Over de methoden tot het bepalen van den geleidingscoëfficiënt voor warmte in metalen

II

OVER DE METHODEN

TOT HET BEPALEN VAN DEN

GELEIDINGSCOËFFICIËNT VOOR WARMTE IN METALEN.

OVER DE METHODEN

TOT HET BEPALEN VAN DEN

GELEIDINGSCOËFFICIËNT VOOR WARMTE IN METALEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

NA MAGTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. W. G. BRILL,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT DER FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

op Maandag 26 Februarij 1872 des namiddags te 2 ure,

DOOR

ELIE VAN RIJCKEVORSEL,

geboren te *Rotterdam.*

ROTTERDAM,

J. VAN BAALEN & ZONEN.

1872.

STOOMDRUK VAN P. W. VAN DE WEIJER, UTRECHT.

AAN MIJNE MOEDER.

INHOUD.

Van de drukfouten die in het werkje overgebleven zijn schijnt alleen die op p. 55 r. 8 v. o. zinstorend te zijn, waar voor of *te lezen* is *f*.

INLEIDING.

Een der eerste vraagstukken, die zeker wel op het gebied der natuurkunde treffen moeten, zal wel dat zijn, waarover ik hier een en ander denk te zamen te stellen. De eerste, die zich in eene schapenvacht hulde, deed dit zeker, omdat hij er den verwarmenden invloed van ondervond, en al zeer spoedig moet men tot de overtuiging gekomen zijn, dat de meerdere of mindere mate, waarin bekleedingstukken dezen invloed uitoefenen, van het meer of mindere doorlaten der eigen warmte van het igchaam afkomstig is.

Al vrij vroegtijdig zien wij dan ook, reeds in het midden der vorige eeuw, toen Newton, Huyghens, Galilei eerst de baan gebroken hadden voor eene wetenschappelijke behandeling, in deze rigting, van den menschelijken geest, eenige proeven doen om de vaste stoffen, al naar hun geleidingsvermogen voor de warmte te rangschikken. Ik wil hier reeds bijvoegen, dat het onze landgenoot Ingenhousz was, die deze eerste proefnemingen deed.

Doch lang was deze verdienstelijke man, op een slaafsche navolger na, de eenige die diergelijke proeven deed.

Het was dan ook niet mogelijk, meer te leveren, dan eene eenvoudige rangschikking van verschillende stoffen, zoolang er geene goed gevestigde theorie bestond, en er werd ook niets verder op experimentelen weg beproefd.

De theorie over dit onderwerp was eene der vele belangrijke zaken, die op wetenschappelijk gebied onze eigene eeuw in moesten leiden. Aan Fourier komt hier de eer toe, het eerst eene theorie, en wel in eens eene afdoende gegeven te hebben. Bijna gelijktijdig gaf Laplace er eene, bijna geheel gelijke, in de *Connaissance des Temps* voor 1823, en weinig later gaf Poisson er eene, die op niet geheel dezelfde grondslagen rustte, en ook in mathematische ontwikkeling verschilt. Hij komt echter tot dezelfde resultaten als Fourier, die dan ook sedert bijna zonder eenige tegenspraak als waarheid golden.

Het zal misschien bij den lezer der volgende bladzijden verwondering opwekken, nergens het woord te vinden, dat tegenwoordig als het shibboleth der physica is: „Mechanische Warmtetheorie", nergens den naam van Clausius, Tyndall en van zoovele anderen te vinden, die op dat gebied hunne namen onsterfelijk maakten.

Natuurlijk is het, dat ook de theorie van het door mij behande onderwerp zich gevoelt van de omwenteling in den laatsten tijd in de warmteleer tot stand gebragt, maar toch is mij niets bekend wat het mij raadzaam zou hebben gemaakt, in het theoretische gedeelte Fourier niet geheel te volgen. Hoe dikwijls blijft men in de wetenschap niet eene verouderde taal spreken, want hierop zou het hier eigenlijk nederkomen, omdat al wat nog gedaan is in die taal is uitgedrukt. Wie stoot zich er aan als iemand bv. van „warmtestof" spreekt, hoewel hij uitdrukke-

lijk vooraf zal zeggen, dat de warmte geene stof is? Ook ik wensch niet van ketterij beschuldigd te worden, wanneer ik van een „warmtestroom", van een „voortbewegen der warmte" spreek, alsof warmte stoffelijk zou wezen. Ik gebruik deze woorden eenvoudig ook, omdat ieder ze verstaat, omdat ze gemakkelijk zijn, nadat men het over hunne conventionele beteekenis is eens geworden.

Door de nieuwere oogpunten hebben de oudere mathematische ontwikkelingen hunne waarde volstrekt niet verloren. Zij zijn nog volkomen voldoende als grondsteen voor de discussie der proeven op dit gebied, en men houde wel in het oog, dat dit laatste de hoofdzaak is, bij hetgeen ik mij voorstel te geven.

Ik houd mij dus voor geregtigd, in het volgende de mechanische warmtetheorie op zijde te laten.

Tot den tijd nu, waarop de zoo straks genoemden hunne theoriën het licht deden zien, waren de zonderlingste denkbeelden gangbaar geweest. Zoo lang de hypothese, dat warmte eene stof is, die zich voortbeweegt in de ruimten, die de atomen van een ligchaam vrij laten, moest men wel de stelling aannemen, dat de minst digte stoffen de beste warmtegeleiders zijn, terwijl juist het tegenovergestelde waar is. En dit denkbeeld hield toch zoolang stand, hoewel lang niet zonder tegenspraak, dat een tijdgenoot van Fourier, Rumford, nog proeven moest doen, om er de onhoudbaarheid van te bewijzen. Deze stelde daarentegen weder de verkeerde meening, die hij uit zijne proeven dacht te bewijzen, dat vloeistoffen en gassen, de warmte absoluut niet geleiden, terwijl men slechts zeggen mag, dat zij dit zeer slecht doen. Dit is weder een van die vele, merkwaardige gevallen, waarin de hypothese, in casu de *warmtestof*, voorop wordt gezet, en dan de feiten er rond gegroepeerd, zonder dat men onderzoekt, of de feiten wel waar zijn. Intusschen mag

het ons niet verwonderen, dat de proeven met vloeistoffen zoo verschillende resultaten gaven, aangezien wij niet weten, bij welke proeven de stroomingen, die hier zoo hindelijk zijn, in rekening gebragt, of zelfs maar opgemerkt waren. Men kan zich echter er over verbazen, dat er, juist in ouderen tijd, zoo vele proeven met vloeistoffen gedaan werden, terwijl op vaste stoffen, waarbij de waarneming zooveel gemakkelijker en dankbaarder is, geen acht meer geslagen werd.

Door Fourier en de proefnemingen op zijne theorie gegrond, zijn al de zaken die ik hier tot nog toe aanstipte, naar de bewaarplaats voor physische antiquiteiten gebragt, waar zij mogen rusten. Bij een werkje als dit, waarin ik mij voorstel verslag te geven van de nieuwere proeven, moet dan ook de theorie voorafgaan, en neemt dus deze van zelve de eerste afdeeling in. Ik moet hier echter vooraf eene opmerking maken. Wat ik geef, is volstrekt geene volledige theorie over warmtegeleiding. Poisson geeft reeds veel, wat ik slechs ten deele beschrijf, zonder het te bewerken, Riemann gaf eene, mathematisch gesproken, veel elegantere bewerking, maar vooral Lamé gaf in den jongsten tijd eene veel uitgebreidere theorie, die ook de niet-homogene ligchamen op afdoende wijze behandelt, die Poisson meer van verschillende zijden beschouwt, dan wel nader tot eene oplossing brengt.

Ik zal alleen geven wat mij, voor mijn doel, — beoordeeling der methoden van proefneming, — voldoende toeschijnt; doch ik hoop dit genoegzaam te geven. Ik meen zelfs Fourier hier en daar te moeten volgen in zijnen rijkdom van beschouwingen. Deze geeft soms vele verschillende bewijzen voor geheel, of bijna geheel dezelfde zaak. Men vergete daarbij niet, dat in zijnen tijd de theorie der differentiaal vergelijkingen en der bepaalde integralen, waarin Riemann zulke stoute grepen kon doen,

eerst in hare kindschheid was. Maar men zal zien, dat ik bijna alles later in de theorie, of in de proeven, weder gebruik, en daarom geloof ik niet, dat men er mij een verwijt van zal maken, Fourier te getrouw te volgen. Alsof dit trouwens een verwijt kon wezen!

Alles te behandelen wat op geleiding betrekking heeft, zou de grenzen van een academisch proefschrift ver te buiten gaan. Onder het bewerken van mijn stof, zag ik mij dan ook genoodzaakt, de grenzen gestadig in te krimpen.

Zoo zal men bijna niets vinden over de slechter geleidende vaste ligchamen, nog minder over vloeistoffen. De proeven daaromtrent gedaan noem ik dan ook maar ter loops, en ik wil voor volledigheid, zelfs van de opsomming geen borg blijven. Voor theoretische behandeling hebben deze proeven dan ook weinig waarde.

Geen woord over warmtegeleiding in kristallen. De proeven van de Sénarmont, en van latere proefnemers zal ik achterwege laten, en kan mij zoo ook ontslagen rekenen van de noodzakelijkheid, de volumineuse theorie daaromtrent te geven.

Voornamelijk, bijna uitsluitend, zal ik mij bezig houden met metalen, en hoop ik de methoden, die gevolgd zijn om daarvan den coëfficiënt der geleiding voor warmte te bepalen, uitvoerig te behandelen, en naar vermogen te beoordeelen. En hierbij zijn weder voornamelijk metalen staven gebruikt, zoodat ik daardoor weêr geleid werd, mij uitsluitend met de theorie der staven bezig te houden, niettegenstaande ook ligchamen van anderen vorm vrij uitvoerig reeds behandeld zijn [1]).

---

1) Behalve reeds door Fourier, nog veel meer door Poisson, maar ook in lateren tijd dikwijls behandeld bv. door C. F. Neumann. — De bol is steeds met voorliefde behandeld.

Ik zal misschien eenige meerdere verontschuldiging behoeven, als ik een zeer gewigtig punt onbehandeld laat, omdat het, strikt genomen, wel binnen het kader door den titel aangeduid zou moeten vallen. Ik bedoel, de discussie over, wat er plaats heeft bij overgang van warmte in eene staaf, die uit verschillende metalen is te zamen gesteld, op de aanhechtingsplaatsen tusschen twee metalen. Te meer zou het nuttig wezen, als ik dit had kunnen toevoegen, daar het in mijn enger begrensde onderwerp eenigermate ingrijpt. Bij alle onderzoekingen met metalen staven toch, heeft, hoe men die ook moge doen, een overgang van warmte van een metaal op een ander plaats, en wel zoo, dat de metalen zulke zijn die een zeer verschillend geleidingsvermogen hebben, waarbij de plaats hebbende verschijnselen steeds sterk geaccentueerd zijn.

Ik liet deze kwestie dan ook alleen achterwege, om niet te uitgebreid te worden, en er is niet heel veel door verloren, want de zaak is volstrekt niet tot een einde gebragt. Er bestaat eene soort theorie over dit onderwerp waaraan verschillende physici de hand gelegd hebben, maar die nog wel eenigermate den indruk maakt van eene noodhulp-theorie, die nog veel behoefte heeft aan den steun van proeven. En die zijn er nog niet veel. De voornaamsten zijn die van Ångström, die deze zelf nog niet als afgeloopen beschouwt, en die volstrekt niet onvatbaar zijn voor zwaarwigtige tegenwerpingen.

Ik wil hier dus alleen, ten behoeve van mijn werk, het resultaat opmerken, dat zeker te noemen is, dat overal waar twee metalen elkander raken, respective aan elkander gesoldeerd zijn, eene onregelmatigheid in de gelijding plaats heeft. Deze bestaat in de hoofdzaak daarin, dat de soldeerplaats eene eigen temperatuur heeft, eene andere dan die van twee doorsneden in hare onmiddelijke nabijheid in de beide metalen genomen.

Uit het voorgaande zal het duidelijk wezen, dat mijn werkje uit twee afdeelingen zal bestaan, de eene theoretisch, de andere de verschillende methoden van proefneming inhoudende. Ik had gemakkelijk er nog een historische afdeeling bij kunnen voegen, die niet onbelangrijk zou geweest zijn, maar heb kortheidshalve verkozen slechts bij de behandeling der proeven de chronologische rangschikking in hoofdzaak in acht te nemen, en heb deze slechts hier en daar verwaarloosd, waar het onderwerp het scheen te vorderen.

Bij het gedeelte dat over de proeven handelt, zal men nog veel vinden, wat sterk naar theorie riekt, maar, waar zoo vele en zoo verschillende methoden bestaan, is het onmogelijk de theorie geheel af te zonderen. In de eerste afdeeling geef ik dus alleen de algemeene theorie, en meet in de tweede aan ieder der proefnemers zijn behoorlijk aandeel te zijner plaatse toe.

De eerste afdeeling vormt een geheel, de theorie van Fourier, wanneer men een paar §§ uitzonderen wil, inzonderheid de laatsten, waarin ik een en ander uit die van Poisson aanhaal.

De tweede afdeeling zal in tweeën gesplitst zijn. Dit zal zijn in oudere en nieuwere proefnemingen, welken naam ik eigenlijk voortrek boven dien van slechtere en betere, uit eerbied voor de groote mannen, die in de eerste afdeeling hunne plaats moeten nemen. Door het woord nieuwere wil ik dan ook meer aangeduid hebben, dat de hieronder voorkomende proefnemingen op andere grondslagen rusten, dan de anderen, dan wel dat ze, chronologisch gesproken, van later dagteekening zouden wezen. Dit zou trouwens ten deele eene onwaarheid zijn.

Uit de tot nu toe gegeven uiteenzetting van de volgende bladzijden, ziet men, dat ik er geen aanspraak op mag maken, iets nieuws te leveren; maar wel geloof ik een, niet onnut werk on-

dernomen te hebben. Waar sedert anderhalve eeuw reeds zooveel gedaan is, en waar nog zoo zeer veel te doen valt, als op dit bijzonder gebied, daar kan het niet volkomen nutteloos wezen, een rustpunt te hebben aangegeven. Daarom tracht ik het verledene tot afsluiting te brengen, het bruikbare en onbruikbare er van, van elkander af te scheiden, en aan te duiden in welke rigtingen naar mijne meening nog gewerkt dient te worden. Ik zal reeds hier zeggen dat er nog veel te doen is, en dat het nog lang zal kunnen duren eer dit kleine hoekje op het gebied van menschelijk weten, als geheel door den menschelijken geest bedwongen, zal kunnen beschouwd worden. Menigeen kan zijne krachten nog op dit terrein beproeven.

Hiermede zou ik deze inleiding kunnen sluiten. Maar ik wil nog iets toevoegen, dat niet direct tot mijn onderwerp behoort, en dus het beste zijne plaats hier vindt.

Men zal zien, dat Fourier zijne theorie grondt op de hypothese van Newton [1]). Aan de volledigheid acht ik mij verpligt hierover een paar woorden in te lasschen. De hypothese is eigenlijk dubbel; 1°. dat warmte-afgifte van een molecule aan een naburig, (onverschillig of beiden deel uitmaken van een ligchaam) direct evenredig is aan hun verschil in temperatuur; 2°. dat als de tijden van warmte afgifte volgens eene arithmetische reeks opklimmen, het verschil in temperatuur volgens eene geometrische reeks afneemt. Dit is wat gewoonlijk de *Logarithmische wet* van Newton genoemd wordt. Ik hield mij hier niet aan den vorm van Newton, daar hij het bovenstaande tot een geheel ander doel gebruikt, en goot het dus in den vorm die mij het beste

---

1) *Newtoni opuscula collecta a* Joh. Castillioneo. Lausannae et Genevae 1744. Tom. III. opusc. XXI. p. 422.

Newtoni philosophiae naturalis principia mathematica. Edit. Lesueur et Jacquier. Liber III. Prop. VIII. corr. IV. Prop. XLI.

past. Newton werpt deze gewigtige zaken, die hij de eerste was, te bespreken, als het ware weg in eene noot uit den overvloed zijner grootsche scheppingen. En toch is het er verre van af, dat men het er niet zou uitgevischt hebben, om er in onmagtigen tegenstand eene lans tegen te breken, zoo als ik aanstonds zal toonen.

De twee deelen der hypothese zijn in het naauwste verband, en ook bij Newton zelf vereenigd. Zij v de temperatuur van een deel, w die van het andere, moge $v > w$ zijn. In eenen tijd t, zal dus, als m een constant getal is, van v naar w gaan, als ik gemakshalve aan de moleculen zelven die letters tot naam geef: $m\ (v - w)$. In v blijft dus $v - (v - w)\, m$. In een tweede moment t, gelijk aan het voorgaande, zal er dus overgaan $m\{v - m\,(v - w)\}$ of $m\,v - m^2(v^2 - w)$ enz. Dit is, mathematisch uitgedrukt, mijn tweede deel der hypothese.

Men zal zien, dat het eenvoudigste deel der theorie, dat van den toestand eener staaf aan een uiteinde verwarmd, zoo lang tot alle deelen er van eene vaste eindtemperatuur aangenomen hebben, hiervan op de eenvoudigste wijze afhangt. Dit was dan ook reeds voor Fourier door Biot ontwikkeld.

Als een vonk die in het kruid valt, ontstaken de weinige regelen van Newton een vuurwerk van voor en tegen, dat meer dan eene eeuw aanhield. Newton had dan ook zijne stelling zonder eenig bewijs [1]) (voor zoover mij bekend is) opgesteld, en tegenspraak was dus geoorloofd. Voor het eerst in 1701 trad hij in de *Philosophical Transactions* met de zaak op, echter ano-

---

1) Tenzij als bewijs gelden moge wat Gehler er voor aanvoert, doch dit verplaatst slechts de hypothese, en maakt haar niet meer tot axioma, dan de hypothese, zoo als ik ze vertolkte.

niom, en reeds in 1703 trad Amontons als heftig tegenstander op, doch had klaarblijkelijk de zaak niet best begrepen, en eene fout in uitdrukking van N. voor diens ernst opgevat. N. zegt namelijk temperatuur, waar hij meent: verschil in temperatuur tusschen een ligchaam en zijne omgeving.

Daar deze zaak slechts los met mijn onderwerp in verband staat, zal ik de litteratuur [1]) er over niet in 't breede opgeven, doch alleen kort aangeven wie er voor, wie er tegen hunne stem deden hooren, al was het alleen, omdat wij er weder een paar Nederlanders bij ontmoeten. Martine stelde voor, volgens proeven van hem zelven en ouderen van Musschenbroek van de geometrische reeks van N. eene arithmetische af te trekken, en ook Barnaart meent dat dit nader aan de waarheid komt. Richmann was weder voor Newton, even als vooral Lambert, wiens proeven, niet dadelijk genoeg bekend, wel als afdoende hadden kunnen gelden.

Eindelijk bemoeiden zich met dezelfde zaak nog Erxleben, Leslie, Dalton, Delaroche, Rumford tot dat zij door Biot, Fourier en Poisson tot rust gebragt werd. Want, toen dezen de geheele theorie, die men in de volgende bladzijden vindt, op de hypothese van Newton gebouwd hadden, en de proeven bleken, met hunne theoretische uitkomsten overeen te stemmen, kon men N. als geregtvaardigd beschouwen.

Ten slotte voeg ik hier bij, en hierop drukte Newton misschien niet genoeg, hoewel hij het uitdrukkelijk zegt, dat deze wet alleen als voldoende waar mag aangenomen worden bij kleine temperatuurverschillen. Hoever men hiermede echter gaan kan, is nooit voldingend uitgemaakt.

---

1) Te vinden in: Gehler, *Physikalisches Wörterbuch*. V. 10. p. 434.

Ik moet hier eene moeijelijkheid aanwijzen, waarop ik gedurende de bewerking van mijn onderwerp gestooten ben, en die ik misschien niet altijd geslaagd ben te ontwijken. Men zal intusschen zien, dat ik mij hiervan geen verwijt zou behoeven te maken. Bij de oudste proeven is het steeds zeer moeijelijk te onderscheiden, of zij gedaan zijn, om de Logarithmische wet voor afkoeling van Newton, dan wel de Logarithmische wet voor warmte geleiding van Biot te verifiëren. Sommige experimentatoren trachten beiden te doen, zooals Rumford, van anderen bleef het mij twijfelachtig. Zoo neem ik bv. Amontons in mijne reeks op, op gezag van Despretz, hoewel ik bijna overtuigd ben, dat hij slechts de wet van Newton op het oog had, vooral omdat Biot toen nog niet leefde. Eveneens noem ik de veel betere proeven van Lambert, hoewel daarvan hetzelfde geldt. Maar de wet van Biot hangt zonder verdere hypothese van die van Newton af, zoodat eene fijne onderscheiding hier mij niet noodig scheen. Zoolang de proeven alleen dienden om de wetten te verifiëren, niet om getallen voor de coëfficiënten te geven, volgt de waarheid van de eene wet uit de waarheid van de andere. Ik wilde hier slechts aangeven, dat ik deze klip gezien heb. Daar overigens de proeven van de voorheen genoemden, van die van Amontons en Lambert naauw verschillen, mogen die als specimen gelden.

Als resultaat schijnt men veilig het volgende te kunnen geven. De wet der warmte afgifte moge geheel anders zijn, (wat zij vooral tusschen ligchaam en omgeving wel wezen zal, daar hier en straling, en geleiding te zamen optreden) misschien veel gecompliceerder, maar voor kleine temperatuurverschillen is zij met voldoende zekerheid bruikbaar.

De basis van de theorie aldus vastgesteld, benevens mijn programma, moge de uitvoering er van volgen.

Met het aangeven van bronnen was ik niet spaarzaam. Waar eene zaak nog niet als afgesloten te beschouwen is, kan men dit niet zijn, vooral bv. niet over proefnemingen waarvan ik het wenschelijk oordeel, dat zij herhaald worden. Een herhaler zal dankbaar zijn, alle bronnen aangegeven te vinden. Ik heb ze echter, om stoornis te vermijden, zorgvuldig in de noten te zamen gebragt.

EERSTE HOOFDSTUK.

THEORIE DER GELEIDING VAN WARMTE IN STAVEN.

A. THEORIE VAN FOURIER.

Inleiding. — Oneindige schijf.

§ 1.

Hoewel uit een mathematisch oogpunt beschouwd de wijze waarop Riemann [1]), of eigenlijk het eerst Lejeune Dirichlet, de theorie der warmtegeleiding ontwikkelt, wat sierlijkheid aangaat, de voorkeur verdient, zal ik hier liever Fourier [2]) volgen, die, tot mijn doel, langs eenen korteren weg voert. Ik zal zelfs zooveel mogelijk alles vermijden, wat niet tot mijn onderwerp in engeren zin behoort, en alleen de geleiding in dunne staven behandelen.

Voorloopig noem ik de volgende constanten, waarvoor ik dezelfde letters zal bijbehouden:

c = warmte capaciteit = het aantal warmte eenheden, die

---

1) Bernhard Riemann, *Partielle Differential Gleichungen.* (Bearbeitet von K. Hattendorf).

2) Fourier, *Théorie de la Chaleur*, Paris 1822.

Vooraf waren reeds gegaan stukken in:

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences voor 1807.

noodig zijn, om een kilogram van een ligchaam van de temperatuur 0 tot de temperatuur 1 te verwarmen (van 0° tot 100° Celsius). De eenheid van warmte is de hoeveelheid warmte, die noodig is, om een kilogram ijs van 0° tot water van 0° te maken.

h = uitwendige geleidingscoefficiënt = de hoeveelheid warmte, die in eene minuut bij de temperatuur 1 (100° C.) uit een vierkante meter oppervlak van het te beschouwen ligchaam in eene omgeving van de temperatuur 0 overgaat. (Door straling en door geleiding beiden).

k = inwendige geleidingscoefficiënt = hoeveelheid warmte-eenheden, die in eene oneindige schijf in eene minuut door een oppervlak van een vierkante meter vloeit, wanneer het eene grensvlak der schijf permanent op de temperatuur 0° en het andere grensvlak op 100° C. gehouden wordt en gemeten, nadat de eindtoestand ingetreden is.

De k is nu het onderwerp van mijn onderzoek. Beiden k en h zijn geene constanten, maar voor de theorie kunnen wij ze voorloopig als constant beschouwen.

Denkt men in een homogeen ligchaam twee moleculen m en n, dan neemt Fourier aan dat de hoeveelheid warmte, die van het meest verwarmde naar het minder warme gaat, evenredig is: 1° aan den tijd, 't. 2° aan het verschil tusschen de temperaturen, en verder eene functie $\varphi\ (p)$ van den afstand p der beide moleculen is. Deze afstand p zal steeds zeer klein

---

Bulletin des sciences de la Société philomatique 1801.

Annales de chimie et de physique 1816. (Tome III) 1817, (Tome IV en VI) 1820, (Tome XIII).

Bulletin, etc. 1818 en 1820.

Analyse des travaux de l'académie, par M. Delambre, 1820.

Mémoires de l'académie des sciences, (Tome IV V en VII).

moeten wezen, opdat $\varphi(p)$ eenige bemerkbare waarde hebbe, dit is tevens eene wettiging van de tweede hypothese, want, als de moleculen zeer digt bij elkander liggen, zal steeds het temperatuurverschil klein moeten zijn, en kan men dus de warmte-afgave als direct proportioneel aannemen, waarbij in elk geval slechts oneindig kleinen van eene hoogere orde verwaarloosd worden, wanneer men de onbekende functie φ ontwikkelt denkt volgens opklimmende magten van p.

Verder neemt Fourier aan, dat de absolute temperatuur van m en n zonder invloed zijn. Dit zullen wij in het vervolg zien, dat niet zoo is, en het is dan ook reeds vroegtijdig op de theorie van Fourier aangemerkt. Poisson is er in geslaagd de theorie voor een k, met de temp. veranderlijk vrij onvoldoende te ontwikkelen. Hierover later.

Zij dus σ een deel van het oppervlak van een ligchaam, met temp. v, dan, zal als a de temp. van de omgeving is, volgens dezelfde hypothese $\sigma h\,(v-a)\,dt$ de hoeveelheid warmte zijn, die σ in den tijd dt naar buiten afgeeft.

§ 2.

Nu is het eenvoudigste geval, dat men bij de geleiding behandelen kan, het volgende. Men denke eene oneindige schijf, waarvan de dikte $= e$ moge wezen, en de beide oneindige eindvlakken steeds op de temp. a en b gehouden worden. Denkt men nu in de schijf een vlak parallel aan de eindvlakken, op eenen afstand z van het vlak met de temp. a, dan zal wanneer de eindtoestand ingetreden is, in dit geheele vlak de temp. v dezelfde zijn, want er is geen enkele grond, waarom een zijner punten in eenen anderen toestand dan een ander zou verkeeren. Ten tweede moet dan de hoeveelheid warmte, die door het vlak

gaat, onafhankelijk van z zijn, want was dit zoo niet, dan zou een vlak in het ligchaam meer of minder warmte ontvangen, dan het afgeeft, zou verwarmen of afkoelen, en dus de toestand van het geheel niet constant, geen eindtoestand wezen. De hoeveelheid warmte nu, die het vlak doorlaat, is evenredig aan de verandering van v naar z [1]), $\frac{dv}{dz}$; deze moet nu constant zijn, dus:

$$\frac{dv}{dz} = m,$$

$$v = mz + C;$$

of, wanneer men bedenkt, dat voor $z = 0$ $v = a$ is, en voor $z = e$, $v = b$, dan heeft men:

$$v = a + \frac{b - a}{e} z, \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

als temp. voor elk vlak in de schijf.

§ 3.

Denkt men nu een tweede vlak in dezelfde schijf, waarvoor v en z mogen zijn v' en z', dan is:

$$v' = a + \frac{b - a}{e} z',$$

$$v - v' = \frac{b - a}{e} (z - z').$$

Door nu hetzelfde te doen in eene tweede, dergelijke schijf zou men eene tweede formule verkrijgen, deze moge zijn:

$$u - u' = \frac{b' - a'}{e} (z - z').$$

---

1) Het bewijs hiervoor van Fourier, en het kortere, dat Jamin in zijn handboek geeft, schijnt mij overbodig te wezen.

Deze twee in verband beschouwd, geven:

$$v - v' : u - u' = \frac{b - a}{e} : \frac{b' - a'}{e'}.$$

Nu den afstand $z - z'$, dien wij voor beide schijven gelijk kozen, oneindig klein gedacht, dan wordt $v - v'$, respective $u - u'$, de hoeveelheid warmte die meer voorhanden is aan de eene dan aan de andere zijde van de schijf met de oneindig kleine dikte $z - z'$. De hoeveelheid warmte, die nu de eene zijde van die schijf aan de andere afgeeft, is volgens hypothese hiermede evenredig. Deze warmte is wat Fourier den „Flux de Chaleur" (warmtestroom) noemt. Zij deze F, dan mogen wij bovenstaande formule schrijven:

$$\frac{F}{F'} = \frac{a - b}{e} : \frac{a' - b'}{e'}.$$

Denkt men nu in de eene schijf de temperaturen $a' = 1$ en $b' = 0$ en $e' =$ de vlakteëenheid, dan wordt de warmtestroom $F' = k$, zooals ik deze constante omschreven heb, dus:

$$F = k \frac{a - b}{e},$$

of 1) in aanmerking nemend:

$$F = -k \frac{dv}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Hierdoor is de constante k in formule gebragt.

Nu kunnen wij ook h invoeren, als men eene schijf neemt, aan de eene zijde slechts verwarmd op eene temp. a, aan de andere zijde aan eene omgeving met de temp. b blootgesteld. Is nu de eindtoestand ingetreden, dan moet het niet verwarmde vlak eene zekere temp. β hebben, en daar al weder even veel invloeijen uit de warmte bron, als er naar buiten uitvloeit. Wat er invloeit, is $= k \frac{a - \beta}{e}$, en wat er uitvloeit, zagen wij boven,

dat $= h(\beta - b)$ is, altijd in de eenheid van tijd, dus:

$$k \frac{a - \beta}{e} = h(\beta - b),$$

waaruit volgt:

$$\beta = a - \frac{he(a - b)}{he + k}.$$

Beschouwingen over den eindtoestand eener verwarmde staaf.

§ 4.

Gaan wij nu over tot eene staaf, van oneindige lengte en van kleine doorsnede. Deze zij kwadratisch, en de zijde $= 2l$. Onderzoeken wij eerst den eindtoestand, wanneer de staaf aan het begin op eene vaste temp. A gehouden wordt, en het overige in eene omgeving met de temp. 0 is. Opdat de toestand een constante zij, moet in eene willekeurige doorsnede van de staaf evenveel warmte instroomen als er uitstroomt. Nemen wij eene Abscissenas in de middellijn der staaf aan, en tellen de x van uit het punt waar de temp. A is, en welk punt ik kortheidshalve de basis der staaf wil noemen.

Wordt nu in de staaf een elementair schijfje van de dikte dx gedacht, dan is de hoeveelheid warmte die daardoor naar het overige gedeelte der staaf vloeit volgens het voorgaande $= -4l^2k \frac{dv}{dx}$.

Is verder de buitentemp. $= 0$, dan zal, daar de omtrek van ons schijfje $= 8l\,dx$ is, in denzelfden tijd uit het schijfje naar buiten uitstroomen, volgens Newtons hypothese: $8hlv\,dx$. Wat dus wegvloeit uit het oppervlak tusschen 0 en x, is:

$$\int_0^x 8hlv\,dx.$$

De waarde hiervan aan de onderste grens, moet constant zijn, zij zij $= C$. Nu moet, opdat er evenwigt zij, de som dezer twee hoeveelheden $= 0$ wezen, dus:

$$-4\,l^2\,k\frac{dv}{dx} + \int 8\,h\,l\,v\,dx - C = 0;$$

en differentieren wij dit naar x:

$$k\,l\,\frac{d^2v}{dx^2} = 2h\,v,$$

van welke vergelijking de integraal is:

$$v = Pe^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}} + Qe^{+x\sqrt{\frac{2h}{kl}}}.$$

Bedenken wij, dat voor $x = \infty$, $v = 0$ en voor $x = 0$, $v = A$ is, volgens de onderstelling, dan wordt onze vergelijking tot:

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

In woorden uitgedrukt, toont dit resultaat, dat als de x eene arithmetische reeks vormen, de temperaturen v in die doorsneden eene geometrische reeks uitmaken.

Graphisch voorgesteld: neemt men de afstanden x als abscissen, de temperaturen v als ordinaten, dan is de lijn die de uiteinden der ordinaten vormen eene logarithmische kromme.

Dit is de zoogenaamde *Wet* van Biot, daar Biot deze het eerst uit de wet der afkoeling van Newton afleidde.

Wij zullen later zien, hoe deze met de proeven overeenstemt.

Bepaalt men nu door waarneming twee opeenvolgende temperaturen, dan is hieruit de verhouding der in- en uitwendige geleiding te vinden, want dan is:

$$\frac{v_1}{v_2} = e^{-(x_1-x_2)\sqrt{\frac{2h}{kl}}},$$

$$\sqrt{\frac{2h}{k}} = \frac{lg\, v_1 - lg\, v_2}{x_2 - x_1} \sqrt{l}.$$

Deze formule zal ons later bij de proeven te pas komen, is echter niet zeer geschikt om werkelijk k te bepalen. Verder is voor twee staven van gelijke stof $\frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{l_1}{l_2}$, en voor twee van ongelijke stof maar gelijke doorsnede: $\frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{k_1}{k_2}$.

§ 5.

Tot nu toe namen wij stilzwijgend aan, dat de doorsnede van de staaf klein genoeg is, om de veronderstelling te wettigen dat over de geheele doorsnede de temperatuur constant is, wat streng genomen wel nooit waar zal zijn. Ik wil ook nog aantoonen hoe de formule wordt voor eene oneindige staaf van grootere doorsnede, dus voor een oneindig prisma. Hier zal zijn: $v = F(x, y, z, t)$. Vooreerst echter blijft t buiten rekening, daar wij nog slechts den eindtoestand beschouwen. Dan zal in het lichaam in de eenheid van tijd, door eene vlakte eenheid loodregt op de as der z gaan, in eene rigting parallel met deze as eene zekere hoeveelheid $-ck$, evenzoo $-bk$ parallel de as der y, en $-ak$ parallel de as der x, of analoog met het vroeger gezegde: $-k\frac{dv}{dz}$, $-k\frac{dv}{dy}$, $-k\frac{dv}{dx}$.

Beschouwen wij voor een oogenblik alleen de as der x. Moge ω de oppervlakte zijn van een vlakteëlement in het vlak $X\,Y$, dan zal daar in den tijd dt doorvloeijen $-k\frac{dv}{dz}\,\omega\, dt$. Denken wij nu in de staaf een elementair parallelopipedum, waarvan twee diagonaal tegenovergestelde hoekpunten zijn mogen: m met de coördinaten x, y, z, en m' met $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$.

In de richting van de x komt dus in het element de hoeveelheid $-K\frac{dv}{dx}dy\,dz$, daar hier $\omega = dy\,dz$, er stroomt in dezelfde rigting uit: $-\left(K\,dz\,dy\frac{dv}{dx} + K\,dz\,dy\,d\frac{dv}{dx}\right)$; er zal dus in deze rigting in blijven:

$$-K\,dz\,dy\,dx\,\frac{d^2v}{dx^2}.$$

In de twee andere rigtingen blijven er volkomen analoge hoeveelheden in, waarin slechts voor $\frac{d^2v}{dx^2}$ komt: $\frac{d^2v}{dy^2}$ en $\frac{d^2v}{dz^2}$.

Daar wij den eindtoestand beschouwen, waarin de verdeeling der warmte geene verandering meer ondergaat, moet de hoeveelheid in ons element aanwezig constant, de toewas dus $= 0$ wezen wat ons geeft, na behoorlijke vereenvoudiging:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

Indien wij dit integreren zouden wij willekeurige constanten behouden, die door de, aan het oppervlak geldende vergelijkingen te elimineren zijn. Eerstens hebben wij, dat voor $x = 0$, moet zijn $v = A$.

Als verder de dikte der staaf weder $2l$ is, dan is voor een elementair gedeelte $dx\,dy$ van het oppervlak, wat naar buiten uitstroomt $= h\,dx\,dy\,V$, als V de temp. aan de oppervlakte, d. i. voor $z = l$ is. Nu moet dit, opdat de toestand constant zij, gelijk wezen aan wat van binnen in ditzelfde element vloeit. Dit zagen wij boven dat $= -k\,dx\,dy\,\frac{dv}{dz}$ is, dus hebben wij als tweede bepaling:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h}{k}v + \frac{dv}{dy} = 0, \text{ voor } y = \pm l, \\ \text{en evenzoo:} \quad &\frac{h}{k}v + \frac{dv}{dz} = 0, \text{ voor } z = \pm l. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 5)$$

Men ziet, dat wij steeds de as der x als as van het prisma nemen.

§ 6.

Om onze Differentiaal vergelijking te integreren, kunnen wij als eene partieele Integraal kiezen:

$$a\,e^{-mx} \cos n\,y \cos p\,z,$$

dan volgt uit 4):

$$m^2 - n^2 - p^2 = 0,$$

of wel:

$$m = \sqrt{n^2 + p^2}.$$

En de 5) geven:

$$-n \sin n\,y + \frac{h}{k} \cos n\,y = 0,$$

$$-p \sin p\,z + \frac{h}{k} \cos p\,z = 0,$$

of

$$\frac{h\,l}{k} = nl\,tg\,nl = pl\,tg\,pl.$$

wat wij algemeen kunnen schrijven:

$$\frac{h\,l}{k} = \varepsilon\,tg\,\varepsilon.$$

Hieraan nu voldoen zeer vele ε, die mogen zijn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots$

Nu kan men elke ε_n nemen, maken $p = \frac{\varepsilon_n}{l}$ en vervolgens $m = \sqrt{n^2 + p^2}$. Vat men al deze waarden te zamen, dan krijgt men voor v de algemeenere uitdrukking:

$$v = \Big(a_1 e^{-x\sqrt{n_1^2+n_1^2}} \cos n_1 y + a_2 e^{-x\sqrt{n_2^2+n_1^2}} \cos n_2 y +$$

$$+ a_3 e^{-\sqrt{n_3^2+n_1^2}} \cos n_3 y + \ldots \Big) b^1 \cos n_1 z$$

$$+ \Big(a_1 e^{-x\sqrt{n_1^2+n_2^2}} \cos n_1 y + a_2 e^{-x\sqrt{n_2^2+n_2^2}} \cos n_2 y +$$

$$+ a_3 e^{-x\sqrt{n_3^2+n_2^2}} \cos n_3 y + \ldots \Big) b_2 \cos n_2 z.$$

$$+ \Big(a_1 e^{-x\sqrt{n_1^2+n_3^2}} \cos n_1 y + a_2 e^{-x\sqrt{n_2^2+n_3^2}} \cos n_2 y +$$

$$+ a_3 e^{-x\sqrt{n_3^2+n_3^2}} \cos n_3 y + \ldots \Big) b_3 \cos n_3 z$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nu moet voor $x = 0$ zijn $v = A$, dus:

$$v = (a_1 \cos n_1 y + a_2 \cos n_2 y + a_3 \cos n_3 y + \ldots\ldots)$$
$$(b_1 \cos n_1 z + b_2 \cos n_2 z + b_3 \cos n_3 z + \ldots\ldots).$$

Denken wij nu nog voor de vereenvoudiging dat de constante temp. $A = 1$ zij, dan valt deze vergelijking uit elkander in de volgende twee:

$$1 = a_1 \cos n_1 y + a_2 \cos n_2 y + a_3 \cos n_3 y + \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$1 = b_1 \cos n_1 z + b_2 \cos n_2 z + b_3 \cos n_3 z + \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

waarin dus slechts de coefficiënten a en b te bepalen zijn. Nemen wij een' term van de regterzijde van (a), waarbij wij voorshands den index weglaten, vermenigvuldigen dien term met $\cos \nu y \, dy$, en integreren volgens y van 0 tot l dan is:

$$R = a \int_o^l \cos ny \cos \nu y \, dy.$$

$$= \frac{a}{2} \left\{ \int_o^l \cos y\,(n-\nu)\,dy + \int_o^l \cos y\,(n+\nu)\,dy \right\}$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{1}{n-\nu} \sin\,(n-\nu)\,y + \frac{1}{n+\nu} \sin\,(n+\nu)\,y \right]_o^l$$

$$= \frac{a}{2} \frac{(n+\nu)\sin\,(n-\nu)\,l + (n-\nu)\sin\,(n+\nu)\,l}{n_2 - \nu_2}$$

De ν staat hier slechts om eene zekere n te representeren. Dan

zal n en eveneens ν moeten voldoen, voor $y = l$ aan onze 5) d. i. $nl\, tg\, nl = \frac{h}{k}$ dus:

$$n\, tg\, nl = \nu\, tg\, \nu l,$$

$$n \sin nl \cos \nu l - \nu \sin \nu l \cos nl = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c).$$

Nu is verder:

$$R = a \frac{n \sin nl \cos \nu l - \nu \sin \nu l \cos nl}{n^2 - \nu^2},$$

waardoor dus $R = 0$ wordt voor elke waarde van ν, die niet $= n$ is. Voor $n = \nu$, wordt (c) identisch en ziet men zeer gemakkelijk dat daarvoor:

$$R = \frac{a}{2}\left(l + \frac{\sin 2nl}{2n}\right).$$

Vatten wij nu weder (a) op, als wij de geheele vergelijking met $\cos n_1 y\, dy$ vermenigvuldigen, en integreren als boven, dan valt regts alles weg behalve de term, die n_1 bevat, en dus wordt:

$$\int_0^l \cos n_1 y\, dy = \frac{a_1}{2}\left(l + \frac{\sin 2\, n_1 l}{2\, n_1}\right),$$

waaruit wederom volgt:

$$a_1 = \frac{\sin n_1 l}{2\, n_1 l + \sin 2\, n_1 l}$$

Op dezelfde manier worden al de coëfficiënten a en b gevonden. Trouwens zijn de a en b respectivelijk gelijk. De vergelijkingen (a) en (b) worden dus tot eene, en wel tot:

$$\frac{1}{4} = \frac{\sin n_1 l \cos n_1 y}{2\, n_1 l + \sin 2\, n_1 l} + \frac{\sin n_2 l \cos n_2 y}{2 n_2 l + \sin 2\, n_2 l} + \ldots\ldots,$$

of wel:

$$\frac{1}{4} = \frac{\sin \varepsilon_1 \cos \frac{\varepsilon_1}{l}}{2\, \varepsilon_1 + \sin 2\, \varepsilon_1} + \frac{\sin \varepsilon_2 \cos \frac{\varepsilon_2}{l}}{2\, \varepsilon_2 + \sin 2\, \varepsilon_2} + \ldots\ldots,$$

daar wij slechts de waarden van y te beschouwen hebben, die tusschen $+ l$ en $- l$ liggen. Wanneer wij dit in de vergelijking voor

v substitueren, dan krijgen wij:

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{4^2} = & \frac{\sin n_1 l \cos n_1 z}{2\, n_1 l + \sin 2\, n_1 l}\left(\frac{\sin n_1 l \cos n_1 y}{2\, n_1 l + \cos 2\, n_1 l}\, e^{-x\sqrt{n_1^2 + n_1^2}} + \ldots\ldots\right) \\ & + \frac{\sin n_2 l \cos n_2 z}{2\, n_2 l + \sin 2\, n_2 l}\left(\frac{\sin n_1 l \cos n_1 y}{2\, n_1 l + \cos 2\, n_1 l}\, e^{-x\sqrt{n_2^2 + n_1^2}} + \ldots\ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \ldots 6)$$

De n_1, n_2, ... in aantal oneindig, zijn respectivelijk gelijk aan:

$$\frac{\varepsilon_1}{l}, \frac{\varepsilon_2}{l}, \frac{\varepsilon_3}{l}, \ldots\ldots$$

welke de wortels zijn van:

$$\varepsilon\, tg\, \varepsilon = \frac{hl}{k}.$$

Men ziet, dat de formule voor v vrij onhandelbaar uitvalt, maar zij laat toch nadere discussie toe.

Uit de bekende eigenschappen van de hierdoor voorgestelde kromme volgt, dat de ε en dus de n positieve, steeds grooter wordende getallen zijn. Dan zal ook, voor de grootere waarden van x, $e^{-x\sqrt{n_1^2 + n_1^2}}$ hoe langer zoo meer overwigt over de anderen verkrijgen. Nemen wij, op grooten afstand van $x = 0$, twee punten met de abscissen x en $x + 1$, voor het gemak in de as, dus $y = 0$ en $z = 0$, dan wordt, zeer nabij de waarheid, $\frac{v_x}{v_{x+1}} = e^{-x\sqrt{2n_1^2}}$. Hieruit ziet men, dat ook voor dikke staven de wet van Newton op grooten afstand van het verwarmde gedeelte moet geldig wezen.

Evenzoo maakt de constructie het duidelijk, dat, als de dikte l zeer klein wordt, ook n_1 veel kleiner dan alle volgende waarden van n wordt, en dan reeds, — wat wij op anderen weg reeds voor eene zeer dunne staaf zagen — van de basis af, de wet van Newton geldig is. In het geval dat l zeer klein is, reduceert de waarde voor v zich geheel tot den eersten term:

$$v = \left(\frac{4\,l \sin nl}{2\,nl + \sin 2\,nl}\right)^2 \cos ny \cos nz\; e^{-x\sqrt{2n_1^2}}.$$

Verder wordt nog voor eene zeer kleine waarde van $\varepsilon = nl$ de vergelijking $\varepsilon\, tg\, \varepsilon = \frac{h}{k}\, l$ tot de volgende:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{k}\, l.$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{hl}{k}}$$

is dan de eerste waarde van ε, en daar wij verder voor den sinus den boog kunnen zetten, wordt:

$$v = \cos\left(\sqrt{\frac{hl}{k}}\,\frac{y}{l}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{hl}{k}}\,\frac{z}{l}\right) e^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}}.$$

Wanneer wij voor de cos de eenheid zetten, dan komen wij terug op onze reeds voor de zeer dunne staaf gevonden vergelijking:

$$v = e^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}}:$$

Bovendien wordt door de kleinheid der argumenten der cos, waardoor de y en z zeer weinig invloed behouden, de onderstelling gewettigd, dat in zeer dunne staven in eene doorsnede loodregt op de as eene zelfde temp. heerscht.

§ 7.

Het zal wel naauwelijks bewezen behoeven te worden, dat de warmtestroom, die door eene sectie gaat, is:

$$= -4\,k \int_0^l \int_0^l dy\, dz\, \frac{dv}{dx}.$$

Maar ten overvloede wil ik nog bewijzen, dat werkelijk de

geheele warmtestroom in de staaf gelijk is aan het gedeelte van de warmte dat aan de oppervlakte ontsnapt, wat noodig is, opdat de toestand een constante zij. Een element van het oppervlak is $dx\ dy$. Wat daaruit ontsnapt is $= h\ dx\ dy\ v$. Hierin nu moet $z = l$ genomen worden, en de waarde van v in l en dan volgens y geintegreerd van 0 tot l en volgens x van 0 tot ∞. Dan hebben wij de helft van wat aan eene zijde van de staaf ontsnapt, aan de zijde loodregt op eene helft der as der z. Dit viermaal geeft dus, wat uit het gedeelte van het oppervlak ontsnapt, boven en onder, waar z constant is. Hetzelfde is dan nog eens te nemen voor een constante y.

Nemen wij de partiele Integraal:

$$v = a\, e^{-mx} \cos ny \cos pz\ ,$$

waarbij:

$$m = \sqrt{n^2 + p^2},$$

dan hebben wij dus:

$$\int_{x=o}^{x=\infty} \int_{y=o}^{y=l} h\, dx\, dz\, v = \frac{ha}{p\sqrt{n^2+p^2}} \cos pl \sin nl\, e^{-x\sqrt{n^2+p^2}}\ ,$$

$$\int\int_{z=o}^{z=l} h\, dx\, dy\, v = \frac{ha}{n\sqrt{n^2+p^2}} \sin pl \cos nl\, e^{-x\sqrt{n^2+p^2}}\ ,$$

Dus, algemeen, verliest de staaf hier eene oneindige reeks analoge termen, daar n (resp. p) ook hier een oneindig aantal waarden heeft, termen allen zooals:

$$\frac{4ha}{\sqrt{p^2+n^2}}\, e^{-x\sqrt{n^2+p^2}} \left\{ \frac{1}{p} \cos pl \sin nl + \frac{1}{n} \sin pl \cos nl \right\}.$$

Nemen wij nu verder de juist gevonden uitdrukkingen voor den warmtestroom in het ligchaam zelf, dan bestaat deze uit een reeks van termen:

$$\frac{4\,k\,a\sqrt{p^2+n^2}}{pn}\,e^{-x\sqrt{n^2+p^2}}\sin pl\sin nl,$$

en deze twee reeksen moeten dus aan elkander gelijk zijn; d. i. alle termen, waarin dezelfde n voorkomt, onderling gelijk, of:

$k(p^2+n^2)(p+n)\sin pl\sin nl = hp\cos nl\sin pl + hn\sin ln\cos pl$ ... 7).

Maar de voorwaarden (5) geven:

$$kp\sin pl = h\cos pl,$$

$$kp^2\sin pl\sin nl = hp\cos pl\sin nl;$$

$$kn\sin nl = h\cos nl,$$

$$kn^2\sin nl\sin pl = h\,n\cos nl\sin pl,$$

waardoor de vergelijking 7) identisch wordt. Dit is als het ware eene nadere bevestiging van onze formules 6) en 3).

Formule van Gouillaud.

§ 8.

Aan de formule voor de zeer dunne staaf:

$$v = P\,e^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}} + Qe^{+x\sqrt{\frac{2h}{kl}}},$$

heeft H. J. Gouillaud [1]) een eenigzins gewijzigden vorm gegeven namelijk:

$$v = kTm^l e^{ax} + \left(T - kTm^l\right)e^{-ax},$$

$$= kTm^l\left(e^{ax} - e^{-ax}\right) + Te^{-ax},$$

waarin $a = \sqrt{\frac{2h}{kl}}$, waarin T het verschil in temp. is tusschen de warmtebron en de omgeving (bij ons de A), l de lengte der

1) *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences 1852, p. 699.

staaf, die hier niet $= \infty$ behoeft te wezen, k en m twee constanten, die van de natuur en de dikte der staaf afhangen.

Deze formule schijnt mij echter toe, bijna geheel experimenteel te wezen, doch voldoet vrij wel aan talrijke proeven, die Gouillaud met eene ijzeren staaf nam, waarbij hij T en l veranderingen liet ondergaan, en welke proeven toonden, dat: 1° als de lengte der staaf in arithmetische reden korter wordt, A in een geometrische reden vergroot, (vanwaar de term m^l) en 2°, wat wij ook weten, dat als de lengte dezelfde blijft, A proportioneel aan de veranderingen is van het temperatuurverschil tusschen de warmtebron en de omgeving.

Verhouding van de warmte eer de eindtoestand bereikt is.

§ 9.

Tot nu toe hield ik mij uitsluitend bezig met den eindtoestand, waarin de staaf streng gesproken nooit, maar na eenen genoegzamen tijd toch voldoende komt, zoodat de veranderingen onnaspeurbaar worden. Nu wil ik echter in de volgende §§ aantoonen op welke wijze de warmte zich na den aanvang der verwarming verspreidt, om tot dien eindtoestand te geraken. Nemen wij hier weder de dunne staaf, waarin eene doorsnede loodregt op de as, dezelfde temp. in al hare punten hebbe. Eene sectie zal dan meer warmte van de vorigen ontvangen, dan haar omvang naar buiten afgeeft. De sectie zij tusschen x en $x + dx$ in. De aanwas der temp. zal wezen in den tijd dt: $\frac{dv}{dt} dt$. Dit moet nu wezen $=$ wat de sectie ontvangt, verminderd met wat zij naar buiten afgeeft. Zij S het oppervlak der sectie, dan vloeit in dezelve: $- kS \frac{dv}{dx} dt$, als boven, en er uit vloeit: $- kS \frac{dv}{dx} dt$

$-kSd\frac{dv}{dx}dt$ er blijft dus in een overschot:

$$+kS\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt.$$

Aan de oppervlakte ontsnapt $hlv\,dx\,dt$. Dit te zamen moet nu $=\frac{dv}{dt}dt$ zijn, maar beiden zijn niet in dezelfde eenheden uitgedrukt.

Moge C de warmte capaciteit van het ligchaam zijn, d. i. hoeveel warmte er noodig is, om de gewigtseenheid van de temp. 0 op 1 te brengen; D de digtheid van het ligchaam, dan zal $CDS\,dx$ de hoeveelheid warmte wezen die noodig is, om het volumen van de elementaire schijf van 0 op 1 te verwarmen. Dus zal men de verwarming van de schijf door de toevoeging van $kS\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt-h\,l\,v\,dx\,dt$ hebben als men door $C\,D\,S\,dx$ deelt. Dus heeft men, na vereenvoudiging voor het oogenblik dt de vergelijking:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k}{CD}\frac{d^2v}{dx_2}-\frac{h\,l}{CDS}v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8).$$

Vooreerst willen wij het geheel theoretische geval beschouwen, dat de warmte afgifte naar buiten $=0$ is, en de vergelijking zich dus reduceert tot:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k}{DC}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

Eene andere beschouwingswijze is de volgende:

Denken wij een ligchaam van oneindige afmetingen, dan is door de beschouwing van een prismatisch element $dx\,dy\,dz$, wat in de x rigting in hetzelve blijft:

$$=-k\frac{dv}{dx}dy\,dz\,dt-$$

$$\left(-k\frac{dv}{dx}dy\,dz\,dt-kd\frac{dv}{dx}dy\,dz\,dt\right),$$

$$=k\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dy\,dz\,dt.$$

In de andere rigtingen zal dit eveneens zijn, alleen komt dan in plaats van $\frac{d^2v}{dx^2}$, eenmaal $\frac{d^2v}{dy^2}$, eenmaal $\frac{d^2v}{dz^2}$. Daar de geheele ruimte met dezelfde stof gevuld is, is $h=0$ en is dus de vergelijking algemeen:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right).$$

Denken wij ons nu dit oneindige ligchaam als in evenwijdige vlakken gedeeld, waarvan een, dat wij als eerste denken, op eene vaste temp. gehouden wordt, dan zal in elk vlak dezelfde temp. heerschen in al deszelfs punten, daar er geene reden is voor veranderlijkheid. Wij behoeven dus in het ligchaam slechts eene rigting te beschouwen. Deze rigting nu is het geval van onze dunne staaf, als oneindige lijn gedacht, zonder zijdelingsche warmte afgifte.

Het is trouwens niet moeijelijk de twee gevallen tot een te brengen want door in 8) te zetten $v=e^{-\frac{hl}{CDS}t}u$ wordt deze tot:

$$\frac{du}{dt}=\frac{k}{CD}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Over het algemeen zal men, om de willekeurige constanten die bij de integratie zouden verschijnen, te elimineren, ook nog den aanvangstoestand moeten kennen, uitgedrukt door

$$v=\varphi(x, y, z, t)=F(x, y, z)$$

voor $t=0$, in ons geval, alleen $v=F(x)$.

§ 10.

Stellen wij ons voor, wat iets ingewikkelder is, van eene oneindige lijn zij een gedeelte ab verwarmd door eene willekeurige aanvangstemperatuur uitgedrukt door $v=F(x)$. Het overige van de lijn hebbe de temp. 0 Daarna wordt de geheele staaf

zonder verdere verwarming aan zich zelve overgelaten. Wat wij dus in deze § zoeken, is de wet, volgens welke onze staaf zal bekoelen. Voorloopig moge de lijn door $v = F(x)$ voorgesteld, wanneer men x als abscissen, de v als ordinaten neemt, symmetrisch zijn, d. i. $F(x) = F(-x)$.

Voor het gemak zullen wij verder zetten k in plaats van $\frac{k}{CD}$ en h in plaats van $\frac{hl}{CDS}$ en zullen ons, waar het noodig is, wel herinneren, dat deze h en k door CDS en CD te deelen zijn. Wij hebben nu te integreren:

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Als partieele integraal hiervan kunnen wij nemen:

$$u = a \cos(qx)\, e^{-kq^2t},$$

waarin a en q willekeurige constanten zijn, en welke uitdrukking aan 9) voldoet.

Deze a en q nu, mogen achtereenvolgens de waarden hebben $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ en $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots$, dan kunnen wij ook voor u zetten:

$$u = a_1 \cos q_1x\, e^{-kq_1^2t} + a_2 \cos q_2x\, e^{-kq_2^2t} + \ldots\ldots\ldots$$

Hier gebruikt Fourier nu het theorema, dat later onder zijnen naam zoo bekend werd, om eene geheel willekeurige functie, die zelfs niet continu behoeft te wezen, in den vorm van eene bepaalde Integraal over te brengen.

Hij laat de willekeurige q met gelijke oneindig kleine deelen opklimmen, beschouwt ze als abscissen en de a als ordinaten en stelt dan u voor, door:

$$u = \int_0^\infty dq\, Q \cos(qx)\, e^{-kq^2t},$$

waarin slechts de willekeurige functie Q passend te kiezen is. Daar voor aanvang der verwarming, dus bij $t = 0$ de temp. u

eene bepaalde functie $F(x)$ is, zoo is:

$$F(x) = \int_0^\infty dq\, Q \cos qx,$$

$$= dq\, Q_1 \cos q_1 x + dq\, Q_2 \cos q_2 x + \ldots\ldots\ldots$$

Door hier weder met $dx \cos rx$ te vermenigvuldigen, waarbij r telkens een der q voorstelt, en dan van 0 tot $x = n\pi$ te intregreren $(n = \infty)$, valt weder voor elke waarde van r, alles op den gezochten term na weg, en wordt algemeen

$$\frac{\pi}{2} Q = \int_0^\infty dx\, Fx \cos qx.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\pi}{2} F(x) = \int dq \cos qx \int dx\, Fx \cos qx,$$

$$\frac{\pi}{2} v = e^{-ht} \int_0^\infty dq \cos qx\, e^{-kq^2 t} \int_0^\infty dx\, Fx \cos qx \ldots\ldots 10)$$

Van deze Integraal zullen wij nog andere vormen ontmoeten.

§ 11.

Nemen wij nu aan, de warmte, die in een deel van de staaf in den aanvang voorhanden is, zij verdeeld volgens eene lijn, die bij overstand symmetrisch is, dat is, $F(x) = -F(-x)$ wanneer de temperaturen v als ordinaten van eene kromme genomen worden, waarvan x de abscissen zijn. Het overige der staaf hebbe weder de temp. 0. Laat ons zien, wat nu uit de staaf wordt. Het probleem is bijna hetzelfde, als het vorige, en kan dus kort behandeld worden, er komen alleen sin. in, waar in de vorige § cos. waren. Denken wij ons eerst de staaf slechts van eene lengte $2X$ van $+X$ tot $-X$. Later laten wij $X = \infty$ worden.

Weder voeren wij in 8) in: $v = e^{-ht} u$ waardoor deze wordt tot:

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Voor de algemeene waarde van u kiezen wij ditmaal:

$$u = a_1 e^{-kg_1^2 t} \sin g_1 x + a_2 e^{-kg_2^2 t} \sin g_2 x + \ldots\ldots\ldots$$

Door nu $x = X$ te maken moet $v = 0$ zijn, d. i. $u = 0$. In de uitdrukking voor u nu wordt alleen de sin. gx door x aangedaan, dus moet voor elken term:

$$\sin gX = 0$$

$$gX = i\pi$$

waarin i een geheel getal voorstelt:

$$u = a_1 e^{-k\frac{\pi^2}{X^2}t} \sin\left(x\frac{\pi}{X}\right) + a_2 e^{-k\left(\frac{2\pi}{X}\right)^2 t} \sin\left(2\frac{\pi}{X}x\right) + \ldots\ldots$$

Door $t = o$ te maken wordt:

$$u = F(x) = a_1 \sin\left(x\frac{\pi}{X}\right) + a_2 \sin\left(2\frac{\pi}{X}x\right) + \ldots\ldots$$

Maken wij $x\frac{\pi}{X} = r$, dan wordt $F(x) = F\left(r\frac{X}{\pi}\right)$, wat wij zetten $= f(r)$ en dus:

$$f(r) = a_1 \sin r + a_2 \sin 2r + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nu is alweder, volgens de bekende methode, reeds meer gebruikt:

$$a_i = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi dr\, fr \sin ir,$$

$$\frac{X}{2}a = \int_o^\pi dx\, Fx \sin\left(ix\frac{\pi}{X}\right),$$

$$v = \frac{2}{X}e^{-k}\left\{e^{-k\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{\pi}{X}\right)\int dx\, Fx \sin\left(x\frac{\pi}{X}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-k\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 2^2 t} \sin\left(2\frac{\pi}{X}x\right)\int dx\, Fx \sin\left(2\frac{\pi}{X}x\right) + \ldots\ldots\right\}.$$

Hierin moet nu $X = \infty$ gemaakt worden. Zij daartoe $X = n\pi$ waarin $n = \infty$, en schrijven wij $\frac{1}{dq}$ voor n. De algemeene term

van de reeks is:

$$e^{-k\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 i^2 t} \sin\left(ix\frac{\pi}{X}\right)\int dx\, Fx \sin\left(ix\frac{\pi}{X}\right).$$

Nu kunnen wij i voorstellen door $\frac{q}{dq}$, dan is $X = \frac{\pi}{dq}, i = \frac{1}{dq}$ en dan wordt deze term tot:

$$e^{-kq^2 t} \sin qx \int dx\, Fx \sin qx.$$

Elk dezer termen is nu te vermenigvuldigen met $\frac{\pi}{dq}$; dit is echter eene oneindig kleine grootheid en de som wordt dus eene Integraal:

$$v = \frac{2}{\pi} e^{-ht} \int_0^\infty dq\, e^{-kq^2 t} \sin qx \int_0^\infty dx\, Fx \sin qx \ldots \quad 11)$$

Hierin moet nu de functie $F(x)$, die den aanvangstoestand van het verwarmde gedeelte voorstelt, ingevuld worden; en de integratiën uitgevoerd.

§ 12.

Tot nog toe behandelden wij slechts willekeurige, doch symmetrische functiën F; doch met onze beide symmetrische functiën kunnen wij elke andere voorstellen. Men kan namelijk steeds elke functie $\varphi(x)$ ontleden in de som van twee anderen:

$$\varphi(x) = F(x) + f(x),$$

zoodanig dat de F en f voldoen aan:

$$F(x) = F(-x), \qquad f(x) = -f(-x),$$

want voor elke ordinaat van φ heeft men voor de twee onbekenden, waarin men haar wenscht te ontleden, twee vergelijkingen.

In 10) en 11) beiden verdwijnt, wanneer de integratie naar x volbragt is, door de grenzen 0 en ∞ de x, wij kunnen dus daar, binnen het integraalteeken, voor x zetten α. Dan zal alge-

meen voor eene geheel willekeurige verdeeling van warmte $v = \varphi(x)$ (voor $t = 0$) wezen:

$$\frac{\pi}{2} v = e^{-ht} \left\{ \int_0^\infty dq\, e^{-kq^2t} \cos qx \int_0^\infty d\alpha\, F\alpha \cos q\alpha + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty dq\, e^{-kq^2t} \sin qx \int_0^\infty d\alpha\, f\alpha \sin q\alpha \right\}.$$

Nu kan men, zooals bekend is, de integratiën naar α in plaats van 0 tot ∞, nemen van $-\infty$ tot $+\infty$ en het resultaat door twee deelen. Daardoor wordt echter wegens $f(\alpha) = -f(-\alpha)$,

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, f\alpha \cos q\alpha$$

en mag men dus in de eerste term voor $F(\alpha)$ schrijven $\varphi(\alpha)$, en daar ook

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, F\alpha \sin q\alpha,$$

mag men in den tweeden term $f(\alpha)$ door $\varphi(\alpha)$ vervangen, waarna voor v komt:

$$\pi v = e^{-ht} \int_0^\infty dq\, e^{-kq^2t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \varphi\alpha \cos q\alpha \cos qx + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \varphi\alpha \sin q\alpha \sin qx \right),$$

$$\pi v = e^{-ht} \int_0^\infty dq\, e^{-kq^2t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \varphi\alpha \cos q(x-\alpha),$$

$$\pi v = e^{-ht} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \varphi\alpha \int_0^\infty dq\, e^{-kq^2t} \cos q(x-\alpha) \ldots\ldots \quad 12)$$

§ 13.

Nemen wij nu het geval van de dunne staaf die alleen aan

de basis verwarmd is, doch nu aldaar op eene vaste temperatuur A gehouden wordt. In de vergelijking:

$$\frac{dv}{dt} = k\frac{d^2v}{dx^2} - hv,$$

waarin wij ons steeds herinneren dat de k eigenlijk met $\frac{1}{CD}$ de h met $\frac{L}{DCS}$ vermenigvuldigd moet wezen, zetten wij nu:

$$v = e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} + u';$$

dan wordt:

$$\frac{du'}{dt} = k\frac{d^2u'}{dx^2} - hu',$$

en maken wij nu weder:

$$u' = e^{-ht}u,$$

dan is weder:

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}.$$

De vergelijking voor u heeft denzelfden vorm als in vorige §§, doch nu is $u' = v - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}$ het verschil tusschen de temperatuur op elk oogenblik t en de eindtemp., volgens 3), waarin wij dan echter A als eenheid van temp. kiezen tot afkorting.

Dit verschil u', dat steeds kleiner wordt, en 0 wordt als de definitieve verspreiding van warmte daar is, heeft tot eerste waarde, voor $t = 0$:

$$F(x) - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}},$$

wanneer $F(x)$ de aanvangstemp. voor een punt met de abscisse x is. Zij $f(x)$ het verschil tusschen deze temp. en de definitieve, dan is voor u eene functie te zoeken, die voldoet aan

$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2} - hu$, en waarvan de eerste waarde zij $f(x)$, de laatste 0. In het punt $x = 0$ is volgens de onderstelling, steeds

$$v - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} = 0.$$

Deze kwestie is geheel tot de vorige terug te brengen, als men zich voorstelt, dat de oneindige lijn ook aan de andere zijde van A voortgezet is, en dat bovendien de andere helft der lijn in een tegenovergestelden toestand is, als de helft die wij beschouwen, zoodat een punt $-x$ de aanvangstemp. $-f(x)$ heeft. Dan moge de warmte $A = 1$ in de staaf zich voortplanten en aan de oppervlakte ontvloeijen. Deze beschouwing verandert niets in onze beschouwing van de eene helft. Fourier legt echter niet veel gewigt op deze redenering, maar lost de kwestie onafhankelijk op.

Aan de vergelijking $\frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2}$ kan voldaan worden. door de partiele integraal $u = e^{-x} e^{kt}$. Nu weet men echter, dat [1]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} = \sqrt{\pi},$$

dus ook, wanneer b eene constante is:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-(q+b)^2} = \sqrt{\pi},$$

$$\sqrt{\pi} = e^{-b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-(q^2 + 2bq)},$$

---

1) De integraal $\int dy\, e^{-y^2}$, die in vele physische vraagstukken voorkomt, is in tafels gebragt en te vinden in:

Kramp, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres.* Leipsic et Paris, an VII.

Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des Intégrales Eulériennes*, Tome 2, Paris 1826.

Encke, *Astronomisches Jahrbuch*, für 1834, Berlin 1832.

of als $b^2 = kt$ wordt ingevoerd:

$$e^{kt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, e^{-2q\sqrt{kt}},$$

$$u = e^{-x}\, e^{kt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, e^{-(x+2q\sqrt{kt})}.$$

Nemen wij $u = a\, e^{-nx}\, e^{kn^2t}$, waarin a en n twee willekeurige constanten zijn, en welke waarde ook aan de differentiaal vergelijking voldoet, dan wordt:

$$u = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, e^{-n(x+2q\sqrt{kt})}.$$

Door voor a en n alle mogelijke waarden te nemen, verkrijgt men de algemeenere integraal:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\left(a_1 e^{-n_1(x+2q\sqrt{kt})} + a_2 e^{-n_2(x+2q\sqrt{kt})} + \ldots\right).$$

De constanten a en n zijn onbepaald, dus stelt de reeks onder het integraalteeken eene volkomen willekeurige functie van $x + 2\,q\sqrt{kt}$ voor, die wij $\varphi\,(x + 2\,q\sqrt{kt})$ willen noemen. Dan wordt:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, \varphi\,(x + 2q\sqrt{kt}),$$

$$v = e^{-kt} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, \varphi\,(x+2q\sqrt{kt}) - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}.$$

Het is misschien niet onnut, hier bij te voegen, dat hier ook $\sqrt{\frac{h}{k}}$ eigenlijk is: $\sqrt{\frac{hL}{kS}}$.

De functie φ nu, wordt bepaald, daardoor, dat voor $t = 0$ moet wezen $u = F\,(x) - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} = f\,(x)$, dan is:

$$f\,(x) = \int dq\, e^{-q}\, \varphi\,(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x),$$

en nu is de geheele oplossing:

$$13) \ldots\ldots v = e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} + \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt}).$$

§ 14.

Toen Fourier in 1807 zijne eerste onderzoekingen over dit punt bij het Institut de France inreikte, was deze integraal onbekend, maar was sedert door Laplace bekend gemaakt [1]). Deze leidt het nog iets korter af, op de volgende wijze. Bekend is weder:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} = \sqrt{\pi}.$$

Nu is het gemakkelijk, a posteriori, aan te toonen dat

$$k \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dt}$$

tot integraal heeft:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} \varphi(x + 2q\sqrt{kt});$$

want:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \int dq\, e^{-q^2} \varphi''(x + 2q\sqrt{kt}),$$

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{k} \int \frac{q}{\sqrt{t}} dq\, e^{-q^2} \varphi'(x + 2q\sqrt{kt}),$$

en als men dit laatste bij gedeelten integreert:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-q^2} \varphi'(x + 2q\sqrt{kt}) + k \int dq\, e^{-q^2} \varphi''(x + 2q\sqrt{kt}).$$

---

1) *Mémoires de l'Ecole Polytechnique*, Tome VI.
Journal de l'Ecole Polytechnique, Vol. VIII. — Paris, Décembre 1809.

In beide differentiaal-quotiënten zijn de grenzen steeds $-\infty$ en $+\infty$; daarvoor wordt $e^{-q^2}=0$, nu mogen wij φ zoodanig onderstellen, dat φ' hiermede vermenigvuldigd $=0$ blijft, wat in onze opgave zoo is, daar de functie f willekeurig is, dan is

$$\frac{du}{dt}=k\int dq\, e^{-q^2}\varphi''(x+2q\sqrt{kt})=k\frac{d^2u}{dx^2}$$

Ik zal Laplace niet volgen in zijn niet moeijelijk, maar lang bewijs, dat deze integraal algemeen is, en alle schijnbaar algemeeneren hiervan niet verschillen. Voor ons doel is dit onnoodig.

§ 15.

Passen wij de nu gevonden formule toe op het geval, dat de geheele staaf aanvankelijk de temperatuur 0 hebbe, behalve het eene uiteinde, dat constant op de temp. 1. gehouden wordt. Dus is, voor alle $x>0$, de functie $F(x)=0$, en bij gevolg $f(x)=-e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}$ en $f(x)=0$ voor $x=0$. Wij hebben dan:

$$u=\int dq\, e^{-q^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}f(x+2q\sqrt{kt}).$$

Nemen wij deze integraal eerst van $x=0$ tot $+\infty$, later van $x=-\infty$ tot 0, dus:

$$u=\int_0^\infty \ldots + \int_{-\infty}^0 \ldots$$

Stellen wij dit voor door:

$$u=u_1+u_2,$$

dan is, daar wij in fx voor x moeten zetten $x+2q\sqrt{kt}$:

$$u_1=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\, e^{-q^2}e^{-(x+2q\sqrt{kt})\sqrt{\frac{h}{k}}},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2\sqrt{\frac{h}{k}}} \int dq\, e^{-q^2} e^{-2q\sqrt{ht}},$$

$$= -\frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}}{\sqrt{\pi}} e^{ht} \int dq\, e^{-(q+\sqrt{ht})^2}.$$

Wij kunnen, daar:

$$d\,(q+\sqrt{ht}) = dq$$

is, de integraal hieruit zetten $= \int dr\, e^{-r^2}$ waarbij dan de grenzen voor r worden:

$$x + 2q\sqrt{kt}, \text{ van } 0 \text{ tot } \infty,$$

dus voor q:

$$-\frac{x}{2\sqrt{kt}}, \text{ en } \infty,$$

en voor r:

$$\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}, \text{en } \infty.$$

Verder is voor het tweede gedeelte van u, daar, volgens het in § 12 over de functie $f(x)$ gezegde hier $f(-x) = -f(x)$ moet wezen:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} e^{(x+2q\sqrt{kt})\sqrt{\frac{h}{k}}},$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}}}{\sqrt{\pi}} e^{ht} \int ds\, e^{-s^2},$$

$$s = q - \sqrt{kt},$$

waarin nu de grenzen zijn, analoog aan de afleiding hier boven gevormd:

$$s = -\infty \quad , \quad s = -\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}},$$

Keeren wij nu in u_2 de grenzen om, dan verandert de integraal van teeken, waarom wij ook in de grenzen het teeken veranderen, en dan wordt de geheele uitdrukking voor u:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} e^{ht} \int dr\, e^{-r^2} - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} e^{ht} \int ds\, e^{-s^2} \right\},$$

waarbij de grenzen zijn:

$$r = \sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}, \quad \text{en} \quad r = \infty,$$

$$s = \sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}, \quad \text{en} \quad s = \infty,$$

Zetten wij nu, ter afkorting, de integraal:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{p=R}^{p=\infty} dp\, e^{-p^2} = \psi R,$$

dan wordt:

$$u = e^{ht} e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - e^{ht} e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right).$$

$$u' = e^{-ht} u,$$

$$= e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right);$$

$$v = e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} - e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) +$$

$$e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14).$$

In de noot van § 13 is reeds gezegd, dat de waarden van ψR bekend zijn, zij zijn ook overigens gemakkelijk, hetzij door middel van reeksen, hetzij door kettingbreuken, te berekenen.

§ 16.

Wij hebben in de bovenstaande §§ twee, zelfs drie verschillende integralen gegeven voor de vergelijking:

$$\frac{du}{dt} = k\,\frac{d^2u}{dx^2}\,;$$

namelijk:

$$u = \int dq\, e^{-q^2}\, \varphi\,(x + 2q\sqrt{kt})\,,$$

$$\begin{cases} u = a_1 e^{-n_1^2 kt} \cos n_1 x + a_2 e^{-n_2^2 kt} \cos n_2 x + \ldots\ldots \\ u = b_1 e^{-n_1^2 kt} \sin n_1 x + b_2 e^{-n_2^2 kt} \sin n_2 x + \ldots\ldots \end{cases}$$

Fourier toont nu nog aan, dat deze beiden slechts verschil in vorm hebben, maar op hetzelfde nederkomen. Uit de bekende

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}$$

volgt:

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-(q+a)^2}$$

waarin a eene volkomen willekeurige constante is. Dan volgt hieruit weder:

$$e^{a^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2}\, e^{2aq^2}\,,$$

$$e^{a^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} \left(1 - 2aq + \frac{2^2 a^2 q^2}{2} - \frac{2^3 a^3 q^3}{2\,.\,3} + \ldots\ldots\ldots\right).$$

Ontwikkelt men nu ook e^{a^2}, en zet de verschillende termen regts en links aan elkander gelijk, dan komt men tot de beiden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, q^{2m+1} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2}\, q^{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots\cdots \frac{2m-1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Verder is gemakkelijk te bewijzen, dat elk der termen, waaruit de reeksen voor u bestaan, gelijk is aan:

$$\int dq\, e^{-q^2} \sin n\,(x + 2q\sqrt{kt}\,),$$

of aan:

$$\int dq\, e^{-q^2} \cos n\,(x + 2q\sqrt{kt}\,).$$

Want, nemen wij b. v. het eerste, dan kunnen wij dit schrijven, als wij de n weglaten:

$$\int dq\, e^{-q^2} \sin x \cos 2q\sqrt{kt} + \int dq\, e^{-q^2} \cos x \sin 2q\sqrt{kt}$$

$$= \int dq\, e^{-q^2} \sin x \left(\frac{e^{2q\sqrt{-kt}}}{2} + \frac{e^{-2\sqrt{-kt}}}{2} \right) +$$

$$\int dq\, e^{-q^2} \cos x \left(\frac{e^{2q\sqrt{-kt}}}{2i} - \frac{e^{-8q\sqrt{-kt}}}{2i} \right)$$

waarin volgens de gewone beteekenis $i = \sqrt{-1}$ is. Deze uitdrukking nu, is gelijk aan de volgende:

$$e^{-kt} \sin x \left\{ \frac{1}{2} \int dq\, e^{-(q-\sqrt{-kt})^2} + \frac{1}{2} \int dq\, e^{-(q+\sqrt{-kt})^2} \right\}$$

$$+ e^{-kt} \cos x \left\{ \frac{1}{2i} \int dq\, e^{-(q-\sqrt{-kt})^2} - \frac{1}{2i} \int dq\, e^{-(q+\sqrt{-kt})^2} \right\}.$$

De tweede helft van deze uitdrukking moet $= 0$ zijn, daar in het oorspronkelijke geene imaginaire deelen voorkomen. Wat het eerste aangaat, zoo is:

$$\frac{1}{2} \int dq\, e^{-(q \pm \sqrt{-kt})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

en dus, als wij de n weder invoeren:

$$e^{-n^2kt} \sin nx\sqrt{\pi} = \int dq\, e^{-q^2} \sin n\,(x + 2q\sqrt{kt}\,).$$

Mij dunkt het bewijs van Fourier is hier niet streng in zijne bewoordingen, want als $\sqrt{+kt}$ reël is, is $\sqrt{-kt} = \sqrt{kt}\,\sqrt{-1}$

imaginair, en dus ook hetgeen met sin x vermenigvuldigd is niet reël. Hij had de bemerking kunnen bijvoegen, dat aan de grenzen de constante $\sqrt{\pm kt}$ verdwijnt, en dan, maar ook eerst na het inzetten der grenzen $+\infty$ en $-\infty$ het tweede lid alleen imaginair is, daar dit vermenigvuldigd is met $\frac{1}{2i}$.

Bepaalt men zoo eveneens het gedeelte van de reeks, dat met cos nx vermenigvuldigd is. (De geheele oplossing is eigenlijk, zooals wij in § 12 zagen, de som der twee reeksen, elke reeks is slechts voor eene der twee soorten van symmetrie), dan wordt:

$$e^{-n_1^2kt}(a_1 \sin n_1x + b_1 \cos n_1x) + e^{-n_2^2kt}(a_2 \sin n_2x + b_2 \cos n_2x) + \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} \Big\{ a_1 \sin n_1 (x + 2q\sqrt{kt}) + a_2 \sin n_2 (x + 2q\sqrt{kt}) +$$

$$+ b_1 \cos n_1 (x + 2q\sqrt{kt}) + b_2 \cos n_2 (x + 2q\sqrt{kt}) + \ldots \Big\}.$$

Aan de regterzijde nu, staat hier, daar de a, b, n willekeurig zijn, niet anders dan eene willekeurige functie van $(x + 2q\sqrt{kt})$, zoodat beide oplossingen feitelijk overeenstemmen.

§ 17.

Er zijn nog wel andere vormen te vinden. De volgende kan nog wel te pas komen. Als particuliere integraal van $\frac{du}{dt} = k\frac{d^2v}{dx^2}$ nemende:

$$u = e^{n^2kt} \cos nx,$$

kan men aan n alle mogelijke waarden geven, en de integraal hiervan nemen:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} dn\, e^{-n^2kt} \cos nx.$$

Men kan hier eerstens den cos. in reeksen ontwikkelen, en dan integreren, maar men kan ook hier de complexe grootheden te baat nemen. Zij

$$\left.\begin{aligned} n^2\, kt &= p^2 \\ nx &= 2pq \end{aligned}\right\},$$

dan is onze integraal:

$$u = \frac{1}{\sqrt{kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-p^2} \cos 2pq$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-p^2 + 2pqi} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-p^2 - 2pqi},$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{-q^2} \left[\int dp\, e^{-(p-qi)^2} + \int dp\, e^{-(p+qi)^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

En weder is elk dezer integralen $= \sqrt{\pi}$, dus algemeen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dn\, e^{-n^2 kt} \cos nx = \frac{e^{-q^2} \sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}},$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4kt}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}.$$

Hierin kan men nog voor x zetten $x - \alpha$, wanneer α eene willekeurige constante is. Dan kan men nog vermenigvuldigen met $f(\alpha)$, welke functie constant is naar x, en als algemeene integraal zetten:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha)\, A \frac{e^{\frac{-(x-\alpha)^2}{4kt}}}{\sqrt{kt}}.$$

Waarin A nog eene constante is. Doch ook deze integraal is tot de vorigen terug te brengen, want zet men hierin:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x-\alpha)^2}{4kt} &= q^2 \\ A &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right\},$$

waaruit volgt:

$$\alpha = 2q\sqrt{kt} + x,$$

dan komt al weder:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt}).$$

§ 18.

Laat ons deze vergelijking nu ten slotte nog toepassen op het geval, dat eene oneindig lange staaf door eene constante warmtebron 1 zoolang verwarmd is, dat de vaste eindtemp. heerscht, en dan aan zich zelve overgelaten wordt, in eene omgeving van de temp. 0. Dit komt weêr terug op eene vroegere redenering; namelijk de functie $f(x)$ is voor alle positieve x gelijk aan $e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}$, en voor alle negatieve aan $e^{+x\sqrt{\frac{h}{k}}}$. De algemeene vergelijking:

$$v = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt})$$

wordt dus in dit geval in twee deelen gesplitst:

$$v = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int dq\, e^{-q^2} e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} e^{-2q\sqrt{ht}} \right.$$

$$\left. + \int dq\, e^{-q^2} e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} e^{+2q\sqrt{ht}} \right\}.$$

Hierbij zijn de grenzen van de eerste integraal:

$$x + 2q\sqrt{kt} = 0, \quad \text{en} \quad = \infty,$$

en van de tweede:

$$x + 2q\sqrt{kt} = -\infty, \quad \text{en} \quad = 0.$$

Dan wordt de eerste integraal van v tot:

$$\frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} \int dq\, e^{-q^2} e^{-2q\sqrt{ht}},$$

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-(q+\sqrt{ht})^2},$$

of wanneer $r = q + \sqrt{ht}$ genomen wordt:

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}}{\sqrt{\pi}} \int dr\, e^{-r^2},$$

waarin de grenzen van q zijn:

$$q = \frac{-x}{2\sqrt{kt}}, \text{ en } = \infty,$$

of voor r:

$$r = \sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}, \text{ en } = \infty.$$

De tweede helft van r is:

$$\frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} \int dq\, e^{-q^2} e^{2q\sqrt{ht}} = e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} \int dr\, e^{-r^2},$$

waarin $r = q - \sqrt{ht}$, en de grenzen zijn:

$$r = -\infty, \text{ en } -\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}},$$

of:

$$r = \sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}, \text{ en } r = \infty;$$

waaruit:

$$v = e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} \psi\left(\sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right).$$

Ligchamen van drie afmetingen. — Aardtemperaturen.

§ 19.

Een paar zaken wil ik hier slechts kort aangeven, daar zij niet eigenlijk tot mijn onderwerp behooren.

Wanneer men ligchamen heeft van drie afmetingen, niet zooals tot nu toe eene staaf, die wij als oneindige lijn kunnen beschouwen, dan zagen wij reeds vroeger, dat de Differentiaalvergelijking voor de warmteverspreiding in dit ligchaam is:

$$\frac{dv}{dt} = k\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right),$$

en het is gemakkelijk in te zien, dat hieraan voldoen zal eene integraal van den vorm:

$$v = \pi^{-\frac{3}{2}} \int\int\int dn\, dp\, dq\, e^{-(n^2+p^2+q^2)} f(x + 2n\sqrt{kt},\ y + 2p\sqrt{kt},\ z + 2q\sqrt{kt}),$$

wat ik hier niet verder zal uitwerken. Vooral Poisson heeft echter voor andere ligchamen dan staven, deze onderzoekingen verder voortgezet, doch weinig uitkomsten voor de praktijk geleverd.

Voorts kan men nog in de vergelijking 14) $h = 0$ maken, wat neêrkomt op de onderstelling, dat de staaf volstrekt geene geleiding naar de omgeving hebbe. Dan wordt:

$$v = 1 - \left\{\psi\left(-\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - \psi\left(+\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right\}.$$

Dit komt namelijk bij waarnemingen van aardtemperaturen te pas. Eene oneindige lijn zonder zijdelingsche warmte-afgifte geeft, — dit zagen wij reeds vroeger, — dezelfde uitkomsten, als een oneindig ligchaam van homogene structuur, waarvan

een vlak op eene zekere temp. wordt gehouden. Als zoodanig kan men de aarde behandelen, waar men, bij de kleine uitgestrektheid der proef, en kleine diepte die men kan waarnemen, het oppervlak wel als vlak kan beschouwen. Op de technische bezwaren is het hier wel niet de plaats te wijzen, alleen wil ik nog zeggen, dat proeven hieromtrent nog weinige uitgestrekte bestaan. Quételet in Brussel, Ångström in Upsala en de Edinburgh Society hebben echter op dit gebied toch groote verdiensten.

Eene zeer schoone theoretische ontwikkeling van het probleem der aardtemperaturen, vindt men reeds in het aangehaalde werk van Riemann, über partielle Differential-Gleichungen, die mij echter te ver zou voeren, Daarin wordt ook aangetoond, dat ook op den langen duur, voor eenige diepte, de aarde als eene oneindige lijn behandeld kan worden. In de verwarming van de oppervlakte toch is eene periodiciteit, van de zon afhankelijk. Deze periodiciteit wordt echter in de eindformule voor eene eenigzins groote waarde van x onmerkbaar, zoodat op eenige diepte deze verwaarloosd kan worden, en alleen de veranderingen naar x in de formulen overblijven.

Opmerkingen over de geldigheid van eenige benaderingsformulen.

§ 20.

De volgende beschouwing van Fourier is voor de proefneming nog van groot belang. Nemen wij de laatste uitdrukking, die wij voor de verspreiding der warmte vonden:

$$v = \int d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4kt}}}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt{kt}},$$

die de warmteverspreiding nog steeds zeer algemeen uitdrukt. Denkt men zich de aanvankelijke warmte in een deel van de staaf, van $x = -h$ tot $x = +g$. Beschouwen wij nu een punt met de abscisse $x = \chi$ daarvoor wordt:

$$(x - \alpha)^2 = \chi^2 - 2\alpha\chi + \alpha^2.$$

Na een belangrijk tijdsverloop, dus voor een zeer groote t, kan men, daar α eene constante is, de termen $-\frac{\alpha^2}{4kt}$ en $+\frac{2\alpha\chi}{4kt}$ verwaarloozen, en krijgt dan, daar x constant is naar α, en dus buiten het teeken $\int$ kan gebragt worden:

$$v = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{kt}} \int_{-h}^{+g} d\alpha\, f(\alpha).$$

Hierin drukt de Integraal nog slechts de hoeveelheid warmte uit, die in het stuk $-h$ tot $+g$ voorhanden is. Na eenen genoegzaam langen tijd heeft dus de aanvankelijke verspreiding der warmte geenen invloed meer, en komt het slechts op de hoeveelheid aan. Met den tijd moet men echter voorzigtig wezen, want de verwaarloozing, die wij juist in het werk stelden, geschiedt onder het integraalteeken, het is dus niet voldoende dat de termen die verwaarloosd werden zeer klein zijn tegenover x; ze moeten ook absoluut zeer klein zijn. Door de volgende beschouwing zal dit duidelijk worden.

De aanvankelijke verwarming zij weder alleen in den oorsprong der abscissen; daar hebbe een enkel element ω de temp. f, alle andere deelen der staaf hebben de temp. 0. Dan wordt de oorspronkelijke hoeveelheid warmte:

$$\int_{-h}^{+g} d\alpha\, f(\alpha) = \omega f,$$

$$v = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}\,\omega f$$

stelt dan de warmte op een gegeven tijd t voor; men ziet, door den teller in eene reeks te ontwikkelen, dat voor $t = 0$ ook $v = 0$ is.

Deze eenvoudige formule is dus na een genoegzaam langen tijd steeds de uitdrukking voor de warmteverdeeling in de staaf, hoe ook overigens de verdeeling in den aanvang moge geweest zijn.

Maar voor eene abscisse x grooter dan $\pm\,\chi$ wordt ook de tijd een veel grootere, waarna de bovenstaande wet genoegzaam waar wordt.

Ware oplossing: . . . $v = \int_0^g d\alpha f\alpha \frac{e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4\,kt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}$,

Benaderde: . . . . . $v = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\,kt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt}} \int_0^g d\alpha f\alpha$;

Het verschil nu: . . . . . $e^{\frac{2\,\alpha\,x - \alpha^2}{4\,kt}} = 1 + \omega$

gesteld zijnde, zal ω eene zeer kleine grootheid moeten wezen. Ontwikkelt men de exponentiële functie in eene reeks, waarvan men de hoogere magten verwaarloozen kan, dan wordt:

$$\frac{2\,\alpha\,x - \alpha^2}{4\,kt} = \omega,$$

$$t = \frac{1}{\omega}\,\frac{2\,\alpha\,x - \alpha^2}{4\,k}.$$

Of, wanneer de grootste waarde g die α hebben kan, klein is tegenover x:

$$t = \frac{1}{\omega}\,\frac{gx}{2k}.$$

Opdat nu ω zeer klein zij, moet, voor een grootere x, ook t grooter en grooter worden; Fourier rekent na, dat voor eene ijzeren staaf, waarvan niet alleen de basis, maar eene lengte van 1 decimeter verwarmd is, op een meter afstand op een punt met $x = 1$ meter, de benaderde wet eerst genoegzaam de ware uitdrukking geeft na drie dagen, en dat bij nog zeer goed te verwezenlijken omstandigheden, deze tijd wel eens maanden kan bedragen.

Men ziet dus, dat groote omzigt noodig is, wil men de theorie toepassen op eene staaf, die in den aanvang niet volkomen volgens de theorie verwarmd is waarvan bv. een eenigzins aanmerkelijk deel verwarmd is, of waar nog variatiën in de temp. voorkomen in het overige deel van de staaf.

Maxima van Temperatuur.

§ 21.

De formules toonen reeds aan, dat de verspreiding van de warmte in de staaf niet aan eene gelijkvormige beweging analoog is, en dus waarschijnlijk maxima heeft, (resp. minima) eer de eindtemperaturen bereikt worden, en het is nog van belang deze op te zoeken. Beschouwen wij weder eerst het geval, dat een deel der staaf van $x = +g$ tot $-g$ met eene temp. f bedeeld zij, en eene zijdelingsche warmte afgifte niet plaats hebbe, dus $h = 0$. Nemen wij dus de formule

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt{kt}} \int_{-g}^{+g} d\alpha\, f\alpha\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4\,kt}}.$$

Nu is $\frac{dv}{dx}$ de snelheid waarmede de warmte langs de as vloeit en deze is:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt{kt}} \int_{-g}^{+g} 2\,d\alpha\, \frac{\alpha - x}{4\,kt}\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4kt}},$$

$$= \frac{f}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt}} \left\{ e^{-\frac{(x+g)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x-g)^2}{4kt}} \right\};$$

want de f is hier constant en kan dus buiten de integraal vallen. Hierin komt nu geene integraal meer voor. Wij willen kortheidshalve $k = 1$ denken, dan is:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{f}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \left\{ -\frac{2(x+g)}{4t} e^{-\frac{(x+g)^2}{4t}} + \frac{2(x-g)}{4t} e^{-\frac{(x-g)^2}{4t}} \right\}.$$

En deze $\frac{dv}{dt}$ nu, door Fourier eene zwelling der eerste orde genoemd, moet $= 0$ gesteld worden om het maximum te vinden. Dit geeft:

$$(x+g)\, e^{-\frac{(x+g)^2}{4t}} = (x-g)\, e^{-\frac{(x-g)^2}{4t}}$$

$$t = \frac{gx}{lg \frac{x+g}{x-g}},$$

of als wij k weder invoeren, door te zetten kt voor t:

$$kt = \frac{gx}{lg \frac{x+g}{x-g}}.$$

Wordt nu hierin $g = 0$, dat wil zeggen, dat men zich de warmte of slechts in een element aan den aanvang der staaf opgehoopt denkt, dan wordt $t = \frac{0}{0}$; maar men kan, hetzij door ontwikkeling in reeksen, hetzij door de gewone methode, differentiëren, gemakkelijk vinden, dat

$$kt = \frac{x^2}{2}.$$

Het onderzoek, of wij hier werkelijk een Maximum hebben, door het nagaan van het teeken van $\frac{d^2v}{dt^2}$ zou wel wat langdradig wezen, en ook onnoodig, daar het voorstel wel niet anders dan

een Maximum toelaat. Het hier ontwikkelde geval komt al weder bij de aardtemperaturen te pas. Daarbij zal echter (Riemann) wegens de periodiciteit van de verwarming van het oppervlak eene geregelde opvolging van Maxima en Minima plaats hebben. Deze worden echter op betrekkelijk geringe diepte reeds hoe langer hoe zwakker.

§ 22.

Eene kwestie die ons nadert ligt, is het opzoeken van het Maximum van temperatuur voor eene staaf, waarvan het element in den oorsprong der abscissen op eene constante temp. gehouden wordt, terwijl het overige aanvankelijk de temp. 0 hebbe, en waarbij wel zijdelingsche warmte afgifte plaats heeft. De dikte van de verwarmde sectie zij ω, daarin zij de hoeveelheid warmte $= fb$ dan zal de temp. daar wezen $\frac{fb}{\omega}$, en de veranderlijke toestand zal wezen:

$$v = \frac{fb}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt}} e^{-ht},$$

$$\frac{dv}{dt} = -hv + \frac{x^2}{4kt^2} v - \frac{1}{2} t^{-1} v,$$

en zet men dit nu $= 0$, dan is:

$$\frac{1}{t^2} - \frac{2k}{x^2} \frac{1}{t} = \frac{4hk}{x^2},$$

en wanneer ϑ de tijd is, waarna het maximum plaats grijpt:

$$\vartheta k = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{4h}{kx^2}}}.$$

Welke zal nu op dit tijdstip, voor elk punt x, de temp. V zijn?

In de te gronde gelegde uitdrukking voor v komt e^{-1} voor tot de magt $ht + \frac{x^2}{4kt}$. Nu is, volgens de uitdrukking voor $\frac{dv}{dt}$:

$$ht = \frac{x^2}{4kt} - \frac{1}{2}$$

dus:

$$ht + \frac{x^2}{4kt} = \frac{x^2}{2kt} - \frac{1}{2},$$

en, door voor $\frac{1}{t}$ zijne waarde te zetten:

$$ht + \frac{x^2}{4kt} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h}{k}x^2},$$

en, door dit in de oorspronkelijke vergelijking te plaatsen:

$$V = \frac{bf}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h}{k}x^2}}}{\sqrt{k}\sqrt{\vartheta}},$$

$$V = \frac{bf}{2\sqrt{\pi}} e^{-\sqrt{\frac{h}{k}x^2 + \frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{4h}{k}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}.$$

De vergelijkingen voor ϑ en voor V bevatten de oplossing der kwestie. Op eenigen afstand van het nulpunt, waar dus de x groot worden, kan men in de uitdrukking voor ϑ, $\frac{1}{x^4}$ verwaarloozen tegenover $\frac{4h}{kx^2}$ en wordt:

$$\vartheta k = \frac{x}{2\sqrt{\frac{h}{k}}}.$$

Zet men dit in V, en bedenkt, dat daar nog $\frac{1}{4}$ te verwaarloozen is tegenover x^2, dan wordt:

$$V = \frac{bf}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}}{\sqrt{x}} \left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Hieruit ziet men, dat op grooten afstand x, de tijd, die voor het maximum verloopt, evenredig aan den afstand is; daar dus het maximum eene eenvormige beweging langs de staaf heeft. Bovendien drukt daar V de permanente eindtemperatuur uit. Daar kan men dus eigenlijk van geen max. meer spreken, de temp. klimt gestadig eenvormig, tot dat zij de eindtemp. heeft bereikt. Dit is echter niet waar voor punten digt bij de warmte bron gelegen.

Men kan zich voorstellen, dat de punten digt bij de warmte bron eerst tot een zeker maximum verhit worden, dan echter in versterkte mate warmte afgeven aan de omgeving en de verder afgelegen deelen, en zoo weder in temp. verminderen, tot eindelijk de eindtoestand bereikt is.

Ook deze beschouwing is niet moeijelijk voor ligchamen van drie afmetingen te voeren.

B. TOEVOEGINGEN UIT DE THEORIE VAN POISSON.

§ 23.

Ook Poisson heeft eene theorie der warmtegeleiding zamengesteld [1]). Hij maakt den vermoeiden lezer den indruk, zich den weg moeijelijk te hebben willen maken, door allerlei omstandigheden en hinderpalen. Zijne ligchamen hebben willekeurige vormen, zijn niet homogeen, hij beschouwt k en h, en c en d,

---

1) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier XIX. Drie verschillende stukken onder den titel:

Mémoires sur la distribution de la chaleur dans les corps solides.

Komen ook in uittreksels voor in de *Annales de Chimie et de Physique* en in de *Comptes Rendus*. — Eindelijk: Poisson *Théorie mathématique de la Chaleur* Paris 1835.

als variabel met de temperatuur, wat zeker overeenkomstig de waarheid is; zijne staven hebben willekeurige, niet constante doorsnede. Met al deze onderstellingen, die Fourier kalm ter zijde laat, stelt hij differentiaal vergelijkingen op, en moet dan ten slotte, om integralen voor dezen te vinden een voor een al zijne opgeworpen moeijelijkheden over boord werpen, om voor dezelfde eenvoudigere gevallen, als Fourier neemt, tot dezelfde resultaten te komen, als deze, slechts langs eenen weinig verschillenden weg. Wat bij hem anders is, dan bij Fourier, heeft voor de praktijk geen groot nut. Echter zal ik later een paar van zijne ontwikkelingen geven, vooral wat betrekking heeft op de veranderlijkheid van k.

Poisson gaat uit van de hypothese, het eerst door Laplace opgesteld, die de geleiding in een ligchaam assimileert aan de gewone straling in minder digte middenstoffen, dus eene straling aanneemt van het eene molecule tot het andere, maar slechts binnen een oneindig kleinen, of zeer kleinen afstand, die bij Poisson steeds l genoemd wordt.

Een verdienste van Poisson ligt ontegenzeggelijk hierin, dat hij steeds goed uit elkander houdt wat binnen in het ligchaam, wat aan de oppervlakte plaats heeft, en daarvoor steeds twee stel vergelijkingen heeft. Wat is voor Poisson het oppervlak? De dunne laag — niet mathematisch vlak — die het geheele ligchaam omgeeft, en die dunner is dan l, zoodat al de punten er van, niet alleen die, welke onmiddelijk met de omgevende middenstof in aanraking zijn, aan deze warmte afgeven, door eenvoudige uitstraling. Ik wil hier woordelijk aanhalen: [1])

„A la vérité, la loi de continuité exige que l'on passe, par une „gradation insensible, de la température du corps à celle du

1) *Annales de Chimie et de physique.* Tome XIX, 1821, p. 338.

„milieu dans lequel il est placé, mais notre hypothèse n'était „pas pour cela inadmissible; car on peut concevoir qu'il existe „en dehors du corps, dans le milieu extérieur, une couche d'une „épaisseur aussi petite qu'on voudra, et qui serve à lier l'une à „l'autre les températures intérieure et extérieure. Il était donc „nécessaire d'examiner ce qui devait arriver dans cette hypothèse: „or, il en résulte comme conséquence nécessaire, une relation „entre les deux fonctions des petites distances qui expriment la „loi du rayonnement intérieur et la loi de l'émission de la cha- „leur au dehors, relation qui n'a rien d'impossible en elle même, „mais qui n'existerait pas, en général, si ces deux fonctions „étaient données a priori."

Men ziet, de kwestie wordt hier slechts iets hooger opgevat dan Fourier, de hypothese van Newton volgende, dit doet en twee hypothesen worden eigenlijk tot eene gebragt. Dit gedeelte van de theorie van Poisson is dus als het ware eene bevestiging van de aannemelijkheid van die van Fourier.

Poisson haalt verder eene geestige analogie aan van deze hypothese met de verschijnselen der capillariteit, waarbij ook de helling van het raakvlak aan de oppervlakte der vloeistof digt bij de wanden der buis zeer snel verandert.

Verder volgt Poisson twee verschillende methoden van berekening. Eene door direct de integraal te zoeken, en door de willekeurige functie, die er in voorkomt, de voorwaarden voor het oppervlak in rekening te brengen, dan de integraal in eene reeks van exponentiëlen om te vormen, waar de tijd in den exponent voorkomt, en welke exponenten alle reël en negatief zijn. Na eenen langeren of korteren tijd worden alle termen behalve de eerste zeer klein, en treedt de geometrische wet van Newton in. Dit is de weg van Fourier.

De tweede methode van Poisson bestaat eigenlijk in het om-

gekeerde. Hij stelt v voor een zeker oogenblik en voor een bepaald punt dadelijk voor door eene oneindige reeks van exponentiëlen, waarvan de exponenten den tijd bevatten, en de coëfficiënten hiervan onafhankelijk zijn, en welke reeks dan aan de vergelijking voldoen moet. De exponenten zijn gemakkelijk te bepalen, ook zoo een deel der coëfficiënten, door de bepalingen voor de grenzen van het ligchaam, waarna men den rest der coëfficiënten gebruikt, om de reeks te laten voldoen aan de aanvangstemperaturen.

Poisson is er echter, volgens eigen bekentenis, niet geheel in geslaagd, deze methode volkomen streng te bewijzen, wat de exponenten aangaat.

§ 24.

Zie hier den vorm van de reeksen van Poisson. Zij

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v^{\mathrm{I}},$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = v^{\mathrm{IV}},$$

enz.,

dan is de differentiaal-vergelijking voor de verspreiding der warmte, wanneer wij $k = 1$ denken.

$$\frac{dv}{dt} = v^{\mathrm{II}},$$

en wanneer dan c, c^{II}, c^{IV}, enz. willekeurige functien van x zijn, van t onafhankelijk, wordt achtereenvolgens:

$$v = c + \int dt\, v^{\mathrm{I}},$$

$$= c + \int dt\,(c^{\mathrm{II}} + \int dt\, v^{\mathrm{IV}}),$$

$$= c + \int dt\Big(c^{\mathrm{II}} + \int dt\,(c^{\mathrm{IV}} + \int dt\, v^{\mathrm{VI}})\Big),$$

$$= \text{enz.}$$

$$v = c + tc^{\mathrm{II}} + \frac{t^2}{2} c^{\mathrm{IV}} + \frac{t^4}{2.3.4} c^{\mathrm{VI}} + \frac{t^6}{2.3.4.5.6} c^{\mathrm{VIII}} + \ldots\ldots\ldots$$

Eveneens, als $\frac{dv}{dt} = v_{\mathrm{I}}$, enz. is:

$$v = a + bx + \int\int dx dx\, v_{\mathrm{I}},$$

$$= a + bx + \int\int dx dx \left(a_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{I}} x + \int\int dx dx\, v_{\mathrm{II}} \right),$$

$$= a + bx + \int\int dx dx \left(a_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{I}} x + \int\int dx dx (a_{\mathrm{II}} + b_{\mathrm{II}} x + \int\int dx dx\, v_{\mathrm{III}}) \right),$$

$$= \text{enz.}$$

$$v = a + \frac{x^2}{2} a_{\mathrm{I}} + \frac{x^4}{2.3.4} a_{\mathrm{II}} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} a_{\mathrm{III}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ xb + \frac{x^3}{2.3} b_{\mathrm{I}} + \frac{x^5}{2.3.4.5} b_{\mathrm{II}} + \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} b_{\mathrm{III}} + \ldots\ldots\ldots,$$

waarin a en b willekeurige functiën van t zijn, waarvoor men $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ kan invoeren, dan naar de magten van t ontwikkelen en hiernaar ordenen, dan blijft slechts eene willekeurige functie van x over. Eveneens kan men in de eerste reeks in plaats van eene functie van x twee willekeurige functien van t invoeren. Ik wilde dit slechts aantoonen en zal het niet verder ontwikkelen.

§ 25.

Ten slotte wil ik nog eene onderzoeking van Poisson aanhalen, waarin hij de vergelijking behandelt, voor het geval, dat de geleidingscoëfficiënt k niet constant is, maar eene functie van de temp. op elk punt van de staaf. Evenmin moge h constant zijn. De integratie is in dit geval ook aan Poisson niet gelukt, maar het is mogelijk, in de onderstelling dat de temperatuurverschillen niet te groote waarden hebben, eene benaderde waarde voor de integraal op te stellen. Ik zet echter de letters

van Fourier hier in plaats van die van Poisson, en zet ook hier eenvoudig k voor $\frac{k}{CD}$, en h in plaats van $\frac{hl}{CDS}$.

De k en h zijn dan in elk punt functiën, hoewel onbekend, van de temp. Zij mogen volgens de magten van x ontwikkeld zijn, doch de hoogeren laten wij weg. Dit komt eigenlijk neer op de eenvoudige, doch vrij waarschijnlijke hypothese, dat de veranderingen der beide coëfficiënten aan de veranderingen van de temp. evenredig zijn. In die veronderstelling wordt k tot

$$k + kmv,$$

en h wordt:

$$h + h\gamma v,$$

waarin m en γ twee constanten zijn. Verder mogen al de gewone onderstellingen van Fourier geldig zijn omtrent de temperatuur der omgeving en der warmtebron. Dan is volgens § 4

$$v = A\,e^{-\sqrt{\frac{2h}{kl}}\,x},$$

wanneer wij k en h als constant beschouwen, en met bovenstaande onderstelling wordt de differentiaal vergelijking, waarvan deze v de integraal is, tot:

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{2h}{kl}v = \frac{2h}{kl}\gamma v^2 - m\left(v\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right).$$

De regterhand nu zal, in de onderstelling van kleine temperatuur verschillen, niet veel grooter dan 0 zijn, zetten wij haar voor een oogenblik $=0$, dan is:

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}}.$$

Zij nu verder w eene kleine correctie, dan wordt:

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}} + w.$$

en zetten wij dit in bovenstaande differentiaal-vergelijking voor v, dan komt:

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{2h}{kl} w = \frac{2h}{kt} A^2 (\gamma - 2m) e^{-x\sqrt{\frac{4h}{kl}}}.$$

Wordt hiervan nu weder de gewone integraal genomen, met de bepalingen in acht te nemen, dat $w = 0$ moet wezen voor $x = 0$ en voor $x = \infty$, daar in het eene punt $v = A$, er in het andere $v = 0$, dan komt voor w de waarde:

$$w = \frac{A^2}{3}(\gamma - 2m)\left(e^{-x\sqrt{\frac{4h}{kl}}} - e^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}}\right),$$

waardoor wij voor v krijgen:

$$v = \left\{1 - \frac{A}{3}(\gamma - 2m)\right\} Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{kl}}} + \frac{A^2}{3}(\gamma - 2m)e^{-x\sqrt{\frac{4h}{kl}}}.$$

Hierdoor is als het ware eene correctie van de eerste orde in de gewone logarithmische wet aangebragt.

Poisson heeft bovendien een verdienste, dat hij verschillende resultaten van Fourier strenger bewijst, maar geene de uitkomsten van dezen heeft hij gelogenstraft, zoodat men aan de eenvoudigere theorie van Fourier genoeg heeft, voor het beoordeelen der proefnemingen.

TWEEDE HOOFDSTUK.

PROEVEN

MET BETREKKING TOT DEN GELEIDINGSCOËFFICIËNT VOOR WARMTE GENOMEN.

INLEIDING.

§ 26.

De proeven, welke reeds sedert vrij langen tijd door verschillende physici genomen zijn in verband met de, in de vorige § § ontwikkelde theorie, zijn in hun doel eigenlijk hoofdzakelijk tweeledig.

Om van de alleroudste proeven reeds in de tweede helft der vorige eeuw gedaan, niet te spreken, die naauwelijks meer deden dan het bestaan constateren van een verschil in geleidbaarheid tusschen verschillende stoffen, dienden de eerste naauwkeurige proeven, tot zelfs nog die van Despretz in 1821 grootendeels, om de wet der geleidbaarheid te vinden, en toen deze door de theorie van Newton, Fourier, Laplace en Poisson gevonden was, op mathematischen weg, om deze uitkomst op proefondervindelijken weg te staven. Er werd victorie gekraaid, als eene proef de logarithmische wet bevestigde, waarvan de theorie reeds aantoonde, dat zij eigenlijk bij volkomen

geslaagde proeven *niet* de uitkomst wezen kon, en daarbij bleef het bijna geheel. Hoogstens werd eene rangschikking van eenige stoffen opgegeven, die van den eenen waarnemer tot den anderen aanmerkelijk verschilde, en hoogst zelden werden eenige zeer slecht te vertrouwen cijfers toegevoegd.

De tweede phase is die, waarin ernstig, door al fijnere en fijnere methoden naar cijfers voor den coëfficiënt k, (en, als toegift, ook voor h) werd gezocht. Deze proeven nog in onderverdeelingen te splitsen, zou niet moeijelijk vallen, daar bijna ieder daarbij eene geheel verschillende methode volgde, doch dit zal uit het verhaal over de proeven zelven wel volgen.

Ik zal dus de proeven van de eerste soort slechts kort behandelen, slechts met die mate van eerbied, die men aan lang overvleugelde baanbrekers der wetenschap verschuldigd is, de latere proefnemingen zal ik veel uitvoeriger behandelen, vooral, omdat zij nog in geen een handboek staan opgegeven, en het te zamenstellen van de verspreide stukken over dezen dus als het nuttigste deel van dit werkje kan beschouwd worden. Daarbij zal ik zoo volledig mogelijk de bronnen opgeven, waarmede ik voor de oudere proeven iets spaarzamer zal te werk gaan.

Verder zal ik, vooral wat de oudere proeven aangaat, niet veel cijfers opgeven, die mijn werkje eerder dikker zouden maken dan belangwekkender.

A. OUDERE PROEFNEMINGEN.

§ 27.

De eerste mij bekende proef is ons uit alle, zelfs zeer elementaire boeken, bekend, zij is van onzen landgenoot den geneesheer Ingenhousz [1]).

1) *Journal de physique*, Tome XXXIV, tweemaal.
Gren's Journal de Physique, Ic Deel.

Wat echter bij ons minder bekend is, is, dat Franklin het eerste denkbeeld van deze proeven heeft aangegeven.

In een blikken bakje, zijn in de eene wand even dikken staven van verschillende stof bevestigd, zoodat gelijke einden er van binnen den bak komen. De buitenliggende oppervlakken worden met was bestreken, en dan in den bak kokend water of olie door kokend water verhit, gegoten.

Nu merkte hij op, tot aan welk punt van zijne staven de was smolt, en dit gaf hem eene maat voor de geleidbaarheid, op den besten geleider smolt het meeste was. Hij gaf het gemiddelde uit 12 proefnemingen in het licht, en zijne waarnemingen werden herhaald door Ure [1]), die echter eene andere rangschikking der metalen geeft dan Ingenhousz. De metalen, waarover deze twee het eens zijn, hebben de volgende volgorde, waarbij de beste geleider het eerst komt:

Zilver, koper, tin, gietijzer, lood.

Op dezelfde wijze heeft Mayer [2]), schijnt het, proeven gedaan, zonder dat het mij de moeite waardig scheen, die proeven op te zoeken. Het zal wel naauwelijks noodig zijn het gebrekkige van deze methode der voorouderen aan te wijzen. De geleiding der staven is gecompliceerd met de geleiding der wasoppervlakte, wat vooral bij de slechtere geleiders aan de proefneming alle waarde ontneemt, — de smeltende was geeft geene zuivere afscheidingslijn, de warmtebron is zeer weinig constant, men weet niet waar het nulpunt is, enz. Waartoe de lijst der grieven

---

1) Aangehaald door Herschel in zijne *Encyclopaedia meteorologica.*

2) Onder het afdrukken komt mij een stuk in handen van Joannes Tobias Mayer, zoon van den meerbekenden astronoom van dien naam, in de *Commentationes Societatis regiae scientiarum Gottingensis* Vol. IV. Dit kan, dunkt mij, het eenige zijn waarom in een mijner bronnen de naam Mayer voorkomt. Er is echter sleehts sprake in van de wet van Newton, en het doet dus hier niet ter zake.

nog langer te maken? Cijfers kunnen zulke proeven toch nooit geven.

Amontons en Lambert zijn de eersten geweest die met metalen staven proefnemingen gedaan hebben op eenigzins betere wijze, die echter nog alleen dienden om de wet der verkoeling van Newton te toetsen [1]). Amontons schijnt in het begin der achttiende eeuw, dus reeds lang voor Ingenhousz eene staaf aan eene zijde verwarmd te hebben, voor de lagere temperaturen aan het andere einde de graden van Newton's thermometer gebruikt te hebben, en nu verder deze graphisch opgeteekend. In de lagere graden is de Logarithimische lijn bijna regt, en daar Amontons tegenover Newton's geometrische afname de arithemische in bescherming nam, trok hij de regte lijn door, en bepaalde nu eenige hoogere temperaturen door verschillende stoffen langs de staaf te bewegen, en zoo de punten te bepalen waar water kookt, waar was of lood smelten. Dan nam hij de graden eenvoudig volgens de ordinaten van zijne regte lijn. Geen wonder, dat hij de arithmetische wet bevestigd vond!

Lambert herhaalde zijne proeven, met eene kleine vereenvoudiging, en vond, zonder eene wet a priori aan te nemen, juist door dezelfde stoffen van Amontons, de Logarithmische wet van Newton bevestigd.

---

1) Beiden putte ik uit:

Johann Heinrich Lambert's *Pyrometrie*, Berlin 1779. Na zijn' dood uitgegeven door Karsten, St. 1778.

NB. Hier is natuurlijk eigenlijk sprake van de geometrische wet der afkoeling van Newton, dat namelijk een ligchaam in de eerste minuut aan de lucht eene hoeveelheid warmte 1 verliezende, in de tweede $\frac{1}{2}$, in de derde $\frac{1}{4}$ zal verliezen, enz. Daar dit echter een gevolg is van de onderstelling van Newton, dat de warmteafgifte direct evenredig is aan het verschil in warmte, staat dit met de grondvesten onzer theorie in het naauwste verband, daar Fourier geheel hiervan uitgaat, zoo voor de in-, als voor de uitwendige geleiding. Het overige over de theorie van Newton geschrevene, deelde ik reeds vroeger mede.

Proeven, om verschillende stoffen te vergelijken wat hun geleidingsvermogen aangaat, deden beiden niet, en daarvoor blijf ik dus aan Ingenhousz de prioriteit toekennen.

§ 28.

In chronologische volgorde komen wij nu tot Rumford, Graaf Rumford, zooals hij zich zelven doopte, met den titel, die hem eerst later geschonken werd. Deze bragt het eene einde eener ijzeren staaf in kokend water, het andere in ijs, en liet drie fijne thermometers zinken in drie gaten met kwikzilver gevuld, die onderling en van de uiteinden gelijke afstanden hadden. Hij was geen aanhanger van de geometrische wet van Newton, en werd dus natuurlijk bedrogen in zijne verwachting, dat de uiteinden der temperaturen als ordinaten genomen, eene regte lijn zouden vormen. Er zijn mij dan ook geene andere resultaten van hem bekend, die eenige waarde bezitten, dan de opmerking, dat vezelstoffen, en fijn verdeelde organische zelfstandigheden zeer slechte geleiders zijn.

De eerstvolgende is Biot [1]). Deze was de eerste, die eenigzins fijnere proefnemingen in het werk stelde, hoewel ook hij nog geen vergelijkende getallen gaf. Reeds voor Fourier, zooals wij zagen, had hij een klein gedeelte van de theorie ontwikkeld, dat betrekking heeft op de eindtemperaturen van de verwarmde staaf. Zijne proeven dienden om aan de theorie geloofsbrieven te geven. Echter gebruikte hij staven van verschillende metalen, zoodat b. v. voor koper en ijzer twee getallen uit zijne proeven zijn af te leiden voor $\frac{h}{k}$.

De staaf werd aan eene zijde verwarmd, door olie of kwik-

1) Biot, *Mémoire sur la propagation de la Chaleur*, Paris 1804. *Traité de Physique*, Paris 1816.

zilver, die door eene lamp verhit werden. In onderling op gelijken afstand staande indiepingen, met kwikzilver gevuld, stonden acht thermometers. De staven waren lang genoeg, dat de warmte niet tot aan het einde, dat vrij was, doordrong, en de waarnemingen werden eerst opgeteekend, nadat de toestand eenigen tijd lang stationair gebleven was. In eene koperen staaf waren 14 thermometers.

Biot gebruikt nu eene voorzorgsmaatregel, die voor de steeds twijfelachtige standvastigheid der warmtebron niet van belang ontbloot is. Hierdoor wordt tevens tegemoetgekomen aan het bezwaar, dat de deelen, zeer digt bij de warmtebron, sterk verhit, sterk uitstralend, zeer snel in temperatuur afnemen naar het andere einde toe, en dus onzekerheden kunnen geven. In de formule:

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}},$$

werd namelijk telkens de A, de warmte van de plaats der staaf waar $x = 0$ is, uit de waarnemingen berekend. Neemt men twee der thermometers (bij Biot de 1e en 3e), en mogen daarvoor de v en x zijn:

$$v' \text{ voor } x',$$
$$v'' \text{ voor } x'',$$

dan is:

$$lg\, v' = lg\, A - x'\sqrt{\frac{h}{k}},$$

$$lg\, v'' = lg\, A - x''\sqrt{\frac{h}{k}},$$

$$lg\, A = \frac{x''\, lg\, v' - x'\, lg\, v''}{x'' - x'}.$$

Door deze formule wordt de zooeven genoemde oorzaak van fouten zeer verkleind, en wijst een groot verschil tusschen de

berekende en de, door het thermometer gevondene, warmte van de bron dadelijk op eene onnaauwkeurigheid in de waarneming. De verhouding tusschen h en k volgt uit dezelfde twee vergelijkingen:

$$\sqrt{\frac{h}{k}} = \frac{lg\, v' - lg\, v''}{x'' - x'}.$$

Zoo vond hij als midden uit eenige prooven:

$$\frac{h}{k} \text{ voor ijzer } = 0.307,$$

$$\text{voor koper } = 0.041.$$

§ 29,

Het is hier de plaats, de beste methode aan te geven, om te zien, of werkelijk de proef de Logarithmische wet bevestigt, hetgeen te doen is, zonder dat de graad van warmte der bron bekend is, als deze slechts constant is. Kiest men drie der thermometers, die op volkomen gelijke afstanden onderling staan. Deze mogen de abscissen x, $x+i$, $x+2i$ hebben, dan is, — waarvoor zelfs de staaf niet oneindig lang behoeft te wezen — als de temperaturen dier drie thermometers zijn v, v_1 en v_2, en als $a = \sqrt{\frac{h}{k}}$ gezet wordt:

$$v = Pe^{-ax} + Qe^{ax},$$

$$v_1 = Pe^{-ax-ai} + Qe^{ax+ai},$$

$$v_2 = Pe^{-ax-2ai} + Qe^{ax+2ai};$$

waaruit volgt:

$$v + v_2 = Pe^{-ax-ai}(e^{ai} + e^{-ai}) + Qe^{ax+ai}(e^{ai} + e^{-ai}),$$

$$\frac{v + v_2}{v_1} = e^{ai} + e^{-ai}.$$

Dit is eene constante, dus, wanneer de thermometers in de staaf allen op onderling gelijke afstanden staan, zal de wet van Newton bevonden worden waar te zijn, wanneer telkens de som van twee temperaturen, door de daar tusschen liggende temp. gedeeld een constant getal geven.

Het zal wel naauwelijks gezegd behoeven te worden, dat hier, even als in alle proefnemingen, met temp. bedoeld wordt: overschot van temp. in het beschouwde punt der staaf boven de omgeving. In de theorie werd kortheidshalve de temp. der omgeving altijd $= 0$ gezet, zoodat daar deze opmerking verwaarloosd kon worden.

Nu heeft Newton zelf zijne wet reeds alleen als geldig gegeven voor kleine temperatuurverschillen. Wat hier echter klein beteekent, hebben de verschillende waarnemers nooit regt uitgemaakt, hoewel er genoeg proeven om aangevallen zijn. Een feit blijft echter, dat in de hoogere temperaturen de wet onzeker zal wezen. En zelfs al bleef zij daar waar, dan springt door eene beschouwing van de logarithmische lijn in het oog, dat daar de daling in den aanvang zeer groot is, eene kleine fout in de thermometer-aflezing, eene zeer kleine fout in den afstand onderling der thermometers, daar eene schijnbaar zeer groote fout zal geven.

Eene tweede oorzaak van misrekening is, dat de h en k beiden zooals ik reeds meermalen aanduidde, niet constant zijn, evenmin als de digtheid en de warmtecapaciteit. Ook deze onstandvastigheid zal dus maken, dat in de hoogere temperaturen de wet niet door de proefneming bevestigd wordt.

Men doet dus wel, daarvoor alleen het vlakkere gedeelte van de logarithmische kromme, d. i. lagere temperaturen te beschouwen. Doet men dit, dan moet men door de proeven tot nu toe genoemd, vooral door die van Biot, de wet als volkomen beves-

tigd beschouwen en zoodoende de verdere hoofdstukken der theorie als gevestigd aanzien.

Nu volgen dan ook die proeven, die meer bepaald gedaan zijn, om verschillende stoffen, vooral metalen te vergelijken wat den geleidingscoefficient aangaat.

Ik kan echter hier nog vermelden dat o. a. Fourier proeven gedaan heeft met een ring. Zijne theorie is ook daarvoor uitvoerig ontwikkeld. De proeven hebben dit voordeel, dat de staaf als het ware in zich zelve wederkeert en dus niet oneindig behoeft te wezen. Het is duidelijk, dat, als de ring groot, en dun is, de theorie van die van de staaf naauwelijks verschilt. Daar hiermede echter, — misschien helaas, — slechts onbeduidende proeven genomen zijn, zal ik er niet verder van gewagen.

§ 30.

De eerste, die zich nu voordoet, is C. Despretz[1]), in 1821 en later. Over zijne eerste proeven, op ijzer, koper, tin, lood, marmer, bakstoenklei en porselein gedaan bragten Fourier en Poisson in de Académie des sciences een zeer gunstig rapport uit, en ondersteuning van die zijde stelde hem in staat, ook op zilver, goud en platina proeven te doen.

Zijne staven hadden eene kwadratische doorsnede vam 21 millim. zijde. Op afstanden van telkens 10 centim. waren gaten, die tot $^2/_3$ van de dikte der staaf diep waren, 6 millim. middellijn hadden, en met kwik gevuld waren. Hierin zeer fijne thermometers. De waarnemingen werden gedaan, nadat de eindtoestand was in-

1) *Annales de Chimie et de Physique.* Tome XIX. 1821.
Traité élémentaire de Physique. Paris 1825.
Annales de Ch. et de Physique. Tome XXXVI. 1827 en van hetzelfde stuk eene vertaling in
Poggendorf's *Annalen* XII. p. 281.

getreden, wat eerst gemiddeld na 3 uren plaats had. De proeven duurden elk 6 uur ongeveer. De verwarming geschiedde door eene lamp, de zoogenaamde Lampe à Quinquet, naar den uitvinder Quinquet aldus genoemd; de Duitschers betwisten echter aan Q. de prioriteit der uitvinding, en noemen het ding „Argand'sche Lampe. Onder beide namen wordt dus dezelfde zaak verstaan. Het aantal zijner thermometers was vier, slechts bij weinige goede geleiders had hij er zes.

Ook Despretz begint nog, met naar bevestiging van de wet van Newton te zoeken, wij zullen later, bij de discussie, die op zijne proeven volgde, zien wat hiervan de waarde is. Hij vindt de wet waar bij de goede geleiders, echter niet bij de slechteren.

De relatieve waarden van $\frac{k}{h}$ vindt Despretz op volgende wijze. Schrijven wij in de vergelijking van de vorige § het constante quotient $e^{-ai} + e^{ai}$ op de volgende wijze:

$$r + \frac{1}{r},$$

dan is r te vinden uit de temperatuur-verschillen door:

$$r + \frac{1}{r} = \frac{v + v_2}{v_1},$$

en verder is:

$$e^{ai} = r,$$

of, als wij de waarde van a inzetten:

$$\sqrt{\frac{h}{k}}\, i = lg\, r,$$

waarbij ik de $\sqrt{\frac{2}{l}}$ die bij Fourier nog voorkomt in de i laat opgaan. Dan is verder:

$$k = i^2 h \frac{1}{(lg\, r)^2}.$$

Daar nu bij de proeven van Despretz alle staven met eene gelijke laag zwarte vernis waren bedekt veronderstelt hij, dat de uitwendige warmte-afgifte bij allen gelijk was, dus is $h i^2$ dan bij allen eene gelijke constante, en is de k direct proportioneel aan $\frac{1}{(lg\, x)^2}$. Op deze wijze vond hij de volgende cijfers, waarbij dat van goud willekeurig in een rond getal genomen is.

Goud	10000
Platina	9810
Zilver	9730
Koper	8982
IJzer	3713
Zink	3630
Tin	3039
Lood	1796
Marmer	236
Porselein	122
Klei	114

Hij trachtte vergeefs proeven te nemen met houtsoorten, doch deze geleiden te slecht.

N. W. Fischer [1]) was de eerste, die tegen deze proeven opkwam, op de autoriteit van Ingenhousz, bij wien de metalen eene andere volgorde hebben; vooral goud en platina staan bij dezen lager. Fischer herhaalde de proef van Ingenhousz, en meent dan gelijk te hebben; ja hij vindt de methode van I. nog niet primitief genoeg, en vindt er eene nog eenvoudigere uit, neemt gelijke staven van verschillende metalen in de hand, en verhit deze in eene lamp, en voelt waar hij ze nog aanraken kan! Ook Gehler is nog een voorstander van de methode van I. maar anders kan ik niet vinden, dat iemand het de moeite

1) Poggendorff's *Annalen*. XIX. p. 507.

heeft waardig geacht, de methode van F. ernstig te bespreken, en de lezer zal mij dankbaar zijn, als ik dezelfde onthouding in acht neem.

§ 31.

Ernstiger en waardiger tegenspraak vond Despretz bij den Noorweegschen, toen jongen, geleerde Chr. Langberg [1]) in 1845. Deze gaat de cijfers van Despretz na, vindt dat zij eene snellere temperatuur-afname aantoonen, dan met de theorie overeenkomt, en noemt als oorzaken die welke wij in de voorvorige § opgaven. Hij wraakt dus, dat D. temperatuurverschillen van 60° tot 70° Celsius nog mede in rekening neemt.

Dan waren de staven van D. te dik; zijne vrij groote gaten geven onderbrekingen in de continuïteit van de staaf, en dus onregelmatigheden in de voortplanting der warmte. Het blijft dus eerstens onzeker, of de afwijkingen van de wet van Newton waar zijn, of slechts aan de waarneming te wijten zijn, ten tweede echter moeten ook de cijfers voor k onder deze onnaauwkeurigheden lijden.

Langberg heeft gewerkt in het laboratorium van Prof. Magnus, wat zeker een grond is, om van zijne proeven groote zorgvuldigheid te verwachten.

Zijne staven waren veel dunner, dan die van Despretz en hij wijkt voornamelijk van den tot hem toe bewandelden weg af, doordien hij geene thermometers gebruikt, maar thermo-electrische zuilen van zeer kleine afmetingen, die door eene spiraalveder zooveel mogelijk gelijkmatig tegen de stang aangedrukt worden. Elk element bestond uit eene staaf bismuth en eene

---

1) Poggendorff's *Annalen*. Band. LXVI.
Ook een uittreksel in de werken van het *Institut de France*. 1846. p. 165.

staaf antimonium, beiden 36.3 mm. lang en 1.7 mm. breed en 0.7 mm. dik. De gesoldeerde uiteinden waren eenigzins conisch toegespitst, zoodat het vlak, dat tegen de staaf drukt, 1.7 mm. breed en 1 0 mm. dik was.

Twee dubbele, gepolijste schermen van geel koper omsloten aan het verwarmde einde de staaf, om de warmtebron te beletten, door straling de verder gelegene deelen der staaf te verwarmen. De warmtebron is bij hem weder kokend water, daar hij de constante warmte van de lamp van D. in twijfel trekt.

De naald van zijn thermo-multiplicator had 2 tot 2½ minuut noodig om tot rust te komen, als eene andere temperatuur in de elementen haar deed slingeren, hij drukte dus ongeveer zoolang zijn element tegen de staaf, en, om dan de naald eerst weder tot haar nulpunt te doen terugkeeren, wachtte hij telkens ongeveer vier minuten, eer hij op de volgende plaats de zuil aandrukte, en was hij zoodoende eenmaal de staaf langs gewandeld, dan wachtte hij een kwartier, voor hij weder aan het andere einde begon, voor eene nieuwe proef. Deze lange duur van zijn experiment beschouwde hij zelf reeds als eene min goede omstandigheid, en bij sommige proeven heeft hij dan ook niet den laatsten stand der naald waargenomen maar den eersten uitslag; wat echter minder zuiver is.

Bovendien erkent Langberg zelf, dat zijn thermo-multiplicator verre van volmaakt was, dat de graadverdeeling vrij ruw bewerkt was, en vooral, dat de naald nooit verkoos, hetzelfde punt blijvend als nul aan te nemen. Dit, en nog andere abnormiteiten van zijn instrument constateert L. zond er ze te verklaren, of te kunnen onschadelijk maken.

De warmte in het element rekende hij eenvoudig proportioneel aan den uitslag van zijne naald, en kon dit doen, daar zijne uitslagen steeds zeer klein waren. Bij de hoogere temperaturen

laschte hij in de geleiddraden wederstandsrollen in, om geen' te grooten uitslag te krijgen.

Op deze wijze onderzocht Langberg staven van koper, staal, lood en tin van 6 tot 9 m m. dikte en ongeveer 2 meters lang. Slechts de koperen staaf toonde tot aan het einde eene kleine verhooging van temperatuur, en was dus niet lang genoeg.

Hij vond nu de wet van de geometrische afname niet bevestigd, het beste echter bij de beste geleiders.

Volgens eigen bekentenis deed hij zijne proeven slechts, om de verkieselijkheid van thermoëlementen voor dit soort van proeven aan te toonen, meer dan om bepaald zijne metalen te vergelijken. Zijne staven hadden dan ook allen hunne eigene metaaloppervlakte, zoodat zijne resultaten slechts de verhouding tusschen h en k voor die metalen kunnen geven, geene vergelijkende waarden.

Despretz [1]) nu vond goed zeven jaar te wachten met een antwoord op deze kritiek en antwoorde toen een paar zaken, „du haut de sa grandeur" zooals aan een lid van de Académie des Sciences, wat hij inmiddels geworden was, tegenover een' jong vreemdeling betaamt. L. had gezegd dat de proeven juist het tegendeel bewezen van wat zij moesten, de juistheid der logarithmische wet en nu zegt Despretz:

„Mes expériences ne devaient pas donner une progresion gé„ométrique, les barres n'étaient pas assez longues, pour que „l'influence, de la source fut nulle à l'extrémité." Wat moesten zij dan? Later zegt hij echter, dat hij de wet bij de goede geleiders waar heeft gevonden, maar daarvan waren de staven natuurlijk eerst regt te kort, en dit zou dus juist eerder voor L. dan voor D. pleiten.

---

1) *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Nov.* 1852.

Despretz zegt verder ook wel eens over thermo-zuilen gedacht te hebben voor sommige gevallen, maar blijft toch thermometers voortrekken, waarmede hij waarlijk veel voorzorgen schijnt in acht genomen te hebben; maar nog verdedigt hij ze met het zonderlinge argument, dat de staven niet zeer dun behoeven te zijn en dan de discontinuiteit door de gaten niet aanmerkelijk is. Hierop ligt het antwoord voor de hand. De staven moeten wel degelijk zoo dun mogelijk zijn, daar de theorie gebaseerd is op het gelijkstellen van de staaf met eene oneindige lijn, en hoe weinig eenvoudig de formule voor dikkere staven is, zagen wij reeds in de theorie van Fourier. En in elk geval, zoolang Despretz gaten boort tot aan $^2/_3$ van de dikte, zal de onderbreking bij dikke als bij dunne staven wel aanmerkelijk blijven.

Verder maakt hij op de thermo-zuilen van L. de gegronde aanmerking dat deze de temp. niet meten in de staaf, maar slechts aan de oppervlakte, waar deze door de uitwendige warmte afgifte zeker gestoord, waarschijnlijk steeds iets lager, dan binnen in zal wezen. Hij oppert verder de vraag, of niet steeds de zuil iets van de warmte zal wegnemen. Langberg heeft gemeend, dat dit zeer weinig was, daar zelfs na eene aanraking van een half uur met de staaf, zijn multiplicator denzelfden uitslag volkomen bleef behouden.

Laat ik hier eens voor al zeggen, dat de kwestie tusschen thermometers en thermo-electrische zuilen, m. i. de hoofdzaak niet is. Wij hebben tot nu toe slechts deze twee middelen, om temperaturen te vergelijken, en mogten nu beiden voor ons doel al onvolmaakt wezen, men zal steeds tusschen de twee eene keuze moeten doen, en wat men doen kan is alleen, met welke dan ook, alle mogelijke voorzorgen te nemen. Bij latere proeven zullen wij voor deze voorzorgen nog verscheidene nuttige wenken zien.

Eindelijk verdedigt Despretz nog zijne lamp tegenover andere middelen van verwarming, en hiervoor is ook de autoriteit van Fourier, die zegt, dat het uit de proeven gebleken is, dat men de temperatuur, die de lamp geeft, uitnemend constant kan houden, langer dan voor de proeven noodig is.

Despretz geeft echter toe, dat misschien de door hem gebruikte temperatuur-verschillen van 60° wel wat te groot waren, maar blijft toch hechten aan zijn resultaat, niettegenstaande den volzin, dien ik in de Fransche taal van hem overnam.

Aan het slot van dit stuk geeft Despretz nog aan, dat het beplakken van de staven met papier een goed middel zou wezen, om de oppervlakte, dus de h, gelijk te maken voor allen,

Dan meldt hij nog de resultaten van waarnemingen op eenige slechte geleiders, houten en steensoorten — die ik niet zal mededeelen, maar ook op vloeistoffen. Deze heb ik geheel buiten mijn werkje gelaten — het weinige wat daarover gedaan is, vindt men in elk handboek — maar ik wil een feit vermelden, dat ik later denk weder op te visschen, dat namelijk eene toevoeging van zouten en zuren de geleidbaarheid van water voor warmte niet vermeerderen, zooals bij de electriciteit in hooge mate het geval is.

§ 32.

De methode van Langberg is niet door ieder zoo verwerpelijk gevonden als door Despretz, want de naauwkeurigste proeven die op den tot nu toe gevolgden weg genomen zijn, zijn op Langbergs manier gedaan, Ik bedoel die van G. Wiedemann en R. Franz [1]) in 1853, die echter Langberg

---

1) Poggendorf's *Annalen*. Band LXXXIX.
En nog latere stukken, alleen van Wiedemann in dezelfde collectie. Band XCV en CVIII.

aanmerkelijk verbeterd hebben. Zij maken op de waarnemingen van dezen de aanmerkingen:

1°. Dat met zijne wijze, van de zuil aan de stang te drukken, het niet zeker is, dat de aanraking altijd volkomen was. Was de druk een weinig scheef, dan heeft slechts een kant van de zuil de staaf aangeraakt, en waarschijnlijk te lage temperaturen aangegeven.

2°. Dat de waarnemingen te lang duurden, — zooals wij zagen, tot bijna 3 minuten. Gedurende dien tijd, zal het element altijd eenige warmte aan de staaf ontnemen, en deze misschien in de vrij lange zuil secundaire stroomingen doen ontstaan, die aan het resultaat afbreuk kunnen doen.

3°. Dat L. misschien toch nog te groote temperatuurverschillen gebruikt, om den naalduitslag direct evenredig te mogen stellen aan het temperatuurverschil in de soldeerplaats.

4°. Dat L. werkte in eene kamer, zonder zijne staven te beschutten voor temperatuurveranderingen der omgeving en voor luchtstroomen, die, gedurende zijne lange proeven, stoornis in den toestand der staaf kunnen gebragt hebben.

Aan al deze bezwaren zochten nu W. en F. zooveel mogelijk te gemoet te komen, door allerlei vernuftige inrigtingen. De teekening van hun instrument dat vrij ingewikkeld is vind men in de Annalen van Poggendorf en ook zeer goed in de nieuwere handboeken, waarop ik mij hier genoodzaakt zie te verwijzen.

De gebruikte staven waren cirkelrond, en ongeveer een halven meter lang, en hadden 5 tot 6 mm. middellijn. De formules van Fourier werden zorgvuldig gebruikt om de gevonden getallen op dezelfde dikte te herleiden. De staven waren allen galvanoplastisch verzilverd of waar de aard van het metaal dit niet toeliet, verkoperd en dan verzilverd, en de oppervlakte zoo

gelijkmatig mogelijk gepolijst, om de uitwendige warmte-afgifte zoo naauw mogelijk gelijk te maken. Alleen de platina-staaf had zijne eigene oppervlakte, daar deze slechts zeer kort in hun bezit was. Alle metalen behalve het goud waren chemisch zoo rein als men ze maar kan maken, het zilver b. v. uit eene oplossing neêrgeslagen, uitgewasschen en driemaal omgesmolten.

De staven liggen horizontaal in een glazen klok, en aan de eene zijde onmiddelijk daarbuiten in een metalen doos, gevuld met stoom die steeds aangevoerd wordt uit een kookvat daaronder. Dat uiteinde is dus constant op 100° C., daar de stoom door eene buis vrij ontsnapt. Aan de andere zijde is de klok gesloten door eene metalen plaat, waaraan een tweede ondersteuningspunt, voor het vrije einde der staaf. In die plaat is nog eene opening, waardoor eene glazen buis naar binnen gaat, waarin de twee geleiddraden van het galvanometer naar binnen gaan. Deze buis is overigens luchtdigt gesloten. In de klok eindigen deze draden in eene soort van tang, die de staaf vast omklemt., en het element, dat tot de kleinst mogelijke afmetingen gebragt is, er zoo vlak mogelijk wordt tegen aangedrukt. De klok is voorts nog voorzien van eene buis, die met de luchtpomp kan verbonden worden, zoodat de staaf in het luchtledige en in de lucht kan onderzocht worden. Verder is de klok van water omspoeld, zoodat de ruimte er binnen op eene vaste temp. bleef.

Nu heeft Regnault aangetoond, dat de intensiteit van den galvanischen stroom niet direct evenredig is aan de warmte in de soldeerplaats. Dit zal ik hier niet ontwikkelen, doch Wiedemann en Franz ontkwamen aan deze moeijelijkheid op de volgende wijze. In de klok zelve werd een holle bol van staal met kwikzilver gevuld verwarmd, daarin was een thermometer, en nu werden de graden van den uitslag van het galvanometer vergeleken met de aanwijzing van het thermometer en in tabellen gebragt.

Tevens toonde zich hierbij, dat telkens als de zuil aangelegd werd, het thermometer 0.8° daalde, wet tegen Langberg zou pleiten. Echter stond het thermometer zeer snel weêr op de oude hoogte, zoodat dit op de proeven van L. die zoolang duurden, wel weinig invloed zal gehad hebben.

De correctiën nu, die door deze tabellen veroorzaakt werden, waren zeer gering, werden echter zorgvuldig in rekening gebragt.

Het galvanometer schijnt zeer gevoelig, en in alle opzigten uitstekend geweest te zijn, en het element werd zoo kort mogelijk aan de staaf gedrukt. Door de glazen buis, waarin de draden zijn, te verschuiven, onderzochten W. en F. de temp. op verschillende plaatsen in de staaf.

Om uit de waarneming de grootte van k af te leiden, gebruiken zij volmaakt dezelfde formule als Despretz.

De cijfers nu, waartoe deze geleerden komen, zijn de volgenden. Ik heb er de uitkomsten van Despretz achter gezet, in dezelfde maat uitgedrukt.

Zilver	100.0	100.0
Koper	73.3	92.3
Goud	58.5	102.8
Geel koper	21.5	
Zink	24.0	37.3
Tin	22.6	31.2
Yzer	13.0	38.2
Lood	10.7	18.5
Platina	10.3	100.8
Bismuth	1.9	

Men ziet, dat de cijfers belangrijk verschillen, Wiedemann en Franz komen nader aan de volgorde van Ingenhousz. Ik aarzel niet, de cijfers van W. en F. verre boven die van

Despretz te verkiezen, en ze de besten te noemen tot nu toe langs dezen weg verkregen. Ik zal mijne opinie wel niet meer behoeven te verdedigen.

Hoe naauwkeuriger echter de proeven werden, hoe meer moesten kleine zaken opvallen, en aan Wiedemann en Franz deden zich dan ook met vernieuwde kracht twee vragen op, die reeds geopperd waren, doch nog nu van belang zijn en ten deele op antwoord wachten.

Ten eerste. Bestaat er verband tusschen deze reeksen voor warmtegeleiding en de geleiding voor electriciteit? W. en F. beantwoorden deze vraag volmondig met ja. Voor electriciteit bestonden drie reeksen cijfers van eenige waarde, die van Riess, Becquerel en Lenz en nu stemt werkelijk de reeks van W. en F. met die van Lenz vrij wel overeen. De voorzichtige uitspraak is in elk geval geregtvaardigd: „er bestaan geene „grootere verschillen tusschen de reeks voor warmte, en die „van Lenz voor electriciteit, dan er bestaan tusschen de drie „reeksen van Riess, Becquerel en Lenz onderling." Over dit punt spreek ik op het oogenblik niet verder, het zal weêr later opduiken.

Ten tweede. Zijn k en h met de temperatuur veranderlijk? Langberg had hierop ja gezegd, en Poisson meent van ja. W. en F. namen het feit nauwelijks waar bij de betere geleiders, maar wel degelijk bij de slechteren. In het luchtledig toonde zich weinig veranderlijkheid. Ook hierover zal ik later meer handelen.

Alles duidt echter aan, dat de theorie beter doorgaat voor de goede dan voor de slechte geleiders.

En hiermede ben ik aan het einde van eene groep van proefnemingen gekomen, in deze groep omvat ik alle proeven waarbij eenvoudig, hoe dan ook, de temperatuur op vele verschillende plaatsen van eene staaf wordt onderzocht. Ik zal nog nieuwere,

betere methoden aangeven, maar vooraf moet ik nog een paar groepen van proeven aanstippen op eene andere wijze genomen. De eerstvolgende methode leidde niet tot zeer veel resultaten, maar ik ben aan de mannen, die haar met groote moeite aanwenden, en aan de volledigheid van mijn werkje, verpligt ze kortelings te vermelden, eer ik tot de betere soort overga.

§ 33.

De tweede groep van proeven, die wat de chronologische rangorde aangaat, parallel met de vorige groep is, heeft tot grondtrek het meten der warmte die van eene warmere middenstof in eene koudere overgaat, door platen van de te onderzoeken stof heen. Men kan reeds a priori zeggen, dat dit tot weinig goeds kan leiden, aangezien deze hoeveelheid warmte eene vrij ingewikkelde functie zal wezen van den inwendigen geleidingscoëfficiënt en van de beide uitwendige geleidingen aan de beide oppervlakken der platen.

De eerste poging in dezen zin, was een voorstel van Dulong, dat niet tot uitvoering kwam. Een holle bol van de te onderzoeken stof, met ijs gevuld, zou in stoom van 100° gebragt worden, na een bepaalden tijd de hoeveelheid ijs, die tot water geworden was, onderzocht worden; is aan deze hoeveelheid in den tijd τ gelijk aan p, is verder R de straal, ε de dikte van de bol, dan komt men ligt tot de door Dulong voorgestelde formule:

$$\frac{p \times 79{,}25}{4\pi R^2 \tau} = k \frac{100}{\varepsilon},$$

waaruit k te vinden zou wezen.

De methode is volstrekt onbruikbaar, want Dulong laat geheel buiten rekening, den coëfficiënt h voor den overgang van stoom van 100° in het ligchaam, en voor den overgang van het ligchaam (dat intusschen eene onbekende middentemp. heeft) in

in ijs van 0°. Men zou dus eerstens de temp. van het ligchaam zelf gedurende de geheele proef, en ten tweede de veranderingen van beide coëfficiënten voor die temp. moeten kennen, en daardoor zouden proef en rekening vrij ingewikkeld worden.

Het schijnt mij hier de plaats iets uit Buffon toe te voegen [1]). Het schijnt mij toe slechts een résumé te wezen, van het standpunt der kwestie der geleidbaarheid op zijnen tijd, maar ik neem het toch op, 1°. om 's mans grooten naam en 2°. omdat het mij niet duidelijk is geworden op welke proeven hij doelen kan en het dus toch mogelijk is, dat hij op eigene proeven doelt.

Eerst zegt hij, dat door proefnemingen met metalen bollen de wet van Newton bevestigd is, dan wijdt hij 150 bladzijden aan mijn onderwerp en geeft vele cijfers, die ik maar niet zal wedergeven. Dan zegt hij ten slotte: „que le progrès de la chaleur „dans toutes les substances minérales est toujours à très-peu „près en raison de leur plus ou moins grande facilité à se „calciner ou à se fondre." Men ziet de groote man geeft een aardig overzigt, maar laat geen groot licht opgaan.

Niet minder bezwaren dan de methode van Dulong heeft het contact-thermometer van Fourier, meer bepaald bedoeld, om bij de doorlating van warmte door platen, den invloed van de dikte dezer platen te bepalen, doch ook tot bepaling der coëfficiënten dienstbaar gemaakt. Een trechter van metaal, met de wijde opening naar beneden en met kwikzilver gevuld, waarin een thermometer afdaalt. Van onderen is de trechter met eene dunne lederhuid gesloten, en steunt daarmede op een reservoir, waarin stoom gebragt wordt. Later wijzigde Fourier den toestel, en bragt in plaats van het reservoir een blok van steen, dat de temperatuur

1) Buffon, *Oeuvres complètes* Ed. Sonnini, Paris an VII (1798).
Zeer zeldzame editie in 120 deelen.
Tome IV p. 377 en Tome V, het begin.

der omgeving had [1]). In 1828 heeft hij hiermede met behulp van Colladon eenige proeven genomen, zonder echter, schijnt het, zijne belofte na te komen, dezen later te vermenigvuldigen en resultaten in het licht te geven. Dezen zouden dan ook niet veel waarde gehad hebben. De eerste toestel staat in Jamin beschreven, ik kan volstaan met den tweeden, beteren, waarvan de theorie bijna dezelfde is. In beiden komen de te onderzoeken platen tusschen de huid en de onderlaag te liggen.

Wanneer H de hoeveelheid warmte is, die in de eenheid van tijd door het conische oppervlak in de lucht zou treden, wanneer de grootte van dit oppervlak en evenzoo het temperatuurverschil tusschen dit en de omgeving beiden $= 1$ waren, zoo zal, als men het kwikzilver tot eene temp. α verwarmt, als s het conische oppervlak en m de temp. der omgeving is, door deze oppervlakte in den tijd dt naar buiten afgegeven worden, de hoeveelheid:

$$Hs\,(\alpha - m)\,dt.$$

Zij nu de warmte die door de huid ontsnapt, met dezelfde eenheden als boven, $= h$, dan is, als b de grootte der huid, n de temp. van het blok is, wanneer niets tusschen de huid en het blok ligt, hetgeen uitvloeit door de huid:

$$hb\,(\alpha - n)\,dt.$$

Uit het geheele instrument dus vloeit eene hoeveelheid:

$$Hs\,(\alpha - m)\,dt + hb\,(\alpha - n)\,dt.$$

Is verder c de warmtecapaciteit van het geheele vat, d. i. de warmte die men er aan zou moeten toevoegen, om het van de temp. 0 op 1 te brengen, dan is

---

1) *Poggendorf's Annalen* XIII.
Annales de Chimie et de Physique XXXVII.

$$d\alpha = -\frac{1}{c}\left\{Hs\,(\alpha - m) + hb\,(\alpha - n)\right\} dt.$$

Hieraan voldoet als integraal:

$$\alpha = P + Qe^{-(Hs + hb)\frac{1}{c}},$$

waarin gezet is:

$$P = \frac{Hsm + hbn}{Hs + hb}.$$

Komen nu de te onderzoeken platen tusschen het blok en de huid te liggen, dan wordt h een zamengestelde coëfficiënt voor huid en plaat. Men kan eerst dezen nu voor de huid alleen bepalen, om die voor de platen te vinden,

Nu wordt het kwikzilver verwarmd, en daarna laat men het geheel eenvoudig in de omgeving bekoelen. Neemt men dan op drie verschillende oogenblikken, met telkens eene tijdsruimte ϑ verschil de temperaturen waar, die $\alpha_{\circ}$, α_{ϑ} en $\alpha_{2\vartheta}$ mogen zijn, en voert men de onbekende ϱ in, die bepaald is door

$$\varrho = \frac{hb + Hs}{c},$$

dan wordt, als men voor het eerste oogenblik $t = 0$ neemt:

$$\alpha_{\circ} = P + Q,$$

$$\alpha_{\vartheta} = P + Qe^{-\varrho\vartheta},$$

$$\alpha_{2\vartheta} = P + Qe^{-2\varrho\vartheta},$$

en dus:

$$\alpha_{\circ} - \alpha_{\vartheta} = Q\left(1 + e^{-\varrho\vartheta}\right),$$

$$\alpha_{\vartheta} - \alpha_{2\vartheta} = Q\left(1 + e^{-\varrho\vartheta}\right)e^{-\varrho\vartheta},$$

$$e^{-\varrho\vartheta} = \frac{\alpha_{\circ} - \alpha_{\vartheta}}{\alpha_{\vartheta} - \alpha_{2\vartheta}},$$

$$\varrho = \frac{1}{\vartheta}\left\{ lg\left(\alpha_{\circ} - \alpha_{\vartheta}\right) - lg\left(\alpha_{\vartheta} - \alpha_{2\vartheta}\right)\right\}.$$

Neemt men nu achtereenvolgens twee even dikke platen van verschillende stof, dan kan men daarvoor de h vergelijken, daar men twee verschillende waarden verkrijgt voor:

$$\varrho = \frac{hb}{c} + \frac{Hs}{c}.$$

Hierin is nu wel overal de H aanwezig, daar deze echter voor alle platen dezelfde is, doet hij tot de relative bepalingen niet af.

De ontwikkeling wordt nog veel eenvoudiger, als men aan het blok eenvoudig de temp. der omgeving geeft, waarvoor $m = n$ wordt.

Tot dit doel is dit instrument haast nog gebrekkiger, dan de toestel door Dulong voorgeslagen, want niet alleen dat de coëfficiënt h ook hier een complex is van k en van twee uitwendige geleiding-coëfficiënten, maar de lederhuid maakt het geheel nog ingewikkelder. Op een ander bezwaar zal ik zoo aanstonds wijzen, dat echter meer van toepassing is, op de eerste, dan op de tweede inrigting van dit instrument. Fourier erkent dan ook openhartig zelf de onvolkomenheid van het instrument, dat hij, zooals ik reeds zeide, niet verder gebruikt schijnt te hebben.

§ 34.

Péclet heeft den eersten toestel van Fourier eenigzins gewijzigd, en nog verbeterd, doordien hij de lederhuid wegliet, en de te onderzoeken platen zelven als afsluiting bezigde. Zijn eerste doel was, den invloed van de dikte der platen te onderzoeken, en vervolgens om, daar andere waarnemers nog steeds slechts relatieve geleidings-coëfficiënten gezocht hadden, voor ten minste een metaal, en wel voor lood, eene absolute bepaling te vinden.

En nu vond Péclet dat de dikte, en zelfs de metaalsoort van zijne platen bijna geen invloed hadden, op de doorgelaten hoeveelheid warmte in eenen bepaalden tijd. Het zal geen betoog behoeven, dat dit feit de onbruikbaarheid der proef met zich voert. Péclet verklaart de zaak, door te onderstellen, dat aan beide zijden van de plaat eene dunne waterkolom (ook in het bovenste vat, den trechter van Fourier, is bij hem water) onbewegelijk is, en van eene andere temperatuur, dan de rest. Dan wordt het geheel een complex van twee lagen water, waartusschen het zoo oneindig veel beter geleidende metaal slechts de rol speelt van een draphragma.

Nu verbetert Péclet zijn' toestel aanmerkelijk [1]). Het bestaat ten slotte uit een vat, het bovenste, met water van 0° gevuld, en dat van onderen alleen door de te onderzoeken plaat in contact komt met een groot vat, met water op de temp. der lucht gevuld. Met ziet, dat hij slechts een klein temperatuurverschil gebruikt, wat zeker voordeelig is. Het bovenste vat is omringd met uitgekamde wol, en dus tegen warmteaanvoer van buiten beveiligd. De grootste verandering bestaat echter in twee roertoestellen, in elk der vaten een, die de laag water aan de oppervlakte der plaat in gestadige beweging houden. Deze toestellen deden 1600 omdraaijingen per minuut.

Nu waren de doorgelaten hoeveelheden warmte zeer merkbaar omgekeerd evenredig aan de dikte der platen, en was dus de proef als beter ingerigt te beschouwen. Ik zal de becijfering van Péclet niet aangeven, alleen opmerken, dat hij tot het resul-

---

1) E. Péclet *Traite de la Chaleur.*

Ook uitvoerig beschreven in Müller-Pouilets leerboek, minder uitvoerig in dat van Jamin.

Het eerst bekend gemaakt in 1841 in:

Annales de chimie et de Physique IIIe série. Tome II. p. 107. en in Poggendorf's *Annalen.* LV. p. 16.

taat komt, dat in eene seconde, door eene plaat lood van 1 vierk. meter oppervlak en 1 millim. dik 3.82 warmte-eenheden gaan, wanneer het temperatuurverschil aan de beide eindvlakken 1° bedraagt.

Voor Péclet hadden Clément, en Thomas en Laurent, proeven gedaan met hetzelfde doel, echter zonder alle voorzorgsmaatregelen van Péclet en waren tot veel kleinere resultaten gekomen. Daar deze proeven klaarblijkelijk vrij slecht zijn, gaf ik mij de moeite niet, ze op te slaan, en deel ze hier slechts pro memoria mede.

Ook het cijfer van Péclet is later (zie verder bij Ångström) gebleken, nog veel te klein te zijn, en kan dus slechts onder reserve worden aangenomen. Ook laat zich ook op zijne proef wel een en ander aanmerken, Zijne gecompliceerde roertoestellen moeten vrij veel wrijving, en in het water en in de tappen gehad hebben, die warmte veroorzaakte, welke niet in rekening is gebragt. Maar erger nog wordt dit, daar de toestellen de plaat zelve aanraakten, waarin hunne wrijving zeker warmte moet veroorzaakt hebben.

Verder kan zijne absolute waarde van k, waarin nog steeds twee waarden van h voor de beide oppervlakken schuilen, wel voor alle andere gevallen naauwelijks gaaf aangenomen worden.

Vervolgens heeft Péclet zich ontzaggelijke moeite gegeven, voornamelijk met het oog op technische doeleinden, met slecht geleidende stoffen. Hiertoe gebruikte hij drie verschillende, vrij afwijkende methoden, waarvan eene is, zijne roertoestellen in verband gebragt met het door Dulong voorgeslagen toestel. Daar ik mij deze slechtere geleiders echter minder voorgesteld heb ter behandeling, zal ik deze proeven niet geven, men vindt ze uitvoerig beschreven in het aangehaalde werk van Péclet, in eene noot achter aan het derde deel van de derde uitgaaf (1860).

Om dezelfde reden zal ik ook slechts de namen noemen van Auguste de la Rive en Alphonse de Candolle [1]) die in 1828 proeven namen met houtsoorten, wat wegens de zwakke geleiding zeer moeijelijk was. Zij werkten met staven, doch van veel grootere dikte, dan bij metalen voldoende is, waardoor de proeven wel minder te vertrouwen zijn. Echter blijkt uit al deze proeven weder, dat bij de slechte geleiders, de logarithmische wet van Biot niet meer doorgaat. Dit is echter te verwachten. Deze gaat ook bij goede geleiders in de hooge temperatuurverschilllen niet meer door; bij slechte geleiders moet men eerstens hooge temperaturen aanwenden, om eenige geleiding te bespeuren, ten minste als men met staven werkt. Verder: stelt men graphisch de logarithmische kromme op, dan weet ik er reeds vroeger op, dat uit de figuur duidelijk is, dat het eerste gedeelte, waar de daling sterk is, de grootste fouten moet aanbieden. Wordt nu, zooals feitelijk bij slechte geleiders het geval is, de figuur in de rigting der abscissen sterk te zamen gedrongen, dan wordt deze bron van fouten zoo overwegend, dat het duidelijk is, dat, al ging de wet nog door, men ze niet meer zou kunnen aanwijzen. Want de waarneming en de figuur zijn hierin volkomen analoog. Wat is het aflezen van een thermometer anders dan het meten eener ordinaat, en in dat geval nu moet de kleinste fout in de abscisse, dat is, reeds een thermometer die niet midden in zijne holte staat, reeds eene zeer groote fout, en in de berekende, en in de geteekende kromme, geven.

Een resultaat van de laatste proeven, dat ik nog wil aanhalen, is dat de houtsoorten in de rigting der vezels oneindig beter geleiden, dan loodregt daarop, iets wat in de plantenphysiologie niet van belang ontbloot is.

---

1) Op vele plaatsen aangehaald. Zie voor de litteratuur hiervan Gehler, *Physikalisches Wörterbuch* X, 1e Abth. p. 540.

§ 35.

Eene reeks van proeven geef ik hier nog afzonderlijk, daar zij, hoewel met staven uitgevoerd, van de vorigen in methode verschilt. In 1858 maakten voor het eerst F. Crace Calvert Richard Johnson [1]) hunne proeven bekend, die eenigzins anders gedaan werden, dan de beide nu verhaalde methoden. In de Philosophical Transactions staat eene uitgebreide beschrijving van hunne zorgvuldig gedane proeven en van alle voorzorgen hierbij gebruikt. Vooral voor chemische verbindingen, en mensels van metalen wenden zij groote moeite aan, waarin zij tot nu toe alleen staan. Vooral dus voor technische doeleinden, is hun arbeid van groot nut. Zij schijnen er meer dan een jaar aan besteed te hebben.

Hun instrument bestaat in de hoofdzaak uit twee waterreservoirs van bepaalden inhoud, het grootere voor warm, het kleinere voor koud water bestemd. Het is vrij wel gelukt de beiden, op eene afstand van 4 centim. zoodanig van elkander te scheiden, dat bijna geene warmte werd medegedeeld. De te onderzoeken staven hebben eene kwadratische doorsnede van 1 centim. zijde en zijn 6 centim. lang. Deze worden nu zoo geplaatst, dat in elk water reservoir 1 cub. centim. uitsteekt en 4 centim. er van tusschen de twee vaten zijn, omgeven van caoutschouk, om het doordringen van water te beletten. In het grootere reservoir steekt verder een thermometer, en mond eene buis uit, waardoor stoom toegevoerd wordt, waarmede de proefnemers het zeer gemakkelijk vonden het water op eene constante temp van 90° C.

---

1) *Philosophical Transactions.* Vol CXLVIII en CXLIX.
In uittreksel in verschillende Jaarboeken, waarvan ik alleen noem:
Fortschritte der Physik. XIV Jahrgang. 1860. en
Comptes Rendus XLVII.

te houden. In het andere vat steekt een instrument, waardoor het water gestadig omgeroerd wordt, en een zeer gevoelig thermometer, dat tiendedeelen van graden aanwijst.

Wordt nu het water in het eene reservoir verwarmd, dan zal door de geleiding van de staaf, ook het water in het andere in warmte toenemen en nu meten Calvert en Johnson eenvoudig het aantal graden, waarmede de warmte toeneemt, in een kwartier, voor elk metaal, en zetten k daaraan direct evenredig.

Dit schijnt mij toe gewaagd te zijn. Is er binnen zoo ruime grenzen bv. 30 maal zooveel warmte noodig om dezelfde hoeveelheid water te brengen van 20° tot 50° dan er toe noodig is om die van 19° tot 20° te brengen? En dit zijn nog niet de ruimste grenzen van deze proeven.

Verder toont de theorie van Fourier, dat de verspreiding der warmte in eene staaf vooral in den aanvang der verwarming, die hier, naar mij toeschijnt, gebruikt is, volstrekt niet regelmatig gaat en het is dus volstrekt niet onverschillig, of het kwartier, gedurende hetwelk waargenomen wordt, juist eene periode van maximum van verwarming of van minimum omvat.

Dan ook krijgt men hier een k, dat op zonderlinge wijze met verschillende waarden van h moet gecompliceerd zijn, daar de staaf onderweg warmte afgeeft aan al de verschillende scheidingswanden tusschen de twee vaten.

Een groot voordeel echter is, dat hier slechts een thermometer afgelezen wordt, en een ander voordeel, dat de continuiteit van de staaf door niets onderbroken is. Ook is de kleinheid der staven voordeelig, daar het veel gemakkelijker is kleine, dan groote stukken, chemisch rein te verkrijgen. Hiervoor droegen de beiden ook groote zorg, bijna alle metalen werden uit chemische precipitaten vervaardigd. Vloeibare metalen werden in een kistje van zeer dun blik, van dezelfde groote als de staven,

gebruikt, nadat vooraf de geleiding van het omhulsel was bepaald. Dit moet klaarblijkelijk de onzekerheid doen toenemen.

De cijfers van deze proefnemers voor de zuivere metalen zijn, het zilver als norm aangenomen:

zilver $\frac{1000}{1000}$	1000
goud $\frac{1000}{1000}$	981
goud $\frac{991}{1000}$	840
koper, gewalst	845
koper, gegoten	811
aluminium	665
zink, gewalst	641
zink, verticaal gegoten	628
zink, horizontaal gegoten	608
cadmium	577
smeedijzer	436
tin	422
staal	397
platina	380
sodium	365
gegoten ijzer	359
lood	287
antimonium horizontaal gegoten	215
antimonium verticaal gegoten	192
bismuth	61

Men ziet, deze cijfers verschillen aanmerkelijk van die van Wiedemann en Franz, en daar ik ze zeker niet voor meer te vertrouwen houd, brengen ze er m. i. alleen toe bij om te bewijzen, hoe slecht de coëfficiënt k nog bepaald is.

Eenige resultaten van Calvert en Johnson moet ik echter nog aangeven, daar zij nieuw en belangrijk zijn. Een belangrijk

metaal zal men tot nu toe nog steeds gemist hebben, namelijk kwikzilver. Hiermede deden onze proefnemers uitgebreide proeven. Hun eerste cijfer was 677 en dus kwam kwikzilver vrij hoog in de rij. Nu maakte echter Prof G. G. Stokes de opmerking, dat dit cijfer te hoog kon wezen, aangezien bij deze dispositie, aanmerkelijke stroomingen in het metaal moest ontstaan. Nu rigtten de waarnemers hun instrument zoo in, dat de bak met kwikzilver in andere stellingen kon gebragt worden, en hoe grooter de helling werd, als steeds het warme water boven, het koude onder was, hoe zwakker werd de geleiding, en toen eindelijk de staaf kwikzilver, als ik mij zoo uitdrukken mag, verticaal stond, daalde *k* tot 54. Kwikzilver is dus verreweg onder de metalen de slechtste geleider voor warmte, evenals het dit voor electriciteit is. Het deelt trouwens de slechte geleiding met alle vloeistoffen.

Ik heb dit eenigzins uitvoerig behandeld, aangezien m. i. het bezwaar tegen de meting der warmte in staven door thermometers met kwikzilver omgeven, er wel door verzwaard wordt. Het mag misschien verwondering wekken, wat dit aangaat, dat nog niemand op de gedachte kwam, eens met dezelfde staaf vergelijkende proeven te nemen, 1°. met thermometers, 2°. met aanliggende, 3°. met ingesoldeerde thermo elementen. Dit zou misschien tot een oordeel kunnen leiden, daar waar men nu nog slechts voor en tegen in den blinde weegt. Doch ik dwaal hier af van Calvert en Johnson, terwijl ik, zonder meer cijfers te geven nog een en ander wil aanstippen, over metaalverbindingen.

Die verbindingen, die alleen te beschouwen zijn als mengsels van verschillende metalen, ook de vloeibare en niet-vloeibare amalgamata met kwikzilver, hebben een geleidingscoëfficiënt, die het midden inneemt tusschen die van de metalen, die in het

mengsel voorkomen, en uit die beiden berekend kan worden met behulp van de percentische hoeveelheid der aanwezige metalen. Chemische verbindingen daarentegen, hebben eenen geheel eigen coëfficiënt, die dikwijls zeer afwijkt, van wat men, volgens bovenstaande berekening, zou vinden.

Zeer kleine verontreinigingen met andere metalen veranderen de geleiding reeds aanmerkelijk, (zie de cijfers voor goud) evenals dit bij electriciteit het geval is.

De kleinste sporen van kristallijnen-structuur geven ook reeds aanmerkelijke veranderingen, waaraan C. en J. de verschillen toeschrijven die sommige metalen vertoonen, al naar de rigting waarin zij gegoten zijn.

Zoo is waarschijnlijk ook het verschil in geleiding tusschen de gewalste en gegoten metalen daarin te zoeken, dat de eersten digter zijn dan de laatsten. De proeven op kristallen zijn hiermede vergelijkbaar. Evenzoo bestaan er proeven waaruit blijkt, dat metalen, in eene rigting te zamen gedrukt, in die rigting eene grootere geleidbaarheid hebben. Dit uit te werken, zou mij echter te ver voeren.

§ 36.

In 1866 deed E. Gripon [1]) nog proeven op kwikzilver, door dit met lood te vergelijken, om van oudere, minder bevredigende proeven van Frankenheim niet te gewagen. Gripon had eene zeer dunne looden staaf, die in een omhulsel gedaan werd, hetzij van zeer dun glas, hetzij van zeer dun karton, met goudpapier beplakt. Een volkomen gelijk omhulsel bevatte het kwikzilver. Zijdelings had elk omhulsel vier gaten voor de

1) Sur la conductibilité du mercure pour la chaleur. *Comptes Rendus* LXIII.

kleine thermo-elementen, uit een ijzeren en een koperen draad bestaande. Voor het kwikzilver werden dezen vernist, en tegen het lood werden zij zacht aangedrukt.

De tweede soldeerplaats der staven was, en dit schijnt mij toe eene verbetering op de vorige methoden, in water van bekende, vaste temperatuur gedompeld.

Nu werden de zuiltjes regtop geplaatst, en beiden aan het boveneinde door stoom verwarmd. De wet van de gelijkheid der quotienten $\frac{t_1 + t_3}{t_2}$, $\frac{t_2 + t_4}{t_3}$ werd, als te verwachten was, bij het beter geleidende lood het beste bewaarheid. Op deze wijze, en volgens de gewone methode verkreeg Gripon dat k voor lood gelijk is 2.48 maal k voor kwikzilver.

Met dezelfde staafjes opereerde hij ook nog op de volgende wijze. Op de kwikzuil werd eene thermo-electrische zuil op eene bepaalde plaats gezet, en dan met eene andere de loodstaaf langs gegleden, tot dat de galvanometers denzelfden uitslag vertoonden. De kwadraten van den afstand tusschen warmtebron en zuil, dan op elkander gedeeld gaven als verhoudingsgetal 2.44.

Vervolgens paste Gripon nog de methode van Péclet op kwikzilver toe en kreeg daardoor het verhoudingscijfer 2.30, doch ik aarzel niet, dit getal minder naauwkeurig, dan de beide vorigen te noemen, aangezien de bezwaren der methode grooter zijn. Ik noem dus de overeenstemming al vrij groot.

Volgens dezen proefnemer, zou dus het getal voor kwikzilver, als dat van zilver 1000 is, 35.4 wezen. En dit getal zou ik haast boven dat van Calvert en Johnson verkiezen, aangezien de kwikkolom van dezen de dubbele doorsnede had van die van Gripon (ten minste van de eene) en daarin dus toch nog sterker stroomingen konden ontstaan. Daarentegen is de vraag weder bezwarend voor Gripon, of gelijke uitslagen van het

galvanometer bij lood en kwikzilver wel gelijke temperaturen aangaven, daar de elementen op verschillende wijze met de kolommetjes in aanraking waren. Tevens zou uit deze proeven voor lood een geheel ander cijfer komen, dan de vorigen verkregen, en wordt dus de verwarring nog slechts vermeerderd.

§ 37.

Aan het slot van deze afdeeling, wil ik nog slechts met een woord melding maken van de proeven van G. von Helmersen (1852), Tyndall (53), Gouillaud (55); Jéleznow (56), Hopkens (57) met slecht geleidende stoffen en aardsoorten, zonder er meer van te zeggen, daar ik mij deze stoffen niet ter behandeling voorstelde.

Alleen de proeven van Tyndall [1]) zal ik hier van uitzonderen. Wel deed hij geene proeven op goed geleidende stoffen, maar zijne methode zou, eenigzins gewijzigd, ook daarvoor te gebruiken zijn, waarom ik meen, dat zij hier eene plaats moet vinden. Ik zal alleen het essentiëele aangeven. Een vierkant stuk van de te onderzoeken stof, — bij zijne proeven moest het een teerling zijn. Aan twee tegenoverstaande vlakken wordt er tegen aangedrukt, een klein reservoir met kwikzilver gevuld, aan de zijde der te onderzoeken stof door eene dunne membraam gesloten. In het eene reservoir monden twee draden van eene batterij die eene verwarming teweeg brengt, welke door eene tangentenboussole en een rheostaat, in den keten ingelascht, gedurende eenen tijd, zoolang als men verkiest, het reservoir op eene volmaakt gelijke temperatuur houdt. Deze geleiding wil ik *A* noemen.

---

1) John Tyndall, *Heat a mode of motion.* 4e Ed, London 1870 p. 204.

In het andere reservoir mondt een thermo-element, uit twee stangen Antimonium en Bismuth bestaande, waarvan twee draden naar een gevoelig galvanometer loopen, dat de doorgelaten warmte meten moet. Dezen keten wil ik met *B* kenschetsen.

Om nu de proef te nemen, wordt eerst de naald van *B* op 0 gebragt. Dan wordt, terwijl de keten *B* geopend is, *A* gesloten, dus warmte aan de eene zijde in het te onderzoeken blokje gebragt. Dit duurt een' bepaalden tijd, bij Tyndall 60 seconden. Dan wordt de keten *A* geopend, en *B* gesloten, het galvanometer slaat uit, en de eerste uitslag wordt genoteerd.

Men ziet, de methode heeft veel overeenkomst, in de hoofdzaak, met die van Calvert en Johnson, alleen is hierbij de verwarming door middel van den galvanischen stroom iets geheel nieuws.

De proefneming klinkt vrij eenvoudig. Doch eerstens acht ik ze reeds voor houtsoorten niet voor tegenwerpingen onvatbaar, daar de warmte hier, behalve door de twee membranen, nog door een mica-plaatje gaan moet, en door eene derde membraan, die het Bismuth tegen het kwikzilver beschermt. Zuiver is de methode dus niet. Maar voor stoffen met groot verschil van geleidend vermogen zou zij gewijzigd moeten worden, aangezien daar de uitslagen van het galvanometer in *B* niet meer vergelijkbaar zouden zijn.

Ook moet het doorlaten en afbreken van stroomen op een bepaald oogenblik, en het tegelijk aflezen van den eersten uitslag bezwaar, en reden van onzekerheid geven. Ieder, die dit laatste bij de hand gehad heeft, weet, hoe moeijelijk deze oogenschijnlijk zoo gemakkelijke zaak met juistheid uit te voeren is. Daarvoor is zeker wel een experimentator, zoo fijn als Tyndall, noodig, maar twee waarnemers zouden hiermede al ligt minder moeijelijkheid ondervinden.

Of dus deze methode voor andere stoffen bruikbaar is, durf ik niet te beslissen, en niemand zal er wel meer moeite voor doen, daar in de volgende afdeeling betere methoden volgen.

Ik kan echter niet nalaten, hier het resultaat van Tyndall aan te geven.

De houtsoorten, zonder eenig onderscheid, geleiden in de rigting der vezelen van 2 tot 3 malen beter dan in elke rigting loodregt daarop. Doch hierin zijn nog twee rigtingen te onderscheiden. Eveneens zonder eenige uitzondering, geleiden alle houtsoorten beter in de rigting loodregt op de jaarringen, dan in eene rigting, parallel daarmede (of liever tangentiëel daaraan). Dit is ongeveer in de gemiddelde reden 11 : 13.

Als vergelijkende cijfers kunnen dezen van Tyndall wel als afdoende beschouwd worden. Opmerkelijk is daarbij, dat de geleidingscoëfficiënt in geene verhouding hoogenaamd staat tot de digtheid der houtsoorten. Dit resultaat moet wel in het oog gehouden worden, daar men alligt geneigd zou zijn tot de onderstelling, dat eene zulke verhouding algemeen bestaan moet.

B. NIEUWERE PROEFNEMERS.

§ 38.

Onder dit hoofd breng ik drie reeksen van proeven, van Neumann, Ångstrom en Forbes. Het woord nieuwere is niet geheel toepasselijk, daar die van Forbes reeds in 1831 begonnen zijn, hoewel toen niet met ijver voortgezet. Maar in zooverre zijn zij nieuwer, dat allen volgens verschillende methoden werken, waarvan wij tot nu toe nog geen besef kregen, en

nieuwer, omdat zij nog in geene handboeken staan. Van allen, zonder onderscheid, zijn daartoe ook eerst langere reeksen van waarnemingen zeer wenschelijk.

Allen hebben een doel. Tot nu toe was nooit zuiver de coëfficiënt k gevonden. Steeds nog maar het quotiënt $\frac{k}{h}$. Dan wordt zooveel mogelijk de h bij verschillende stoffen gelijk gemaakt, door oppervlakken van dezelfde stof te maken, door vernis, of door verzilvering. Maar is dit voldoende? Wanneer de theorie van Poisson eens strenger bleek te zijn, dan die van Fourier dan zou men best kunnen vermoeden, dat de lagen metaal die onder de zilverlaag liggen, ook nog naar buiten direct warmte afgeven, waardoor het verschijnsel dan zeer gecompliceerd zou worden. En de zilver-, respective vernis- of papierlaag moet zoo dun zijn, als eenigzins mogelijk is, want anders zou de geleiding vooral bij de dunne staven worden eene, te zamen gesteld uit de geleiding van verschillende stoffen. Verder kunnen door de verzilvering ligt electrische stroomen ontstaan, die vooral bij het gebruik van thermo-zuilen invloed kunnen hebben. Vervolgens moet ik hier iets aanroeren, wat ik niet binnen den kring mijner beschouwing trok. Wordt een staaf onderzocht, die uit verschillende metalen bestaat, aan elkander gesoldeerd, dan heeft men aan de scheidingsvlakte altijd eene onregelmatigheid in de temperatuur waargenomen, die ik wel niet nader wil bespreken, maar die toch van invloed moet wezen. (Proeven hieromtrent van Ångstrom e. a.)

Al deze bezwaren komen op rekening van alle vorige proeven, en het is dus van het hoogste belang dat k en h, de inwendige en uitwendige geleidingscoëfficiënten, onafhankelijk van elkander gevonden worden. Vooral daar de h een ingewikkelde factor blijft, te zamen gesteld uit straling en geleiding in zeer ongelijke mate.

Ik zal de chronologische volgorde niet meer in acht nemen, maar de drie behandelen in de opvolging die mij voor het onderwerp het geschikst voorkomt.

Van F. Neumann [1]) vind ik steeds een enkel kort opstel, onder den titel: *Expériences sur la conductibilité calorifique des solides.* Reeds in 1859 schijnt hij met zijne waarnemingen, hoewel maar voor een gedeelte, begonnen te zijn. Meer dan dit opstel is mij niet bekend, en het is onvoldoende ter beoordeeling, daar er een en ander in is overgelaten aan de phantasie van den lezer.

In dit stuk zet hij eerst zijne methode uit elkander. Het eerste deel wil ik in het oorspronkelijk aanhalen, om later veilig mijne opmerkingen te kunnen maken. Hij zegt: 1°. „Ce n'est „pas l'état stationnaire des températures que j'observe, mais leur „état variable, et ce qui permet de le faire servir à la déter- „mination des pouvoirs conducteurs, c'est la convergence rapide „des séries trigonométriques au moyen desquelles cet état variable „est représenté; on peut se contenter des premiers termes de „cette série dès que le temps a pris des valeurs assez grandes." 2°. De staven worden niet door holten misvormd, daar hij zeer dunne thermo-elementen in de staaf insoldeert, die uit eene ijzeren staaf en eene van nieuw zilver bestaan. Deze inrigting houdt zeker het midden tusschen twee bezwaren: zij onderbreekt de continuiteit van de staaf minder, dan de holten voor de thermometers en meet toch de temperatuur van het binnenste der staaf, maar alle bezwaren zijn klaarblijkelijk ook hierdoor niet opgeheven.

Verder beweert hij, dat van 0° tot 100° C. de intensiteit der stroomen zoo na direct proportioneel is, aan het verschil in temp.

---

1) *Annales de chimie et de physique.* IIIe Serie. Tome LXVI, p. 183 (A°. 1862),

dat men deze wet binnen die grenzen als doorgaande kan aannemen.

En eindelijk veroorlooft zijne methode, tegelijk de waarden van h en k absoluut te vinden.

De staven hadden 3 tot 4 lijnen, — Parijsche lijnen, zijde en de thermo-electrische zuilen (zooals hij zegt: „sondes thermo-électriques") waren op kleine afstanden van de twee uiteinden ingesoldeerd. De draden kwamen te zamen bij een differentiaal-galvanometer, waaraan hij eene bijzondere inrigting gegeven had, door eene spiegelaflezing, zoodat tegelijk de sommen en verschillen der beide opgewekte stroomen gevonden werden.

Een der uiteinden werd dan door eene lamp verwarmd, tot de eindtemperaturen bereikt waren, dan werd de lamp weggenomen en na eenigen tijd begon hij de sommen en verschillen der beide stroomsterkten af te lezen. De naald zelve, die slingeringen van 8 seconden maakte diende als chronometer.

„On voit déjà sans faire le calcul, que les différences de ces „intensités dépendent essentiellement de la conductibilité exté-„rieure et l'analyse conduit en effet à ce résultat, que les rap-„ports des sommes successivement observées s'expriment par une „même constante et les différences successives par une autre „constante. La combinaison des deux constantes donne ensuite „les valeurs absolues des deux pouvoirs conducteurs."

Dit vindt Neumann niet goed, nader uiteen te zetten. Van Rees ontwikkelt het bewijs van dit gezegde op de volgende wijze. Nemen wij in de theorie van Fourier, bij mij § 9 en 10, voor de algemeene differentiaal-vergelijking:

$$\frac{dv}{dt} = k\frac{d^2v}{dx^2} - hv,$$

waarin gezet wordt:

$$v = e^{-ht} u,$$

zoodat, naar 9):

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2},$$

nemen wij hierin, zeg ik, de particuliere integraal:

$$u = ae^{-kq^2t}\cos(qx),$$

dan zijn a en q willekeurige constanten en wij krijgen eene algemeene uitdrukking, door hieraan verschillende waarden te geven en dan te sommeren. Ik zet, als l de afstand der twee zuilen is:

$$q = n\pi,$$

$$n = 0, \; = \frac{1}{l}, \; = \frac{2}{l}, \; = \frac{3}{l} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

en als men dan aan de a indices toevoegt, om verschillende waarden aan te duiden, dan wordt:

$$u = a_0 + a_1 e^{-k\left(\frac{\pi}{l}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$+ a_2 e^{-k\left(\frac{2\pi}{l}\right)^{2t}} \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Dan wordt deze reeks, voor de eerste thermo-zuil, waar men $x = 0$ kan nemen:

$$u_0 = a_0 - a_1 e^{-k\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2t}} + a_2 e^{-k\left(\frac{2\pi}{l}\right)^{2t}} \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

en voor de meest verwijderde zuil, waar $x = l$ is, en dus de $\cos\pi$, $\cos 2\pi\, l$, enz. afwisselend $+1$ en -1 worden:

$$u_1 = a_0 - a_1 e^{-k\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2t}} + a_2 e^{-k\left(\frac{2\pi}{l}\right)^{2t}} \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Neemt men nu dezelfde uitdrukking voor v, dan wordt:

$$\begin{cases} v_0 = a_0 e^{-ht} + a_1 e^{-ht-k\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t} + a_2 e^{-ht-k\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 t} \ldots \\ v_l = a_2 e^{-ht} - a_1 e^{-ht-k\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t} + a_2 e^{-ht-k\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 t} \ldots \end{cases}$$

En verwaarloost men nu alle termen van af den derden inclusive, dan volgt:

$$\begin{cases} \frac{v_0 + v_l}{2} = a_0 e^{-ht} \\ \frac{v_0 - v_l}{2} = a_1 e^{-t\left(h + k\frac{\pi^2}{l^2}\right)}. \end{cases}$$

Dit stemt vrij wel met het gezegde overeen. Maar er zijn vrij groote bezwaren. Ten eerste had Neumann wel zijne eigene ontwikkeling kunnen geven. Ten tweede is het volstrekt niet zoo duidelijk, dat de convergentie van de reeksen zoo snel is, dat men a priori alle latere termen mag verwaarloozen. (Vergelijk Poisson, bij mij § 12, op het laatst.) Wel worden de exponenten klaarblijkelijk kleiner en kleiner, daar zij met 1^2, 2^2, 3^2, ... vermenigvuldigd zijn, maar eerstens, wanneer is $t = 0$, dat N, zoo grifweg zeggen kan: „après que le temps a „pris des valeurs assez grandes." Wanneer zijn deze tijden groot genoeg?

Wel doet dit tot de proef, onder goede omstandigheden niet af. Daarbij worden steeds twee waarnemingen gecombineerd, waardoor de gelijkheid blijkt van de constanten uit den volzin, dien ik in origineel aanhaalde. Wanneer ik namelijk zet:

$$\begin{cases} \frac{v_0 + v_l}{2} = \sigma, \\ \frac{v_0 - v_l}{2} = \varrho, \end{cases}$$

dan is voor twee waarnemingen met dezelfde staaf:

$$\sigma_1 = a_0 e^{-ht}, \qquad \sigma_2 = a_0 e^{-ht^2},$$

$$\varrho_1 = a_1 e^{-t_1\left(h + k\frac{\pi^2}{l^2}\right)}, \qquad \varrho_2 = a_1 e^{-\left(h + k\frac{\pi}{l^2}\right)},$$

en dus:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = e^{-h(t_1 - t_2)},$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = e^{-\left(h + k\frac{\pi^2}{l^2}\right)(t_1 - t_2)};$$

maar bij de kwestie der convergentie is, dunkt mij, dit verwijzen naar groote waarden van t onvoldoende, daar men $t = 0$ kan nemen waar men wil.

Nu is sedert Poisson de theorie, wat deze vraag aangaat, vooruitgebragt. G. Lejeune Dirichlet [1]) bewees het eerst, dat deze reeksen van Fourier steeds convergeren. De vraag blijft dus maar, of de convergentie snel genoeg is, om zooveel te verwaarloozen, als Neumann a priori doet, want er zouden gevallen binnen het bereik der waarneming kunnen liggen, waarin het bedrag der hierdoor veroorzaakte fouten grooter is, dan dat der waarnemingsfouten.

Voor dit geval, is de convergentie op volgende wijze aan te toonen. Analoog met § 10, kan men hier voor den willekeurigen coëfficiënt a_m zetten:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^l dx\, \varphi x \cos qx$$

waarin $q = m\frac{\pi}{l}$, en m een geheel getal is, inclusive de nul. De functie φx is door den aanvangstoestand bepaald. Hiertoe nu helpt ons Neumann, daar hij als aanvangstoestand dien neemt, waarin de staaf verwarmd is volgens de logarithmische wet.

---

1) Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. *Repertorium der Physik.* van Dove en Moser. Band I, 1837.
Het bewijs is ook te vinden in het reeds aangehaalde werk van Riemann.

Dus is:

$$\varphi x = Ae^{-\sqrt{\frac{k}{h}}x} + Be^{\sqrt{\frac{k}{h}}x};$$

wat ik, gemakshalve schrijven wil:

$$\varphi x = Ae^{-rx} + Be^{rx}.$$

Dan is dus:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^l dx\,(Ae^{-rx} + Be^{rx})\cos qx.$$

Zet ik dan verder:

$$D = \int dx e^{rx}\cos qx,$$

dan krijg ik, door tweemalen bij gedeelten te integreren, achtereenvolgens:

$$D = \frac{1}{r}e^{rx}\cos qx + \frac{q}{r}\int dx e^{rx}\sin qx,$$

$$= \frac{1}{r}e^{rx}\cos qx + \frac{q}{r^2}e^{rx}\sin qx - \frac{q^2}{r^2}\int dx e^{rx}\cos qr$$

of, daar de laatste integraal weder $= D$ is:

$$D\left(1 + \frac{q^2}{r^2}\right) = \frac{1}{r}e^{rx}\cos qx + \frac{q}{r^2}e^{rx}\sin qx.$$

Dit geeft ons de volgende waarden voor den coëfficiënt a_m:

$$a_m = -\frac{2}{\pi}A\frac{r}{r^2+q^2}e^{-rx}\left(\cos qx - \frac{q}{r}\sin qx\right)$$

$$+ \frac{2}{\pi}B\frac{r}{r^2+q^2}e^{rx}\left(\cos qx + \frac{q}{2}\sin qx\right).$$

Hierin moeten nu de grenzen ingezet worden, waarbij wat van den sinus afhangt, verdwijnt, want $q = m\frac{\pi}{l}$ zijnde, wordt $qx =$ een veelvoud van π, en dus de sinus evengoed $= 0$, als voor $x = 0$. Wat den sinus aangaat, deze wordt $= \pm 1$ en dus blijft q^2 in den noemer bij a_m. Nu is q achtereensvolgens $= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$, en dus helpen de coëfficiënten a tot de convergentie mede.

Dit geeft echter nog geene maat voor de snelheid der convergentie voor elk geval.

Neumann zou dus klaarblijkelijk beter gedaan hebben, als hij aangetoond had, dat uit zijne proeven duidelijk blijkt, dat binnen de grenzen zijner waarnemingen, zijne veronderstelling juist is. Dit kan de proef aantoonen, want zoodra werkelijk de verhoudingen van twee waarden van $v_0 + v_l$ en $v_0 - v_l$ constant blijken te zijn, is voor die proef, maar ook a priori alleen voor die proef, d. i. voor die temperatuur, voor dat metaal, voor die waarde van t, de onderstelling zonder een zeer geldig mathematisch bewijs aanneembaar.

Verder is er nog eene opmerking te maken tegen de woorden van N., die echter tegen zijne methode geen bezwaar geeft. Hij zegt dat h en k onafhankelijk, de een uit de sommen, de ander uit de verschillen te voorschijn komen, en volgens de formule van van Rees, komt wel h alleen, doch k met h verbonden, waardoor deze wel iets onzekerder kan worden.

Ook heeft N. nog ringen gebruikt, waar de zuilen in twee diametraal tegenovergestelde punten ingesoldeerd waren.

Voor slechte geleiders werd eene iets verschillende methode gebruikt, namelijk ballen van 5 à 6 duim middellijn werden eenvoudig verwarmd, en dan liet hij ze vrij verkoelen. Na een heel of half uur werd dan de temp. in het centrum en aan de oppervlakte gemeten. Deze methode berust op vrij wel gelijke formules.

De resultaten nu van Neumann zijn de volgende getallen:

Koper	1306
Geel koper	356
Zink	362
Nieuw zilver	129
IJzer	193

en voor de slechtere geleiders is $\frac{k}{cD} =$

Steenkool	1.37
Gesmolten zwavel.	1.38
IJs	13.5
Sneeuw.	4.2
Zamengestelde aardsoort . .	10.8
Zandsteen	16.0
Graniet.	12.9
Terpentijn	7.0

De eenheden hierbij zijn de minuut, de parijsche lijn, en de hoeveelheid warmte die noodig is om eene kub. lijn water 1° in temp. te verhoogen. Om dus de eenheden van Péclet te hebben moeten de getallen met 0.0848 vermenigvuldigd worden, en voor de eenheden van Ångström met 0.0509.

Uit het gezegde zal het duidelijk zijn, dat de methode van Neumann zeer goede resultaten kan opleveren, maar met groote voorzorgen gebruikt moet worden.

Het verwondert mij grootelijks, dat deze proeven nog door niemand nader besproken zijn, en Neumann zelf nog niets naders geleverd heeft.

§ 39.

De waarnemingen, die ik nu denk te behandelen, zijn die van den Zweedschen geleerde A. J. Ångström [1]). Deze methode

---

1) Het eerst in *Oefversigt af K. Vet. Acad. Förhändlungen* 1861. Eene eigenhandige vertaling van dit stuk in:

Poggendorf's *Annalen*. Band CXIV. p. 513. onder der titel:
Neue Methode, das Wärmeleitungvermögen der Körper zu bestimmen.

Eene Nachschrift in hetzelfde deel, en een tweede stuk in Poggendorf's *Annalen*. Band CXXIII.

vond hevigen tegenspraak van W. Dumas te Berlijn [1]), die al dadelijk na het verschijnen van Ångström's eerste stuk bedenkingen daartegen opperde, zonder dezen zeer fijn uit te voeren. Å. antwoordt in een tweede stuk, waarna Dumas eene uitvoerige wederlegging instuurt. Dit geschrijf is een nieuw bewijs voor de groote hatelijkheid, waarmede wetenschappelijke strijdvragen kunnen behandeld worden; Å. is o. a. eenmaal zoo beleefd, te zeggen, dat Dumas de theorie van Fourier niet schijnt te kennen, waarmede deze het natuurlijk weder niet eens is. Maar deze felheid heeft dit voordeel, dat daardoor beiden in eene fijnheid van analyse treden, die haar nut heeft, die mij moeite spaart, en eenige deelen der theorie bepaald helderder heeft gemaakt. Ik zou echter te uitvoerig worden, als ik alles aanhaalde, wat de twee bij deze gelegenheid uitwerkten, en ik geef slechts, wat tot de beoordeeling der proeven noodig is. Maar hiertoe zal ik de stukken van beiden beurtelings benutten.

Ångström begint, met het onvoldoende van alle tot nu toe gebruikte methoden van proefneming aan te toonen, waarin ik hem niet volg, om niet in herhaling te vervallen. — De zooeven aangehaalde proeven van Neumann zijn van jongeren datum, hoewel ik ze het eerst behandelde.

De staven van Ångström zijn van kwadratische doorsneden, worden, — dit is het kenmerkende zijner methode, beurtelings verwarmd, en weder afgekoeld. Hierdoor ontstaan als het ware slingeringen, waarvan echter de amplituden, na verloop van tijd, moeten afnemen, door den invloed der zijdelingsche warmte afgifte, en uit hetgeen ik vroeger over de Maxima en Minima van temperatuur zeide, moeten dezen, langs de staaf voortloopende, hoe langer hoe grooter tusschenruimte van tijd tusschen elk op-

1) Poggendorf's *Annalen*. Band CXXIX. p. 272 en eene kleine opmerking in een der vroegere deelen.

eenvolgend Maximum en Minimum aantoonen. De tijd wordt nu afgewacht waarna zich de perioden standvastig vertoonen, waarbij dan de gemiddelde temperatuur voor elk punt eene constante wordt, analoog aan de tot nu toe behandelde eindtoestanden. De formules zal ik straks geven, eerst echter kort de inrigting der proef verder aantoonen.

De verwarming en afkoeling geschiedt daardoor, dat het eene einde der staaf beurtelings met waterdamp, en met water van eene bepaalde temp. omgeven wordt, wat door de eenvoudige omdraaijing van een kraan bewerkt wordt. Het ijzer echter, werd ter afkoeling slechts aan zijne eigene uitstraling in de omgeving overgelaten.

De dikte der kwadratische staven bedroeg 23.75 mm. en op 50 mm. afstand onderling waren gaten van 2.25 mm. middellijn, die de thermometers inhielden. Å. beschouwt namelijk dezen als beter dan thermo-elementen, aangezien daarbij zeer dunne staven noodig zijn (zie weder Neumann), die Å. als minder voordeelig beschouwt. Verder beschouwt Å. de storingen door den overgang tusschen staaf en zuil bewerkt als minstens even nadeelig als de storingen door de gaten veroorzaakt.

De vier thermometers van Å. hadden cylindrische vaten, van 1.5 mm. tot 2 mm. dikte, en 15 mm. lengte. De schalen waren willekeurig doch vooraf door afzonderlijke proeven zorgvuldig vergeleken. De getallen hiervoor worden opgegeven.

De aflezing geschiedde met kijkers, om de staaf niet te zeer te naderen, de thermometers werden gedurende de proef zooveel mogelijk omgewisseld, om de fouten der schalen, de verschillen in het glas, in de massa, in den vorm der thermometers, zoo goed mogelijk te elimineren. Daar de Heer Thalén bij de proefneming behulpzaam was, werden ook, om de persoonlijke fouten te verminderen, de waarnemingen bij afwisseling gedaan.

Verder werd steeds gewacht tot dat de perioden volkomen constant geworden waren, dan werden er telkens twee tot vijf waargenomen, en het midden daaruit voor de berekening gebruikt.

Nu geeft Å. zonder nadere uitlegging eene formule, die niet zoo zeer helder is, en waarin zelfs grove fouten ingeslopen zijn, die ik hierin verbeter, die echter mogelijk drukfouten zijn. Ik zal ze daarom niet uitdrukkelijk aantoonen. De algemeene differentiaalvergelijking is:

$$\frac{dv}{dt} = k\,\frac{d^2v}{dx^2} - hv.$$

Ik breng echter nogmaals in herinnering, dat eigenlijk

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{k}{c\delta}, \\ h &= \frac{hp}{c\delta w}, \end{aligned}\right\}$$

is, waarin δ en c de digtheid en specifieke warmte, p de zijde van de kwadratische doorsnede, en w het oppervlak der doorsnede zijn. Evenals in de theorie van Fourier, laat ik dezen echter kortheidshalve weg. Nu geeft Å. voor de integraal in den eindtoestand:

$$\begin{aligned} v = me^{-\sqrt{\frac{h}{k}}\,x} &+ ae^{-gx}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - g'x + \beta\right) \\ &+ be^{-g\sqrt{2}\,x}\sin\left(\frac{4\pi t}{\tau} - g'\sqrt{2}\,x + \beta'\right) \\ &+ ce^{-g\sqrt{3}\,x}\sin\left(\frac{6\pi t}{\tau} - g'\sqrt{3}\,x + \beta''\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

waarin g en g' de waarden hebben:

$$g = \sqrt{\sqrt{\frac{\pi^2}{k^2\tau^2} + \frac{h}{4k^2}} + \frac{h}{2k}},$$

$$g' = \sqrt{\sqrt{\frac{\pi^2}{k^2\tau^2} + \frac{h^2}{4k^2}} - \frac{h}{2k}}.$$

Hierin is τ de duur eener periode. Deze formule is niet bepaald klaarblijkelijk, echter toont Dumas er den oorsprong van aan.

Aan het verwarmde uiteinde, waar $x = 0$ is, moet de temp. eene periodische functie van den tijd t wezen als eenige variabele. Dit kan algemeen voorgesteld worden door:

$$v = A_0 + 2A_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha_1\right) + 2A_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{\tau} + \alpha_2\right) + \ldots.$$

Om deze formule nu voor elke waarde van x dienstbaar te maken, heeft men slechts voor de willekeurige constanten A en α passende functiën van x te kiezen die voor $x = 0$ constanten worden. Nu is eene particuliere integraal van de differentiaal-vergelijking:

$$v = e^{t\tau + x\xi},$$

waarbij τ en ξ moeten voldoen aan:

$$\tau = k\xi^2 - h.$$

Wanneer men dus voor τ en ξ de volgende waarden invoert:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{2n\,i\pi}{\tau}, \\ \xi &= \pm(\lambda_n + i\mu_n), \end{aligned}\right\}$$

waarin $i = \sqrt{-1}$ beteekent, dan moeten dezen voldoen aan:

$$\frac{2n\,i\pi}{\tau} = k(\lambda_n^2 - \mu_n^2 + 2\lambda_n\mu_n i) - h,$$

of, wanneer men de reëlen en imaginairen van elkander scheidt:

$$\lambda_n^2 - \mu_n^2 = h, \qquad \lambda_n\,\mu_n = \frac{n\pi}{k\tau}.$$

De grootheden g en g', die Ångström gebruikt, zijn λ_n en μ_n, uit bovenstaande vergelijkingen opgelost.

Nu kunnen wij als algemeene integraal gebruiken de formule:

$$v = B_0\, e^{-\sqrt{\frac{h}{k}}\, x} + 2B_1\, e^{-\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \mu_1 x + \beta_1\right)$$

$$+ 2B_2\, e^{-\lambda_2 x} \sin\left(\frac{4\pi t}{\tau} - \mu_2 x + \beta_2\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ C_0\, e^{\sqrt{\frac{h}{k}}\, x} + 2C_1\, e^{+\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu_1 x + \gamma_1\right)$$

$$+ 2C_2\, e^{+\lambda_2 x} \sin\left(\frac{4\pi t}{\tau} + \mu_2 x + \gamma_2\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Deze waarde voor v voldoet aan den eisch, van voor $x = 0$ de algemeene periodische functie voor te stellen, die voorop gesteld werd. Men ziet, dat de formule van Å. slechts uit eene helft van deze bestaat, wat echter wel op de algemeenheid zijner formule, niet op zijne proef grooten invloed heeft, zooals blijken zal.

Nu wil ik aantoonen, hoe deze formule gebruikt wordt. Zij de periode $\tau = 24^m$, dat wil zeggen: de stang wordt aan het eene uiteinde 12 min. lang verwarmd en 12 afgekoeld, en dit voortgezet, tot dat de veranderingen over de geheele lengte der staaf regelmatig geworden zijn. Wordt nu van minuut tot minuut de temp. waargenomen van een willekeurig punt der staaf, waar $x = 0$ kan genomen worden, dan zal, voor dat punt wezen, als n telkens het verloopen aantal minuten voorstelt:

$$v_n = m_1 + A_1 \sin(15^\circ\, n + \beta) + B_1 \sin(30^\circ\, n + \beta')$$
$$+ C_1 \sin(45^\circ\, n + \beta'') + \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

voor een tweede punt daarentegen, waarbij $x = l$ moge zijn, zal eene diergelijke reeks gelden:

$$u_n = m_2 + A_2 \sin(15^\circ\, n + \beta_1) + B_2 \sin(30^\circ\, n + \beta_1')$$
$$+ C_2 \sin(45^\circ\, n + \beta_1'') + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

In deze twee reeksen voor v_n zijn de constanten m, A..., β..., verschillend, doch staan tot elkander in eene verhouding, die door de algemeene reeks wordt aangegeven. Ik merk op, dat in de tweede reeks de waarde van $g'x$, die hier telkens constant $= g'l$ is, in β_1 is binnengebragt. De betrekking nu tusschen de constanten is:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{gl}, \qquad \beta - \beta' = g'l,$$

en als men hiervoor zet:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\alpha}, \qquad \beta - \beta' = \alpha',$$

en dus:

$$\alpha\alpha' = gg'l,$$

of, als men de waarden van g en g' inzet (of λ en μ):

$$\alpha\alpha' = \frac{\pi l^2}{k\tau}.$$

Dit is het resultaat, dat Ångström voor zijne waarnemingen gebruikt. Men ziet, dat hier nog alleen de coëfficiënt der inwendige geleiding k voorkomt, en het doel dus bereikt is. Hiervoor zouden nog andere uitvloeisels derzelfde theorie kunnen gebruikt worden, die echter minder doelmatig schijnen te zijn. De geheele waarde van k wordt nu, als wij $c\delta$ weder invoeren:

$$k = c\delta\,\frac{\pi l^2}{\alpha\alpha'\tau}.$$

§ 40.

Het is hier de plaats, om eene gewigtige aanmerking van Dumas in te lasschen. — Ik zeg gewigtig, daar zij een geheel nieuw gedeelte aan de theorie toevoegt, namelijk den invloed der beide eindvlakken der stang zoodra deze niet oneindig lang

is. Het gewigt van de tegenwerping, wat deze bepaalde proef betreft, zal tevens daarbij blijken.

Van de reeks van Dumas gebruikt Ångström alleen dat gedeelte, waar de index $n = 1$ is, want hij neemt van de reeks slechts den eersten term, die A en β bevat. Wel zegt hij, dat hij ook B en β' zou kunnen gebruiken, en toont zelfs bij een paar proeven met cijfers aan, dat de overeenstemming groot is, maar dit heeft zeer weinig waarde, en daar bij elken term $e^{-g\sqrt{n}\,x}$ als factor voorkomt, is elke term steeds kleiner dan zijn' voorganger.

Ik zou hier eene zelfde uitweiding over convergentie kunnen geven als bij Neumann, doch die zou ook hier tot het resultaat voeren, dat in vele gevallen Å. geregtigd is in zijne verwaarloozing. Dumas komt echter later hierop terug. Voorloopig echter volgt hij Å., en laat dus den index n geheel weg. Daar verder de aanvangstemperatuur volkomen willekeurig is, kunnen wij de constante $A_1 = 1$ zetten voor de waarde A, in het punt $x = 0$, wat D. schrijft $A_1^0 = 1$ en eveneens neemt hij $\alpha_1^0 = 0$ zoodat in het punt $x = 0$, wordt: $v = 2 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$. Daaruit volgt dan voor het punt $x = 0$ wanneer wij weder de algemeenere reeks van Dumas nemen:

$$v = 2B\left(\sin \frac{2\pi t}{\tau} \cos \beta + \cos \frac{2\pi t}{\tau} \sin \beta\right)$$
$$+ 2C\left(\sin \frac{2\pi t}{\tau} \cos \gamma + \cos \frac{2\pi t}{\tau} \sin \gamma\right),$$
$$= 2 \sin \frac{2\pi t}{\tau} (B \cos \beta + C \cos \gamma)$$
$$+ 2 \cos \frac{2\pi t}{\tau} (B \sin \beta + C \sin \gamma).$$

Hierin is nu weder volgens het bovenstaande $2 \sin \frac{2\pi t}{\tau} = v$,

en dit kan slechts, daar t willekeurig is, en dus $2 \cos \frac{2\pi t}{\tau}$ alle mogelijke waarden kan hebben, wanneer afzonderlijk:

$$\left.\begin{aligned} B \sin \beta + C \sin \gamma &= 0 \\ B \cos \beta + C \cos \gamma &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Nu zijn echter tot de bepaling van B, C, β en γ vier vergelijkingen noodig, en twee ontbreken dus nog. Hier komen wij tot het hoofdpunt. Ångström gebruikt de helft der reeks, heeft dus slechts B en β, als het ware, en C en γ niet, en volstaat dus met twee vergelijkingen. Dumas echter zoekt de twee overige vergelijkingen uit de formulen, voor wat aan de beide einddoorsneden gebeurt, wat tot nu toe nooit opgemerkt was. Aan het einde moge $x = z$ zijn, dan zal daar de uitvloeijende warmte zijn:

$$\frac{dv}{dx} = \varkappa v,$$

waarin $\varkappa$ eene constante is, van den aard der stof afhankelijk. Is ϱh de uitwendige geleidingscoëfficiënt aan deze vlakken, dan kan ϱ aanmerkelijke waarden hebben, bv. volgens Leslie van 8.3 tot 0.12 bij houten. Nemen wij echter homogene ligchamen, waar $\varrho = 1$ zal zijn, d. i. aan alle zijden uitstraling en geleiding naar buiten dezelfde.

Nu voert Dumas twee grootheden η en ϑ in, zoodanig dat,

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \varkappa &= M \cos \eta, & \lambda + \varkappa &= N \cos \vartheta, \\ \mu &= M \sin \eta, & \mu &= N \sin \vartheta; \end{aligned}\right\}$$

dan is, voor het uiteinde $x = z$; door eenvoudige differentiëring:

$$\left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=z} = -2B\lambda e^{-\lambda z} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \mu z + \beta\right) -$$

$$2B\mu\, e^{-\lambda z} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \mu z + \beta\right)$$

$$+ 2C\lambda e^{+\lambda z} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z + \gamma\right) + 2B\mu\, e^{-\lambda z} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z + \gamma\right).$$

Daarentegen is:

$$\varkappa v = 2B\varkappa\, e^{-\lambda z} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \mu z + \beta\right)$$
$$+ 2C\varkappa\, e^{+\lambda z} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z + \beta\right).$$

En vergelijkt men deze beide waarden en voert daarbij M, N, η en ϑ in, dan komt, waarbij ik een oogenblik de factoren $e^{-\lambda z}$ en $e^{+\lambda z}$ weglaat:

$$0 = -2BM\left\{\cos\eta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \mu z + \beta\right)\right\} -$$
$$2BM\left\{\sin\eta \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \mu z + \beta\right)\right\}$$
$$+ 2CN\left\{\cos\vartheta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z + \gamma\right)\right\} +$$
$$2CN\left\{\sin\vartheta \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z + \gamma\right)\right\},$$

$$= BM \sin\left(-\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z - \beta - \eta\right) + CN \sin\left(+\frac{2\pi t}{\tau} + \mu z + \vartheta + \gamma\right)$$

$$= BM\left\{\begin{matrix}\sin(\mu z - \beta - \eta)\cos\frac{2\pi t}{\tau} \\ -\cos(\mu z - \beta - \eta)\sin\frac{2\pi t}{\tau}\end{matrix}\right\} + CN\left\{\begin{matrix}\sin(\mu z + \vartheta + \gamma)\cos\frac{2\pi t}{\tau} \\ +\cos(\mu z + \vartheta + \gamma)\sin\frac{2\pi t}{\tau}\end{matrix}\right\}.$$

Dit nu kan slechts plaats vinden, wanneer, — en hier neem ik de weggelaten factoren weder op:

$$\left.\begin{matrix} BMe^{-\lambda z}\sin(\mu z - \beta - \eta) + CNe^{\lambda z}\sin(\mu z + \gamma + \vartheta) = 0 \\ BMe^{-\lambda z}\cos(\mu z - \beta - \eta) - CNe^{\lambda z}\cos(\mu z + \gamma + \vartheta) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{C}{B} = \frac{M}{N}\, e^{-2\lambda z},$$

$$2\mu z + \gamma - \beta + \vartheta - \eta = 0,$$

of indien hier nog ingevoerd wordt:

$$\left.\begin{aligned} \eta - \vartheta &= 2\psi \\ lg\frac{N}{M} &= 2\varphi \end{aligned}\right\},$$

of wel:

$$\left.\begin{aligned} tg\,2\psi &= \frac{2\varkappa\mu}{\lambda^2+\mu^2-\varkappa^2} \\ tg\,2\varphi &= \frac{2\varkappa\lambda}{\lambda^2+\mu^2+\varkappa^2} \end{aligned}\right\},$$

dan komen nog de twee volgende vergelijkingen voor B, C, β en γ:

$$\frac{C}{B} = e^{-2\lambda z - 2\varphi},$$

$$\beta - \gamma = 2\mu z - 2\psi.$$

De absolute bepaling dezer vier constanten is hier niet noodig, wij kunnen volstaan met hunne betrekkingen. Vergelijken wij de hier te gronde gelegde reeks van Dumas met de reeks, die wij voor het algemeene geval van periodiciteit gaven, dan blijkt:

1) $A \sin\alpha = B e^{-\lambda x} \sin(\beta - \mu x) + C e^{\lambda x} \sin(\gamma + \mu x)$,

2) $A \cos\alpha = B e^{-\lambda x} \cos(\beta - \mu x) + C e^{\lambda x} \cos(\gamma + \mu x)$.

Hieruit volgt:

$$A^2 = B^2 e^{-2\lambda x} + 2BC\cos(\beta - \gamma - 2\mu x) + C^2 e^{2\lambda x},$$

en nemen wij 1) vermenigvuldigd met $\cos(\beta - \mu x)$ en 2) met $\sin(\beta - \mu x)$ en tellen deze beiden te zamen op, dan is:

$$A \sin(\alpha - \beta + \mu x) =$$

$$= C e^{\lambda x}\{\sin(\gamma + \mu x)\cos(\beta - \mu x) - \cos(\gamma + \mu x)\sin(\beta - \mu x)\},$$

daarentegen 1) met denzelfden sin en 2) met den cos vermenigvuldigd en dit opgeteld:

$$A \cos(\alpha - \beta + \mu x) =$$

$$= B e^{-\lambda x} + C e^{\lambda x}\{\cos(\gamma + \mu x)\cos(\beta - \mu x) - \sin(\gamma + \mu x)\sin(\beta - \mu x)\}.$$

Dezen in elkander gedeeld geven:

$$lg\,(\alpha - \beta + \mu x) = -\frac{C e^{\lambda x} \sin(\beta - \gamma - 2\mu x)}{B e^{-\lambda x} + C e^{\lambda x} \cos(\beta - \gamma - 2\mu x)}.$$

Worden hierin nu de, zooeven gevonden, waarden voor $\frac{C}{B}$ en voor $(\beta - \gamma)$ ingezet, en zetten wij nog ter afkorting:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} lg \left\{ 1 + 2e^{-2\lambda(z-x) - 2\varphi} \cos\left(2\mu(z-x) - 2\psi\right) + e^{-4\lambda(z-x) - 4\varphi} \right\},$$

$$\Psi(x) = \text{arc}\, lg \frac{e^{-2\lambda(z-x) - 2\varphi} \sin\left(2\mu(z-x) - 2\psi\right)}{1 + e^{-2\lambda(z-x) - 2\varphi} \cos\left(\mu(z - 2x) - 2\psi\right)},$$

dan worden:

$$lg\, A = lg\, B - \lambda(x) + \Phi(x),$$

$$a = \beta - \mu x - \Psi(x).$$

Nu zijn het juist deze $lg\, A$ en α, die Ångström voor verschillende punten zijner staaf vergelijkt, zonder Φ en Ψ in aanmerking te nemen, die van de uitstraling aan het einde afhangen. Hier reeds zij opgemerkt, dat niettegenstaande de theoretische waarde van de ontwikkeling van Dumas, deze zelf reeds zegt, dat de vormen dezer functiën te ingewikkeld zijn, om met vrucht gebruikt te kunnen worden, om de proeven te controleren. Dit vereischt ontzaggelijke berekeningen. Ik kom later nog eenmaal op dit punt terug.

Tot zoover het zuiver theoretische gedeelte van deze Methode. Ik laat een en ander over de waarnemingen zelven volgen, en daarna nog aanmerkingen van Dumas. In de annalen vindt men de waarnemingen en de berekening daarvan zeer uitvoerig medegedeeld. Hier alleen het wezenlijke van de uitkomsten.

Ångström deed eerst twee reeksen van proeven, eene op een koperen staaf, waarbij 4 stel eene periode van 24, een van

12, en twee eene periode van 16 minuten hadden; en eene reeks van waarnemingen met eene ijzeren staaf bij eene periode van 16 minuten. Å. heeft hier echter nog de fijnheid, tusschen sterretijd en middelbaren tijd te onderscheiden, en daarvoor kleine correctiën aan te brengen.

Bij elke waarneming werden twee thermometers afgelezen, daarvoor $f = e^{\alpha}$ berekend of wel $\alpha = lg\ f$ benevens de $\Delta\ \beta = \beta - \beta^1 = \alpha^1$ waarbij telkens voor twee onbekenden, $f = \frac{A^1}{A^2}$ en $\Delta\ \beta$ twee vergelijkingen zijn, namelijk de twee temperaturen. Daarbij wordt echter alles na den tweeden term verwaarloosd. (Zie de aanmerking van Dumas sub 2.) Zoo vindt hij eene gemiddelde temp. van 50° C.

	k	$c\delta$
Koper. . . .	54.62	0.84476
IJzer	9.77	0.88620

De getallen van Péclet zijn hier 11.4 en 4.35, en men zal wel niet aarzelen aan die van Ångström de voorkeur te geven, niettegenstaande de niet ongegronde tegenwerpingen van Dumas, waarvan velen trouwens tot nu toe tegen alle waarnemers geldig zijn, zooals later blijken zal.

De eenheden van Ångström zijn de centimeter, de seconde, en de hoeveelheid warmte, die noodig is om een gram water 1° in temp. te verhoogen. Bij Neumann vindt men vergelijkende cijfers voor andere eenheden.

Verder prijst Å. nog zijne methode aan, door uit twee zijner reeksen voor koper k niet alleen uit den eersten term der reeks, maar ook uit den tweeden en ook uit den derden te berekenen en vindt hier „eine Uebereinstimmung so grosz wie man sie nur „wünschen kann".

Eindelijk geeft Å. nog de cijfers mede voor een paar aardsoor-

ten, waartoe hij zijne uitnemende waarnemingen der aardtemperaturen in Upsala gebruikte.

§ 41.

Uit de volgende tegenwerpingen van Dumas vloeit een oordeel over deze proeven van zelf voort.

1. Dumas begint met en naar de methode der kleinste kwadraten voor de koperen staaf van Å. de waarden van $\sqrt{\frac{h}{k}}$, A en B te berekenen, voor de formule der constante temperaturen

$$v = A e^{-\sqrt{\frac{h}{k}} x} + B e^{\sqrt{\frac{h}{k}} x},$$

en komt dan tot het besluit, dat voor geen een der zes thermometerplaatsen de staaf lang genoeg is, om het lid, met B vermenigvuldigd, tegenover het andere te mogen verwaarloozen, zoo als Å. a priori doet, door slechts een gedeelte van de reeks te nemen. Er is dus geen voldoend bewijs, dat de functiën Φ en Ψ mogen $= 0$ genomen worden.

Hierop nu antwoordt Å. in zijne reeds aangehaalde „Nachschrift". Hij deed namelijk eene nieuwe reeks proeven, met eene veel langere staaf van 1180 mm. lang en 35 mm. dik, en vindt dan, bij eene middentemperatuur van 38.2°, als gemiddelde waarde voor koper $\frac{k}{c\delta} = 65.96$. Als hij dan aanneemt, wat mij van zeer twijfelachtige waarheid schijnt te zijn, dat de afname van k met de temp. dezelfde is voor warmte, als die van de geleiding voor electriciteit, dan is dit, voor eene middentemperatuur van 51°.3 C., wat bij de vorige proeven de juiste schijnt te wezen:

$$\frac{k}{c\delta} = 64.66$$

$$k = 54.62$$

Deze overeenstemming is groot, maar schijnt mij toe, niet van toeval vrij te pleiten te zijn.

Nu gaat Dumas aan het werk, en berekent werkelijk zijne beide functiën voor verschillende waarden van x, en vindt dan een kleinen nog bemerkbaren invloed op de proeven Å, doch niet zoo groot, of door de latere proeven met langere staven is de hierdoor ontstaande fout, ten minste in groote mate, verminderd, zoo al niet opgeheven.

De verdere tegenwerpingen van Dumas en de antwoorden daarop zijn met eene uitvoerigheid bewerkt, die voor mijn doel te groot is, ik wil ze echter nog aangeven, daar velen niet zonder waarde zijn.

2°. Dumas toont aan, dat de convergentie der hier voor v gebruikte reeks zeer langzaam is, veel te langzaam, dan dat de bewering van Å. gewigt zou hebben, omtrent de overeenstemming tusschen de waarden van k, die hij uit drie verschillende termen berekent. Echter hecht D. toch eenige waarde aan den toets aan de waarneming van de zoo verkregen coëfficiënten. Daar Å. zelf slechts voor twee van zijne negen reeksen de latere termen aan de berekening onderwerpt, schijnt hij zelf er geene groote waarde aan te hechten. Of waren de uitkomsten bij de zeven anderen misschien niet zoo verrassend fraai?

3°. Ångström heeft ook nog direct de relatieve waarde $k : k'$ voor koper en ijzer onderzocht. Als gemiddeld uit zes waarnemingen krijgt hij hier $k : k_1 = 5.65$ terwijl de verhouding der vorige getallen 5.59 is.

Dit heeft geene waarde hoegenaamd. Hij gebruikt zes thermometers, leest er telkens 3 af, waarvan de onderlinge afstanden 5 centim. zijn. Hij gebruikt dan in den loop der berekening eene waarde $q = \left(v_{x+5} + v_{x-5}\right) v_x$. Hiervoor verkrijgt hij dus

vier verschillende waarden en die zijn achtereenvolgens, gelijk Dumas aantoont:

51, 114, 19, 109.

Men ziet, dat zulke cijfers voor de berekening van eene gemiddelde waarde volstrekt geene waarde bezitten. Had Å. dan ook van zijne zes waarnemingen de laatste weggelaten, dan zou hij, in plaats van het fraaije cijfer 5.65 gevonden hebben 7.1 en had hij de eerste waarneming weggelaten: 5.1. Dit gedeelte had Å dus beter gedaan, maar met stilzwijgen te behandelen.

4°. In band CXXIII van Poggendorf komt Å. nogmaals op de aanmerking sub 2° vermeld terug, daar hij de drie waarden van k, uit de drie eerste termen der reeks voor v, naar eene verkeerde formule berekend had, en geeft eene betere berekening. Intusschen toont D. aan, dat ook hier de overeenstemming niet zoo schitterend is, ja dat zelfs een der getallen van Å. tot eene negatieve uitstraling zou doen moeten besluiten. Of hier rekenfouten in het spel zijn, durft D. niet beslissen.

5°. Zijn de beiden het zeer oneens over het bedrag der waarnemingsfouten. Daar dit echter tot de methode weinig afdoet, zal ik daarin hier niet treden.

6°. Ångström geeft k telkens op voor eene zekere middentemperatuur, die niet verder omschreven wordt. Nu gebruikt hij zeer groote verschillen van temp., en wat kan daar de waarde van eene middentemp. wezen? Å. zelf neemt gladweg aan, dat k met de temp. veranderlijk is, en brengt nu correctiën aan volgens vrij fantastische regelen. Hij reduceert eenvoudig k, door eene lineaire vergelijking tusschen k en de temp. w aan te nemen.

$$k = k_0 \left(1 + \frac{k'' - k'}{k''w'' - k'w'} w\right)$$

terwijl reeds Poisson aantoont, dat deze wet gecompliceerder

moet wezen. Intusschen gelooft Forbes, dat, voor kleine temperatuurverschillen, deze eenvoudige formule voldoende is. Maar wij hebben hier met geene kleine verschillen te doen, en wat Å. onder zijne middentemp. verstaat, blijft twijfelachtig.

7°. Neemt Å. aan, dat $c\delta$ constant is. Het is waar, dat bij verhooging van temp. δ afneemt, daarentegen c toeneemt. Maar dit is volstrekt niet in dezelfde mate, zoeals uit volgende tabel blijkt:

	Koper.	IJzer.
Lineaire uitzetting bij 1° C.	0.000018	0.000012
Vermeerdering van δ . .	— 0.000054	— 0.000036
Vermindering van c . .	+ 0.00051	+ 0.00135

Het laatste cijfer is naar Bède. Maar al bleef het product $c\delta$ constant, dan nog verandert, met de lineaire uitzetting, de perimeter, de doorsnede, en de onderlinge ligging der thermometers. Dan komt c slechts in een deel der formule als factor.

Door al deze oorzaken ziet Dumas zelfs de mogelijkheid in, dat de veranderingen van k met de temp. wel eens geen bewijs van zijne eigene veranderlijkheid zou kunnen wezen, maar alleen van deze oorzaken zou kunnen afhangen. (Zie de proeven van Forbes, die volgen).

Men ziet de tegenwerpingen zijn gewigtig, maar eenigen zijn tegen alle methoden geldig, zonder onderscheid, zouden echter ten minste ten deele wel in rekening te brengen zijn.

Åugström zelf heeft de kenmerkende voordeelen van zijne methode opgesomd. Deze zijn vijf, maar twee daarvan komen mij slechts voor, vermelding noodig te hebben, daar de overigen ook op andere methoden zouden kunnen passen. 1° dat men onafhankelijk is van eene bepaalde thermometerschaal, en dus ontheven van de uiterst moeijelijke kwestie, verschillende thermometers te vergelijken en 2° dat men onafhankelijk is van de

temp. der omgevende lucht. Dit laatste had hij wel iets nader mogen bewijzen.

Het oordeel over deze proeven moet dunkt mij het volgende zijn.

De tegenwerpingen van Dumas zijn volstrekt niet ongegrond, maar ten deele meer spitsvondig, dan van grooten invloed op de uitkomsten. De proeven zelven zijn echter volstrekt nog niet met alle mogelijke zorgvuldigheid gedaan, noch berekend, om, zooveel mogelijk, de uitwerking van al deze fouten tot een klein bedrag te reduceeren. De proeven zouden eerst met meer metalen moeten genomen worden, en zooveel mogelijk de relatieve coëfficiënten tevens gezocht worden, om geloof aan de cijfers te geven.

Maar tevens is de methode zeker de meest zamengestelde van allen, en zoodra er keus is, tusschen eene meer- en eene min gecompliceerde proefneming, zal de laatste wel verkieselijk zijn, daar de bron van fouten en van waarneming en van berekening daar minder rijkelijk vloeit.

§ 42.

Hiermede ben ik genaderd tot de laatste en zeker niet de minst belangrijke reeks proeven, die van den helaas, reeds overleden Professor Forbes [1]). Reeds in 1831 en 32 begonnen, kwam er eerst in 52 een kort stukje van in het licht. Eerst in 62 komt er een meer uitgebreid verslag en eenige cijfers [2]).

In 1865 verschenen eerst nadere berichten, die alles tot

---

1) *Fortschritte der Physik.* voor 1852. Tevens in het *Athenaeum* en het *Institut* voor 1852.

2) Experimental inquiry into the laws of the conductability of heat in bars, and into the conducting power of wrought iron. *Edinburgh Transactions* XXIII. *Ed. Journal* XIV. *Proceedings* of *Ed Society* IV. *Cosmos* XXI.

Verder een niet volkomen goed uittreksel in de *Fortschritte* voor 1862.

een voldoend geheel maken. Echter beschouwt Forbes zelf de zaak nog lang niet als uitgeput, en deze proeven nog slechts als een voorlooper van meer volledigen.

De proeven van 31 en 32 werden met Fourier's contactthermometer gedaan, alleen om de volgorde der metalen te bepalen, doch leidden tot geen voldoend resultaat. Echter schijnt Forbes door die proeven tot het besluit gekomen te zijn, waarvan hij later een weinig terugkwam, dat de reeksen van de geleidbaarheid voor warmte en voor electriciteit identisch zijn. In 64 neemt hij ten minste de woorden van Wiedemann daaromtrent over.

Dan lag echter de vraag voor de hand, die reeds vroeger ter loops in dit werkje ter sprake kwam, of, evenals dit voor de electriciteit het geval is, ook voor de warmte k afneemt, al naar de temp. hooger wordt (m. a. w. het ligchaam minder digt wordt, vergelijk de gewalste en gegoten metalen) en in welke mate.

Hiermede is dan ook het hoofddoel van de proeven van Forbes aangegeven; doch daar zijne methode even goed te gebruiken is, om eenvoudig de k voor verschillende stoffen te vergelijken, heeft zij en dubbel nut, en bespreek ik haar nu bepaald, volgens het gezegde: „last not least".

In een' brief van 1850 aan Kendall en Airy [1]), geeft Forbes het eerst zijn plan aan. Hij begint met te constateren — waarover zoo lang getwist werd, dat de logarithmische wet alleen doorgaat, wanneer men aanneemt: 1° dat de warmteuitwisseling binnen in den staaf evenredig is aan de temp. verschillen, m. a. w. dat k van de temp. onafhankelijk is, en 2° dat de geleiding (resp. uitstraling) naar buiten eveneens evenredig is aan het verschil in temp. tusschen het ligchaam en de omgeving.

---

1) *Report* for 1852. *Berliner Berichte* 1852.

Beide veronderstellingen nu zijn onwaar, en de temperaturen graphisch opgeteekend geven dan ook slechts ten naaste bij eene logarithmische kromme.

De proef van Forbes valt in twee afdeelingen uiteen, waartoe twee staven van volkomen gelijk metaal noodig zijn, wat geen klein bezwaar is, vooral bij de gewoonlijk in den handel voorkomende zeer onzuivere metalen.

Het eerste gedeelte is het zoogenaamde „Statical Experiment". Hiervoor wordt eene staaf van voldoende lengte, om als oneindig te kunnen worden aangenomen aan eene zijde verhit, op eene willekeurige doch standvastige temp., bij Forbes toch boven 200°. Nu wordt de eindtoestand afgewacht. Dan wordt de temp. afgelezen voor verschillende punten, waarvan de abscissen x bekend zijn, hoewel deze aan geene bepaalde verhouding gebonden zijn. Hoe dit geschiedt, bespreek ik later.

Nu kom ik tot eene eigendommelijkheid van deze methode. Graphisch worden de x als abscissen opgeteekend, voor elke x de temp. v opgedragen, daardoor eene kromme lijn gelegd, en van deze kromme wordt voor zooveel punten als noodig is, de $\frac{dv}{dx}$ gezocht (hetzij uit de figuur, hetzij door berekening). De verslaggever in de Fortschritte is hier geleerd, en brengt integralen te pas, die Forbes niet gebruikt. Ik kan niemand aanraden, zich hierdoor op het dwaalspoor te laten brengen

Nu heeft men dus voor deze staaf voor elk punt x, v en $\frac{dv}{dx}$.

Het tweede deel der proef bestaat in het zoogenaamde „Dynamical experiment." Eene staaf van volkomen hetzelfde metaal, en van dezelfde doorsnede, doch die slechts kort behoeft te zijn, wordt evenzoo verwarmd, in zijn geheel, door in een bad gedompeld te worden, van eene nog hoogere temperatuur, dan die van de eerste staaf. De tweede staaf nu wordt aan zich zelve

overgelaten, en zal, afkoelende al de temperaturen v van de andere staaf doorloopen; hierbij wordt nu echter de tijd opgeteekend. In eene tweede kromme nu, worden de tijden t als abscissen genomen, de daarbij behoorende v als ordinaten, en en hiervoor de $\frac{dv}{dt}$ gezocht. Nu heeft men voor elke willekeurige x uit de eerste kromme v en $\frac{dv}{dx}$, en uit de tweede $\frac{dv}{dt}$ voor dezelfde waarde van v, dus wil men, $\frac{dv}{dx}$ en $\frac{dv}{dt}$ als functiën van x.

Men ziet, hier wordt stilzwijgend aangenomen, dat voor twee punten met dezelfde oogenblikkelijke temp. v op de twee staven genomen, die op verschillende wijze verwarmd zijn, de afgifte naar buiten dezelfde zal wezen. Dit is een punt, waaromtrent twijfel geoorloofd is. Neemt men een punt in de omgeving, onmiddelijk boven het punt, waar de temp. v is. Dit nu ontvangt zijne warmte niet alleen van dit punt, maar ook van alle omliggende punten. En dezen nu hebben in de eene staaf allen de zelfde temp. v, in de andere echter hoogere en lagere temperaturen. De vraag ligt dus open, of de warmteafgifte bij eene zelfde temp. v voor de beide staven wel dezefde zijn zal, en dit is toch noodig, wil men de $\frac{dv}{dt}$ als de functie van x beschouwen, zooals vereischt wordt.

Is nu verder q de doorsnede van beide staven, c en δ hebben hunne gewone beteekenis; beschouwen wij dan het stuk van de eerste staaf van x tot l (eigenlijk van x tot ∞, maar wij denken l voldoende groot). Dan zal in de tijdeenheid door de doorsnede in x, stroomen: $-kq\,\frac{dv}{dx}$. Dit treedt nu geheel weder aan de omgeving uit, door de oppervlakte van het deel der staaf, dat verder dan x ligt. Wordt nu door w de warmte uitgedrukt,

die, in de eenheid van tijd, uit een element dx naar buiten vloeit, dan moet dus:

$$-kq\,\frac{dv}{dx} = \int_x^l w\,dx.$$

Neemt men nu het oogenblik, waarop de tweede staaf juist de temp v heeft, zoo zal hier, voor het oogenblik dt, gelden:

$$w\,dx\,dt = -c\delta\,q\,dx\,\frac{dv}{dt}\,dt.$$

Uit de combinatie van deze beiden, volgt onmiddelijk:

$$k\,\frac{dv}{dx} = \int_x^l c\delta\,\frac{dv}{dt}\,dx,$$

$$\frac{k}{c\delta} = \frac{\int_x^l \frac{dv}{dt}\,dx}{\frac{dv}{dx}}.$$

Ook de integraal in den teller wordt door kwadratuur gevonden uit de graphisch geteekende lijnen. Hoe, zal ik later nog aantoonen.

§ 43

Voor de geheele inrigting van den toestel en voor de platen, die bij de gebruikte kromme lijnen behooren, moet ik naar het oorspronkelijke geschrift van Forbes verwijzen, waaraan alle pracht van typographie, die aan de Edinburgh society ten dienste staat, is te koste gelegd. Ik wil dus alleen constateren, dat bij de vrij ingewikkelde constructie der warmtebron groote zorg gedragen is, voor het verkrijgen van eene gelijkmatige temp. dat storende invloeden zooveel mogelijk vermeden zijn door schermen, door isolerende voeten, door vermijden van luchtstroomen, enz.

Voor eene reeks proeven werd telkens een dag gebruikt.

De staven waren van zeer zuiver ijzer, waren $1^1/_4$ Eng. duim dik en de eerste 8 Eng. voeten lang, de tweede slechts 20 duim. Ook heeft hij eene tweede staaf gebruikt, die echter minder goed schijnt geweest te zijn. Hij heeft steeds twee reeksen van waarneming. Bij de eene is het ijzer blank gepolijst, bij de andere zoo vlak mogelijk met dun papier (tea-paper) beplakt. Dit is zeer praktisch, daar het papier de verschillende oppervlakken veel gelijker maakt, dan bv. de vernis van Despretz, en daar het bozendien de uitstraling zeer verandert. Het gepolijste ijzer heeft bijna geene uitstraling, en de bekoeling geschiedt bijna uitsluitend door uitwendige geleiding. Door dus deze twee reeksen, onder zoo verschillende omstandigheden genomen te vergelijken, elimineert men zooveel mogelijk den slechten invloed van van den coëfficiënt h, die altijd tweeslachtig is, uit straling en geleiding bestaande.

Bij de verwarming, vooral van de kortere staaf, doet zich de moeijelijkheid voor, dat de afkoeling in den eersten tijd niet regelmatig geschiedt, maar slingeringen vertoont. Deze houden echter na verloop van tijd op, en het is dus zaak, deze staaf eerst te verhitten tot een veel hoogeren graad van warmte, dan die, waarbij men de proef begint. Intusschen deed zich bij Forbes dan weêr het bezwaar voor, dat boven 200° de oppervlakte van het ijzer gewijzigd, en dus de uitstraling eene geheel andere wordt. Hij kon dus met de onmiddelijke waarneming niet hooger gaan, dan ongeveer 175°.

Dan hebben deze hooge temperaturen het bezwaar, dat de thermometers ten deele zeer lang moeten zijn, dan worden de buizen afgekoeld door de omgeving, daarentegen verwarmd door opstijgende luchtstroomen, zoodat F. meent, dat in de hoogere temperaturen wel fouten van 3° C. kunnen zijn. Deze correctie noemt hij overigens zeer onzeker.

Aan het bezwaar, om zoovele thermometers gelijkmatig te gradueren, komt Forbes te gemoet door zijne „Method of stepping." Deze bestaat daarin, dat hij met een zelfde thermometer achtereenvolgens al de gaten, die met ligt smeltbaar metaal gevuld zijn, onderzoekt. Na elke indieping, laat men het thermometer in de hand bekoelen tot het bijna tot de temp. van de volgende gedaald is. De praktijk toont, dat dit zeer goed te doen is, aangezien men daarmede sneller vooruit kan gaan, dan de veranderingen in warmte door de staaf hunne reizen volbrengen.

De bekoelende staaf werd voornamelijk naar een thermometer afgelezen, doch er waren twee zijdelingsche ingestoken ten contrôle.

De graphische methode is naar de overtuiging van Forbes naauwkeurig genoeg, en gelijk ik reeds vroeger eenmaal opmerkte, geeft evenveel waarborgen, als het aflezen der thermometers. Doch Forbes gebruikte hierbij dan ook de grootste omzigtigheid. Volgens de resultaten van eene reeks waarnemingen, werd eene kromme geteekend, en als norm aangenomen. Voor eene zelfde staaf moeten alle krommen identisch zijn, alleen kan, wanneer bij eene proef de warmtebron iets meer of minder warm was, dan bij de eerste, eene bepaalde ordinaat iets verder van, of digter bij den oorsprong liggen. De krommen, die uit de andere reeksen ontstonden, werden dan op dun papier geteekend, en zoo lang verschoven, tot zij zoo na mogelijk allen overeenstemden. De gemiddelde kromme moet dus vrij naauwkeurig wezen, daar op die wijze de verschillende ordinaten niet op elkander vallen, en de kromme dus door zeer vele punten bepaald is. Daar nu eene logarithmische lijn een groot verschil in helling heeft, en dit naar men weet, een bezwaar is bij graphische methoden, werd de lijn in een behoorlijk aantal stuk-

ken verdeeld, dan voor sommige stukken de schaal van eene afmeting verkleind of vergroot, zoodat alle stukken nagenoeg eene zelfde gemiddelde helling verkregen. Bij het teekenen van de geheele lijn, werden dan de schalen weder gereduceerd.

De kromme voor $\frac{dv}{dt}$ (dynamical experiment) is niet zeer eenvoudig, daar die tusschen 110° en 120° C. een inflectie punt vertoont, en voor de hoogere temperaturen naar de as der t toe flaauw concaaf wordt. Hier moest hij dus uiterst voorzigtig zijn.

Eerst had Forbes de differentiaalquotiënten ook graphisch uit zijne lijnen willen opzoeken, maar vond toch beter dezen te becijferen. Daartoe assimileert hij telkens kleine stukken van zijne krommen aan verschillende logarithmische lijnen, die er zeer nabij komen, en berekent daarvoor de differentiaalquotiënten. Ook vond Forbes eene geheel experimenteele formule, die zijne krommen zeer naauwkeurig uitdrukt. Deze is voor de lange staaf:

$$lg\, v = A - \frac{bx}{1 + cx},$$

of, nog beter:

$$lgv = A_1 + \frac{b_1 (n - x)}{1 + c_1 (n - x)};$$

hierin zijn A, b, c en A_1, b_1, c_1, n constanten, die natuurlijk voor iedere staaf verschillen. In cijfers zijn dezen als volgt:

$$lgv = lg\, 275.5 - \frac{0.66184\, x}{1 + 0.13093\, x},$$

$$lgv = lg\, 4 + \frac{0.3472\, (4 - x)}{1 - 0.0556\, (4 - x)}.$$

En voor de andere staaf, is de volgende formule dienstig:

$$lgv = A - \frac{bt}{1 - ct},$$

$$= 2.30471 - \frac{0.008133\, t}{1 - 0.00262\, t}.$$

Deze graphische methode heeft ook nog dit voordeel, dat men — met groote voorzigtigheid echter — de kromme lijn nog een klein gedeelte aan beide zijden van de werkelijk waargenomen deelen kan verlengen. Zoo geeft Forbes k tot voor 275°.

Op deze wijze komt F. tot de conclusie, dat de coëfficiënt k wel degelijk afneemt, al naar de temp. klimt, maar — en dit is een opmerkenswaardig resultaat, vooral voor Ångström — op eene geheel andere wijze, dan dit bij de electriciteit plaats heeft. Ik laat hier zijne cijfers volgen voor den besten zijner staven:

Temp.	$k/c\delta$ Gepolijst oppervlak.	$k/c\delta$ Papier oppervlak.	k
0°			12.36
25	0.0136	0.0147	11.80
50	0.0130	0.0138	11.15
75	0.0131	0.0123	10.59
100	0.0126	0.0113	9.94
125	0.0122	0.0107	9.38
150	0.0112	0.0107	8.37
175	0.0100	0.0102	8.18
200	0.00875		7.62

Men ziet, de afname is aanmerkelijk, op 100° is het zoowat 20 percent. De gang der cijfers is echter niet volkomen bevredigend, en Forbes zegt dan ook nadrukkelijk, ze slechts als benadering aan te zien. De eenheden zijn hier de minuut en de engelsche voet.

Voor deze vermindering van k geeft Forbes ook nog de volgende experimenteele formules. Voor de eerste staaf:

$$k = 0.01506 - 0.0000488\, t + 0.000000122\, t^2,$$

en voor de tweede, minder goede:

$$k = 0.01117 - 0.0000235\, t + 0.000000058\, t^3.$$

Men ziet ook hieruit, dat smeedijzer nog al wat in constitutie verschilt.

Wat deze interpolatieformules aangaat, zegt Forbes dat deze, hier gebruikte, met drie constanten, die van Roche afkomstig is, voor proeven van kleineren omvang voldoende is, dat echter voor proeven van zoo groote uitgestrektheid als de zijnen, die van Biot met vijf constanten wel nog beter zou aan te wenden wezen.

Ten slotte geeft Forbes aan andere experimententatoren den raad, zijne proeven te herhalen, om verschillende metalen onderling te vergelijken, waartoe warmtebronnen van veel lagere temperatuur, bv. kokend water, zouden genomen kunnen worden. Dit zou reeds daarom belang hebben, omdat Forbes vermoedt, dat zijne proeven de lagere temperaturen wat te hoog aangaven.

Het bezwaar van het afbreken der continuiteit door de holten in de staaf, dat tegen andere methoden geldt, bestaat ook hier. Want al werden andere stoffen dan kwikzilver gebruikt, uit de proeven van Calvert en Johnson blijkt dat het gebruikte mengsel van lood, tin en bismuth een slechtere warmtegeleider is dan lood alleen, wat F. ook gebruikte, en dit is reeds bijna zoo slecht als kwikzilver. En F. maakt veel holten, want zij zijn op afstanden van de bron van $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$, 1, $1^1/_2$, 2, $2^1/_2$, 4, 5 en 8 engelsche duimen.

Dan komt het bezwaar, dat ik reeds besprak, of de v waarnaar $\frac{dv}{dx}$ en de v waarnaar $\frac{dv}{dt}$ wordt berekend wel dezelfde functien zijn. Het beste zou zeker wezen als men de cijfers voor k, voor verschillende metalen, op deze wijze verkregen met cijfers van andere proefnemers kon vergelijken.

Bij deze methode blijft de eene staaf homogeen, de andere niet, daar c en δ op de geheele lengte veranderlijk zijn.

Ook geldt hier dezelfde tegenwerping als bij Ångström, dat $c\delta$ als constant aangenomen wordt, wat ver van de waarheid is. Hier zou echter $c\delta$ in rekening gebragt kunnen worden, gemakkelijker dan bij andere wijzen van proefneming, daar hier bij elke waarde van k, de $c\delta$ voor de temp. van die waarde zou kunnen gebruikt worden.

In elk geval is door deze reeks van proeven voldingend bewezen, dat k met de temperatuur veranderlijk is, want de verandering die hier aan het licht gebragt is, is te groot, om verklaard te kunnen worden uit de veranderingen van $c\delta$ en de x door de warmteuitzetting. Ik meen, dat zelfs Dumas op dit punt wel zal gerustgesteld wezen.

BESLUIT.

Gedurende het onderzoek waarvan dit werkje het resultaat is, kwam ik tot eenige gevolgtrekkingen, die ik hier bij elkander wil mededeelen. De gronden er voor, zijn reeds grootendeels in het voorgaande verspreid, zoodat ik die hier wel niet meer allen zal behoeven zamen te stellen.

Ten eerste. De cijfers vermeld onder het hoofdstuk: „Oudere proefnemingen" verdienen geen geloof. Een grond voor deze uitspraak ligt reeds in de cijfers zelven. Wie de beste reeksen daaruit, Despretz, Wiedemann en Franz, en Calvert en Johnson nagaat, zal reeds zien, dat hier een zoo ingewikkeld labyrint is, dat men er zelfs onmogelijk eene soort van lijst uit zou kunnen te zamen stellen.

Maar ook a priori kan men uit de aanmerkingen, die op de methoden allen te maken zijn, reeds zeggen, dat cijfers, naar deze methoden verkregen slechts zeer ruwe benaderingen kunnen geven, niettegenstaande de fijnste voorzorgen bij die methoden in acht genomen. En dan zijn die uitkomsten nog een volkomen onbekende functie van k en van een' coëfficiënt h, waarvan men eigenlijk niet eens meer zeggen kan, wat hij voorstelt.

Geleiding en uitstraling beiden op onberekenbare wijze door dunne oppervlakken van andere stoffen gewijzigd. Deze reeksen kunnen dus hoogstens constateren, dat zilver de beste warmte geleider is, kwikzilver de slechtste onder de metalen, en verder de volgorde aangeven van eenige andere tusschenliggende metalen.

Ten tweede. De nieuwere methoden zijn ook niet a priori onbepaald goed te keuren. Ze zijn echter allen ontegenzeggelijk beter, vooral daar bij allen de invloed van h vermeden is. Dan hebben deze drie allen een zeer verschillend grondbeginsel. Vooral als men ze nog variëerde door beiden en met thermometers, en met thermozuilen over te doen, zou men verschillende reeksen kunnen krijgen, die op zeer verschillende wijze verkregen, door vergelijking onderling een goed resultaat zouden kunnen geven. Daarvoor zouden echter oneindig meer proeven moeten gedaan worden, dan tot nu toe geschied is. Eer dit echter gedaan is, kunnen wij geloof ik, tenzij er een nieuwe profeet opsta, op geene goede cijfers hopen.

Onder deze drie proeven zou ik echter voorloopig die van Ångström niet de besten rekenen. Deze zijn eerstens vrij gecompliceerd, en de theorie waarop zij rusten is het meest behebt met verwaarloozing en onnaauwkeurigheid.

Niettegenstaande al wat er dus reeds in deze rigting en door zoo bekwame mannen gedaan is, kan men de zaak nog volstrekt niet als uitgewerkt beschouwen en is hier nog een ruim veld voor experimentateren. Niet alleen voor die, die de proeven van Neumann, Ångström en Forbes willen ter hand nemen, om ze verder voort te zetten, maar ook voor dezulken, die vindingrijkheid genoeg hebben, om eene nieuwe methode, kan het, eene betere te ontdekken.

Ten derde. De vraag, of de coëfficiënt k met de temperatuur veranderlijk is, durf ik gerust gerust bevestigend te beantwoor-

den, daar die veranderlijkheid grooter is, dan vroeger ooit schijnt vermoed te zijn. In hoe verre de theorie hieromtrent te volmaken valt, deze vraag zij aan de mathesis aanbevolen. Despretz ontkende nog geheel deze variabiliteit van k met de temp., Ångström heeft nog oor voor de onderstelling, dat deze alleen bij de slechte geleiders zou bestaan, den twijfel van Dumas zagen wij reeds. Het is dus niet te vergeefs, dat Forbes de vraag eens vooral uitmaakte.

Maar zeer nuttig zou het wezen, indien de proeven van Forbes ijverig werden voortgezet, ook met andere metalen, om, zoo mogelijk, ten minste eene experimentele wet voor deze veranderlijkheid te vinden.

Ten vierde, doet zich steeds meer en meer de vraag voor, welk verband er bestaat, tusschen de geleiding voor warmte en die voor electriciteit? Deze vraag acht ik nog voor geene beantwoording rijp. Voor dit oordeel pleit eerstens reeds, dat zelfs van de nieuwere proefnemers de een de vraag met ja, de ander met neen beantwoordt, hoewel het ja de overhand begint te krijgen. Zou hieraan echter ook niet de lust tot nivellering eenig aandeel hebben, die tegenwoordig zoo groot is in de natuurkunde? Het verheven standpunt, dat men nu en dan, als weêr eens een hoekje van de gordijn wordt opgeligt, door mannen als Newton en Helmholtz, telkens iets duidelijker denkt te zien, het standpunt, van waar uit men waant, het geheel der waarneembare schepping, als door een klein getal wetten en waarheden geregeerd, op slechts weinige eenvoudige grondslagen opgetrokken, denkt te zullen omvatten, dit standpunt is zoo uitlokkend, maar is het niet duizeling wekkend hoog? En wordt op den weg daarheen niet menige zijstap gedaan, niet wel kracht verspild?

Zoo schijnt het mij in dit geval te wezen. Men vindt niet

de analogie tusschen warmte en electriciteit uit de cijfers, maar verlangt de analogie te zien, en ziet haar daarom. Want er is evenveel voor als tegen. De reeksen ja, hebben eene ruwe overeenkomst, maar noch de eene noch de andere reeks is zeker genoeg om er gevolgen uit te trekken, want ook de opgaven voor electriciteit hebben aanmerkelijke verschillen, zelfs in de rangschikking der metalen.

De groote proefnemers die ik noemde zijn dan ook nog in twijfel; Forbes blijft zich niet volkomen gelijk, meent eerst, de gelijkheid te zullen vinden, en vindt ze niet. Ångström twijfelt klaarblijkelijk, ik wil hier een stuk van hem aanhalen, dat gelukkig niet het minst voordeelige specimen van zijn Fransch is [1]):

„A l'opposé de ce qui a lieu avec la lumière et l'électricité, „ou suppose bien, il est vrai, que la chaleur thermométrique „ne s'étend que peu à peu dans les corps, mais cette différence „ne nous semble cependant qu'apparente. La raison en est „que ce qu'on appelle ordinairement la vitesse de la propagation „de la chaleur, n'est qu'une fonction de la conductibilité, ou pou„voir rayonnant, et de la chaleur spécifique, et nous donne, „une expression de la vitesse réelle de la propagation de la cha„leur avec aussi peu d'exactitude que la conductibilité pour „l'électricité nous détermine elle-même la vitesse réelle de la „propagation de l'électricité. En effet, la propagation de l'élec„tricité dans les télégraphes submarins nous offre des phénomènes „parfaitement analogues à ceux que nous présente celle de la „chaleur dans les barres métalliques."

Op deze laatste analogie valt misschien wat af te dingen, maar ik haalde dan ook het bovenstaande aan, als een bewijs

---

1) Nova acta Regiae societatis scientiarum Upsaliensis; Seriei tertiae. Vol III 1861.

voor den twijfel van Ångström. In elk geval is het eene aprioristische beschouwing die niet zonder waarde is.

Het is echter niet te loochenen, dat er, afgezien van de cijfers, vele vingerwijzingen zijn, die de mogelijkheid van eene analogie tusschen de beide reeksen doen inzien. Ik heb ze overal te hunner plaatse aangegeven. Maar er zijn ook feiten die voor het tegendeel pleiten. Eerstens de opmerking van Forbes, dat, terwijl volgens de jongere Becquerel het geleidingsvermogen voor electriciteit voor 100° C. met 40% afneemt, dit bij warmte maar 20% is. Dit zou nog wel op analogie maar niet op identiteit wijzen.

Maar eene gewigtigere tegenwerping vind ik bij Despretz. Hij was tot nog toe zoowat de eenige die eenigermate voldoende proeven voor vloeistoffen, vooral water leverde, waarvan die geleiding langen tijd maar gladweg ontkend was. Deze nu komt tot de conclusie, dat eene toevoeging van zuren en zouten het geleidend vermogen van water voor warmte volstrekt niet verandert. Men weet, dat eene kleine toevoeging van zuur het water van een slechten tot een vrij goeden geleider voor electriciteit maakt. Was dit nu bij de warmte ook het geval, dan zou Despretz er wel iets van bespeurd hebben. Hoe gebrekkig dus ook deze zelf erkent, dat deze proeven waren, dunkt mij toch, dat dit eene feit sterk tegen eene analogie spreekt. De vloeistoffen zijn dan ook in het geheel nog bijna in dit opzicht niet onderzocht, en zoolang dit niet het geval is, zal elk oordeel wel voorbarig wezen.

Gassen schijnen de electriciteit iets beter te geleiden dan de warmte, waarvoor men nog eigenlijk geene geleiding heeft kunnen bespeuren, behalve de waterstof, die ook hierin veel nader aan de metalen staat. Heerlijk feit voor de verdedigers van de geliefde thesis, dat waterstof een metaal is!

Ik meen dus den stand der zaak geen onregt aan te doen, door deze kwestie eenvoudig eene openstaande vraag te noemen, die nog aan beide zijden dient onderzocht te worden. Met te meer gerustheid durf ik hier de schouders op te halen, waar zelfs een man als Tyndall geen oordeel geeft, maar zich zeer voorzigtig uitlaat [1]). Ook in deze rigting is dus nog een ruim veld open voor latere proefnemers.

En zoo, aan het einde van mijnen arbeid, zet ik weêr bijna hetzelfde neder, wat in de inleiding voorkwam: „Er is veel gedaan, maar nog meer is er te doen." Moge dit werkje, dat slechts aanspraak maakt op den naam van overzigt, zeer spoedig onvolledig blijken te zijn, ja mogt het spoedig geheel tot eene kleine historische waarde gereduceerd wezen, als eindelijk eene goede methode betrouwbare cijfers zal gegeven hebben, en op alle vragen het antwoord zal hebben doen volgen.

---

1) John Tijndall. — *Heat a mode of motion*, 4e Ed. London 1870, p. 195.

STELLINGEN.

I.

Er is nog geene reeks van getallen voor den coëfficiënt k, die geloof verdient.

II.

De veranderlijkheid van k met de temperatuur is bewezen.

III.

Het is nog onmogelijk te beoordeelen, of er al dan niet identiteit bestaat tusschen de geleidingscoëfficiënten voor warmte en electriciteit.

IV.

De complexe grootheden zijn niet meer onbestaanbaar dan gewone breuken, negatieve getallen, irrationneele grootheden of divergente reeksen.

V.

Het gezegde van Lamé (Elasticité des corps solides p. 111): „Lorsqu'on parvient à un résultat simple par des calculs com-„pliqués, il doit exister une manière beaucoup plus directe, „d'arriver au même résultat" is bij den tegenwoordigen toestand der mathesis voorbarig.

VI.

De hypothese van Olbers, omtrent het onstaan der kleine planeten, is nog steeds niet absoluut te verwerpen, maar kan, misschien gewijzigd, nog wel waar zijn.

VII.

Bij den tegenwoordigen stand der astronomie, zouden de aanmerkelijke krachten die besteed worden om kleine planeten op te sporen, beter kunnen worden aangewend.

VIII.

De hypothese van Tyndall (Heat a mode of motion) over de kometen, is de meest waarschijnlijke.

IX.

Astronomie, physica, zelfs chemie, zijn in eene periode van betrekkelijken stilstand, en wachten op eenen vooruitgang der mathesis, misschien in eene geheel nieuwe rigting.

X.

In een molecule moeten de heterogene deeltjes evenzoo in evenwigt gedacht worden als in een vast ligchaam de moleculen.

XI.

De chemische hygrometer heeft slechts praktische waarde als controlerend werktuig voor andere methoden.

XII.

De meening, dat wolken uit water in den zoogenaamd blaasvormigen toestand zouden bestaan is onhoudbaar.

XIII.

Het rijzen en dalen van Nautilus pompilius is tot heden niet voldoende verklaard.

XIV.

De regel, dat de vorming van organische stoffen, die later bestanddeelen van dieren worden, het eerst door planten geschiedt, is niet toepasselijk op de in zee levende dierenwereld.

XV.

De uitdrukkingen, primaire en secundaire celwand behooren geheel te vervallen.

XVI.

De contactgesteenten van de groensteenen in den Harts, zijn ontstaan door modificatie van den omliggenden Thonschiefer.

XVII.

Het is hoogst wenschelijk, ja noodzakelijk, dat het lager onderwijs verpligtend worde gesteld.

XVIII.

It is the universal law, that whatever doctrine becomes fashionable, shall lose a portion of that dignity which it had possessed while it was confined to a small but earnest minority and was loved for its own sake alone.

Macaulay, History of England.
