.

Immers

$$\{(\pi-n)(\pi-1)\}^{-1}o=\frac{1}{n-1}(\pi-n)^{-1}o-\frac{1}{n-1}(\pi-1)^{-1}o.$$

Stel $(\pi-n)^{-1}o=u_n$,

$$n\,u_n=x\frac{d}{dx}u_n+y\frac{d}{dy}u_n,$$

$\therefore$ u_n eene homogene functie n^{de} orde.

In het voorgaande had dus π den vorm

$$x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots$$

en X was ééne of de som van meerdere homogene functiën der veranderlijken.

Voor het geval dat π de meer algemeene gedaante heeft [1])

$$\pi=X_1\frac{d}{dx_1}+X_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{d}{dx_n}\qquad\text{(a)}$$

waarin $X_1, X_2, \ldots$, evenzeer als het tweede lid X, willekeurige functiën zijn van de veranderlijken $x_1, x_2, \ldots$, is de oplossing mogelijk.

---

[1]) Vergelijk Spottiswoode over de theorie van het operatieve symbool $x\,i_1\frac{d}{dx_1}+x\,i_2\frac{d}{dx_2}+x\,i_3\frac{d}{dx_3}+\ldots$ Crelle Bd. 59. p. 367.

Eerst zullen wij aantoonen, hoe men kan weten of eene vergelijking tot den vorm

$$f(\pi)\,u = X$$

kan gebragt worden, en dan, hoe zulk een vergelijking geintegreerd wordt.

Stel de gegevene vergelijking van de n^{de} orde, dan zal de symbolische vorm, wil de reductie mogelijk zijn, noodzakelijk de gedaante hebben

$$\left\{ \pi^n + A_1 \pi^{n-1} + A_2 \pi^{n-2} + \ldots A_n \right\} u = X.$$

Nu zouden, indien men deze symbolische vergelijking weêr in den gewonen vorm schreef, uit π^n de hoogste differentiaal coefficiënten ontstaan; omgekeerd zullen dus ook de termen, waarin de hoogste differentiaal coefficiënten voorkomen, ons in staat stellen, π te bepalen.

Wij vinden daaruit dus π, en verder de coefficiënten A_1, A_2.... op dezelfde wijze, als op bl. (39) is aangegeven.

Zij de gevonden vorm

$$\pi^n + A_1 \pi^{n-1} + \ldots . A_n = 0.$$

Indien alle wortels van deze vergelijking ongelijk zijn, dan hebben wij eene serie termen van den vorm

$$(\pi - a)^{-1} X;$$

en elke zoodanige term sluit in zich de oplossing van eene partiële differentiaal vergelijking van de eerste orde van den vorm

$$\left\{ X_1 \frac{d}{dx_1} + X_2 \frac{d}{dx_2} + \ldots . X_n \frac{d}{dx_n} - a \right\} u = X \qquad \text{(b)}$$

Voor gelijke wortels zullen er partiële vergelijkingen ontstaan van hooger orde. Doch ook de oplossing daarvan kan afgeleid worden uit het overeenkomstige geval van liniaire differentiaal vergelijkingen met constante coefficiënten.

Om dit aan te toonen, voeren wij een nieuw systeem onafhankelijk veranderlijken in: $y_1, y_2, \ldots y_n$ onderworpen aan de conditie $\pi = \frac{d}{dy_1}$.

Om te bewijzen, dat er zulk een systeem, dat zamenhangt, bestaat, en het te vinden, stellen wij achtereenvolgens $y_1, y_2, y_3 \ldots$ als subjecten in de plaats van u in de symbolische vergelijking (a). Wij krijgen dan:

$$X_1 \frac{dy_1}{dx_1} + X_2 \frac{dy_1}{dx_2} + \ldots X_n \frac{dy_1}{dx_n} = 1;$$

waaruit, volgens Lagrange,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots \frac{dx_n}{X_n} = dy_1. \qquad \text{(c)}$$

Nemen wij verder eene der overige nieuwe veranderlijken als subject aan, bv. y_i, dan hebben wij de vergelijking

$$X_1 \frac{dy_i}{dx_1} + X_2 \frac{dy_i}{dx_2} + \ldots = o;$$

waaruit het auxiliaire systeem

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dy_i}{o};$$

en integreren wij dit systeem, bestaande uit $n - 1$ vergelijkingen, dan zullen de eerste leden der integralen daarvan, geschreven in de gedaante

$$y_2 = a_2, \; y_3 = a_3 \ldots y_n = a_n,$$

de waarden geven voor $y_2, y_3 \ldots$, allen uitgedrukt in functiën der veranderlijken $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Voert men nu deze nieuwe veranderlijken in, dan neemt de vergelijking de gedaante aan.

$$f\left(\frac{d}{dy_1}\right)u = \varphi\,(y_1\,,\; y_2\,,\ldots y_n).$$

Deze moet nu geïntegreerd worden, alsof u en y_1 de eenige veranderlijken waren, terwijl eene willekeurige functie van y_2, $y_3 \ldots y_n$ de arbitraire constante vervangt.

Eindelijk nog moeten wij voor y_1, $y_2, \ldots y_n$ de waarden substitueren, uitgedrukt in x_1, $x_2, \ldots x_n$. —

Deze theorie zal door het volgende voorbeeld worden toegelicht.

$$\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + 2\,(1-x^2)\,(1-xx_1)\frac{d^2}{dx\,dx_1} + (1-xx_1)^2\,\frac{d^2}{dx_1{}^2}\right.$$
$$\left. -\,2u\,(1-x^2)\,\frac{d}{dx} - (x + x_1 - 2x^2\,x_1)\frac{d}{dx_1} + n^2\right\}\,u = o.$$

De drie eerste termen, waarin de hoogste differentiaal coëfficienten voorkomen, geven ons aanstonds:

$$\pi = (1-x^2)\,\frac{d}{dx} + (1-xx_1)\frac{d}{dx_1}.$$

Om de functie van π te vinden, stellen wij die gelijk $(\pi - a)\,(\pi - b)$, na ontwikkeling daarvan, en vergelijking met den gegevenen vorm, vindt men:

$a = o \quad b = o \quad \therefore$ is de symbolische vergelijking:

$$(\pi^2 + n^2)\,u = o.$$

Voeren wij nu twee nieuwe veranderlijken in: y_1 en y_2, en zoodanig dat wij verkrijgen $\pi = \dfrac{d}{dy_1}$;

Wij moeten dan de twee vergelijkingen oplossen:

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{dx_1}{1-xx_1} = dy_1$$

waaraan het volgende systeem integralen beantwoordt:

$$\frac{x_1 - x}{\sqrt{1-x^2}} = c \qquad y_1 = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c_1$$

Indien wij nu stellen $y_1 = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en

$$y_2 = \frac{x_1 - x}{\sqrt{1-x^2}},$$

dan wordt de getransformeerde vergelijking:

$$\left(\frac{d^2}{dy_1^2} + n^{2'}\right) u = o,$$

$$\therefore\ u = \cos n y_1\, \varphi(y_2) + \sin n y_1\, \psi(y_2)$$

of indien wij voor y_1 en y_2 hunne waarden, uitgedrukt in x en x_1 substituëren,

$$u = \cos\left\{nl\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right\} \varphi\left(\frac{x_1 - x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \sin\left\{nl\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right\} \psi\left(\frac{x_1 - x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

De solutie der algemeene vergelijking is dus in werkelijkheid teruggebragt op het zoeken van de integralen uit een systeem simultane vergelijkingen. —

d. Terwijl het bij de gewone vergelijkingen met veranderlijke coefficiënten niet van belang ontbloot is zooveel mogelijk integrabele vormen optesporen, niet minder is dit het geval bij de partiële, waarbij het getal oplosbare vormen ongelijk veel kleiner is dan bij de gewone.

Dezelfde methode die in Hoofdstuk III zal worden uiteengezet om nieuwe integrabele vergelijkingen te vinden, kan ook hier dienen tot hetzelfde doel.

De meeste vergelijkingen, door hare hulp gevonden, zijn gemakkelijk te veranderen in analoge vormen van partiële vergelijkingen, door voor de constanten te substitueren eenige functie van $\frac{d}{dy}$.

Bv.: Substitueer in (a) blz. 99

$$Q \text{ voor } \frac{\psi' x}{\psi x} + \frac{m}{x}; \qquad Q_1 \text{ voor} \int Q\, dx$$

$$\therefore Q' = \frac{\psi'' x}{\psi x} - \left(\frac{\psi' x}{\psi x}\right)^2$$

dan wordt deze vergelijking

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2Q\frac{du}{dx} + \left\{c^2 + Q^2 + Q' - \frac{m(m+1)}{x^2}\right\} u = P$$

en de solutie

$$u = x^m e^{-Q1} \left(\frac{d^2}{dx^2} + c^2\right)^{m-1} \left\{x^{-1} \left(\frac{d^2}{dx^2} + c^2\right)^{-m} \left(x^{-(m-1)} e^{Q_1 P}\right)\right\}$$

Schrijven wij nu hierin:

$$Q = f\left(x_1 \frac{d}{dy}\right) \text{ en } c = \sqrt{-1}\, k \frac{d}{dy},$$

dan verkrijgen wij de partiële vergelijking met hare oplossing:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2f\left(x_1 \frac{d}{dy}\right)\frac{du}{dx} - k^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + \left(f^2 + f' - \frac{(m(m+1)}{x^2}\right) u = P.$$

$$\text{en } u = x^m e^{-\int f\left(x_1 \frac{d}{dy}\right) dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \frac{d^2}{dy^2}\right)^{m-1} \left\{x^{-1} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \frac{d^2}{dy^2}\right)^{-m} .\right.$$

$$\left. .\left(x^{-(m-1)} e^{\int f\left(x_1 \frac{d}{dy}\right) dx} P\right)\right\}.$$

Als een voorbeeld daarvan nemen wij:

$$f\left(x_1 \frac{d}{dy}\right) = \frac{n}{x}\frac{d}{dy}.$$

dan wordt de vergelijking:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{d^2 u}{dx\, dy} + \left(\frac{n^2}{x^2} - k^2\right)\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{n}{x^2}\frac{du}{dy} - \frac{m(m-1)}{x^2} u = \psi(x.y)$$

en de solutie daarvan:

$$u = x^m e^{-n\, l\, x \frac{d}{dy}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \frac{d^2}{dy^2}\right)^{m-1} \left\{x^{-1} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2 \frac{d^2}{dy^2}\right)^{-m}\right.$$

$$\left.\left\{x^{-(m-1)} e^{n\, l\, x \frac{d}{dy}} \psi(x, y)\right\}\right\}.$$

Nu is zooals wij weten:

$$e^{n\, l\, x \frac{d}{dy}}\, \psi(x, y) = \psi(x, y + n\, l\, x)$$

$$e^{-n\, l\, x \frac{d}{dy}}\, \psi(x, y) = \psi(x, y - n\, l\, x).$$

De geheele moeijelijkheid der oplossing ligt nu nog in de solutie van

$$\frac{d^2u}{dx^2} - k_2 \frac{d^2u}{dy^2} = \Psi(x, y)$$

Hieruit is gemakkelijk te vinden:

$$u = \frac{1}{2k\frac{d}{dy}} e^{kx\frac{d}{dy}} \int \Psi(x, y - kx)\, dx$$

$$- \frac{1}{2k\frac{d}{dy}} e^{-kx\frac{d}{dy}} \int \Psi(x, y + kx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2k} \Psi_1(x\,.\,y) + \frac{1}{2k} \Psi_2(x\,.\,y) + \varphi(y + kx) + \chi(y - kx).$$

waarin φ en χ arbitraire functiën, Ψ_1 en Ψ_2 door integratie bepaald worden.

Nemen wij de vrij algemeene vorm $\pi x \frac{d}{dy} + \xi x$, (waarin π en ξ bepaalde functiën van x voorstellen) aan in de plaats van $f\left(x\,.\,\frac{d}{dy}\right)$, dan wordt de vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\pi x \frac{d^2u}{dx\, dy} + \left\{(\pi x)^2 - k^2\right\}\frac{d^2u}{dy^2} + 2\xi x \frac{du}{dx} + (\pi^1 x + 2\pi x\,.\,\xi x)\frac{du}{dy}$$

$$+ \left\{(\xi x)^2 + \xi^1 x - \frac{m(m-1)}{x^2}\right\} u = \Psi(xy)$$

en de solutie wordt

$$u = x^m e^{-\xi_1 x} e^{-\pi_1 x \frac{d}{dy}} \left\{\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \frac{d^2}{dy^2}\right\}^{m-1} \left\{x^{-1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \frac{d^2}{dy^2}\right)^{-m}\right.$$

$$\left.\left\{x^{-(m-1)} e^{\xi_1 x} e^{-\pi_1 x \frac{d}{dy}} \Psi(x\,.\,y)\right\}\right\}.$$

Voert men nu twee nieuwe veranderlijken p en q in, aan de oude gebonden door de vergelijkingen

$$p = y - \pi_1 x + k x \quad \text{en} \quad -q = y - \pi_1 x + k x.$$

dan verdwijnt π uit de vergelijking en k uit de solutie. Wij verkrijgen:

$$\frac{d^2u}{dp\,dq} + \frac{1}{2k}\xi\left(\frac{p+q}{2k}\right)\cdot\left(\frac{du}{dp}+\frac{du}{dq}\right) + \frac{1}{4k^2}\left\{\left(\xi\left(\frac{p+q}{2k}\right)\right)^2 + 2k\left(\frac{du}{dp}+\frac{du}{dq}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{m(m-1)}{(p+q)^2}\right\} u = \varphi(p,q).$$

Is nu ξ van den vorm $\frac{a}{x}$, dan komt aanstonds de bekende vergelijking te voorschijn:

$$\frac{d^2u}{dp\,dq} + \frac{a}{p+q}\left(\frac{du}{dp}+\frac{du}{dq}\right) + \frac{a(a-1) - m(m-1)}{(p+q)^2} = \varphi(p.q)$$ [1])

met de solutie

$$x^{m-a}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dy^2}\right)^{m-1}\left\{x^{-1}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dy^2}\right)^{-m}\left\{x^{a-m+1}\varphi_1(x,y)\right\}\right\}$$

φ_1 bepaald uit φ door de vergelijkingen

$$p = x + y \text{ en } q = x - y.$$

Deze vergelijking sluit weêr een aantal anderen in zich bv. voor de suppositiën $a = o$, $a = m$, enz.

---

[1]) Euler. Calc. Vol. III.

HOOFDSTUK III.

OPLOSSING DER DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN DOOR VERWISSELING VAN SYMBOOL EN ARGUMENT.

Indien wij de differentiatie ten opzigte van de onafhankelijk veranderlijke voorstellen door het symbool δ, en indien $\varphi(\delta)$ eene functie van δ is, zamengesteld uit geheele magten [1]), dan kunnen wij gemakkelijk aantoonen dat [2]):

$$\varphi(\delta)\{\psi x.u\} = \psi x.\varphi(\delta)u + \psi' x.\varphi'(\delta)u + \tfrac{1}{2}\psi'' x.\varphi''(\delta)u + \qquad (a)$$

en $$\varphi x\,\psi(\delta)u = \psi(\delta)\{\varphi x.u\} - \psi'(\delta)\{\varphi' x.u\} + \tfrac{1}{2}\psi''(\delta)\{\varphi'' x.u\} - . \qquad (b)$$

Immers, scheidt men in het eerste lid van (a) δ in $\frac{d'}{dx}$ en $\frac{d''}{dx}$, laat $\frac{d'}{dx}$ alleen betrekking hebben op de veranderlijke, zooverre die voorkomt in u, $\frac{d''}{dx}$ op die in ψ u), dan is

$$\delta = \frac{d'}{dx} + \frac{d''}{dx}, \text{ en}$$

---

[1]) Deze restrictie kon wel weggelaten worden als het alleen maar te doen was om de formule (b) uit (a) afteleiden.

Evenwel is deze conditie noodig indien men deze formule in toepassing brengt daar wij anders tot geen resultaat komen.

[2]) Hargreave. Phil. Trans. 1848.

$$\varphi(\delta) = \varphi\left(\frac{d'}{dx} + \frac{d''}{dx}\right) = \varphi\left(\frac{d'}{dx}\right) + \frac{d''}{dx}\varphi'\left(\frac{d'}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d''}{dx}\right)^2 \varphi''\left(\frac{d'}{dx}\right) +,$$

en dus daar $\frac{d'}{dx}$ constant is, ten opzigte van $\psi(x)$,

$$\varphi(\delta)\{\psi x . u\} = \psi x . \varphi\left(\frac{d'}{dx}\right)u + \frac{d''}{dx}\psi x\, \varphi'\left(\frac{d'}{dx}\right)u + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d''}{dx}\right)^2 \psi x \varphi''\left(\frac{d'}{dx}\right)u +$$

$$= \psi x\, \varphi(\delta)\, u + \psi' x\, \varphi'(\delta)\, u + \tfrac{1}{2}\, \psi'' x\, \varphi''(\delta)\, u + .$$

Evenzoo kan men (b) bewijzen. —

Deze twee formulen zijn uitdrukkingen van de wetten, waaraan de combinatien onderworpen zijn van operatieve symbolen, (hetzij directe of inverse), met operatiën, aangeduid door factoren, functiën van de onafhankelijk veranderlijke.

Wij zien dat de laatste leden dezer vergelijkingen lineairen vorm hebben; indien dus eene vergelijking dien vorm heeft, of daartoe kan gebragt worden, dan is de solutie bepaald.

Immers $\varphi(\delta)\{\psi\, xu\} = P$, geeft $u = \psi(x)^{-1})\,(\varphi\,\delta)^{-1})\,P$,

en $\varphi(x)\,\psi(\delta)\,u = Q$, geeft $u = (\psi(\delta))^{-1}\,(\varphi\, x)^{-1}\,Q$.

Voor alle gevallen, dat bovengenoemde formulen eene bepaalde beteekenis hebben, dat is: indien $\varphi(\delta)$ en $\psi(\delta)$ uitgedrukt zijn in geheele magten van δ, blijkt aanstonds hunne geldigheid.

In analogie nu met de redenering voor gebrokene exponenten in de gewone algebra, kunnen wij hier ook aannemen, dat de geldigheid altijd doorgaat, en wij aarzelen niet, elk verklaarbaar resultaat, verkregen door de consequente toepassing dezer formulen, zij het dan ook door niet te interpreteren gedaanten heen, toch voor waar te houden.

Bij nadere beschouwing zal men zien, dat indien in (a) δ wordt geschreven voor x, en $-x$ voor δ of t voor δ, na substitutie verkregen wordt:

$$\varphi(t)\,\psi(\delta')\,u = \psi(\delta')\,(\varphi\,t.\,u) - \psi'(\delta')\,(\varphi'\,t.\,u) + \tfrac{1}{2}\,\psi''(\delta')\,(\varphi''\,t.\,u) -$$

δ' de operatie $\frac{d}{dt}$ voorstellende en u eene functie van t zijnde.

Deze vergelijking is identisch in vorm met (b); de juistheid van het resultaat, verkregen door deze verwisseling van symbolen, leidt ons nu tot de gevolgtrekking, dat indien in eene lineaire differentiaal vergelijking welke tot den vorm (a) of (b) kan gebragt worden, en in hare symbolische solutie x wordt veranderd in δ en δ in $-x$, wij dan eenen anderen vorm zullen verkrijgen, ook vergezeld van hare symbolische solutie.

Wij moeten wel in het oog houden, dat de solutiën in symbolischen vorm moeten gehouden worden; of met andere woorden, dat de aangegevene operatiën niet moeten volbragt worden, en vooral geene operatiën mogen worden verwaarloosd.

Het zou b. v. aanleiding tot onjuiste uitkomsten geven, als men o schreef voor $(x^{-1})o$, indien later x nog moest veranderd worden in δ.

Wij kunnen deze methode het beste ophelderen door haar toe te passen op de algemeene vergelijking der eerste orde:

$$\varphi(x)\,\frac{du}{dx} + \psi x\,.\,u = X.$$

$$\text{of } \varphi\,x\,\delta u + \psi\,x\,.\,u = X.$$

De solutie daarvan is, zooals wij weten:

$$u = e^{-\int \frac{\psi x}{\varphi x} dx} \left\{ \int e^{\int \frac{\psi x}{\varphi x} dx} (\varphi\ x)^{-1}\ X\ dx \right\}.$$

$$\text{Stel} \int \frac{\psi x}{\varphi x}\ dx = \chi x.$$

$$\therefore u = e^{-\chi x}\ \delta^{-1}\ (e^{\chi x}\ (\varphi\ x)^{-1}\ X).$$

Doen wij nu bovengenoemde omzettingen, dan verkrijgen wij:

$$-\varphi\ (\delta)\ x\ u + \psi\ (\delta)\ u = X \qquad (c),$$

en voor hare oplossing

$$u = -\ e^{-\chi(\delta)} \left\{ x^{-1}\ e^{\chi(\delta)}\ (\psi\ (\delta))^{-1}\ X \right\}.$$

Door toepassing van (a) kunnen wij (c) ook schrijven:

$$x\ \varphi\ (\delta)\ u + (\varphi^1\ (\delta) - \psi\ (\delta))\ u = -\ X \text{ of } Xo.$$

$$\text{Zij nu } \varphi^1\ (\delta) - \psi\ (\delta) = \lambda\ \delta,$$

$$\therefore \chi\ (\delta) + \int \frac{\psi(\delta)}{\varphi(\delta)}\ d\ \delta = \lambda\ \varphi\ (\delta) - \int \frac{\lambda\ \delta}{\varphi\ \delta}\ d\ \delta;$$

en de solutie neemt den vorm aan:

$$u = (\varphi\ \delta)^{-1}\ e^{\int \frac{\lambda\delta}{\varphi\delta} d\delta} \left\{ x^{-1}\ e^{-\int \frac{\lambda\delta}{\varphi\delta} d\delta}\ X \right\} \qquad (d).$$

De praktische waarde van deze algemeene methode bestaat daarin, dat men haar kan aanwenden tot het vinden van oplosbare vormen van lineaire vergelijkingen met variabele coefficiënten; tevens blijkt daardoor, dat vele vormen van oplossing, welke schijnbaar niet te interpreteren zijn, toch kunnen dienstbaar gemaakt worden aan het verkrijgen van nuttige resultaten.

Verder kunnen wij een merkwaardig verband aangeven tusschen de solutiën welke wij op deze wijze verkrijgen, en de oplossingen van dezelfde vergelijkingen in den vorm van bepaalde integralen. Hierover zullen wij t. a. p. handelen.

Onder de vormen (d), waarvan wij aanstonds eene verklaring kunnen geven, zullen wij in de eerste plaats, de vrij algemeene vergelijking geven:

$$x\,\varphi(\delta)\,u + m\,\varphi^1(\delta)\,u = X;$$

waaruit de oplossing is

$$u = (\varphi(\delta))^{m-1}\,x^{-1}\,(\varphi(\delta))^{-m}\,X; \qquad \text{(e)}$$

en

$$x\,\varphi(\delta)\,u + m\,\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\,u = X,$$

$$\therefore\ u = (\varphi(\delta))^{-1}\,\delta^m\,(x^{-1}\,d^{-m}\,X). \qquad \text{(f)}$$

Ter verduidelijking zullen wij de berekening in zijn geheel uitwerken.

$$\text{Geg. } x\,\varphi(D)\,u + m\,\varphi^1(D)\,u = X \quad (p)$$

Verander hierin x in δ en δ in $-x$

$$\delta\,\varphi(-x)\,u + m\,\varphi'(-x)\,u = X.$$

Volgens (a) wordt deze vergelijking

$$\varphi(-x)\,\delta u - \varphi'(-x)\,u + m\,\varphi'(-x)\,u = X \text{ of}$$

$$\varphi(-x)\,\delta u + (m-1)\,\varphi'(-x)\,u = X \qquad (p')$$

$$\delta u + (m-1)\,\frac{\varphi'(-x)}{\varphi(-x)}\,u = \left\{\varphi(-x)\right\}^{-1} X.$$

Uit deze lineaire vergelijking 1^{ste} orde volgt:

$$u = e^{-(m-1)\int\frac{\varphi^1(-x)}{\varphi(-x)}dx}\int e^{(m-1)\int\frac{\varphi^1(-x)}{\varphi(-x)}dx}\left\{\varphi(-x)\right\}^{-1} X\,dx.$$

$$= \left\{\varphi(-x)\right\}^{m-1}\int\varphi(-x)^{-m}\,X\,dx = \left\{\varphi(-x)\right\}^{m-1}\delta^{-1}\left\{\varphi(-x)\right\}^{-m} X. \quad (q^1)$$

Van (p^1) is de oplossing (q^1); vervangt men in (q^1) weer x door δ en δ door $-x$ dan verkrijgt men de oplossing welke bij vergelijking (p) behoort, nl.:

$$\left\{\varphi(\delta)\right\}^{m-1} x^{-1}\left\{\varphi(\delta)\right\}^{-m} X \qquad (q)$$

Op analoge wijze verkrijgt men (f).

De verklaring bevat geene moeijelijkheden, indien $\varphi(\delta)$ en $\lambda(\delta)$ alleen uit geheele magten van δ bestaan.

Oplossing der differentiaal vergelijkingen volgens deze methode.

Tot eene oplossing in eindige termen van vele lineaire vergelijkingen geraken wij door toepassing der vergelijkingen (e) in verband met (a).

Beginnen wij met vergelijkingen van den tweeden graad: $\varphi(\delta) = \delta^2 + b\,\delta + c^2$.

Volgens (a) is

$$(\delta^2 + b\,\delta + c^2)(\psi x . u) = \psi x\, d^2 u + \psi x\, b \delta u + \psi x\, c^2 u$$
$$+ 2\,\psi' x\ \delta u + \psi' x\ bu$$
$$+ \psi'' x\ u$$

$$\varphi'(\delta)(\psi x u) = (2\delta + b)(\psi x\, u) = 2\,\psi x\ .\ \delta u + (b\psi x + 2\psi' x) u.$$

Bij gevolg zijn alle vergelijkingen opgesloten in den vorm:

$$x \psi x \delta^2 u + ((bx + 2m)\,\psi x + 2x\psi' x)\,\delta m +$$
$$((c^2 x + bm)\,\psi x + (bx + 2m)\psi' x + x\psi'' x) u = X$$

of

$$\delta^2 u + \left(b + \frac{2m}{x} + \frac{2\,\psi' x}{\psi x}\right)\delta u + \left(c^2 + \frac{bm}{x} + \left(b + \frac{2m}{x}\right)\frac{\psi' x}{\psi x} + \frac{\psi'' u}{\psi x}\right) u \quad \text{(a)}$$
$$= (x\,\psi\,x)^{-1}\,X = P \qquad \text{(g)}$$

dadelijk oplosbaar. De oplossing is:

$$u = (\psi\,x)^{-1}\,(\delta^2 + b\,\delta + c^2)^{m-1}\,\{x^{-1}\,(\delta^2 + b\,\delta + c^2)^{-m}\,X\}$$
$$= (\psi\,x)^{-1}\,(\delta^2 + b\,\delta + c^2)^{m-1}\{x^{-1}\,(\delta^2 + b\,\delta + c^2)^{-m}(x\,\psi\,x P).$$

Voor $X = o$,

$$u = (\psi\,x)^{-1}\,(\delta^2 + b\,\delta + c^2)^{m-1}\,\{x^{-1}\,(\delta^2 + b\,\delta + c^2)^{-m}\,o\}\ ;$$

of indien α en β de wortels zijn van $t^2 + b\,t + c^2 = o$,

$$= \left(\psi\,(x)\right)^{-1} x^{-m} \{ C\, e^{\alpha x}\left(1 + (m-1)\frac{m}{(\beta - \alpha)x} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} . \frac{m\,(m+1)}{(\beta - \alpha)^2 x^2}\right.$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{(\beta-\alpha)^3x^3}+\ldots\Big)$$

$$+C_1\,e^{\beta x}\Big(1-\frac{(m-1)m}{(\beta-\alpha)x}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{(\beta-\alpha)^2x^2}$$

$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{(\beta-\alpha)^3x^3}+\Big)\Big\}.-$$

Deze oplossing is eindig voor alle geheele waarden van m, positief of negatief.

Is m een gebroken, dan bevat de niet ontwikkelde uitdrukking gebrokene operatiën.

Is $b=-2c$ zoodat α en β gelijk zijn, dan neemt de oplossing den vorm aan:

$u=(\psi x)^{-1}e^{cx}(Cx^{-2m+1}+C_1)$ zonder eenige restrictie omtrent de waarde van m.

De algemeene vorm (g) bevat de meeste lineaire vergelijkingen welke op andere wijzen kunnen opgelost worden.

Zoo bv. verkrijgen wij, door te stellen $\psi x=e^{ax}$, —

$$\delta^2u+\Big(b+2a+\frac{2m}{x}\Big)\delta u+\Big(c^2+ab+a^2+(b+2a)\frac{m}{x}\Big)u=P;$$

waarvan de bekende vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2m}{x}\frac{du}{dx}+c^2u=P \text{ [1]}$$

een bijzonder geval is.

Hiervan is de oplossing:

$$u=(\delta^2\pm c^2)^{m-1}\{x^{-1}(\delta^2\pm c^2)^{-m}(x\,P).$$

Voor $P=o$, en alleen het negatieve teeken nemende, is na reductie:

$$u=x^{-m}\Big\{Ce^{cx}\Big(1-\frac{(m-1)m}{2cx}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{(2cx)^2}-\ldots\Big)$$

[1]) Gregory, Exampl. p. 313, n⁰. 10. Crelle, Bd. 40, p. 72.

$$+c'e^{-cx}\left(1+\frac{(m-1)m}{2cx}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{(2cx)^2}+\ldots\right)\Big\}.$$

Welke solutie altijd eindig is, als m een positief of negatief geheel getal is.

Stellen wij $\psi x = x^n$, dan wordt de vergelijking:

$$\delta^2 u+\left(b+\frac{2(m+n)}{x}\right)\delta u$$

$$+\left(c^2+\frac{b(m+n)}{x}+\frac{n(n-1)+2mn}{x^2}\right)u=P;$$

en hieruit

$$u=x^{-n}(\delta^2+b\delta+c^2)^{m-1}\{x^{-1}(\delta^2+b\delta+c^2)^{-m}(x^{n+1}P)\}.$$

Nemen wij aan $b=o$, en $n=-2m+1$ dan verkrijgen wij eene andere dan de bekende solutie voor

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{2(m-1)}{x}\frac{du}{dx}+c^2u=P,$$

namelijk:

$$u=x^{2m-1}(\delta^2+c^2)^{m-1}\{x^{-1}(\delta^2+c^2)^{-m}(x^{-2m+2}P)\};$$

en voor $n=-m$ ontstaat de vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{du}{dx}+\left(c^2-\frac{m(m-1)}{x^2}\right)u=P,\ \text{waarvan}$$

de solutie is:

$$u=x^m(\delta^2+b\delta+c^2)^{m-1}\{x^{-1}(\delta^2+b\delta+c^2)^{-m}(x^{-m+1}P)\}.$$

Hiervan is een speciaal geval

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\left(\frac{m(m-1)}{x^2}\pm c^2\right)u=o,\ ^{1})$$

en de oplossing is

$$u=x^m(\delta^2+c^2)^{m-1}\{x^{-1}(C\sin cx+C^1\cos cx)\},$$

$$\text{en}\ u=x^m(\delta^2-c^2)^{m-1}\{x^{-1}(C e^{cx}+C^1 e^{-cx})\}.$$

---

1) Gregory. Ex. p. 347. Boole. Diff. Equat. p. 424.

Nog vele andere vergelijkingen kunnen wij uit dezen algemeenen vorm verkrijgen door telkens andere suppositiën voor ψ x.

Op soortgelijke wijze als hierboven, kunnen wij integrabele vormen vinden van vergelijkingen van derde en hooger orde. Hierbij is het duidelijk, dat de oplosbare vergelijkingen te minder algemeen worden, naarmate de orde rijst.

Voor het geval, dat de solutiën fractionele operatiën bevatten, is de ware beteekenis, zooals wij hierboven reeds opmerkten, niet aantegeven; doch indien wij dan door middel der besproken transformatiën de functiën van δ veranderen in functiën van x, dan is het resultaat zeer wel te verklaren, en tevens waar, alhoewel de uitdrukkingen in de behandeling voorkomende zuiver symbolisch zijn en alle beteekenis missen.

Zoo zal bv.

$u = (\delta^2 - c^2)^{m-1} (x^{-1} (\delta^2 - c^2)^{-m} X)$, beschouwd als de oplossing van

$$x \frac{d^2u}{dx^2} + 2m \frac{du}{dx} - c^2 x u = X,$$

niet in eindige termen kunnen worden uitgedrukt, indien m een gebroken is. Veranderen wij echter weer δ in x, en x in $-\delta$ dan wordt de vergelijking zelve:

$$\delta \{ (x^2 - c^2) u \} - 2mx u = X,$$

en de oplossing

$$u = (x^2 - c^2)^{m-1} \delta^{-1} \{ (x^2 - c^2)^{-m} X \},$$

niet alleen begrijpelijk, maar ook juist voor alle geheele en gebrokene waarden van m.

Wij zien, dat door deze methode een groot aantal integrabele vormen kunnen gevonden worden.

Wel mist zij een algemeen karakter; doch zij heeft in zooverre haar nut, dat door haar het aantal bijzondere vergelijkingen onbepaald vergroot is, en altijd meer integrabele vormen kunnen opgespoord worden.

Blijkens het voorgaande is het altijd geraden, zooveel mogelijk eerst de vergelijkingen tot binomialen vorm te transformeren; daar wij dan voor de oplossing de meeste kans van slagen zullen hebben.

De voorbeelden, die van bijzondere transformatiën zouden kunnen gegeven worden, staan te veel op zich zelven, dan dat wij er ons veel mede bezig zouden houden.

Wij noemen alleen maar als voorbeeld de welbekende vergelijking van Laplace's functiën [1]).

Indien wij in zijne vergelijking

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+n(n+1)u=o \qquad (1)$$

Stellen $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\mu\sqrt{-1})$ dan verkrijgen wij:

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{d\varphi^2}-\frac{n(n+1)}{\cos^2 x}u=o.$$

Om tot de oplossing hiervan te geraken behandelen wij eerst de vergelijking

$$D^2u+c^2u-\frac{n(n+1)}{\cos^2 x}u=o \qquad \left(D=\frac{d}{dx}\right)$$

Zijn α en β de wortels van $z^2+c^2=o$, en stel

$$Du-\alpha u=u_1 \text{ dan is:}$$

---

[1]) Cambridge Math. Journal. New Seriës. Vol. I p. 424.

$$Du_1 - \beta u_1 - \frac{n(n+1)}{\cos^2 x} u = 0 \quad \text{waaruit}$$

$$u = \frac{\cos^2 x}{n(n+1)} (Du_1 - \beta u_1).$$

Hieruit weer $Du - \alpha u$:

$$Du = \frac{\cos^2 x}{n(n+1)} (D^2 u_1 - \beta Du_1) - \frac{2 \cos x \sin x}{n(n+1)} (Du_1 - \beta u_1)$$

$$-\alpha u = \frac{\cos^2 x}{n(n+1)} (-Du_1 + \alpha \beta u_1)$$

$$\therefore Du - \alpha u = \frac{\cos^2 x}{n(n+1)} (D^2 u_1 + c^2 u_1) - \frac{2 \cos x \sin x}{n(n+1)} (Du_1 - \beta u_1) = u_1$$

$$(\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha\beta = c^2).$$

Deel door $\frac{\cos^2 x}{n(n+1)}$.

$$\therefore D^2 u_1 + c^2 u_1 - 2 \operatorname{tg} x (Du_1 - \beta u_1) - \frac{n(n+1)}{\cos^2 x} u_1 = 0.$$

Stel nu $Du_1 - \alpha u_1 - 2 \operatorname{tg} x\, u_1 = u_2$

dan vinden wij uit eene analoge behandeling

$$D^2 u_2 + c^2 u_2 - 4 \operatorname{tg} x (Du_2 - \beta u_2) - \frac{n(n+1) - 2}{\cos^2 x} u_2 = 0$$

en weer stellende

$Du_2 - \alpha u_2 - 4 \operatorname{tg} x\, u_2 = u_3$. Verkrijgen wij:

$$D^2 u_3 + c^2 u_3 - 6 \operatorname{tg} x (Du_3 - \beta u_3) - \frac{n(n+1) - 6}{\cos^2 x} u_3 = 0$$

Gaan wij zoo voort tot aan de suppositie:

$Du_n - \alpha u_n - 2n \operatorname{tg} x\, u_n = u_{n+1}$ dan is:

$$D^2 u_{n+1} + c^2 u_{n+1} - 2(n+1) \operatorname{tg} x (Du_{n+1} - \beta u_{n+1}) = 0.$$

Zij $Du_{n+1} - \beta u_{n+1} = Q$ dan is:

$$DQ - \alpha Q + 2(n+1) \operatorname{tg} x\, Q = 0$$

$$\text{en } Q = k e^{\int (\alpha + 2(n+1) \operatorname{tg} k) dx} = k e^{\alpha x} e^{l (\cos x)^{-2(n+1)}}$$

$$= k e^{\alpha x} (\cos x)^{-2(n+1)}$$

$$u_{n+1} = k\, e^{\beta x} \int e^{(\alpha-\beta)x} \cos x^{-2(n+1)}\, dx$$

$$u_n \quad = e^{\alpha x} \cos x^{-2n} \int e^{-\alpha x} \cos x^{2n} u_{n+1}\, dx$$

en zoo verder u_{n-1}, $u_{n-2} \ldots$ tot u; wij vinden voor deze laatste

$$u = k\, e^{\alpha x} \left(\frac{d}{d\, tg\, x}\right)^{-n} \left\{ \int e^{(\beta-\alpha)x} \cos x^{2n} \int e^{(\alpha-\beta)x} \cos x^{-2(n+1)}\, dx^2 \right\}$$

Welke vergelijking ook kan geschreven worden:

$$u = k\, e^{\alpha x} \left(\frac{d}{d\, tg\, x}\right)^{n} \left\{ e^{(\beta-\alpha)x} \cos^{-2n} \int e^{-(\alpha-\beta)x} \cos^{2n} dx \right\}$$

Wij verkrijgen hieruit de oplossing van vergelijking (1) door te stellen $c^2 = -\frac{d^2}{d\varphi^2}$ waaruit de waarden van α en β volgen $= +\frac{d}{d\varphi}$ en $-\frac{d}{d\varphi}$: en dus

$$u = e^{x\frac{d}{d\varphi}} \left(\frac{d}{d\, tg\, x}\right)^{n} \left\{ e^{-2x\frac{d}{d\varphi}} \cos x^{-2n} \int \cos x^{2n} \psi\,(\varphi + 2x)\, dx \right.$$

$$\left. + e^{x\frac{d}{d\varphi}} \left(\frac{d}{d\, tg\, x}\right)^{n} \right\} \left\{ (\cos x^{-2n} \chi\,(\varphi - 2x) \right\}$$

Substitueer hierin eindelijk nog $x = \text{arc tg}\,(\mu \sqrt{-1})$ dan is de oplossing van de gegevene vergelijking van Laplace

$$u = e^{\text{arc tg}\,(\mu\sqrt{-1})\frac{d}{dy}} \left(\frac{d}{d\mu}\right)^{n} \left\{ \left(1-\mu^2\right)^{n} \psi\left(\varphi - 2\,\text{arc tg}\,(\mu\sqrt{-1})\right) \right\}$$

$$+ e^{-\text{arc tg}\,(\mu\sqrt{-1})\frac{d}{dy}} \left(\frac{d}{d\mu}\right)^{n} \left\{ \left(1-\mu^2\right)^{n} \chi\left(\varphi + 2\,\text{arc tg}\,(\mu\sqrt{-1})\right) \right\}.$$

HOOFDSTUK IV.

SYMBOLISCHE OPLOSSING DER DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN IN REEKSEN.

De methode, welke eertijds veelal werd toegepast, om differentiaal vergelijkingen op te lossen in reeksen, was deze, dat men den vorm dier reeksen willekeurig aannam, en vervolgens uit de primitieve vergelijking door herhaalde differentiatie de formatiewet voor de coefficiënten opspoorde [1], ook door ontwikkeling volgens de reeks van Taylor of Maclaurin, of wel door de methode der onbepaalde coefficiënten [2]), doch deze laatste wijze wordt uit haren aard zeer ingewikkeld in de toepassing.

Eene oplossing volgens den symbolischen weg verdient ongetwijfeld de voorkeur boven het gebruik van bovengenoemde methoden.

Men is hierdoor niet alleen in staat gesteld, de wetten te bepalen, waarnaar de opeenvolgende termen

---

[1]) Sturm, Anal. T. II, p. 132.

[2]) Sturm, Anal. T. II, p. 134.

worden gevormd, maar zelfs de gedaante der reeks zelve aan te geven.

a. *Binomiale vergelijkingen.*

Eerst behandelen wij de binomiale vergelijking waarvan de methode is, als volgt:

De vergelijking in symbolischen vorm zij:

$$f_0(D)\,u - f_1(D)\,e^{r\theta}\,u = o$$

$$\therefore u - \varphi(D)\,e^{r\theta}\,u = \{f_0(D)\}^{-1}\,o$$

$$\varphi(D) = \frac{f_1(D)}{f_0(D)}$$

$$\{f_0(D)\}^{-1}\,o = A\,P + B\,Q + \ldots,$$

waarin A, B... arbitraire constanten; P, Q, R.... functiën van de onafhankelijk veranderlijke.

Stellen wij $\varphi(D)\,e^{r\theta} = p$.

$$\therefore u = (1-p)^{-1}(A\,P + B\,Q + \}$$

$$= (1 + p + p^2 + p^3 +)(A\,P + B\,Q + \}$$

$$= A\,(1 + p + p^2 +)\,P + B\,(1 + p + p^2 +)\,Q +$$

Stel de termen van 't laatste lid $= u_1,\ u_2 \ldots.$ dan wordt, daar

$$p^m = \varphi(D)\,e^{r\theta}.\ \varphi(D)\,e^{r\theta} \ldots . \text{ m factoren}$$

$$= e^{r\theta}\,\varphi(D + rm)\,\varphi(D + rm - r) \ldots . \varphi(D + r),$$

$$u_1 = A\,(P + e^{r\theta}\,\varphi(D + r)\,P + e^{2r\theta}\,\varphi(D + 2r)\,P + \ldots).$$

$u_2,\ u_3 \ldots.$ zijn gelijk aan analoge uitdrukkingen.

Tot opheldering moge het navolgende voorbeeld dienen [1]:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4\right)u = o$$

---

[1]) Crelle, Bd. 40, p. 72.

symbolisch

$$(D^2 - n^2) - 4\, e^{2n\theta}\, u = o$$

$$u - \frac{4}{(D-n)(D+n)}\, e^{2\theta}\, u = \{(D-n)(D+n)\}^{-1}\, o$$

$$= A\, e^{n\theta} + B\, e^{-n\theta}.$$

$$\text{Zij} \quad \frac{4}{(D+n)(D-n)}\, e^{2\theta} = \varphi(D)\, e^{2\theta} = p.$$

$$\therefore u = A(1 + p + p^2 + \quad)\, e^{n\theta} + B(1 + p + p^2 +)\, e^{-n\theta} = u_1 + u_2$$

$$u_1 = A\,(e^{n\theta} + e^{2\theta}\varphi(D+2)\, e^{n\theta} + e^{4\theta}\varphi(D+4)\,\varphi(D+2)\, e^{n\theta} + \quad)$$

$$u_2 = B\,(e^{-n\theta} + e^{2\theta}\varphi(D+2)\, e^{-n\theta} + \ldots \quad)$$

en daar $\varphi(D)\, e^{n\theta} = \varphi(n)\,^{n\theta}$

$$u_1 = Ax^n\left(1 + \frac{x^2}{n+1} + \frac{x^4}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^6}{2.3.\,(n+1)(n+2)(n+3)} + \right)$$

$$u_2 = Bx^{-n}\left(1 - \frac{x^2}{n+1} + \frac{x^4}{2(n-1)(n-2)} - \frac{x^6}{2\,3.(n-1)(n-2)(n-3)} + \right)$$

b. *Veelledige vergelijkingen.*

De veelledige symbolische vergelijking, gereduceerd tot de gedaante

$$u = \{1 + \varphi_1(D)\, e^{\theta} + \ldots \varphi_n(D)\, e^{n\theta}\}^{-1}\, \{f(D)\}^{-1}\, o,$$

kan nagenoeg als de binomiale worden opgelost.

Eerst bepaalt men weer

$$w = \{f_o\,(D)\}^{-1}\, o.$$

Daarna geeft men aan

$$\frac{1}{1 + \varphi_1(D)\, e^{\theta} + \ldots \varphi_n(D)\, e^{n\theta}}$$

den vorm

$$F_o(D) + F_1(D)\, e^{\theta} + F_2(D)\, e^{2\theta} + \quad .$$

Om de functiën F_o, F_1 ... te bepalen, kunnen wij aldus te werk gaan: uit

$\{1 + \varphi_1(D)\,e^\theta + \ldots.\,\varphi_n(D)\,e^{n\theta}\}^{-1} = F_0(D) + F_1(D)\,e_\theta +$
volgt

$$1 = (1 + \varphi_1(D)\,e^\theta + \quad)(F_0(D) + F_1(D)\,e^\theta + \quad)$$
$$= F_0(D) + \{F_1(D) + \varphi_1(D)\,F_0(D-1)\}\,e^\theta +$$
$$\therefore F_0(D) = 1.$$
$$F_1(D) + \varphi_1(D)\,F_0(D-1) = o.$$
$$\therefore F_1(D) = -\varphi_1(D)\,F_0(D-1).$$

De volgende functiën F_2, F_3 bepaalt men op dezelfde wijze:

In 't algemeen is de coefficiënt van $e^{m\theta}$

$$F_m(D) + \varphi_1(D)\,F_{m-1}(D-1) + \ldots.,$$

waaruit

$F_m(D) = -\varphi_1(D)\,F_{m-1}(D-1) - \varphi_2(D)\,F_{m-2}(D-2) -;$
en dus wordt F_m uitgedrukt in $F_{m-1}, F_{m-2} \ldots.$ en φ_1, $\varphi_2 \ldots$, evenzoo F_{m-1} in F_{m-2}, $F_{m-3} \ldots.$;
en dus ten slotte

$$F_m \text{ alleen in } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots.$$

$$u = \{1 + F_1(D)\,e^\theta + F_2(D)\,e^{2\theta} + \}\,\{f_0(D)\}^{-1}\,o.$$

Van den vorm van $f_0(D)$ hangt het nu verder af, welke de oplossing zal zijn.

Is $f_0(D) = (D-a)(D-a')(D-a'')\ldots$, dan is:

$$\{f_0(D)\}^{-1}\,o = A\,e^{a\theta} + A_1\,e^{a_1\theta} + = \Sigma A_i\,e^{a_i\theta},$$
$$\therefore u = \Sigma A_i\,\{e^{a_i\theta} + F_1(D)\,e^{(a_i+i)\theta} + \ldots.)$$
$$= \Sigma A_i\,\{e^{a_i\theta} + F_1(a+i)\,e^{(a_i+i)\theta}.$$

Voor het geval dat in $f_0(D)$ n gelijke factoren $(D-a)$ voorkomen, is:

$\{f(D)\}^{-1}\,o = e^{a\theta}(c + c_1\theta + c_2\theta_2 + \ldots\, c_{n-1}\theta_{n-1}) + = e^{a\theta}v +;$
en het overeenkomende gedeelte van u van den vorm:

$$\{1 + F_1(D)\,e^{\theta} + F_2(D)\,e^{2\theta} + \}\,e^{a\theta}\,v \qquad \text{(a)}$$

$$\{e^{a\theta} + e^{(a+1)\theta}F_1(D+a+1) + e^{(a+2)\theta}F_2(D+a+2) + \}\,v.$$

Nu is:

$$F_p(D+a+p)\,v = (F_p(a+p) + F_p{}^1(a+p)D + \tfrac{1}{2}F_p{}^2(a+p)D^2 + \}\,v;$$

en dit wordt na de differentiatie een polynomium van den vorm

$A_0 + A_1\,\vartheta + \ldots\ A_{n-1}\,\vartheta^{n-1}$; en dus wordt (a) gelijk aan eene reeks, waarvan de termen bevatten $e^{a\theta}$, $e^{(a+1)\theta}\ldots$ elk vermenigvuldigd met een polynomium van den graad (n—1) in ϑ.

Rangschikt men de termen op eene andere wijze, dan zal die reeks den vorm verkrijgen:

$$B_0 + B_1\,\vartheta + B_2\,\vartheta^2 + \ldots\ B_{n-1}\,\vartheta^{n-1}$$

waarin B_0, B_1, ... seriën voorstellen waarvan de termen de exponentialen bevatten

$$e^{a\theta},\ e^{(a+1)\theta},\ldots$$

Herstelt men weêr $e^{\theta} = x$, dan is het genoemde gedeelte van u

$$= B_0 + B_1\,lx + \ldots\ B_{n-1}\,(lx)^{n-1}.$$

Bevat eindelijk $f_0(D)$ benevens anderen nog r factoren $D-a_1$, $D-a_2\ldots(D-a_r)$, waarin a_1, $a_2\ldots a_r$ van elkander geheele getallen verschillen, dan zal de bewerking zijn als volgt.

Het gedeelte van u, dat correspondeert met den factor $(D-a_t)$, zal zijn:

$$(1 + F_1(D)\,e^{\theta} + F_2(D)\,e^{2\theta} + \ldots)\,Ae^{a_t\theta}.$$

(nb. de beteekenis van de functiën F is nog dezelfde als te voren).

nl. $F_m(D)e^{m\theta} = -\{\varphi_1(D)\,e^{\theta}F_{m-1}(D)\,e^{(m-1)\theta} + \varphi_2(D)e^{2\theta}$ enz...$\}$

en dus zal $F_m(D)\,e^{m\theta}$ bestaan uit termen van den vorm

$$\varphi_i(D)\,e^{i\theta}\,\varphi_j(D)\,e^{j\theta}\,\varphi^k(D)\,e^{k\theta}\ldots$$

$$\text{waarin } i + j + k + \; = m,$$

en dus ieder afzonderlijk alle waarden kan hebben tusschen o en m;

en het gedeelte van u, dat ontstaat uit de bewerking op $A\,e^{a_t\theta}$, zal bestaan uit alle mogelijke termen van den vorm:

$$A\,\varphi_i(D)\,e^{i\theta}\,\varphi_j(D)\,e^{j\theta}\,\varphi_k(D)\,e^{k\theta}\ldots\ldots e^{a_t\theta}$$

$$= A\,\varphi_i(D)\,\varphi_j(D-i)\,\varphi_k(D-i-j) \qquad e^{(m+a_t)\theta}$$

$$= \frac{A\,f_i(D)\,f_j(D-i)\,f_k(D-i-j)\ldots\ldots}{f_o(D)\,f_o(D-i)\,f_o(D-i-j)\ldots\ldots}\; e^{(m+a_t)\theta}.$$

Stel $i = \alpha$, $i + j = \beta \ldots\ldots i + j + k +$ (met uitsluiting van den laatsten term $= \mu$ [1]), $i + j + k + \ldots\ldots = m$.

Stellen wij ook nog den teller welke alleen directe functiën bevat, voor door $f(D)$, dan verkrijgt die laatste breuk de gedaante

$$\frac{A\,f(D)\,e^{(m+a_t)\theta}}{f_o(D)\,f_o(D-\alpha)\,f_o(D-\beta)\ldots\ldots f_o(D-\mu)} \qquad \text{(f)}$$

Zij nu $(D - a_s)$ een factor van $f_o(D)$, dan zijn de daarmede overeenkomende factoren in deze laatste breuk

$$(D-a_s)\,(D-a_s-\alpha)\ldots\ldots(D-a_s-\mu)$$

Indien nu a_s niet grooter is dan a_t, dan is $a + \mu$ kleiner dan $a_t + \mu$; en daaruit volgt, dat geen enkele factor van dit laatste product identisch zijn kan met $D - m + a_t$.

---

[1]) α, β, . μ . . zijn dus geheele getallen welke hoogstens een verschil $= m$ hebben.

Indien echter $a_s > a_t$, dan kan een dier factoren identisch zijn met $(D - m + a_t)$.

Hieruit volgt dus, dat de noemer van de breuk (f) $(D - m - a_t)$ kan bevatten verheven tot de magt $r - 1$, en daar

$$(D - m - a_t)^{-r+1} e^{(m + a_t)\theta} = e^{(m + a_t)\theta} (c_0 + c_1 \theta + \ldots c_{r-1} \theta^{r-1}),$$

zoo is het duidelijk dat u, r groepen zal bevatten van termen in den vorm:

$$A + B\, l x + C (l x)^2 + \ldots K (l x)^{r-1}$$

(nb. A, B, C.... polynomia van x.)

c. Eene andere en veel eenvoudiger methode kan men volgen voor de bijzondere gevallen, dat $f_0(D)$ geene gelijke of imaginaire wortels bevat. Immers neemt men aan, $u = \Sigma a_m e^{m\theta}$, dan is

$f_0(D) u + f_1(D) e^{\theta} u + \ldots = \Sigma \{ (f_0(m) a_m + f_1(m) a_{m-1} +) e^{m\theta} \}$,

en hieruit volgt aanstonds, dat de lineaire differentiaal vergelijking

$$f_0(D) u + f_1(D) e^{\theta} u + = o$$

tot particuliere integraal zal hebben:

$$u = \Sigma a_m e^{m\theta}, \text{ mits } m \text{ een wortel zij van } f_0(m) = o$$

$$\text{en } f_0(m) a_m + f_1(m) a_{m-1} + \ldots = o \text{ zij.}$$

Deze laatste vergelijking bepaalt dus de wet, waarnaar de opeenvolgende coefficiënten moeten gevormd worden.

Heeft m dus n reële waarden, dan zullen er ook n opklimmende reeksen zijn van den vorm:

$$a_m e^{m\theta} + a_{m+1} e^{(m+1)\theta} + \ldots \text{ ad infin:}$$

Algemeen, ook voor gelijke of imaginaire wortels van $f_0(m) = o$, is de navolgende regel:

Los u op uit $f_0(D)u = o$.

De algemeene integraal zal zijn:

$$u = AP + BQ + CR +$$

waarin A, B, C, ... arbitraire constanten,

P, Q, R, ... functiën van ϑ zijn.

Substitueer deze waarde van u in de op te lossen symbolische vergelijking, A, B, C.... beschouwende als variabele parameters, dan zal het resultaat zijn:

$$A^1P + B^1Q + C^1R + = o.$$

Hierin zijn A^1, B^1, C^1.... lineaire functiën van A, B, C.... en hunne differentiaal coefficiënten.

Integreert men dan volgens de voorgaande methode het systeem

$$A^1 = o,\ B^1 = o, \ldots,$$

dan zullen de waarden van A, B, C.... daaruit kunnen bepaald worden in den vorm:

$$A = \Sigma a_m e^{m\theta},\ B = \Sigma b_m e^{m\theta}, \ldots$$

en de waarde voor u gevonden zijn.

Bewijs:

De gegevene vergelijking

$$f_0(D)u + f_1(D)e^{\theta}u + \ldots, f_r(D)e^{r\theta}u = o,$$

of geschreven in de gedaante

$$\Sigma\{f(D)e^{n\theta}u\} = o \qquad (a)$$

waarin n tusschen o en r ligt,

verandert in:

$$\Sigma\{f_n((D)e^{n\theta}(AP + BQ + \ldots.)\} = o \qquad (b)$$

indien men de waarde van u, gevonden uit:

$$\{f_0(D)\}^{-1}o = u$$

$$\therefore u = AP + BQ + CR +$$

daarin substitueert, A, B, C.... als variabelen beschouwende.

Behandelen wij eerst den term

$$f_n(D)\, e^{n\theta} A\, P,$$

de anderen zullen allen in vorm daarmede overeen komen.

Ontwikkelen wij dezen term volgens het theorema van Leibnitz

$$f_n(D)\, e^{n\theta} A\, P = f_n(D)\, e^{n\theta} A.\ \ P + f_n^{1}(D)\, e^{n\theta} A.\ \ D\,P$$
$$+ f_n''(D)\, e^{n\theta} A.\ \ \frac{D^2}{2} P + \quad .$$

De algemeene waarde van $D^i\,P$ kan nu ook nog worden voorgesteld door:

$$D^i\,P = D^i \left\{ f_0(D) \right\}^{-1} o = \left\{ f_0(D) \right\}^{-1} D^i\, o = \left\{ f_0(D) \right\}^{-1} o$$
$$= L\,P + M\,Q + N\,R +$$

L, M, N zijn nu weer arbitraire constanten, doch kunnen, daar er in P geene arbitraire constanten voorkomen, en dus ook na uitvoering der directe operatie D^1 niet, onmogelijk anders zijn dan gewone getallen coefficiënten.

Het is hieruit duidelijk, dat $f_n(D)\, e^{n\theta} A\, P$, eene lineaire functie van P, Q, R.... zal zijn, waarvan de coefficiënten de algemeene gedaante hebben $\varphi_n(D)\, e^{n\theta} A$.

$$f_n(D)\, e^{n\theta} B\, Q$$

zal in vorm geheel daarmede overeenstemmen.

Daarom zal vergelijking (b) worden:

$$A^1 P + B^1 Q + C^1 R + \quad = o$$

terwijl elke coefficiënt $A^1, B^1, \ldots$ zal zijn

$$\Sigma\left(\varphi_n(D)\, e^{n\theta} A\right) + \Sigma\left(\psi_n(D)\, e^{n\theta} B\right) +$$

Stelt men $A_1 = o$, $B_1 = o$, $C = o \ldots$

dan voldoet men aan deze vergelijking, welke ook de waarden van P, Q, ... zijn, en uit deze vergelijkingen zullen A, B, C .... kunnen gevonden worden.

$$A = \Sigma (a_m e^{m\theta}), \; B = \Sigma (b_m e^{m\theta}), \; \ldots$$

waarin de opeenvolgende waarden der constanten a_m, b_m, ... gehouden zijn te voldoen aan de conditie-vergelijkingen

$$\Sigma (\varphi_m (m) \, a_{m-n}) + \Sigma (\psi_n (m) \, b_{m-n}) + = o.$$

Om de laagste waarde van m in a_m, b_m .... te vinden, moeten wij aannemen, dat

$$a_{m-1} = o, \; b_{m-1} = o \ldots$$

waardoor de laatste vergelijking wordt:

$$\varphi_0 (m) \, a_m + \psi (m) \, b_m + \ldots = o.$$

Nu is dit juist de gedaante van de betrekkingen, welke uit den term f(D) worden afgeleid. Maar aan $f(D) \, u = o$ wordt voldaan door aan te nemen:

$$u = AP + BQ + CR +$$

waarin A, B, C .... constanten zijn, dat is dus door

$$a_0 P + b_0 Q + \ldots,$$

waaruit volgt, dat de kleinste waarde van m in a_m, b_m, ... gelijk is aan o.

Tot toepassing dezer regel nemen wij het voorbeeld:

$$x^3 \frac{d^3 u}{dx^3} + 3 x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} + q^2 x^n u = o.$$

De symbolische vorm dezer vergelijking is:

$$D^3 u + q \, e^{n\theta} u = o. \qquad \text{(a)}$$

Volgens den regel zoeken wij de oplossing van:

$$D^3 u = o \qquad \therefore u = A + B \vartheta + C \vartheta^2.$$

Daarna substitueeren wij deze waarde in (a), terwijl A, B en C veranderlijk ondersteld worden:

$$\therefore D^3 A + q e^{n\theta} A + 3 D^2 B + 6 D C$$
$$+ (D^2 B + q e^{n\theta} B + 6 D^2 C) \vartheta + (D^3 C + q e^{n\theta} C) \vartheta^2 = o,$$

waaruit:

$$D^3 A + q e^{n\theta} A + 3 D^2 B + 6 D C = o,$$
$$D^3 B + q e^{n\theta} B + 6 D^2 C = o,$$
$$D^3 C + q e^{n\theta} C = o.$$

De waarden van A, B en C zullen hieruit bepaald worden:

$$A = \Sigma a_m e^{m\theta}, \; B = \Sigma b_m e^{m\theta}, \; C = \Sigma c_m e^{m\theta}.$$

De conditiën, welke daarbij voor de constanten gelden, zijn:

$$m^3 a_m + q a_{m-n} + 3 m^2 b_m + 6 m c_m = o,$$
$$m^3 b + q b_{m-n} + 6 m^2 c_m = o,$$
$$m^3 c_m + q c_{m-n} = o;$$

en hieruit vinden wij:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= -q \frac{m^2 a_{m-n} - 3 m b_{m-n} + 12 c_{m-n}}{m^5}; \\ b_m &= -q \frac{m b_{m-n} - 6 c_{m-n}}{m^4}; \\ c_m &= -q \frac{c_{m-n}}{m^3}. \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Substitueeren wij nu de voorgaande waarden van A, B en C in de vergelijking:

$$u = A + B \vartheta + C \vartheta^2,$$

en veranderen wij e^θ in x, dan verkrijgen wij:

$$u = a_o + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} +$$
$$+ lx (b_o + b_n x^n + b_{2n} x^{2n} +)$$
$$+ (lx)^2 (c_o + c_n x^n + c_{2n} x^{2n} +).$$

Hierin zijn a_0, b_0 en c_0 arbitraire constanten, en de verdere constanten a_n, b_n, c_n, a_{2n}, . . . daarmede zamenhangende door het systeem betrekkingen (α).

De solutie der lineaire vergelijking met tweede lid kan men, zooals bekend is, zamenstellen, door bij eene particuliere integraal dier vergelijking met tweede lid, te voegen de algemeene integraal van dezelfde vergelijking zonder 2[de] lid.

Eene particuliere integraal kan men vinden indien het tweede lid kan ontwikkeld worden in opklimmende magten van x.

Is het van den vorm:

$$X_0 + X_1 \, l(x) + X_2 (l\,x)^2 + \ldots . X_n (l\,x)^n ,$$

waarin X_0, X_1 . . . . allen kunnen ontwikkeld worden in opklimmende magten van x, dan moeten wij stellen:

$$u = A + B\vartheta + C\vartheta^2 + \ldots . P\vartheta^n ,$$

waarin A, B, ... P variabele parameters zijn, die bepaald kunnen worden uit de vormen:

$$A = \Sigma\, a_m e^{m\theta}, \; B = \Sigma\, b_m e^{m\theta}, \; \ldots .$$

Op dezelfde wijze moeten wij te werk gaan, indien er in het tweede lid vormen worden gevonden als:

$$\cos(n\,l\,x), \; \sin(n\,l\,x), \; \ldots .$$

c. Eindelijk nog kan men deze methode toepassen, evenals andere methoden, op de lineaire Partiële vergelijkingen.

De weg, dien men moet inslaan, ligt voor de hand, na al hetgeen reeds bij de behandeling der partiële vergelijkingen is gezegd.

Zij x eene der onafhankelijk veranderlijken, en stellen wij ons ten doel, u in opklimmende magten van x te ontwikkelen. Stel dan $x = e^{\theta}$, en schrijven wij de vergelijking, die wij eenvoudigheidshalve zonder 2de lid zullen onderstellen, in de gedaante:

$$F_0 u + F_1 e^{\theta} u + F_2 e^{2\theta} u + = o;$$

waarin F_0, F_1.... rationele functiën zijn van D, x', x'' en de symbolen $D' (= \frac{d}{dx'})$ en $D'' \left(= \frac{d}{dx''}\right)$.

Mogt het gebeuren, dat er in F_0 geene der symbolen x', x'', D' of D'' voorkomen, dan lossen wij op:

$F_0 (D) u = o$; en nemen daarin arbitraire functiën van x', x'' in de plaats van arbitraire constanten; en handelen verder, als in de gewone lineaire vergelijkingen.

Indien echter in F_0, x', x'', D' of D'' voorkomen, dan is vooralsnog de integratie onmogelijk, tenzij door welgekozene transformatiën deze zwarigheid worde vermeden. Hiervan een enkel voorbeeld:

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} - (a + b - 1) x \frac{du}{dx} + a b u + \varphi\left(y, \frac{d}{dy} \frac{d}{dx}\right) x u = o.$$

Symbolisch wordt deze vergelijking:

$$(D - a) (D - b) u + \varphi \left(y \cdot \frac{d}{dy} \cdot D\right) e^{\theta} u = o.$$

Hier is weer

$$u = \Sigma a_m e^{m\theta},$$

met de conditie:

$$(m - a) (m - b) F_m (y) + \varphi \left(y, \frac{d}{dy}, m\right) F_{m-1} (y) = o.$$

$$(m - a) (m - b) = o \text{ geeft } m = a, \ m = b,$$

en dus:

$$u = F_a (y) x^a + F_{a+1} (y) x^{a+1} + F_{a+2} (y) x^{a+2} +$$
$$+ F_b (y) x^b + F_{b+1} (y) x^{b+1} + F_{b+2} (y) x^{b+2} +.$$

Stel als een bijzonder geval gegeven:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - f(y)\frac{d^2u}{dy^2} = o$$

$$D(D-1)u - f(y)\frac{d^2}{dy^2}e^{2\theta}u = o,$$

$$\therefore u = F_0(y) + f(y)\frac{d^2}{dy^2}F_0(y)\cdot\frac{x^2}{2} + \left\{f(y)\frac{d^2}{dy^2}\right\}^2 F_0(y)\frac{x^4}{2.3.4} +$$

$$+ F_1(y)x + f(y)\frac{d^2}{dy^2}F_1 y\frac{x^3}{2.3} + \left\{f(y)\frac{d^2}{dy^2}\right\}^2 F_1(y)\frac{x^5}{2.3.4.5} +.$$

Dit resultaat laat zich gemakkelijk aan bekende vormen toetsen. Nemen wij bv. $f(y) = a^2$

$$\therefore u = \left(1 + \frac{a^2x^2}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{a^4x^4}{2.3.4}\frac{d^4}{dy^4} + \right)F_0 y$$

$$+ \left(x + \frac{a^2x^3}{2.3}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{a^4x^5}{2.3.4.5}\frac{d^4}{dy^4} + \right)F_1(y).$$

Stel hierin:

$F_0(y) = \varphi(y) + \varphi(y)$ en $F_1(y) = a(\varphi^1(y) - \psi^1(y))$,

dan verkrijgen wij:

$$u = \left(1 + \frac{a^2x^2}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \right)\left\{\varphi(y) + \psi(y)\right\}$$

$$+ \left(ax\frac{d}{dy} + \frac{a^3x^3}{2.3}\frac{d^3}{dy^3} + \right)\left(a\frac{d}{dy}\right)^{-1} a(\varphi^1(y) - \psi^1(y))$$

$$= e^{ax\frac{d}{dy}}\varphi(y) + e^{ax\frac{d}{dy}}\psi(y)$$

$$= \varphi(y + ax) + \psi(y - ax). \text{ —}$$

Sommeren van reeksen teruggebragt tot het oplossen van differentiaal vergelijkingen.

d. Het is na deze beschouwingen ligt in te zien, hoe dezelfde betrekkingen, welke ons in staat stelden, de integralen van differentiaal vergelijkingen in reeksen uit te drukken, dienstbaar kunnen gemaakt worden, om het sommeren van reeksen tot de oplossing van diff. vergel. terug te brengen.

Men volge slechts de omgekeerde redenering.

Wij hebben aangetoond, indien u het subject is der vergel.

$$u + \varphi_1 (D) e^{\theta} u + \varphi_2 (D) e^{2\theta} u + \qquad = o,$$

dat $u = \Sigma a_m x^m$, en de betrekking der opeenvolgende coefficiënten a_m wordt uitgedrukt door:

$$a_m + \varphi_1 (m) a_{m-1} + \varphi_2 (m) a_{m-2} + \ldots . m\, a_{m-n} = 0.$$

Dus omgekeerd vindt men de differentiaal vergelijking, waaraan u voldoet, indien de reeks, waaraan u gelijk is, en dus daaruit ook de wet, volgens welke de opeenvolgende coefficiënten te zamen hangen, gegeven is.

Zij nu de gegevene reeks:

$$a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots . a_t p^t,$$

en daaruit de conditie-vergelijking:

$$a_m + \varphi_1 (m) a_{m-1} + \ldots . \varphi_n (m) a_{m-n} = 0 \qquad (a)$$

geldende voor elke groep van $(n + 1)$ opeenvolgende coefficiënten. Alle waarden van m, welke niet tusschen p en $p + n - 1$, $t + 1$ en $t + n$ liggen, worden door die conditie uitgesloten, daar (a) voor zulke waarden van m zoude ophouden, eene betrekking aan te geven tusschen $n + 1$ opeenvolgende coefficiënten van de reeks.

Nu is, zooals boven reeds is aangetoond, indien

$$u = \Sigma a_m e^{m\theta},$$

$$u + \varphi_1 (D) e^{\theta} u + \ldots . \varphi_n (D) e^{n\theta} u$$

$$= \Sigma \{ (a_n + \varphi_1 (m) a_{m-1} + \ldots . \varphi_n (m) a_{m-n}) e^{m\theta} \}.$$

Voor alle waarden nu van m, buiten de aangegevene grenzen, verdwijnen de termen dezer summatie in het laatste lid; en deze behoeft dus alleen te worden uitgestrekt tot de waarden van m binnen die grenzen, nl.

tot de n eerste waarden van m in de gegevene reeks, en tot de n waarden, welke volgen op die, welke in de reeks gevonden worden; terwijl elke waarde van a_m welke niet in de reeks gevonden wordt, natuurlijk niet in aanmerking komt.

Hoe meer ingewikkeld de betrekkingen tusschen de coefficiënten zijn, des te uitgebreider is ook het resultaat der summatie.

Zij om dit op te helderen:

$$u = a_p x^p + a_{p+r} x^{p+r} \dots a_t x^t;$$

en daaruit

$$a_m - \varphi_m (m) a_{m-r} = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\therefore u - \varphi (D) e^{r\theta} u = \Sigma \{ (a_m - \varphi (m) a_{m-r}) e^{m\theta} \}.$$

Hierin zijn nu de eenige waarden van m waarop men acht behoeft te geven p en t + r, alle andere waarden doen (b) verdwijnen. Voor $m = p$ wordt het daarmede corresponderende deel onder Σ teeken $(a_p - \varphi (p) a_{p-r}) e^{r\theta}$, doch, daar a_{p-r} geene coefficiënt is van de gegevene reeks, moet ook die verdwijnen, zoodat dit gedeelte eenvoudig wordt $a_p e^{r\theta}$.

Voor $m = t + r$ wordt de uitdrukking onder Σ

$$= \{ (a_{t+r} - \varphi (t + r) a_t) e^{(t+r)\theta} \},$$

waarvan alleen blijft

$$- \varphi (t + r) a_t e^{(r+t)\theta},$$

om dezelfde reden. De formule is dus:

$$u - \varphi (D) e^{r\theta} u = a_p e^{p\theta} - \varphi (t + r) u_t e^{(t+r)\theta},$$

of, wegens de relatie (b)

$$= a_p e^{p\theta} - a_{t+r} e^{(t+r)\theta};$$

en, indien de reeks oneindig ware geweest, dan zoude ook nog die laatste term vervallen in het tweede lid.

Is de conditie-vergelijking voor de coëfficiënten

$$a_m + \varphi_1(m)\, a_{m-1} + \varphi_2(m)\, a_{m-2} = 0,$$

dan wordt, na gedane reductiën:

$$u + \varphi(D)\, e^{\theta} u + \varphi_2(D)\, e^{2\theta} u = a_p e^{p\theta} - \varphi_2(p+1)\, a_{p+1}\, e^{(p+1)\theta}$$
$$- a_{t+1}\, e^{(t+1)} t + 1)^{\theta} + \varphi_2(t+2)\, a_t\, e^{(t+2)\theta}$$

Tot toepassing van deze wijze van sommeren, nemen wij het volgende voorbeeld:

$$u = 1 - \frac{n^2 x^2}{2} + \frac{n^2(n^2 - 2^2)\, x^4}{2.3.4.} - \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{2.3.4.5.6} x^6 + \ldots.$$

$$\therefore a_m - \frac{(m-2)^2 - n^2}{m(m-1)} a_{m-2} = 0$$

is de conditie-vergelijking voor de constanten, en dus

$$u - \frac{(D-2)^2 - n^2}{D(D-1)} e^{2\theta} u = 0,$$

$$\therefore (1 - x^2)\frac{d^2 u}{dx^2} - x\frac{d u}{d x} + n^2 u = 0$$

is de differentiaal-vergelijking ter bepaling van u.

De oplossing daarvan is:

$$u = C_1 \cos(n. \operatorname{arc} \sin x) + C_2 \sin(n. \operatorname{arc} \sin x).$$

Bepalen wij daarin de constanten door vergelijking met de gegevene reeks, dan vinden wij:

$$u = \cos n w;$$

waarin w die waarde arc sin x is, welke ligt tusschen

$$-\frac{\pi}{2} \text{ en } +\frac{\pi}{2}.$$

HOOFDSTUK V.

SYMBOLISCHE OPLOSSING VAN DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN IN DEN VORM VAN BEPAALDE INTEGRALEN.

De Integratie van differentiaal-vergelijkingen door bepaalde Integralen, waarvoor Euler het eerst den weg aanwees[1], en Laplace eene algemeene methode gaf, levert altijd nog vele moeijelijkheden op, grootendeels te wijten aan de nog onvolmaakte theorie der bepaalde Integralen.

Door de oplossing in de gedaante van bepaalde Integralen te geven, bereikt men verschillende gewenschte resultaten.

Vooral voor de lineaire partiële vergelijkingen met constante coefficiënten, van hooger orde dan de eerste, zijn deze oplossingen zeer geschikt, daar de vorm daarvan de bepaling der arbitraire functiën zeer vereenvoudigt.

---

[1]) Euler neemt den vorm van de bepaalde Integraal aan, en zoekt dan uit hare eigenschappen de klasse van vergelijkingen, waarvan zij de oplossing kan geven. Laplace volgt den omgekeerden weg.

In het algemeen is het doel, om functiën, welke niet in eindige termen kunnen worden uitgedrukt, te transformeren in gewone functiën onder eene bepaalde Integraal. De wijze van transformeren moet in elk bijzonder geval geregeld worden naar de eigenaardigheden der functie, welke getransformeerd zal worden.

De symbolische behandeling der differentiaal-vergelijkingen nu geeft vaak gereede aanleiding om tot den vorm der functie onder de Integraal en tot de grenzen daarvan te geraken. Van alle methoden, welke gebruikt worden, is zeker de symbolische wel de eenvoudigste.

Achtereenvolgens zullen wij de gewone en partiële differentiaal-vergelijkingen behandelen. Natuurlijk is het wegens de uitgebreidheid van het onderwerp niet te verwachten dat hier een volledig overzigt van de vele en zeer verschillende vergelijkingen met hare nog meer uiteenloopende oplossingen in bepaalde Integralen, zal gegeven worden.

I. GEWONE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

a. Een kort overzigt van de methode van Laplace, hoewel niet regtstreeks symbolisch, moge hier vooraf hare plaats vinden.

Vergelijkingen, waarbij in de coefficiënten x alleen tot de eerste magt voorkomt en geen tweede lid is, kunnen altijd-, en waar x in hoogere magten gevonden wordt, bij uitzondering geintegreerd worden door bepaalde Integralen, zooals duidelijk zal worden uit een exposé van de methode.

De vorm der op te lossen vergelijking zij:

$$x\,\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)u+\psi\left(\frac{d}{dx}\right)u=o. \qquad \text{(a)}$$

Stellen wij nu:

$$u=\int e^{xt}\,T\,dt$$

(waarin T eene onbekende functie van t, waarvan de vorm even als de grenzen van de Integraal uit de vergelijking moeten gezocht worden).

Substitueert men deze waarde in (a):

$$\therefore\int x\,\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)e^{xt}\,T\,dt+\int\psi\left(\frac{d}{dx}\right)e^{xt}\,T\,dt=o$$

$$\int x\,e^{xt}.\,\varphi(t)\,T\,dt+\int e^{xt}\,\psi(t)\,T\,dt=o \qquad \text{(b)}$$

De eerste term van (b), bij gedeelten geïntegreerd geeft:

$$e^{xt}\,\varphi(t)\,T-\int e^{xt}\frac{d}{dt}(\varphi(t)\,T)\,dt$$

dus wordt (b):

$$e^{xt}\,\varphi(t)\,T-\int e^{xt}\left\{\frac{d}{dt}[\varphi(t)\,T]-\psi(t)\,T\right\}dt=o$$

waaraan voldaan zal worden, indien

$$e^{xt}\,\varphi(t)\,T=o \qquad \text{(c)}$$

$$\text{en}\ \frac{d}{dt}[\varphi(t)\,T]-\psi(t)\,T=o \qquad \text{(d)}$$

Schrijft men (d) in den vorm:

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)\,T]-\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\varphi(t)\,T=o,$$

en lost men deze lineaire vergel. 1ste orde op, dan volgt:

$$T=\frac{C\,e^{\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt}}{\varphi(t)}$$

Uit (c) als komende van onder het Integraal-teeken, vindt men de grenzen daarvan. Ingeval men n verschillende waarden voor t vindt, dan is het duidelijk, dat men ook n — 1 particuliere Integralen zal kunnen vinden voor u.

Wij vinden dus:

$$u = C\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{xt + \int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt}}{\varphi(t)} dt$$

α en β te zoeken uit (c).

Ware in de coefficiënten van (a), x tot de n^{de} magt verheven voorgekomen, dan had men moeten stellen:

$$u = \int e^{x^n t}\, T\, dt,$$

doch dan zou ook (d) eene diff. vergel. n^{de} orde geweest zijn, en dus veelal onoplosbaar. Deze methode van Laplace is aan nog meerdere beperkingen onderworpen.

Wij zullen tot voorbeeld hiervan eene vergelijking nemen welke in reeksen is opgelost door Leslie Ellis [1]).

$$\frac{d^m y}{dx^m} + k^m y - \frac{pm}{x}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = 0$$

$$\therefore \left\{ x\left(\frac{d^m}{dx^m} + k^m\right) - pm\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \right\} y = 0$$

$$\therefore \varphi(t) = t^m + k^m \qquad , \psi(t) = -pm\, t^{m-1}$$

$$\int \frac{\psi t}{\varphi(t)} dt = \int \frac{-pm\, t^{m-1}}{t^m + k^m)} dt = -p\, l\, (t^m + k^m)$$

$$\therefore e^{\int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt} = (t^m + k^m)^{-p}$$

$$u = C\int e^{xt} (t^m + k^m)^{-p-1} dt.$$

---

[1]) Cambr. Math. Journ. Vol II. p. 202.

De grenzen hiervan bepaalt men uit:

$$e^{xt}(t^m + k^m)^{-p} = o$$

indien p een positief getal is uit:

$$(t^m + k^m)^{-1} = o$$

en indien p een negatief getal is, uit:

$$t^m + k^m = o.$$

Het eerste geval geeft voor de speciale waarde $m = 2$

$$t = +\infty \qquad \text{en } t = -\infty$$

$$\therefore u = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}(t^m + k^m)^{-p-1}\,dt.$$

Het tweede geval geeft in 't algemeen m wortels van de gedaante:

$$t_i = k\left\{\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2i+1)\pi}{m}\right\}$$

waaruit dus $m - 1$ particuliere integralen volgen tusschen twee grenzen t_i en t_j.

b. Eene geheel symbolische methode voor gewone diff. vergelijkingen.

De methode van bl. 94—105, gaf ons de oplossing van eene belangrijke groep vergelijkingen 2do orde: die oplossingen zijn niet altijd in dien vorm interpretabel, maar kunnen dit somtijds worden met behulp van bepaalde integralen.

Uit den factor welke daarin x^{-1} voorafgaat kan men $\varphi(z)$ bepalen voor de bepaalde integraal:

$$u = \int_a^b \varphi(z)\, e^{zx}\,dz.$$

Zoo vindt men voor de oplossing van:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2Q\frac{du}{dx} + \left(Q_2 + Q' - c^2 - \frac{m(m-1)}{x^2}\right)u = o$$

$$u = x^m e^{-Q_1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right)^{m-1}\left\{x^{-1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right)^{-1} o\right\}.$$

Deze oplossing kan men vervangen door:

$$u = kx^m e^{-Q_1} \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{m-1} e^{czx} dz$$

$$+ k^1 x^{-m+1} e^{-Q_1} \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{-m} e^{czx} dz.$$

Zien wij of deze uitkomst bevestigd wordt bij de vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{n}{x}\frac{du}{dx} + 2h^2 u = o \qquad \text{(d)}$$

waarvan wij de oplossing vinden bij Sturm [1])

$$u = A \int_0^{\pi} \cos(hx \sqrt{2} \cos\alpha) \sin^{n-1}\alpha \, d\alpha$$

$$+ A_1 x^{1-n} \int_0^{\pi} \cos(hx \sqrt{2} \cos\alpha) \sin^{1-n}\alpha \, d\alpha.$$

De symbolische vorm van (d) geeft aanleiding tot de symbolische oplossing:

$$u = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2h^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \left\{x^{-1}\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2h^2\right)^{-1} o\right\}$$

bij gevolg tot de bepaalde integraal:

$$u = k \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{\frac{n}{2}-1} e^{(hx\sqrt{2})z\sqrt{-1}} dz$$

$$+ k^1 x^{1-n} \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{-\frac{n}{2}} e^{(hx\sqrt{2})z\sqrt{-1}} dz.$$

Evenzoo voldoet ook:

$$u = k \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{\frac{n}{2}-1} e^{-(hx\sqrt{2})z\sqrt{-1}} dz.$$

$$+ k^1 x^{1-n} \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{-\frac{n}{2}} e^{-(hx\sqrt{2})z\sqrt{-1}} dz.$$

---

[1]) Sturm. Cours d'Analyse Tom. II p. 144.

Nemen wij nu de som van deze laatste oplossingen, dan verkrijgen wij gemakkelijk het resultaat van Sturm, door te stellen:

$$2k = A\,;\ 2k^1 = A^1 \text{ en } z = -\cos\alpha.$$

Zoeken wij nu nog van dezelfde vergelijking de solutie in eene bepaalde integraal door de methode van Laplace, dan verkrijgen wij nog hetzelfde resultaat:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{n}{x}\frac{du}{dx} + 2h^2u = o$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + 2h^2 = \varphi\left(\frac{d}{dx}\right),\ n\frac{d}{dx} = \psi\left(\frac{d}{dx}\right).$$

$$t^2 + 2h^2 = \varphi(t),\ nt = \psi(t)$$

$$\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt = \frac{n}{2}l(t^2 + 2h^2)$$

$$\therefore e^{\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt} = (t^2 + 2h^2)^{\frac{n}{2}}$$

Ter bepaling der grenzen hebben wij:

$$e^{xt}(t^2 + 2h^2)^{\frac{n}{2}} = o$$

$$\therefore t = \pm h\sqrt{-2}$$

$$\therefore\ u = c\int_{-h\sqrt{-2}}^{h\sqrt{-2}} e^{xt}(t^2 + 2h^2)^{\frac{n}{2}-1}dt.$$

Stellen wij $t = zh\sqrt{-2}$ dan wordt de vergelijking:

$$u = c\int_{-1}^{+1} e^{xzh\sqrt{-2}}(z^2 - 1)^{\frac{n}{2}-1}(h\sqrt{-2})^{n-1}dz$$

$$= c_1\int_{-1}^{+1} e^{hzx\sqrt{-2}}(z^2 - 1)^{\frac{n}{2}-1}dz.$$

waaruit verder dezelfde uitkomst als hierboven gemakkelijk kan verkregen worden.

De verschillende kunstgrepen gevolgd bij enkele andere geïsoleerde vergelijkingen, om hunne oplossingen in reeksen tot bepaalde integralen terug te brengen, zullen wij kortheidshalve moeten voorbijgaan.

II. PARTIËLE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

Wij zullen eene methode ontwikkelen, welke behalve hare netheid in vorm, nog dit voordeel heeft, dat zij op weinige uitzonderingen na, eene geheele klasse van vergelijkingen, nl. die van de tweede orde met constante coëfficiënten zonder 2^{de} lid omvat.

Buitendien is de oplossing in bepaalde integralen nog voor vele andere vergelijkingen gevonden.

Onze ruimte gedoogt echter niet, dat wij al deze bijzondere wegen aangeven; wij zullen ons dus hier weder bepalen tot het voornaamste, en eerst bovengenoemde klasse behandelen om daarna met een paar voorbeelden te besluiten.

De algemeene vergelijking van de tweede orde:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + A\frac{d^2z}{dx\,dy} + B\frac{d^2z}{dy^2} + C\frac{dz}{dx} + D\frac{dz}{dy} + Ez = o$$

kan zooals wij weten, geschreven worden:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\frac{d}{dy} + n\right)\left(\frac{d}{dx} + a^1\frac{d}{dy} + n^1\right)z + (E - nn^1)\,z = o \qquad (a)$$

(waarin de waarden van a en a^1 de wortels zijn van $m^2 - Am + B$, en verder n en n^1 gemakkelijk uit de primitieve vergelijking worden gevonden.)

Deze vorm geeft onmiddellijk aanleiding om twee gevallen te onderscheiden al naar gelang de vergelijking (a) eene eerste integraal toelaat of niet; analytisch wordt dit uitgedrukt:

$$E - nn^1 = o \qquad \text{of } E - nn^1 = -k^2$$

Beginnen wij met het eenvoudigste geval, dan wordt (a):

$$\left(\frac{d}{dx} + a\frac{d}{dy} + n\right)\left(\frac{d}{dx} + a^1\frac{d}{dy} + n^1\right) z = o$$

Stelt men hierin $z = e^u t$ dan is het niet moeijelijk, door middel van de methode der onbepaalde coefficiënten u zoodanig te bepalen, dat t voldoet aan de vergel.:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d}{dx} + a^1\frac{d}{dy}\right) t = o \qquad \text{(b)}$$

Bij de berekening van u vindt men 3 differentiaal-vergelijkingen die zich zeer laten vereenvoudigen, en waaruit men vindt:

$$u = \frac{(n^1 - n)\,y + (a^1 n - a n^1)\,x}{a - a^1}$$

Beschouwt men in (b) $a\frac{d}{dy}$ en $a^1\frac{d}{dy}$ als constanten en zij:

$$a\frac{d}{dy} = p + q$$

$$a^1\frac{d}{dy} = p - q$$

$$\therefore t = e^{-px}\left\{e^{qx} f_1(y) + e^{-qx} f_2(y)\right\}$$

of

$$t = e^{-px}\left\{(e^{qx} - e^{-qx})\,\varphi(y) + q\,(e^{qx} + e^{-qx})\,\psi(y)\right\}. \qquad \text{(c)}$$

Nu is $\frac{d}{dw} e^{qx\cos w}\, dw = -q\, e^{qx\cos w}\, x \sin w\, dw$;

Integreert men dit tusschen de grenzen o en π

$$\therefore e^{qx} - e^{-qx} = q\int_0^\pi e^{qx\cos w}\, x \sin w\, dw.$$

Dit gesubstitueerd in (c) geeft:

$$t = e^{-px}\left\{\int_0^\pi e^{qx\cos w}\, \Phi(y)\, x \sin w\, dw + \frac{d}{dx}\int_0^\pi e^{qx\cos w}\, \Psi(y)\, x \sin w\, dw.\right\}$$

Vervangt men hierin p en q door hare waarden:

$$p = \frac{a + a'}{2} \frac{d}{dy} = A \frac{d}{dy}$$

$$q = \frac{a - a'}{2} \frac{d}{dy} = B \frac{d}{dy}.$$

Zoo verkrijgt men, na eene bekende reductie:

$$t = \int_0^\pi \Phi \{ y + (B \cos w - A) x \} x \sin w \, dw.$$

$$+ \int_0^\pi \Psi \{ y + B x \cos w \} x \sin w \, dw.$$

Bij deze uitkomst valt nog op te merken, dat in de laatste term na de differentiatie, y moet veranderd worden in $y - Ax$, immers hebben wij daarin nog geen acht gegeven op den factor $e^{-Ax\frac{d}{dy}}$.

In het tweede geval nl. $E - nn^1 = -k^2$, wordt (a):

$$\left(\frac{d}{dx} + a \frac{d}{dy} + n\right)\left(\frac{d}{dx} + a^1 \frac{d}{dy} + n^1\right) z - k^2 z = 0.$$

Door de onderstelling $z = e^{px + qy} t$ wordt deze verder:

$$\left(\frac{d}{dx} + a \frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d}{dx} + a_1 \frac{d}{dy}\right) t - k^2 t = 0$$

$$\text{wanneer } p = \frac{a^1 n - a n^1}{a - a^1}, q = \frac{n^1 - n}{a - a^1}.$$

Stellen wij $a \frac{d}{dy}$, $a^1 \frac{d}{dy}$ weêr voor een oogenblik constant, en zij kortheidshalve:

$$\frac{a + a^1}{2} = A, \frac{a - a^1}{2} = B, \text{ dan is:}$$

$$t = e^{-Ax\frac{d}{dy}} \left\{ c\, e^{x\sqrt{(B^2 \frac{d^2}{dy^2} + k^2)}} + c'\, e^{-x\sqrt{(B^2 \frac{d^2}{dy^2} + k^2)}} \right\}$$

Deze uitdrukking wordt om dezelfde reden als hierboven:

$$t = e^{-Ax\frac{d}{dy}}\left\{\int_0^\pi e^{x\cos w\sqrt{(B^2\frac{d^2}{dy^2}+k^2)}}\varphi(y)\,x\sin w\,dw\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dx}\int_0^\pi e^{x\cos w\sqrt{(B^2\frac{d^2}{dy^2}+k^2)}}\psi(y)\,x\sin w\,dw.\right\}$$

Ten einde de magt die hierin voorkomt rationeel te maken, maken wij gebruik van het volgende theorema, door Poisson bewezen [1]).

Zijn g, h en k drie constanten,

$$\therefore \iint \varphi(g\cos u + k\sin u\sin v + k\sin u\cos v)\sin u\,du\,dv$$

$$= 2\pi\int_0^\pi \varphi(\sqrt{(h^2+k^2+g^2)}\cos w)\sin w\,dw.$$

Hierin is φ eene willekeurige functie en wordt het eerste lid geïntegreerd tusschen de grenzen:

$$u = 0,\ u = \pi;\ v = 0,\ v = 2\pi.$$

Is dus $\varphi(x) = e^x$, $h = 0$ en verandert men g en k in gx en kx, dan wordt de uitdrukking voor dit theorema:

$$2\pi\int_0^\pi e^{x\cos w\sqrt{(g^2+k^2)}}x\sin w\,dw$$

$$= \iint e^{x(g\cos u + k\sin u\cos v)}x\sin u\,du\,dv.$$

Hiermede wordt verder t gelijk aan de som van:

$$\iint e^{kx\sin u\sin v}\varphi(y+(B\cos w - A)x)\,x\sin u\,du\,dv$$

(waarbij de factor $\frac{1}{2\pi}$ in de willekeurige functie begrepen is) en

$$\frac{d}{dx}\int e^{kx\sin u\sin v}\psi(y+Bx\cos u)\,x\sin u\,du\,dv$$

(indien men in den laatsten regel y in $y - Ax$ verandert na de bewerking $\frac{d}{dx}$ uitgevoerd te hebben.)

---

[1]) Mémoires de l'Académie des Sciences 1818, p. 126.

Zooals wij weten is de symbolische oplossing van:

$$\frac{dz}{dt} = a\frac{d_2 z}{dx^2} \qquad z = e^{a^2 t \frac{d^2}{dx^2}} f(x). \qquad \text{(a)}$$

Hoe veranderen wij nu deze vorm $e^{p\frac{d^2}{dx^2}} f(x)$ in eenen anderen, welke alleen de eerste magt van $\frac{d}{dx}$ bevat, en dientengevolge interpretabel is?

Wij weten uit de theorie der bepaalde integralen dat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}. \quad \text{en}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(w-b)^2} dw = \sqrt{\pi} \qquad \text{(b)}$$

Stellen wij dus daarin $a\frac{d}{dx}t^{\frac{1}{2}}$ voor b, en vermenigvuldigt men de beide zijden van de integraal (a) met de beide leden van (b):

$$\therefore z\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(w - a t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\right)^2} e^{a^2 t \frac{d^2}{dx^2}} f(x)\, dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} e^{2wat^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}} f(x)\, dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} f(x + 2wat^{\frac{1}{2}})\, dw. —$$

Hieruit is dus $\frac{d^2}{dx^2}$ geheel verdwenen, en het argument der arbitraire functie f bepaald.

Behandelen wij ten slotte nog: [1])

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 z}{dx^4} = o$$

waarvan de symbolische oplossing is:

$$z = \cos\left(bt\frac{d^2}{dx^2}\right) f(x) + \sin\left(bt\frac{d^2}{dx^2}\right) F(x.)$$

---

[1]) Mem. de l'Inst. de France. T. VIII p. 475.

Nu is $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ay} \cos y^2 \, dy = \sqrt{\pi} \, . \cos\left(a^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ [1])

en dus $\int^{+\infty} e^{-2ay} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) dy = \sqrt{\pi} \cos a^2.$

Plaatst men daarin $bt \frac{d^2}{dx^2}$ voor a^2

$$\therefore \cos\left(bt \frac{d^2}{dx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(bt)^{\frac{1}{2}} y \frac{d}{dx}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) dy$$

daar ook:

$$\sin\left(bt \frac{d^2}{dx^2}\right) = b \frac{d^2}{dx^2} \int \cos\left(bt \frac{d^2}{dx^2}\right) dt$$

zoo is: (indien F eene arbitraire functie, en wij ook F(x) mogen schrijven voor $b \frac{d^2}{dx^2} F(x)$

$$z \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) f.\left\{x - 2y\,(bt)^{\frac{1}{2}}\right\} dy$$

$$+ \int dt \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) F\left\{x - 2y\,(bt)^{\frac{1}{2}}\right\} dy \quad ^{2)}.$$

---

[1]) Bierents de Haan.

[2]) Poisson, Mémoires de l'Institut 1818.

DRUKFOUTEN.

Op bl. 6, *regel* 3 van onderen, *staat*

$$u_x + \Delta_x - u_x$$

moet zijn

$$u_{x + \Delta x} - u_x.$$

Op bl. 53, *regel* 14 van boven, *staat* bu *moet zijn* 6 u.

Op bl. 109, 110, 111, *overal waar hier staat* a1, ai, at *moet zijn* a_1, a_i, a_t.

STELLINGEN.

I.

Het hoofdvoordeel van de symbolische methode is, dat zij meer eenheid en kortheid in de oplossing der Differentiaal-vergelijkingen brengt.

II.

Men heeft geen regt te beweren dat men elke door haar verkregen oplossing ook op de gewone wijze zou kunnen vinden.

III.

De rekening met Rigtingsgetallen heeft veel praktisch nut, het is daarom te wenschen dat zij algemeen worde ingevoerd.

IV.

De leer der evenredigheden dient verbannen te worden uit het onderwijs.

V.

De stelling: «wanneer twee zijden in een driehoek gelijk zijn aan twee zijden in een anderen, dan zal, wanneer de daardoor ingesloten hoeken ongelijk zijn, tegenover den grootsten van die twee hoeken ook de grootste zijde staan» wordt in alle mij bekende leerboeken veel te omslachtig bewezen.

VI.

De hypothese van Kant, betrekkelijk de vorming van het wereldstelsel, heeft nieuwe bevestiging verkregen door de jongste resultaten der Spectraal-analyse.

VII.

Verkeerdelijk noemen Forbes e. a. het ijs der Gletschers eene zeer taai vloeibare massa.

VIII.

Physica en mechanica zijn identisch.

LAMÉ.

IX.

De zon is een gasvormig ligchaam.

X.

Ten onregte zegt Pouchet: «Toute idée à priori, toute hypothèse n'est bonne qu'autant qu'on l'accepte à la condition fermement arrêtée de l'abandonner aussitôt que les faits ne seront plus explicables par elle.»

XI.

On n'a pas raison de dire que la matière a deux propriétés essentielles, l'étendue et l'impénétrabilité.

POUILLET, *Physique.*

XII.

Bij de bepaling van het soortelijk gewigt der gassen is het wetenschappelijker de waterstof als eenheid aan te nemen dan de dampkringslucht.

XIII.

Ten onregte zegt Kekulé: «Der wesentliche Gegenstand der Chemie is nicht die existirende Substanz, sondern vielmehr ihre Vergangenheit und ihre Zukunft.»

XV.

Het zoude zeer nadeelig werken op de ontwikkeling der natuurwetenschappen, wilde men zich houden aan de uitspraak van von Humboldt: «Es ist besser Erscheinungen unerklärt zu lassen, besser zu gestehen dasz sie zu grosz sind um ihre Erklärung zu wagen, als von Wirkungen aus zu gehen die jenseits unsere empirische Erkenntniss liegen.»

XVI.

Elke hypothese kan nuttig zijn, alleen niet die, welke de onmogelijkheid stelt dat wij eenig verschijnsel ooit zullen kennen.

BUIJS BALLOT, *Changement périodique de température.*