Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Involuties, voortgebracht door lineaire stelsels van figuren

https://hdl.handle.net/1874/260213

A 2 2 6 Nov 1916

INVOLUTIES, VOORTGEBRACHT DOOR LINEAIRE STELSELS VAN FIGUREN

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

DOOR C. H. VAN OS

A. qu.
192

INVOLUTIES, VOORTGEBRACHT DOOR LINEAIRE STELSELS VAN FIGUREN

INVOLUTIES, VOORTGEBRACHT DOOR LINEAIRE STELSELS VAN FIGUREN

PROEFSCHRIFT, TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr P. H. DAMSTÉ, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 6 NOVEMBER 1916, 'S NAMIDDAGS TE 4 UREN, DOOR

CHARLES HENDRIK VAN OS,

GEBOREN TE AMBARAWA

A. H. KRUYT - UITGEVER - AMSTERDAM - 1916



AAN MIJN TWEEDE MOEDER EN
AAN MIJN AANSTAANDE VROUW

Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij een behoefte, mijn dank te betuigen aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

In de eerste plaats aan U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, voor de groote welwillendheid, waarmede Gij bereid waart, mij als promotor ter zijde te staan, en de warme belangstelling, die ik steeds van U heb mogen ondervinden. De wijze, waarop ik van Uwe verhandelingen gebruik heb mogen maken, is oorzaak, dat ik mij, al heb ik Uwe lessen ook niet mogen bijwonen, toch steeds Uw leerling zal gevoelen.

Verder aan U, Hoogleeraren der wis- en natuurkundige faculteit te Leiden, voor het onderricht, dat ik van U mocht ontvangen en dat ik mij steeds dankbaar herinneren zal.

Een eerbiedigen groet wijd ik aan de nagedachtenis van Prof. ZEEMAN, die het eerst in mij de liefde tot de meetkunde opwekte.

En eindelijk wilde ik een woord van erkentelijkheid richten tot de leden van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, wier invloed voor de richting mijner studie beslissend geweest is.

INHOUD.

INLEIDING		1
HOOFDSTUK	I. TWEE BUNDELS VAN VLAKKE KROMMEN	3
„	II. TWEE BUNDELS VAN OPPERVLAKKEN EN EEN BUNDEL VAN PLATTE VLAKKEN . .	29
„	III. DRIE BUNDELS VAN OPPERVLAKKEN	55
„	IV. EEN BUNDEL EN EEN NET VAN OPPERVLAKKEN	78
„	V. EEN DRIEVOUDIG ONEINDIG STELSEL (COMPLEX) VAN OPPERVLAKKEN	101
„	VI. VIER BUNDELS VAN DRIEDIMENSIONALE FIGUREN	116
„	VII. EEN VIERVOUDIG ONEINDIG LINEAIR STELSEL	133
„	VIII. VIJF EN ZES BUNDELS . . .	152

INLEIDING.

Laten drie bundels van oppervlakken gegeven zijn, achtereenvolgens bestaande uit oppervlakken van de graden m_1, m_2 en m_3. Neemt men uit elk dezer bundels één oppervlak, dan zullen deze drie elkaar snijden in $m_1 m_2 m_3$ punten. Voegt men deze snijpunten aan elkaar toe, dan krijgt men een *involutie* $I^{m_1 m_2 m_3}$ in de ruimte. Daar door een willekeurig punt P uit elk der bundels één oppervlak gaat, behoort een willekeurig punt tot één en niet meer dan één groep dezer involutie. Deze involutie zal hier bestudeerd worden.

Voor $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ is deze involutie onderzocht door Prof. Dr. JAN DE VRIES (Versl. Akad. van Wet., dl. XXI, blz. 1269). De involuties $I^{m_1 m_2}$, die op analoge wijze in het platte vlak door twee bundels van vlakke krommen worden voortgebracht, zijn uitvoerig onderzocht door F. CHIZZONI (*Sopra le involuzioni nel piano*, Mem. Acc. dei Lincei, XIX, 301). De algemeene $I^{m_1 m_2 m_3}$ in de ruimte is echter, zoover ik weet, nog niet beschouwd.

Een bijzonder geval doet zich voor, als twee der bundels tot eenzelfde net, of alle drie tot eenzelfden *complex* (drievoudig oneindig lineair stelsel) van oppervlakken behooren. In het laatste geval zullen de drie oppervlakken, die door hun snijpunten een groep der involutie leveren, een net bepalen, dat geheel tot den complex

behoort, en dat de genoemde snijpunten tot basispunten heeft. Elke groep toegevoegde punten wordt dus gevormd door de basispunten van een net uit den complex. Snijdt men nu den complex door een plat vlak V, dan verkrijgt men hierin een complex van vlakke krommen, en elk in V gelegen drietal toegevoegde punten bepaalt uit dezen complex een net, dat *drie* basispunten heeft. Het aantal van zulke netten in een willekeurigen complex van vlakke krommen is volgens STURM (Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, dl. III, blz. 363) tot dusver nog niet bepaald.

In het volgende worden eerst ter inleiding de involuties $I^{m_1 m_2}$ beschouwd, die in het platte vlak door twee bundels van vlakke krommen worden voortgebracht. Vervolgens worden de involuties $I^{m_1 m_2 m_3}$ in de ruimte onderzocht, en de bovengenoemde bijzondere gevallen nagegaan. Ten slotte volgt een onderzoek der involuties $I^{m_1 m_2 m_3 m_4}$, die op analoge wijze worden bepaald door vier bundels van driedimensionale figuren in een vierdimensionale ruimte.

HOOFDSTUK I.

TWEE BUNDELS VAN VLAKKE KROMMEN.

Laten in een plat vlak twee bundels van krommen gegeven zijn, van de graden m_1 en m_2. Nemen wij uit elk dezer bundels een kromme, dan snijden die elkaar in $m_1 m_2$ punten; voegen wij deze punten aan elkaar toe, dan krijgen wij een *involutie* $I^{m_1 m_2}$ in het platte vlak. Daar door een willekeurig punt uit elk der bundels één kromme gaat, behoort een willekeurig punt tot één groep dezer involutie.

§ 1. Wij zullen eerst het geval beschouwen, dat een der bundels bestaat uit *rechte lijnen g*, de andere uit krommen c^m van den graad *m*. Wij zullen deze bundels aanduiden door (g) en (c^m); het basispunt van (g) noemen wij A, de basispunten van (c^m) B_k ($k = 1$ tot m^2).

Terwijl een *willekeurig* punt tot slechts één groep der involutie I^m behoort, geldt dit niet meer voor de basispunten. Door A gaat een bepaalde kromme c^m, welke wij door $(A)^m$ zullen aanduiden; deze wordt door *elk* der rechten *g* gesneden volgens een groep van *m* punten, waartoe A behoort.

Evenzoo gaat door een basispunt B_k een bepaalde rechte *g*, die wij zullen aanduiden door $(B)_k$; *elke* kromme

c^m snijdt $(B)_k$ volgens een groep van m punten, waartoe B_k behoort.

De basispunten A en B_k zijn dus *singuliere punten* der involutie I^m.

§ 2. Bij elk punt P eener rechte g behooren (m—1) punten P′ dierzelfde rechte, die met P een groep der I^m vormen. Tusschen de punten P en P′ bestaat dus een verwantschap (m—1, m—1) met 2(m—1) coïncidenties. In zulk een coïncidentie vallen twee der snijpunten van g met een kromme c^m samen, en zal g deze kromme dus *raken. Elke rechte g raakt dus aan 2(m—1) krommen* c^m.

De meetkundige plaats van deze coïncidenties der I^m zullen wij door $\triangle$ aanduiden. Deze zal gaan door de basispunten A en B_k. Door A toch gaat één kromme c^m, en de raaklijn aan deze kromme in A levert één in A gelegen coïncidentie. Evenzoo gaat door een punt B_k één rechte g, en men kan één kromme uit (c^m) vinden, die deze in B_k raakt, en dus een in B_k gelegen coïncidentie levert.

Een rechte g snijdt $\triangle$ ten eerste in A, ten tweede in de 2(m—1) op g gelegen coïncidenties. *De graad van* $\triangle$ *bedraagt dus (2m—1).*

$\triangle$ is klaarblijkelijk de meetkundige plaats van de raakpunten der uit A aan de krommen c^m getrokken raaklijnen. Als zoodanig heet $\triangle$ *de poolkromme* [1]) *van A ten opzichte van den bundel* (c^m). Het is gemakkelijk, de vergelijking van deze poolkromme te vormen.

---

1) Zie Dr. JAN DE VRIES, Faisceaux de courbes planes (Archives TEYLER, sér. II, tome XI, p. 99).

Zij de algemeene vergelijking der krommen c^m:

$$C_1 + \lambda C_2 = 0.$$

Laten (x_1, y_1, z_1) de homogene coördinaten van A zijn. De raakpunten der raaklijnen, uit A aan een kromme c^m getrokken, zijn de snijpunten van c^m met de eerste poolkromme van A t. o. v. c^m, die tot vergelijking heeft:

$$\left(x_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial C_1}{\partial y} + z_1 \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) + \lambda \left(x_1 \frac{\partial C_2}{\partial x} + y_1 \frac{\partial C_2}{\partial y} + z_1 \frac{\partial C_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Elimineert men λ uit deze beide vergelijkingen, dan vindt men de m.p. der raakpunten, dus de gezochte poolkromme. Deze wordt dus werkelijk van den graad (2m—1). Verder bevatten de coëfficienten harer vergelijking de coördinaten van A *lineair*, een eigenschap, die later van belang zal blijken te zijn.

§ 3. Reeds is gebleken, dat $\triangle$ gaat door de basispunten A en B_k. Wij kunnen gemakkelijk aantoonen, dat $\triangle$ in A *raakt* aan de door A gaande kromme c^m, die boven reeds door $(A)^m$ is aangeduid. De snijpunten toch eener kromme c^m met $\triangle$ zijn, naast de m^2punten B_k, de m(m—1) raakpunten der uit A aan c^m getrokken raaklijnen. Gaat c^m nu door A, dan vallen twee dezer raaklijnen samen tot de raaklijn in A; twee der snijpunten van c^m en $\triangle$ vallen dus ook in A, waarmee het gestelde bewezen is.

Evenzoo raakt $\triangle$ in elk der punten B_k aan de door dat punt gaande rechte g, die wij boven reeds door $(B)_k$ hebben aangeduid. Gaat een rechte g nl. door een basispunt B_k van den bundel (c^m), dan zullen twee der krommen uit (c^m), die g raken, samenvallen tot de c^m, die g in B_k raakt; twee der snijpunten van c^m en $\triangle$ vallen

dus in B_k samen, waarmee het gestelde bewezen is.

Behalve de m^2rechten $(B)_k$, en behalve de raaklijn in A zelf, kunnen uit A nog

$$(2m-1)(2m-2) - m^2 - 2 = 3m(m-2)$$

raaklijnen aan Δ getrokken worden. Zij t een dezer raaklijnen, Q het raakpunt van t. Wat is de beteekenis van het punt Q?

In Q vallen twee coïncidenties samen der op t, zooals op elke rechte g, gelegen involutie van groepen toegevoegde punten der I^m, waarvan de coïncidenties immers de snijpunten van g en Δ geven. Dit samenvallen van twee coïncidenties moet hierdoor veroorzaakt zijn, dat in Q *drie* toegevoegde punten dier involutie samenvallen.[1] *Het gebeurt dus 3m(m—2) malen, dat drie toegevoegde punten der I^m samenvallen.*

In zulk een punt Q heeft de rechte g met de door Q gaande c^m drie samenvallende punten gemeen. Door Q gaan dus 3m(m—2) buigraaklijnen van krommen c^m, *de buigraaklijnen der krommen van een bundel (c^m) omhullen dus een kromme van de klasse 3m(m—2).*

§ 4. Elk punt P van Δ behoort tot een groep I^m, waarvan twee punten in P samenvallen. De overige punten P′ van zulk een groep noemen wij *vertakkingspunten* der involutie, en de m.p. dezer punten de *vertakkingskromme*[2] Δ'.

Wij bewijzen ten eerste, dat Δ' *meervoudige punten*

---

[1] Zie STURM, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, dl. I, blz. 278.

[2] Zij wordt ook wel de *satellietkromme* van A genoemd (Zie Dr. JAN DE VRIES t.a.p.).

heeft in de basispunten A en B_k. In § 1 is nl. gebleken, dat elk punt der kromme $(A)^m$, die uit (c^m) door A ging, tot een groep behoort, die ook A bevat. Dit geldt ook voor een snijpunt van $(A)^m$ en Δ; laat men dus een punt P langs Δ tot een dezer snijpunten naderen, dan zal een der bijbehoorende punten P' naderen tot A, zoodat Δ' door A gaat. Dit gebeurt blijkbaar ééns voor elk der snijpunten van $(A)^m$ en Δ.

Δ en $(A)^m$ gaan echter ook beide door de basispunten A en B_k, en voor *deze* snijpunten geldt nu de boven gegeven redeneering *niet*. Elk dezer punten toch behoort tot ∞^1 groepen der I^m, en het is dus niet direct duidelijk, welke punten van Δ' bij zoo'n punt *als punt van* Δ behooren. Wij moeten dit door een grensovergang uitmaken.

Laten wij dus een punt P over Δ tot A naderen; P is dan voortdurend een coïncidentie der I^m; dit moet dus ook in de limiet zoo zijn. Nu is er één groep der I^m, die in A een coïncidentie heeft, nl. die, welke gevormd wordt door de snijpunten van $(A)^m$ met de rechte g, die $(A)^m$ in A raakt. De overige punten dezer groep zijn de punten van Δ', die bij A als punt van Δ behooren, en klaarblijkelijk valt geen dezer punten in 't algemeen in A, zoodat Δ' thans niet door A gaat.

Evenzoo zal men, om de punten van Δ' te vinden, die bij een punt B_k als punt van Δ behooren, dié groep der I^m moeten beschouwen, die in B_k een coïncidentie heeft. Deze groep wordt gevormd door de snijpunten van de door B_k gaande rechte g met dié kromme c^m, welke deze rechte in B_k raakt; de buiten B_k gelegen punten dezer groep liggen op Δ'. Daar in 't algemeen geen

dezer punten in A zal vallen, gaat Δ' ook thans niet door A.

In § 3 is reeds gebleken, dat Δ en $(A)^m$ elkaar in A raken. Daarentegen *snijden* zij elkaar in de punten B_k; want in elk dezer punten raakt Δ niet aan $(A)^m$, maar aan de door B_k gaande rechte g. In de basispunten vallen dus $(m^2 + 2)$ snijpunten van Δ en $(A)^m$; er blijven

$$m(2m-1) - (m^2+2) = (m-2)(m+1)$$

snijpunten over, waarvan elk Δ' éénmaal door A doet gaan. A is dus een $(m-2)(m+1)$-voudig punt van Δ'.

Evenzoo toonen wij aan, dat de punten B_k meervoudige punten zijn van Δ'. Door elk punt B_k gaat één rechte g, die wij reeds vroeger door $(B)_k$ hebben aangeduid, en elk punt hiervan behoort tot een groep, die ook B_k bevat. Dit geldt ook voor de snijpunten van $(B)_k$ en Δ, en voor elk dezer snijpunten gaat dus Δ' éénmaal door B_k. Uitgezonderd moeten echter worden de punten A en B_k; boven is reeds onderzocht, welke punten van Δ' bij zulk een punt behooren, en geen dier punten zal in 't algemeen in B_k vallen. Nu raakt $(B)_k$ de kromme Δ in B_k en snijdt haar in A; er blijven $(2m-1-3) = 2(m-2)$ snijpunten over, zoodat elk punt B_k een $2(m-2)$-voudig punt van Δ' is.

§ 5. Om nu den *graad* van Δ' te bepalen, zoeken wij het aantal snijpunten van Δ' met een rechte g. Hiervan vallen $(m-2)(m+1)$ in het punt A; verder zal g de kromme Δ' snijden in de punten, die behooren bij de snijpunten van g en Δ; immers, de punten van een zelfde groep liggen op eenzelfde rechte g. Van deze laatste snijpunten moet echter het punt A uitgezonderd worden; want de punten van Δ', die bij A als punt van

Δ behooren, en boven reeds bepaald zijn, liggen in 't algemeen niet op g. Er blijven $2(m-1)$ snijpunten van g en Δ over; elk van deze is een coïncidentie der I^m, en de $(m-2)$ punten, die daarmee tot eenzelfde groep behooren, zijn punten van Δ', die op g liggen. Het totale aantal snijpunten van g en Δ' bedraagt dus

$$(m-2)(m+1) + 2(m-1)(m-2) = (m-2)(3m-1),$$

dit is dus de graad van Δ'.

Δ en Δ' snijden elkaar in de basispunten, die enkelvoudige punten van Δ, meervoudige punten van Δ' zijn. Wij zullen verder bewijzen, dat zij elkaar *raken* in de $3m(m-2)$ in § 3 gevonden punten Q, waarin drie punten van een groep der I^m samenvielen.

In § 3 is nl. gevonden, dat de door zulk een punt Q gaande rechte g daar aan Δ raakte. Laat men g dus tot dezen stand naderen, dan zullen twee der snijpunten van g en Δ in Q samenvallen. De bij deze snijpunten behoorende, eveneens op g gelegen, punten van Δ' zullen dus eveneens twee aan twee samenvallen, zoodat g aan Δ' raakt in elk der punten, die bij Q behooren. Tot deze punten behoort echter Q *zelf*. Laat men nl. een punt P over Δ tot Q naderen, dan zal eerst P een coïncidentie zijn, terwijl de overige punten der zelfde groep op Δ' liggen. In Q vallen echter *drie* punten samen: een dier overige punten moet dus ook in Q gekomen zijn, zoodat Δ' door Q gaat. In Q raken dus Δ en Δ' beide aan g, zij moeten elkaar dus raken.

Behalve de basispunten en de punten Q hebben Δ en Δ' nog:

$$(2m-1)(m-2)(3m-1) - (m-2)(m+1) - 2(m-2)m^2 - 2.3\, m(m-2) = 4m(m-2)(m-3)$$

snijpunten. Zulk een snijpunt P is, als punt van Δ, een coïncidentie der I^m; als punt van Δ' behoort het tot een groep, die een coïncidentie bevat, welke niet met P kan samenvallen, daar men dan een der punten Q zou krijgen. Elk dezer snijpunten behoort dus tot een groep der I^m, welke *twee coïncidenties* bevat; en daar deze twee coïncidenties geheel in dezelfde omstandigheden verkeeren, zijn het *beide* snijpunten van Δ en Δ'. Het aantal van deze groepen bedraagt dus

$$2m(m-2)(m-3).$$

Daar de punten van eenzelfde groep snijpunten zijn van een c^m met een rechte g, is bij elk dezer laatste groepen g een *dubbelraaklijn* van c^m. *De dubbelraaklijnen der krommen van een bundel (c^m) omhullen dus een kromme van de klasse $2m(m-2)(m-3)$;* want zooveel dubbelraaklijnen gaan door het punt A.

§ 6. Doorloopt een punt P een rechte l, dan kan men vragen naar de meetkundige plaats l' der punten P', die met P tot eenzelfde groep der I^m behooren.

Wij kunnen eerst aantoonen, dat l' in A een m-voudig punt heeft. De rechte l snijdt nl. de door A gaande kromme $(A)^m$ in m punten; elk van deze behoort tot een groep, die ook A bevat; telkens, als dus P door een dezer snijpunten gaat, zal een der punten P' in A komen.

Evenzoo zal l' éénmaal gaan door elk der punten B_k; want het snijpunt van l met de door een punt B_k gaande rechte $(B)_k$ behoort tot een groep, die ook B_k bevat.

Om nu den *graad* van l' te bepalen, zoeken wij het aantal snijpunten van l' met een rechte g. Van deze snijpunten liggen m in het m-voudige punt A, (m—1)

behooren tot de groep, die bepaald wordt door het snijpunt van l en g. Het totale aantal bedraagt (2m—1), *l' is dus van den graad (2m—1).* De rechte l en de kromme l' snijden elkaar in de (2m—1) snijpunten van l en Δ; want in elk dezer punten valt een punt van l met een der punten van dezelfde groep samen.

§ 7. Beschouwen wij nu het meer algemeene geval, dat twee bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) gegeven zijn, achtereenvolgens bestaande uit krommen a^{m_1} van den graad m_1 en b^{m_2} van den graad m_2. De $m_1 m_2$snijpunten van een a^{m_1} en een b^{m_2} vormen een groep der involutie $I^{m_1 m_2}$.

De basispunten A_k van (a^{m_1}) en B_k van (b^{m_2}) zijn weer *singuliere punten* der involutie. Door een punt A_k gaat nl. één bepaalde kromme b^{m_2}, die wij door $(A)_k^{m_2}$ zullen aanduiden; *elke* kromme a^{m_1} snijdt nu $(A)_k^{m_2}$ volgens een groep, die het punt A_k bevat. Analoge beschouwingen gelden voor de punten B_k.

Wij beginnen weer met de studie van de *coïncidenties* der $I^{m_1 m_2}$. Zulk een coïncidentie zal zich voordoen, als twee der snijpunten van een a^{m_1} en een b^{m_2} samenvallen, de beide krommen elkaar dus *raken.* De gemeenschappelijke raaklijn, d.w.z. de verbindingslijn der beide samengevallen punten, heet de *drager* der coïncidentie.

Zij P een willekeurig punt, M een coïncidentie, waarvan de drager door P gaat. Uit elk der beide bundels raakt dan een kromme de lijn PM in het punt M aan; M moet dus liggen op de poolkrommen van P t.o.v. de beide bundels, want elk dezer poolkrommen is immers de m.p. van de raakpunten der uit P aan de krommen van een

der bundels getrokken raaklijnen. Boven is gebleken, dat de poolkromme van P t.o.v. den bundel (a^{m_1}) van den graad $(2m_1-1)$ is, en door P gaat; hetzelfde geldt voor de poolkromme t.o.v. (b^{m_2}). De beide poolkrommen hebben buiten P nog

$$(2m_1-1)(2m_2-1)-1 = 4m_1m_2-2(m_1+m_2)$$

punten gemeen; elk hiervan is een punt M, d.w.z. een coïncidentie, waarvan de drager door P gaat. *De dragers van de coïncidenties der $I^{m_1m_2}$ omhullen dus een kromme van de klasse $4m_1m_2-2)m_1+m_2)$.*

Laten wij P nu een rechte lijn l doorloopen, dan zal de poolkromme van P t.o.v. (a^{m_1}) of van (b^{m_2}) een bundel doorloopen, waarvan de exemplaren projectief aan de punten P van l zijn toegevoegd; dit volgt onmiddellijk uit het boven gevonden feit, dat de coëfficiënten der vergelijking van de poolkromme de coördinaten van P *lineair* bevatten. Door hun snijpunten M leveren de poolkrommen t.o.v. (a^{m_1}) en (b^{m_2}) nu alle coïncidenties, waarvan de dragers een punt P van l snijden; daar elke drager echter l moet snijden, vindt men zoo *alle* coïncidenties der $I^{m_1m_2}$.

De punten van de coïncidentiekromme $\triangle$ der $I^{m_1m_2}$ zijn dus snijpunten van poolkrommen, die bij eenzelfde punt P van l behooren. Deze poolkrommen zijn nu in projectief verband met de punten P van l, dus ook onderling projectief. Zijn nu twee projectief gepaarde bundels van krommen gegeven, resp. van de graden n_1 en n_2, dan is de m.p. der snijpunten van overeenkomstige krommen een kromme van den graad (n_1+n_2). Voor de beide bundels van poolkrommen wordt dit $[(2m_1-1)+ + (2m_2-1)]=2(m_1+m_2-1)$. Nu valt een der snijpunten der beide poolkrommen steeds in P, en doorloopt de rechte

l; de m.p. der overige snijpunten, d.w.z. der punten M, is dus van den graad:

$$2(m_1+m_2)-3.$$

Dit is dus de graad der coïncidentiekromme $\triangle$.

§ 8. De kromme $\triangle$ zal gaan door de basispunten A_k en B_k. Immers, door een punt A_k gaat één kromme b^{m_2}, die in de vorige § reeds door $(A)_k^{m_2}$ werd aangeduid, en nu zal er in den bundel (a^{m_1}) één kromme zijn, die deze in A_k aanraakt, en dus een in A gelegen coïncidentie levert. Hetzelfde geldt voor de punten B_k.

Verder kunnen wij aantoonen, dat $\triangle$ in elk der punten A_k de kromme $(A)_k^{m_2}$ *raakt*. Immers, de snijpunten van $\triangle$ met een b^{m_2} zijn de punten, waarin b^{m_2} wordt aangeraakt door krommen a^{m_1} uit (a^{m_1}). Gaat b^{m_2} nu door een der punten A_k, dan zullen twee dier krommen samenvallen tot de a^{m_1}, die b^{m_2} *in* A_k *raakt;* twee dier snijpunten vallen dus in A_k, waarmee het gestelde bewezen is.

Evenzoo raakt $\triangle$ in elk der punten B_k aan de daardoor gaande kromme a^{m_1}, die wij door $(B)_k^{m_1}$ zullen aanduiden.

Verder zal $\triangle$ gaan door de *dubbelpunten* van krommen a^{m_1}, die een dubbelpunt hebben, en welker aantal volgens een bekende stelling $3(m_1-1)^2$ is. In zulk een punt toch zullen de daardoor gaande krommen a^{m_1} en b^{m_2} twee samenvallende punten gemeen hebben, zoodat het een coïncidentie is. Evenzoo gaat $\triangle$ door de $3(m_2-1)^2$ dubbelpunten van krommen b^{m_2}.

De bundel (a^{m_1}) zal een zeker aantal krommen bevatten, die $\triangle$ *raken*. Zij Q een der raakpunten; wat is de beteekenis van dit punt Q?

De snijpunten eener a^{m_1} met $\triangle$ zijn, zoover zij niet in de punten A_k vallen, de coïncidenties der op a^{m_1} gelegen involutie van groepen toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2}$. In zulk een punt Q vallen nu twee dezer coïncidenties samen; evenals in § 3 moet dit zóó gebeurd zijn, dat in Q *drie* toegevoegde punten der involutie zijn samengevallen. De door Q gaande krommen a^{m_1} en b^{m_2} hebben daar dus drie samenvallende punten gemeen en *osculeeren* elkaar dus.

Om nu het aantal punten Q te vinden, merken wij op, dat een bundel (a^{m_1})

$$2(m_1-1)n+n(n-1)$$

krommen bevat, die een willekeurige kromme c^n van den n-den graad raken. Voor $\triangle$, waarvan de graad $[2(m_1+m_2)-3]$ is, wordt dit: $(2m_1+2m_2-3)(4m_1+2m_2-6)$.

Hiertoe behooren echter ten eerste de m_1^2 krommen a^{m_1}, die $\triangle$ in de punten A_k raken, elk 2 $\times$ geteld; want als de genoemde c^n door een der basispunten gaat, vallen twee der gevonden krommen samen tot de a^{m_1}, die c^n in dit punt raakt. Verder behooren daartoe de m_2^2 krommen $(B)_k^{m_1}$, die $\triangle$ raken in de punten B_k. Voor *geen* dezer punten geldt de boven gehouden redeneering.

Eindelijk behooren daartoe de $3(m_1-1)^2$ krommen a^{m_1}, die een dubbelpunt hebben; want doordat elk dezer dubbelpunten op $\triangle$ ligt, moet elk dezer krommen beschouwd worden als een, die $\triangle$ raakt. Ook zulk een dubbelpunt moet niet meegeteld worden; want de b^{m_2}, die door dit punt gaat, zal daar in het algemeen geen der beide takken van a^{m_1} raken, dus slechts twee samenvallende punten met a^{m_1} gemeen hebben.

Het aantal punten Q, *waarin drie toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2}$ samenvallen*, bedraagt dus [1])

$$(2m_1 + 2m_2 - 3)(4m_1 + 2m_2 - 6) - 2m_1^2 - m_2^2 - 3(m_1 - 1)^2 =$$

$$3(m_1^2 + m_2^2) + 12m_1m_2 - 18(m_1 + m_2) + 15.$$

Voor $m_2 = 1$ vindt men de in § 3 gevonden uitkomst terug.

§ 9. Doorloopt een punt P de kromme $\triangle$, dan zal een der punten, die met P tot eenzelfde groep der $I^{m_1 m_2}$ behooren, voortdurend met P samenvallen. De m.p. der overige punten is een kromme $\triangle'$, de *vertakkingskromme* der $I^{m_1 m_2}$.

Wij bewijzen eerst, dat $\triangle'$ *meervoudige punten* heeft in de basispunten A_k en B_k. Elk punt nl. der kromme $(A)_k^{m_2}$, die uit (b^{m_2}) door A_k gaat, behoort tot een groep, die ook A_k bevat. Dit geldt ook voor de snijpunten van $(A)_k^{m_2}$ en $\triangle$; zoo dikwijls dus P een dezer punten bereikt, zal een der bijbehoorende punten in A_k komen, dus $\triangle'$ door A_k gaan.

Van deze snijpunten moeten echter de basispunten uitgezonderd worden. Daar zulk een basispunt, bijv. B_k, tot ∞^1 groepen der $I^{m_1 m_2}$ behoort, is het niet direct duidelijk, welke punten van $\triangle'$ bij B_k als punt van $\triangle$ behooren; wij moeten dit door een grensovergang uitmaken. Laten wij nu P over $\triangle$ tot B_k naderen, dan zal P voortdurend een coïncidentie der $I^{m_1 m_2}$ zijn; dit moet ook in de limiet het geval wezen. Nu is er *één* groep der $I^{m_1 m_2}$, die in B_k een coïncidentie heeft: deze wordt gevormd door de snijpunten van de door B_k

[1]) Dit werd door BISCHOFF (Journal von Crelle, LIV, 185) gevonden.

gaande a^{m_1} met de b^{m_2}, die deze in B_k raakt; dit zijn dus de gezochte punten. In 't algemeen zal geen van deze in een der andere basispunten vallen, en men ziet dus, dat voor de basispunten de zooeven gegeven redeneering *niet* geldt.

$\triangle$ en $(A)_k^{m_2}$ raken elkaar in A_k en snijden elkaar in de punten B_k; daarbuiten hebben zij nog

$$[2(m_1+m_2)-3]m_2 - 2 - m_2^2 = 2m_1m_2 + m_2^2 - 3m_2 - 2$$

punten gemeen; zooveel malen gaat dus $\triangle'$ door A_k. Evenzoo gaat $\triangle'$ $[m_1^2 + 2m_1m_2 - 3m_1 - 2]$ malen door elk der punten B_k.

§ 10. Om den *graad* van $\triangle'$ te vinden, zoeken wij het aantal snijpunten van $\triangle'$ met een kromme a^{m_1}. Deze zal $\triangle'$ snijden: 1e in de meervoudige punten A_k; 2e in de punten, welke behooren bij de snijpunten van a^{m_1} en $\triangle$. Bij deze snijpunten van a^{m_1} en $\triangle$ moet men echter *niet* meetellen de punten A_k; want de punten van $\triangle'$, die bij A_k als punt van $\triangle$ behooren, en die zoo juist bepaald zijn, liggen in 't algemeen niet op a^{m_1}. Buiten de punten A_k snijden a^{m_1} en $\triangle$ elkaar in

$$[2(m_1+m_2)-3]m_1 - m_1^2 = m_1^2 + 2m_1m_2 - 3m_1$$

punten; bij elk hiervan behooren (m_1m_2-2) punten van $\triangle'$. Het totale aantal snijpunten van a^{m_1} en $\triangle'$ bedraagt dus:

$$m_1^2(2m_1m_2 + m_2^2 - 3m_2 - 2) + (m_1^2 + 2m_1m_2 - 3m_1)(m_1m_2 - 2) =$$
$$= m_1[3m_1m_2(m_1+m_2) - 6m_1m_2 - 4(m_1+m_2) + 6],$$

de *graad van* $\triangle'$ bedraagt dus:

$$3m_1m_2(m_1+m_2) - 6m_1m_2 - 4(m_1+m_2) + 6.$$

De twee krommen $\triangle$ en $\triangle'$ snijden elkaar in de basispunten A_k en B_k, die enkelvoudige punten van $\triangle$, meervoudige van $\triangle'$ zijn.

Verder hebben zij gemeen de punten Q, waarin drie toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2}$ zijn samengevallen; immers, zulk een punt, dat reeds als punt van $\triangle$ een coïncidentie der $I^{m_1 m_2}$ is, valt bovendien nog samen met een der verdere punten van dezelfde groep, d.i. met een punt van $\triangle'$. Wij kunnen gemakkelijk aantoonen, dat $\triangle$ en $\triangle'$ elkaar in deze punten *raken*.

De kromme a^{m_1} toch, die door een punt Q gaat, raakt $\triangle$ daar aan. Twee der snijpunten van a^{m_1} en $\triangle$ zijn dus in Q samengevallen, en de met deze twee overeenkomende punten van $\triangle'$ moeten dus ook twee aan twee samengevallen zijn. $\triangle'$ en a^{m_1} raken elkaar dus in de punten, die bij Q behooren. Tot deze punten behoort echter Q zelf, $\triangle$ en $\triangle'$ raken a^{m_1} dus beide in Q aan waarmee het gestelde bewezen is.

Buiten de basispunten en de punten Q hebben $\triangle$ en $\triangle'$ nog

$$(2m_1 + 2m_2 - 3)\,[3m_1 m_2 (m_1 + m_2) - 6m_1 m_2 - 4(m_1 + m_2) + 6] -$$
$$- m_1^2\,(2m_1 m_2 + m_2^2 - 3m_2 - 2) - m_2^2\,(m_1^2 + 2m_1 m_2 - 3m_1 - 2) -$$
$$- 2\,[3(m_1^2 + m_2^2) + 12m_1 m_2 - 18(m_1 + m_2) + 15] =$$
$$= m_1 m_2 [4(m_1^2 + m_2^2) + 10m_1 m_2 - 18(m_1 + m_2) - 22] - 12(m_1^2 + m_2^2) +$$
$$+ 60(m_1 + m_2) - 48$$

snijpunten. Elk van deze is als punt van $\triangle$ een coïncidentie der $I^{m_1 m_2}$; als punt van $\triangle'$ behoort het tot een groep, die een coïncidentie bevat, die er niet mee samenvalt, daar men dan een der punten Q zou krijgen. Het behoort dus tot een groep, die *twee* coïncidenties bevat. Daar beide coïncidenties van zoo'n groep in dezelfde omstandigheden verkeeren, zijn het *beide* snijpunten van

Δ en Δ'. *Het aantal groepen der* $l^{m_1 m_2}$, *die twee coïncidenties bevatten, bedraagt dus:* [1])

$$m_1 m_2 [2(m_1^2 + m_2^2) + 5m_1 m_2 - 9(m_1 + m_2) - 11] - 6(m_1^2 + m_2^2) + 30(m_1 + m_2) - 24.$$

Voor $m_2 = 1$ vindt men het resultaat van § 5 terug.

§ 11. De $(m_1 m_2 - 4)$ punten van Δ', die tot een der laatstgevonden groepen behooren, zijn *dubbelpunten* van Δ'; elk dezer punten toch behoort bij *twee* punten van Δ, terwijl een willekeurig punt van Δ' slechts bij *één* punt van Δ behoort.

De punten Q' van Δ', welke behooren bij een der punten Q, zijn *keerpunten* van Δ'. Boven is nl. gebleken, dat de kromme a^{m_1}, die door die punten Q' gaat, Δ' daar aanraakt. Hetzelfde moet ook gelden voor de b^{m_2} door die punten. Die krommen a^{m_1} en b^{m_2} kunnen *elkaar* echter niet in deze punten aanraken; want de twee bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) bevatten in het algemeen geen krommen, die elkaar meermalen aanraken. De kromme Δ' heeft dus in elk dezer punten Q' meer dan één raaklijn; deze punten moeten dus *dubbelpunten* van Δ' zijn. Zij behooren echter elk bij slechts één punt van Δ, zoodat er slechts één tak van Δ' doorheen gaat; het moeten dus *keerpunten* van Δ' zijn. Daar bij elk punt Q $(m_1 m_2 - 3)$ punten Q' behooren, bedraagt *het aantal keerpunten van* Δ':

$$(m_1 m_2 - 3)[3(m_1^2 + m_2^2) + 12 m_1 m_2 - 18(m_1 + m_2) + 15].$$

§ 12. Doorloopt een punt P een rechte *l*, dan zullen

---

[1]) BISCHOFF, t.a.p.

de punten P', die met P tot eenzelfde groep der $I^{m_1 m_2}$ behooren, een kromme l' beschrijven.

Deze heeft *meervoudige punten* in de basispunten A_k en B_k; l snijdt nl. de door een punt A_k gaande kromme $(A)_k$ in m_2 punten; elk hiervan behoort tot een groep der $I^{m_1 m_2}$, die ook A_k bevat. Doorloopt dus P de rechte l, dan zal m_2 malen een der punten P' in A_k komen, zoodat l' m_2 malen door A_k gaat. Evenzoo gaat l' m_1 malen door elk der punten B_k.

Om nu den *graad* van l' te vinden, zoeken wij het aantal snijpunten van l' met een kromme a^{m_1}. Deze snijdt l' ten eerste in de meervoudige punten A_k, ten tweede in de $(m_1 m_2 - 1)$ punten van l', die behooren bij elk der snijpunten van l en a^{m_1}. Het totale aantal bedraagt dus:

$$m_1^2 m_2 + m_1 (m_1 m_2 - 1),$$

zoodat de graad van l' bedraagt:

$$2 m_1 m_2 - 1.$$

De kromme l' snijdt l ten eerste in de $[2(m_1+m_2)-3]$ snijpunten van l met de coïncidentiekromme $\triangle$; want in elk dezer punten valt een punt van l met een der punten van dezelfde groep, dus met een punt van l', samen. Verder hebben l en l'

$$2 m_1 m_2 - 1 - [2(m_1 + m_2) - 3] = 2(m_1 - 1)(m_2 - 1)$$

punten gemeen. Elk van deze is, als punt van l', toegevoegd aan een punt van l, dat er niet mee samenvalt, daar men dan een punt van $\triangle$ zou krijgen; het behoort dus tot een groep, waarvan twee punten op l liggen. Daar deze twee punten in dezelfde omstandigheden verkeeren, zijn het *beide* snijpunten van l en l'; *een rechte l draagt dus (m_1-1) (m_2-1) pun-*

tenparen, die telkens tot eenzelfde groep der $I^{m_1 m_2}$ behooren. [1])

§ 13. Neemt men in de voorafgaande uitkomsten $m_1 = m_2 = m$, dan vindt men:

De dragers van coïncidenties der I^{m^2} omhullen een kromme van de klasse $4m(m-1)$.

De m.p. dezer coïncidenties is een kromme van den graad $(4m-3)$.

Het aantal groepen, die drie samenvallende punten bevatten, bedraagt:

$$18m^2-36m+15.$$

Het aantal groepen, die twee coïncidenties bevatten, bedraagt:

$$9m^4-18m^3-23m^2+60m-24.$$

De vertakkingskromme Δ' is van den graad:

$$6m^3-6m^2-8m+6.$$

Zij heeft de basispunten tot $(3m^2-3m-2)$-voudige punten; verder heeft zij $(9m^4-18m^3-23m^2+60m-24)$ (m^2-4) dubbelpunten en $(18m^2-36m+15)$ (m^2-3) keerpunten.

Doorloopt een punt een rechte l, dan zullen de bijbehoorende punten een kromme van den graad $(2m^2-1)$ beschrijven.

Een rechte l bevat $(m-1)^2$ paren toegevoegde punten der I^{m^2}.

§ 14. Analoog aan de hier beschouwde vlakke involuties $I^{m_1 m_2}$ kan men ook involuties verkrijgen *op een*

[1]) Zij zijn de gemeenschappelijke paren der involuties, welke de beide bundels op l insnijden.

oppervlak O^n van den graad n. Wij zullen er een enkel woord aan wijden, daar dit ons later van nut zal zijn.

Zij dus gegeven een oppervlak O^n, benevens twee bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}), resp. bestaande uit oppervlakken a^{m_1} van den graad m_1 en b^{m_2} van den graad m_2. Nemen wij uit elken dezer bundels een oppervlak. De $m_1 m_2 n$ snijpunten dezer beide oppervlakken met het oppervlak O^n vormen een groep eener op O^n gelegen $I^{m_1 m_2 n}$.

Een *coïncidentie* dezer $I^{m_1 m_2 n}$ zal men verkrijgen, als twee der genoemde snijpunten samenvallen, dus de doorsnede $\rho^{m_1 m_2}$ van twee oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2} aan O^n raakt. Om de meetkundige plaats dezer coïncidenties te bestudeeren, passen wij de z.g. *methode der afplatting* toe.

Wij denken ons nl. het oppervlak O^n éénzijdig samengedrukt, tot het is overgegaan in *n* samengevallen platte vlakken. De *n* bladen van het samengedrukte oppervlak hangen samen volgens een „overgangskromme" φ, de limiet van de m.p. der raakpunten van de in de richting der éénzijdige samendrukking getrokken raaklijnen. Deze kromme φ is van den graad $n(n-1)$ en de klasse $n(n-1)^2$; dit toch zijn graad en klasse van een willekeurigen om O^n beschreven cylinder.

De complex der raaklijnen van O^n is dan overgegaan in den complex der rechten, die de kromme φ snijden. Beschouwt men de krommen uit een gegeven stelsel, die O^n raken, dan zal elk dezer krommen ten slotte de kromme φ snijden òf het limietvlak *V* raken, en wel moet elke zoodanige kromme *n* maal geteld worden, daar in *V* *n* bladen van O^n zijn samengevallen. De m.p. der raakpunten bestaat dus ten slotte uit: de kromme φ en de m.p. der raakpunten op *V*, *n* maal geteld.

Passen wij dit in het gegeven geval toe. De bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) worden door V gesneden volgens twee bundels van krommen. Indien de snijkromme $\rho^{m_1 m_2}$ van twee oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2} in een zeker punt aan V raakt, zullen ook de doorsneden van die oppervlakken met V elkaar daar raken, en krijgt men dus een coïncidentie der door die twee krommen-bundels bepaalde $I^{m_1 m_2}$. De m.p. dezer raakpunten is dus de coïncidentiekromme dier $I^{m_1 m_2}$, dus van den graad $(2m_1 + 2m_2 - 3)$. De aanrakingskromme op het oppervlak O^n is dus oorspronkelijk van den graad:

$$(2m_1 + 2m_2 - 3)n + n(n-1).$$

§ 15. Tot de vlakke involuties $I^{m_1 m_2}$ terugkeerend, beschouwen wij thans het bijzondere geval, dat $m_1 = m_2 = m$, terwijl de twee bundels (a^m) en (b^m) tot eenzelfde *net* $[a^m]$ van vlakke krommen van den m-den graad behooren.

Twee krommen a^m en b^m uit die bundels bepalen een bundel van krommen, die geheel tot het net behoort, en de snijpunten dier twee krommen tot *basispunten* heeft. Men kan de groepen der I^{m^2} dus ook bepalen als de groepen der basispunten van de bundels uit het net $[a^m]$.

Deze definitie is echter niet geheel met de oorspronkelijke gelijkwaardig en de eigenschappen dezer I^{m^2} kunnen dan ook eerst door een grensovergang uit die der algemeene $I^{m_1 m_2}$ worden afgeleid.

Volgens de oorspronkelijke definitie wordt elke groep der I^{m^2} gevormd door de snijpunten van twee krommen a^m en b^m. Behooren nu echter de twee bundels tot eenzelfde net, dan hebben zij één kromme gemeen, die

wij door a_b^m zullen aanduiden. Combineert men nu deze kromme met zich zelf, dan worden de snijpunten *onbepaald*, en alle punten van a_b^m moeten als één groep der I^{m^2} worden opgevat.

Gaat men van de tweede definitie uit, dan zullen de krommen uit $[a^m]$, die door een punt van a_b^m gaan, nog altijd een bepaalden bundel met bepaalde basispunten vormen; dan behoort dus elk punt a_b^m tot een bepaalde groep van m^2 punten.

Om nu de eigenschappen dezer I^{m^2} na te gaan, denken wij ons de bundels (a^m) en (b^m) eerst willekeurig gekozen, en daarop zóó veranderd, dat zij tot eenzelfde net $[a^m]$ gaan behooren. Het optreden van a_b^m zal dan verschillende ontaardingen veroorzaken.

§ 16. Daar alle punten van a_b^m in de grens één groep vormen, zal elke raaklijn van a_b^m in het raakpunt twee samenvallende punten eener zelfde groep bevatten, dus drager eener coïncidentie zijn. Van de dragers der coïncidenties der algemeene involutie scheiden zich dus de raaklijnen van a_b^m af, de overige dragers omhullen een kromme van de klasse $3m(m-1)$.

Elk punt van a_b^m is dus als een coïncidentie op te vatten; a_b^m is dus van de m.p. der coïncidenties af te scheiden en er blijft een kromme $\triangle$ van den graad $3(m-1)$ over.

Door een punt P van deze kromme $\triangle$ gaat een bundel van krommen uit $[a^m]$. Alle deze krommen hebben in P twee samenvallende punten gemeen, dus een gemeenschappelijke raaklijn. Door een willekeurig punt Q gaat één kromme uit dezen bundel. Nemen wij nu Q oneindig

dicht bij P, zoodanig, dat PQ in de limiet niet met de genoemde raaklijn samenvalt, dan heeft de aldus bepaalde kromme in P twee verschillende raaklijnen, dus een *dubbelpunt*. Elk punt van Δ is dus dubbelpunt van een kromme uit $[a^m]$, Δ is dus de m.p. dezer dubbelpunten, de z.g. *kromme van Jacobi* van het net $[a^m]$. Volgens een bekende stelling is deze werkelijk van den graad $3(m-1)$.

Een bundel (a^m) uit het net $[a^m]$ bevat

$$2(m-1).3(m-1) + (3m-3)(3m-4) = 3(m-1)(5m-6)$$

krommen, die Δ raken. Is Q een der raakpunten, dan vallen in Q twee coïncidenties samen van de involutie van toegevoegde punten der I^{m^2}, welke gelegen is op de door Q gaande a^m; die coïncidenties worden immers geleverd door de snijpunten van a^m en Δ. Evenals vroeger moet dit zóó gebeurd zijn, dat in Q *drie* punten van eenzelfde groep der I^{m^2} zijn samengevallen, zoodat alle krommen a^m van den door Q uit $[a^m]$ bepaalden bundel elkaar daar *osculeeren*.

Van de genoemde „rakende" krommen moet men echter aftrekken die, welke een *dubbelpunt* hebben, dat dan noodzakelijk op Δ ligt; voor zulk een dubbelpunt geldt de pas gehouden redeneering niet. Het *aantal* groepen der I^{m^2} met drie samengevallen punten bedraagt dus $3(m-1)(4m-5)$.

Om den graad van de *vertakkingskromme* Δ' te vinden, zoeken wij het aantal snijpunten van Δ' met een kromme a^m. Deze snijdt Δ in $3m(m-1)$ punten P; elk hiervan bepaalt een groep, waarvan nog een der punten in P valt, terwijl er (m^2-2) buiten P liggen, die snijpunten zijn van a^m en Δ'. De graad van Δ' bedraagt dus: $3(m-1)(m^2-2)$.

De krommen $\triangle$ en $\triangle'$ *raken* elkaar in de boven gevonden punten Q; men bewijst dit evenals vroeger door de opmerking, dat de a^m, die door Q gaat, daar $\triangle$ raakt, en verder in elk der bij Q behoorende punten twee samenvallende punten met $\triangle'$ gemeen heeft, terwijl tot deze punten Q zelf behoort.

Buiten de punten Q snijden $\triangle$ en $\triangle'$ elkaar in

$$3(m-1)(m-2)(3m^2+3m-8)$$

punten; deze behooren tot

$$\tfrac{3}{2}(m-1)(m-2)(3m^2+3m-8)$$

groepen der I^{m^2}, welke elk *twee coïncidenties* bevatten; beide coïncidenties toch van zoo'n groep zijn snijpunten van $\triangle$ en $\triangle'$.

Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen de punten, die met P tot eenzelfde groep behooren, een kromme l' beschrijven. Deze is in 't algemeen van den graad $(2m^2-1)$. Gaat men echter tot de hier beschouwde I^{m^2} over, dan scheidt zich de kromme a_b^m m maal van l' af; want alle punten van a_b^m vormen bij den grensovergang één groep, en elk punt hiervan behoort bij de m snijpunten van a_b^m en l. De overblijvende kromme l' is van den graad (m^2-1).

Men bevestigt dit door de opmerking, dat een kromme a^m de kromme l' snijdt in de (m^2-1) punten, die bij elk der m snijpunten van a_b^m en l behooren.

De krommen l en l' snijden elkaar: 1e in de $3(m-1)$ snijpunten van l en $\triangle$, want in elk dezer punten valt een punt van l met een der bijbehoorende samen; 2e in de $(m-1)(m-2)$ overige snijpunten; deze vormen $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ op l gelegen paren toegevoegde punten

der I^{m^2}, want *beide* punten van zoo'n groep moeten snijpunten van l en l' zijn.

Een willekeurige rechte l draagt dus $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ paren toegevoegde punten der I^{m^2}.[1])

De bijbehoorende $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m^2-2)$ punten van l' zijn *dubbelpunten* van l'; elk hiervan behoort toch bij twee punten van l, terwijl een willekeurig punt van l' slechts bij één punt van l behoort.

Ten slotte kunnen wij opmerken, dat de vertakkingskromme Δ' $\frac{3}{2}(m-1)(m-2)(3m^2+3m-8)(m^2-4)$ dubbelpunten heeft; deze behooren tot de boven gevonden groepen, welke twee coïncidenties bevatten. Immers, een punt van zoo'n groep behoort bij *twee* punten van Δ, zoodat Δ' er tweemaal door gaat.,

Verder heeft Δ' $3(m-1)(4m-5)(m^2-3)$ keerpunten, behoorend bij de punten Q, waarin drie toegevoegde punten samenvallen. Boven is nl. gebleken, dat elke a^m, die door een punt Q gaat, met Δ' twee samenvallende punten gemeen heeft in elk der punten, die bij Q behooren; de krommen a^m door die punten zullen elkaar daar niet alle raken; het moeten dus dubbelpunten van Δ' zijn, en, daar er slechts één tak van Δ' doorheen gaat, zijn het keerpunten.

§ 17. Enkele bijzonderheden doen zich voor bij $m = 2$, dus bij een net van *kegelsneden*.

De formule van de vorige § leert ons dan, dat een

---

[1]) Zij zijn de *neutrale paren* der involutie van den tweeden rang, welke het net op l bepaalt.

willekeurige rechte *geen enkel paar* toegevoegde punten der I^4 draagt. Daar er ∞^2 zulke paren zijn, moeten er ∞^1 rechten wezen, die elk ∞^1 paren toegevoegde punten bevatten.

Wij kunnen ook direct bewijzen, dat de verbindingslijn van twee punten van eenzelfde groep der I^4 een involutie van paren toegevoegde punten draagt.

Laten nl. P en P′ twee toegevoegde punten der I^4 zijn, dus basispunten van een bundel uit het net $[a^2]$. Elke andere bundel uit $[a^2]$ heeft met dezen één a^2 gemeen, en snijdt de lijn PP′ dus volgens een involutie, die het puntenpaar (P, P′) bevat. Twee dier andere bundels hebben nu ook steeds één a^2 gemeen; de door hen ingesneden involuties hebben dus óók het paar gemeen, dat door deze wordt ingesneden, en moeten dus geheel samenvallen. Alle bundels uit $[a^2]$ snijden PP′ dus volgens dezelfde involutie; dit is alleen mogelijk, als elk paar hiervan ∞^1 krommen, dus een bundel, uit $[a^2]$ bepaalt, dus een toegevoegd paar der I^4 is.

Hoeveel dezer rechten PP′ gaan door een willekeurig punt M? Daar elk punt van zoo'n rechte aan een tweede punt daarvan is toegevoegd, moet elk der door M gaande rechten een aan M toegevoegd punt bevatten; deze rechten zijn dus de verbindingslijnen van M met de andere punten derzelfde groep. Zij omhullen dus een kromme *van de derde klasse.*

Voor een punt M dezer kromme zullen twee der door M gaande rechten samenvallen. Daar geen drie punten van een zelfde groep der I^4 op een rechte lijn kunnen liggen — dan toch zou deze rechte deel uitmaken van een bundel ontaarde kegelsneden der $[a^2]$, en zoo iets

komt in 't algemeen niet voor — moet dit zoo gebeuren, dat twee der aan M toegevoegde punten samenvallen. M is dus een punt der *vertakkingskromme* Δ', en deze wordt dus door de rechten PP' omhuld.

De formule van de vorige § leert ons, dat Δ' voor $m = 2$ van den *zesden graad* wordt. Deze kromme moet dus *negen keerpunten* bezitten, in overeenstemming met de algemeene formule. Deze punten moeten behooren bij de negen punten Q, waarin drie punten eener zelfde groep samenvallen; en werkelijk zullen voor een punt van Δ', dat bij zoo'n punt Q behoort, de drie verbindingslijnen met de overeenkomstige punten, d. i. de drie raaklijnen van Δ', samenvallen.

Meer keerpunten kan Δ' niet hebben; de punten Q zelf zijn dus gewone punten van Δ', en hier heeft dus *gewone aanraking* tusschen Δ en Δ' plaats. Nu hangt de vorm van Δ' bij een punt Q alleen af van het gedrag der aan elkaar toegevoegde punten in de onmiddellijke omgeving van Q, en dit heeft met de graden der gegeven vergelijkingen niets te maken; want, als men dit gedrag door reeksontwikkeling nagaat, en hiertoe Q in den oorsprong brengt, zullen toch alleen de laagste termen dier vergelijkingen van invloed zijn. Ook in het algemeen zullen dus Δ en Δ' elkaar in de punten Q gewoon raken — een omstandigheid, die in het voorafgaande nog niet was opgehelderd.

HOOFDSTUK II.

TWEE BUNDELS VAN OPPERVLAKKEN EN EEN BUNDEL VAN PLATTE VLAKKEN.

Tot de involuties in de ruimte overgaande, zullen wij eerst het geval beschouwen, dat één der drie gegeven bundels uit *platte vlakken* bestaat. Het zal nl. blijken, dat de aldus verkregen involuties nauw samenhangen met de vlakke involuties, die in het vorige hoofdstuk onderzocht zijn, zoodat verschillende hunner eigenschappen met behulp van de uitkomsten van het vorige hoofdstuk kunnen worden gevonden; deze kunnen dan weer dienen ter contrôle van de latere algemeene resultaten.

§ 1. Laten dus gegeven zijn twee bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}), bestaande uit oppervlakken a^{m_1} van den graad m_1 en b^{m_2} van den graad m_2, benevens een bundel (π) van platte vlakken π. De basiskrommen van (a^{m_1}) en (b^{m_2}) zullen wij aanduiden door $\alpha^{m_1^2}$ en $\beta^{m_2^2}$, de basisrechte van (π) door γ. De $m_1 m_2$ snijpunten van twee oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2} met een vlak π vormen een groep eener involutie $I^{m_1 m_2}$.

De bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) worden door een vlak π gesneden volgens twee bundels van vlakke krommen, en elke in dit vlak π gelegen groep van $m_1 m_2$ punten wordt

gevormd door de snijpunten van twee krommen uit deze beide bundels. *De in eenzelfde vlak π gelegen groepen der $I^{m_1 m_2}$ vormen dus een vlakke involutie, zooals die in het vorige hoofdstuk is onderzocht.*

Door een willekeurig punt der ruimte gaat uit elken der drie bundels één oppervlak; een willekeurig punt behoort dus tot één en niet meer dan één groep der $I^{m_1 m_2}$. Dit geldt echter *niet* voor een punt op een der basiskrommen.

Door een punt P_γ op de rechte γ gaan een bepaald oppervlak a^{m_1} en een bepaald oppervlak b^{m_2}; deze snijden elkaar volgens een kromme, die wij door $(C)^{m_1 m_2}$ zullen aanduiden. Elk vlak π snijdt nu deze kromme in een groep van $m_1 m_2$ punten, waartoe P_γ behoort; dit punt behoort dus tot ∞^1 puntengroepen der involutie.

Evenzoo gaan door een punt P_α der kromme ${}_\alpha{}^{m_2}_1$ één oppervlak b^{m_2} en één vlak π; deze snijden elkaar volgens een kromme, welke wij door $(A)^{m_2}$ zullen aanduiden, en *elk* oppervlak a^{m_1} snijdt deze kromme volgens een groep van $m_1 m_2$ punten, waartoe P_α behoort.

De punten der basiskrommen zijn dus *singuliere punten* der involutie.

De snijpunten van een vlak π met een kromme $(C)^{m_1 m_2}$ zijn het punt P_γ en de punten, welke aan P_γ zijn toegevoegd door de in het vlak π gelegen vlakke $I^{m_1 m_2}$. Doorloopt nu het punt P_γ de rechte γ, dan beschrijven deze punten een kromme van den graad $(2m_1 m_2 - 1)$, (Hfdst. I, § 12). Deze kromme vormt met de rechte γ de doorsnede van het vlak π met het oppervlak C, dat door de krommen $(C)^{m_1 m_2}$ wordt gevormd; dit oppervlak is dus van den graad $2m_1 m_2$.

De kromme, welke in een vlak π aan de rechte γ is toegevoegd, heeft (Hfdst. I, § 12) m_2-voudige punten in de snijpunten van het vlak π met de kromme ${}_{\alpha}{}^{m_1^2}$, m_1-voudige punten in die met ${}_{\beta}{}^{m_2^2}$. Het oppervlak C heeft dus ${}_{\alpha}{}^{m_1^2}$ tot m_2-voudige, ${}_{\beta}{}^{m_2^2}$ tot m_1-voudige kromme.

Uit de bepaling van het oppervlak C volgt onmiddellijk, *dat elk punt van* C *behoort tot een groep der* $I^{m_1 m_2}$, *waarvan één der punten op* γ *ligt.*

§ 2. Wij gaan thans over tot de studie van de *coïncidenties* der $I^{m_1 m_2}$.

Zulk een coïncidentie zal zich voordoen, als twee der snijpunten van drie oppervlakken uit de drie gegeven bundels samenvallen, dus als de doorsnede ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$ van twee oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2} aan een vlak π raakt. De raaklijn der ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$ in dit punt is dan de *drager* der coïncidentie, d. w. z. de verbindingslijn der beide samengevallen punten.

Een plat vlak V snijdt de bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) volgens twee bundels van vlakke krommen, den bundel (π) volgens een waaier. De dragers der in V gelegen coïncidenties moeten ook in vlakken π liggen, dus stralen van dien waaier zijn. Zijn nu in een vlak V twee bundels van vlakke krommen gegeven, dan omhullen de gemeenschappelijke raaklijnen der elkaar aanrakende krommen uit deze bundels een kromme van de klasse $[4m_1m_2-2(m_1+m_2)]$ (Hfdst. I, § 7). Van deze raaklijnen behooren dus $[4m_1m_2-2(m_1+m_2)]$ tot den genoemden waaier, en men ziet gemakkelijk in, dat dit de gezochte dragers zijn.

De dragers van de coïncidenties der $I^{m_1 m_2}$ *vormen dus een stralencongruentie van de klasse* $4m_1m_2-2(m_1+m_2)$.

De *graad* dezer congruentie wordt door hetzelfde getal voorgesteld. De dragers, welke door een punt P gaan, moeten nl. liggen in het vlak π, dat door P gaat. Nu omhullen de dragers van de coïncidenties der in π gelegen vlakke involutie een kromme van de klasse $[4m_1m_2—2(m_1+m_2)]$ (Hfdst. I, § 7); dit getal geeft dus het aantal dragers, welke door P gaan, waarmee het gestelde bewezen is.

§ 3. Om nu het *oppervlak* $\triangle$ te onderzoeken, dat door de coïncidenties der $I^{m_1m_2}$ gevormd wordt, merken wij eerst op, dat dit oppervlak moet gaan door de basisrechte γ. De punten, welke aan een punt P_γ van γ zijn toegevoegd, liggen nl., zooals boven gebleken is, op de door dit punt gaande kromme $(C)^{m_1m_2}$. Nu is er *één* vlak π, dat deze kromme in het punt P_γ raakt, en de snijpunten van *dit* vlak met de kromme vormen *één* groep der $I^{m_1m_2}$, welke een in P_γ gelegen coïncidentie bevat. Het punt P_γ ligt dus op het oppervlak $\triangle$, en ditzelfde geldt voor de geheele rechte γ.

Het oppervlak $\triangle$ wordt nu door een vlak π gesneden: 1e volgens de rechte γ; 2e volgens de m.p. der in het vlak π gelegen coïncidenties. Deze laatste is (Hfdst. I, § 7) van den graad $[2(m_1+m_2)—3]$. *De graad van* $\triangle$ *bedraagt dus:* $2(m_1+m_2—1)$.

Behalve door de rechte γ gaat het oppervlak $\triangle$ nog door de basiskrommen ${}_\alpha m_1^2$ en ${}_\beta m_2^2$. Men kan dit aantoonen, hetzij door een analoge redeneering als voor de rechte γ, hetzij door de opmerking, dat volgens Hoofdst. I, § 8 de m.p. der in een vlak π gelegen coïncidenties de snij-

punten van dit vlak met de basiskrommen $\alpha^{m_1^2}$ en $\beta^{m_2^2}$ bevat (want deze snijpunten zijn de basispunten der beide in het vlak π gelegen krommenbundels).

Het oppervlak $\triangle$ *raakt* langs de rechte γ aan het oppervlak C, dat gevormd wordt door de boven beschouwde krommen $(C)^{m_1 m_2}$. Om dit aan te toonen, merken wij op, dat de snijpunten van een kromme $\rho^{m_1 m_2} = (a^{m_1}, b^{m_2})$ met het oppervlak $\triangle$ de coïncidenties zijn der op deze $\rho^{m_1 m_2}$ gelegen involutie van groepen toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2}$; en deze coïncidenties zijn de raakpunten der raakvlakken π, door de rechte γ aan de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ gebracht. Indien de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ nu de rechte γ in een punt P_γ treft, dus een kromme $(C)^{m_1 m_2}$ is, zullen twee dezer vlakken samenvallen tot het vlak π, dat de kromme in het punt P_γ raakt. Twee der snijpunten van deze kromme met het oppervlak $\triangle$ vallen dus in P_γ samen, zoodat de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ het oppervlak $\triangle$ hier *raakt*. Het gestelde volgt hieruit onmiddellijk.

Het oppervlak $\triangle$ zal ook gaan door de kromme σ_{ab}, die de m. p. is der punten, waar een oppervlak a^{m_1} en een oppervlak b^{m_2} *elkaar raken*. In zulk een punt toch heeft de doorsnede $\rho^{m_1 m_2}$ dezer beide oppervlakken een *dubbelpunt*, en het door dat punt gaande vlak π heeft daar met de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ twee samenvallende punten gemeen, zoodat dit punt een coïncidentie der $I^{m_1 m_2}$ is.

Om den *graad* dezer kromme σ_{ab} te vinden, merken wij op, dat een oppervlak a^{m_1} de kromme σ_{ab} zal snijden:

1e in de punten, waar het oppervlak a^{m_1} door oppervlakken b^{m_2} wordt aangeraakt;

2e in de punten van σ_{ab}, welke op de basiskromme

$_{\alpha}m_1^2$ liggen. Dit zijn de punten, waar de kromme $_{\alpha}m_1^2$ door oppervlakken b^{m_2} wordt aangeraakt; want in elk dezer punten kan men één oppervlak a^{m_1} vinden, dat het bijbehoorende oppervlak b^{m_2} in dat punt raakt.

Het aantal der eerstgenoemde punten bedraagt:

$$3m_1(m_2-1)^2 + 2m_1(m_1-1)(m_2-1) + m_1(m_1-1)^2;$$

want dit is het aantal oppervlakken uit een bundel (b^{m_2}), die een oppervlak a^{m_1} aanraken. [1])

Om het aantal oppervlakken b^{m_2} te vinden, die aan de kromme $_{\alpha}m_1^2$ raken, laten wij deze kromme ontaarden in m_1^2 rechte lijnen, door twee der oppervlakken a^{m_1}, welker doorsnede zij is, elk in m_1 platte vlakken te laten ontaarden. De oppervlakken b^{m_2}, die de kromme $_{\alpha}m_1^2$ raken, zullen dan in de grens òf een dezer rechten raken, òf door een hunner snijpunten gaan (welke dubbelpunten zijn der ontaarde $_{\alpha}m_1^2$), en wel moet elk dezer laatste b^{m_2} *tweemaal* geteld worden.

Elk der m_1^2 rechten raakt nu aan $2(m_2-1)$ oppervlakken b^{m_2}.

Elk der genoemde $2m_1$ platte vlakken bevat m_1 rechten; elk dezer rechten is de doorsnede van twee dezer vlakken, en snijdt dus samen $2(m_1-1)$ andere rechten, zoodat zij $2(m_1-1)$ dubbelpunten der ontaarde $_{\alpha}m_1^2$ draagt. Het totale aantal dezer dubbelpunten bedraagt dus $m_1^2(m_1-1)$.

Het aantal der gezochte b^{m_2} is dus:

$$2m_1^2(m_2-1+m_1-1).$$

Het totale aantal snijpunten van σ_{ab} met een oppervlak a^{m_1} bedraagt dus:

---

1) Zie ZEUTHEN, Lehrbuch der abzählenden Geometrie, blz. 51.

$$m_1[(m_1^2 + 2m_1m_2 + 3m_2^2 - 4m_1 - 8m_2 + 6) + (2m_1^2 + + 2m_1m_2 - 4m_1)],$$

dus de *graad* van σ_{ab}: [1])

$$3(m_1^2 + m_2^2) + 4m_1m_2 - 8(m_1 + m_2) + 6.$$

Evenzoo zal het oppervlak $\triangle$ gaan door de krommen σ_{ac} en σ_{bc}, welke de meetkundige plaatsen zijn der punten, waarin oppervlakken a^{m_1} of oppervlakken b^{m_2} door vlakken π worden aangeraakt. Door de zooeven gegeven redeneering te herhalen voor een bundel oppervlakken en een bundel platte vlakken, vindt men voor de graden dezer krommen gemakkelijk:

$$3m_1^2 - 4m_1 + 1 \quad \text{en} \quad 3m_2^2 - 4m_2 + 1.$$

§ 4. Een willekeurige kromme $\rho^{m_1m_2} = (a^{m_1}, b^{m_2})$ zal het oppervlak $\triangle$, behalve in de punten van $\rho^{m_1m_2}$, die op de basiskrommen $\alpha^{m_1^2}$ en $\beta^{m_2^2}$ liggen, nog snijden in de op $\rho^{m_1m_2}$ gelegen coïncidenties. Beschouwen wij nu een kromme $\rho^{m_1m_2}$, die het oppervlak $\triangle$ buiten een der basiskrommen *aanraakt*, dan zullen in het raakpunt Q twee dezer coïncidenties samenvallen. Zulk een samenvallen van twee coïncidenties moet, evenals in Hfdst. I, § 3 en § 8, hierdoor veroorzaakt worden, dat in dit punt Q *drie toegevoegde punten* der $I^{m_1m_2}$ zijn samengevallen.

Om de meetkundige plaats ψ dezer punten Q te vinden, merken wij op, dat er ∞^1 krommen $\rho^{m_1m_2}$ zijn, die aan een willekeurig oppervlak O^n van den n-den graad raken, en dat, gelijk in Hfdst. I, § 14, gevonden is, de m.p. der raakpunten een kromme is van den graad:

---

[1]) Zie C. MINEO, Sulla curva luogo dei punti di contatto delle superficie d'un fascio d'ordine n con le superficie d'un fascio d'ordine n' (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. 17, p. 302).

$$(2m_1+2m_2-3)n+n(n-1).$$

Voor het oppervlak Δ, dat van den graad $2(m_1+m_2-1)$ is, wordt dit: $2(2m_1+2m_2-2)(2m_1+2m_2-3)$.

Tot deze kromme behooren nu echter:

1e de basiskrommen ${}_\alpha m_1^2$ en ${}_\beta m_2^2$, elk *tweemaal* geteld. Door een punt P_α van ${}_\alpha m_1^2$ gaan nl. een eindig aantal krommen ${}_\rho m_1 m_2$, die een oppervlak O^n aanraken; deze zijn gelegen op het oppervlak b^{m_2}, dat door P_α gaat. Ligt P_α nu op O^n zelf, dan zullen twee dier krommen samenvallen tot de kromme ${}_\rho m_1 m_2$, die O^n *in* P_α aanraakt; het punt P_α moet dus tweemaal tot de bijbehoorende raakpunten worden gerekend. En ligt de geheele kromme ${}_\alpha m_1^2$ op O^n, dan behoort zij tweemaal tot de meetkundige plaats der raakpunten. Hetzelfde geldt voor de kromme ${}_\beta m_2^2$;

2e de basisrechte γ. Boven is nl. gebleken, dat de kromme ${}_\rho m_1 m_2$, die door een punt P_γ dezer rechte gaat, het oppervlak Δ daar aanraakt;

3e de aanrakingskromme σ_{ab} der beide bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}). De kromme ${}_\rho m_1 m_2$, die door een punt van σ_{ab} gaat, heeft daar nl. een dubbelpunt, en moet dus ook gerekend worden tot de krommen, die het oppervlak Δ aanraken. Het vlak π, dat door zulk een punt gaat, zal daar echter in 't algemeen geen der beide takken van ${}_\rho m_1 m_2$ aanraken, zoodat geen drie toegevoegde punten in zulk een punt samenvallen.

De gezochte meetkundige plaats ψ der punten Q is dus van den graad:

$$\begin{aligned} &2(2m_1+2m_2-2)(2m_1+2m_2-3)-2m_1^2-2m_2^2-1- \\ &\quad -[3(m_1^2+m_2^2)+4m_1m_2-8(m_1+m_2)+6]= \\ &\quad =3(m_1^2+m_2^2)+12m_1m_2-12(m_1+m_2)+5. \end{aligned}$$

Daar in zulk een punt een vlak π drie samenvallende punten met een kromme $\rho^{m_1 m_2}$ gemeen heeft, dus deze kromme *osculeert*, is deze kromme ψ *de meetkundige plaats der raakpunten van die osculatievlakken der krommen* $\rho^{m_1 m_2}$, *die door de rechte* γ *gaan.*

§ 5. Een punt P van het oppervlak Δ behoort tot een groep der $I^{m_1 m_2}$, waarvan twee punten in P samenvallen; de overige punten van zulk een groep noemen wij *vertakkingspunten* der $I^{m_1 m_2}$, hun meetkundige plaats het *vertakkingsoppervlak* Δ'.

Wij bewijzen eerst, dat dit oppervlak Δ' de rechte γ tot *meervoudige rechte* heeft. Elk punt nl. van de kromme $(C)^{m_1 m_2}$, die door een punt P_γ dezer rechte gaat, behoort tot een groep, die ook P_γ bevat; dit geldt ook voor de snijpunten dezer $(C)^{m_1 m_2}$ met het oppervlak Δ, en voor elk dezer snijpunten gaat het oppervlak Δ' dus éénmaal door P_γ. Hun aantal geeft dus de veelvoudigheid, waarmee de rechte γ tot het oppervlak Δ' behoort.

Enkele der snijpunten van de kromme $(C)^{m_1 m_2}$ met het oppervlak Δ liggen echter op de basiskrommen ${}_\alpha{}^{m_1^2}$, ${}_\beta{}^{m_2^2}$ en γ, en voor *deze* snijpunten geldt de pas gegeven redeneering *niet*. Een punt P_α van ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ behoort nl. tot ∞^1 groepen der $I^{m_1 m_2}$; de overige punten dezer groepen liggen op de kromme $(A)^{m_2}$, die de doorsnede is van de door P_α gaande oppervlakken b^{m_2} en π. Om nu uit te maken, welke punten van Δ' bij P_α *als punt van* Δ behooren, moeten wij een grensovergang toepassen. Hiertoe laten wij een punt P over het oppervlak Δ tot P_α naderen. In P valt dan voortdurend een coïncidentie der $I^{m_1 m_2}$, en dit moet ook in de limiet zoo zijn. Nu is er *één* groep

der $I^{m_1 m_2}$, die in P_α een coïncidentie heeft; deze wordt gevormd door de snijpunten van de kromme $(A)^{m_2}$ met *dat* oppervlak a^{m_1}, dat deze kromme in P_α aanraakt. Van deze snijpunten ligt in 't algemeen, buiten P_α, geen enkel op een der basiskrommen; het punt P_α draagt dus *niet* bij tot de veelvoudigheid, waarmee een dezer krommen tot het oppervlak $\triangle'$ behoort.

Een zelfde redeneering geldt voor een punt P_β op de kromme $\beta^{m_2^2}$, of voor een punt P_γ op de rechte γ.

Een kromme $(C)^{m_1 m_2}$ heeft nu $m_1^2 m_2$ punten met de kromme $\alpha^{m_1^2}$ gemeen; dit zijn de snijpunten van de kromme $\alpha^{m_1^2}$ met het oppervlak b^{m_2}, dat door $(C)^{m_1 m_2}$ gaat. Evenzoo heeft $(C)^{m_1 m_2}$ $m_1 m_2^2$ punten gemeen met de kromme $\beta^{m_2^2}$. Eindelijk *raakt* $(C)^{m_1 m_2}$ het oppervlak $\triangle$ in het punt P_γ *aan.*

Buiten de basiskrommen liggen dus slechts

$$2(m_1 + m_2 - 1)\, m_1 m_2 - m_1^2 m_2 - m_1 m_2^2 - 2 =$$
$$= m_1 m_2 (m_1 + m_2) - 2 m_1 m_2 - 2$$

snijpunten van $(C)^{m_1 m_2}$ en $\triangle$, de rechte γ is dus een $[(m_1 + m_2) m_1 m_2 - 2 m_1 m_2 - 2]$-voudige rechte van het oppervlak $\triangle'$.

Een plat vlak π snijdt het oppervlak $\triangle'$, behalve volgens de rechte γ, volgens de meetkundige plaats der in het vlak π gelegen vertakkingspunten. En deze m. p. is niets anders dan de vertakkingskromme der in het vlak π gelegen vlakke involutie, dus volgens Hfdst. I, § 10 een kromme van den graad:

$$3 m_1 m_2 (m_1 + m_2) - 6 m_1 m_2 - 4(m_1 + m_2) + 6.$$

De graad van het oppervlak $\triangle'$ bedraagt dus:

$$4 m_1 m_2 (m_1 + m_2) - 8 m_1 m_2 - 4(m_1 + m_2) + 4.$$

De in een vlak π gelegen vertakkingskromme heeft (Hfdst. I, § 9) $(2m_1m_2 + m_2^2 - 3m_2 - 2)$-voudige punten in de snijpunten van het vlak π met de kromme ${}_\alpha m_1^2$; ${}_\alpha m_1^2$ is dus een $(2m_1m_2 + m_2^2 - 3m_2 - 2)$-voudige kromme van het oppervlak Δ'.

Evenzoo is ${}_\beta m_2^2$ een $(m_1^2 + 2m_1m_2 - 3m_1 - 2)$-voudige kromme van het oppervlak Δ'.

§ 6. De oppervlakken Δ en Δ' snijden elkaar ten eerste langs de basiskrommen ${}_\alpha m_1^2$, ${}_\beta m_2^2$ en γ, welke enkelvoudige krommen van Δ, doch meervoudige krommen van Δ' zijn.

Verder *raken* zij elkaar *aan* langs de kromme ψ, welke in § 4 beschouwd is. Om dit aan te toonen, merken wij op, dat een willekeurige kromme ${}_\rho m_1m_2 = (a^{m_1}, b^{m_2})$ het oppervlak Δ snijdt (buiten de basiskrommen) in de op ${}_\rho m_1m_2$ gelegen coïncidenties, en het oppervlak Δ' in de punten, welke door de $I^{m_1m_2}$ aan deze coïncidenties zijn toegevoegd. Gaat de kromme ${}_\rho m_1m_2$ nu door een punt Q der kromme ψ, dan zal zij het oppervlak Δ in dit punt *aanraken*. Twee der snijpunten van ${}_\rho m_1m_2$ en Δ zullen dus in het punt Q samenvallen; dan moeten echter ook de hieraan toegevoegde, op Δ' gelegen, punten twee aan twee samenvallen. In elk dezer laatste punten heeft de kromme ${}_\rho m_1m_2$ dus twee samenvallende punten met het oppervlak Δ' gemeen. Tot deze punten behoort echter het punt Q *zelf;* in Q toch vallen drie toegevoegde punten der $I^{m_1m_2}$ samen, zoodat in Q een punt van Δ met een der daaraan toegevoegde, op Δ' gelegen, punten moet samenvallen. De oppervlakken Δ en Δ' raken dus in het punt Q eenzelfde kromme ${}_\rho m_1m_2$ aan, en, daar dit langs de geheele

kromme ψ het geval is, zullen zij elkaar langs deze kromme aanraken.

De restdoorsnede der oppervlakken Δ en Δ' is een kromme χ van den graad:

$$2(m_1+m_2-1)\,[4m_1m_2(m_1+m_2)-8m_1m_2-4(m_1+m_2)+4] -$$
$$-m_1^2[2m_1m_2+m_2^2-3m_2-2]- m_2^2[m_1^2+2m_1m_2-3m_1-2] -$$
$$-[m_1m_2(m_1+m_2)-2m_1m_2-2]-2[3(m_1^2+m_2^2)+12m_1m_2 -$$
$$-12(m_1+m_2)+5] =$$
$$=m_1m_2[6(m_1^2+m_2^2)+14m_1m_2-22(m_1+m_2)-22]-12(m_1^2+m_2^2)$$
$$+40(m_1+m_2)-16.$$

Een punt P' der kromme χ is, als punt van Δ', toegevoegd aan een punt van Δ, dat er niet mee samenvalt, daar men dan een punt Q der kromme ψ zou krijgen. Het punt P' behoort dus tot een groep der $I^{m_1m_2}$, die *twee coïncidenties* bevat. Daar de twee coïncidenties van zulk een groep in dezelfde omstandigheden verkeeren, liggen *beide* op de kromme χ.

Daar in een coïncidentie der $I^{m_1m_2}$ een kromme $\rho^{m_1m_2}$ door een plat vlak π wordt aangeraakt, is de kromme χ *de meetkundige plaats van de raakpunten van die dubbelraakvlakken der krommen* $\rho^{m_1m_2}$, *die door de rechte* γ *gaan.*

§ 7. Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen de punten P', die met P tot eenzelfde groep der $I^{m_1m_2}$ behooren, een kromme l' beschrijven.

De rechte l snijdt het in § 1 beschouwde oppervlak C in $2m_1m_2$ punten. Elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1m_2}$, waarvan een der punten op de rechte γ ligt; de kromme l' heeft dus $2m_1m_2$ punten met de rechte γ gemeen.

Een plat vlak π snijdt de kromme l', behalve in deze $2m_1m_2$ punten, in de (m_1m_2-1) punten, welke toegevoegd zijn aan het snijpunt van π met de rechte l. De *graad* van l' bedraagt dus $(3m_1m_2-1)$.

De rechte l en de kromme l' snijden elkaar in de $2(m_1+m_2-1)$ snijpunten van de rechte l met het oppervlak Δ; want in elk dezer punten valt een punt van l met een der daaraan toegevoegde, op l' gelegen, punten samen.

§ 8. Doorloopt een punt P een plat vlak V, dan zullen de punten P', die met P tot eenzelfde groep der $I^{m_1m_2}$ behooren, een oppervlak Φ_v beschrijven.

Wij toonen eerst aan, dat dit oppervlak Φ_v de basisrechte γ tot *meervoudige rechte* heeft. Hiertoe merken wij op, dat het vlak V de kromme $(C)^{m_1m_2}$, die door een punt P_γ dezer rechte gaat, in m_1m_2 punten snijdt; elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1m_2}$, die ook P_γ bevat. Elk punt P_γ dezer rechte γ is dus aan m_1m_2 punten van het vlak V toegevoegd, de rechte γ is dus een m_1m_2-voudige rechte van het oppervlak Φ_v.

Een plat vlak π snijdt dit oppervlak, behalve volgens de rechte γ, nog volgens de meetkundige plaats der punten, die aan de doorsnede van de vlakken π en V zijn toegevoegd. Deze m.p is (Hfdst. I, § 12) een in het vlak π gelegen kromme van den graad $(2m_1m_2-1)$, die m_2-voudige punten heeft in de snijpunten van het vlak π met de kromme ${}_\alpha m_1^2$, m_1-voudige in de snijpunten met ${}_\beta m_2^2$.

Hieruit volgt, dat het oppervlak Φ_v van den *graad* $(3m_1m_2-1)$ is. Het heeft ${}_\alpha m_1^2$ tot m_2-voudige, ${}_\beta m_2^2$ tot m_1-voudige kromme.

Het vlak V en het oppervlak Φ_v snijden elkaar:

1e volgens de doorsnede δ_v van het vlak V en het coïncidentieoppervlak Δ; in elk punt dezer doorsnede toch valt een punt van V met een daaraan toegevoegd, op Φ_v gelegen, punt samen;

2e volgens een restdoorsnede φ_v van den graad:

$$3m_1m_2-2(m_1+m_2)+1.$$

Een punt P′ van φ_v is, als punt van Φ_v aan een punt P van het vlak V toegevoegd. Dit valt niet met P′ samen, daar men dan een punt van δ_v zou krijgen. Nu is het punt P aan het punt P′ van V toegevoegd; P ligt dus ook op het oppervlak Φ_v, dus op de kromme φ_v. *De kromme φ_v is dus de meetkundige plaats der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten der $I^{m_1m_2}$.*

De volledige doorsnede van het vlak V en het oppervlak Φ_v moet een m_1m_2-voudig punt hebben in het snijpunt van V met de rechte γ, m_2-voudige punten in de snijpunten met de kromme $\alpha^{m_1^2}$, m_1-voudige in de snijpunten met $\beta^{m_2^2}$. Nu gaat het oppervlak Δ éénmaal door elk dezer krommen, dus de kromme δ_v éénmaal door elk der genoemde punten. De kromme φ_v heeft dus in deze punten achtereenvolgens (m_1m_2-1)-voudige, (m_2-1)-voudige en (m_1-1)-voudige punten.

Behalve in deze punten snijden de krommen φ_v en δ_v elkaar in *die* coïncidenties der $I^{m_1m_2}$, waarvan de dragers in het vlak V liggen; immers, ook deze coïncidenties zijn paren toegevoegde punten, die in het vlak V liggen, en zijn dus gelegen op de kromme φ_v. Volgens § 2 bedraagt het aantal dezer coïncidenties $[4m_1m_2-2(m_1+m_2)]$.

Ten slotte blijven nog:

$$2(m_1+m_2-1)\,[3m_1m_2-2(m_1+m_2)+1]-(m_1m_2-1)-m_1^2$$
$$(m_2-1)-m_2^2(m_1-1)-[4m_1m_2-2(m_1+m_2)]=$$

$=5m_1m_2(m_1+m_2)-3(m_1^2+m_2^2)-19m_1m_2+8(m_1+m_2)-1$
snijpunten van de krommen Φ_v en δ_v over. Als punt van δ_v is zulk een punt een coïncidentie der $I^{m_1m_2}$; als punt van Φ_v is het aan een ander punt van Φ_v toegevoegd, dat er niet mee samenvalt, daar men dan een der zooeven reeds gevonden punten zou krijgen. Het laatste getal geeft dus *het aantal in het vlak V gelegen coïncidenties, waarbij ook een der toegevoegde punten in V valt.*

§ 9. Indien een punt P de kromme Φ_v doorloopt, zal een der aan P toegevoegde punten zich eveneens op deze kromme bevinden; de (m_1m_2-2) overige doorloopen een kromme Φ'_v, waarvan wij den graad zullen bepalen.

De kromme Φ'_v zal een zeker aantal punten gemeen hebben met de rechte γ. Immers, de kromme Φ_v snijdt het in § 1 beschouwde oppervlak C in een zeker aantal punten; elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1m_2}$, waarvan een der punten op de rechte γ valt, en voor elk dezer punten zal dus de kromme Φ'_v de rechte γ treffen.

Van deze snijpunten van Φ_v en het oppervlak C moet men echter uitzonderen het (m_1m_2-1)-voudige punt P_γ van Φ_v, dat op de rechte γ valt. Als punt van γ is aan dit punt P_γ een geheele kromme $(C)^{m_1m_2}$ toegevoegd; nadert nu echter het punt P langs een der takken van Φ_v tot P_γ, dan zullen de aan P toegevoegde punten bepaalde limietstanden op de kromme $(C)^{m_1m_2}$ bereiken, en wel zijn dit de snijpunten der kromme $(C)^{m_1m_2}$ met *dat* vlak π, dat den genoemden tak van Φ_v in het punt P_γ *aanraakt.* Nu heeft het vlak *V*, en daarmee elk der genoemde takken van Φ_v afzonderlijk, een geheel willekeurige

ligging t.o.v. de basiskrommen; geen dezer snijpunten zal dus in het algemeen op een der basiskrommen gelegen zijn.

Hetzelfde geldt voor de snijpunten van het vlak V met de kromme $\alpha^{m_1^2}$. Deze zijn (m_2-1)-voudige punten van de kromme Φ_v, m_2-voudige punten van het oppervlak C (Zie § 1).

Hetzelfde geldt eindelijk voor de snijpunten van het vlak V met de kromme $\beta^{m_2^2}$; deze zijn (m_1-1)-voudige punten van de kromme Φ_v, m_1-voudige van het oppervlak C.

Buiten de basiskrommen snijden de kromme Φ_v en het oppervlak C elkaar in

$$2m_1m_2[3m_1m_2 - 2(m_1+m_2)+1] - (m_1m_2-1) - m_1^2m_2(m_2-1) - m_1m_2^2(m_1-1) =$$
$$= 4m_1^2m_2^2 - 3m_1m_2(m_1+m_2) + m_1m_2 + 1$$

punten. Zelfs deze voldoen echter niet alle aan de vraag. Er behooren nl. nog toe de punten van Φ_v, die door de op Φ_v gelegen pareninvolutie aan het zooeven gevonden (m_1m_2-1)-voudige punt P_γ zijn toegevoegd. Daar deze punten aan P_γ toegevoegd zijn, liggen zij op het oppervlak C. Werkelijk behoort elk dezer punten tot een groep der $I^{m_1m_2}$, waarvan een der punten op de rechte γ ligt; dit punt is nu echter het bijbehoorende punt van Φ_v, en *niet* een der (m_1m_2-2) overige, op Φ'_v gelegen, punten.

Er blijven nog over:

$$4m_1^2m_2^2 - 3m_1m_2(m_1+m_2)+2$$

snijpunten van Φ_v en het oppervlak C. Deze zijn nu echter twee aan twee aan elkaar toegevoegd. Immers, is P een dezer punten, P′ het bijbehoorende punt van Φ_v, dan zullen de punten P en P′ op dezelfde kromme $(C)^{m_1m_2}$

gelegen zijn, dus *beide* snijpunten zijn van Φ_v en het oppervlak C.

De laatstgenoemde snijpunten vormen dus

$$2m_1^2m_2^2 - \tfrac{3}{2}m_1m_2(m_1 + m_2) + 1$$

paren, waarbij telkens een der toegevoegde punten op de rechte γ valt. *Dit is dus het aantal malen, dat de kromme Φ'_v en de rechte γ elkaar treffen.*

Een plat vlak π snijdt nu de kromme Φ'_v, behalve in deze op de rechte γ gelegen punten, in de punten, welke toegevoegd zijn aan de snijpunten van π met de kromme Φ_v. Deze laatste snijpunten zijn twee aan twee aan elkaar toegevoegd; immers, elke twee toegevoegde punten van de kromme Φ_v moeten in eenzelfde vlak π zijn gelegen. Bij elk dezer paren snijpunten behooren nu (m_1m_2-2) punten der kromme Φ'_v.

Van deze snijpunten van Φ_v met het vlak π moet men echter uitzonderen het punt P_γ; de punten, welke aan P_γ zijn toegevoegd, zijn boven reeds bepaald, en zullen niet gelegen zijn in een willekeurig vlak π.

Buiten P_γ snijden de kromme Φ_v en het vlak π elkaar in $[2m_1m_2 - 2(m_1 + m_2) + 2]$ punten, welke $(m_1-1)(m_2-1)$ paren vormen; men vindt dus

$$m_1^2m_2^2 - m_1m_2(m_1 + m_2) - m_1m_2 + 2(m_1 + m_2) - 2$$

daarbij behoorende punten van Φ'_v.

Het totale aantal snijpunten van de kromme Φ'_v, en het vlak π, dus de graad van Φ'_v, bedraagt dus:

$$3m_1^2m_2^2 - \tfrac{5}{2}m_1m_2(m_1 + m_2) - m_1m_2 + 2(m_1 + m_2) - 1.$$

§ 10. De kromme Φ'_v en het vlak V snijden elkaar ten eerste in de, in § 8 gevonden, coïncidenties, waarbij ook een der toegevoegde punten in V valt; in elk dezer

punten toch valt een punt van φ_v met een der daaraan toegevoegde, op φ'_v gelegen punten samen.

Er blijven over
$m_1m_2\,[3m_1m_2 - \frac{15}{2}(m_1 + m_2) + 18] + 3(m_1^2 + m_2^2) - 6(m_1 + m_2)$
snijpunten. Elk dezer punten is, als punt van φ'_v, toegevoegd aan een puntenpaar der kromme φ_v; het valt met geen der punten van dit paar samen, daar men dan een der zooeven gevonden punten zou krijgen, en behoort dus tot *een in het vlak V gelegen drietal toegevoegde punten der* $I^{m_1m_2}$.

Daar de drie punten van zoo'n drietal in dezelfde omstandigheden verkeeren, zijn zij alle drie snijpunten van de kromme φ'_v met het vlak V; de pas gevonden snijpunten zijn dus 3 aan 3 aan elkaar toegevoegd, en het aantal der genoemde drietallen bedraagt:
$m_1m_2\,[m_1m_2 - \frac{5}{2}(m_1 + m_2) + 6] + (m_1^2 + m_2^2) - 2(m_1 + m_2)$.

Daar de punten van eenzelfde groep der $I^{m_1m_2}$ in eenzelfde vlak π zijn gelegen, moeten de punten van elk dezer tripels gelegen zijn op de doorsnede van het vlak V met een vlak π, dus op een rechte lijn, welke door het punt P_γ gaat. De punten van zulk een tripel zijn natuurlijk ook snijpunten van de krommen, volgens welke twee bepaalde oppervlakken uit de bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) door het vlak V worden gesneden.

Nu snijdt het vlak V de bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) volgens twee bundels van vlakke krommen, en de groepen der snijpunten van deze krommen vormen een vlakke involutie, gelijk die in Hoofdstuk I is besproken. Het laatstgevonden aantal geeft nu blijkbaar het aantal dragers van collineaire tripels, die door het punt P_γ gaan, dus *de klasse der kromme, die door de dragers der collineaire tripels eener vlakke* $I^{m_1m_2}$ *wordt omhuld.*

§ 11. Neemt men in de uitkomsten van dit hoofdstuk $m_1 = m_2 = m$, dan vindt men:

De punten, die toegevoegd zijn aan de punten der basisrechte γ, vormen een oppervlak C van den graad $2m^2$.

De dragers van de coïncidenties der I^{m^2} vormen een congruentie, die van den graad en de klasse $4m(m-1)$ is.

Deze coïncidenties zijn gelegen op een oppervlak $\triangle$ van den graad $(4m-2)$.

De aanrakingskromme σ_{ab} der beide bundels (a^m) en (b^m) is van den graad:

$$10m^2-16m+6,$$

en heeft met elk der basiskrommen α^{m^2} en β^{m^2} $4m^2(m-1)$ punten gemeen.

De meetkundige plaats der punten, waarin *drie* toegevoegde punten der I^{m^2} samenvallen, is een kromme ψ van den den graad:

$$18m^2-24m+5.$$

De m. p. van de coïncidenties van dié groepen der I^{m^2}, die *twee* coïncidenties bevatten, is een kromme χ van den graad:

$$26m^4-44m^3-46m^2+80m-16.$$

Het vertakkingsoppervlak $\triangle'$ is van den graad:

$$8m^3-8m^2-8m+4.$$

Doorloopt een punt P een rechte l, dan beschrijven de aan P toegevoegde punten een kromme l' van den graad $(3m^2-1)$.

Doorloopt een punt P een plat vlak V, dan beschrijven de aan P toegevoegde punten een oppervlak Φ_v van den graad $(3m^2-1)$.

De m.p. der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten is een kromme φ_v van den graad:

$$3m^2-4m+1.$$

Er zijn $10m^3-25m^2+16m-1$ in het vlak V gelegen coïncidenties, waarbij ook een der toegevoegde punten in V ligt.

De aan de kromme φ_v toegevoegde kromme φ'_v is van den graad: $3m^4-5m^3-m^2+4m-1$.

Een plat vlak V bevat

$$m^4-10m^3+8m^2-4m$$

drietallen toegevoegde punten der I^{m^2}.

§ 12. In 't bijzonder zullen wij nog het geval beschouwen, dat $m_1=m$, $m_2=1$ is. De bundels (b^{m_2}) en (π) bestaan dan beide uit platte vlakken. De doorsneden van de vlakken dezer bundels vormen een *bilineaire stralencongruentie [g]*, en de groepen der involutie I^m zijn klaarblijkelijk de groepen der snijpunten van de stralen g dezer congruentie met de oppervlakken van den bundel (a^m).

De dragers der coïncidenties van deze I^m vormen nu een stralencongruentie, waarvan graad en klasse $2(m-1)$ bedragen. Dit is blijkbaar de congruentie *[g]* zelf, $2(m-1)$ malen geteld, daar elke rechte g $2(m-1)$ oppervlakken a^m aanraakt, dus $2(m-1)$ coïncidenties draagt.

Het coïncidentie-oppervlak $\triangle$ is van den graad $2m$. [1])

De m.p. der punten, waarin *drie* toegevoegde punten der I^m samenvallen, is een kromme ψ van den graad $3m^2-4$.

Dit is de m.p. van de punten der oppervlakken a^m, waarin een der *hoofdraaklijnen* tot de congruentie *[g]*

[1]) Voor $m=2$ is dit oppervlak onderzocht door Prof. Dr. JAN DE VRIES en Dr. J. WOLFF (Wiskundige Opgaven, dl. XI, blz. 336).

behoort. Voor $m = 2$ wordt dit $= 8$. De kromme ψ bestaat dan klaarblijkelijk uit de 8 rechten, welke de congruentie *[g]* gemeen heeft met de congruentie (2,6), die door de beschrijvende lijnen der oppervlakken a^2 wordt gevormd.

De m.p. van de coïncidenties van dié groepen der I^m, die *twee* coïncidenties bevatten, is een kromme χ van den graad: $6m^3 - 20m^2 + 2m + 12$.

Het *vertakkingsoppervlak* $\triangle'$ is van den graad:

$$4m^2 - 8m = 4m(m-2).$$

Aan een *rechte lijn* l is toegevoegd een kromme l' van den graad $(3m-1)$, aan een *plat vlak* V een oppervlak Φ_v van den graad $(3m-1)$.

De meetkundige plaats φ_v der in een vlak V gelegen paren toegevoegde punten is van den graad $(m-1)$. Dit is blijkbaar de in het vlak V gelegen rechte g, $(m-1)$ malen geteld, daar elk punt van g aan $(m-1)$ andere punten van g is toegevoegd, dus tot $(m-1)$ paren behoort.

Het aantal in een vlak V gelegen coïncidenties, waarbij ook een der toegevoegde punten in V valt, bedraagt $2m^2 - 6m + 4 = 2(m-1)(m-2)$.

Dit zijn de $2(m-1)$ coïncidenties, welke gelegen zijn op de in V gelegen rechte g, elk $(m-2)$ malen geteld, daar elk dezer coïncidenties is toegevoegd aan $(m-2)$ andere punten der rechte g.

De bepaling van het aantal in een vlak V gelegen drietallen toegevoegde punten heeft hier geen beteekenis, daar een vlak V ∞^1 groepen van m toegevoegde punten, dus ∞^1 drietallen bevat.

§ 13. Met behulp van de uitkomsten van het vorige en van dit hoofdstuk kunnen verschillende kenmerkende

getallen worden verkregen van de *congruentie* $[\rho^{m_1 m_2}]$ *van ruimtekrommen* $\rho^{m_1 m_2}$, welke gevormd wordt door de snijkrommen der oppervlakken van twee bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}).

De bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) worden door een plat vlak V volgens twee krommenbundels gesneden, en de groepen der snijpunten van twee krommen uit deze bundels zijn tevens de groepen der snijpunten van de krommen $\rho^{m_1 m_2}$ met het vlak V; deze groepen vormen een vlakke involutie, gelijk die in Hoofdstuk I is beschouwd. Elke verbindingslijn van twee toegevoegde punten dezer involutie is een in het vlak V gelegen bisecante eener kromme $\rho^{m_1 m_2}$; elke coïncidentie geeft een $\rho^{m_1 m_2}$, die het vlak V *raakt.*

De *orde* der congruentie $[\rho^{m_1 m_2}]$. d. i. het aantal $\rho^{m_1 m_2}$, die door een willekeurig punt P gaan, bedraagt *één;* want door het punt P gaan één oppervlak a^{m_1} en één oppervlak b^{m_2}, dus één kromme $\rho^{m_1 m_2}$.

De *klasse* der congruentie, d. i. het aantal krommen $\rho^{m_1 m_2}$, die een rechte l tot bisecante hebben, bedraagt $(m_1-1)(m_2-1)$; want brengt men door de rechte l een vlak V, dan draagt die rechte $(m_1-1)(m_2-1)$ paren der in V gelegen $I^{m_1 m_2}$ (Hfdst. I, § 12), en elk dezer paren geeft een $\rho^{m_1 m_2}$, die l tot bisecante heeft.

De *raaklijnen* der $\rho^{m_1 m_2}$ vormen een stralencomplex van den graad:

$$4m_1 m_2 - 2(m_1 + m_2)$$ (Hfdst. I, § 7),

want de raaklijnen, die in een vlak V liggen, zijn de dragers van de coïncidenties der in dit vlak gelegen $I^{m_1 m_2}$.

De *trisecanten* der $\rho^{m_1 m_2}$ vormen een stralencomplex van den graad:

$m_1m_2[m_1m_2 - \frac{5}{2}(m_1 + m_2) + 6] + (m_1^2 + m_2^2) - 2(m_1 + m_2)$ (Hfdst. II, § 10); want de trisecanten, die in een vlak V liggen, zijn de dragers der in dit vlak gelegen collineaire tripels.

De krommen $\rho^{m_1m_2}$, *die een rechte l snijden,* vormen een oppervlak Λ van den graad $2m_1m_2$; want een vlak V door l snijdt dit oppervlak volgens de rechte l en volgens de kromme l', die door de in V gelegen $I^{m_1m_2}$ aan l is toegevoegd, en die van den graad $(2m_1m_2 - 1)$ is (Hfdst. I, § 12). De kromme l' heeft m_2-voudige punten in de snijpunten van het vlak V met de kromme $\alpha^{m_1^2}$, m_1-voudige punten in de snijpunten met $\beta^{m_2^2}$; $\alpha^{m_1^2}$ is dus een m_2-voudige, $\beta^{m_2^2}$ een *m_1-voudige kromme* van het oppervlak Λ. Verder zijn de $(m_1-1)(m_2-1)$ krommen $\rho^{m_1m_2}$, die l tot bisecante hebben, *dubbelkrommen* van Λ.

Een rechte m snijdt het oppervlak Λ in $2m_1m_2$ punten; door elk dezer punten gaat een kromme $\rho^{m_1m_2}$, die de rechten l en m *beide* snijdt. Er zijn dus $2m_1m_2$ krommen $\rho^{m_1m_2}$, *die twee gegeven rechten snijden.*

§ 14. Er zijn in de congruentie $[\rho^{m_1m_2}]$ ∞^1 krommen $\rho^{m_1m_2}$, *die een plat vlak V aanraken.* De m.p. der raakpunten is een kromme van den graad $[2(m_1 + m_2) - 3]$; die der punten, waarin zulk een $\rho^{m_1m_2}$ het vlak V verder nog *snijdt,* is een kromme van den graad:

$$3m_1m_2(m_1 + m_2) - 6m_1m_2 - 4(m_1 + m_2) + 6$$

(Hfdst. I, §§ 7 en 10); deze krommen zijn nl. niets anders dan de coïncidentiekromme en de vertakkingskromme der in V gelegen $I^{m_1m_2}$.

Het oppervlak μ, dat door deze $\rho^{m_1m_2}$ gevormd wordt, zal het vlak V volgens de eerstgenoemde kromme *raken,*

volgens de laatstgenoemde *snijden;* de graad van dit oppervlak μ bedraagt dus:

$$3m_1m_2(m_1 + m_2 - 2).$$

Men kan dezen graad ook als volgt vinden:

Een oppervlak a^{m_1} snijdt de in een vlak V gelegen coïncidentiekromme, behalve in de snijpunten van het vlak V met de kromme $\alpha^{m_1^2}$, nog in $m_1(m_1 + 2m_2 - 3)$ punten; het oppervlak a^{m_1} bevat dus $m_1(m_1 + 2m_2 - 3)$ krommen $\rho^{m_1m_2}$, die het vlak V *aanraken*. Deze moeten alle gaan door de punten, waarin het oppervlak a^{m_1} de kromme $\beta^{m_2^2}$ snijdt; men ziet dus, dat $\beta^{m_2^2}$ een $m_1(m_1+m_2-3)$-voudige kromme van het oppervlak μ is. Evenzoo is $\alpha^{m_1^2}$ een $m_2(2m_1 + m_2 - 3)$-voudige kromme van dit oppervlak. De volledige doorsnede der oppervlakken a^{m_1} en μ is dus van den graad:

$$m_1^2m_2(m_1 + 2m_2 - 3) + m_1^2m_2(2m_1 + m_2 - 3),$$

waaruit de bovengevonden waarde voor den graad van μ onmiddellijk volgt.

De oppervlakken μ, welke bij twee verschillende vlakken V behooren, snijden elkaar, behalve volgens de meervoudige krommen $\alpha^{m_1^2}$ en $\beta^{m_2^2}$, volgens een kromme van den graad:

$$9m_1^2m_2^2(m_1 + m_2 - 2)^2 - m_1^2m_2^2(m_1 + 2m_2 - 3)^2 - m_1^2m_2^2(2m_1 + m_2 - 3)^2.$$

Deze doorsnede kan slechts bestaan uit de krommen $\rho^{m_1m_2}$, die de *beide* vlakken V aanraken. Het aantal krommen $\rho^{m_1m_2}$, *die twee gegeven vlakken aanraken*, bedraagt dus:

$$m_1m_2(4m_1^2 + 10m_1m_2 + 4m_2^2 - 18m_1 - 18m_2 + 18).$$

Zooeven is gebleken, dat het oppervlak μ, dat bij een plat vlak V behoort, de kromme $\alpha^{m_1^2}$ tot $m_2(2m_1+m_2-3)$-

voudige kromme heeft. Daarentegen gaat de in het vlak V gelegen vertakkingskromme slechts $(2m_1m_2 + m_2^2 - -3m_2 - 2)$ malen door de snijpunten van het vlak V met de kromme ${}_\alpha m_1^2$. Van de bladen van het oppervlak μ, die door een dezer snijpunten gaan, zijn dus twee samengevallen tot het blad, dat het vlak V langs de coïncidentiekromme raakt; deze snijpunten zijn dus z.g. *cuspidaalpunten* (pinch-points) van het oppervlak μ.[1])

§ 15. De congruentie $[\rho^{m_1m_2}]$ bevat

$$3(m_1^2 + m_2^2) + 12m_1m_2 - 18(m_1 + m_2) + 15$$

krommen $\rho^{m_1m_2}$, die een plat vlak V *osculeeren*. De raakpunten dezer krommen zijn de punten van het vlak V, waarin drie toegevoegde punten der door de congruentie bepaalde $I^{m_1m_2}$ zijn samengevallen (Hfdst. I, § 8).

De congruentie bevat

$$m_1m_2[2(m_1^2 + m_2^2) + 5m_1m_2 - 9(m_1 + m_2) - 11] - 6(m_1^2 + m_2^2) + \\ + 30(m_1 + m_2) - 24$$

krommen, die een vlak V *tweemaal raken*. De raakpunten dezer krommen zijn de coïncidenties van dié groepen der $I^{m_1m_2}$, welke twee coïncidenties bevatten (Hfdst. I, § 10).

Indien het vlak V om een rechte l wentelt, beschrijven de raakpunten der eerstgenoemde krommen volgens Hfdst. II, § 4 een ruimtekromme van den graad:

$$3(m_1^2 + m_2^2) + 12m_1m_2 - 12(m_1 + m_2) + 5,$$

[1]) Deze omstandigheid is blijkbaar over het hoofd gezien in de mededeeling van Prof. Dr. JAN DE VRIES: „Een bilineaire congruentie van biquadratische ruimtekrommen der eerste soort" (Versl. Akad. van Wet., dl. XX, blz. 200). Het oppervlak μ (daar Λ^{24} genoemd) heeft voor $m_1 = m_2 = 2$ de krommen α^4 en β^4 tot *zesvoudige* krommen, en er zijn 72 krommen ρ^4, die 2 vlakken aanraken.

welke dus $[6(m_1 + m_2) - 10]$ punten met de rechte l gemeen heeft.

De raakpunten der laatstgenoemde krommen beschrijven een ruimtekromme van den graad (Hfdst. II, § 6):

$$m_1 m_2[6(m_1^2 + m_2^2) + 14 m_1 m_2 - 22(m_1 + m_2) - 22] -$$
$$- 12(m_1^2 + m_2^2) + 40(m_1 + m_2) - 16,$$ welke dus
$m_1 m_2[2(m_1^2 + m_2^2) + 4 m_1 m_2 - 4(m_1 + m_2)] - 20(m_1 + m_2) + 32$ punten met de rechte l gemeen heeft.

§ 16. De congruentie $[\rho^{m_1 m_2}]$ bezit ∞^1 krommen $\rho^{m_1 m_2}$, die een *dubbelpunt* hebben. Dit zijn de doorsneden van de oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2}, die elkaar *raken*, en de m.p. der genoemde dubbelpunten is niets anders dan de m.p. der *raakpunten*. Dit is dus (Hfdst. II, § 3) een kromme σ_{ab} van den graad:

$$3(m_1^2 + m_2^2) + 4 m_1 m_2 - 8(m_1 + m_2) + 6.$$

De $\rho^{m_1 m_2}$ met een dubbelpunt vormen een oppervlak N, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Een oppervlak a^{m_1} bevat (Hfdst. II, § 3)

$$m_1(m_1^2 + 2 m_1 m_2 + 3 m_2^2 - 4 m_1 - 8 m_2 + 6)$$

dezer krommen; dit toch is het aantal oppervlakken b^{m_2}, die het oppervlak a^{m_1} aanraken. Al deze krommen gaan door de punten, waarin het oppervlak a^{m_1} de basiskromme $\beta^{m_2^2}$ snijdt; dit getal geeft dus tevens de veelvuldigheid aan, waarmee de kromme $\beta^{m_2^2}$ tot het oppervlak N behoort. Evenzoo vindt men, dat $\alpha^{m_1^2}$ een $m_2(3m_1^2 + 2 m_1 m_2 + m_2^2 - 8 m_1 - 4 m_2 + 6)$-voudige kromme van het oppervlak N is.

De volledige doorsnede van de oppervlakken a^{m_1} en N bestaat uit de zooeven genoemde krommen $\rho^{m_1 m_2}$ en uit de kromme $\alpha^{m_1^2}$: de *graad* van N bedraagt dus:

$$4 m_1 m_2 (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2 - 3 m_1 - 3 m_2 + 3).$$

HOOFDSTUK III.

DRIE BUNDELS VAN OPPERVLAKKEN.

Wij beschouwen thans het algemeene geval eener involutie $I^{m_1 m_2 m_3}$, bepaald door drie bundels van oppervlakken (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}). De $m_1 m_2 m_3$ snijpunten van drie oppervlakken uit deze drie bundels vormen een groep der involutie.

De *basiskrommen* der drie bundels zullen wij achtereenvolgens aanduiden door ${}_\alpha m_1^2$, ${}_\beta m_2^2$ en ${}_\gamma m_3^2$.

§ 1. Door een willekeurig punt P der ruimte gaat uit elken der drie bundels één oppervlak; dit punt behoort dus tot één en niet meer dan één groep der $I^{m_1 m_2 m_3}$. Dit geldt echter *niet* voor een punt op een der basiskrommen.

Door een punt P_α op de kromme ${}_\alpha m_1^2$ gaan een bepaald oppervlak b^{m_2} en een bepaald oppervlak c^{m_3}, deze snijden elkaar volgens een kromme, die wij door $(A)^{m_2 m_3}$ zullen aanduiden. Elk oppervlak a^{m_1} snijdt nu deze kromme in een groep van $m_1 m_2 m_3$ punten, waartoe ook P_α behoort; dit punt behoort dus tot ∞^1 puntengroepen der $I^{m_1 m_2 m_3}$.

De punten der basiskrommen zijn dus *singuliere punten* der involutie.

Doorloopt het punt P_α de kromme ${}_\alpha m_1^2$, dan zal de

kromme $(A)^{m_2m_3}$ een oppervlak A beschrijven. Om den graad van dit oppervlak te vinden, onderzoeken wij de doorsnede met een oppervlak b^{m_2}.

Dit oppervlak b^{m_2} snijdt het oppervlak A : 1e volgens de basiskromme $\beta^{m_2^2}$; 2e volgens de $m_1^2m_2$ krommen $(A)^{m_2m_3}$, welke gaan door de $m_1^2m_2$ snijpunten van het oppervlak b^{m_2} met de kromme $\alpha^{m_1^2}$. Deze krommen $(A)^{m_2m_3}$ gaan ook alle door de snijpunten van het oppervlak b^{m_2} met de kromme $\gamma^{m_3^2}$; men ziet dus, dat $\gamma^{m_3^2}$ een $m_1^2m_2$-voudige kromme van het oppervlak A is. Evenzoo is $\beta^{m_2^2}$ een $m_1^2m_3$-voudige kromme van het oppervlak A.

De volledige doorsnede der oppervlakken A en b^{m_2} is dus van den graad:

$$m_1^2m_3 \,.\, m_2^2 + m_1^2m_2 \,.\, m_2m_3 = 2m_1^2m_2^2m_3,$$

de *graad* van A bedraagt dus $2m_1^2m_2m_3$.

Uit de definitie van het oppervlak A volgt onmiddellijk, *dat elk punt van* A *behoort tot een groep der* $I^{m_1m_2m_3}$, *waarvan één der punten op* $x^{m_1^2}$ *ligt.*

Evenzoo vindt men bij $\beta^{m_2^2}$ een oppervlak B van den graad $2m_1m_2^2m_3$, en bij $\gamma^{m_3^2}$ een oppervlak C van den graad $2m_1m_2m_3^2$.

§ 2. Daar de $I^{m_1m_2m_3}$ ∞^3 puntengroepen bevat, vormen de verbindingslijnen van toegevoegde punten een *stralencomplex* Γ.

Om den *graad* van dezen complex te vinden, beschouwen wij het bijzondere geval, dat twee der oppervlakken c^{m_3}, waaruit de bundel (c^{m_3}) bestaat, ontaard zijn in een plat vlak en een oppervlak van den graad (m_3-1). Wij zullen deze beide vlakken aanduiden door π_1 en π_2, de bijbehoorende oppervlakken door $c_1^{m_3-1}$ en $c_2^{m_3-1}$.

De basiskromme $\gamma^{m_3^2}$ ontaardt nu in de volgende deelen:

1e de snijlijn γ der beide vlakken π_1 en π_2.

2e de doorsnede $\gamma_1^{m_3}$ van het vlak π_1 met het oppervlak $c_2^{m_3-1}$.

3e de doorsnede $\gamma_2^{m_3}$ van het vlak π_2 met het oppervlak $c_1^{m_3-1}$.

4e de doorsnede $\gamma^{(m_3-1)^2}$ der beide oppervlakken $c_1^{m_3-1}$ en $c_2^{m_3-1}$.

Wij bepalen nu de klasse der kromme, welke omhuld wordt door de stralen van den complex Γ, die gelegen zijn in een plat vlak V door de genoemde snijlijn γ.

Aan elk punt P_γ der rechte γ is een geheele kromme $(C)^{m_1 m_2}$ toegevoegd, welke door het vlak V, behalve in P_γ, nog in $(m_1 m_2-1)$ andere punten gesneden wordt. De verbindingslijnen van P_γ met deze punten zijn blijkbaar stralen van den complex Γ. Doorloopt het punt P_γ nu de rechte γ, dan omhullen deze verbindingslijnen een kromme γ^*, welke een deel der gezochte complexkromme is.

De rechte γ draagt zelf $(m_1-1)(m_2-1)$ paren toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2 m_3}$: immers, er zijn $(m_1-1)(m_2-1)$ krommen $\rho^{m_1 m_2} = (a^{m_1}, b^{m_2})$, die de rechte γ tot bisecante hebben (Hfdst. II, § 13). Doorloopt dus het punt P_γ de rechte γ, dan zal bij $2(m_1-1)(m_2-1)$ standen van P_γ een der genoemde verbindingslijnen met de lijn γ samenvallen; γ is dus een $2(m_1-1)(m_2-1)$-voudige raaklijn van de kromme γ^*.

Door een punt P_γ der rechte γ kan men, behalve deze meervoudige raaklijn, nog $(m_1 m_2-1)$ raaklijnen van γ^* trekken; de *klasse* van γ^* bedraagt dus:

$$3m_1m_2 - 2(m_1 + m_2) + 1.$$

Om de klasse te vinden van het andere deel der in het vlak V gelegen complexkromme, gaan wij als volgt te werk:

De twee bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) worden door het vlak V gesneden volgens twee bundels van vlakke krommen; hetzelfde geldt voor den bundel (c^{m_3}). Daar nu elk oppervlak c^{m_3} door de rechte γ gaat, en dus door het vlak V nog slechts volgens een veranderlijke kromme van den graad (m_3-1) wordt gesneden, bestaat de laatstgenoemde bundel uit krommen van den graad (m_3-1). Zoo vaak nu drie krommen uit deze drie bundels *twee* punten gemeen hebben, vormen deze punten een toegevoegd paar der $I^{m_1m_2m_3}$, en is hun verbindingslijn een straal van Γ.

Men kan nu echter den genoemden bundel van krommen van den graad (m_3-1) ook als doorsnede van het vlak V met een bundel van oppervlakken (c^{m_3-1}) beschouwen. Hieruit blijkt, dat de klasse der gezochte restkromme gelijk moet zijn aan den graad van den stralencomplex Γ', die bij drie bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3-1}) behoort.

Indien dus het getal m_3 met *één* afneemt, zal de graad van den complex Γ verminderen met:

$$3m_1m_2 - 2(m_1 + m_2) + 1.$$

Voor $m_3 = 1$ bestaat de bundel (c^{m_3}) uit platte vlakken. Elke twee toegevoegde punten liggen in eenzelfde vlak, hun verbindingslijn moet dus de basisrechte van den bundel snijden. De complex Γ is nu *lineair*, en wel moet deze lineaire complex $(m_1-1)(m_2-1)$ malen geteld worden, daar elke straal daarvan $(m_1-1)(m_2-1)$ paren toegevoegde punten draagt.

In het algemeen is dus de graad van Γ:

$$(m_1-1)(m_2-1)+(m_3-1)[3m_1m_2-2(m_1+m_2)+1]=$$
$$=3m_1m_2m_3-2\Sigma m_1m_2+\Sigma m_1.$$

§ 3. Wij gaan thans over tot de beschouwing van de *coïncidenties* der $I^{m_1m_2m_3}$.

In zulk een coïncidentie vallen twee der snijpunten van drie oppervlakken uit de drie bundels samen; die oppervlakken hebben daar dus een gemeenschappelijke *raaklijn.* Deze raaklijn is de verbindingslijn der beide samengevallen punten, dus de *drager* der coïncidentie.

Trekt men uit een punt P de raaklijnen aan alle oppervlakken a^{m_1} van den bundel (a^{m_1}), dan is de m.p. der raakpunten een zeker oppervlak, het *pooloppervlak* van het punt P t. o. v. den bundel (a^{m_1}).

Zij de vergelijking van dezen bundel: $a_1^{m_1}+\lambda a_2^{m_1}=0\ldots(1)$.

Zijn (x_1, x_2, x_3, x_4) de homogene coördinaten van het punt P, dan is het eerste pooloppervlak van P t. o v. een oppervlak van den bundel (a^{m_1}):

$$\sum_1^4 x_k \frac{\partial a_1^{m_1}}{\partial X_k}+\lambda\sum_1^4 x_k \frac{\partial a_2^{m_1}}{\partial X_k}=0\ldots(2)$$

als $(X_1X_2X_3X_4)$ loopende coördinaten voorstellen.

Elimineert men λ uit de vergelijkingen (1) en (2), dan vindt men de vergelijking van het genoemde pooloppervlak. Dit oppervlak gaat door P en heeft in P een *enkelvoudig punt;* immers, de raaklijnen van dit pooloppervlak in P zijn de raaklijnen in P van dàt oppervlak a^{m_1}, dat door P gaat.

De pooloppervlakken van P t. o. v. de bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}) zijn achtereenvolgens van den graad:

$(2m_1-1)$, $(2m_2-1)$ en $(2m_3-1)$; zij hebben dus buiten P nog: $8m_1m_2m_3 - 4\Sigma m_1m_2 + 2\Sigma m_1 - 2$ punten gemeen. Is Q een dezer punten, dan zal er in elken der drie bundels een oppervlak zijn, dat de lijn PQ in het punt Q aanraakt; Q is dus een coïncidentie der $I^{m_1m_2m_3}$, waarvan de drager door P gaat.

De dragers van de coïncidenties der involutie vormen dus een stralencongruentie van den graad:

$$8m_1m_2m_3 - 4\Sigma m_1m_2 + 2\Sigma m_1 - 2.$$

§ 4. In de vorige § is gebleken, dat de coëfficiënten der vergelijking van het pooloppervlak van een punt P t. o. v. een bundel (a^{m_1}) de coördinaten van het punt P *lineair* bevatten.

Indien het punt P dus een rechte lijn *l* doorloopt, zal het genoemde oppervlak een *bundel* beschrijven, waarvan de exemplaren *projectief* aan de punten van *l* zijn toegevoegd. De pooloppervlakken van het punt P t.o.v. de bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}) beschrijven dus drie bundels, welke in projectief verband zijn met de punten der rechte *l*, dus ook onderling projectief overeenkomen.

Zijn nu drie bundels van oppervlakken, achtereenvolgens van de graden n_1, n_2, n_3, in projectief verband, dan is de meetkundige plaats der snijpunten van overeenkomstige oppervlakken een kromme van den graad: $(n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2)$. Voor de drie bundels van pooloppervlakken wordt dit: $\Sigma(2m_1-1)(2m_2-1)$.

Nu zal één der snijpunten van de drie pooloppervlakken, die bij eenzelfde punt P behooren, in dit punt P vallen, en dus de rechte *l* doorloopen. De m.p. der overige punten is dus een kromme ϑ_1 van den graad:

$$4\,\Sigma m_1 m_2 - 4\,\Sigma m_1 + 2.$$

Dit is dus *de meetkundige plaats van de coïncidenties der* $I^{m_1 m_2 m_3}$, *welker dragers de rechte l snijden.*

Doorloopt het punt P een *plat vlak V*, dan beschrijven de pooloppervlakken van P drie *netten*, welke in projectief verband zijn met de punten van *V*, dus ook onderling projectief. De m.p. der snijpunten van overeenkomstige oppervlakken is nu een oppervlak van den graad $\Sigma\,(2m_1-1)$.

Eén dezer snijpunten valt weer steeds in het punt P en doorloopt het vlak *V*; de m.p. der overige is een oppervlak $\triangle$ [1]) van den graad $2\,\Sigma m_1 - 4$.

Dit is dus de m.p. van de coïncidenties der $I^{m_1 m_2 m_3}$, welker dragers het vlak *V* snijden. Daar echter *elke* drager het vlak *V* moet snijden, is het oppervlak $\triangle$ de *meetkundige plaats van alle coïncidenties der involutie.*

De zooeven gevonden kromme ϑ_l zal de bijbehoorende rechte *l* snijden in de coïncidenties, welke op *l* zelf gelegen zijn, dus in de snijpunten van de rechte *l* met het oppervlak $\triangle$.

Een plat vlak *V* door de rechte *l* snijdt nu de kromme ϑ_l buiten *l* nog in

$$4\,\Sigma m_1 m_2 - 6\,\Sigma m_1 + 6$$

punten. Elk van deze is een coïncidentie, waarvan de drager, daar hij de rechte *l* snijdt, geheel in het vlak *V* moet liggen. Omgekeerd moet elke in *V* gelegen drager de rechte *l* snijden. Dit getal geeft dus het totale aantal in *V* gelegen dragers aan.

[1]) Dit oppervlak is uitvoerig behandeld door G. AGUGLIA (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, XX, blz. 305).

De dragers van de coïncidenties der involutie vormen dus een stralencongruentie van de klasse:

$$4\,\Sigma m_1 m_2 - 6\,\Sigma m_1 + 6.$$

§ 5. Het coïncidentie-oppervlak $\triangle$ gaat door de basiskrommen ${}_{\alpha}m_1^2$, ${}_{\beta}m_2^2$ en ${}_{\gamma}m_3^2$.

In § 1 is nl. gebleken, dat een punt P_α der kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ tot ∞^1 groepen der $I^{m_1 m_2 m_3}$ behoort; deze groepen worden gevormd door de snijpunten der oppervlakken a^{m_1} met de kromme $(A)^{m_2 m_3}$, die door het punt P_α gaat. Nu is er *één* oppervlak a^{m_1}, dat deze kromme in het punt P_α aanraakt, dus *één* in P_α gelegen coïncidentie. Het punt P_α ligt dus op het oppervlak $\triangle$, en hetzelfde geldt voor de geheele kromme ${}_{\alpha}m_1^2$.

Verder kunnen wij aantoonen, dat het oppervlak $\triangle$ langs de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ het in § 1 beschouwde oppervlak A *aanraakt.* Hiertoe merken wij op, dat een willekeurige kromme $\rho^{m_2 m_3} = (b^{m_2}, c^{m_3})$ het oppervlak $\triangle$ snijdt in de coïncidenties, welke op deze kromme gelegen zijn, dus in de punten, waarin de kromme $\rho^{m_2 m_3}$ door oppervlakken a^{m_1} wordt aangeraakt. Indien nu de kromme $\rho^{m_2 m_3}$ de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ in een punt P_α snijdt, dus een kromme $(A)^{m_2 m_3}$ is, zullen twee dezer oppervlakken samenvallen tot het oppervlak a^{m_1}, dat de kromme in het punt P_α aanraakt; twee der genoemde snijpunten vallen dus in het punt P_α samen. Elke der krommen $(A)^{m_2 m_3}$ raakt dus het oppervlak $\triangle$ in het bijbehoorende punt P_α aan, waaruit het gestelde onmiddellijk volgt.

Evenzoo zal het oppervlak $\triangle$ langs de krommen ${}_{\beta}m_2^2$ en ${}_{\gamma}m_3^2$ de bijbehoorende oppervlakken B en C aanraken.

Het oppervlak $\triangle$ zal ook gaan door de kromme σ_{ab},

die de m. p. is der punten, waarin een oppervlak a^{m_1} en een oppervlak b^{m_2} elkaar aanraken. In zulk een punt toch heeft de doorsnede $\rho^{m_1 m_2}$ der bijbehoorende oppervlakken een *dubbelpunt;* het oppervlak c^{m_3}, dat door dit punt gaat, heeft daar dus twee samenvallende punten met de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ gemeen, zoodat dit punt een coïncidentie der $I^{m_1 m_2 m_3}$ is.

Voor den *graad* dezer kromme σ_{ab} is in Hfdst. II, § 3 gevonden:

$$3(m_1^2 + m_2^2) + 4m_1 m_2 - 8(m_1 + m_2) + 6.$$

Evenzoo zal het oppervlak $\triangle$ gaan door de aanrakingskromme σ_{bc} der bundels (b^{m_2}) en (c^{m_3}), en door de aanrakingskromme σ_{ca} der bundels (c^{m_3}) en (a^{m_1}).

§ 6. Een willekeurige kromme $\rho^{m_1 m_2} = (a^{m_1}, b^{m_2})$ zal het oppervlak $\triangle$, behalve in de punten van $\rho^{m_1 m_2}$, die op de basiskrommen $\alpha^{m_1^2}$ en $\beta^{m_2^2}$ liggen, nog snijden in de op $\rho^{m_1 m_2}$ gelegen coïncidenties. Beschouwen wij nu een kromme $\rho^{m_1 m_2}$, die het oppervlak $\triangle$ buiten een der basiskrommen *aanraakt,* dan zullen in het raakpunt Q twee dezer coïncidenties samenvallen. Zulk een samenvallen van twee coïncidenties moet hierdoor veroorzaakt zijn, dat in het punt Q *drie toegevoegde punten* der $I^{m_1 m_2 m_3}$ zijn samengevallen.

Om de meetkundige plaats ψ dezer punten Q te vinden, merken wij op, dat er ∞^1 krommen $\rho^{m_1 m_2}$ zijn, die een willekeurig oppervlak O^n van den *n*-den graad aanraken, en dat, gelijk in Hfdst. I, § 14 gevonden is, de m.p. der raakpunten een kromme is van den graad:

$$(2m_1 + 2m_2 - 3)n + n(n - 1).$$

Voor het oppervlak $\triangle$ wordt dit:

$$(2\Sigma m_1 - 4)(2m_1 + 2m_2 + 2\Sigma m_1 - 8).$$

Tot deze kromme behooren nu echter:

1e de basiskrommen ${}_{\alpha}{}^{m_1^2}$ en ${}_{\beta}{}^{m_2^2}$, elk *tweemaal* geteld. Door een punt P_α van ${}_{\alpha}{}^{m_1^2}$ gaan nl. een eindig aantal krommen ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$, die een oppervlak O^n aanraken; deze zijn gelegen op het oppervlak b^{m_2}, dat door P_α gaat. Ligt P_α nu op O^n *zelf*, dan zullen twee dier krommen samenvallen tot de kromme ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$, die O^n *in* P_α aanraakt: het punt P_α moet dus tweemaal tot de bijbehoorende raakpunten worden gerekend. En ligt de geheele kromme ${}_{\alpha}{}^{m_1^2}$ op O^n, gelijk dit bij het oppervlak $\triangle$ het geval is, dan behoort zij tweemaal tot de m.p. der raakpunten. Hetzelfde geldt voor de kromme ${}_{\beta}{}^{m_2^2}$;

2e de basiskromme ${}_{\gamma}{}^{m_3^2}$. Boven is nl. gebleken, dat de kromme ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$, die door een punt P_γ dezer kromme gaat, het oppervlak $\triangle$ in dit punt aanraakt;

3e de aanrakingskromme σ_{ab} der beide bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}). De kromme ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$, die door een punt van σ_{ab} gaat, heeft daar nl. een dubbelpunt, en moet dus ook gerekend worden tot de krommen, die het oppervlak $\triangle$ aanraken. Het oppervlak c^{m_3}, dat door zulk een punt gaat, zal daar echter in 't algemeen geen der beide takken van ${}_{\rho}{}^{m_1 m_2}$ aanraken, zoodat geen drie toegevoegde punten in zulk een punt samenvallen.

De gezochte meetkundige plaats ψ der punten Q is dus van den graad:

$$(2\Sigma m_1 - 4)(2m_1 + 2m_2 + 2\Sigma m_1 - 8) - 2m_1^2 - 2m_2^2 - m_3^2 - [3(m_1^2 + m_2^2) + 4m_1 m_2 - 8(m_1 + m_2) + 6] =$$
$$= 3\Sigma m_1^2 + 12\Sigma m_1 m_2 - 24\Sigma m_1 + 26.$$

§ 7. Een punt P van het oppervlak $\triangle$ behoort tot

een groep der $I^{m_1 m_2 m_3}$, waarvan twee punten in P samenvallen; de overige punten van zulk een groep noemen wij *vertakkingspunten* der $I^{m_1 m_2 m_3}$, hun meetkundige plaats het *vertakkingsoppervlak* $\triangle'$.

Wij bewijzen eerst, dat dit oppervlak $\triangle'$ de drie basiskrommen tot *meervoudige krommen* heeft.

Elk punt van de kromme $(A)^{m_2 m_3}$, die door een punt P_α der kromme ${}_\alpha m_1^2$ gaat, behoort tot een groep, die ook P_α bevat. Dit geldt ook voor de snijpunten dezer $(A)^{m_2 m_3}$ met het oppervlak $\triangle$: voor elk dezer snijpunten gaat het oppervlak $\triangle'$ dus éénmaal door P_α. Hun aantal geeft dus de veelvoudigheid, waarmee de kromme ${}_\alpha m_1^2$ tot het oppervlak $\triangle'$ behoort.

Enkele der snijpunten van de kromme $(A)^{m_2 m_3}$ met het oppervlak $\triangle$ liggen echter op de drie basiskrommen, en voor *deze* snijpunten geldt de pas gegeven redeneering *niet*. Een punt P_α van ${}_\alpha m_1^2$ behoort nl. tot ∞^1 groepen der $I^{m_1 m_2 m_3}$; om uit te maken, welke punten van $\triangle'$ bij P_α *als punt van* $\triangle$ behooren, moeten wij een grensovergang toepassen. Hiertoe laten wij een punt P over het oppervlak $\triangle$ tot P_α naderen. In P valt dan voortdurend een coïncidentie der $I^{m_1 m_2 m_3}$, en dit moet ook in de limiet zoo zijn. Nu is er *één* groep der $I^{m_1 m_2 m_3}$, die in P_α een coïncidentie heeft; deze wordt gevormd door de snijpunten van de door P_α gaande kromme $(A)^{m_2 m_3}$ met het oppervlak a^{m_1}, dat deze kromme in P_α *aanraakt*. Van deze snijpunten ligt in 't algemeen, buiten P_α, geen enkele op een der basiskrommen; het punt P_α draagt dus *niet* bij tot de veelvoudigheid, waarmee een dezer krommen tot het oppervlak $\triangle'$ behoort. Hetzelfde geldt voor een punt op een der andere basiskrommen.

De kromme $(A)^{m_2m_3}$ *raakt* nu in het punt P_α het oppervlak Δ *aan*. Verder heeft $(A)^{m_2m_3}$ $m_2^2m_3$ punten gemeen met de kromme $\beta^{m_2^2}$; dit zijn de snijpunten van $\beta^{m_2^2}$ met het oppervlak c^{m_3}, dat door $(A)^{m_2m_3}$ gaat. Eindelijk heeft $(A)^{m_2m_3}$ met de kromme $\gamma^{m_3^2}$ $m_2m_3^2$ punten gemeen.

Buiten de basiskrommen liggen dus

$$m_2m_3(2\Sigma m_1-4)-2-m_2^2m_3-m_2m_3^2=$$
$$=2m_1m_2m_3+m_2^2m_3+m_2m_3^2-4m_2m_3-2$$

snijpunten van $(A)^{m_2m_3}$ en Δ; dit getal geeft dus de veelvoudigheid, waarmee de kromme $\alpha^{m_1^2}$ tot het oppervlak Δ' behoort. Evenzoo bepaalt men de veelvoudigheid der beide andere basiskrommen.

§ 8. Om nu den *graad* van het oppervlak Δ' te vinden, bepalen wij het aantal snijpunten van Δ' met een willekeurige kromme $\rho^{m_1m_2}$.

Deze zal het oppervlak Δ' ten eerste snijden in de punten, welke toegevoegd zijn aan de snijpunten van $\rho^{m_1m_2}$ met het oppervlak Δ; immers, elk punt van Δ' is door de $I^{m_1m_2m_3}$ aan een punt van Δ toegevoegd, en toegevoegde punten liggen op eenzelfde kromme $\rho^{m_1m_2}$. Van deze snijpunten moet men echter uitzonderen de punten van $\rho^{m_1m_2}$, die op een der basiskrommen gelegen zijn; immers, de punten van Δ', welke aan een punt P_α van $\alpha^{m_1^2}$ als punt van Δ zijn toegevoegd, en die boven reeds bepaald zijn, zullen niet zijn gelegen op een willekeurige door P_α gaande $\rho^{m_1m_2}$.

De kromme $\rho^{m_1m_2}$ heeft met de kromme $\alpha^{m_1^2}$ $m_1^2m_2$ punten gemeen, met de kromme $\beta^{m_2^2}$ $m_1m_2^2$ punten. Buiten de basiskrommen liggen dus

$$m_1m_2(2\Sigma m_1-4)-m_1^2m_2-m_1m_2^2=$$

$$=m_1m_2(m_1+m_2+2m_3-4)$$

snijpunten van ${}_\rho{}^{m_1m_2}$ met het oppervlak $\triangle$; aan elk dezer punten zijn $(m_1m_2m_3-2)$ punten van $\triangle'$ toegevoegd.

In elk der $m_1^2m_2$ op ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ gelegen punten van ${}_\rho{}^{m_1m_2}$ vallen verder

$$2m_1m_2m_3+m_2^2m_3+m_2m_3^2-4m_2m_3-2$$

snijpunten van ${}_\rho{}^{m_1m_2}$ met het oppervlak $\triangle'$; immers, dit getal geeft aan, hoeveel malen het oppervlak $\triangle'$ door de kromme ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ gaat. Evenzoo vallen in elk der $m_1m_2^2$ op ${}_\beta{}^{m_2^2}$ gelegen punten van ${}_\rho{}^{m_1m_2}$

$$2m_1m_2m_3+m_1^2m_3+m_1m_3^2-4m_1m_3-2$$

snijpunten van ${}_\rho{}^{m_1m_2}$ en $\triangle'$.

Het totale aantal snijpunten van de kromme ${}_\rho{}^{m_1m_2}$ en het oppervlak $\triangle'$ bedraagt nu:

$$\begin{aligned}&m_1m_2(m_1+m_2+2m_3-4)(m_1m_2m_3-2)+\\&+m_1^2m_2(2m_1m_2m_3+m_2^2m_3+m_2m_3^2-4m_2m_3-2)+\\&+m_1m_2^2(2m_1m_2m_3+m_1^2m_3+m_1m_3^2-4m_1m_3-2).\end{aligned}$$

Voor den *graad* van het oppervlak $\triangle'$ vindt men hieruit: $m_1m_2m_3(4\Sigma m_1-12)-4\Sigma m_1+8$.

De oppervlakken $\triangle$ en $\triangle'$ zullen elkaar *aanraken* langs de in § 6 beschouwde kromme ψ; dit wordt evenzoo bewezen, als dit in Hfdst. II, § 6 gebeurd is. Verder zullen zij elkaar snijden langs de basiskrommen, welke enkelvoudige krommen van $\triangle$, doch meervoudige van $\triangle'$ zijn.

Zooals men gemakkelijk inziet, zullen zij elkaar verder snijden volgens een kromme χ, welke *de meetkundige plaats is van de coïncidenties van die groepen der* $I^{m_1m_2m_3}$, *welke twee coïncidenties bevatten.*

Voor den *graad* dezer kromme χ vindt men:

$$(2\Sigma m_1-4)[m_1m_2m_3(4\Sigma m_1-12)-4\Sigma m_1+8]-$$
$$-2(3\Sigma m_1^2+12\Sigma m_1m_2-24\Sigma m_1+26)-$$
$$-\Sigma m_1^2(2m_1m_2m_3+m_2^2m_3+m_2m_3^2-4m_2m_3-2)=$$
$$=m_1m_2m_3(6\Sigma m_1^2+14\Sigma m_1m_2-36\Sigma m_1+48)-12\Sigma m_1^2-$$
$$-40\Sigma m_1m_2+80\Sigma m_1-84.$$

§ 9. Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen de punten P', die met P tot eenzelfde groep der $I^{m_1m_2m_3}$ behooren, een kromme l' beschrijven.

De rechte l snijdt het in § 1 beschouwde oppervlak A in $2m_1^2m_2m_3$ punten. Elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1m_2m_3}$, waarvan één der punten op de kromme ${}_\alpha m_1^2$ ligt; de krommen l' en ${}_\alpha m_1^2$ hebben dus $2m_1^2m_2m_3$ punten gemeen.

Een oppervlak a^{m_1} snijdt de kromme l', behalve in deze $2m_1^2m_2m_3$ punten, in de $m_1(m_1m_2m_3-1)$ punten, welke toegevoegd zijn aan de m_1 snijpunten van het oppervlak a^{m_1} met de rechte l. De *graad* van l' bedraagt dus $(3m_1m_2m_3-1)$.

De rechte l en de kromme l' snijden elkaar in de $(2\Sigma m_1-4)$ snijpunten van de rechte l met het oppervlak Δ; want in elk dezer punten valt een punt van l met een der daaraan toegevoegde, op l' gelegen, punten samen.

§ 10. Doorloopt een punt P een plat vlak V, dan zullen de punten P', die met P tot eenzelfde groep der $I^{m_1m_2m_3}$ behooren, een oppervlak Φ_v beschrijven.

Wij toonen eerst aan, dat dit oppervlak Φ_v de drie basiskrommen tot *meervoudige krommen* heeft. Hiertoe merken wij op, dat het vlak V de kromme $(A)^{m_2m_3}$, die

door een punt P_α der kromme ${}_\alpha m_1^2$ gaat, in m_2m_3 punten snijdt; elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1m_2m_3}$, die ook P_α bevat. Elk punt P_α is dus aan m_2m_3 punten van het vlak V toegevoegd, ${}_\alpha m_1^2$ is dus een m_2m_3-voudige kromme van het oppervlak Φ_v.

Evenzoo is ${}_\beta m_2^2$ een m_3m_1-voudige kromme, ${}_\gamma m_3^2$ een m_1m_2-voudige kromme van het oppervlak Φ_v.

Een kromme ${}_\rho m_1m_2$ zal het oppervlak Φ_v ten eerste snijden in de $m_1m_2(m_1m_2m_3-1)$ punten, welke toegevoegd zijn aan de m_1m_2 snijpunten van ${}_\rho m_1m_2$ met het vlak V.

Verder heeft ${}_\rho m_1m_2$ $m_1^2m_2$ punten gemeen met de kromme ${}_\alpha m_1^2$, $m_1m_2^2$ punten met de kromme ${}_\beta m_2^2$. In elk der eerstgenoemde punten vallen m_2m_3 snijpunten, in elk der laatstgenoemde punten m_3m_1 snijpunten van de kromme ${}_\rho m_1m_2$ met het oppervlak Φ_v.

Het totale aantal dezer snijpunten bedraagt dus $m_1m_2(3m_1m_2m_3-1)$, de *graad* van Φ_v is dus $(3m_1m_2m_3-1)$.

Het vlak V en het oppervlak Φ_v snijden elkaar:

1e volgens de doorsnede δ_v van het vlak V en het coïncidentie-oppervlak $\triangle$; in elk punt dezer doorsnede toch valt een punt van V met een der daaraan toegevoegde, op Φ_v gelegen, punten samen;

2e volgens een restdoorsnede φ_v van den graad:

$$3m_1m_2m_3 - 2\Sigma m_1 + 3.$$

Gemakkelijk ziet men, dat deze kromme φ_v *de meetkundige plaats moet zijn van de in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten der $I^{m_1m_2m_3}$.*

De volledige doorsnede van het vlak V en het oppervlak Φ_v moet m_2m_3-voudige punten hebben in de snijpunten van het vlak V met de kromme ${}_\alpha m_1^2$. Nu gaat het oppervlak $\triangle$ éénmaal door deze kromme, dus de krom-

me δ_v éénmaal door elk dezer punten; de kromme Φ_v heeft in deze snijpunten dus (m_2m_3-1)-voudige punten.

Evenzoo heeft de kromme Φ_v (m_3m_1-1)-voudige punten in de snijpunten van het vlak V met de kromme $\beta^{m_2^2}$, en (m_1m_2-1)-voudige punten in de snijpunten van het vlak V met de kromme $\gamma^{m_3^2}$.

Behalve in deze punten snijden de krommen Φ_v en δ_v elkaar in *die* coïncidenties der $I^{m_1m_2m_3}$, waarvan de dragers in het vlak V gelegen zijn; immers, ook deze coïncidenties zijn paren toegevoegde punten, die in het vlak V liggen en bevinden zich dus op de kromme Φ_v.

Volgens § 4 bedraagt het aantal dezer coïncidenties

$$4\,\Sigma m_1m_2 - 6\,\Sigma m_1 + 6.$$

Er blijven nog

$$(2\,\Sigma m_1 - 4)(3m_1m_2m_3 - 2\,\Sigma m_1 + 3) - \Sigma m_1^2(m_2m_3 - 1) - \\ - (4\,\Sigma m_1m_2 - 6\,\Sigma m_1 + 6) = \\ = 5m_1m_2m_3\,\Sigma m_1 - 12m_1m_2m_3 - 3\,\Sigma m_1^2 - 12\,\Sigma m_1m_2 + \\ + 20\,\Sigma m_1 - 18$$

snijpunten van Φ_v en δ_v over. Dit zijn *de in het vlak V gelegen coïncidenties der $I^{m_1m_2m_3}$, waarbij nog een der toegevoegde punten in het vlak V valt;* coïncidenties zijn het nl. als punten van δ_v, terwijl aan elk dezer punten als punt van Φ_v nog een tweede punt dier kromme is toegevoegd.

§ 11. Indien een punt P de kromme Φ_v doorloopt, zal een der aan P toegevoegde punten zich eveneens op deze kromme bevinden: de $(m_1m_2m_3 - 2)$ overige doorloopen een kromme Φ'_v, waarvan wij den graad zullen bepalen.

De kromme Φ'_v zal een zeker aantal punten gemeen

hebben met de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$. Immers, de kromme φ_v snijdt het in § 1 beschouwde oppervlak A in een zeker aantal punten; elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1 m_2 m_3}$, waarvan een der punten op de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ valt, en voor elk dezer punten zal dus de kromme φ'_v de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ treffen.

Van deze snijpunten van φ_v en het oppervlak A moet men echter uitzonderen de punten van φ_v, die op de basiskrommen gelegen zijn, en wel in de snijpunten van deze basiskrommen met het vlak *V*.

Aan een der snijpunten P_α van de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ en het vlak *V* is een geheele kromme $(A)^{m_2 m_3}$ toegevoegd. Nadert nu een punt P langs een der takken van φ_v tot P_α, dan zullen de aan P toegevoegde punten bepaalde limietstanden op de kromme $(A)^{m_2 m_3}$ bereiken, en wel zijn dit de snijpunten van de kromme $(A)^{m_2 m_3}$ met *dat* oppervlak a^{m_1}, dat den genoemden tak van φ_v in het punt P_α *aanraakt*. Nu heeft het vlak *V*, en daarmee elk der genoemde takken van φ_v afzonderlijk, een geheel willekeurige ligging t.o.v. de basiskrommen; *geen* dezer snijpunten zal dus in 't algemeen op een der basiskrommen gelegen zijn. Het punt P_α draagt dus, als punt van φ_v, niet bij tot het aantal malen, dat de kromme φ'_v en de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ elkaar treffen.

Hetzelfde geldt voor de snijpunten van het vlak *V* met de krommen ${}_{\beta}m_2^2$ en ${}_{\gamma}m_3^2$.

De snijpunten van het vlak *V* met de kromme ${}_{\alpha}m_1^2$ zijn enkelvoudige punten van het oppervlak A, de snijpunten met de kromme ${}_{\beta}m_2^2$ zijn $m_1^2 m_3$-voudige, en die met de kromme ${}_{\gamma}m_3^2$ zijn $m_1^2 m_2$-voudige punten van dit oppervlak.

Buiten de basiskrommen snijden de krommen φ_v en het oppervlak A elkaar in

$$2m_1^2m_2m_3(3m_1m_2m_3-2\Sigma m_1+3)-m_1^2(m_2m_3-1)-$$
$$-m_2^2.m_1^2m_3(m_1m_3-1)-m_3^2.m_1^2m_2(m_1m_2-1)$$

punten. Zelfs voor deze geldt echter de boven gegeven redeneering nog niet zonder uitzondering. Tot de snijpunten behooren nl. nog de $m_1^2(m_2m_3-1)$ punten van φ_v, welke door de op φ_v gelegen pareninvolutie zijn toegevoegd aan de m_1^2 punten P_α van φ_v, welke elk een (m_2m_3-1)-voudig punt van φ_v zijn. Daar elk der genoemde punten aan een punt P_α is toegevoegd, liggen zij op het oppervlak A. Werkelijk behoort elk dezer punten tot een groep der $I^{m_1m_2m_3}$, waarvan een der andere punten op de kromme ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ ligt; dit punt is nu echter het bijbehoorende punt van φ_v, en *niet* een der $(m_1m_2m_3-2)$ overige, op φ'_v gelegen, punten.

Er blijven nog over

$$m_1^2m_2m_3(4m_1m_2m_3-4m_1-3m_2-3m_3+4)+2m_1^2$$

snijpunten van φ_v en het oppervlak A. Deze zijn nu echter twee aan twee aan elkaar toegevoegd. Immers, is P een dezer punten, P' het bijbehoorende punt van φ_v, dan zullen de punten P en P' op *dezelfde* kromme $(A)^{m_2m_3}$ zijn gelegen, dus *beide* snijpunten zijn van de kromme φ_v met het oppervlak A.

De laatstgevonden snijpunten vormen dus

$$m_1^2m_2m_3(2m_1m_2m_3-2m_1-\tfrac{3}{2}m_2-\tfrac{3}{2}m_3+2)+m_1^2$$

paren, waarbij telkens een der toegevoegde punten op de kromme ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ valt. *Dit is dus het aantal malen, dat de kromme φ'_v en de kromme ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ elkaar treffen.*

Een oppervlak a^{m_1} snijdt nu de kromme φ'_v, behalve in deze op de kromme ${}_\alpha{}^{m_1^2}$ gelegen punten, in de punten,

welke toegevoegd zijn aan de snijpunten van a^{m_1} met de kromme Φ_v. Deze laatste snijpunten zijn twee aan twee aan elkaar toegevoegd; immers, elke twee toegevoegde punten van de kromme Φ_v moeten op eenzelfde oppervlak a^{m_1} zijn gelegen. Bij elk dezer paren snijpunten behooren nu $(m_1m_2m_3-2)$ punten der kromme Φ'_v.

Van deze snijpunten van Φ_v met een oppervlak a^{m_1} moet men echter uitzonderen de op ${}_\alpha m_1^2$ gelegen punten P_α; de punten, die aan zulk een punt P_α zijn toegevoegd, zijn boven reeds bepaald, en zullen *niet* gelegen zijn op een willekeurig oppervlak a^{m_1}.

Buiten de punten P_α snijden de kromme Φ_v en het oppervlak a^{m_1} elkaar in

$$m_1 3(m_1m_2m_3-2\Sigma m_1+3)-m_1^2(m_2m_3-1)$$

punten, welke

$$m_1(m_1m_2m_3-\Sigma m_1+\tfrac{m_1}{2}+\tfrac{3}{2})$$

paren vormen; aan elk dezer paren zijn $(m_1m_2m_3-2)$ punten van Φ'_v toegevoegd.

Het totale aantal snijpunten van de kromme Φ'_v en een oppervlak a^{m_1} bedraagt dus:

$$m_1^2m_2m_3\,(3m_1m_2m_3-\tfrac{5}{2}m_1-\tfrac{5}{2}m_2-\tfrac{5}{2}m_3+\tfrac{3}{2})+$$
$$+\,m_1\,(2m_1+2m_2+2m_3-3),$$

de *graad* van Φ'_v is dus:

$$m_1m_2m_3(3m_1m_2m_3-\tfrac{5}{2}\Sigma m_1+\tfrac{3}{2})+2\Sigma m_1-3.$$

§ 12. De kromme Φ'_v en het vlak V snijden elkaar ten eerste in de, in § 10 gevonden, coïncidenties, waarbij ook een der toegevoegde punten in V valt: in elk dezer punten toch valt een punt van Φ_v met een der daaraan toegevoegde, op Φ'_v gelegen, punten samen.

Er blijven over

$m_1m_2m_3\,(3m_1m_2m_3 - \frac{15}{2}\Sigma m_1 + \frac{27}{2}) + 3\Sigma m_1^2 + 12\Sigma m_1m_2 - 18\Sigma m_1 + 15$

snijpunten. Elk dezer punten is, als punt van Φ'_v, toegevoegd aan een puntenpaar der kromme Φ_v; het valt met geen der punten van dit paar samen, daar men dan een der zooeven genoemde snijpunten zou krijgen, en behoort dus tot *een in het vlak V gelegen drietal toegevoegde punten der* $I^{m_1m_2m_3}$.

Gemakkelijk ziet men nu, dat de laatstgevonden snijpunten drie aan drie aan elkaar zijn toegevoegd, en dat zij

$m_1m_2m_3\,(m_1m_2m_3 - \frac{5}{2}\Sigma m_1 + \frac{3}{2}) + \Sigma m_1^2 + 4\Sigma m_1m_2 - 6\Sigma m_1 + 5$

zulke drietallen vormen. [1])

§ 13. Met behulp van de uitkomsten der laatste §§ kunnen wij opnieuw den graad bepalen van den in § 2 beschouwden stralencomplex Γ, die door de verbindingslijnen van de toegevoegde punten der $I^{m_1m_2m_3}$ wordt gevormd.

Hiertoe merken wij op, dat de stralen van Γ, die in een vlak V liggen, de verbindingslijnen zijn van toegevoegde punten van de pareninvolutie, die op de kromme Φ_v is gelegen.

Zij nu P een willekeurig punt in het vlak V. Een rechte l door P snijdt de kromme Φ_v in

[1]) In de verhandeling van Prof. Dr. JAN DE VRIES: „*Een involutie van geassociëerde punten*" (Versl. Akad. van Wet., dl. XXI, blz. 1269), waar de hier behandelde involutie is onderzocht voor $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, is bij vergissing aangenomen, dat de krommen Φ_v en δ_v elkaar *aanraken* in de coïncidenties, welker dragers in het vlak V liggen. De kromme Φ'_v wordt in dit geval van den graad 93, en het aantal in V gelegen drietallen toegevoegde punten bedraagt 9, zooals uit de algemeene formules volgt.

$$3m_1m_2m_3 - 2\Sigma m_1 + 3$$

punten. Aan elk dezer punten is een tweede punt van Φ_v toegevoegd. Wij voegen nu aan de rechte l toe de verbindingslijnen van het punt P met de laatstgenoemde punten. In den waaier der rechten door P verkrijgen wij dan een verwantschap, waarvan beide kenmerkende getallen door het bovenstaande getal worden voorgesteld.

Van de coïncidenties dezer verwantschap zijn

$$4\Sigma m_1m_2 - 6\Sigma m_1 + 6$$

afkomstig van de coïncidenties der $I^{m_1m_2m_3}$, welker dragers in het vlak V liggen; immers, dit zijn de coïncidenties der genoemde pareninvolutie.

De overige coïncidenties worden veroorzaakt door de in V gelegen stralen van Γ, die door P gaan. Elk dezer stralen geeft *twee* coïncidenties; is nl. l zulk een straal, dan zal voor *twee* der snijpunten van l met de kromme Φ_v de toegevoegde straal met l samenvallen. Voor den graad van Γ vindt men dus, evenals in § 2,

$$3\,m_1m_2m_3 - 2\,\Sigma m_1m_2 + \Sigma m_1.$$

§ 14. Stelt men in de uitkomsten van dit hoofdstuk $m_3 = 1$, dan vindt men de uitkomsten van het vorige hoofdstuk terug.

Stelt men $m_2 = m_3$, dan vindt men:

De verbindingslijnen van toegevoegde punten van de involutie $I^{m_1m_2^2}$ vormen een stralencomplex Γ van den graad:

$$3\,m_1m_2^2 - 4\,m_1m_2 - 2\,m_2^2 + m_1 + 2\,m_2.$$

De dragers der coïncidenties vormen een stralencongruentie van den graad:

$$8m_1m_2^2 - 8m_1m_2 - 4m_2^2 + 2m_1 + 4m_2 - 2$$

en van de klasse:

$$8m_1m_2 + 4m_2^2 - 6m_1 - 12m_2 + 6.$$

De coïncidenties vormen een oppervlak Δ van den graad:

$$2m_1 + 4m_2 - 4.$$

Het vertakkingsoppervlak Δ' is van den graad:

$$m_1m_2^2(4m_1 + 8m_2 - 12) - 4m_1 - 8m_2 + 8.$$

De m.p. der punten, waarin drie toegevoegde punten der $I^{m_1m_2^2}$ samenvallen, is een kromme ψ van den graad:

$$3m_1^2 + 24m_1m_2 + 18m_2^2 - 24m_1 - 48m_2 + 26.$$

De m.p. der coïncidenties van *die* groepen, welke *twee* coïncidenties bevatten, is een kromme χ van den graad:

$$m_1m_2^2(6m_1^2 + 28m_1m_2 + 26m_2^2 - 36m_1 - 72m_2 + 48) - 12m_1^2 - \\ - 80m_1m_2 - 64m_2^2 + 80m_1 + 160m_2 - 84.$$

Doorloopt een punt P een rechte l, dan beschrijven de aan P toegevoegde punten een kromme l' van den graad:

$$3m_1m_2^2 - 1.$$

Doorloopt P een plat vlak V, dan beschrijven de aan P toegevoegde punten een oppervlak Φ_v van den graad:

$$3m_1m_2^2 - 1.$$

De meetkundige plaats der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten is een kromme φ_v van den graad:

$$3m_1m_2^2 - 2m_1 - 4m_2 + 3.$$

Het aantal in het vlak V gelegen drietallen toegevoegde punten bedraagt:

$$m_1m_2^2(m_1m_2^2 - \tfrac{5}{2}m_1 - 5m_2 + \tfrac{9}{2}) + m_1^2 + 8m_1m_2 + 6m_2^2 - 6m_1 - \\ - 12m_2 + 5.$$

§ 15. Stelt men $m_1 = m_2 = m_3 = m$, dan vindt men:
De verbindingslijnen van toegevoegde punten der invo-

lutie I^{m^3} vormen een stralencomplex Γ van den graad:

$$3m^3 - 6m^2 + 3m.$$

De dragers der coïncidenties vormen een stralencongruentie van den graad: $8m^3 - 12m^2 + 6m - 2$
en van de klasse: $12m^2 - 18m + 6.$

De coïncidenties vormen een oppervlak Δ van den graad:

$$6m - 4.$$

Het vertakkingsoppervlak Δ' is van den graad:

$$12m^4 - 12m^3 - 12m + 8.$$

De m.p. der punten, waarin *drie* toegevoegde punten der I^{m^3} samenvallen, is een kromme ψ van den graad:

$$45m^2 - 72m + 26.$$

De m.p. der coïncidenties van *die* groepen, welke *twee* coïncidenties bevatten, is een kromme $\varkappa$ van den graad:

$$60m^5 - 108m^4 + 48m^3 - 156m^2 + 240m - 84.$$

Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen de aan P toegevoegde punten een kromme l' beschrijven van den graad: $3m^3 - 1.$

Doorloopt een punt P een plat vlak V, dan beschrijven de aan P toegevoegde punten een oppervlak Φ_v van den graad: $3m^3 - 1.$

De meetkundige plaats der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten is een kromme φ_v van den graad:

$$3m^3 - 6m + 3.$$

Het aantal in het vlak V gelegen drietallen toegevoegde punten bedraagt:

$$m^6 - \tfrac{15}{2}m^4 + \tfrac{9}{2}m^3 + 15m^2 - 18m + 5.$$

HOOFDSTUK IV.

EEN BUNDEL EN EEN NET VAN OPPERVLAKKEN.

§ 1. Wij zullen thans onderstellen, dat de beide bundels (b^{m_2}) en (c^{m_3}) van het vorige hoofdstuk tot eenzelfde *net* $[b^{m_2}]$ van oppervlakken van den graad m_2 behooren. Dan is dus ook $m_3 = m_2$.

De oppervlakken b^{m_2} en c^{m_2} uit deze bundels, welke door een willekeurig punt P gaan, bepalen een bundel uit het net $[b^{m_2}]$. De basiskromme van dezen bundel, d. i. de doorsnede der beide oppervlakken, gaat door P en snijdt het oppervlak a^{m_1}, dat uit den bundel (a^{m_1}) door P gaat, in de punten, die door de involutie $I^{m_1 m_2^2}$ aan P zijn toegevoegd. Men kan de puntengroepen der involutie $I^{m_1 m_2^2}$ dus ook bepalen als de groepen der snijpunten van de oppervlakken a^{m_1} met de basiskrommen der bundels uit het net $[b^{m_2}]$.

Deze definitie is echter niet geheel met de oorspronkelijke gelijkwaardig, zooals op de volgende wijze blijkt:

Indien de bundels (b^{m_2}) en (c^{m_2}) tot eenzelfde net behooren, hebben zij één oppervlak gemeen, dat wij door $b_c^{m_2}$ zullen aanduiden. Nemen wij nu een punt P op dit oppervlak, dan zullen de oppervlakken, die uit de bundels (b^{m_2}) en (c^{m_2}) door P gaan, beide met $b_c^{m_2}$ samenvallen.

Hun snijpunten met het oppervlak a^{m_1}, dat door P gaat, zijn dus *onbepaald* en vullen een geheele ruimtekromme van den graad $m_1 m_2$; en deze snijpunten zijn de punten, die volgens de oorspronkelijke definitie der $I^{m_1 m_2^2}$ aan P zijn toegevoegd. Gaat men echter van de nieuwe definitie uit, dan zal het punt P nog steeds een bundel van oppervlakken uit het net $[b^{m_2}]$ bepalen; door P gaat dus een bepaalde basiskromme, en deze snijdt het door P gaande oppervlak a^{m_1} volgens een *bepaalde groep* van $m_1 m_2^2$ punten.

Wij zullen verder van de nieuwe definitie der $I^{m_1 m_2^2}$ uitgaan. De eigenschappen dezer $I^{m_1 m_2^2}$ kunnen dan eerst door middel van een grensovergang uit die der algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ worden afgeleid.

§ 2. Wij bepalen eerst den graad van den *stralencomplex* Γ, die door de verbindingslijnen van toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2^2}$ wordt gevormd.

Gaat men van de algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ uit, dan zullen, zooals zooeven gebleken is, de punten, welke aan een punt P zijn toegevoegd, onbepaald worden, als P op het oppervlak $b_c^{m_2}$ is gelegen; zij vullen dan een geheele ruimtekromme $\rho^{m_1 m_2}$. Elke bisecante van deze ruimtekromme moet dus als verbindingslijn van twee toegevoegde punten worden beschouwd. Bij den grensovergang wordt dus de complex Γ', die door de bisecanten der krommen $\rho^{m_1 m_2}$ wordt gevormd, van den complex Γ afgescheiden.

Om den graad van Γ' te vinden, bepalen wij de klasse der kromme, die omhuld wordt door de in een vlak V gelegen stralen van Γ'. Dit vlak V snijdt elk der opper-

vlakken a^{m_1} volgens een kromme ${}_{\alpha}m_1$, het oppervlak $b_c^{m_2}$ volgens een kromme $\beta_\gamma^{m_2}$.

Een rechte l door een punt P van V snijdt de kromme $\beta_\gamma^{m_2}$ in m_2 punten; door elk dezer punten gaat één kromme ${}_{\alpha}m_1$, die $\beta_\gamma^{m_2}$ verder nog in (m_1m_2-1) punten snijdt. Zij l' de verbindingslijn van een dezer laatste snijpunten met het punt P. Tusschen de stralen l en l' bestaat blijkbaar een verwantschap, waarvan beide kenmerkende getallen gelijk aan $m_2(m_1m_2-1)$ zijn. Van de $2m_2(m_1m_2-1)$ coïncidenties dezer verwantschap is een zeker aantal te danken aan de krommen ${}_{\alpha}m_1$, die de kromme $\beta_\gamma^{m_2}$ *aanraken;* want voor zulk een kromme ${}_{\alpha}m_1$ vallen twee der snijpunten met $\beta_\gamma^{m_2}$ samen, dus ook de verbindingslijnen dezer punten met P. Het aantal dezer krommen ${}_{\alpha}m_1$ bedraagt:

$$2m_2(m_1-1) + m_2(m_2-1).$$ [1])

De overige coïncidenties worden veroorzaakt door de stralen van Γ', die door P gaan. Is nl. l zulk een straal, en zijn Q en Q′ de beide punten, waarin l de bijbehoorende kromme ${}_{\rho}m_1m_2$ snijdt, dan zal de kromme ${}_{\alpha}m_1$, die door Q gaat, ook door Q′ gaan. Een der (m_1m_2-1) rechten l', die P verbinden met de buiten Q gelegen snijpunten van deze ${}_{\alpha}m_1$ met $\beta_\gamma^{m_2}$, valt dus met l samen. Dezelfde redeneering, als voor het punt Q, geldt ook voor het punt Q′; men ziet dus, dat *twee* der aan l toegevoegde rechten l' met l samenvallen. Elke door P gaande straal van Γ' geeft dus *twee* coïncidenties der beschouwde verwantschap.

Het aantal stralen van Γ', die in het vlak V gelegen

---

1) ZEUTHEN, Lehrbuch der abzählenden Geometrie, blz. 51.

zijn en door P gaan, dus de graad van den complex Γ' bedraagt derhalve:

$$m_1 m_2^2 - m_1 m_2 - \tfrac{1}{2} m_2 (m_2 - 1).$$

Voor de algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ is de graad van den complex Γ:

$3m_1 m_2^2 - 4m_1 m_2 - 2m_2^2 + m_1 + 2m_2$ (Hfdst. IV, § 14).

Voor de hier beschouwde $I^{m_1 m_2^2}$ is de graad van den complex Γ dus:

$$2m_1 m_2^2 - 3m_1 m_2 - \tfrac{3}{2} m_2^2 + m_1 + \tfrac{3}{2} m_2.$$

§ 3. Blijkens het voorafgaande moet bij den grensovergang elke bisecante eener kromme $\rho^{m_1 m_2}$ als verbindingslijn van twee toegevoegde punten worden beschouwd. Laat men nu de beide punten, die zulk een bisecante met de bijbehoorende $\rho^{m_1 m_2}$ gemeen heeft, *samenvallen*, dan ziet men, dat elke *raaklijn* eener kromme $\rho^{m_1 m_2}$ als drager eener *coïncidentie* beschouwd moet worden. Van de congruentie, die door de dragers van de coïncidenties der algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ gevormd wordt, is dus de congruentie van deze raaklijnen af te scheiden.

Om het aantal dezer raaklijnen te vinden, die door een punt P gaan, merken wij op, dat elk dezer raaklijnen het oppervlak $b_c^{m_2}$ aanraakt, zoodat het bijbehoorende raakpunt moet liggen op het eerste pooloppervlak van P t. o. v. $b_c^{m_2}$, welk oppervlak van den graad $(m_2 - 1)$ is. En daar elk dezer raaklijnen ook raakt aan een oppervlak a^{m_1} uit den bundel (a^{m_1}), moet dit raakpunt ook liggen op het pooloppervlak van P t. o. v. den bundel (a^{m_1}); dit pooloppervlak is van den graad $(2m_1 - 1)$ (Hfdst. III, § 3).

Het oppervlak $b_c^{m_2}$ en de twee genoemde poolopper-

vlakken snijden elkaar in $m_2(m_2-1)(2m_1-1)$ punten; dit is dus het aantal der genoemde raakpunten, dus de *graad* der door de genoemde raaklijnen gevormde congruentie.

Voor de algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ is de congruentie van de dragers der coïncidenties van den graad:

$$8m_1m_2^2-8m_1m_2-4m_2^2+2m_1+4m_2-2;$$

voor de hier beschouwde is deze graad derhalve:

$$6m_1m_2^2-6m_1m_2-3m_2^2+2m_1+3m_2-2.$$

De *klasse* der door de genoemde raaklijnen gevormde congruentie is het aantal dezer raaklijnen, gelegen in een vlak V. Elk der krommen $\rho^{m_1m_2}$ is de doorsnede van het oppervlak $b_c^{m_2}$ met een oppervlak a^{m_1}; zal dus een der raaklijnen in het vlak V gelegen zijn, dan moeten de doorsneden $\beta_\gamma^{m_2}$ en α^{m_1} van deze oppervlakken met het vlak V elkaar *aanraken*. Volgens de vorige § zijn er nu in het vlak V

$$2m_2(m_1-1)+m_2(m_2-1)$$

krommen α^{m_1}, die de kromme $\beta_\gamma^{m_2}$ aanraken; dit getal geeft dus de gezochte klasse.

Voor de algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ vormen de dragers der coïncidenties een congruentie van de klasse:

$$8m_1m_2+4m_2^2-6m_1-12m_2+6.$$

Voor de hier beschouwde $I^{m_1 m_2^2}$ wordt de klasse dus:

$$6m_1m_2+3m_2^2-6m_1-9m_2+6.$$

Door elk punt van het oppervlak $b_c^{m_2}$ gaat één oppervlak a^{m_1}, dus één kromme $\rho^{m_1m_2}$; elk dezer punten moet dus bij den grensovergang als een coïncidentie worden beschouwd, zoodat het oppervlak $b_c^{m_2}$ van het coïnci-

dentie-oppervlak $\triangle$ der algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ is af te scheiden. Dit laatste is van den graad $(2m_1 + 4m_2 - 4)$; voor de hier beschouwde $I^{m_1 m_2^2}$ is het coïncidentie-oppervlak $\triangle$ dus van den graad:

$$2m_1 + 3m_2 - 4.$$

§ 4. Dit coïncidentie-oppervlak $\triangle$ gaat door de basiskromme ${}_\alpha m_1^2$ van den bundel (a^{m_1}).

Zij nl. P_α een punt dezer kromme. De oppervlakken b^{m_2}, die door P_α gaan, vormen een bundel uit het net $[b^{m_2}]$; gemakkelijk vindt men, dat de basiskromme van dezen bundel, welke wij door $(A)^{m_2^2}$ zullen aanduiden, door *elk* der oppervlakken a^{m_1} gesneden wordt in een groep van $m_1 m_2^2$ punten, waartoe het punt P_α behoort. Nu is er *één* oppervlak a^{m_1}, dat de kromme $(A)^{m_2^2}$ in P_α *aanraakt;* dit levert dus één coïncidentie, welke in P_α valt, waarmee het gestelde bewezen is.

Verder kunnen wij aantoonen, dat het oppervlak $\triangle$ in elk punt P_α van de kromme ${}_\alpha m_1^2$ de bijbehoorende kromme $(A)^{m_2^2}$ *aanraakt.* Hiertoe beschouwen wij eerst de basiskromme ${}_\beta m_2^2$ van een willekeurigen bundel (b^{m_2}) uit het net $[b^{m_2}]$. De op deze kromme gelegen coïncidenties zijn de punten, waarin deze kromme ${}_\beta m_2^2$ door oppervlakken a^{m_1} wordt aangeraakt. Indien deze kromme nu door een punt P_α gaat, dus een kromme $(A)^{m_2^2}$ is, zullen twee dezer oppervlakken samenvallen tot het oppervlak a^{m_1}, dat de kromme *in* het punt P_α aanraakt. Twee der snijpunten van de kromme $(A)^{m_2^2}$ en het oppervlak $\triangle$ vallen dus in P_α samen.

Het oppervlak $\triangle$ zal ook gaan door de basispunten B_k $(k = 1, 2, \ldots, m_2^2)$ van het net $[b^{m_2}]$. Door een punt

B_k gaat nl. een bepaald oppervlak a^{m_1}, en er zijn ∞^1 basiskrommen $\beta^{m_2^2}$, die dit oppervlak in het punt B_k aanraken, en dus elk een in B_k gelegen coïncidentie leveren. Deze krommen zijn gelegen op het oppervlak b^{m_2}, dat het genoemde oppervlak a^{m_1} in het punt B_k aanraakt.

Een willekeurige basiskromme $\beta^{m_2^2}$ snijdt het oppervlak Δ, behalve in de punten B_k, in de op $\beta^{m_2^2}$ gelegen coïncidenties. Voor een der zooeven genoemde krommen $\beta^{m_2^2}$ zal een dezer laatste snijpunten met het punt B_k samenvallen, zoodat de kromme het oppervlak Δ in B_k *aanraakt*. Men ziet dus, dat het oppervlak Δ in elk der punten B_k raakt aan het door dat punt gaande oppervlak a^{m_1}, en tevens, dat de punten B_k *enkelvoudige punten* van het oppervlak Δ zijn.

Eindelijk zal het oppervlak Δ ook gaan door de *kernkromme* van het net $[b^{m_2}]$, d.w.z. door de meetkundige plaats der conische punten van oppervlakken van dit net. Volgens een bekende stelling is deze een kromme van den graad $6(m_2-1)^2$. Is nl. P een punt dezer kromme, dan zal de basiskromme $\beta^{m_2^2}$, die door P gaat, in P een dubbelpunt moeten hebben; deze kromme toch is de doorsnede van twee oppervlakken b^{m_2}, waarvan het eene in P een conisch punt heeft. Zij heeft dus met het door P gaande oppervlak a^{m_1} twee in P samenvallende punten gemeen, zoodat P een coïncidentie is.

§ 5. Wij zullen thans den graad bepalen van de kromme ψ, die de meetkundige plaats is der punten, waarin *drie toegevoegde punten* der $I^{m_1 m_2^2}$ samenvallen.

Een basiskromme $\beta^{m_2^2}$ snijdt het oppervlak Δ, behalve

in de punten B_k, in de op $\beta^{m_2^2}$ gelegen coïncidenties. Beschouwen wij nu een kromme $\beta^{m_2^2}$, die het oppervlak $\triangle$ in een punt Q buiten een der basispunten aanraakt. Twee der genoemde coïncidenties vallen dan in het punt Q samen; dit is alleen hierdoor mogelijk, dat in Q drie toegevoegde punten zijn samengevallen, dus doordat het punt Q op de kromme ψ ligt.

In Hfdst. I, § 14 is gebleken, dat de congruentie $[\rho^{m_2 m_3}]$, welke gevormd wordt door de doorsneden der oppervlakken van twee bundels (b^{m_2}) en (c^{m_3}), ∞^1 krommen bevat, die een oppervlak O^n aanraken, en dat de m.p. der raakpunten een kromme is van den graad:

$$(2m_2 + 2m_3 - 3)n + n(n-1).$$

Dit is de coïncidentie-kromme van de involutie, welke gevormd wordt door de snijpunten dezer krommen met het oppervlak O^n.

Behooren de twee bundels tot eenzelfde *net*, dan hebben zij één oppervlak $b_c^{m_2}$ gemeen; dit snijdt het oppervlak O^n volgens een kromme van den graad $m_2 n$. Voor een punt van deze kromme worden de daaraan toegevoegde punten onbepaald; gemakkelijk volgt hieruit, dat zij van de genoemde coïncidentie-kromme is af te scheiden. Deze laatste wordt dus van den graad:

$$(3m_2 - 3)n + n(n-1).$$

Voor het oppervlak $\triangle$, dat van den graad $(2m_1 + 3m_2 - 4)$ is, wordt deze kromme van den graad:

$$(2m_1 + 3m_2 - 4)\ (2m_1 + 6m_2 - 8).$$

Tot deze kromme behooren nu echter:

1e de kernkromme van het net $[b^{m_2}]$. De basiskromme $\beta^{m_2^2}$ toch, die door een punt dezer kernkromme gaat, heeft in dit punt een dubbelpunt, en moet dus gerekend

worden tot de krommen, die het oppervlak Δ aanraken. Het oppervlak a^{m_1} echter, dat door zulk een punt gaat, zal daar in 't algemeen geen van de beide takken der kromme $\beta^{m_2^2}$ aanraken; in zulk een punt vallen dus *geen* drie toegevoegde punten der involutie $I^{m_1 m_2^2}$ samen;

2e de basiskromme $\alpha^{m_1^2}$. In de vorige § is nl. gebleken, dat de kromme $\beta^{m_2^2}$, die door een punt P_α van de kromme $\alpha^{m_1^2}$ gaat, het oppervlak Δ in dit punt aanraakt.

Voor den graad van de kromme ψ vindt men derhalve:

$$3m_1^2 + 18m_1m_2 + 12m_2^2 - 24m_1 - 36m_2 + 26.$$

Deze kromme ψ heeft *dubbelpunten* in de basispunten B_k. Boven is nl. reeds gebleken, dat een punt B_k een coïncidentie is voor ∞^1 groepen der $I^{m_1 m_2^2}$; deze groepen worden gevormd door de snijpunten van het door B_k gaande oppervlak a^{m_1} met de ∞^1 basiskrommen $\beta^{m_2^2}$, die gelegen zijn op het oppervlak b^{m_2}, dat het genoemde oppervlak a^{m_1} in B_k aanraakt. Deze twee oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2} snijden elkaar volgens een kromme, die in het punt B_k een dubbelpunt heeft. Nu zijn er *twee* krommen $\beta^{m_2^2}$, die elk één van de beide takken dezer doorsnede in het punt B_k aanraken, en dus elk in B_k drie samenvallende punten met het oppervlak a^{m_1} gemeen hebben, er zijn dus *twee* groepen der $I^{m_1 m_2^2}$, waarvan drie punten in B_k samenvallen.

§ 6. Wij zullen thans het *vertakkingsoppervlak* Δ' der $I^{m_1 m_2^2}$ onderzoeken.

Dit oppervlak heeft de basiskromme $\alpha^{m_1^2}$ tot *meervoudige kromme*. In § 4 is nl. gebleken, dat een punt P_α dezer kromme $\alpha^{m_1^2}$ tot ∞^1 groepen der $I^{m_1 m_2^2}$ behoort; de overige punten dezer groepen liggen op de kromme

$(A)^{m_2^2}$, die door het punt P_α gaat. Deze kromme snijdt ook het oppervlak Δ in een zeker aantal punten; elk dezer punten behoort tot een groep der $I^{m_1 m_2^2}$, waarvoor P_α een vertakkingspunt is, en het aantal dezer punten geeft dus het aantal malen, dat het oppervlak Δ' door P_α gaat.

Van deze snijpunten moet men echter uitzonderen het punt P_α zelf. Dit punt toch behoort *als punt van* Δ tot een bepaalde groep der $I^{m_1 m_2^2}$; deze groep wordt gevormd door de snijpunten van de kromme $(A)^{m_2^2}$ met het oppervlak a^{m_1}, dat deze kromme in P_α *aanraakt.* Geen der overige punten van deze groep zal in het algemeen op het oppervlak Δ liggen, en voor *deze* groep is P_α dus *geen* vertakkingspunt.

Evenzoo moet men uitzonderen de m_2^3 basispunten B_k. Elk dezer punten behoort tot ∞^2 groepen der $I^{m_1 m_2^2}$; *als punt van* $(A)^{m_2^2}$ behoort het echter tot één bepaalde groep, nl. tot die, welke gevormd wordt door de snijpunten van $(A)^{m_2^2}$ met het door B_k gaande oppervlak a^{m_1}; en van deze snijpunten zal in 't algemeen geen enkele op het oppervlak Δ gelegen zijn.

Daar de kromme $(A)^{m_2^2}$ het oppervlak Δ in P_α *aanraakt,* snijdt het dit oppervlak verder nog in

$$m_2^2(2m_1 + 3m_2 - 4) - m_2^3 - 2$$

punten; dit getal geeft dus aan, hoeveel malen het oppervlak Δ' door de kromme ${}_\alpha m_1^2$ gaat.

Om nu den *graad* van Δ' te vinden, bepalen wij het aantal snijpunten van Δ' met de doorsnede ${}_\rho m_1 m_2$ van twee oppervlakken a^{m_1} en b^{m_2}. Daar het oppervlak b^{m_2} $m_1^2 m_2$ punten met de basiskromme ${}_\alpha m_1^2$ gemeen heeft, hebben de krommen ${}_\rho m_1 m_2$ en ${}_\alpha m_1^2$ $m_1^2 m_2$ punten ge-

meen; deze geven $m_1^2 m_2(2m_1 m_2^2 + 2m_2^3 - 4m_2^2 - 2)$ snijpunten van de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ met het oppervlak Δ'.

Verder zal de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ het oppervlak Δ' snijden in de $(m_1 m_2^2 - 2)$ punten, die toegevoegd zijn aan elk van de snijpunten van $\rho^{m_1 m_2}$ met het oppervlak Δ. Van deze snijpunten moet men echter uitzonderen de $m_1^2 m_2$ punten van $\rho^{m_1 m_2}$, die op de kromme $\alpha^{m_1^2}$ gelegen zijn. Elk dezer punten toch behoort als punt van Δ tot een bepaalde groep der $I^{m_1 m_2^2}$, en de overige punten dezer groep zullen in het algemeen niet op de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ gelegen zijn.

Behalve in deze punten snijdt de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ het oppervlak Δ nog in $m_1 m_2(m_1 + 3m_2 - 4)$ punten; men vindt zoo dus $m_1 m_2(m_1 + 3m_2 - 4)(m_1 m_2^2 - 2)$ snijpunten van de kromme $\rho^{m_1 m_2}$ met het oppervlak Δ'.

Voor den *graad* van Δ' vindt men hieruit:

$$3m_1^2 m_2^2 + 5m_1 m_2^3 - 8m_1 m_2^2 - 4m_1 - 6m_2 + 8.$$

Een basiskromme $\beta^{m_2^2}$ snijdt het oppervlak Δ, behalve in de punten B_k, nog in $m_2^2(2m_1 + 2m_2 - 4)$ punten, waarbij nog $m_2^2(2m_1 + 2m_2 - 4)(m_1 m_2^2 - 2)$ punten van het oppervlak Δ' behooren; men ziet dus, dat de basispunten B_k $(m_1^2 m_2 + 3m_1 m_2^2 - 4m_1 m_2 - 2)$-voudige punten van het oppervlak Δ' zijn.

§ 7. De oppervlakken Δ en Δ' zullen elkaar *aanraken* langs de in § 5 beschouwde kromme ψ, de meetkundige plaats der punten, waarin drie toegevoegde punten der $I^{m_1 m_2^2}$ samenvallen; men bewijst dit evenals in Hfdst. II, § 6. Verder zullen zij elkaar snijden:

1e volgens de kromme $\alpha^{m_1^2}$, die een enkelvoudige kromme van Δ, een meervoudige van Δ' is;

2e volgens een restdoorsnede χ. Gemakkelijk ziet men, dat deze de meetkundige plaats moet zijn van de coïncidenties van die groepen der $I^{m_1 m_2^2}$, welke *twee* coïncidenties bevatten.

Voor den *graad* der kromme χ vindt men gemakkelijk:
$(2m_1 + 3m_2 - 4)(3m_1^2 m_2^2 + 5m_1 m_2^3 - 8m_1 m_2^2 - 4m_1 - 6m_2 + 8) -$
$-2(3m_1^2 + 18m_1 m_2 + 12m_2^2 - 24m_1 - 36m_2 + 26) - m_1^2(2m_1 m_2^2 +$
$+ 2m_2^3 - 4m_2^2 - 2) =$
$= m_1 m_2^2(4m_1^2 + 17m_1 m_2 + 15m_2^2 - 24m_1 - 44m_2 + 32) - 12m_1^2 -$
$-60m_1 m_2 - 42m_2^2 + 80m_1 + 120m_2 - 84.$

De raaklijnen aan het oppervlak Δ' in een basispunt B_k vormen een kegel van den graad $(m_1^2 m_2 + 3m_1 m_2^2 -$ $-4m_1 m_2 - 2)$. Deze kegel zal het raakvlak van het oppervlak Δ in het punt B_k volgens twee beschrijvenden *raken;* deze beschrijvenden zijn de raaklijnen van de kromme ψ in het punt B_k. De overige beschrijvenden, volgens welke die kegel het genoemde raakvlak snijdt, moeten de raaklijnen van de kromme χ in het punt B_k zijn. Men ziet dus, dat de kromme χ in de basispunten B_k $(m_1^2 m_2 + 3m_1 m_2^2 - 4m_1 m_2 - 6)$-voudige punten heeft.

§ 8. Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen de aan P toegevoegde punten P' een kromme l' beschrijven. Deze kromme is bij de algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ van den graad $(3m_1 m_2^2 - 1)$. Voert men echter den grensovergang uit, waardoor men de in dit hoofdstuk beschouwde $I^{m_1 m_2^2}$ krijgt, dan zal deze kromme ontaarden. De rechte snijdt nl. het hierbij optredende oppervlak $b_c^{m_2}$ in m_2 punten P. De punten P', die aan een dezer punten P zijn toegevoegd, zijn onbepaald en vervullen een kromme

van den graad $m_1 m_2$; deze m_2 krommen zijn van de kromme l' af te scheiden. De eigenlijke kromme l' wordt van den graad: $2m_1 m_2^2 - 1$.

Deze kromme heeft m_1-voudige punten in de basispunten B_k. Is nl. P een der m_1 snijpunten van de rechte l met het oppervlak a^{m_1}, dat door een der punten B_k gaat, dan zal de door P gaande basiskromme $\beta^{m_2^2}$ het oppervlak a^{m_1} verder nog in B_k snijden, zoodat B_k tot de aan P toegevoegde punten behoort, en de kromme l' door B_k gaat.

Doorloopt P een plat vlak V, dan beschrijven de punten P' een oppervlak Φ_v. Dit is bij de algemeene $I^{m_1 m_2^2}$ van den graad $(3m_1 m_2^2 - 1)$; bij den grensovergang zal het echter ontaarden. Beschouwen wij nl. een punt P' van het oppervlak $b_c^{m_2}$. De hieraan toegevoegde punten vervullen een kromme $\rho^{m_1 m_2}$, die het vlak V in $m_1 m_2$ punten P snijdt. Elk punt van het oppervlak $b_c^{m_2}$ is dus aan $m_1 m_2$ punten van het vlak V toegevoegd, dit oppervlak is dus $m_1 m_2$ malen van het oppervlak Φ_v af te scheiden. Het eigenlijke oppervlak Φ_v wordt dus van den graad: $2m_1 m_2^2 - 1$.

Een basiskromme $\beta^{m_2^2}$ snijdt het vlak V in m_2^2 punten: aan elk hiervan zijn $(m_1 m_2^2 - 1)$ punten van Φ_v toegevoegd, die evenzoo op $\beta^{m_2^2}$ moeten liggen. De overige snijpunten van de kromme $\beta^{m_2^2}$ met het oppervlak Φ_v moeten gelegen zijn in de basispunten B_k. Men ziet dus, dat het oppervlak Φ_v in deze punten B_k m_1-voudige punten heeft.

§ 9. Het oppervlak Φ_v snijdt het vlak V volgens een kromme van den graad:

$$2m_1 m_2^2 - 1.$$

Gemakkelijk ziet men, dat deze ontaardt:

1e in de m.p. δ der in het vlak V gelegen coïncidenties. Dit is de doorsnede van het vlak V met het oppervlak Δ, en dus van den graad:

$$2m_1 + 3m_2 - 4;$$

2e in de m.p. φ_v der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten. Deze is dus van den graad:

$$2m_1m_2^2 - 2m_1 - 3m_2 + 3.$$

Het oppervlak Φ_v heeft de basiskromme ${}_\alpha m_1^2$ tot m_2^2-voudige kromme. De punten, welke aan een punt P_α dezer kromme zijn toegevoegd, vervullen nl. een geheele kromme $(A)^{m_2^2}$; deze snijdt het vlak V in m_2^2 punten, zoodat P_α aan m_2^2 punten van V is toegevoegd, en een m_2^2-voudig punt van Φ_v is.

De volledige doorsnede van het oppervlak Φ_v en het vlak V heeft dus m_2^2-voudige punten in de snijpunten van het vlak V en de kromme ${}_\alpha m_1^2$. Daar de kromme δ enkelvoudige punten in deze snijpunten heeft, bezit de kromme φ_v daar (m_2^2-1)-voudige punten.

Buiten deze punten snijden de krommen δ en φ_v elkaar in de coïncidenties der $I^{m_1 m_2^2}$, welker *dragers* in het vlak V gelegen zijn; het aantal dezer coïncidenties bedraagt volgens § 3:

$$6m_1m_2 + 3m_2^2 - 6m_1 - 9m_2 + 6.$$

Eindelijk snijden de krommen δ en φ_v elkaar in

$$(2m_1 + 3m_2 - 4)(2m_1m_2^2 - 2m_1 - 3m_2 + 3) - m_1^2(m_2^2 - 1) -$$
$$-(6m_1m_2 + 3m_2^2 - 6m_1 - 9m_2 + 6) =$$
$$= 3m_1^2m_2^2 + 6m_1m_2^3 - 8m_1m_2^2 - 3m_1^2 - 18m_1m_2 - 12m_2^2 + 20m_1 +$$
$$+ 30m_2 - 18$$

punten. Gemakkelijk ziet men, dat deze de in het vlak V

gelegen coïncidenties zijn, waaraan nog een punt van V is toegevoegd.

§ 10. Wij bepalen thans den graad van de meetkundige plaats Φ'_v der punten, die aan de puntenparen van de kromme Φ_v zijn toegevoegd.

Deze kromme Φ'_v heeft *meervoudige punten* in de basispunten B_k. Zulk een punt B_k behoort tot ∞^2 groepen der $I^{m_1 m_2^2}$; want het oppervlak a^{m_1}, dat door een punt B_k gaat, wordt door elk der krommen $\beta^{m_2^2}$ gesneden in een groep van $m_1 m_2^2$ punten, waartoe B_k behoort. De snijpunten van zulk een oppervlak a^{m_1}, dat wij door $(B)_k^{m_1}$ zullen aanduiden, met de kromme Φ_v behooren dus elk tot een groep, die ook B_k bevat, en elk dezer snijpunten doet dus de kromme Φ'_v door B_k gaan.

Van deze snijpunten moet men echter uitzonderen diegenen, welke op de basiskromme $\alpha^{m_1^2}$ liggen. Elk dezer punten behoort *als punt van* Φ_v tot een bepaalde groep der $I^{m_1 m_2^2}$. Deze groep wordt gevormd door de snijpunten van de kromme $\beta^{m_2^2}$, die door het genoemde punt gaat, met het oppervlak a^{m_1}, dat de kromme Φ_v in dat punt *raakt;* en in 't algemeen zal geen van de punten dezer groep in een der punten B_k vallen.

In elk der m_1^2 snijpunten van de kromme $\alpha^{m_1^2}$ met het vlak V heeft de kromme Φ_v een (m_2^2-1)-voudig punt; in deze punten vallen dus $m_1^2(m_2^2-1)$ snijpunten van een der oppervlakken $(B)_k^{m_1}$ met de kromme Φ_v.

Er blijven over

$$m_1^2 m_2^2 - m_1^2 - 3m_1 m_2 + 3m_1$$

snijpunten van het oppervlak $(B)_k^{m_1}$ met de kromme Φ_v. Deze punten zijn nu twee aan twee aan elkaar toege-

voegd: want de punten van φ_v zijn twee aan twee aan elkaar toegevoegd, en elke twee toegevoegde punten liggen op eenzelfde oppervlak a^{m_1}. Deze punten behooren dus tot

$$\tfrac{1}{2}(m_1^2m_2^2 - m_1^2 - 3m_1m_2 + 3m_1)$$

groepen, en van elk dezer groepen valt één der punten in B_k. Dit laatste getal geeft dus tevens aan, hoeveel malen de kromme φ'_v door elk der punten B_k gaat.

Om nu den *graad* van φ'_v te vinden, bepalen wij het aantal snijpunten van φ'_v met een oppervlak b^{m_2}. Dit snijdt φ'_v ten eerste in de punten B_k; ten tweede in de punten, welke toegevoegd zijn aan de snijpunten van b^{m_2} met de kromme φ_v. Het aantal dezer laatste snijpunten bedraagt:

$$2m_1m_2^3 - 2m_1m_2 - 3m_2^2 + 3m_2.$$

Deze punten zijn nu twee aan twee aan elkaar toegevoegd en bij elk dezer paren behooren $(m_1m_2^2 - 2)$ punten van de kromme φ'_v. Voor den *graad* van φ'_v volgt hieruit gemakkelijk:

$$\tfrac{1}{2}(3m_1^2m_2^4 - 3m_1^2m_2^2 - 6m_1m_2^3 + 2m_1m_2^2 + 4m_1 + 6m_2 - 6).$$

De kromme φ'_v en het vlak V snijden elkaar ten eerste in de, in § 9 gevonden, coïncidenties, waarbij nog een der toegevoegde punten in V valt; ten tweede in de *in het vlak V gelegen drietallen toegevoegde punten.* Voor het aantal dezer drietallen vindt men hieruit:

$$\tfrac{1}{2}(m_1^2m_2^4 - 3m_1^2m_2^2 - 6m_1m_2^3 + 6m_1m_2^2 + 2m_1^2 + 12m_1m_2 + 8m_2^2 - \\ - 12m_1 - 18m_2 + 10).$$

§ 11. Stelt men in de uitkomsten van dit hoofdstuk $m_1 = m_2 = m$, dan vindt men:

De verbindingslijnen van toegevoegde punten der involutie I^{m^3} vormen een stralencomplex Γ van den graad:

$$2m^3-\tfrac{3}{2}m^2+\tfrac{5}{2}m.$$

De dragers der coïncidenties vormen een stralencongruentie van den graad:

$$6m^3-9m^2+5m-2$$

en van de klasse: $12m^2-18m+6$.

Het coïncidentie-oppervlak Δ is van den graad:

$$5m-4.$$

Het vertakkings-oppervlak Δ' is van den graad:

$$8m^4-8m^3-10m+8.$$

De m.p. ψ van de punten, waarin drie toegevoegde punten samenvallen, is van den graad:

$$33m^2-60m+26.$$

De m.p. χ van de coïncidenties der groepen, die twee coïncidenties bevatten, is van den graad:

$$36m^5-68m^4+32m^3-114m^2+200m-84.$$

Aan een rechte l is toegevoegd een kromme l' van den graad: $2m^3-1$.

Aan een plat vlak V is toegevoegd een oppervlak Φ van den graad: $2m^3-1$.

De meetkundige plaats Φ_v der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten is van den graad:

$$2m^3-5m+3.$$

Het aantal in V gelegen drietallen toegevoegde punten bedraagt:

$$\tfrac{1}{2}(m^6-9m^4+6m^3+22m^2-30m+10).$$

§ 12. Stelt men $m_1=m$, $m_2=1$, dan verkrijgt men een bundel (a^m) van oppervlakken, en een vlakkenschoof met basispunt B. De groepen van de involutie I^m zijn

de groepen der snijpunten van de stralen door B met de oppervlakken a^m.

De stralencomplex Γ wordt van den graad 0; inderdaad vormen de verbindingslijnen van toegevoegde punten een *congruentie,* daar zij alle door B gaan.

De dragers der coïncidenties vormen een congruentie van de klasse 0 en van den graad 2(m—1). Door een willekeurig punt P gaat nl. één straal, die ook door B gaat; deze raakt aan 2(m—1) oppervlakken a^m, draagt dus 2(m—1) coïncidenties, en moet dus 2(m—1) malen geteld worden.

Het coïncidentie-oppervlak Δ is van den graad (2m—1). Dit is de meetkundige plaats van de raakpunten der raaklijnen, die uit B aan de oppervlakken a^m getrokken zijn, dus het *pooloppervlak* van B t.o.v. den bundel (a^m).

Het vertakkingsoppervlak Δ' is van den graad:

$$3m^2-7m+2.$$

Dit is de meetkundige plaats van de punten, waarin de genoemde raaklijnen de bijbehoorende oppervlakken verder nog snijden, het z.g. *satelliet-oppervlak* van B t.o.v. den bundel.

De kromme ψ wordt van den graad:

$$3m^2-6m+2.$$

Dit is de meetkundige plaats van de raakpunten der door B gaande *hoofdraaklijnen* van oppervlakken a^m. Men kan dezen graad als volgt bevestigen:

De raakpunten der door een punt B gaande hoofdraaklijnen van een oppervlak a^m zijn de snijpunten van a^m met de beide eerste pooloppervlakken van B t.o.v. a^m. Doorloopt a^m nu een bundel, dan beschrijven deze pooloppervlakken twee bundels, welke projectief met den

eerstgenoemden bundel overeenkomen. Nu zijn deze pooloppervlakken achtereenvolgens van de graden (m—1) en (m—2); voor den graad van de m.p. der snijpunten van overeenkomstige oppervlakken uit de drie bundels vindt men dus:

$$m(m-1) + (m-1)(m-2) + (m-2)m = 3m^2-6m+2.$$

De kromme χ wordt van den graad:

$$4m^3-19m^2+23m-6$$

en heeft een (m^2-m-6)-voudig punt in B. Deze kromme is de m.p. der raakpunten van de door B gaande *dubbelraaklijnen* van oppervlakken a^m. Deze dubbelraaklijnen projecteeren de kromme χ uit B; daar zij verder elk twee punten met χ gemeen hebben, vormen zij een kegel van den graad:

$$2m^3-10m^2+12m = 2m(m-2)(m-3).$$

Dit getal geeft den graad van den complex, die door de dubbelraaklijnen van de oppervlakken a^m wordt gevormd. Het is in overeenstemming met de in Hoofdstuk I gevonden uitkomst, dat de dubbelraaklijnen der krommen van een bundel een kromme van de klasse $2m(m-2)(m-3)$ omhullen.

De kromme l', die aan een rechte l wordt toegevoegd, is van den graad $(2m-1)$.

Het oppervlak Φ_v, dat aan een vlak V wordt toegevoegd, is van den graad $(2m-1)$.

De m.p. der in V gelegen paren toegevoegde punten is van den graad *nul*. Daar nl. de verbindingslijn van twee toegevoegde punten steeds door het punt B gaat, zal een willekeurig vlak V geen zoodanig paar bevatten.

§ 13. Stelt men $m_1 = 1$, $m_2 = m$, dan verkrijgt men

een bundel van platte vlakken en een net $[b^m]$ van oppervlakken b^m.

Met behulp van de uitkomsten van dit hoofdstuk en van Hfdst. I kan men nu verschillende kenmerkende getallen vinden van de *congruentie* $[\beta^{m^2}]$ *van ruimtekrommen* β^{m^2}, die gevormd wordt door de basiskrommen der bundels uit het net $[b^m]$.

Het net $[b^m]$ wordt door een vlak V gesneden volgens een net van vlakke krommen, en de groepen der basispunten van de bundels uit dit net zijn de groepen der snijpunten van de krommen β^{m^2} met het vlak V; deze groepen vormen een vlakke involutie, die in Hfdst. I beschouwd is. Elke verbindingslijn van twee toegevoegde punten dezer involutie is een in het vlak V gelegen bisecante eener kromme β^{m^2}; elke coïncidentie geeft een β^{m^2}, die het vlak V *aanraakt.*

De *orde* der congruentie $[\beta^{m^2}]$, d. i. het aantal krommen β^{m^2}, die door een willekeurig punt P gaan, bedraagt *één;* want de door P gaande oppervlakken uit het net $[b^m]$ vormen *één* bepaalden bundel.

De *klasse* der congruentie, d. i. het aantal krommen β^{m^2}, die een rechte l tot bisecante hebben, bedraagt $\frac{1}{2}(m-1)\,(m-2)$; want brengt men door de rechte l een vlak V, dan draagt die rechte $\frac{1}{2}(m-1)\,(m-2)$ paren der in V gelegen I^{m^2} (Hfdst. I, § 16), en elk dezer paren geeft een β^{m^2}, die l tot bisecante heeft.

De *raaklijnen* der β^{m^2} vormen een stralencomplex van den graad: $3m(m-1)$,
want de raaklijnen, die in een vlak V liggen, zijn de dragers van de coïncidenties der in dit vlak gelegen I^{m^2}.

De *trisecanten* der β^{m^2} vormen eveneens een stralen-

complex. Den graad hiervan vinden wij als volgt: Stellen wij in de uitkomsten van dit hoofdstuk $m_1 = 1$, $m_2 = m$, dan vinden wij, dat voor een vlakkenbundel (π) en een net $[b^m]$ het aantal in een vlak V gelegen drietallen toegevoegde punten bedraagt:

$\frac{1}{2}(m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m) = \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$.

De drie punten van zulk een tripel liggen in eenzelfde vlak π, dus op de snijlijn van dit vlak π met het vlak V; zij zijn dus *collineair*, en hun verbindingslijn is een *trisecante* van een kromme β^{m^2}, daar toegevoegde punten steeds op eenzelfde β^{m^2} liggen. Het gevonden getal geeft dus het aantal trisecanten, die in een vlak V gelegen zijn en gaan door het snijpunt van dit vlak V met de basisrechte van den bundel (π); dit is dus de graad van den gezochten complex.

De krommen β^{m^2}, *die een rechte l snijden*, vormen een oppervlak Λ van den graad m^2; want een vlak V door l snijdt dit oppervlak volgens de rechte l en volgens de kromme l', die door de in V gelegen I^{m^2} aan l is toegevoegd, en die van den graad (m^2-1) is. Dit oppervlak heeft *m-voudige punten* in de basispunten B_k; want een kromme β^{m^2}, die de rechte l *niet* snijdt, kan het oppervlak Λ slechts in de punten B_k snijden. Verder zijn de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ krommen β^{m^2}, die l tot bisecante hebben, *dubbelkrommen* van Λ.

Een rechte m snijdt het oppervlak Λ in m^2 punten; door elk dezer punten gaat een kromme β^{m^2}, die de rechten l en m *beide* snijdt. Er zijn dus m^2 krommen β^{m^2}, *die twee gegeven rechten snijden.*

§ 14. Er zijn in de congruentie $[\beta^{m^2}]$ ∞^1 krommen

β^{m^2}, *die een plat vlak V aanraken.* De m.p. der raakpunten is een kromme van den graad 3(m—1); die der punten, waarin zulk een β^{m^2} het vlak V verder nog *snijdt*, is een kromme van den graad:

$$3(m-1)(m^2-2);$$

deze krommen zijn nl. niets anders dan de coïncidentiekromme en de vertakkingskromme der in V gelegen I^{m^2}.

Het oppervlak μ, dat door deze β^{m^2} gevormd wordt, zal het vlak V volgens de eerstgenoemde krommen *raken*, volgens de tweede *snijden;* het is dus van den graad: $3m^2(m-1)$.

De oppervlakken μ, die bij twee verschillende vlakken V behooren, snijden elkaar volgens een kromme van den graad: $9m^4(m-1)^2$.

Deze doorsnede kan slechts bestaan uit de krommen β^{m^2}, die *beide* vlakken V aanraken. Er zijn dus $9m^2(m-1)^2$ krommen β^{m^2}, *die twee gegeven vlakken aanraken.*

De congruentie $[\beta^{m^2}]$ bevat $3(m-1)(4m-5)$ krommen β^{m^2}, die een plat vlak V *osculeeren.* De raakpunten dezer krommen zijn de punten van het vlak V, waarin drie toegevoegde punten der door de congruentie bepaalde I^{m^2} samenvallen.

De congruentie $[\beta^{m^2}]$ bevat $\frac{3}{2}(m-1)(m-2)(3m^2+3m-8)$ krommen β^{m^2}, die een plat vlak V *tweemaal raken.* De raakpunten dezer krommen zijn de coïncidenties van dié groepen der I^{m^2}, welke twee coïncidenties bevatten. [1]

Laat men het vlak V om een rechte l wentelen, dan

---

[1]) Het geval $m=3$, waarvoor de congruentie *bilineair* wordt, is onderzocht door Prof. Dr. JAN DE VRIES (Versl. Akad. van Wet., dl. XXIV, blz. 105). De dubbelrakende β^9 zijn hierbij over het hoofd gezien. Het aantal *osculeerende* β^9 bedraagt 42, het aantal *dubbelrakende* 84.

beschrijven de genoemde raakpunten twee ruimtekrommen. Om de graden dezer krommen te vinden, merken wij op, dat de door V doorloopen vlakkenbundel met het net $[b^m]$ een involutie I^{m^2} bepaalt. De meetkundige plaats van de raakpunten der osculeerende β^{m^2} is nu de m.p. van de punten, waarin drie toegevoegde punten dezer involutie samenvallen. In de uitkomsten van dit hoofdstuk $m_1 = 1$, $m_2 = m$ stellend, vindt men voor den graad dezer kromme: $12m^2 - 18m + 5$,
zij heeft dus $(9m - 10)$ punten gemeen met de rechte l.

De m.p. van de raakpunten der dubbelrakende β^{m^2} is de m.p. der coïncidenties van de groepen der I^{m^2}, die *twee* coïncidenties bevatten; voor den graad dezer kromme vindt men: $15m^4 - 27m^3 - 30m^2 + 60m - 16$.

Deze heeft dus:

$$6m^4 - 9m^3 + 3m^2 - 30m + 32$$

punten met de rechte l gemeen.

§ 15. De congruentie $[\beta^{m^2}]$ bevat ∞^1 krommen, die een *dubbelpunt* hebben. Gemakkelijk ziet men, dat de meetkundige plaats dezer dubbelpunten de *kernkromme* is van het net $[b^m]$, d.i. de m.p. van de toppen der kegels uit dit net. Volgens een bekende stelling is deze een kromme van den graad $6(m-1)^2$.

Een oppervlak b^m snijdt deze kromme in $6m(m-1)^2$ punten; door elk dezer punten gaat een β^{m^2}, die in dat punt een dubbelpunt heeft, en op b^m ligt. Deze krommen β^{m^2} vormen de volledige doorsnede van het oppervlak b^m met het oppervlak N, dat door de nodale β^{m^2} wordt gevormd. Voor den graad van dit oppervlak vindt men dus: $6m^2(m-1)^2$.

HOOFDSTUK V.

EEN DRIEVOUDIG ONEINDIG STELSEL (COMPLEX) VAN OPPERVLAKKEN.

§ 1. Wij beschouwen thans het geval, dat de drie bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}) behooren tot eenzelfde drievoudig oneindig lineair stelsel *(complex)* $\{a^m\}$ van oppervlakken van den graad m. Dan is dus ook

$$m_1 = m_2 = m_3 = m.$$

Nemen wij uit elken der drie bundels een oppervlak, dan zullen deze drie oppervlakken een *net* uit den complex $\{a^m\}$ bepalen. De basispunten van dit net zijn de snijpunten der drie oppervlakken en vormen dus een groep der involutie I^{m^3}; men kan de groepen dezer involutie dus ook bepalen als de groepen der basispunten van de netten uit den complex $\{a^m\}$.

Deze definitie is echter niet geheel met de oorspronkelijke gelijkwaardig. Om dit in te zien, denken wij ons de oppervlakken van den complex afgebeeld door de punten eener driedimensionale ruimte R_3, zoodat elke bundel uit den complex door een rechte dezer R_3 wordt afgebeeld. De drie gegeven bundels (a^m), (b^m) en (c^m) hebben drie rechten a, b en c tot beelden.

Er zijn nu ∞^1 rechten l, die de rechten a, b en c snijden; dit zijn de beschrijvenden van de regelschaar,

welke die drie rechten tot richtlijnen heeft. Deze rechten l zijn de beelden van ∞^1 bundels (λ^m). En daar een rechte l met elke der drie rechten a, b en c een punt gemeen heeft, zal de overeenkomstige bundel (λ^m) met elk der drie bundels (a^m), (b^m) en (c^m) een oppervlak gemeen hebben.

Zij nu λ^{m^2} de basiskromme van een bundel (λ^m), P_λ een punt dezer kromme. Om de punten te vinden, die volgens de oorspronkelijke definitie der I^{m^2} aan P_λ zijn toegevoegd, moeten wij de snijpunten zoeken der oppervlakken, die uit de drie gegeven bundels door P_λ gaan. Deze oppervlakken behooren nu echter alle tot den bundel (λ^m) en hebben dus de kromme λ^{m^2} gemeen; hun snijpunten worden dus *onbepaald* en vullen de geheele kromme λ^{m^2}.

Gaat men echter van de nieuwe definitie der I^{m^3} uit, dan zal het punt P_λ nog steeds *één bepaald* net uit den complex $\{a^m\}$ bepalen en dus tot een *bepaalde* groep van basispunten behooren.

Wij zullen voortaan van de nieuwe definitie uitgaan. De eigenschappen der I^{m^3} kunnen dan eerst door een grensovergang uit die der oorspronkelijke I^{m^3} worden afgeleid.

De ∞^1 krommen λ^{m^2} vormen een oppervlak Λ. Om den graad hiervan te vinden, merken wij op, dat bij de bovengenoemde afbeelding de punten der rechten a, b en c, die op eenzelfde beschrijvende gelegen zijn, projectief aan elkaar zijn toegevoegd. De oppervlakken der drie bundels, die tot eenzelfden bundel (λ^m) behooren, zijn dus ook projectief aan elkaar toegevoegd, en het oppervlak Λ wordt dus gevormd door de doorsneden

van overeenkomstige oppervlakken uit de projectief gepaarde bundels (a^m) en (b^m). *Het is dus van den graad 2m.*

§ 2. Wij bepalen eerst den graad van den stralencomplex Γ, die door de verbindingslijnen van overeenkomstige punten der I^{m^3} wordt gevormd.

Boven is gebleken, dat bij den grensovergang de punten, die aan een punt P_λ van het oppervlak Λ zijn toegevoegd, *onbepaald* worden en een geheele kromme λ^{m^2} vullen.

Elke *bisecante* dezer kromme is dus als verbindingslijn van twee toegevoegde punten op te vatten. Van den complex Γ der algemeene I^{m^3} is dus de complex Γ' af te scheiden, die door de bisecanten der krommen λ^{m^2} wordt gevormd.

Om den graad van den complex Γ' te vinden, merken wij op, dat elke kromme λ^{m^2} de doorsnede is van overeenkomstige oppervlakken uit de twee projectief gepaarde bundels (a^m) en (b^m). Deze bundels worden door een plat vlak V gesneden volgens twee projectief gepaarde krommenbundels (α^m) en (β^m); en de snijpunten van een kromme λ^{m^2} met het vlak V zijn de snijpunten van overeenkomstige krommen uit deze bundels. De verbindingslijn van twee zulke snijpunten is een in V gelegen bisecante eener kromme λ^{m^2}.

Zij nu P een punt in het vlak V, l een rechte door P. De beide projectief verwante krommenbundels (α^m) en (β^m) brengen een kromme γ voort van den graad 2m; de rechte l snijdt deze in 2m punten. Door elk dezer punten gaan een kromme α^m en een kromme β^m, die

elkaar verder nog in (m^2-1) punten snijden; zij l' de verbindingslijn van een dezer laatste punten met het punt P. Tusschen de stralen l en l' bestaat blijkbaar een verwantschap, waarvan beide kenmerkende getallen gelijk zijn aan $2m(m^2-1)$. De $4m(m^2-1)$ coïncidenties dezer verwantschap worden veroorzaakt:

1e door de overeenkomstige krommen α^m en β^m, die elkaar *aanraken*. Zij nl. T het raakpunt, dan zal van de (m^2-1) verdere snijpunten der door T gaande krommen er nog één in T vallen, zoodat een der rechten l', die bij de lijn PT behooren, met PT samenvalt;

2e door de bisecanten van krommen λ^{m^2}, welke door P gaan. Zij nl. l zulk een bisecante, en laten Q en R de punten zijn, waarin deze de bijbehoorende λ^{m^2} snijdt. De door Q gaande krommen α^m en β^m zullen elkaar verder in R, dus op de rechte l, snijden, zoodat een der rechten l' met l samenvalt. Daar dezelfde redeneering voor het punt R geldt, ziet men, dat *twee* rechten l' met l samenvallen, en elke bisecante dus *twee* coïncidenties geeft.

Om het aantal der eerstgenoemde coïncidenties te vinden, merken wij op, dat volgens een bekende stelling [1]) elke kromme α^m door $3m(m-1)$ krommen β^m wordt aangeraakt. Daarentegen is door de projectiviteit, die tusschen de bundels (α^m) en (β^m) bestaat, aan elke kromme α^m één bepaalde kromme β^m toegevoegd. Voegen wij de $3m(m-1)$ rakende β^m aan de laatstgevonden β^m toe, dan krijgen wij in den bundel (β^m) een verwantschap, waarvan *beide* kenmerkende getallen gelijk zijn aan $3m(m-1)$; immers,

---

[1]) Zie Hoofdstuk I, § 8.

elk der eerstgenoemde β^m wordt door 3m(m—1) krommen α^m aangeraakt, aan elk waarvan één β^m is toegevoegd. De 6m(m—1) coïncidenties dezer verwantschap geven elk een kromme β^m, die een kromme α^m aanraakt en tegelijk aan haar is toegevoegd. Het gebeurt dus 6m(m—1) malen, dat twee overeenkomstige krommen α^m en β^m elkaar aanraken.

Er blijven over 2m(m—1) (2m—1) coïncidenties van de boven beschouwde verwantschap; er zijn dus m(m—1) (2m—1) bisecanten van krommen λ^{m^2}, die in het vlak V liggen en door het punt P gaan. Dit is dus de graad van den complex Γ'.

Voor de algemeene I^{m^3} is de graad van den complex Γ: $3m^3-6m^2+3m=3m(m-1)^2$.... (Hfdst. III, § 15).

Voor de hier beschouwde I^{m^3} wordt de graad van den complex Γ dus: m(m—1) (m—2).

§ 3. Boven is gebleken, dat elke bisecante eener kromme λ^{m^2} bij den grensovergang als verbindingslijn van twee toegevoegde punten moet worden opgevat. Laat men de beide punten, die zulk een bisecante met de bijbehoorende λ^{m^2} gemeen heeft, samenvallen, dan ziet men, dat elke *raaklijn* eener λ^{m^2} als drager eener *coïncidentie* beschouwd moet worden.

Om dus na te gaan, met welke bedragen graad en klasse der door deze dragers gevormde congruentie verminderd worden, moet men bepalen, hoeveel raaklijnen van krommen λ^{m^2} door een gegeven punt gaan of in een gegeven vlak liggen.

Zij P een willekeurig punt, P' het raakpunt eener door P gaande raaklijn. Daar de rechte PP' de door

P′ gaande oppervlakken a^m en b^m in het punt P′ aanraakt, moet het punt P′ ook liggen op de eerste pooloppervlakken van P t.o.v. de oppervlakken a^m en b^m. De eerste pooloppervlakken van een punt P t.o.v. de oppervlakken van een bundel (a^m) vormen zelf weer een bundel, waarvan de exemplaren projectief aan die van den bundel (a^m) zijn toegevoegd. De beide bundels (a^m) en (b^m) en de bijbehoorende bundels van eerste pooloppervlakken vormen dus vier bundels, die projectief verwant zijn.

Zijn nu gegeven vier projectief verwante bundels van oppervlakken, achtereenvolgens van de graden m_1, m_2, m_3 en m_4, dan gebeurt het $\Sigma m_1 m_2 m_3$ malen, dat vier overeenkomstige oppervlakken door één punt gaan. [1]) Hier is $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = m_4 = m-1$,
en dus bedraagt het genoemde aantal malen:

$$2m^2(m-1) + 2m(m-1)^2 = 2m(m-1)\,(2m-1).$$

Dit is dus het aantal punten P′, dus het aantal raaklijnen, die door een punt P gaan.

Ligt een raaklijn eener kromme λ^{m^2} in een vlak V, dan zullen de doorsneden van de bijbehoorende oppervlakken a^m en b^m met het vlak V elkaar moeten aanraken. Volgens de vorige § gebeurt het $6m(m-1)$ malen, dat twee zulke overeenkomstige doorsneden elkaar aanraken; dit is dus het aantal raaklijnen in een vlak V.

Bij de algemeene I^{m^3} vormen de dragers der coïncidenties een stralencongruentie van den graad:

$$8m^3-12m^2+6m-2 = 2(m-1)\,(4m^2-2m+1)$$

---

[1]) Zie bijv. mijn mededeeling: „Over projectief verwante lineaire stelsels in R_n" (N. Arch. v. Wisk., dl. IX, blz. 249).

en van de klasse:

$$12m^2-18m+6=6(m-1)\,(2m-1).$$

Voor de hier beschouwde I^{m^3} wordt de graad dus:

$$2(m-1)\,(2m^2-m+1)$$

en de klasse: $6(m-1)^2$.

§ 4. Daar elke raaklijn eener kromme λ^{m^2} als drager eener coïncidentie is op te vatten, welke coïncidentie natuurlijk in het raakpunt valt, moet het oppervlak Λ, dat door de krommen λ^{m^2} wordt gevormd, van de meetkundige plaats $\triangle$ der coïncidenties worden afgescheiden. Dit oppervlak $\triangle$ is voor de algemeene I^{m^3} van den graad $(6m-4)$; daar het oppervlak Λ van den graad $2m$ is, wordt voor de hier beschouwde I^{m^3} het coïncidentie-oppervlak $\triangle$ van den graad:

$$4(m-1).$$

Men kan dit ook op de volgende wijze vinden:

Zij P een punt van het oppervlak $\triangle$. De oppervlakken a^m, die uit den complex $\{a^m\}$ door P gaan, vormen een net en hebben in P een gemeenschappelijke raaklijn *t*. Door twee punten P′ en P″ wordt uit dit net een oppervlak bepaald. Wij laten nu de punten P′ en P″ tot P naderen, zoodanig, dat de rechten PP′ en PP″ in de grens niet met de raaklijn *t* in één plat vlak liggen. Het aldus bepaalde oppervlak a^m heeft in P drie niet in één plat vlak gelegen raaklijnen, het bezit dus in P een *conisch punt*.

Beschouwen wij omgekeerd een oppervlak a^m met conisch punt P. Dit oppervlak bepaalt met twee andere oppervlakken uit den complex, die ook door P gaan, een net, waarvan blijkbaar *twee* basispunten in P *samen-*

vallen; het punt P is dus werkelijk een coïncidentie der I^{m^3}.

Het oppervlak Δ is dus niets anders dan de meetkundige plaats der conische punten van oppervlakken uit den complex, het zoogenaamde *kernoppervlak* of *oppervlak van Jacobi* van den complex $\{a^m\}$. Volgens een bekende stelling is dit werkelijk van den graad:

$$4(m-1).$$

§ 5. De doorsnede ρ^{m^2} van twee oppervlakken uit den complex snijdt het oppervlak Δ in de op ρ^{m^2} gelegen coïncidenties. Indien de kromme ρ^{m^2} het oppervlak Δ in een punt Q *aanraakt*, zullen twee dier coïncidenties in Q samenvallen; dit is alleen mogelijk, indien in Q *drie toegevoegde punten* der involutie I^{m^3} samenvallen.

Om de meetkundige plaats der punten Q te vinden, nemen wij uit den complex $\{a^m\}$ een willekeurig *net* $[a^m]$. Dit heeft met het net, dat door een punt Q bepaald wordt, één bundel gemeen. Van de congruentie $[\alpha^{m^2}]$, die door de basiskrommen der bundels uit het net $[a^m]$ wordt gevormd, zal dus één kromme door elk der punten Q gaan en daar het oppervlak Δ aanraken.

De congruentie $[\alpha^{m^2}]$ bevat ∞^1 krommen, die een oppervlak O^n aanraken; de m.p. der raakpunten is een kromme van den graad: $3n(m-1) + n(n-1)$.

Voor het oppervlak Δ, dat van den graad $4(m-1)$ is, wordt dit: $4(m-1)(3m-3 + 4m-5) = 4(m-1)(7m-8)$.

Tot deze aanrakingskromme behoort echter ook de m.p. der conische punten van oppervlakken uit het net $[a^m]$; immers, de kromme α^{m^2}, die door zulk een punt gaat, zal daar een dubbelpunt hebben als doorsnede

van twee oppervlakken a^m, waarvan het eene in dat punt een dubbelpunt heeft. Zulk een kromme moet dus gerekend worden tot die, welke het oppervlak Δ aanraken, zonder dat het raakpunt een der gezochte punten Q is.

De laatstgenoemde m.p. is van den graad $6(m-1)^2$, de punten Q vormen dus een kromme ψ van den graad:

$$2(m-1)(11m-13).$$

Om den graad van het *vertakkingsoppervlak* Δ' te vinden, merken wij op, dat een kromme ρ^{m^2} het oppervlak Δ snijdt in $4m^2(m-1)$ punten. Aan elk van deze zijn nog (m^3-2) punten toegevoegd; deze zijn de snijpunten van de kromme ρ^{m^2} met het oppervlak Δ'. Het totale aantal dezer snijpunten bedraagt dus:

$$4m^2(m-1)(m^3-2),$$

dus de graad van Δ':

$$4(m-1)(m^3-2).$$

De oppervlakken Δ en Δ' zullen elkaar *aanraken* langs de kromme ψ; verder zullen zij elkaar snijden volgens een kromme χ van den graad:

$$4(m-1)(4m^4-4m^3-19m+21).$$

Gemakkelijk ziet men, dat deze kromme χ de meetkundige plaats is van de coïncidenties van *die* groepen der I^{m^3}, welke *twee* coïncidenties bevatten.

§ 6. Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen bij de algemeene I^{m^3} de aan P toegevoegde punten een kromme l' van den graad $(3m^3-1)$ beschrijven. Gaat men echter over tot de hier beschouwde I^{m^3}, dan zal de rechte l het oppervlak Λ in $2m$ punten P snijden.

Door elk dezer punten gaat een kromme λ^{m^2}, en alle punten dezer kromme zijn aan het bijbehoorende punt P toegevoegd. Deze krommen λ^{m^2} zijn dus van de kromme l' af te scheiden, en de eigenlijke kromme l' wordt dus van den graad: (m^3-1).

Doorloopt een punt P een plat vlak V, dan zullen bij de algemeene I^{m^3} de aan P toegevoegde punten een oppervlak Φ_v van den graad $(3m^3-1)$ beschrijven. Gaat men nu over tot de hier beschouwde I^{m^3}, dan is elk punt van het oppervlak Λ toegevoegd aan een geheele kromme λ^{m^2}. Deze snijdt het vlak V in m^2 punten, zoodat elk punt van het oppervlak Λ aan m^2 punten van V is toegevoegd. Het oppervlak Λ is m^2 malen van het oppervlak Φ_v af te scheiden, het eigenlijke oppervlak Φ_v wordt dus van den graad: (m^3-1).

Het oppervlak Φ_v en het vlak V snijden elkaar:

1e volgens de meetkundige plaats δ der in het vlak V gelegen coïncidenties. Deze is de doorsnede van het vlak V met het oppervlak Δ, dus van den graad:

$$4(m-1);$$

2e volgens de meetkundige plaats φ_v der in het vlak V gelegen paren toegevoegde punten. Deze is derhalve van den graad: $(m-1)(m^2+m-3)$.

De krommen δ en φ_v snijden elkaar:

1e in de coïncidenties der I^{m^3}, waarvan de dragers in het vlak V liggen. Het aantal dezer coïncidenties bedraagt volgens § 3: $6(m-1)^2$;

2e in de coïncidenties der I^{m^3}, waaraan nog een punt van het vlak V is toegevoegd. Het aantal dezer coïncidenties bedraagt dus:

$$(m-1)^2(4m^2+4m-18).$$

§ 7. Doorloopt een punt P de zooeven onderzochte kromme Φ_v, dan zal van de aan P toegevoegde punten *één* eveneens op de kromme Φ_v gelegen zijn; de overige beschrijven een kromme Φ'_v.

Een oppervlak a^m uit den complex $\{a^m\}$ snijdt de kromme Φ_v in $m(m-1)(m^2+m-3)$ punten. Deze zijn twee aan twee aan elkaar toegevoegd en vormen dus $\frac{1}{2}m(m-1)(m^2+m-3)$ paren. Aan elk dezer paren zijn nog (m^3-2) punten toegevoegd; deze liggen op de kromme Φ'_v en zijn snijpunten van die kromme met het oppervlak a^m. Voor den *graad* van de kromme Φ'_v vindt men hieruit gemakkelijk:

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m^2+m-3)(m^3-2).$$

De kromme Φ'_v snijdt het vlak V ten eerste in de zooeven gevonden coïncidenties, waaraan nog een punt van V is toegevoegd. De overige snijpunten zijn, zooals men gemakkelijk inziet, drie aan drie aan elkaar toegevoegd en vormen *de in het vlak V gelegen drietallen toegevoegde punten* der I^{m^3}. Voor het aantal dezer drietallen volgt hieruit:

$$\tfrac{1}{3}\{\tfrac{1}{2}(m-1)(m^2+m-3)(m^3-2)-(m-1)^2(4m^2+4m-18)\} =$$
$$= \tfrac{1}{6}(m-1)(m^5+m^4-11m^3-2m^2+42m-30).$$

Het vlak V snijdt den complex $\{a^m\}$ volgens een complex van vlakke krommen. Daar een groep van toegevoegde punten der I^{m^3} gevormd wordt door de basispunten van een net uit den complex $\{a^m\}$, zal elke in het vlak V gelegen groep van twee of drie toegevoegde punten bestaan uit de basispunten van een net van vlakke krommen uit den bovengenoemden complex. Het

laatstgevonden getal geeft dus het aantal netten met *drie* basispunten, welke behooren tot een willekeurigen complex van vlakke krommen van den graad *m*. Volgens STURM (*Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, dl. III, blz. 363) is dit aantal tot dusver nog niet bepaald.

§ 8. Bijzondere aandacht verdient het geval $m = 2$, als dus de complex $\{a^m\}$ bestaat uit *quadratische oppervlakken*.

De formule van § 2 leert ons, dat de complex Γ, die door de verbindingslijnen van toegevoegde punten gevormd wordt, in dit geval van den graad *nul* wordt. Deze verbindingslijnen vormen dus een *stralencongruentie*. Daar er ∞^3 groepen van toegevoegde punten zijn, moet elke straal dezer congruentie ∞^1 paren toegevoegde punten bevatten.

Wij kunnen ook gemakkelijk rechtstreeks aantoonen, dat de verbindingslijn van twee toegevoegde punten der involutie I^8 een involutie I^2 van paren toegevoegde punten draagt.

Zij nl. g een zoodanige rechte, en laten P en P′ de op g gelegen toegevoegde punten zijn. Deze punten zijn basispunten van een net $[a^2]$ uit den complex $\{a^2\}$. Een willekeurige bundel (a^2) uit den complex snijdt op de rechte g een involutie I^2 uit; daar de bundel (a^2) met het net $[a^2]$ één oppervlak gemeen heeft, bevat deze I^2 het puntenpaar (P, P′). Beschouwen wij nu twee bundels (a^2), welke één oppervlak gemeen hebben. De door hen bepaalde involuties I^2 hebben dan behalve het puntenpaar (P, P′) nog één puntenpaar gemeen, en moeten dus *samenvallen*. Hebben de beide bundels *geen* oppervlak

gemeen, dan kan men een derden bundel aanbrengen, die met elk van hen een oppervlak gemeen heeft; gemakkelijk ziet men op deze wijze, dat de beide involuties I^2 ook in dit geval samenvallen. Wij zien dus, dat *alle* oppervlakken uit den complex $\{a^2\}$ de rechte g snijden in de puntenparen eener *zelfde* involutie I^2; dit is alleen mogelijk, indien elk dezer puntenparen ∞^2 oppervlakken uit den complex bepaalt, dus een paar toegevoegde punten der I^8 is.

Deze rechten g vormen een *stralencongruentie* [g]. Een punt P moet op elk der door P gaande stralen g een toegevoegd punt bezitten; deze stralen zijn dus niets anders dan de verbindingslijnen van P met de 7 aan P toegevoegde punten. De congruentie [g] is dus van de *zevende orde.*

Daar de verbindingslijn van twee toegevoegde punten ∞^1 paren toegevoegde punten draagt, moet de meetkundige plaats ϕ_v der in een vlak V gelegen paren toegevoegde punten ontaarden in de rechten g, die in het vlak V liggen. Volgens § 6 is deze kromme ϕ_v voor $m = 2$ van den *derden* graad; zij bestaat dus uit *drie* rechten g. De congruentie [g] is dus van de *derde klasse.*

Laten g_1, g_2 en g_3 de drie in een vlak V gelegen rechten g zijn; zij P het snijpunt van g_1 en g_2. Dit punt P moet nu op elk dezer beide rechten een toegevoegd punt bezitten; de verbindingslijn dezer beide punten bevat ∞^1 paren toegevoegde punten en kan dus niets anders zijn dan de rechte g_3. Men ziet dus, dat de drie snijpunten der drie rechten g aan elkaar zijn toegevoegd, en dat het vlak V *één drietal* toegevoegde punten draagt. Dit is in overeenstemming met de algemeene formule.

Is P een punt van het *vertakkingsoppervlak* Δ, dat hier van den graad 24 is, dan zullen twee der aan P toegevoegde punten samenvallen. Van de rechten g, die P met deze punten verbinden, vallen dus ook twee samen, en P ligt dus op het *focaaloppervlak* van de congruentie [g]. Deze congruentie heeft dus het oppervlak Δ' tot focaaloppervlak.

Wij kunnen dan ook gemakkelijk aantoonen, dat elke rechte g het oppervlak Δ' in twee punten aanraakt. Hiertoe merken wij eerst op, dat de kromme γ, die door de involutie I^8 aan de rechte g is toegevoegd, een *kubische ruimtekromme* is. Een oppervlak a^2 uit den complex $\{a^2\}$ snijdt nl. de rechte g in twee toegevoegde punten; hieraan zijn nog *zes* punten toegevoegd, welke de snijpunten zijn van het oppervlak a^2 met de kromme γ.

Het coïncidentie-oppervlak Δ wordt voor $m = 2$ van den *vierden* graad. De rechte g snijdt dit oppervlak Δ:

1e in de beide dubbelpunten der op g gelegen involutie I^2;

2e in twee andere punten, die wij door T en T' zullen aanduiden. In elk dezer punten moet een punt van g met een der daaraan toegevoegde, op γ^3 gelegen, punten samenvallen. De rechte g is dus een *bisecante* van γ^3.

De kromme γ^3 snijdt het oppervlak Δ, behalve in de punten T en T', nog in tien punten. Aan elk van deze zijn twee punten van de rechte g toegevoegd, welke nu op het oppervlak Δ' moeten liggen. Men vindt zoo twintig snijpunten van de rechte g en het oppervlak Δ'. De vier overige snijpunten moeten twee aan twee zijn samengevallen in de beide punten van g, die aan de

punten T en T′ zijn toegevoegd; de rechte g is dus werkelijk een *dubbelraaklijn* van het oppervlak Δ'.

Uit het voorafgaande blijkt tevens, dat elke rechte g *twee* coïncidenties der I^8 draagt. Inderdaad blijkt uit de formule van § 3, dat voor $m = 2$ de dragers der coïncidenties een congruentie (14,6) vormen; dit is blijkbaar de dubbel getelde congruentie [g].

HOOFDSTUK VI.

VIER BUNDELS VAN DRIEDIMENSIONALE FIGUREN.

Laten in een vierdimensionale ruimte gegeven zijn vier bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}), (c^{m_3}) en (d^{m_4}), achtereenvolgens bestaande uit driedimensionale figuren van de graden m_1, m_2, m_3 en m_4. De groepen der snijpunten van de figuren uit deze bundels vormen een involutie $I^{m_1 m_2 m_3 m_4}$, welke wij in dit hoofdstuk zullen onderzoeken.

De basisoppervlakken der vier bundels zullen wij aanduiden door ${}_\alpha m_1^2$, ${}_\beta m_2^2$, ${}_\gamma m_3^2$ en ${}_\delta m_4^2$.

§ 1. Door een willekeurig punt P gaat één figuur uit elken der vier bundels; een willekeurig punt behoort dus tot *één* groep der involutie.

Dit geldt echter niet, als het punt gelegen is op een der basisoppervlakken. Door een punt P_α van het oppervlak ${}_\alpha m_1^2$ gaat één figuur uit elken der drie bundels (b^{m_2}), (c^{m_3}) en (d^{m_4}); deze figuren snijden elkaar volgens een kromme $(A)^{m_2 m_3 m_4}$, en deze kromme wordt nu door *elke* figuur a^{m_1} gesneden volgens een groep van punten, waartoe P_α behoort. De punten der basisoppervlakken zijn dus *singuliere punten* der involutie.

De krommen $(A)^{m_2 m_3 m_4}$, die door de punten P_α van het oppervlak ${}_\alpha m_1^2$ gaan, vormen een driedimensionale

figuur A. Deze zal de oppervlakken $\beta^{m_2^2}$, $\gamma^{m_3^2}$ en $\delta^{m_4^2}$ tot *meervoudige oppervlakken* hebben.

Om dit aan te toonen, merken wij op, dat door een punt P_β van het oppervlak $\beta^{m_2^2}$ één figuur gaat uit elken der bundels (c^{m_3}) en (d^{m_4}). Deze beide figuren snijden elkaar volgens een oppervlak van den graad $m_3 m_4$, en dit heeft met het oppervlak $\alpha^{m_1^2}$ $m_1^2 m_3 m_4$ punten gemeen. Door elk dezer punten gaat één figuur b^{m_2}, en deze snijdt de beide zooeven genoemde figuren blijkbaar volgens een kromme $(A)^{m_2 m_3 m_4}$, die door het punt P_β gaat. Men ziet dus, dat $\beta^{m_2^2}$ een $m_1^2 m_3 m_4$-voudig oppervlak van de figuur A is. Evenzoo is $\gamma^{m_3^2}$ een $m_1^2 m_4 m_2$-voudig oppervlak, $\delta^{m_4^2}$ een $m_1^2 m_2 m_3$-voudig oppervlak van A.

Om nu den *graad* van A te vinden, zoeken wij het aantal snijpunten van A met de doorsnede $\rho^{m_2 m_3 m_4}$ van drie figuren b^{m_2}, c^{m_3} en d^{m_4}. Deze doorsnede heeft $m_2^2 m_3 m_4$ punten gemeen met het oppervlak $\beta^{m_2^2}$; want dit is het aantal snijpunten van $\beta^{m_2^2}$ met de doorsnede der figuren c^{m_3} en d^{m_4}. Evenzoo heeft $\rho^{m_2 m_3 m_4}$ $m_2 m_3^2 m_4$ punten gemeen met het oppervlak $\gamma^{m_3^2}$, en $m_2 m_3 m_4^2$ punten met het oppervlak $\delta^{m_4^2}$. De eerstgenoemde punten zijn $m_1^2 m_3 m_4$-voudige punten van A, de tweede $m_1^2 m_2 m_4$-voudige punten, de derde $m_1^2 m_2 m_3$-voudige punten van A. Voor den *graad* van de figuur A vindt men hieruit gemakkelijk $3 m_1^2 m_2 m_3 m_4$.

Bijzondere aandacht verdienen de punten, welke de vier genoemde basisoppervlakken twee aan twee gemeen hebben. Zij nl. $P_{\alpha\beta}$ een der $m_1^2 m_2^2$ snijpunten van $\alpha^{m_1^2}$ en $\beta^{m_2^2}$. Door $P_{\alpha\beta}$ gaat één figuur uit elken der bundels (c^{m_3}) en (d^{m_4}); deze beide figuren snijden elkander volgens een oppervlak $(AB)^{m_3 m_4}$. Neemt men nu uit elken

der bundels (a^{m_1}) en (b^{m_2}) een willekeurige figuur, dan zullen deze het oppervlak $(AB)^{m_3 m_4}$ snijden in een groep van punten, waartoe $P_{\alpha\beta}$ behoort. Het punt $P_{\alpha\beta}$ behoort dus tot ∞^2 groepen der involutie.

§ 2. De involutie $I^{m_1 m_2 m_3 m_4}$ bevat ∞^4 puntengroepen: de verbindingslijnen der punten van eenzelfde groep vormen dus een stelsel Γ van ∞^4 rechten in R_4. In navolging van Dr. J. F. VAN OSS [1]) zullen wij dit stelsel een *congruentie* noemen.

Een driedimensionale ruimte R_3 bevat ∞^2 rechten van Γ; deze vormen een stralencongruentie, en graad en klasse dezer congruentie zullen blijkbaar kenmerkende getallen van Γ zijn. Om deze getallen te vinden, zullen wij den bundel (d^{m_4}) laten ontaarden en nagaan, met welke bedragen de twee genoemde getallen hierbij verminderen.

Zij de vergelijking van (d^{m_4}):

$$d_1^{m_4} + \lambda d_2^{m_4} = 0.$$

Wij laten nu elk der beide figuren d_1 en d_2 ontaarden in een figuur van den graad (m_4-1) en in een driedimensionale ruimte π. De bovenstaande vergelijking wordt dan:

$$\pi_1 d_1^{m_4-1} + \lambda \pi_2 d_2^{m_4-1} = 0.$$

Ten slotte laten wij de beide ruimten π_1 en π_2 samenvallen tot een ruimte π. Deze wordt dan blijkbaar van alle figuren van den bundel (d^{m_4}) afgescheiden en er blijft een bundel (d^{m_4-1}) over. De congruentie Γ ontaardt nu in twee verschillende bestanddeelen:

---

[1]) Over systemen van kwadratische variëteiten, Diss., Amsterdam 1913, blz. 7.

1e Neemt men uit elken der vier bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}), (c^{m_3}) en (d^{m_4-1}) één figuur, dan zullen deze figuren elkaar in een groep van punten snijden. Daar elke figuur d^{m_4-1} met de ruimte π een figuur d^{m_4} uit den oorspronkelijken bundel (d^{m_4}) vormt, zullen deze snijpunten grensstanden zijn van snijpunten van vier figuren uit de vier oorspronkelijke bundels; hun verbindingslijnen zijn dus stralen van Γ;

2e Door een punt P van de ruimte π gaat één figuur uit elken der drie bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}); deze drie figuren snijden elkaar volgens een kromme $\rho^{m_1 m_2 m_3}$. Door een punt Q dezer kromme gaat één figuur d^{m_4-1}; daar deze figuur met de ruimte π een figuur d^{m_4} vormt, ziet men, dat P en Q snijpunten zijn van vier figuren uit de vier bundels, zoodat hun verbindingslijn tot Γ behoort.

Om de kenmerkende getallen te vinden van de congruentie Γ', die door de laatstgevonden stralen gevormd wordt, beschouwen wij de stralen van Γ', die door een punt P van de ruimte π gaan. Hiertoe behooren ten eerst de stralen, welke de zooeven gevonden kromme $\rho^{m_1 m_2 m_3}$ uit P projecteeren. Ten tweede behooren hiertoe de stralen, welke door P gaan en *in de ruimte* π *gelegen* bisecanten van krommen $\rho^{m_1 m_2 m_3}$ zijn. Noemt men de beide punten, waarin zulk een bisecante de bijbehoorende kromme $\rho^{m_1 m_2 m_3}$ snijdt, P_1 en P_2, dan zal die bisecante uit *elk der punten* P_1 en P_2 de door dit punt gaande kromme $\rho^{m_1 m_2 m_3}$ projecteeren; deze bisecanten moeten dus *tweemaal* als stralen van Γ' worden geteld. Nu zijn P_1 en P_2 snijpunten van drie figuren uit de drie bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}). Deze drie bundels worden door de ruimte π volgens drie bundels van oppervlakken gesne-

den, en deze laatste bundels bepalen in de ruimte π een involutie $I^{m_1 m_2 m_3}$; gemakkelijk ziet men, dat P_1 en P_2 toegevoegde punten dezer involutie zijn. Volgens Hoofdstuk III liggen nu de paren toegevoegde punten van zulk een involutie op de stralen van een complex van den graad:

$$3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1m_2 + \sum_1^3 m_1.$$

Dit getal geeft dus den graad van den kegel, die uit de door P gaande bisecanten bestaat. Daar deze bisecanten dubbel moeten worden geteld, vormen de door P gaande stralen van Γ' samen een (tweedimensionalen) kegel van den graad:

$$7m_1m_2m_3 - 4\sum_1^3 m_1m_2 + 2\sum_1^3 m_1 - 1.$$

Een driedimensionale ruimte door P bevat van dezen kegel evenveel stralen, als de genoemde graad aangeeft. Dit getal geeft dus het aantal stralen van Γ', die in een driedimensionale ruimte liggen en door een punt P dezer ruimte gaan, dus den graad van de congruentie Γ'.

Om de *klasse* van Γ' te vinden, dus het aantal stralen van Γ', die in een vlak V liggen, brengen wij door dit vlak V een ruimte R_3. De krommen $\rho^{m_1 m_2 m_3}$ snijden deze ruimte in puntengroepen der involutie $I^{m_1 m_2 m_3}$, welke bepaald wordt door de drie bundels van oppervlakken, volgens welke de ruimte R_3 de drie bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}) snijdt. Het vlak V snijdt de ruimte π volgens een rechte l, en de krommen $\rho^{m_1 m_2 m_3}$, die door de punten van l gaan, snijden R_3 verder in de punten der kromme l', die door de genoemde involutie aan l is toegevoegd. Volgens Hoofdstuk III is deze een kromme van den graad $(3m_1m_2m_3 - 1)$, welke met de rechte l $(2\sum_1^3 m_1 - 4)$

punten gemeen heeft. Buiten deze punten snijdt de kromme l' het vlak V in

$$3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1 + 3$$

punten, en de verbindingslijnen van deze punten met de bijbehoorende punten van l zijn de in het vlak V gelegen stralen van Γ'. Het laatste getal is dus de klasse van Γ'.

Het eerste der beide bestanddeelen, waarin de congruentie Γ ontaardt, is, zooals men ziet, niets anders dan de met Γ overeenkomende congruentie, welke behoort bij de vier bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}), (c^{m_3}) en (d^{m_4-1}). De graad en de klasse van de congruentie Γ', die van Γ is afgescheiden, geven dus de bedragen aan, waarmee graad en klasse van Γ verminderen, wanneer het getal m_4 met *één* vermindert.

Men kan nu den bundel (d^{m_4-1}) op dezelfde wijze laten ontaarden, en aldus voortgaan, tot deze bundel is overgegaan in een bundel (π) van ruimten π. De bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}) bepalen in elke dezer ruimten een involutie $I^{m_1m_2m_3}$, gelijksoortig met die in Hoofdstuk III besproken is. Door een willekeurig punt P gaat één ruimte π; de in deze ruimte gelegen verbindingslijnen van toegevoegde punten vormen een kegel van den graad:

$$3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1m_2 + \sum_1^3 m_1;$$

dit is dus thans de graad van de congruentie Γ.

Een vlak V snijdt den bundel (π) volgens een waaier. Brengen wij door V een ruimte R_3, dan zullen de bundels (a^{m_1}), (b^{m_2}) en (c^{m_3}) in deze ruimte een involutie $I^{m_1m_2m_3}$ bepalen, en elke twee toegevoegde punten dezer involutie, welke in het vlak V op eenzelfden straal van

den genoemden waaier liggen, zullen tevens toegevoegde punten zijn van de in R_4 beschouwde involutie; hun verbindingslijn is dan een in V gelegen straal van Γ.

De verbindingslijnen van toegevoegde punten der involutie $I^{m_1 m_2 m_3}$ vormen een stralencomplex van den graad:

$$3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1m_2 + \sum_1^3 m_1;$$

dit is dus het aantal stralen, die tot den genoemden waaier behooren, dus de klasse van Γ.

De boven beschreven ontaarding is thans (m_4-1) malen toegepast; oorspronkelijk bedraagt dus de graad van Γ:

$$3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1m_2 + \sum_1^3 m_1 + (m_4-1)(7m_1m_2m_3 - 4\sum_1^3 m_1m_2 + 2\sum_1^3 m_1 - 1) =$$

$$= 7m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2m_3 + 2\sum_1^4 m_1m_2 - \sum_1^4 m_1 + 1.$$

De klasse van Γ bedraagt oorspronkelijk:

$$3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1m_2 + \sum_1^3 m_1 + (m_4-1)(3m_1m_2m_3 - 2\sum_1^3 m_1 + 3) =$$

$$= 3m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1m_2 + 3\sum_1^4 m_1 - 3.$$

§ 3. Wij zullen nu de *coïncidenties* der involutie bestudeeren.

Trekken wij uit een punt P raaklijnen aan alle figuren van den bundel (a^{m_1}), dan is de meetkundige plaats der raakpunten een driedimensionale figuur, de *poolfiguur* van het punt P t.o.v. den bundel (a^{m_1}). Om de vergelijking dezer poolfiguur te vinden, moeten wij den parameter λ elimineeren tusschen:

$$a_1^{m_1} + \lambda\, a_2^{m_1} = 0$$

en $$\sum_1^5 x_k \frac{\partial a_1^{m_1}}{\partial X_k} + \lambda \sum_1^5 x_k \frac{\partial a_1^{m_1}}{\partial X_k} = 0,$$

als x_k ($k = 1, .., 5$) de homogene coördinaten van het punt P zijn. Men ziet dus, dat de poolfiguur van den graad $(2m_1-1)$ is, en dat haar vergelijking de coördinaten van het punt P *lineair* bevat. De poolfiguur zal door het punt P gaan; door P gaat nl. één figuur a^{m_1}, en de raakpunten der aan deze figuur getrokken raaklijnen vallen in P. Daar deze raaklijnen in een driedimensionale ruimte liggen, is P een *enkelvoudig punt* van de poolfiguur.

De poolfiguren van P t.o.v. de vier gegeven bundels zullen elkaar, behalve in het punt P, nog in

$$(2m_1-1)\,(2m_2-1)\,(2m_3-1)\,(2m_4-1)-1 =$$
$$= 16m_1m_2m_3m_4-8\Sigma m_1m_2m_3+4\Sigma m_1m_2-2\Sigma m_1$$

punten snijden. Is Q een dezer punten, dan zullen de vier figuren, die uit de vier gegeven bundels door Q gaan, in Q de rechte PQ aanraken; Q is dus een *coïncidentie*, waarvan PQ de *drager* is. Het laatste getal geeft dus *het aantal dragers, die door een willekeurig punt gaan.*

Doorloopt het punt P een *rechte lijn l*, dan zullen de vier poolfiguren vier *bundels* beschrijven. De exemplaren dezer bundels zijn projectief toegevoegd aan de punten van *l*, dus ook onderling projectief. Zijn nu in R_4 vier projectief verwante bundels gegeven, bestaande uit figuren van den graad n_k ($k = 1, .., 4$), dan is de m.p. der snijpunten van overeenkomstige figuren een kromme van den graad $\Sigma n_1n_2n_3$. [1])

[1]) Zie mijn mededeeling: „Over projectief verwante lineaire stelsels in R_n" (Nieuw Archief voor Wisk., dl. IX, blz. 249).

In het hier beschouwde geval zal een dezer snijpunten in het punt P liggen en de rechte l doorloopen; de overige snijpunten beschrijven dus een kromme δ_1 van den graad:

$$\Sigma (2m_1-1)\ (2m_2-1)\ (2m_3-1)-1 =$$
$$= 8\ \Sigma m_1m_2m_3-8\ \Sigma m_1m_2 + 6\ \Sigma m_1-5.$$

Deze is dus *de meetkundige plaats der coïncidenties, waarvan de dragers een rechte l snijden.*

Doorloopt het punt P een *plat vlak* V, dan zullen de vier poolfiguren vier projectief verwante *netten* beschrijven. Zijn nu in R_4 vier projectief verwante netten gegeven, bestaande uit figuren van den graad n_k $(k = 1, .., 4)$, dan is de m. p. der snijpunten van overeenkomstige figuren een oppervlak van den graad Σn_1n_2. [1]) In het hier beschouwde geval zal een dezer snijpunten in het punt P liggen en het vlak V doorloopen; de overige snijpunten beschrijven dus een oppervlak δ_v van den graad:

$$\Sigma (2m_1-1)\ (2m_2-1) - 1 =$$
$$= 4\ \Sigma m_1m_2-6\ \Sigma m_1 + 5.$$

Dit is dus *de meetkundige plaats der coïncidenties, waarvan de dragers een plat vlak V snijden.*

Doorloopt het punt P een *ruimte* R_3, dan beschrijven de vier poolfiguren vier projectief verwante *complexen.* Zijn nu in R_4 vier projectief verwante complexen gegeven, bestaande uit figuren van den graad n_k $(k = 1, .., 4)$, dan is de m. p. der snijpunten van overeenkomstige figuren een driedimensionale figuur van den graad Σn_1. In het hier beschouwde geval zal een dezer snijpunten in het punt P liggen en de ruimte R_3 doorloopen; de

---

[1]) Zie noot blz. 123.

overige snijpunten beschrijven dus een figuur Δ van den graad:

$$\Sigma(2m_1-1)-1 = 2\Sigma m_1-5.$$

Deze is dus de m.p. der coïncidenties, waarvan de dragers een ruimte R_3 snijden. Daar echter *elke* drager de ruimte R_3 moet snijden, is de figuur Δ *de meetkundige plaats van alle coïncidenties der involutie.*

Een rechte l zal de bijbehoorende kromme δ_1 snijden in de $(2\Sigma m_1-5)$ snijpunten van de rechte l met de figuur Δ; want van elke der coïncidenties, die in deze snijpunten vallen, zal de drager l natuurlijk snijden. Brengen wij door de rechte l een ruimte R_3, dan zal deze ruimte de kromme δ_1 buiten l nog snijden in

$$8\Sigma m_1m_2m_3-8\Sigma m_1m_2+4\Sigma m_1$$

punten. Elk dezer punten is een coïncidentie, waarvan de drager, daar deze de rechte l snijdt, geheel in de ruimte R_3 moet liggen. Dit getal geeft dus het aantal dragers, die in een ruimte R_3 gelegen zijn en een rechte l van deze ruimte snijden; het is dus de graad van *het regeloppervlak, dat gevormd wordt door de dragers, die in een ruimte R_3 liggen.*

Een plat vlak V zal met het bijbehoorende oppervlak δ_v de kromme gemeen hebben, volgens welke dit vlak de figuur Δ snijdt. Brengen wij nu door het vlak V een ruimte R_3, dan zal deze ruimte het oppervlak δ_v buiten V nog snijden volgens een kromme δ_R van den graad: $4\Sigma m_1m_2-8\Sigma m_1+10$.

Elk punt dezer kromme δ_R is een coïncidentie, waarvan de drager, daar deze het vlak V snijdt, geheel in de ruimte R_3 moet liggen. Beschouwt men omgekeerd een coïncidentie, waarvan de drager in de ruimte R_3

ligt, dan zal deze drager het vlak V moeten snijden, zoodat de coïncidentie gelegen is op de kromme δ_R. Deze kromme is dus *de meetkundige plaats van de coïncidenties, welker dragers in een ruimte R_3 liggen.*

§ 4. Doorloopt een punt P een rechte l, dan zullen de aan P toegevoegde punten P′ een kromme l' beschrijven. De rechte l heeft met de in § 1 besproken figuur A $3m_1^2m_2m_3m_4$ punten gemeen; van elk dezer punten ligt een der toegevoegde op het oppervlak $\alpha^{m_1^2}$, zoodat de kromme l' $3m_1^2m_2m_3m_4$ punten met het oppervlak $\alpha^{m_1^2}$ gemeen heeft. Een figuur a^{m_1} snijdt de kromme l', behalve in deze punten, in de $m_1(m_1m_2m_3m_4-1)$ punten, die toegevoegd zijn aan de m_1 snijpunten van deze figuur a^{m_1} met de rechte l. Voor den *graad* van de kromme l' vindt men hieruit gemakkelijk:

$$4\,m_1m_2m_3m_4-1.$$

De rechte l en de kromme l' snijden elkaar in de $(2\Sigma m_1-5)$ snijpunten van de rechte l met de coïncidentiefiguur Δ; want in elk dezer snijpunten valt een punt van l met een der daaraan toegevoegde, op l' gelegen, punten samen. Brengen wij nu door de rechte l een ruimte R_3, dan zal deze ruimte de kromme l' buiten l nog in

$$4m_1m_2m_3m_4-2\Sigma m_1+4$$

punten snijden. Elk dezer punten is, als punt van l', aan een punt van l toegevoegd. Dit laatste getal geeft dus het aantal punten, die gelegen zijn op een rechte l eener ruimte R_3, en waarbij ook een der toegevoegde punten in R_3 valt; het is dus *de graad van het oppervlak Φ_R, dat gevormd wordt door de in een ruimte R_3 gelegen paren toegevoegde punten.*

De volledige doorsnede van de ruimte R_3 met de aan R_3 toegevoegde figuur Φ_R bestaat uit dit oppervlak φ_R, benevens uit het oppervlak Δ_R, dat de meetkundige plaats is van de in R_3 gelegen coïncidenties. Dit laatste oppervlak is niets anders dan de doorsnede van R_3 met de coïncidentie-figuur Δ, en dus van den graad $(2\Sigma m_1 - 5)$. De figuur Φ_R is dus van den graad:

$$4m_1m_2m_3m_4 - 1.$$

Deze figuur Φ_R zal de vier basisoppervlakken tot *meervoudige oppervlakken* hebben. Een punt P_α van het oppervlak ${}_\alpha m_1^2$ is nl. aan ∞^1 punten toegevoegd. Deze punten vormen een kromme $(A)^{m_2m_3m_4}$, welke de ruimte R_3 in $m_2m_3m_4$ punten snijdt. Elk punt P_α van ${}_\alpha m_1^2$ is dus aan $m_2m_3m_4$ punten van R_3 toegevoegd, zoodat ${}_\alpha m_1^2$ één $m_2m_3m_4$-voudig oppervlak van Φ_R is. Een analoge redeneering geldt voor de andere basisoppervlakken.

De figuur Δ gaat éénmaal door elk der vier basisoppervlakken; laat men nl. een der aan P_α toegevoegde punten langs de kromme $(A)^{m_2m_3m_4}$ tot P_α naderen, dan verkrijgt men één bepaalde in P_α gelegen coïncidentie.

Het oppervlak Δ_R zal dus éénmaal gaan door de doorsneden van R_3 met de vier basisoppervlakken. De *volledige* doorsnede van R_3 met de figuur Φ_R moet de snijkromme van R_3 en ${}_\alpha m_1^2$ tot $m_2m_3m_4$-voudige kromme hebben: het oppervlak φ_R heeft deze kromme dus tot $(m_2m_3m_4 - 1)$-voudige kromme. Een analoge redeneering geldt voor de drie andere basisoppervlakken.

De oppervlakken φ_R en Δ_R snijden elkaar, behalve volgens deze meervoudige krommen van φ_R, volgens de kromme δ_R, die de meetkundige plaats is van de coïncidenties, welker dragers in R_3 gelegen zijn; elke van

deze coïncidenties toch kunnen wij beschouwen als een in R_3 gelegen paar toegevoegde punten. Volgens § 3 is deze kromme van den graad:

$$4\Sigma m_1 m_2 - 8\Sigma m_1 + 10.$$

Ten slotte hebben de oppervlakken Φ_R en Δ_R nog een restdoorsnede ε van den graad:

$$(4m_1m_2m_3m_4 - 2\Sigma m_1 + 4)\,(2\Sigma m_1 - 5) - \Sigma m_1^2(m_2m_3m_4 - 1) -$$
$$-(4\Sigma m_1 m_2 - 8\Sigma m_1 + 10) =$$
$$= m_1m_2m_3m_4(7\Sigma m_1 - 20) - 3\Sigma m_1^2 - 12\Sigma\, m_1m_2 + 26\Sigma\, m_1 - 30.$$

Gemakkelijk ziet men in, dat deze kromme ε *de meetkundige plaats is van de in* R_3 *gelegen coïncidenties, waarbij ook een der toegevoegde punten in* R_3 *ligt.*

§ 5. Doorloopt een punt P een plat vlak V, dan zullen de aan P toegevoegde punten P′ een oppervlak V' beschrijven. Dit oppervlak V' snijdt het vlak V volgens de kromme van den graad $(2\Sigma m_1 - 5)$, welke de doorsnede is van het vlak V met de coïncidentie-figuur Δ. Verder heeft het oppervlak V' met het vlak V gemeen de

$$6m_1m_2m_3m_4 - 4\Sigma m_1m_2 + 6\Sigma m_1 - 6$$

punten, welke behooren tot de in V gelegen paren toegevoegde punten; het aantal dezer paren is gelijk aan het aantal in V gelegen stralen van de in § 2 onderzochte congruentie Γ.

Om den *graad* van V' te vinden, brengen wij door het vlak V een ruimte R_3. Deze snijdt het oppervlak V', behalve volgens de zooeven genoemde, in het vlak V gelegen kromme, volgens een restdoorsnede λ. Deze kromme λ zal het vlak V ten eerste snijden in de zooeven gevonden snijpunten van V en V'.

De verdere snijpunten van het vlak V met de kromme λ zijn, zooals men gemakkelijk inziet, de in V gelegen coïncidenties, waarvan de dragers in de ruimte R_3 liggen; want alleen van een zoodanige coïncidentie kan men den drager beschouwen als limiet van de verbindingslijn van een punt van V met het bijbehoorende punt van λ. Deze coïncidenties zijn de snijpunten van het vlak V met de kromme λ_R, hun aantal bedraagt dus:

$$4\Sigma m_1 m_2 - 8\Sigma m_1 + 10.$$

De graad der kromme λ bedraagt dus:

$$6m_1m_2m_3m_4 - 2\Sigma m_1 + 4,$$

dus de graad van het oppervlak V':

$$6m_1m_2m_3m_4 - 1.$$

Beschouwt men, in plaats van een plat vlak V, een *oppervlak* O^n van den graad n, dat gelegen is in een ruimte R_3, dan zal hieraan een oppervlak Ω zijn toegevoegd van den graad:

$$(6m_1m_2m_3m_4 - 1)n.$$

Men ziet dit gemakkelijk, door het oppervlak O^n in n platte vlakken te laten ontaarden.

Gaat O^n echter door de doorsnede van de ruimte R_3 met een der basisoppervlakken, dan zal het oppervlak Ω ontaarden. Onderstellen wij bijv., dat O^n gaat door de doorsnede α_R van de ruimte R_3 met het oppervlak ${}_\alpha m_1^{g}$. Aan een willekeurig punt van ${}_\alpha m_1^{g}$ is een geheele *kromme* $(A)^{m_2m_3m_4}$ toegevoegd; de krommen $(A)^{m_2m_3m_4}$, die door de punten van α_R gaan, vormen een oppervlak A_R, dat blijkbaar van het oppervlak Ω is af te scheiden.

Om den *graad* van A_R te vinden, merken wij op, dat elke kromme $(A)^{m_2m_3m_4}$ de doorsnede is van drie figuren

uit de drie bundels (b^{m_2}), (c^{m_3}) en (d^{m_4}); de snijpunten dezer kromme met de ruimte R_3 vormen dus een groep der involutie $I^{m_2m_3m_4}$, die in R_3 bepaald wordt door de drie bundels van oppervlakken, volgens welke deze ruimte de drie gegeven bundels snijdt. Doorloopt een dezer snijpunten nu de kromme α_R, dan zullen de overige de kromme beschrijven, die door de genoemde involutie aan α_R is toegevoegd; deze kromme is van den graad $m_1^2(3m_2m_3m_4-1)$. Deze kromme vormt met de kromme α_R de volledige doorsnede van de ruimte R_3 met het oppervlak A_R; dit laatste oppervlak is dus van den graad $3m_1^2m_2m_3m_4$.

Passen wij deze uitkomsten toe op het oppervlak φ_R, dat gevormd wordt door de in R_3 gelegen paren toegevoegde punten. Dit is van den graad:

$$4m_1m_2m_3m_4-2\Sigma m_1+4.$$

Tot het aan φ_R toegevoegde oppervlak behoort in de eerste plaats φ_R *zelf;* immers van elk punt van φ_R zal ook een der toegevoegde punten op φ_R gelegen zijn. Verder gaat φ_R $(m_2m_3m_4-1)$ malen door de kromme α_R; het zooeven gevonden oppervlak A_R behoort dus $(m_2m_3m_4-1)$ malen tot het gezochte oppervlak. Analoge uitkomsten gelden voor de andere meervoudige krommen van φ_R. Er blijft over een oppervlak φ'_R. Elk punt van φ'_R is aan *twee* punten van φ_R toegevoegd; het oppervlak φ'_R moet dus bij de toepassing der algemeene formule *dubbel* geteld worden. Voor den *graad* van φ'_R vindt men dus:

$$\tfrac{1}{2}\,[(4m_1m_2m_3m_4-2\Sigma m_1+4)(6m_1m_2m_3m_4-1)-(4m_1m_2m_3m_4-$$
$$-2\Sigma m_1+4)-\Sigma 3m_1^2m_2m_3m_4(m_2m_3m_4-1)]=$$
$$=m_1m_2m_3m_4(6m_1m_2m_3m_4-\tfrac{9}{2}\Sigma m_1+8)+2\Sigma m_1-4.$$

Het oppervlak ϕ'_R zal de ruimte R_3 ten eerste snijden volgens de in § 4 beschouwde kromme ε; elk punt van ε toch is toegevoegd aan zich zelf en nog aan een tweede punt van R_3. De restdoorsnede van ϕ'_R en R_3 zal, zooals men gemakkelijk inziet, *de meetkundige plaats der in R_3 gelegen drietallen toegevoegde punten zijn.* Voor den graad dezer laatste kromme vindt men dus:

$$m_1m_2m_3m_4(6m_1m_2m_3m_4-\tfrac{23}{2}\Sigma m_1+28)+3\Sigma m_1^2+12\Sigma m_1m_2-$$
$$-24\Sigma m_1+26.$$

§ 6. Verschillende uitkomsten van dit hoofdstuk kunnen zoodanig worden geformuleerd, dat in deze formuleering de vierdimensionale ruimte *niet* optreedt. Hiertoe merken wij het volgende op:

Laten in een driedimensionale ruimte vier bundels van oppervlakken gegeven zijn. Neemt men uit elk der bundels een oppervlak, dan zullen deze oppervlakken in 't algemeen *geen* punt gemeen hebben. Het is echter op ∞^3 wijzen mogelijk, de vier oppervlakken zóó te kiezen, dat zij *één* punt gemeen hebben; de oppervlakken toch, die uit de vier bundels door een willekeurig punt der ruimte gaan, vormen een zoodanig stel.

Uit de in dit hoofdstuk verkregen uitkomsten volgt nu gemakkelijk:

Het is op ∞^2 wijzen mogelijk, de vier oppervlakken zóó te kiezen, dat zij *twee* punten gemeen hebben. De meetkundige plaats dezer puntenparen is een oppervlak van den graad:

$$4m_1m_2m_3m_4-2\Sigma m_1+4,$$

terwijl de verbindingslijnen dezer puntenparen een stralencongruentie vormen van den graad:

$$7m_1m_2m_3m_4 - 4\Sigma m_1m_2m_3 + 2\Sigma m_1m_2 - \Sigma m_i + 1$$

en van de klasse:

$$3m_1m_2m_3m_4 - 2\Sigma m_1m_2 + 3\Sigma m_1 - 3.$$

Het gebeurt hierbij ∞^1 malen, dat de beide punten samenvallen, en de vier oppervlakken dus in hun gemeenschappelijk punt een gemeenschappelijke raaklijn hebben. Deze raakpunten vormen een kromme van den graad:

$$4\Sigma m_1m_2 - 8\Sigma m_1 + 10,$$

terwijl de raaklijnen een regeloppervlak vormen van den graad:

$$8\Sigma m_1m_2m_3 - 8\Sigma m_1m_2 + 4\Sigma m_1.$$

Ten slotte is het op ∞^1 wijzen mogelijk, de vier oppervlakken zóó te kiezen, dat zij *drie* punten gemeen hebben. De meetkundige plaats dezer drietallen punten is een ruimtekromme van den graad:

$$m_1m_2m_3m_4(6m_1m_2m_3m_4 - \tfrac{23}{2}\Sigma m_1 + 28) + 3\Sigma m_1^2 + 12\Sigma m_1m_2 - \\ - 24\Sigma m_1 + 26.$$

HOOFDSTUK VII.

EEN VIERVOUDIG ONEINDIG LINEAIR STELSEL.

§ 1. Wij beschouwen thans het geval, dat de vier bundels van het vorige hoofdstuk behooren tot een viervoudig oneindig lineair stelsel $((a^m))$, bestaande uit driedimensionale figuren van den graad *m*. Dan is dus $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$.

Vier willekeurige figuren uit de vier bundels bepalen uit het stelsel $((a^m))$ een *complex* $\}a^m\{$, en de snijpunten van die figuren zijn de basispunten van dezen complex. Men kan de groepen der involutie I^{m^4} dus ook bepalen als de groepen der basispunten van de complexen uit het stelsel $((a^m))$.

Deze definitie is echter niet geheel met de oorspronkelijke gelijkwaardig Wij zullen nl. aantoonen, dat het op ∞^2 wijzen mogelijk is, de vier genoemde figuren zóó te kiezen, dat zij tot eenzelfde *net* behooren, en dus een *kromme* λ^{m^3} gemeen hebben. Neemt men nu een punt P op deze kromme, dan zullen de punten, die volgens de oorspronkelijke definitie aan P zijn toegevoegd, klaarblijkelijk *onbepaald* worden en de geheele kromme λ^{m^3} vullen. Gaat men echter van de nieuwe definitie uit, dan zal het punt P nog steeds een *bepaalden* complex uit het stelsel $((a^m))$ bepalen, en dus tot een *bepaalde* groep van basispunten behooren.

Wij zullen verder van de nieuwe definitie uitgaan. De eigenschappen der involutie I^{m^4} kunnen dan eerst door een grensovergang uit die der oorspronkelijke involutie worden afgeleid.

Om nu de genoemde stelling aan te toonen, denken wij ons de figuren van het stelsel $((a^m))$ projectief toegevoegd aan de punten van een vierdimensionale ruimte R_4. De vier gegeven bundels worden dan afgebeeld door vier *rechten* *a*, *b*, *c* en *d*. De rechten *a* en *b* bepalen in de ruimte R_4 een driedimensionale ruimte R_3. Elke der ∞^2 transversalen *t* van de rechten *c* en *d* snijdt de ruimte R_3 in een punt P, en door dit punt P gaat één transversaal *t'* van de rechten *a* en *b*. Het vlak *V* door de transversalen *t* en *t'* zal met elke der vier rechten een punt gemeen hebben, en is dus het beeld van een *net* $[\lambda^m]$, dat met elken der vier bundels een oppervlak gemeen heeft. Op deze wijze verkrijgt men ∞^2 vlakken *V*, dus ∞^2 netten $[\lambda^m]$.

De basiskrommen λ^{m^2} dezer netten zullen een driedimensionale figuur Λ vormen. Om den *graad* dezer figuur te bepalen, handelen wij als volgt:

De figuur Λ zal gaan door de basisoppervlakken der vier gegeven bundels. Beschouwen wij nl. een punt P_ϑ van het oppervlak ϑ^{m^2}. De figuren van het stelsel $((a^m))$, die door het punt P_ϑ gaan, vormen een complex, die bij de bovengenoemde afbeelding door een ruimte R_3 wordt afgebeeld. Daar de bundel (d^m) tot den genoemden complex moet behooren, zal deze ruimte R_3 door de rechte *d* gaan. Deze ruimte heeft nu met elke der rechten *a*, *b* en *c* een punt gemeen; het vlak door deze punten zal, daar het in de ruimte R_3 gelegen is, ook de rechte *d* snijden;

dit vlak is dus het beeld van een der bovengenoemde netten. Het punt P_ϑ ligt dus op de basiskromme van zulk een net, dus op de figuur Λ.

Een figuur d^m zal de figuur Λ, behalve volgens het oppervlak ϑ^{m^2}, snijden volgens het oppervlak, dat gevormd wordt door de basiskrommen der netten, waartoe de figuur d^m behoort; deze basiskrommen toch liggen op d^m. Om die netten te vinden, moet men den bovengenoemden transversaal t trekken uit het punt P_d van de rechte d, dat het beeldpunt is van de figuur d^m. Deze transversalen t projecteeren de rechte c uit het punt P_d; hun snijpunten met de ruimte R_3 liggen op een rechte lijn c'. De transversalen t' der rechten c', a en b vormen nu een quadratische regelschaar en bepalen op deze drie rechten drie puntreeksen, welke blijkbaar onderling en met de door de rechten t op de rechte c bepaalde puntreeks projectief zijn. De figuren a^m, b^m en c^m, die met de genoemde figuur d^m tot eenzelfde net behooren, zijn dus projectief aan elkaar toegevoegd; de basiskromme van zulk een net is blijkbaar de doorsnede van twee overeenkomstige figuren a^m en b^m met de figuur d^m. Nu vormen de doorsneden van overeenkomstige figuren uit twee projectief verwante bundels (a^m) en (b^m) een figuur van den graad $2m$; deze wordt door de figuur d^m gesneden volgens een oppervlak van den graad $2m^2$, dat blijkbaar de m.p. der genoemde basiskrommen is.

De *volledige* doorsnede der figuren Λ en d^m is dus van den graad $3m^2$, *de graad van* Λ *is dus* $3m$.

§ 2. De punten, die volgens de oorspronkelijke definitie der I^{m^4} aan een punt P van de figuur Λ zijn toegevoegd,

zijn blijkens het voorafgaande onbepaald en vullen een geheele kromme λ^{m^3}. Elke bisecante van zulk een kromme moet dus als verbindingslijn van twee toegevoegde punten worden beschouwd. Laat men deze punten samenvallen, dan ziet men, dat elke *raaklijn* eener kromme λ^{m^3} als drager eener *coïncidentie* beschouwd moet worden, welke coïncidentie zelf in het raakpunt valt. De coïncidentiefiguur der algemeene I^{m^4} ontaardt dus in de figuur Λ en in de meetkundige plaats Δ van de coïncidenties der hier beschouwde I^{m^4}. Daar de figuur Δ voor de algemeene I^{m^4} van den graad (8m—5) is, wordt zij hier van den graad 5(m—1).

Wij kunnen dit als volgt bevestigen:

De figuren a^m uit het stelsel $((a^m))$, die door een punt P van de figuur Δ gaan, hebben in dit punt P een gemeenschappelijke raaklijn; zij vormen een *complex* $\{a^m\}$. Een punt P', dat oneindig dicht bij P is gelegen, zoodanig, dat de lijn PP' in de grens niet met de genoemde raaklijn *l* samenvalt, bepaalt uit dezen complex een *net* $[a^m]$; de figuren van dit net raken in P aan het vlak *V*, dat door de lijn PP' en de raaklijn *l* gaat. Een tweede punt P'', dat oneindig dicht bij P is gelegen, zoodanig, dat de lijn PP'' in de grens niet in het vlak *V* ligt, bepaalt uit het net $[a^m]$ een *bundel* (a^m); de figuren van dezen bundel raken in P aan de ruimte R_3, die door de lijn PP'' en het vlak *V* gaat. Een derde punt P''', dat oneindig dicht bij P is gelegen, zoodanig, dat de lijn PP''' in de grens niet in de ruimte R_3 ligt, bepaalt uit den bundel (a^m) *één* figuur a^m; deze figuur heeft in het punt P een raaklijn PP''', die niet in de raakruimte R_3 ligt, en heeft dus een *conisch punt* in P.

Zij omgekeerd een punt P een conisch punt van een figuur a^m uit het stelsel $((a^m))$. Beschouwen wij drie andere figuren uit dit stelsel, welke door P gaan, dan zal de doorsnede dezer drie figuren met de eerstgenoemde figuur in P twee samenvallende punten gemeen hebben, zoodat P een coïncidentie der Γ^{m^4} is.

De coïncidentie-figuur Δ is dus niets anders dan *de meetkundige plaats van de conische punten van figuren uit het stelsel* $((a^m))$. Gemakkelijk bewijst men, dat deze m.p. (*kernfiguur* van het stelsel) van den graad 5(m—1) is.

Op een dergelijke wijze kan men ook den graad vinden van de kromme δ_R, die gevormd wordt door *de coïncidenties, welker dragers in een ruimte* R_3 *liggen.* Hiertoe merken wij op, dat een ruimte R_3 het stelsel $((a^m))$ volgens een stelsel van ∞^4 *oppervlakken* snijdt. Is P een punt van de kromme δ_R, dan zullen de ∞^3 oppervlakken, die uit dit stelsel door P gaan, in P een gemeenschappelijke raaklijn hebben. Evenals boven toont men nu gemakkelijk aan, dat er ∞^2 oppervlakken uit het stelsel zijn, die in P een plat vlak, dat door deze raaklijn gaat, aanraken, en ∞^1, die nog een niet in dit vlak gelegen raaklijn bezitten, dus in P een *conisch punt* hebben.

Beschouwen wij nu twee *complexen* uit het genoemde stelsel van oppervlakken. De kernoppervlakken dezer complexen, die beide van den graad 4(m—1) zijn, snijden elkaar volgens een kromme van den graad $16(m-1)^2$. Tot deze doorsnede behoort ten eerste de kernkromme van het *net*, dat de beide complexen gemeen hebben; dit is een kromme van den graad $6(m-1)^2$. Is P een punt der restdoorsnede, dan is P een conisch punt van

een oppervlak uit elken der beide complexen, dus van een bundel van oppervlakken uit het stelsel. Deze restdoorsnede is dus niets anders dan de kromme ∂_R. De *graad* van ∂_R bedraagt dus:

$$10(m-1)^2.$$

§ 3. Een rechte l snijdt de figuur Λ in $3m$ punten. Door elk dezer punten gaat een kromme λ^{m^3}, waarvan alle punten aan het genoemde snijpunt zijn toegevoegd. Deze krommen zijn dus van de kromme l', die in het algemeene geval aan l is toegevoegd, af te scheiden, en de eigenlijke kromme l' wordt van den graad (m^4-1).

De kromme λ^{m^3}, die aan een punt P van de figuur Λ is toegevoegd, snijdt een ruimte R_3 in m^3 punten. Elk punt van Λ behoort dus bij m^3 punten van de ruimte R_3, de figuur Λ behoort dus m^3 malen tot de figuur Φ_R, die aan de ruimte R_3 toegevoegd is. De eigenlijke figuur Φ_R wordt dus van den graad (m^4-1).

Om den graad te vinden van het oppervlak V', dat aan een *plat vlak* V is toegevoegd, merken wij op, dat het basisoppervlak α^{m^2} van een bundel (a^m) uit het stelsel $((a^m))$ het vlak V in m^2 punten snijdt. Aan elk dezer punten zijn (m^4-1) andere punten toegevoegd, die eveneens op het oppervlak α^{m^2} moeten liggen, en de snijpunten zijn van de oppervlakken α^{m^2} en V'. Voor den *graad* van V' vindt men hieruit (m^4-1).

Een ruimte R_3 snijdt de daaraan toegevoegde figuur Φ_R:

1e volgens de meetkundige plaats Δ_R van de in R_3 gelegen coïncidenties. Deze is, als doorsnede van de ruimte R_3 met de figuur Δ, van den graad $5(m-1)$;

2e volgens een oppervlak Φ_R van den graad:

$$m^4-5m+4,$$

de meetkundige plaats van de in de ruimte R_3 gelegen paren toegevoegde punten.

De oppervlakken Δ_R en Φ_R snijden elkaar volgens de kromme ϑ_R en volgens een restdoorsnede ε van den graad:

$$5(m-1)(m^4-5m+4)-10(m-1)^2 = 5(m^5-m^4-7m^2+ \\ +13m-6).$$

Gemakkelijk ziet men, dat deze kromme ε de meetkundige plaats is van de in R_3 gelegen coïncidenties, waarbij nog een der toegevoegde punten in R_3 ligt.

Aan een oppervlak O^n is toegevoegd een oppervlak van den graad $n(m^4-1)$; gemakkelijk ziet men dit, door het oppervlak O^n in n platte vlakken te laten ontaarden. Past men dit toe op het zooeven genoemde oppervlak Φ_R, dan behoort tot het toegevoegde oppervlak ten eerste Φ_R *zelf;* immers, elk punt van Φ_R is aan een ander punt van Φ_R toegevoegd. Het verdere oppervlak Φ'_R moet *dubbel* geteld worden, immers, elk punt van Φ'_R behoort bij *twee* punten van Φ_R. De *graad* van Φ'_R bedraagt dus:

$$\tfrac{1}{2}[(m^4-5m+4)(m^4-1)-(m^4-5m+4)] = \\ = \tfrac{1}{2}(m^8-5m^5+2m^4+10m-8).$$

Het oppervlak Φ'_R snijdt de ruimte R_3, behalve volgens de zooeven genoemde kromme ε, volgens een ruimtekromme van den graad:

$$\tfrac{1}{2}(m^8-15m^5+12m^4+70m^2-120m+52),$$

de meetkundige plaats van *de in R_3 gelegen drietallen toegevoegde punten der I^{m^4}.*

§ 4. Evenals in het vorige hoofdstuk kan men ook nu verschillende der uitkomsten interpreteeren *zonder* gebruik te maken van de vierdimensionale ruimte.

Zij in een driedimensionale ruimte een viervoudig oneindig lineair stelsel van oppervlakken gegeven. Dit stelsel bevat ∞^4 complexen; zulk een complex van oppervlakken bezit in het algemeen *geen* basispunt. Er zijn echter ∞^3 complexen, die *één* basispunt hebben; zulk een complex wordt gevormd door alle oppervlakken van het stelsel, die door eenzelfde punt der ruimte gaan.

Uit het bovenstaande blijkt nu, dat er ∞^2 complexen zijn met *twee* basispunten; deze puntenparen liggen op een oppervlak van den graad:

$$m^4-5m+4.$$

Het gebeurt ∞^1 malen, dat deze twee basispunten *samenvallen,* en de oppervlakken van den bijbehoorenden complex dus in hun gemeenschappelijk punt een gemeenschappelijke raaklijn hebben; de meetkundige plaats dezer punten is een kromme van den graad:

$$10(m-1)^2.$$

Er zijn eindelijk ∞^1 complexen met *drie* basispunten; de meetkundige plaats dezer drietallen punten is een kromme van den graad:

$$\tfrac{1}{2}(m^8-15m^5+12m^4+70m^2-120m+52).$$

Enkele van de kenmerkende getallen, die analoog zijn aan de getallen, welke in § 6 van het vorige hoofdstuk voor het geval van vier bundels werden gevonden, zijn nu nog niet bepaald. Dit zijn de graad en de klasse van de stralencongruentie, die door de verbindingslijnen der bovengenoemde ∞^2 puntenparen gevormd wordt, benevens

de graad van het regeloppervlak, dat uit de bovengenoemde ∞^1 gemeenschappelijke raaklijnen bestaat.

Om deze getallen te vinden, zullen wij den in § 1 van dit hoofdstuk besproken grensovergang eenigszins wijzigen. Wij zullen nl. eerst drie der bundels zoodanig laten veranderen, dat zij tot eenzelfden complex behooren, en vervolgens den vierden bundel zoodanig, dat hij met dezen complex tot eenzelfde viervoudig oneindig stelsel behoort; hiertoe is noodzakelijk en voldoende, dat de bundel en de complex één figuur gemeen hebben.

Ter vereenvoudiging zullen wij verder alleen de doorsnede beschouwen van het geheele stelsel met een driedimensionale ruimte. Door de teekens (a^m), enz. zullen wij dus verder aanduiden bundels van *oppervlakken*, gelegen in een R_3.

§ 5. Laten dus in een *driedimensionale ruimte* vier bundels (a^m), (b^m), (c^m) en (d^m) gegeven zijn, bestaande uit *oppervlakken* van den graad *m*.

Behooren de bundels (a^m), (b^m) en (c^m) tot eenzelfden *complex* $\{a^m\}$, dan is het, volgens Hoofdstuk V, op ∞^1 wijzen mogelijk, uit elken der bundels een oppervlak te nemen, zoodanig, dat deze drie oppervlakken door eenzelfde kromme λ^{m^2} gaan; de meetkundige plaats dezer krommen is een oppervlak Λ van den graad 2m.

Een kromme λ^{m^2} en een oppervlak d^m snijden elkaar in m^3 punten; dit zijn snijpunten van vier oppervlakken uit de vier gegeven bundels, en hun verbindingslijnen behooren dus tot de congruentie Γ, die door de verbindingslijnen van zulke snijpunten gevormd wordt. Op deze wijze verkrijgt men ∞^2 verbindingslijnen; deze

vormen een congruentie Γ', welke blijkbaar van de congruentie Γ wordt afgescheiden.

Om graad en klasse van de congruentie Γ' te vinden, laten wij den bundel (d^m) ontaarden op een dergelijke wijze als dit in § 2 van het vorige hoofdstuk gebeurd is. Wij denken ons nl. twee der oppervlakken d^m ontaard in een plat vlak en een oppervlak d^{m-1}. Laten wij deze beide platte vlakken dan samenvallen tot een plat vlak π, dan zal dit vlak π van alle oppervlakken d^m worden afgescheiden, en er blijft een bundel (d^{m-1}) over. De congruentie Γ' ontaardt nu in twee verschillende bestanddeelen:

1e Een oppervlak d^{m-1} en een kromme λ^{m^2} snijden elkaar in $m^2(m-1)$ punten. Daar het oppervlak d^{m-1} en het vlak π samen een oppervlak d^m vormen, behooren deze punten tot een der bovengenoemde groepen van m^3 snijpunten, en behooren hun verbindingslijnen tot de congruentie Γ'.

2e Zij P een punt van de doorsnede van het oppervlak Λ met het vlak π. Door P gaat één kromme λ^{m^2}; zij Q een willekeurig punt dezer kromme. Door Q gaat één oppervlak d^{m-1}; daar dit oppervlak met het vlak π een oppervlak d^m vormt, behooren P en Q tot eenzelfde groep der genoemde snijpunten, en is dus hun verbindingslijn een straal van Γ'. Tot Γ' behooren dus de rechten, welke de krommen λ^{m^2} uit hun snijpunten met het vlak π projecteeren; deze rechten vormen een congruentie Γ'', welke bij de ontaarding van den bundel (d^m) van de congruentie Γ' wordt afgescheiden.

Om den *graad* van Γ'' te vinden, zoeken wij het aantal stralen van Γ'', gaande door een punt van het vlak π.

Deze stralen moeten in π gelegen bisecanten van krommen λ^{m^2} zijn; daar zulk een bisecante de kromme λ^{m^2} uit *twee* harer snijpunten met het vlak π projecteert, moet zij *dubbel* worden geteld. Nu vormen volgens Hfdst. V de bisecanten der krommen λ^{m^2} een stralencomplex van den graad: $m(m-1)(2m-1)$,

dit is dus het aantal bisecanten, die in het vlak π liggen en door een punt van dit vlak gaan. De graad van de congruentie Γ'' bedraagt dus:

$$2m(m-1)(2m-1).$$

Om de *klasse* van Γ'' te vinden, merken wij op, dat een vlak V de doorsnede van het oppervlak Λ en het vlak π in 2m punten snijdt. Door elk dezer punten gaat één kromme λ^{m^2}, welke uit dit punt door een kegel van den graad (m^2-1) wordt geprojecteerd; deze kegel wordt door het vlak V volgens (m^2-1) beschrijvenden gesneden. Het aantal in V gelegen beschrijvenden van Γ'', of de klasse van Γ'', bedraagt derhalve:

$$2m(m^2-1).$$

Laten wij den bundel (d^{m-1}) nu op dezelfde wijze ontaarden als den bundel (d^m), dan wordt de congruentie Γ'' opnieuw van de congruentie Γ' afgescheiden. Zoo kan men voortgaan, totdat eindelijk de bundel (d^m) is overgegaan in een bundel (d^1) van platte vlakken d^1. De congruentie Γ' wordt dan gevormd door de verbindingslijnen der snijpunten van de krommen λ^{m^2} met de vlakken d^1. Door een punt P gaat één vlak d^1; de in dit vlak gelegen bisecanten van krommen λ^{m^2} omhullen een kromme van de klasse $m(m-1)(2m-1)$; dit is dus het aantal door P gaande stralen van Γ', dus de *graad* dezer congruentie.

Door hetzelfde getal wordt de *klasse* van Γ' voorgesteld. De in een vlak V gelegen stralen van Γ' moeten nl., daar zij elk in een vlak d^1 liggen, tot den waaier behooren, volgens welken het vlak V den bundel (d^1) snijdt; zij zijn verder bisecanten van krommen λ^{m^2}. Nu omhullen de in V gelegen bisecanten een kromme van de klasse $m(m-1)(2m-1)$; dit is dus het aantal der bisecanten, die tot den genoemden waaier behooren.

De boven beschreven ontaarding van den bundel (d^m) is nu $(m-1)$ malen toegepast; oorspronkelijk bedraagt dus de graad van Γ':

$$m(m-1)(2m-1)[1+2(m-1)] = m(m-1)(2m-1)^2$$

en de klasse van Γ':

$$m(m-1)(2m-1)+2m(m^2-1)(m-1) = \\ = m(m-1)(2m^2+2m-3).$$

§ 6. Voor $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ wordt de graad van de in § 2 van het vorige hoofdstuk onderzochte congruentie Γ:

$$7m^4-16m^3+12m^2-4m+1 = (m-1)^2(7m^2-2m+1)$$

en de klasse:

$$3m^4-12m^2+12m-3 = 3(m-1)^2(m^2+2m-1).$$

Behooren de eerste drie bundels tot eenzelfden complex, dan wordt de congruentie Γ' van de congruentie Γ afgescheiden; de congruentie Γ wordt dus van den graad:

$$(m-1)(3m^3-5m^2+2m-1)$$

en van de klasse:

$$(m-1)(m^3+m^2-6m+3).$$

De involutie, welke door de groepen der snijpunten van de oppervlakken uit de eerste drie bundels ge-

vormd wordt, is nu overgegaan in de involutie, die gevormd wordt door de groepen der basispunten van de netten uit den complex $\{a^m\}$, en de congruentie Γ wordt, zooals men gemakkelijk ziet, gevormd door de verbindingslijnen van *die* paren toegevoegde punten dezer involutie I^{m^3}, welke gelegen zijn op eenzelfde oppervlak d^m.

Indien nu de complex $\{a^m\}$ en de bundel (d^m) tot eenzelfde stelsel $((a^m))$ behooren, hebben zij één oppervlak gemeen, dat wij door a_d^m zullen aanduiden. Op dit oppervlak liggen ∞^2 groepen toegevoegde punten der I^{m^3}, en de verbindingslijnen dezer punten vormen een congruentie Γ''', die van de congruentie Γ wordt afgescheiden.

Om den *graad* der congruentie Γ''' te vinden, gaan wij als volgt te werk:

De verbindingslijnen van paren toegevoegde punten der involutie I^{m^3} vormen volgens Hfdst. V een stralencomplex van den graad $m(m-1)(m-2)$. Dit is dus de graad van den kegel, die gevormd wordt door de door een punt P gaande verbindingslijnen van paren toegevoegde punten. Deze puntenparen zelf vormen een kromme, die in P een (m^3-1)-voudig punt heeft; want het punt P vormt met elk der (m^3-1) er aan toegevoegde punten zulk een paar. Een vlak V door P snijdt deze kromme, behalve in het punt P, in de puntenparen, die gelegen zijn op de $m(m-1)(m-2)$ beschrijvenden, volgens welke dit vlak den genoemden kegel snijdt; de graad dezer kromme bedraagt dus:

$$(m-1)(3m^2-3m+1).$$

Deze kromme snijdt het oppervlak a_d^m in

$$m(m-1)(3m^2-3m+1)$$

punten, welke

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)(3m^2-3m+1)$$

paren vormen; de verbindingslijn der beide punten van elk dezer paren is blijkbaar een straal van Γ''', welke door P gaat. Dit laatste getal is dus de *graad* van Γ'''.

Om de *klasse* van Γ''' te vinden, merken wij op, dat een vlak V het oppervlak a_d^m volgens een kromme α^m van den graad m snijdt. De kromme, welke door de involutie I^{m^3} aan α^m is toegevoegd, is van den graad $m(m^3-1)$. Zij snijdt de kromme α^m:

1e in de op α^m gelegen coïncidenties, dus in de $4m(m-1)$ snijpunten van de kromme α^m met het coïncidentie-oppervlak Δ der I^{m^3};

2e in nog

$$m(m^3-4m+3) = m(m-1)(m^2+m-3)$$

punten; deze vormen

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)(m^2+m-3)$$

toegevoegde paren, en de verbindingslijn van de beide punten van elk dezer paren is een in V gelegen straal van Γ'''. Dit laatste getal is dus de *klasse* van Γ'''.

Daar bij den laatsten grensovergang de congruentie Γ''' van de congruentie Γ wordt afgescheiden, vindt men ten slotte voor den graad van Γ:

$\frac{1}{2}(m-1)(3m^3-7m^2+3m-2) = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(3m^2-m+1)$

en voor de klasse van Γ:

$\frac{1}{2}(m-1)(m^3+m^2-9m+6) = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m^2+3m-3)$.

§ 7. Wij kunnen thans ook den graad bepalen van het regeloppervlak R, dat gevormd wordt door de in § 4 genoemde ∞^1 raaklijnen.

Voor het geval van vier *bundels* is voor $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ de graad van dit oppervlak R:

$$32m^3 - 48m^2 + 16m = 16m(m-1)(2m-1).$$

Wij laten nu de eerste drie bundels zoodanig veranderen, dat zij behooren tot eenzelfden complex $\{a^m\}$. Elke der hierbij optredende krommen λ^{m^2} wordt door een zeker aantal oppervlakken d^m aangeraakt; de raaklijnen der krommen λ^{m^2} in de punten, waar dit geschiedt, vormen een regeloppervlak R', dat van het oppervlak R wordt afgescheiden.

Om den *graad* van R' te vinden, laten wij den bundel (d^m) ontaarden, evenals dit in § 5 geschied is. Zij P een punt van de doorsnede van het vlak π met het oppervlak Λ. Door P gaat één oppervlak d^{m-1}; dit vormt met het vlak π een oppervlak d^m, dat blijkbaar in P een *dubbelpunt* heeft. Beschouwt men nu de krommen λ^{m^2} uit een zeker stelsel, die een oppervlak d^m aanraken, dan moet elke kromme λ^{m^2}, die door een dubbelpunt van d^m gaat, *tweemaal* geteld worden. Bij de ontaarding van den bundel (d^m) wordt dus de doorsnede van het oppervlak Λ en het vlak π *tweemaal* van de m.p. der genoemde raakpunten afgescheiden, en het regeloppervlak R'', dat gevormd wordt door de raaklijnen der krommen λ^{m^2} in de punten der genoemde doorsnede, wordt *tweemaal* afgescheiden van het oppervlak R'.

Om den graad van R'' te vinden, merken wij op, dat volgens Hfdst. V de raaklijnen der krommen λ^{m^2} een stralencongruentie vormen van den graad:

$$2m(m-1)(2m-1)$$

en van de klasse: $6m(m-1)$.

De doorsnede van het oppervlak R'' met het vlak π bestaat nu uit:

1e de doorsnede van het vlak π met het oppervlak Λ, die van den graad 2m is;

2e de 6m(m—1) in π gelegen beschrijvende lijnen van R''; deze beschrijvende lijnen zijn nl. de *in* π *gelegen* raaklijnen van krommen λ^{m^2}.

De graad van R'' is dus 2m(3m—2).

Men kan nu de ontaarding van den bundel (d^m) (m—1) malen doen plaats hebben; deze bundel is dan overgegaan in een bundel (d^1) van platte vlakken d^1.

Elk dezer vlakken raakt 6m(m—1) krommen λ^{m^2} aan en bevat dus 6m(m—1) raaklijnen, welke beschrijvende lijnen zijn van het oppervlak R'. Door elk punt der basisrechte ∂ gaan 2m(m—1) (2m—1) raaklijnen van krommen λ^{m^2}; daar men door elk van deze raaklijnen een vlak d^1 kan brengen, zijn zij eveneens beschrijvenden van R'. De basisrechte ∂ is dus een 2m(m—1) (2m—1)-voudige rechte van R'. Een vlak d^1 snijdt het oppervlak R' volgens deze meervoudige rechte en volgens de in d^1 gelegen beschrijvenden, de *graad* van R' is thans dus:

$$4m(m-1)(m+1).$$

Het oppervlak R'' is thans 2(m—1) malen van het oppervlak R' afgescheiden, oorspronkelijk was de graad van R' dus:

$$4m(m-1)(4m-1).$$

§ 8. Behooren de eerste drie bundels tot eenzelfden complex, dan wordt het oppervlak R' van R afgescheiden, en wordt de graad van R dus:

$$4m(m-1)(4m-3).$$

Indien nu de vier bundels tot eenzelfde viervoudig oneindig stelsel behooren, heeft de vierde bundel met den genoemden complex een oppervlak a_d^m gemeen. Dit oppervlak bevat ∞^1 coïncidenties van de door den complex $\}a^m\{$ bepaalde involutie I^{m^3}; de dragers dezer coïncidenties vormen een regeloppervlak R''', dat van R wordt afgescheiden.

Om den *graad* van R''' te vinden, merken wij op, dat het aantal snijpunten van R''' met een rechte l gelijk is aan het aantal op a_d^m gelegen coïncidenties der I^{m^3}, welker dragers l snijden. Nu vormen de coïncidenties, welker dragers l snijden, een ruimtekromme van den graad:

$$(m-1)(6m-2);$$

immers, een vlak V door l snijdt deze ruimtekromme:

1e in de $4(m-1)$ snijpunten van l met het coïncidentie-oppervlak $\triangle$ der I^{m^3};

2e in de $6(m-1)^2$ coïncidenties, welker dragers in V liggen.

Het oppervlak a_d^m snijdt deze kromme in

$$m(m-1)(6m-2)$$

punten; dit is dus het aantal der gezochte coïncidenties, dus de graad van R'''.

Voor den graad van R na afscheiding van R''' vindt men ten slotte:

$$10m(m-1)^2.$$

§ 9. Ten slotte beschouwen wij nog het geval $m = 2$, dus dat van een viervoudig oneindig stelsel van *quadratische oppervlakken.*

De formules van § 7 leeren ons dan, dat graad en klasse van de congruentie r beide *nul* worden. De ∞^2

paren basispunten van complexen uit het stelsel $((a^2))$ liggen dus op ∞^1 rechten, van welke dus elk ∞^1 zulke paren draagt. Wij kunnen dan ook gemakkelijk rechtstreeks aantoonen, dat de verbindingslijn van twee basispunten van een complex uit het stelsel een involutie van paren basispunten draagt.

Laten nl. P en Q twee zulke basispunten zijn. Een bundel (a^2) uit het stelsel heeft met den door P en Q bepaalden complex één oppervlak gemeen, en snijdt dus op de rechte P Q een involutie in, welke het puntenpaar (P, Q) bevat. Een bundel (b^2), die met (a^2) één oppervlak gemeen heeft, snijdt op P Q een involutie in, die met de door (a^2) bepaalde involutie *twee* puntenparen gemeen heeft, en er dus geheel mee samenvalt. Hebben de bundels (b^2) en (a^2) *geen* oppervlak gemeen, dan kan men een derden bundel aanbrengen, die met elk van hen een oppervlak gemeen heeft, en ziet, dat de door (a^2) en (b^2) ingesneden involuties ook in dit geval samenvallen. *Alle* bundels uit het stelsel $((a^2))$ snijden dus op P Q *dezelfde* involutie in; dit is alleen mogelijk, als elk puntenpaar dezer involutie een complex uit het stelsel $((a^2))$ bepaalt, wat te bewijzen was.

De rechten P Q vormen een regeloppervlak, dat, als meetkundige plaats der ∞^2 puntenparen, niets anders is dan het in § 3 beschouwde oppervlak Φ_R, dus van den *tienden* graad.

Elke rechte P Q draagt *twee* coïncidenties. Inderdaad vindt men uit de formule van de vorige §, dat het door de dragers dezer coïncidenties gevormde regeloppervlak R voor $m = 2$ van den graad *twintig* wordt; het is blijkbaar het oppervlak Φ_R, tweemaal geteld.

De kromme ε, die door de basispunten der complexen met *drie* basispunten gevormd wordt, is van den graad *dertig*. Daar de verbindingslijnen dezer punten beschrijvende lijnen van Φ_R zijn, ziet men, dat ε een *dubbelkromme* van Φ_R is.

HOOFDSTUK VIII.

VIJF EN ZES BUNDELS.

§ 1. Laten thans *vijf* bundels van oppervlakken gegeven zijn, welke wij zullen aanduiden door (a^{m_1}), (b^{m_2}), (c^{m_3}), (d^{m_4}) en (e^{m_5}).

Neemt men uit elken der vijf bundels één oppervlak, dan zullen deze oppervlakken in 't algemeen *geen* punt gemeen hebben. Het is echter op ∞^3 wijzen mogelijk, deze oppervlakken zóó te kiezen, dat zij *één* punt gemeen hebben; immers, door een willekeurig punt P der ruimte gaat uit elken der vijf bundels één oppervlak, en deze oppervlakken hebben het punt P gemeen.

Het zal nu op ∞^1 wijzen mogelijk zijn, de vijf oppervlakken zóó te kiezen, dat zij *twee* punten gemeen hebben. De meetkundige plaats dezer puntenparen is een kromme ϕ, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Hiertoe laten wij, op dezelfde wijze als dit in het vorige hoofdstuk gebeurd is, den bundel (e^{m_5}) zoo ontaarden, dat van alle oppervlakken van dezen bundel een vlak π wordt afgescheiden. Dit vlak π snijdt het oppervlak, dat de meetkundige plaats is van de paren gemeenschappelijke punten van oppervlakken uit de eerste vier bundels, volgens een kromme ϕ', welke volgens Hfdst. VI, § 6 van den graad

$$4m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1 + 4$$

is. Aan elk punt P′ dezer kromme ϕ' is een punt P″ van het genoemde oppervlak toegevoegd; de meetkundige plaats dezer punten P″ is een kromme ϕ''. Zooals men gemakkelijk inziet, is deze kromme ϕ'' niets anders dan de in Hfdst. VI, § 5 genoemde kromme λ, en dus van den graad:

$$6m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1 + 4.$$

Door een punt P″ der kromme ϕ'' gaat een oppervlak e^{m_5-1}. Dit vormt met het vlak π een oppervlak e^{m_5}, en daar het vlak π door het bij P″ behoorende punt P′ gaat, ziet men, dat de punten P′ en P″ tot de genoemde ∞^1 puntenparen behooren. De krommen ϕ' en ϕ'' worden dus samen van de kromme ϕ afgescheiden.

Passen wij deze ontaarding (m_5-1) malen toe, dan is de bundel (e^{m_5}) overgegaan in een bundel (e^1) van platte vlakken e^1. De kromme ϕ wordt thans gevormd door de puntenparen, die gemeen zijn aan vier oppervlakken uit de eerste vier bundels en aan een plat vlak e^1.

Elk vlak e^1 bevat

$$3m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1m_2 + 3\sum_1^4 m_1 - 3$$

zulke paren. Verder heeft de kromme ϕ

$$4m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1 + 4$$

punten gemeen met de basisrechte e van den bundel (e^1). Deze zijn de snijpunten van de rechte e met het boven reeds genoemde, bij de eerste vier bundels behoorende, oppervlak. Is nl. P een dezer snijpunten, P′ het bij P behoorende punt van dit oppervlak, dan vormen de

punten P en P′ een puntenpaar, dat gelegen is in het door P′ gaande vlak e^1, en dat dus tot de kromme ϕ behoort.

De kromme ϕ is dus thans van den graad:

$$10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2 + 4\sum_1^4 m_1 - 2.$$

Oorspronkelijk is dus de graad van de kromme ϕ:

$$10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2 + 4\sum_1^4 m_1 - 2 + (m_5-1)(10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1 + 8) = 10m_1m_2m_3m_4m_5 - 4\sum_1^5 m_1m_2 + 8\sum_1^5 m_1 - 10.$$

§ 2. De verbindingslijnen van toegevoegde punten van de kromme ϕ vormen een *regeloppervlak* Γ.

Bij den overgang van den bundel (e^{m_5}) tot den bundel (e^{m_5-1}) wordt van het oppervlak Γ het regeloppervlak Γ' afgescheiden, dat gevormd wordt door de verbindingslijnen van toegevoegde punten der krommen ϕ' en ϕ''. Het vlak π snijdt dit oppervlak Γ' volgens de kromme ϕ', en bevat verder

$$3m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1m_2 + 3\sum_1^4 m_1 - 3$$

beschrijvenden van Γ'. Deze zijn de verbindingslijnen van de in π gelegen paren punten, welke vier oppervlakken uit de eerste vier bundels gemeen hebben. Daar *beide* punten van zulk een paar op de kromme ϕ' liggen, zijn deze verbindingslijnen *dubbele beschrijvenden* van Γ'. De graad van Γ bedraagt dus:

$$10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2 + 4\sum_1^4 m_1 - 2.$$

Voor het geval van een bundel (e^1) van platte vlakken e^1 bevat elk vlak e^1

$$3m_1m_2m_3m_4 - 2\sum_1^4 m_1m_2 + 3\sum_1^4 m_1 - 3$$

beschrijvenden van Γ; dit toch is het aantal punten-

paren, die het vlak e^1 gemeen heeft met vier oppervlakken uit de eerste vier bundels. De verbindingslijnen der door de eerste vier bundels bepaalde puntenparen vormen volgens Hfdst. VI, § 6 een stralencongruentie van den graad:

$$7m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2m_3 + 2\sum_1^4 m_1m_2 - \sum_1^4 m_1 + 1;$$

dit is dus het aantal dezer verbindingslijnen, gaande door een punt van de basisrechte e van den bundel (e^1). Elke dezer laatste verbindingslijnen ligt in een vlak e^1, is dus een beschrijvende van Γ; het laatste getal geeft dus ook de veelvoudigheid aan, waarmee de rechte e tot het oppervlak Γ behoort. Een vlak e^1 snijdt het oppervlak Γ volgens de in e^1 gelegen beschrijvenden en volgens de meervoudige rechte e; de *graad* van Γ bedraagt nu dus:

$$10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2m_3 + 2\sum_1^4 m_1 - 2.$$

Oorspronkelijk bedraagt dus de graad van Γ:

$$10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2m_3 + 2\sum_1^4 m_1 - 2 + (m_5 - 1)$$

$$(10m_1m_2m_3m_4 - 4\sum_1^4 m_1m_2 + 4\sum_1^4 m_1 - 2) =$$

$$= 10m_1m_2m_3m_4m_5 - 4\sum_1^5 m_1m_2m_3 + 4\sum_1^5 m_1m_2 - 2\sum_1^5 m_1.$$

§ 3. Het zal een zeker aantal malen gebeuren, dat twee toegevoegde punten op de kromme ϕ *samenvallen*, en de vijf oppervlakken uit de vijf bundels dus in hun gemeenschappelijk punt een gemeenschappelijke *raaklijn* bezitten. Om te vinden, hoe vaak dit het geval is, laten wij den bundel (e^{m_5}) weer ontaarden.

Het vlak π snijdt de kromme δ_R, in welker punten

vier oppervlakken uit de eerste vier bundels een gemeenschappelijke raaklijn bezitten, in

$$4\sum_{1}^{4} m_1 m_2 - 8\sum_{1}^{4} m_1 + 10$$

punten. Door elk dezer punten gaat een oppervlak e^{m_5-1}; dit vormt met het vlak π een oppervlak e^{m_5}, dat in het genoemde punt een *dubbelpunt* heeft. Dit oppervlak e^{m_5} heeft dus de gemeenschappelijke raaklijn der vier eerstgenoemde oppervlakken in het genoemde punt eveneens tot (oneigenlijke) raaklijn, en de gevonden punten behooren dus tot de gezochte coïncidenties. Evenals dit in Hfdst. VII, § 7 het geval geweest is, moet elke dezer coïncidenties *dubbel* geteld worden.

De basisrechte e van den bundel (e^1) snijdt het regeloppervlak, dat gevormd wordt door de bovengenoemde gemeenschappelijke raaklijnen in de punten der kromme $\vartheta_{R'}$ in

$$8\sum_{1}^{4} m_1 m_2 m_3 - 8\sum_{1}^{4} m_1 m_2 + 4\sum_{1}^{4} m_1$$

punten. Het vlak e^1 door een dezer punten en de rechte e bevat de bijbehoorende raaklijn eveneens; deze punten zijn dus thans de gezochte coïncidenties. Oorspronkelijk bedraagt dus het aantal coïncidenties

$$8\sum_{1}^{4} m_1 m_2 m_3 - 8\sum_{1}^{4} m_1 m_2 + 4\sum_{1}^{4} m_1 + 2(m_5-1)\left(4\sum_{1}^{4} m_1 m_2 - \right.$$

$$\left. -8\sum_{1}^{4} m_1 + 10\right) = 8\sum_{1}^{5} m_1 m_2 m_3 - 16\sum_{1}^{5} m_1 m_2 + 20\sum_{1}^{5} m_1 - 20.$$

§ 4. Wij zullen thans het geval beschouwen, dat de vijf bundels behooren tot eenzelfde *vijfvoudig oneindig lineair stelsel* van oppervlakken van den graad m.

Wij laten hiertoe eerst de eerste vier bundels behooren

tot eenzelfde viervoudig oneindig stelsel $((a^m))$. Het oppervlak, dat gevormd wordt door de paren snijpunten van oppervlakken uit deze bundels, is thans overgegaan in het oppervlak, dat gevormd wordt door de paren basispunten van complexen uit het stelsel $((a^m))$. Volgens Hfdst. VII, § 4 is dit van den graad:

$$m^4-5m+4=(m-1)(m^3+m^2+m-4).$$

Dit is thans dus de graad van de kromme ϕ'. De bijbehoorende kromme ϕ^* is ook van den graad:

$$(m-1)(m^3+m^2+m-4).$$

Voor het geval van een bundel (e^1) wordt de graad der kromme ϕ:

$$(m-1)(m-2)(m^2+3m-3)+(m-1)(m^3+m^2+m-4)=$$
$$=(m-1)(2m^3+2m^2-8m+2).$$

Oorspronkelijk is dus, voor het geval van een stelsel $((a^m))$ en een bundel (e^m), de graad van ϕ:

$$(m-1)(2m^3+2m^2-8m+2)+2(m-1)^2(m^3+m^2+m-4)=$$
$$=2(m-1)(m^4+m^3+m^2-9m+5).$$

Behooren nu het stelsel $((a^m))$ en de bundel (e^m) tot eenzelfde vijfvoudig oneindig stelsel, dan hebben zij één oppervlak gemeen. Dit snijdt het bovengenoemde, door de paren basispunten van complexen uit het stelsel $((a^m))$ gevormde, oppervlak volgens een kromme van den graad:

$$m(m-1)(m^3+m^2+m-4),$$

waarvan de punten twee aan twee aan elkaar zijn toegevoegd, en die blijkbaar van de kromme ϕ wordt afgescheiden. De graad van φ wordt dus:

$$(m-1)(m^4+m^3+m^2-14m+10).$$

§ 5. Herhalen wij voor het geval van een stelsel

$((a^m))$ en een bundel (e^m) de redeneering van § 2, dan wordt de graad van het oppervlak Γ':

$$(m-1)(m^3+m^2+m-4)+(m-1)(m-2)(m^2+3m-3)=$$
$$=(m-1)(2m^3+2m^2-8m+2).$$

Voor het geval van een bundel (e^1) bedraagt de graad van Γ:

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)(m^2+3m-3)+\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)(3m^2-m+1)=$$
$$=\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)(4m^2+2m-2).$$

Oorspronkelijk bedraagt dus de graad van Γ:

$$(m-1)(m-2)(2m^2+m-1)+(m-1)^2(2m^3+2m^2-8m+2)=$$
$$=(m-1)(2m^4+2m^3-13m^2+7m).$$

Hebben het stelsel $((a^m))$ en de bundel (e^m) nu één oppervlak a_e^m gemeen, dan bevat dit oppervlak a_e^m ∞^1 paren basispunten van complexen uit het stelsel $((a^m))$. De verbindingslijnen dezer puntenparen vormen een regeloppervlak Γ'', dat van het oppervlak Γ wordt afgescheiden.

Om den graad van Γ'' te vinden, merken wij op, dat de paren basispunten, welker verbindingslijnen een rechte l snijden, een zekere kromme vormen. Elk vlak door l bevat

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)(m^2+3m-3)$$

zulke paren; de rechte l zelf bevat

$$(m-1)(m^3+m^2+m-4)$$

basispunten, die elk tot een der genoemde paren behooren. De graad dezer kromme is dus:

$$(m-1)(m-2)(m^2+3m-3)+(m-1)(m^3+m^2+m-4)=$$
$$=(m-1)(2m^3+2m^2-8m+2).$$

Deze kromme snijdt het oppervlak a_e^m in

$$m(m-1)(2m^3+2m^2-8m+2)$$

punten, welke

$$m(m-1)(m^3+m^2-4m+1)$$

paren vormen. De verbindingslijn van elk dezer paren is een straal van Γ'', welke l snijdt; dit laatste getal geeft dus den graad van Γ''.

Voor den graad van Γ vinden wij ten slotte:

$$m(m-1)(m^3+m^2-9m+6) = m(m-1)(m-2)(m^2+3m-3).$$

§ 6. Voor een stelsel $((a^m))$ wordt de graad der kromme δ_R:

$$10(m-1)^2,$$

terwijl de gemeenschappelijke raaklijnen in de punten van δ_R een regeloppervlak vormen van den graad:

$$10m(m-1)^2.$$

Herhalen wij dus voor een stelsel $((a^m))$ en een bundel (e^m) de redeneering van § 3, dan bevat het vlak π

$$10(m-1)^2$$

coïncidenties, die elk dubbel moeten worden geteld. Voor een bundel (e^1) bedraagt het aantal coïncidenties:

$$10m(m-1)^2.$$

Oorspronkelijk is dit aantal dus:

$$10(m-1)^2(3m-2).$$

Hebben de bundel (e^m) en het stelsel $((a^m))$ een oppervlak a_e^m gemeen, dan snijdt dit de kromme δ_R in $10m(m-1)^2$ punten en draagt dus $10m(m-1)^2$ coïncidenties, die van de bovenstaande worden afgescheiden; het totale aantal coïncidenties bedraagt nu dus:

$$20(m-1)^3.$$

§ 7. Is $m=2$, heeft men dus te doen met een vijfvoudig oneindig stelsel van *quadratische oppervlakken*, dan wordt het oppervlak Γ van den graad *nul*. Gemakkelijk toont men dan ook aan, dat de verbindingslijn

van twee basispunten van een viervoudig oneindig stelsel uit het genoemde stelsel een involutie van paren basispunten draagt, zoodat de kromme Φ in eenige rechte lijnen ontaarden moet. Volgens de formule van § 4 bedraagt het aantal dezer rechte lijnen *tien.*

Bij een vijfvoudig oneindig stelsel van quadratische oppervlakken zijn er dus tien rechten, die door alle oppervlakken van het stelsel in de puntenparen eener zelfde involutie worden gesneden.

Elke dezer rechten draagt *twee* coïncidenties; het totale aantal coïncidenties bedraagt dus *twintig,* in overeenstemming met de formule van § 6.

§ 8. Zijn nu *zes* bundels van oppervlakken gegeven, dan toont men gemakkelijk aan, door een redeneering, analoog aan die van § 1, dat het een *eindig* aantal malen gebeuren zal, dat zes oppervlakken uit deze zes bundels *twee* punten gemeen hebben.

Om dit aantal te vinden, laten wij den zesden bundel, dien wij door (f^{m_6}) zullen aanduiden, op de gewone wijze ontaarden.

Het vlak π snijdt de kromme Φ, die bij de eerste vijf bundels behoort, in

$$10m_1m_2m_3m_4m_5 - 4\sum_1^5 m_1m_2 + 8\sum_1^5 m_1 - 10$$

punten P, aan elk waarvan een punt P′ van de kromme Φ is toegevoegd. Door zulk een punt P′ gaat een oppervlak f^{m_6-1}, dat met het vlak π een oppervlak f^{m_6} vormt. Deze punten geven dus evenzoovele puntenparen, die van de gezochte puntenparen worden afgescheiden.

In het geval van een bundel (f^1) zal de basisrechte van dezen bundel het regeloppervlak Γ snijden in

$$10m_1m_2m_3m_4m_5 - 4\sum_1^5 m_1m_2m_3 + 4\sum_1^5 m_1m_2 - 2\sum_1^5 m_1$$

punten. Elk van deze snijpunten geeft een beschrijvende van Γ, welke met het daarop gelegen puntenpaar in een vlak f^1 ligt; dit is dus thans het aantal der gezochte paren. Oorspronkelijk bedraagt dit aantal dus:

$$10m_1m_2m_3m_4m_5 - 4\sum_1^5 m_1m_2m_3 + 4\sum_1^5 m_1m_2 - 2\sum_1^5 m_1 + (m_6 - 1)$$
$$(10m_1m_2m_3m_4m_5 - 4\sum_1^5 m_1m_2 + 8\sum_1^5 m_1 - 10) =$$
$$= 10m_1m_2m_3m_4m_5m_6 - 4\sum_1^6 m_1m_2m_3 + 8\sum_1^6 m_1m_2 - 10\sum_1^6 m_1 + 10.$$

§ 9. Zijn de graden der zes bundels alle $= m$, en behooren de eerste vijf bundels tot eenzelfde vijfvoudig oneindig lineair stelsel, dan vindt men op dezelfde wijze voor het gezochte aantal paren:

$(m-1)(m^4 + m^3 - 9m^2 + 6m) + (m-1)^2(m^4 + m^3 + m^2 -$
$-14m + 10) = (m-1)(m^5 + m^4 + m^3 - 24m^2 + 30m - 10).$

Heeft de zesde bundel met het genoemde stelsel een oppervlak a_f^m gemeen, en behooren de zes bundels dus tot eenzelfde zesvoudig oneindig lineair stelsel, dan heeft het oppervlak a_f^m met de kromme φ

$$m(m-1)(m^4 + m^3 + m^2 - 14m + 10)$$

punten gemeen, welke

$$\tfrac{1}{2}\, m(m-1)(m^4 + m^3 + m^2 - 14m + 10)$$

paren vormen, welke van de boven gevonden paren worden afgescheiden. Het aantal paren bedraagt thans dus:

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m^5 + m^4 + m^3 - 34m^2 + 50m - 20) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)(m^4 + 3m^3 + 7m^2 - 20m + 10).$$

Dit is het aantal vijfvoudig oneindige stelsels met *twee* basispunten, welke tot een zesvoudig oneindig stelsel behooren.

STELLINGEN

I

Analoog aan het in Hoofdstuk V opgeloste vraagstuk, in een complex van vlakke krommen het aantal netten te bepalen met drie basispunten, zou men de vraag kunnen stellen, in een viervoudig oneindig stelsel van *oppervlakken* het aantal *complexen* te bepalen met *vier* basispunten. Dit vraagstuk kan echter met de in dit proefschrift gebruikte methoden niet worden opgelost.

II

De pareninvoluties in het platte vlak en de tripelinvoluties in de ruimte hangen nauw samen met de in dit proefschrift beschouwde involuties.

III

Men kan ook involuties verkrijgen door de snijpunten te nemen van overeenkomstige krommen uit twee projectief verwante netten, of van overeenkomstige oppervlakken uit drie projectief verwante complexen. Deze zijn echter slechts bijzondere gevallen van de in dit proefschrift behandelde involuties.

IV

Beschouwt men een groep van figuren, welke zich alleen door de graden der optredende vergelijkingen van elkaar onderscheiden, dan zullen de eigenschappen dezer figuren in de onmiddellijke omgeving van een bijzonder punt in het algemeen overeenstemmen.

Van dit beginsel kan vaak met goed gevolg gebruik worden gemaakt.

V

In dit proefschrift zijn enkele eigenschappen van het stelsel van vier bundels van oppervlakken afgeleid, door dit stelsel te beschouwen als doorsnede van een stelsel, dat gelegen is in een vierdimensionale ruimte.

Analoog zou men kunnen beproeven, eigenschappen van het stelsel van vijf of van zes bundels te vinden, door dit te beschouwen als doorsnede van een stelsel, dat resp. in een vijf- of in een zesdimensionale ruimte is gelegen. Dit gelukt echter niet zoo.

VI

De invoering der oneindig verre elementen in de meetkunde geschiedt het best langs analytischen weg.

VII

Het is af te keuren, ter wille van de zuiverheid der methode, eigenschappen langs zeer omslachtigen weg meetkundig te bewijzen, indien een analytisch bewijs gemakkelijker is.

VIII

De uitkomsten, door V. JAROLÍMEK (Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, dl. 40, blz. 152) gevonden betreffende de stralencongruentie, gevormd door de gemeenschappelijke transversalen der overeenkomstige stralen van drie projectieve waaiers, zijn geheel onjuist.

IX

De wijze, waarop WEYL (Die Idee der Riemannschen Fläche, blz. 11) de oppervlakken van Riemann invoert, wint zeer aan aanschouwelijkheid, indien men zich deze oppervlakken voorstelt als gelegen in een vierdimensionale ruimte.

X

Het bewijs, dat WEYL (t. a. p., blz. 48) geeft van den enkelvoudigen samenhang van het inwendige van een cirkel van het platte vlak in de meetkunde van Euclides, kan worden vereenvoudigd.

XI

Door transformatie van de grondvergelijking der thermodynamica

$$d\varepsilon = T\,d\eta - p\,dv$$

kan men als onafhankelijk veranderlijken invoeren: T en v; η en p; T en p. De overgang van het eene stelsel tot het andere geschiedt door een transformatie van

LEGENDRE, dus door een contact-transformatie. Het is echter onmogelijk, een contact-transformatie te vinden, waardoor bijv. p en v als onafhankelijk veranderlijken zouden optreden.

XII

De definitie, die BRYAN (Thermodynamics, blz. 33) geeft van „onomkeerbaarheid", staat achter bij die van PLANCK, en is niet voldoende, om de verdere ontwikkelingen er op te steunen.

XIII

De beschouwing, die BRYAN in zijn „Thermodynamics," blz. 40—42, geeft over de vermindering der beschikbare energie bij een onomkeerbare transformatie, is niet streng.

XIV

De argumenten, door DENIZOT (Das Foucaultsche Pendel, Teulner 1913) aangevoerd tegen de gewone behandeling van de slingerproef van Foucault, houden geen steek.

XV

De wijze, waarop JÄGER (Theoretische Physik, blz. 61—64) de bewegingsvergelijkingen van EULER afleidt, is onjuist.

XVI

Het verdiende aanbeveling, de complexe getallen op de H. B. S. niet, of hoogstens eerst in de vijfde klasse, te behandelen.