



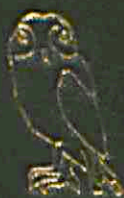
De differentiaalvergelijking van Laguerre: eene bijdrage tot de theorie der kettingbreuken

<https://hdl.handle.net/1874/260217>

Aⁿ 192.
1916.

DE DIFFERENTIAALVERGE-
LIJNING VAN LAGUERRE

(EENE BIJDRAGE TOT DE THEORIE
DER KETTINGBREUKEN)



J. F. VAN VEEN

A. qu.
192



Jⁿ 192 (1916)

DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING VAN LAGUERRE.

(EENE BIJDRAGE TOT DE THEORIE DER KETTINGBREUKEN)

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD
VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG
VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. ERNST COHEN HOOG-
LEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT
TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS-
EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DONDERDAG 6 JULI
1916 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR DOOR

JACOBA FRANCINA VAN VEEN

GEBOREN TE BUSSUM

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

GEBROEDERS HOITSEMA — 1916 — GRONINGEN

AAN MIJN OUDERS EN MIJN VERLOOFDE.

Bij de voltooiing van mijn proefschrift gedenk ik met dankbaarheid al degenen, die door hun onderwijs tot mijn ontwikkeling hebben bijgedragen.

In het bijzonder dank ik U, Hoogleraren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde voor de wetenschappelijke lessen. Ik beschouw het als een voorrecht, Hooggeleerde JULIUS en NIJLAND, Uw onderwijs genoten te hebben. Steeds zullen Uwe colleges, Hooggeleerde DE VRIES, mij in herinnering blijven.

En U, Hooggeleerde KAPTEYN, Hooggeachte Promotor, behalve voor Uw onderwijs, dank ik voor den steun en welwillendheid, die ik bij het tot standkomen van dit proefschrift heb ondervonden.

Het is mij een bijzondere eer, als laatste Uwer leerlingen te mogen promoveeren.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

ALGEMEENE THEORIE.

	Blz.
§ 1. De differentiaalvergelijking der eerste orde en de Stieltjes' integraal voor $\mathfrak{R}$	3
§ 2. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor de reeks $\mathfrak{R}$, ontwikkeld naar positieve machten	5
§ 3. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor de reeks $\mathfrak{R}$, ontwikkeld naar negatieve machten	8
§ 4. Vergelijking der methoden van § 2 en § 3 en graadsbepaling van de polynomen Ω en H in het laatste geval	10
§ 5. Tweede particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking van LAGUERRE	12
§ 6. Nieuwe constructie van de differentiaalvergelijking van LAGUERRE	14
§ 7. Bepaling van den graad van Ω en H door middel van de tweede particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking van LAGUERRE	16
§ 8. De differentiaalvergelijking voor de naderingsteller P_n	18
§ 9. Afleiding van de differentiaalvergelijking van P_n uit die van Q_n	19
§ 10. Het vinden van de recurrente betrekking tusschen drie opeenvolgende Q 's en de geassocieerde kettingbreuk	21
§ 11. Het vinden van de corresponderende kettingbreuk uit de differentiaalvergelijking voor Q_n	22

HOOFDSTUK II.

TOEPASSINGEN.

A. $(1 - x^2) \mathfrak{R}' - 1 = 0$.	
§ 1. Oplossing door reeksen	26
§ 2. Oplossing door een Stieltjes' integraal	27
§ 3. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE	29
§ 4. De geassocieerde kettingbreuk	29
B. $x\mathfrak{R}' - (x + a - 1) \mathfrak{R} + 1 = 0$.	
§ 5. Oplossing door reeksen	30

	Blz.
§ 6. Oplossing door een Stieltjes' integraal	31
§ 7. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor Q_n	33
§ 8. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$	33
§ 9. Kettingbreuken voor $\mathfrak{R}$	34
C. $x(x-1)\mathfrak{R} - \{(\varrho-1)(x-1) + (\sigma-1)x\}\mathfrak{R} + \varrho + \sigma - 1 = 0$.	
§ 10. Algemeenheid der vergelijking	35
§ 11. Oplossing door reeksen	36
§ 12. Oplossing door een Stieltjes' integraal	37
§ 13. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor Q_n	40
§ 14. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$	42
§ 15. Kettingbreuken voor $\mathfrak{R}$	42

HOOFDSTUK III.

TOEPASSING OP DE VERGELIJKING:

$$x(x-1)(ax-1)\mathfrak{R} - \{(\varrho-1)(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + \\ + a(\tau-1)x(x-1)\}\mathfrak{R} + Ax + B = 0.$$

§ 1. Opstelling der vergelijking voor $\mathfrak{R}$	45
§ 2. Oplossing door een reeks naar afdalende machten gerangschikt	46
§ 3. Oplossing door een Stieltjes' integraal	47
§ 4. Bepaling van de coëfficiënten van de reeks voor $\mathfrak{R}$ door middel van uitgebreide bètafuncties	48
§ 5. Bepaling van het polynoom Ω_n	53
§ 6. Bepaling van het polynoom H_n	55
§ 7. Bewijs voor de juistheid der gevonden waarden voor Ω_n en H_n	57
§ 8. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor Q_n	61
§ 9. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$	63
§ 10. De kettingbreuk voor $\mathfrak{R}$	65
§ 11. Behandeling van het bijzondere geval: $\varrho = \sigma = \tau = 2$ $a = -1$.	67
Noot. Kettingbreuken voor e en $\frac{\pi}{4}$	69

INLEIDING.

In meerdere van de interessante verhandelingen van LAGUERRE (Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions, *C. R.* 1878 = Œuvres I — Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients rationnels, *Bull. S. M. F.* 8, 1879 = Œuvres I en *J. de Math.* (4), 1, 1885 = Œuvres II) stelde deze wiskundige zich het volgende probleem:

Zij gegeven een differentiaalvergelijking van de eerste orde met polynomen tot coëfficiënten $L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0$, dan wordt gevraagd de functie $\mathfrak{R}$ te ontwikkelen in een kettingbreuk.

Noemen wij de naderingsnoemers Q_n , dan is de oplossing gegeven in de constructie van een differentiaalvergelijking voor Q_n , waarbij als hoofdmoment optreedt de bepaling van een onbekende functie Ω_n .

Hetgeen LAGUERRE en na hem DE MONTESSUS DE BALLORE (Sur les fractions continues algébriques (*Rend. Pal.* 19, 1905) en PADÉ (Recherches sur la convergence de développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions, *Ann. éc. n.* (3), 24, 1907) hebben bereikt, vindt men kort samengevat in: Die Lehre von den Kettenbrüchen von Prof. Dr. Oskar Perron; Teubner, 1913. PERRON zegt p. 438: „Die folgenden Beispiele sind so ziemlich die einzigen, in denen eine vollständige Durchführung der Rechnung bis heute möglich ist. Laguerre hat zwar noch einiges weitere versucht, aber mit wenig Erfolg.”

Deze voorbeelden kunnen samengevat worden in de opmerking, dat Ω_n een constante is of gelijk is aan x .

In het eerste hoofdstuk van dit proefschrift wordt de algemeene theorie ontwikkeld; in het volgende worden eenige bekende gevallen volgens de gegeven methode behandeld, terwijl in het laatste hoofdstuk een geheel nieuw geval wordt behandeld, waarbij $\Omega_n \doteq g_0x + g_1$.

HOOFDSTUK I.

Algemeene theorie.

§ 1. *De differentiaalvergelijking der eerste orde en de Stieltjes' integraal voor $\mathfrak{R}$.*

Laat $\mathfrak{R}$ een functie zijn van x , welke voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$(1) \quad \dots \dots \dots L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0,$$

waarin L , M en N polynomen in x zijn.

Trachten wij deze differentiaalvergelijking op te lossen door een Stieltjes' integraal:

$$(2) \quad \dots \dots \dots \mathfrak{R} = \int_A^B \frac{m(u)}{x+u} du,$$

waarin A en B constanten zijn onafhankelijk van x .

Bepaald moeten dan worden de gewichtsfunctie $m(u)$ en de grenzen A en B .

Uit (2) volgt:

$$\mathfrak{R}' = - \int_A^B \frac{m(u)}{(x+u)^2} du$$

of na partiële integratie:

$$\mathfrak{R}' = \left(\frac{m(u)}{x+u} \right)_A^B - \int_A^B \frac{m'(u)}{x+u} du.$$

(1) wordt thans:

$$(3) \quad \int_A^B \frac{M(x)m(u) - L(x)m'(u)}{x+u} du + \left(\frac{m(u)}{x+u} \right)_A^B L(x) + N(x) = 0.$$

Opdat de integraal een zin zal hebben voor alle waarden van x in deze identieke vergelijking, moet:

$M(x)m(u) - L(x)m'(u)$ verdwijnen voor $u = -x$.
dus:

$$(4) \quad M(x)m(-x) - L(x)m'(-x) = 0$$

of

$$(5) \quad m(-x) = e^{-\int \frac{M(x)}{L(x)} dx}.$$

$m(-x)$ en dus ook $m(u)$ is hierdoor, op een constanten factor na, bepaald.

Uit (3) volgt verder, aangezien L , M en N polynomen zijn, dat in het tweede stuk geen termen met den factor

$$\frac{1}{x+B} \text{ of } \frac{1}{x+A}$$

mogen blijven staan.

Voor de grenzen A en B heeft men nu verschillende mogelijkheden:

1e. B is een wortel van $m(u) = 0$, dus $m(B) = 0$,

2e. $\frac{1}{x+B}$ verdwijnt na vermenigvuldiging met $L(x)$, dus $x+B$ is een factor van $L(x)$ of B is een wortel van $L(-x) = 0$,

3e. B mag $\pm \infty$ zijn, mits

$$\lim_{u \rightarrow \pm \infty} \frac{m(u)}{x+u}$$

gelijk is aan een eindig getal (meest $= 0$).

Hetzelfde geldt voor de grens A .

Indien meerdere waarden voor de grenzen A en B gevonden worden, zoo voldoen aan (1) ook meerdere Stieltjes' integralen.

Ter toelichting van 't een en ander nemen wij het volgende voorbeeld:

$$(x+a)(x+b)\mathfrak{R}' + m(b-a)\mathfrak{R} = 0, \text{ voor } m > 0,$$

waarin dus $L = (x+a)(x+b)$, $M = m(b-a)$ en $N = 0$; dan is

$$m(-x) = C \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^m,$$

dus

$$m(x) = C \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^m.$$

Nu is a een wortel van $m(x)$, en kan als ééne grens genomen worden (a is tegelijk een wortel van $L(-x) = 0$).

Als tweede grens kunnen wij nemen $\pm \infty$, omdat:

$$\lim_{u \rightarrow \pm \infty} \frac{m(u)}{x+u} = 0.$$

Als oplossing hebben wij twee Stieltjes' integralen:

$$\mathfrak{R} = C \int_{-\infty}^a \left(\frac{u-a}{u-b} \right)^m \frac{du}{x+u} \quad \text{en} \quad \mathfrak{R} = C \int_a^{\infty} \left(\frac{u-a}{u-b} \right)^m \frac{du}{x+u}.$$

Keeren wij terug tot het algemeene geval:

De integraal (2) is nu op een constante na bepaald. Deze hangt samen met $N(x)$ en wordt gevonden uit (3).

De gevolgde redeneering is omkeerbaar, d. w. z. uitgaande van een Stieltjes' integraal, kan men een differentiaalvergelijking (1) construeeren.

Uit (4) bepaalt men nl. de verhouding van L en M . L en M kan men zoo eenvoudig mogelijk kiezen. Uit (3) vindt men vervolgens $N(x)$.

Nemen wij hiertoe 't volgende voorbeeld:

$$\mathfrak{R} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{x+u} du, \quad \text{waarin } m(u) = e^{-u}.$$

Uit (4) volgt
$$\frac{M}{L} = -1.$$

Neemt men $L = 1$ en $M = -1$, dan volgt uit (3) $N = \frac{1}{x}$.

De differentiaalvergelijking is dus:

$$\mathfrak{R}' - \mathfrak{R} + \frac{1}{x} = 0 \quad \text{of}$$

$$x\mathfrak{R}' - x\mathfrak{R} + 1 = 0.$$

In 't algemeen worden L , M en N nu geen polynomen.

§ 2. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor de reeks $\mathfrak{R}$, ontwikkeld naar positieve machten.

Gaan wij weer uit van:

$$(1) \quad \dots \quad L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0.$$

Denken wij $\mathfrak{R}$ gerangschikt naar opklimmende machten van x , dan kan men volgens P. p. 418¹⁾ twee polynomen U_ν en V_μ van den graad ν en μ bepalen zoodanig, dat de reeks

$$V_\mu \mathfrak{R} - U_\nu$$

begint met $x^{\mu+\nu+1}$ (of hooger) of aldus geschreven:

$$V_\mu \mathfrak{R} - U_\nu = (x^{\mu+\nu+1})$$

$\{(x^{\mu+\nu+1})$ stelt voor een reeks, gerangschikt naar opklimmende machten, beginnende met $x^{\mu+\nu+1}\}$.

Is nu

$$\begin{aligned} U_\nu &= x^\lambda (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_r x^r) P_\nu, & \{P_\nu \text{ hoogstens van graad } \nu - \lambda\} \\ V_\mu &= x^\lambda (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_r x^r) Q_\mu, & \{Q_\mu \text{ " " " " " } \mu - \lambda\} \end{aligned}$$

dan is

$$Q_\mu \mathfrak{R} - P_\nu = (x^{\mu+\nu-\lambda+1}),$$

dus

$$\mathfrak{R} - \frac{P_\nu}{Q_\mu} = (x^{\mu+\nu-\lambda+1}) \text{ of}$$

$$(6) \dots \dots \mathfrak{R} = \frac{P_\nu}{Q_\mu} + (x^{\mu+\nu-\lambda+1}).$$

In 't vervolg worden de indices eenvoudigheidshalve weggelaten.

Uit (5) volgt:

$$\mathfrak{R}' = \frac{QP' - PQ'}{Q^2} + (x^{\mu+\nu-\lambda}).$$

Dit, gesubstitueerd in (1), levert:

$$L \left\{ \frac{QP' - PQ'}{Q^2} + (x^{\mu+\nu-\lambda}) \right\} + M \left\{ \frac{P}{Q} + (x^{\mu+\nu-\lambda+1}) \right\} + N = 0$$

of:

$$L(QP' - PQ') + MPQ + NQ^2 = Q^2 \{L(x^{\mu+\nu-\lambda}) + M(x^{\mu+\nu-\lambda+1})\}.$$

Aangezien 't eerste lid een polynoom is, moet 't tweede lid dit ook zijn. Stel 't tweede lid Ω ²⁾, dan is:

$$(7) \dots \dots L(QP' - PQ') + MPQ + NQ^2 = \Omega,$$

of gerangschikt naar Q en Q' ,

$$(LP' + MP + NQ)Q - LPQ' = \Omega.$$

¹⁾ P. beteekent: PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen.

²⁾ Merken wij op, dat Ω afhankelijk is van n en men bij de volledige notatie dus moet schrijven Ω_n .

Stelt men:

$$(8) \dots LP' + MP + NQ = K, \text{ dan is:}$$

$$(9) \dots KQ - LPQ' = \Omega.$$

Na eenmaal differentieeren komt er:

$$K'Q + (K - LP' - L'P)Q' - LPQ'' = \Omega'$$

of volgens (8):

$$\begin{aligned} K'Q + (MP + NQ - L'P)Q' - LPQ'' &= \Omega', \\ (K' + NQ')Q + (MP - L'P)Q' - LPQ'' &= \Omega. \end{aligned}$$

Stelt men:

$$(10) \dots K' + NQ' = R,$$

dan is:

$$(11) \dots RQ + (M - L')PQ' - LPQ'' = \Omega'.$$

Uit (9) en (11) verkrijgt men door vermenigvuldiging:

$$L\Omega Q'' + [(L' - M)\Omega - L'\Omega']Q' + \frac{K\Omega' - R\Omega}{P}Q = 0.$$

Uit deze vergelijking volgt, dat $K\Omega' - R\Omega$ deelbaar is door P , aangezien P en Q relatief priem zijn.

Is $K\Omega' - R\Omega = HP$, dan is

$$(12) \dots L\Omega Q'' + [(L' - M)\Omega - L'\Omega']Q' + HQ = 0.$$

Wij noemen

(12) *de differentiaalvergelijking van LAGUERRE.*

Duiden wij kortheidshalve (12) aan met

$$(13) \dots py'' + qy' + ry = 0,$$

$$\text{zijnde } p = L\Omega \quad q = (L' - M)\Omega - L\Omega' \quad r = H$$

(voor de constructie dezer differentiaalvergelijking zie men ook § 6).

In (6) was

$$\begin{aligned} \Omega &= Q^2 \{L(x^\mu + \nu - \lambda) + M(x^\mu + \nu - \lambda + 1)\}, \\ \Omega &= x^\mu + \nu - \lambda \Theta, \end{aligned}$$

dan is de differentiaalvergelijking na deeling door $x^\mu - \nu + \lambda$

$$xL\Theta Q'' + [(L' - M)x\Theta - L\{x\Theta' + (\mu + \nu - \lambda)\Theta\}]Q' + H_1Q = 0$$

(P. p. 437).

§ 3. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor de reeks $\mathfrak{R}$, ontwikkeld naar negatieve machten.

Denken wij algemeen een reeks $\mathfrak{R}$, gerangschikt naar afdalende machten:

$$\mathfrak{R} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \dots,$$

dan kunnen wij twee polynomen U_n en V_n van den graad n bepalen zoodanig dat de reeks

$$V_n \mathfrak{R} - U_n \text{ begint met } \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Stelt men nl.:

$$U_n = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,$$

$$V_n = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n,$$

dan moet:

$$(\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n) \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots \right) - (\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n)$$

beginnen met $\frac{1}{x^{n+1}}.$

Dit levert het volgende stel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0 c_0 \\ \alpha_1 &= \beta_0 c_1 + \beta_1 c_0 \\ \alpha_2 &= \beta_0 c_2 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_0 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \beta_0 c_n + \beta_1 c_{n-1} + \dots + \beta_n c_0 \end{aligned} \right\} n+1 \text{ vergelijkingen.}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \beta_0 c_{n+1} + \beta_1 c_n + \dots + \beta_n c_1 \\ 0 &= \beta_0 c_{n+2} + \beta_1 c_{n+1} + \dots + \beta_n c_2 \\ &\vdots \\ 0 &= \beta_0 c_{2n} + \beta_1 c_{2n-1} + \dots + \beta_n c_n \end{aligned} \right\} n \text{ vergelijkingen.}$$

Uit het laatste stel van n homogene vergelijkingen zijn de $n+1$ onbekende β 's op te lossen. Vervolgens vindt men uit het eerste stel van $n+1$ vergelijkingen de $n+1$ onbekende α 's.

Laat nu $\beta_0 = 0 \quad \beta_1 = 0 \dots \beta_{\lambda-1} = 0,$
dan is ook $\alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = 0 \dots \alpha_{\lambda-1} = 0,$
dus is

$$U_n = \alpha_\lambda x^{n-\lambda} + \dots$$

$$V_n = \beta_\lambda x^{n-\lambda} + \dots$$

Schrijven wij:

$$V_n \mathfrak{R} - U_n = \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)$$

$\left\{ \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right) \right\}$ stelt voor een reeks gerangschikt naar afdalende machten van x , beginnende met $\frac{1}{x^{n+1}}$, dan is:

$$\mathfrak{R} - \frac{U_n}{V_n} = \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+1}} \right).$$

U_n en V_n kunnen nu nog gemeenschappelijke factoren hebben. Schrijven wij deze rationale functie in zijn irreducibelen vorm

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{P_n}{Q_n},$$

dan is

$$\mathfrak{R} - \frac{P_n}{Q_n} = \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+1}} \right),$$

dus

$$\mathfrak{R} = \frac{P_n}{Q_n} + \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+1}} \right).$$

Hieruit volgt:

$$\mathfrak{R}' = \frac{QP' - PQ'}{Q^2} + \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+2}} \right).$$

(1) wordt thans:

$$L \left\{ \frac{QP' - PQ'}{Q^2} + \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+2}} \right) \right\} + M \left\{ \frac{P}{Q} + \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+1}} \right) \right\} + N = 0$$

of:

$$L(QP' - PQ') + MPQ + NQ^2 = Q^2 \left\{ L \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+2}} \right) + M \left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+1}} \right) \right\}.$$

Daar het eerste lid een polynoom is, is ook 't tweede lid een polynoom. Stel 't tweede lid Ω , dan is:

$$L(QP' - PQ') + MPQ + NQ^2 = \Omega; \text{ zie (7) p. 6.}$$

De differentiaalvergelijking is dan weer verg. (13).

Beschouwen wij nu een differentiaalvergelijking, waaraan een Stieltjes' integraal

$$\mathfrak{R} = \int_A^B \frac{m(u)}{x+u} du \text{ voldoet.}$$

Nu is

$$\frac{1}{x+u} = \frac{1}{x \left(1 + \frac{u}{x} \right)} = \frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} - \frac{u^3}{x^4} + \dots,$$

dus
$$\Re = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \int_A^B m(u) u^{n-1} du,$$

zoodat steeds c_0 gelijk nul is en de reeks dus begint met $\frac{1}{x}$.

Dan is ook $\alpha_0 = 0$ en is dus de teller P van één graad lager dan de noemer.

§ 4. *Vergelijking der methoden van § 2 en § 3 en graadbepaling van de polynomen Ω en H in 't laatste geval.*

In § 2 was $\Omega = Q^2 \{L(x^\mu + \nu - \lambda) + M(x^\mu + \nu - \lambda + 1)\}$.

„ § 3 „ $\Omega = Q^2 \left\{ L\left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+2}}\right) + M\left(\frac{1}{x^{2n-\lambda+1}}\right) \right\}$.

De graad van Ω is in 't eerste geval hoger dan in 't tweede geval. Verder is de graad van Ω in 't eerste geval afhankelijk van μ en ν .

In het tweede geval verkrijgt men, lettende op de hoogste machten van Q, L en M, voor den graad van Ω : $l + \lambda - 2$ of $m + \lambda - 1$, l en m zijnde de graden van L en M. In dit geval is dus de graad van Ω onafhankelijk van n .

Wegens de eenvoudigheid zullen wij daarom steeds het laatste gebruiken.

Het geval van § 2 is altijd terug te brengen tot dat van § 3. Is nl.:

$$\Re = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

dan is
$$\Re - c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Stellen wij: $x = \frac{1}{z}$, dan is:

$$\Re - c_0 = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

Verder zullen wij aannemen $\lambda = 0$, daar dit in geen der behandelde gevallen anders is. De graad van het polynoom Ω is dan $l - 2$ of $m - 1$.

Men kan zich afvragen of Ω misschien van lageren graad kan zijn dan $l - 2$ of $m - 1$. Dit is alleen dan mogelijk als de termen van den hoogsten graad in Ω elkaar vernietigen, als dus L van één graad hoger is dan M.

Is nu
$$\mathfrak{R} = \frac{P}{Q} + \frac{c_{2n+1}}{x^{2n+1}} + \dots,$$

dus
$$\mathfrak{R}' = \frac{QP' - PQ'}{Q^2} - (2n+1) \frac{c_{2n+1}}{x^{2n+2}} + \dots,$$

dan is

$$\Omega = Q^2 \left[L \left\{ (2n+1) \frac{c_{2n+1}}{x^{2n+2}} + \dots \right\} - M \left\{ \frac{c_{2n+1}}{x^{2n+1}} + \dots \right\} \right].$$

Zijn de coëfficiënten van de termen van den hoogsten graad van Q , L en M respectievelijk q , l_0 en m_0 , dan is de term van den hoogsten graad van Ω

$$q^2 c \{ (2n+1) l_0 - m_0 \}.$$

De graad van Ω kan dus alleen verlaagd worden als:

$$(2n+1) l_0 - m_0 = 0,$$

en indien zulks mogelijk is, is dit slechts het geval voor een speciale waarde van n .

De coëfficiënten van Ω zijn afhankelijk van n .

In alle gevallen, waarin L hoogstens van den 2^{den}, M hoogstens van den 1^{sten} graad is, is Ω constant.

De vergelijking (12) is dan deelbaar door Ω .

Beschouwen wij de vergelijking (7)

$$L(QP' - PQ') + MPQ + NQ^2 = \Omega,$$

dan blijkt in 't algemeen het volgende:

Aangezien Ω van den graad $l-2$ of $m-1$ is, is het tweede lid van lager graad dan het eerste. In 't eerste lid moeten dus zeker twee termen voorkomen van den hoogsten graad.

Wanneer nu aan de vergelijking (1) een Stieltjes' integraal voldoet, dan is, zooals in § 3 is bewezen, P van den graad $n-1$ en Q van den graad n .

In het eerste lid is dan:

$$L(QP' - PQ') \text{ van den graad } 2n + l - 2,$$

$$MPQ \quad \quad \quad \text{ " " " } \quad 2n + m - 1.$$

NQ^2 mag dus niet van hooger graad zijn dan elk dezer vormen, dus mag de graad van N hoogstens zijn: $l-2$ of $m-1$. Voor het geval dat Ω constant is, moet dus N ook een constante zijn. Evenzoo is ook een geval denkbaar, waarbij L , M en N

Na vermenigvuldiging met $L\Omega$, $(L' - M)\Omega - L\Omega'$ en H en optelling volgt als differentiaalvergelijking voor z

$$\frac{z'}{z} = -2 \frac{Q'}{Q} - \frac{L'}{L} + \frac{M}{L} + \frac{\Omega'}{\Omega}$$

dus

$$z = \frac{\Omega}{LQ^2} e^{\int \frac{M}{L} dx}.$$

Vervangen wij Ω door zijn waarde uit (7) dan is:

$$\begin{aligned} z &= \frac{L(QP' - PQ') + MPQ + NQ^2}{LQ^2} e^{\int \frac{M}{L} dx} = \\ &= \left\{ \frac{d}{dx} \frac{P}{Q} + \frac{M}{L} \frac{P}{Q} + \frac{N}{L} \right\} e^{\int \frac{M}{L} dx}. \end{aligned}$$

Verder is

$$\Re' + \frac{M}{L} \Re + \frac{N}{L} = 0,$$

dus

$$z = \left\{ \frac{d}{dx} \left(\Re - \frac{P}{Q} \right) + \frac{M}{L} \left(\Re - \frac{P}{Q} \right) \right\} e^{\int \frac{M}{L} dx}.$$

$$z = \left\{ \frac{d}{dx} e^{\int \frac{M}{L} dx} \left(\Re - \frac{P}{Q} \right) \right\}.$$

dus

$$\int z dx = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left(\Re - \frac{P}{Q} \right).$$

De 2^e particuliere integraal is dus:

$$y_2 = e^{\int \frac{M}{L} dx} (\Re Q - P).$$

Indien aan de vergelijking (1) een Stieltjes' integraal $\int_A^B \frac{m(u)}{x+u} du$ voldoet, zoo is de 2^e particuliere oplossing ook te schrijven in den vorm:

$$y_2 = \frac{1}{m(-x)} (\Re Q - P).$$

§ 6. *Nieuwe constructie van de differentiaalvergelijking van LAGUERRE.*

Bestudeert men eenige differentiaalvergelijkingen van LAGUERRE, dan is het opvallend, dat de 2^e particuliere integraal steeds een bepaalden vorm aanneemt¹⁾. Dit was de aanleiding om een differentiaalvergelijking te construeeren met de volgende particuliere integralen:

$$y_1 = Q, \quad y_2 = \frac{1}{m(-x)}(\Re Q - P), \text{ waarin } m(-x) = e^{-\int \frac{M}{L} dx}.$$

Deze differentiaalvergelijking is:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nu is

$$y_2 = e^{\int \frac{M}{L} dx} (\Re Q - P),$$

dus

$$y_2' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left\{ \Re' Q + \Re Q' - P' + \frac{M}{L} (\Re Q - P) \right\}$$

of daar:

$$\Re' = -\frac{M\Re + N}{L}$$

$$y_2' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left\{ -\frac{M\Re + N}{L} Q + \Re Q' - P' + \frac{M\Re Q}{L} - \frac{PM}{L} \right\}$$

of volgens (8)

$$y_2' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left(\Re Q' - \frac{K}{L} \right).$$

Verder

$$y_2'' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left\{ \Re' Q' + \Re Q'' - \frac{LK' - KL'}{L^2} + \frac{M}{L} \left(\Re Q' - \frac{K}{L} \right) \right\},$$

$$y_2'' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left\{ -\frac{M\Re + N}{L} Q' + \Re Q'' - \frac{LK' - KL'}{L^2} + \frac{M\Re Q}{L} - \frac{MK}{L^2} \right\}$$

$$y_2'' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left\{ \Re Q'' - \frac{K' + NQ'}{L} + \frac{(L' - M)K}{L^2} \right\}$$

¹⁾ Zie dissertatie VAN DE VOOREN, p. 42 (1915).

of volgens (10)

$$y_2'' = e^{\int \frac{M}{L} dx} \left\{ \Re Q'' - \frac{R}{L} + \frac{(L' - M)K}{L^2} \right\}.$$

De differentiaalvergelijking is dus:

$$\begin{vmatrix} y, & Q, & \Re Q - P \\ y', & Q', & \Re Q' - \frac{K}{L} \\ y'', & Q'', & \Re Q'' - \frac{R}{L} + \frac{(L' - M)K}{L^2} \end{vmatrix} = 0.$$

of

$$\begin{vmatrix} y, & Q, & L^2 P \\ y', & Q', & KL \\ y'', & Q'', & RL - (L' - M)K \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin is de coëfficiënt van y''

$$QKL - L^2 PQ' = (QK - LPQ')L = L\Omega \text{ [zie (9)]}.$$

De coëfficiënt van $-y'$ kan in elke differentiaalvergelijking $py'' + qy' + ry = 0$ op de volgende manier gevonden worden als 2 particuliere integralen bekend zijn.

$$y_1 \text{ is een particuliere integraal, dus } py_1'' + qy_1' + ry_1 = 0,$$

$$y_2 \text{ " " " " " " } py_2'' + qy_2' + ry_2 = 0,$$

dus na vermenigvuldiging met y_2 en y_1 en aftrekking

$$p(y_1''y_2 - y_2''y_1) + q(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0.$$

$$-\frac{q}{p} = \frac{y_1''y_2 - y_2''y_1}{y_1'y_2 - y_2'y_1}.$$

$$\frac{q}{p} = -\frac{d}{dx} \lg(y_1'y_2 - y_2'y_1).$$

Nu is

$$y_1'y_2 - y_2'y_1 = Q'e^{\int \frac{M}{L} dx} (\Re Q - P) - e^{\int \frac{M}{L} dx} \left(\Re Q' - \frac{K}{L} \right) Q$$

$$= \frac{KQ - LPQ'}{L} e^{\int \frac{M}{L} dx}$$

$$= \frac{\Omega}{L} e^{\int \frac{M}{L} dx}$$

dus

$$\frac{q}{p} = -\frac{\Omega'}{\Omega} + \frac{L'}{L} - \frac{M}{L}.$$

Is nu $p = L\Omega$, dan is

$$q = (L' - M)\Omega - L\Omega'.$$

Overigens kan de coëfficiënt van y' ook uit de determinant berekend worden.

$$\begin{aligned} \text{De coëfficiënt van } y \text{ is } & Q'RL + Q'K(M - L') - KLQ'', \\ &= \frac{K}{P} \{(M - L')PQ' - LPQ''\} + Q'RL, \\ &= \frac{K}{P} \{\Omega' - RQ\} - Q'RL, \text{ zie (11)} \\ &= \frac{K}{P} \Omega' - \frac{R}{P} (KQ - LPQ'), \\ &= \frac{K}{P} \Omega' - \frac{R}{P} \Omega, \text{ zie (9)} \end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking, waarvan

$$y_1 = Q \text{ en } y_2 = \frac{1}{m(-x)} (RQ - P)$$

particuliere integralen zijn, is dus

$$L\Omega y'' + \{(L' - M)\Omega - L\Omega'\} y' + \frac{K\Omega' - R\Omega}{P} y = 0.$$

Dit is (12), de differentiaalvergelijking van LAGUERRE.

§ 7. *Bepaling van den graad van Ω en H door middel van de tweede particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking van LAGUERRE.*

Zij:

$$L = l_0 x^l + \dots \quad M = m_0 x^m + \dots \quad H = h_0 x^h + \dots \quad \Omega = g_0 x^k + \dots$$

en is de differentiaalvergelijking voor Q :

$$(13) \quad \dots \dots \dots py'' + qy' + ry = 0,$$

$$p = L\Omega \quad q = (L' - M)\Omega - L\Omega' \quad r = H,$$

waarvan twee particuliere oplossingen zijn

$$y_1 = Q_n \quad y_2 = \frac{1}{m(-x)} (RQ_n - P_n).$$

Zij verder de oplossing van (13)

$$(14) \quad \dots \dots \dots y = x^{p_0} + \dots$$

$$\text{dus} \quad y' = p_0 x^{p_0-1} + \dots$$

$$y'' = p_0(p_0 - 1) x^{p_0-2} + \dots,$$

dan is in het meest algemeene geval, waarin $m = l - 1$:

$$p = g_0 l_0 x^{k+l} + \dots$$

$$q = (l_0 l - m_0) g_0 x^{k+l-1} - l_0 g_0 k x^{k+l-1} + \dots = g_0 x^{k+l-1} (l_0 l - m_0 - l_0 k) + \dots$$

$$r = h_0 x^h + \dots$$

dus is:

$$g_0 l_0 p_0 (p_0 - 1) x^{p_0+k+l-2} + g_0 p_0 (l_0 l - m_0 - l_0 k) x^{p_0+k+l-2} + h_0 x^{h+p_0} + \dots = 0.$$

Dit is een vierkantsvergelijking in p_0 .

Aangezien de vergelijking in 't algemeen geen wortel $p_0 = 0$ heeft, is

$$h = k + l - 2,$$

dus is

$$p_0^2 - p_0 + \frac{l_0 l - m_0 - l_0 k}{l_0} p_0 + \frac{h_0}{g_0 l_0} = 0$$

of:

$$p_0^2 + \frac{l_0 l - m_0 - l_0 k - l_0}{l_0} p_0 + \frac{h_0}{g_0 l_0} = 0.$$

Nu zijn de wortels van deze vergelijking bekend, nl. de graad van y_1 is n , de graad van y_2 is $\frac{m_0}{l_0} - n - 1$.

Dit laatste bewijst men als volgt:

$\Re Q_n - P_n$ is van den graad $-n - 1$; zie § 3.

$$\frac{1}{m(-x)} = e^{\int \frac{M}{L} dx}.$$

Zij nu:

$$L = l_0 (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_l),$$

$$M = m_0 (x - b_1) (x - b_2) \dots (x - b_{l-1}),$$

dan is

$$\frac{M}{L} = \frac{M(a_1)}{L'(a_1)} \frac{1}{x - a_1} + \dots + \frac{M(a_l)}{L'(a_l)} \frac{1}{x - a_l},$$

dus:

$$\int \frac{M}{L} dx = \lg (x - a_1)^{\frac{M(a_1)}{L'(a_1)}} (x - a_2)^{\frac{M(a_2)}{L'(a_2)}} \dots (x - a_l)^{\frac{M(a_l)}{L'(a_l)}},$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{m(-x)} = e^{\int \frac{M}{L} dx} = (x - a_1)^{\frac{M(a_1)}{L'(a_1)}} (x - a_2)^{\frac{M(a_2)}{L'(a_2)}} \dots (x - a_l)^{\frac{M(a_l)}{L'(a_l)}}.$$

De graad van $\frac{1}{m(-x)}$ is dus $\sum_1^l \frac{M(a_l)}{L'(a_l)}$.

Nu is $\sum_1^l \frac{M(a_i)}{L'(a_i)} = \Sigma \text{Residu's van de functie } \frac{M}{L}$, welke haar polen heeft in $a_1 a_2 \dots a_l$.

Nu is $\Sigma \text{Residu's} = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{M(z)}{L(z)} dz$, waarbij de integraal genomen moet worden langs een cirkel met oneindigen straal. Wij verkrijgen dan:

$$\Sigma \text{Res.} = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{m_0 z^{l-1}}{l_0 z^l} dz = \frac{m_0}{l_0},$$

dus
$$\sum_1^l \frac{M(a_i)}{L'(a_i)} = \frac{m_0}{l_0}$$

en de graad van $\frac{1}{m(-x)}$ is dus $\frac{m_0}{l_0}$; hieruit volgt dat de graad van y_2 is $\frac{m_0}{l_0} - n - 1$.

In de vierkantsvergelijking voor p_0 is dus de som der wortels $\frac{m_0}{l_0} - 1$, dus is:

$$-\frac{l_0 l - m_0 - l_0 k - l_0}{l_0} = \frac{m_0}{l_0} - 1$$

of

$$k = l - 2.$$

Aangezien

$$h = k + l - 2$$

is dus

$$h = 2(l - 2).$$

Het product der wortels is $n\left(\frac{m_0}{l_0} - n - 1\right)$,

dus
$$\frac{h_0}{g_0 l_0} = n\left(\frac{m_0}{l_0} - n - 1\right)$$

of (15)

$$h_0 = n g_0 \{m_0 - (n + 1) l_0\}.$$

§ 8. De differentiaalvergelijking voor de naderingsteller P_n .

Deze zal blijken te zijn een niet homogene vergelijking en is daarom voor de vorming van de kettingbreuk niet geschikt.

Gelijktijdig kunnen de differentiaalvergelijkingen voor Q en P aldus worden afgeleid:

Volgens (7) heeft men, wanneer wij rangschikken naar P' en P :

$$(16) \quad \dots LQP' + (MQ - LQ')P + NQ^2 = \Omega.$$

Stelt men:

$$(17) \dots \dots \dots MQ - LQ' = K_1,$$

dan is

$$(18) \dots \dots \dots LQP' + K_1 P + NQ^2 = \Omega.$$

Na differentiatie:

$$LQP'' + (K_1 + LQ' + L'Q)P' + K_1'P + N'Q^2 + 2NQQ' = \Omega'$$

of volgens (17)

$$LQP'' + (M + L')QP' + K_1'P + N'Q^2 + 2NQQ' = \Omega'$$

$$\text{en} \qquad \qquad \qquad LQP' + K_1 P + NQ^2 \qquad \qquad \qquad = \Omega.$$

Door vermenigvuldiging verkrijgt men:

$$(19) \dots L\Omega P'' + [(L' + M)\Omega - L\Omega']P' + \frac{K_1'\Omega - K_1\Omega'}{Q}P = \\ = -2N\Omega Q' + (N\Omega' - N'\Omega)Q.$$

Dan moet dus $K_1'\Omega - K_1\Omega'$ deelbaar zijn door Q

$$K_1 = MQ - LQ'$$

$$K_1' = MQ' + M'Q - L'Q' - LQ''$$

of

$\Omega(MQ' + M'Q - L'Q' - LQ'') - \Omega'(MQ - LQ')$ is deelbaar door Q

$L\Omega Q'' + [(L' - M)\Omega - L\Omega']Q'$ is deelbaar door Q ,

dus

$$L\Omega Q'' + [(L' - M)\Omega - L\Omega']Q' + HQ = 0.$$

Dit is de vergelijking (12) voor Q , terwijl de differentiaalvergelijking (19) voor P wordt

$$(20) \dots L\Omega P'' + [(L' + M)\Omega - L'\Omega]P' + (H + M'\Omega - M\Omega')P = \\ = -2N\Omega Q' + (N\Omega' - N'\Omega)Q.$$

Dit geldt voor beide methodes (naar opklimmende en naar afdalende machten). In 't eerste geval kan men Ω vervangen door $x^\mu + \nu - \lambda \Theta$; zie P., p. 437.

§ 9. Afleiding van de differentiaalvergelijking van P_n uit die van Q_n .

De differentiaalvergelijking van Q_n heeft tot particuliere integralen:

$$y_1 = Q \quad y_2 = \frac{1}{m(-x)}(RQ - P).$$

Stelt men de differentiaalvergelijking van P voor in u , dan heeft men:

$$y_2 = \frac{\mathfrak{R}}{m} y_1 - \frac{1}{m} u,$$

dus

$$y_2' = \frac{\mathfrak{R}}{m} y_1' + \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)' y_1 - \frac{1}{m} u' - \left(\frac{1}{m}\right)' u,$$

$$y_2'' = \frac{\mathfrak{R}}{m} y_1'' + 2\left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)' y_1' + \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)'' y_1 - \frac{1}{m} u'' - 2\left(\frac{1}{m}\right)' u' - \left(\frac{1}{m}\right)'' u.$$

Vermenigvuldigen wij nu y_2 , y_2' en y_2'' achtereenvolgens met H , $(L' - M)\Omega - L\Omega'$ en $L\Omega$ en tellen op, dan is, aangezien y_1 en y_2 oplossingen zijn van de vergelijking (12)

$$\begin{aligned} L\Omega \left[\frac{1}{m} u'' + 2\left(\frac{1}{m}\right)' u' + \left(\frac{1}{m}\right)'' u \right] + [(L' - M)\Omega - L\Omega'] \left\{ \frac{1}{m} u' + \left(\frac{1}{m}\right)' u \right\} + H \frac{1}{m} u = \\ = L\Omega \left[2\left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)' y_1' + \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)'' y_1 \right] + [(L' - M)\Omega - L\Omega'] \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)' y_1. \end{aligned}$$

Nu volgt uit $m(-x) = e^{-\int \frac{M}{L} dx}$

$$m \left(\frac{1}{m}\right)' = \frac{M}{L}$$

en
$$m \left(\frac{1}{m}\right)'' = \frac{M^2 + LM' - ML'}{L^2}.$$

Vermenigvuldigen wij de vergelijking met m , dan wordt het eerste lid:

$$L\Omega u'' + [(L' + M)\Omega - L\Omega'] u' + [H + M'\Omega - M\Omega'] u.$$

Verder is

$$m \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)' = m \frac{\mathfrak{R}'}{m} - \mathfrak{R} \frac{m'}{m} = \mathfrak{R}' + \mathfrak{R} \frac{M}{L} = -\frac{N}{L},$$

aangezien $L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0$.

Differentieeren wij dit, dan verkrijgen wij:

$$m \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)'' + \frac{m'}{m} m \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)' = -\frac{LN' - NL'}{L^2}$$

of
$$m \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)'' + \frac{MN}{L^2} = -\frac{LN' - NL'}{L^2},$$

dus
$$m \left(\frac{\mathfrak{R}}{m}\right)'' = -\frac{MN + LN' - NL'}{L^2}.$$

Het tweede lid, met m vermenigvuldigd, geeft na herleiding

$$-2N\Omega y_1' + (N\Omega' - N'\Omega)y_1.$$

De differentiaalvergelijking voor P is dus

$$L\Omega u'' + [(L' + M)\Omega - L\Omega']u' + (H + M'\Omega - M\Omega')u = \\ = -2N\Omega Q' + (N\Omega' - N'\Omega)Q.$$

Dit is de vergelijking (20) voor P .

§ 10. *Het vinden van de recurrente betrekking tusschen drie opeenvolgende Q 's en de geassocieerde kettingbreuk.*

Volgens P., bl. 377, komt onder zekere voorwaarden met de integraal

$$\mathfrak{K} = \int_A^B \frac{m(u)}{x+u} du$$

overeen de kettingbreuk

$$\frac{k_1}{x+l_1} + \frac{k_2}{x+l_2} + \frac{k_3}{x+l_3} + \dots$$

Worden de opeenvolgende naderingsbreuken voorgesteld door:

$$\frac{k_1}{x+l_1} + \dots + \frac{k_n}{x+l_n} = \frac{K_n}{L_n},$$

dan is

$$\begin{array}{l} L_n \text{ van den graad } n, \\ K_n \text{ „ „ „ „ } n-1 \end{array}$$

en $\frac{K_n}{L_n}$ naar afdalende machten ontwikkeld, stemt met de reeks overeen tot en met $\frac{1}{x^{2n}}$.

Nu is ook P_n van den graad $n-1$ en Q_n van den graad n en $\frac{P_n}{Q_n}$ stemt met de reeks overeen tot en met $\frac{1}{x^{2n}}$. Aangezien er steeds één en niet meer dan één gebroken van den vorm $\frac{P_n}{Q_n}$ kan bepaald worden, is $K_n = P_n$ en $L_n = Q_n$.

De coëfficiënt van den term van den hoogsten graad in L_n is steeds 1, dus is ook $Q_n = x^n + \dots$.

Tusschen drie opeenvolgende Q 's bestaat nu het volgende verband:

$$(21) \quad \dots \quad Q_n = (x+l_n)Q_{n-1} + k_n Q_{n-2}.$$

Wanneer nu de differentiaalvergelijking van LAGUERRE

$$(13) \quad \dots \dots \dots py'' + qy' + ry = 0$$

bekend is, kan hieruit de betrekking (21) gevonden worden, en wel als volgt:

Laat aan (13) voldoen:

$$(22) \quad \dots \dots \dots Q_n = x^n + p_n x^{n-1} + q_n x^{n-2} + \dots,$$

dan is

$$Q' = nx^{n-1} + (n-1)p_n x^{n-2} + (n-2)q_n x^{n-3} + \dots,$$

$$Q'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_n x^{n-3} + (n-2)(n-3)q_n x^{n-4} + \dots$$

Substitueeren wij deze waarden van Q_n , Q_n' en Q_n'' in (13), dan vindt men bij gelijkstelling van de coëfficiënten der hoogste machten van x de waarden van p_n en q_n uitgedrukt in n .

Dan zijn ook p_{n-1} , q_{n-1} en p_{n-2} , q_{n-2} bekend.

Substitueert men thans:

$$Q_n = x^n + p_n x^{n-1} + q_n x^{n-2} + \dots$$

$$Q_{n-1} = x^{n-1} + p_{n-1} x^{n-2} + q_{n-1} x^{n-3} + \dots$$

$$Q_{n-2} = x^{n-2} + \dots$$

in de vergelijking (21), dan vindt men uit de coëfficiënten der hoogste machten van x de waarden van

$$l_n \text{ en } k_n.$$

Hiermede is de betrekking

$$Q_n = (x + l_n) Q_{n-1} + k_n Q_{n-2}$$

gevonden.

Dit geldt voor $n \geq 3$. De begintermen kunnen uit de reeks voor $\mathfrak{K}$ gevonden worden. Hiermee is dus bekend de geassocieerde kettingbreuk

$$\frac{k_1}{x + l_1} + \frac{k_2}{x + l_2} + \frac{k_3}{x + l_3} + \dots$$

§ 11. *Het vinden van de corresponderende kettingbreuk uit de differentiaalvergelijking voor Q .*

Laat de corresponderende kettingbreuk van $\mathfrak{K}$ zijn:

$$\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{1} + \dots$$

Deze heeft twee soorten naderingsbreuken, die van even en die van oneven rangorde. De naderingsnoemers van oneven rangorde bevatten alle den factor x , hetgeen niet het geval is bij die van even rangorde.

In verband met deze twee soorten naderingsbreuken kan men op twee manieren uit de oorspronkelijke kettingbreuk een nieuwe kettingbreuk maken en wel:

1^e. De kettingbreuk met de naderingsbreuken van even rangorde, de geassocieerde kettingbreuk. Deze is:

$$\mathfrak{R} = \frac{a_1}{|x + a_2|} - \frac{a_2 a_3}{|x + a_3 + a_4|} - \frac{a_4 a_5}{|x + a_5 + a_6|} - \dots, \text{ P., p. 331}$$

of aldus geschreven:

$$(23) \quad \mathfrak{R} = \frac{k_1}{|x + l_1|} + \frac{k_2}{|x + l_2|} + \frac{k_3}{|x + l_3|} + \dots$$

Steeds is dan: $k_1 = a_1 \quad l_1 = a_2.$

$$k_n = -a_{2n-2} \times a_{2n-1} \quad l_n = a_{2n-1} + a_{2n} \quad n \geq 2.$$

De noemers van deze kettingbreuk voldoen aan een differentiaalvergelijking van LAGUERRE.

2^e. De kettingbreuk met de naderingsbreuken van oneven rangorde.

Volgens P., p. 201 is dan:

$$\mathfrak{R} = \frac{a_1}{x} - \frac{a_1 a_2}{|(x + a_2)x + a_3 x|} - \frac{a_3 a_4 x^2}{|(x + a_4)x + a_5 x|} - \dots$$

$$\mathfrak{R} = \frac{a_1}{x} - \frac{a_1 a_{2/x}}{|x + a_2 + a_3|} - \frac{a_3 a_4}{|x + a_4 + a_5|} - \dots$$

$$x\mathfrak{R} = a_1 - \frac{a_1 a_2}{|x + a_2 + a_3|} - \frac{a_3 a_4}{|x + a_4 + a_5|} - \dots$$

$$x\mathfrak{R} - a_1 = - \frac{a_1 a_2}{|x + a_2 + a_3|} - \frac{a_3 a_4}{|x + a_4 + a_5|} - \dots$$

Noemen wij:

$$(24) \quad x\mathfrak{R} - a_1 = \bar{\mathfrak{R}},$$

dan is

$$\bar{\mathfrak{R}} = - \frac{a_1 a_2}{|x + a_2 + a_3|} - \frac{a_3 a_4}{|x + a_4 + a_5|} - \dots$$

of

$$(25) \quad \bar{\mathfrak{R}} = \frac{\bar{k}_1}{|x + \bar{l}_1|} + \frac{\bar{k}_2}{|x + \bar{l}_2|} + \dots,$$

$$\text{waarin} \quad \bar{k}_n = -a_{2n-1} \times a_{2n} \quad \bar{l}_n = a_{2n} + a_{2n+1}. \quad n \geq 1.$$

De naderingsnoemers van $\bar{\mathfrak{R}}$ zijn dan op den factor x na gelijk aan de naderingsnoemers van oneven rangorde van de corresponderende kettingbreuk voor $\mathfrak{R}$.

De noemers van deze kettingbreuk voor $\bar{\mathfrak{R}}$ voldoen weer aan een differentiaalvergelijking van LAGUERRE.

Uit de vergelijking (24) volgt:

$$(26) \quad \bar{\mathfrak{R}} = \frac{\bar{\mathfrak{R}} + a_1}{x}.$$

Hierin is $a_1 = c_1$ de coëfficiënt van $\frac{1}{x}$ in de reeks voor $\mathfrak{R}$ ontwikkeld naar afdalende machten.

Uit de vergelijking (1) voor $\mathfrak{R}$ kunnen wij dan door deze transformatie een vergelijking voor $\bar{\mathfrak{R}}$ construeeren, hieruit een differentiaalvergelijking van LAGUERRE en hieruit ten slotte de recurrente betrekking tusschen de naderingsnoemers voor $\bar{\mathfrak{R}}$.

Onderstel nu dat bij elkaar behooren

$$L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0,$$

$$py'' + qy' + ry = 0,$$

$$Q_n = (x + l_n) Q_{n-1} + k_n Q_{n-2} \quad l_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

en

$$\bar{L}\bar{\mathfrak{R}}' + \bar{M}\bar{\mathfrak{R}} + \bar{N} = 0,$$

$$\bar{p}\bar{y}'' + \bar{q}\bar{y}' + \bar{r}\bar{y} = 0,$$

$$\bar{Q}_n = (x + \bar{l}_n) \bar{Q}_{n-1} + \bar{k}_n \bar{Q}_{n-2} \quad \bar{l}_n = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Bepalen wij nu evenals in § 10 de grootheid p_n uit

$$Q_n = x^n + p_n x^{n-1} + \dots \quad (q_n \text{ is niet noodig}).$$

en verder l_n . Steeds is $l_n = p_n - p_{n-1}$.

Evenzoo kunnen wij uit het gestreepte stel vergelijkingen vinden:

$$\bar{p}_n \text{ en } \bar{l}_n = \bar{p}_n - \bar{p}_{n-1}.$$

Wij hebben dan:

$$l_n = a_{2n-1} + a_{2n} \quad n \geq 2$$

$$\bar{l}_n = a_{2n} + a_{2n+1} \quad n \geq 1$$

$$l_{n+1} = a_{2n+1} + a_{2n+2} \quad n \geq 1.$$

Door deze betrekkingen zijn de a 's bepaald en hiermee is de corresponderende kettingbreuk

$$\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{1} + \frac{a_5}{x} + \dots$$

te construeeren.

HOOFDSTUK II.

Toepassingen.

A. $(1 - x^2) \mathfrak{R}' - 1 = 0.$

§ 1. *Oplossing door reeksen.*

Zij gegeven de vergelijking

(1) $\dots\dots\dots (1 - x^2) \mathfrak{R}' - 1 = 0.$

Lossen wij de vergelijking op door een reeks, gerangschikt naar opklimmende machten:

$\mathfrak{R} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + \dots,$
 dus

$\mathfrak{R}' = c_1 + 2c_2x + \dots + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + c_nx^{n-1} + (n+1)c_{n+1}x^n + \dots$

Bij substitutie in (1) blijkt uit de gelijkstelling van de coëfficiënten der gelijknamige machten

$$\begin{array}{l} c_2 = c_4 = \dots = c_{2n} = 0, \\ c_1 = 1 \qquad (2n-1)c_{2n-1} = (2n+1)c_{2n+1}, \end{array}$$

dus $c_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n+1} c_{2n+1}.$

c_0 blijft onbepaald. Nemen wij $c_0 = 0$, dan wordt de reeks

(2) $\dots\dots \mathfrak{R} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

Deze reeks is convergent voor $|x| < 1.$

Lossen wij de vergelijking op door een reeks, gerangschikt naar afdalende machten:

$$\mathfrak{R} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots,$$

dus $\mathfrak{R}' = -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} + \dots$

Na substitutie volgt:

$$\begin{aligned} c_2 = c_4 = \dots = c_{2n} = 0, \\ c_1 = 1. \quad c_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n+1} c_{2n-1}, \end{aligned}$$

dus is

$$(3) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots$$

voor $|x| > 1$.

Opmerking: De coëfficiënten in de reeksen (2) en (3) zijn gelijk, omdat voor $x < 1$ $\mathfrak{K} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}$

$$\text{en voor } x > 1 \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{2} \lg \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{of wel} \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

§ 2. Oplossing door een Stieltjes' integraal.

$$\mathfrak{K} = \int_A^B \frac{m(u)}{x+u} du.$$

In (1) blz. 3 is $L = 1 - x^2$ $M = 0$ $N = -1$,
dus wordt

$$m(-x) = e^{-\int \frac{M}{L} dx} \quad m(-x) = \text{constante}.$$

De grenzen worden zoo bepaald, dat $\frac{1}{x+A} L(x)$ een polynoom is, dus -1 en 1 .

De integraal wordt dus, wanneer wij nog u vervangen door $-u$,

$$\mathfrak{K} = C \int_{-1}^1 \frac{du}{x-u},$$

dan is

$$\mathfrak{K}' = -C \int_{-1}^1 \frac{du}{(x-u)^2} = -C \int_{-1}^1 d \frac{1}{x-u} = -C \left(\frac{1}{x-u} \right)_{-1}^1 = \frac{2C}{1-x^2}.$$

$\mathfrak{K}'$, gesubstitueerd in (1), geeft: $C = \frac{1}{2}$, dus

$$(4) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{x-u}.$$

Is nu $|x| < 1$, dan kunnen wij de integraal nemen van -1 naar $+1$ door 't oneindige heen. Is $|x| > 1$, dan neemt men de integraal langs den eindigen weg van -1 naar $+1$.

Deze Stieltjes' integralen stemmen overeen met de in § 1 gevonden reeksen. Dit blijkt aldus:

$$\frac{1}{x-u} = -\frac{1}{u\left(1-\frac{x}{u}\right)} = -\frac{1}{u}\left(1 + \frac{x}{u} + \frac{x^2}{u^2} + \dots \frac{x^n}{u^n} + \dots\right) \quad |x| < 1,$$

dus is

$$\Re = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{x-u} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{u} + \frac{x}{u^2} + \frac{x^2}{u^3} + \dots \right).$$

De coëfficiënt van x^{2n} is:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{u^{2n+1}}, \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{-\infty} \frac{du}{u^{2n+1}} - \frac{1}{2} \int_{\infty}^1 \frac{du}{u^{2n+1}}, \\ c_{2n} &= 0. \end{aligned}$$

De coëfficiënt van x^{2n+1} is:

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{u^{2n+2}}, \\ c_{2n+1} &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Deze waarden komen overeen met de waarden van de reeks (2).
Verder is

$$\frac{1}{x-u} = \frac{1}{x\left(1-\frac{u}{x}\right)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{u}{x} + \frac{u^2}{x^2} + \dots \frac{u^n}{x^n} + \dots\right) \quad |x| > 1,$$

dus is

$$\Re = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{x-u} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{x} + \frac{u}{x^2} + \dots \right).$$

De coëfficiënt van $\frac{1}{x^{2n+1}}$ is

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^{2n} du, \\ &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Deze waarden komen overeen met de waarden van de reeks (3).

§ 3. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE.

Is, als in Hoofdstuk I,

$$L = 1 - x^2 \quad M = 0 \quad N = -1$$

dan wordt (12):

$$(1 - x^2)\Omega y'' + \{-2x\Omega - (1 - x^2)\Omega'\} y' + Hy = 0$$

$$m(-x) = 1 \text{ dus}$$

y_1 is van graad n en y_2 van graad $-n-1$.

Is nu

$$\Omega = g_0 x^k + \dots \text{ en } y = c_0 x^{p_0} + \dots,$$

dan geven de hoogste machten:

$$\begin{aligned} -p_0(p_0 - 1) - 2p_0 + kp_0 + \dots &= 0, \\ p_0^2 + (1 - k)p_0 + \dots &= 0. \end{aligned}$$

De som van de wortels is -1 , dus

$$1 - k = 1,$$

dus

$$k = 0$$

of

$$\Omega = \text{constant.}$$

Maar dan volgt, aangezien 't product van de wortels $= -n(n+1)$ is, dat H dit product als factor bevat.

De differentiaalvergelijking voor Q is dan:

$$(5). \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

d. i. de differentiaalvergelijking van LEGENDRE, waaruit volgt dat de noemers van de kettingbreuk voor $\mathfrak{R}$ polynomen van LEGENDRE zijn.

§ 4. De geassocieerde kettingbreuk.

Laat aan (5) voldoen:

$$y = x^n + p_n x^{n-1} + q_n x^{n-2} + \dots$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van de hoogste machten geeft

$$p_n = 0 \quad q_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}.$$

Dus is

$$Q_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots$$

$$Q_{n-1} = x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-3)} x^{n-3} + \dots$$

$$Q_{n-2} = x^{n-2} - \dots$$

Dit, gesubstitueerd in (21), blz. 21, geeft:

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \dots = (x + l_n) \left(x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-3)} x^{n-3} + \dots \right) + k_n (x^{n-2} - \dots)$$

dus

$$0 = l_n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} = - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-3)} + k_n,$$

dus

$$k_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-3)} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)},$$

$$= - \frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)}.$$

De recurrente betrekking is dus:

$$(6) \quad \dots \quad Q_n = x Q_{n-1} - \frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)} Q_{n-2}$$

en hiermee is de kettingbreuk voor $\mathfrak{R}$, afgezien van de eerste termen, gevonden. Deze kunnen door deeling bepaald worden. Men verkrijgt dan:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{3}}{x} - \frac{\frac{2^2}{3 \cdot 5}}{x} - \frac{\frac{3^2}{5 \cdot 7}}{x} - \frac{\frac{4^2}{7 \cdot 9}}{x} - \dots$$

of

$$(7) \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} - \frac{2^2}{5x} - \frac{3^2}{7x} - \frac{4^2}{9x} - \dots$$

De corresponderende kettingbreuk bestaat niet.

B. *Toepassing op de vergelijking*

$$(8) \quad \dots \quad x \mathfrak{R}' - (x + a - 1) \mathfrak{R} + 1 = 0 \quad \text{voor } a > 1.$$

§ 5. Oplossing door reeksen.

Reeks naar opklimmende machten gerangschikt.

Stel

$$\mathfrak{R} = \sum_0^{\infty} c_n x^n,$$

dan is

$$\mathfrak{R}' = \sum_1^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Bij substitutie in (8) volgt bij beschouwing van de coëfficiënten van x^0 en x^n

$$-(\alpha - 1)c_0 + 1 = 0 \quad \text{en} \quad nc_n - c_{n-1} - (\alpha - 1)c_n = 0,$$

$$c_0 = \frac{1}{\alpha - 1} \quad c_n = \frac{-1}{\alpha - n - 1} c_{n-1}$$

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n - 1)},$$

dus
$$c_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - n - 1).$$

Aldus is de reeks:

$$(9) \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}x + \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}x^2 - \dots$$

Deze reeks is convergent voor alle waarden van x .

Reeks naar afdalende machten gerangschikt:

Stel

$$\mathfrak{R} = \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

dan is

$$\mathfrak{R}' = - \sum_1^{\infty} \frac{nc_n}{x^{n+1}}.$$

Na substitutie in (8) volgt bij beschouwing van de coëfficiënten van x^0 , $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{x^{n-1}}$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = -\alpha \quad \text{en} \quad -(n-1)c_{n-1} - c_n - (\alpha - 1)c_{n-1} = 0$$

$$c_n = -(\alpha + n - 2)c_{n-1}$$

$$c_n = (-1)^{n-1} (\alpha + n - 2)(\alpha + n - 3) \dots \alpha.$$

dus
$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + n - 1).$$

Aldus is de reeks

$$(10) \quad \dots \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{x^3} - \dots$$

Deze reeks is divergent voor alle waarden van x .

§ 6. Oplossing door een Stieltjes' integraal.

In (8) is nu

$$L = x, \quad M = -(x + \alpha - 1) \quad \text{en} \quad N = 1,$$

dus
$$m(-x) = e^{-\int \frac{M}{L} dx} = e^{\int \frac{x+a-1}{x} dx} = C e^x x^{a-1},$$

dus
$$m(x) = C e^{-x} (-x)^{a-1} \text{ of als wij stellen } C' = (-1)^{a-1} C,$$

$$m(x) = C' e^{-x} x^{a-1}.$$

Als grenzen kunnen wij nemen 0 en ∞ , dan is de integraal

$$\mathfrak{R} = C' \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{a-1}}{x+u} du.$$

Ter bepaling van de constante C' gebruiken wij formule (3), blz. 3.
 Hierin is:

$$\left(\frac{m(u)}{x+u} \right)_A^B L(x) = C' \left(\frac{e^{-u} u^{a-1}}{x+u} \right)_0^\infty L = 0 \quad (a > 1).$$

De vergelijking (3) wordt dan:

$$C' \int_0^\infty \frac{M(x) m(u) - L(x) m'(u)}{x+u} du + 1 = 0,$$

$$C' \int_0^\infty e^{-u} \frac{-(x+a-1)u^{a-1} - x\{ -u^{a-1} + (a-1)u^{a-2} \}}{x+u} du + 1 = 0,$$

$$- C' (a-1) \int_0^\infty e^{-u} u^{a-2} du + 1 = 0,$$

$$- C' (a-1) \Gamma(a-1) + 1 = 0, \text{ dus } C' = \frac{1}{\Gamma(a)}.$$

De Stieltjes' integraal is dus:

$$(11). \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{a-1}}{x+u} du.$$

De Stieltjes' integraal komt overeen met de reeksen.

Men krijgt nl.:

$$\frac{1}{x+u} = \frac{1}{u} - \frac{x}{u^2} + \frac{x^2}{u^3} - \dots \quad (-1)^n \frac{x^n}{u^{n+1}} + \dots$$

De coëfficiënt van x^n is dus:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{a-1}}{u^{n+1}} du,$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(a)} \Gamma(a-n-1), \text{ vergelijk reeks (9)}$$

en
$$\frac{1}{x+u} = \frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} - \dots \quad (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{x^n}.$$

De coëfficiënt van $\frac{1}{x^n}$ is dus:

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} u^{n-1} du,$$

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + n - 1); \text{ vergelijk reeks (10).}$$

§ 7. *De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor Q_n .*

$$L = x \quad M = -(x + \alpha - 1) \quad N = 1.$$

De graad van Ω is gelijk aan $l - 2$ of $m - 1$, dus $\Omega = \text{constant}$.

De differentiaalvergelijking (12), blz. 7, wordt dan:

$$xQ'' + (x + \alpha)Q' + HQ = 0.$$

Gelijkstelling der coëfficiënten van de hoogste machten geeft $H = -n$, dus

$$(12). \quad xQ'' + (x + \alpha)Q' - nQ = 0.$$

Stellen wij

$$Q = x^n + p_n x^{n-1} + \dots$$

dan is

$$Q' = nx^{n-1} + (n-1)p_n x^{n-2} + \dots$$

$$Q'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

Substitueeren wij dit, dan verkrijgen wij uit de coëfficiënten van x^{n-1} :

$$n(n-1) + (n-1)p_n + n\alpha - np_n = 0$$

$$p_n = n(n + \alpha - 1)$$

en dus

$$p_{n-1} = (n-1)(n + \alpha - 2).$$

Nu is, volgens (21), blz. 21, $l_n = p_n - p_{n-1}$,

dus $l_n = -(n-1)(n + \alpha - 2) + n(n + \alpha - 1).$

§ 8. *De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$.*

Substitueeren wij in de oorspronkelijke vergelijking:

$$x\mathfrak{R}' - (x + \alpha - 1)\mathfrak{R} + 1 = 0,$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\bar{\mathfrak{R}} + 1}{x} \quad (c_1 = 1),$$

dus ook

$$\mathfrak{R}' = \frac{\bar{\mathfrak{R}}'}{x} - \frac{\bar{\mathfrak{R}} + 1}{x^2},$$

dan wordt de vergelijking voor $\bar{\mathfrak{R}}$:

$$(13) \quad \dots \quad x\bar{\mathfrak{R}}' - (x + \alpha)\bar{\mathfrak{R}} - \alpha = 0.$$

De bijbehorende differentiaalvergelijking van LAGUERRE is

$$(14) \quad \dots \quad x\bar{Q}'' + (x + \alpha + 1)\bar{Q}' - n\bar{Q} = 0.$$

Deze verschilt alleen van (12) doordat α is vervangen door $\alpha + 1$, dus is ook de oplossing direct neer te schrijven:

$$\bar{l}_n = - (n - 1)(n + \alpha - 1) + n(n + \alpha).$$

§ 9. Kettingbreuken voor $\mathfrak{R}$.

Wij hebben (zie blz. 24):

$$l_n = - (n - 1)(n + \alpha - 2) + n(n + \alpha - 1) = a_{2n-1} + a_{2n}$$

$$\bar{l}_n = - (n - 1)(n + \alpha - 1) + n(n + \alpha) = a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$l_{n+1} = - n(n + \alpha - 1) + (n + 1)(n + \alpha) = a_{2n+1} + a_{2n+2}.$$

Hieruit volgt:

$$l_n - \bar{l}_n = \{ - (n - 1)(n + \alpha - 2) + (n - 1)(n + \alpha - 1) \} - \\ - \{ - n(n + \alpha - 1) + n(n + \alpha) \}.$$

De beide tusschen accoladen geplaatste uitdrukkingen verschillen alleen daardoor, dat n één verschilt. Verder is

$$l_n - \bar{l}_n = a_{2n-1} - a_{2n+1},$$

dus is op een constante na:

$$a_{2n-1} = - (n - 1)(n + \alpha - 2) + (n - 1)(n + \alpha - 1)$$

$$\text{of} \quad a_{2n-1} = n - 1.$$

Verder is

$$\bar{l}_n - l_{n+1} = \{ - (n - 1)(n + \alpha - 1) + n(n + \alpha - 1) \} - \\ - \{ - n(n + \alpha) + (n + 1)(n + \alpha) \}.$$

Ook hier is dan op een constante na:

$$a_{2n} = - (n - 1)(n + \alpha - 1) + n(n + \alpha - 1)$$

$$\text{of} \quad a_{2n} = n + \alpha - 1.$$

Aangezien $a_2 = +\alpha$ is, is de constante gelijk nul.

Hieruit volgt de corresponderende kettingbreuk

$$(15) \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{1} + \frac{1}{x} + \frac{\alpha+1}{1} + \frac{2}{x} + \frac{\alpha+2}{1} + \frac{3}{x} + \frac{\alpha+3}{1} + \dots$$

De geassocieerde kettingbreuk volgt uit

$$k_n = -a_{2n-2} \times a_{2n-1}$$

$$l_n = a_{2n-1} + a_{2n}$$

dus

$$k_n = -(n + a - 2)(n - 1)$$

$$l_n = n - 1 + n + a - 1 = 2n + a - 2.$$

De geassocieerde kettingbreuk is dan:

$$(16) \mathfrak{K} = \frac{1}{|x+a|} - \frac{1a}{|x+a+2|} - \frac{2(a+1)}{|x+a+4|} - \frac{3(a+2)}{|x+a+6|} \dots$$

C. *Toepassing op de vergelijking:*

$$(17) x(x-1)\mathfrak{K}' - \{(\varrho-1)(x-1) + (\sigma-1)x\}\mathfrak{K} + \varrho + \sigma - 1 = 0$$

$$\varrho > 1, \sigma > 1.$$

§ 10. *Algemeenheid der vergelijking.*

In hoofdstuk I § 4 is aangetoond, dat Ω constant is in alle gevallen, waarin L hoogstens van den 2^{en} en M hoogstens van den 1^{en} graad is. In dit geval moet N een constante zijn.

(17) stelt nu de meest algemeene vergelijking voor, waarvoor Ω constant is.

Heeft men nl. de meest algemeene vergelijking, waarvoor Ω constant is in den vorm

$$(x-a)(x-b)\mathfrak{K}' + (lx+m)\mathfrak{K} + N = 0,$$

dan brengt men deze door de transformatie

$$x = a + (b-a)t, \text{ dus } x-b = (b-a)(t-1)$$

en

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{b-a}$$

in den vorm

$$t(t-1)\frac{d\mathfrak{K}}{dt} + \left\{\frac{la+m}{b-a} + lt\right\}\mathfrak{K} + \frac{N}{b-a} = 0.$$

Uit de grootheden $\frac{la+m}{b-a}$ en l kunnen dan ϱ en σ gevonden worden, nl.:

$$\varrho = 1 - \frac{la+m}{a-b} \quad \sigma = 1 - \frac{lb+m}{b-a}.$$

Voor de constante N mag men elke willekeurige waarde aannemen, aangezien een factor in $\mathfrak{R}$ kan worden opgenomen.

§ 11. Oplossing door reeksen.

Reeks naar opklimmende machten gerangschikt:

Stel

$$\mathfrak{R} = \sum_0^{\infty} c_n x^n,$$

dan is

$$\mathfrak{R}' = \sum_1^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Dit, gesubstitueerd in (17), geeft:

$$(q-1)c_0 + q + \sigma - 1 = 0$$

$$c_0 = -\frac{q + \sigma - 1}{q - 1}$$

en

$$(n-1)c_{n-1} - nc_n - (q + \sigma - 2)c_{n-1} + (q-1)c_n = 0$$

$$c_n = \frac{q + \sigma - n - 1}{q - n - 1} c_{n-1};$$

dus is

$$c_n = -\frac{(q + \sigma - n - 1)(q + \sigma - n) \dots (q + \sigma - 1)}{(q - n - 1)(q - n)(q - n + 1) \dots (q - 1)}$$

$$c_n = -\frac{\Gamma(q + \sigma)}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q - n - 1)}{\Gamma(q + \sigma - n - 1)}.$$

Aldus is de reeks

$$(18) \quad \mathfrak{R} = -\frac{q + \sigma - 1}{q - 1} - \frac{(q + \sigma - 2)(q + \sigma - 1)}{(q - 2)(q - 1)} x - \\ - \frac{(q + \sigma - 3)(q + \sigma - 2)(q + \sigma - 1)}{(q - 3)(q - 2)(q - 1)} x^2 \dots$$

Deze reeks is convergent voor $|x| < 1$.

De reeks is een hypergeometrische en wel

$$(19) \quad \mathfrak{R} = \frac{q + \sigma - 1}{1 - q} F(2 - q - \sigma, 1, 2 - q; x).$$

Reeks naar afdalende machten:

Stel

$$\mathfrak{R} = \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

dan is

$$\mathfrak{R}' = - \sum_1^{\infty} \frac{nc_n}{x^{n+1}}.$$

Dit, gesubstitueerd in (17), geeft:

$$-c_1 - (\varrho + \sigma - 2)c_1 + \varrho + \sigma - 1 = 0$$

$$c_1 = 1$$

$$-2c_2 + c_1 - (\varrho + \sigma - 2)c_2 + (\varrho - 1)c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{\varrho}{\varrho + \sigma}.$$

en

$$-nc_n + (n-1)c_{n-1} - (\varrho + \sigma - 2)c_n + (\varrho - 1)c_{n-1} = 0$$

$$c_n = \frac{n + \varrho - 2}{n + \varrho + \sigma - 2} c_{n-1}$$

dus

$$c_n = \frac{(n + \varrho - 2)(n + \varrho - 3) \dots \varrho}{(n + \varrho + \sigma - 2)(n + \varrho + \sigma - 3) \dots (\varrho + \sigma)},$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)} \frac{\Gamma(\varrho + n - 1)}{\Gamma(\varrho + \sigma + n - 1)}.$$

Aldus is de reeks:

$$(20) \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{x} + \frac{\varrho}{\varrho + \sigma} \frac{1}{x^2} + \frac{\varrho(\varrho + 1)}{(\varrho + \sigma)(\varrho + \sigma + 1)} \frac{1}{x^3} + \frac{\varrho(\varrho + 1)(\varrho + 2)}{(\varrho + \sigma)(\varrho + \sigma + 1)(\varrho + \sigma + 2)} \frac{1}{x^4} + \dots$$

Deze reeks is convergent voor $|x| > 1$.

De oplossing is te schrijven in den vorm:

$$(21) \quad \dots \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{x} F\left(\varrho, 1, \varrho + \sigma; \frac{1}{x}\right).$$

§ 12. Oplossing door een Stieltjes' integraal.

$$\mathfrak{R} = \int_A^B \frac{m(u)}{x + u} du.$$

In (17) is $L = x(x-1)$ $M = -(\varrho-1)(x-1) - (\sigma-1)x$,
dus

$$m(-x) = e^{\int \left(\frac{\varrho-1}{x} + \frac{\sigma-1}{x-1} \right) dx}$$

$$m(-x) = Cx^{\varrho-1}(x-1)^{\sigma-1}$$

$$m(x) = C(-x)^{\varrho-1}(-x-1)^{\sigma-1}.$$

De grenzen voor de integraal zijn -1 en 0 .

Men vindt dus voor $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R} = C \int_{-1}^0 \frac{(-u)^{\varrho-1}(-u-1)^{\sigma-1}}{x+u} du$$

of

$$\mathfrak{R} = C \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1}(u-1)^{\sigma-1}}{x-u} du$$

of als wij stellen $C' = (-1)^{\sigma-1} C$

$$\mathfrak{R} = C' \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1}(1-u)^{\sigma-1}}{x-u} du.$$

Bepaling van de constante C' geschiedt uit de formule (3) blz. 3.
Hierin is:

$$\left(\frac{m(u)}{x+u} \right)_{-1}^0 = 0.$$

De vergelijking (3) wordt dan:

$$C' \int_{-1}^0 \frac{M(x)m(u) - L(x)m'(u)}{x+u} du + \varrho + \sigma - 1 = 0$$

of

$$C' \int_0^1 \frac{M(x)m(-u) - L(x)m'(-u)}{x-u} du + \varrho + \sigma - 1 = 0,$$

of

$$C' \int_0^1 \frac{u^{\varrho-2}(1-u)^{\sigma-2}}{x-u} [x(x-1)\{(\varrho-1)(1-u) - (\sigma-1)u\} + \\ + u(u-1)\{(\varrho-1)(x-1) + (\sigma-1)x\}] dx + \varrho + \sigma - 1 = 0.$$

Binnen de haken staat:

$$(\varrho-1)x^2 - (\varrho+\sigma-2)ux^2 - (\varrho-1)x + (\varrho+\sigma-2)ux \\ - (\varrho-1)u^2 + (\varrho+\sigma-2)u^2x + (\varrho-1)x - (\varrho+\sigma-2)ux \\ = \{(\varrho-1)(x+u) - (\varrho+\sigma-2)ux - (\varrho-1)\}(x-u),$$

dus is:

$$C' \int_0^1 u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-2} [\{(\varrho-1) - (\varrho+\sigma-2)u\}x + (\varrho-1)u - (\varrho-1)] du + \varrho + \sigma - 1 = 0.$$

De coëfficiënt van x is

$$\begin{aligned} & C' \int_0^1 u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-2} \{(\varrho-1)(1-u) - (\sigma-1)u\} du = \\ & = C' [(\varrho-1) \int_0^1 u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-1} du - (\sigma-1) \int_0^1 u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-2} du]. \end{aligned}$$

Dit wordt bij invoering van B-functies

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du, \\ &= C' [(\varrho-1) B(\varrho-1, \sigma) - (\sigma-1) B(\varrho, \sigma-1)]. \end{aligned}$$

Aangezien

$$B(p, q) = B(p-1, q) \times \frac{p-1}{p+q-1},$$

wordt dit $(\varrho + \sigma - 1) B(\varrho, \sigma) - (\varrho + \sigma - 1) B(\varrho, \sigma) = 0$.

Dan houden wij over:

$$C' \int_0^1 u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-2} \{(\varrho-1)u - (\varrho-1)\} du + \varrho + \sigma - 1 = 0$$

$$\text{of} \quad -C' (\varrho-1) \int_0^1 u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-1} du + \varrho + \sigma - 1 = 0,$$

$$-C' (\varrho-1) B(\varrho-1, \sigma) + \varrho + \sigma - 1 = 0,$$

$$\text{dus} \quad C' = \frac{1}{B(\varrho, \sigma)}.$$

$$\text{Nu is} \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\text{dus} \quad C' = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)}.$$

De Stieltjes' integraal is dus:

$$(22) \quad \mathfrak{R} = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-1}}{x-u} du.$$

Gemakkelijk blijkt de overeenstemming van de Stieltjes' integraal met de vroeger gevonden reeksen, nl.:

$$\frac{1}{x-u} = -\frac{1}{u} - \frac{x}{u^2} - \frac{x^2}{u^3} - \dots$$

Dus is de coëfficiënt van x^n :

$$\begin{aligned} c_n &= - \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \int_0^1 u^{\varrho+n-2} (1-u)^{\sigma-1} du, \\ c_n &= - \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} B(\varrho - n - 1, \sigma), \\ &= - \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(\varrho - n - 1) \Gamma(\sigma)}{\Gamma(\varrho + \sigma - n - 1)}, \\ &= - \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)} \frac{\Gamma(\varrho - n - 1)}{\Gamma(\varrho + \sigma - n - 1)} \end{aligned}$$

in overeenstemming met de reeks (18).

Verder is:

$$\frac{1}{x-u} = \frac{1}{x} + \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} + \dots$$

De coëfficiënt van x^{-n} wordt nu:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \int_0^1 u^{\varrho+n-2} (1-u)^{\sigma-1} du, \\ &= \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} B(\varrho + n - 1, \sigma), \\ &= \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)} \frac{\Gamma(\varrho + n - 1)}{\Gamma(\varrho + \sigma + n - 1)} \end{aligned}$$

in overeenstemming met de reeks (19).

De beide coëfficiënten kunnen in denzelfden vorm geschreven worden, nl.

$$c_p = \pm \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \int_0^1 u^{\varrho+p-2} (1-u)^{\sigma-1} du.$$

§ 13. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor Q_n .

In de vergelijking:

$$L\Omega Q'' + [L' - M]\Omega - L\Omega' Q' + HQ = 0$$

is

$$L = x(x-1) \quad M = (\varrho-1)(1-x) - (\sigma-1)x.$$

Ω is van den graad $l-2$ of $m-1$ (zie Hoofdstuk I, § 4), dus Ω is een constante, zoodat ook H constant is.

De vergelijking is:

$$x(x-1)Q'' + [2x-1-(\varrho-1)(1-x)+(\sigma-1)x]Q' + HQ = 0,$$

$$x(x-1)Q'' + \{ -\varrho + (\varrho + \sigma)x \} Q' + HQ = 0.$$

Uit de coëfficiënten der hoogste machten volgt:

$$n(n-1) + (\varrho + \sigma)n + H = 0$$

$$H = -n(n + \varrho + \sigma - 1).$$

De differentiaalvergelijking voor Q is dus:

$$(23) \quad x(x-1)Q'' + \{ -\varrho + (\varrho + \sigma)x \} Q' - n(n + \varrho + \sigma - 1)Q = 0.$$

Dit is de differentiaalvergelijking van de hyper-geometrische reeks.

De oplossing voor Q is dus

$$Q_n = F(-n, n + \varrho + \sigma - 1, \varrho; x), \text{ d. z. de } \textit{Jacobipolynomen}.$$

$$\text{Is nu} \quad Q_n = x^n + p_n x^{n-1} + \dots$$

dan is p_n uit de hypergeometrische reeks op te schrijven. Overigens kunnen wij p_n ook bepalen door in (23) te substitueeren:

$$Q_n = x^n + p_n x^{n-1} + \dots$$

$$Q_n' = nx^{n-1} + (n-1)p_n x^{n-2} + \dots$$

$$Q_n'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_n x^{n-3} + \dots$$

Dan is de coëfficiënt van x^{n-1} :

$$\{ (n-1)(n-2) + (\varrho + \sigma)(n-1) - n(n + \varrho + \sigma - 1) \} p_n - n(n-1) - \varrho n = 0.$$

Hieruit volgt:

$$p_n = -\frac{n(n + \varrho - 1)}{2n + \varrho + \sigma - 2}.$$

Wij hebben dus:

$$Q_n = x^n - \frac{n(n + \varrho - 1)}{2n + \varrho + \sigma - 2} x^{n-1} + \dots$$

$$Q_{n-1} = x^{n-1} - \frac{(n-1)(n + \varrho - 2)}{2n + \varrho + \sigma - 4} x^{n-2} + \dots$$

$$\text{Nu is} \quad l_n = p_n - p_{n-1},$$

dus

$$l_n = \frac{(n-1)(n + \varrho - 2)}{2n + \varrho + \sigma - 4} - \frac{n(n + \varrho - 1)}{2n + \varrho + \sigma - 2}.$$

§ 14. *De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$.*

Substitueeren wij in de oorspronkelijke vergelijking:

$$x(x-1)\bar{R}' - \{(q-1)(x-1) + (\sigma-1)x\}\bar{R} + q + \sigma - 1 = 0.$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{R} + 1}{x}$$

en

$$\bar{R}' = \frac{\bar{R}'}{x} - \frac{\bar{R} + 1}{x^2},$$

dan komt na herleiding:

$$(24) \quad x(x-1)\bar{R}' - \{(q+\sigma-1)x - q\}\bar{R} + q = 0.$$

De bijbehorende differentiaalvergelijking voor $\bar{Q}_n$ is dan ook te vinden door in de differentiaalvergelijking van LAGUERRE te substitueeren:

$$L = x(x-1) \quad M = q + (1-q-\sigma)x.$$

Deze is

$$(25) \quad x(x-1)\bar{Q}'' + \{-1-q+(q+\sigma+1)x\}\bar{Q}' - n(n+q+\sigma) = 0.$$

Vergelijken wij deze met (23), dan blijkt, dat alleen q is vervangen door $q+1$, zoodat ook de geldende uitdrukking voor $\bar{l}_n$ te verkrijgen is uit die van l_n door vervanging van q door $q+1$, dus

$$\bar{l}_n = \frac{(n-1)(n+q-1)}{2n+q+\sigma-3} - \frac{n(n+q)}{2n+q+\sigma-1}.$$

§ 15. *Kettingbreuken voor $\bar{R}$.*

Wij hebben dus:

$$l_n = \frac{(n-1)(n+q-2)}{2n+q+\sigma-4} - \frac{n(n+q-1)}{2n+q+\sigma-2} = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

$$\bar{l}_n = \frac{(n-1)(n+q-1)}{2n+q+\sigma-3} - \frac{n(n+q)}{2n+q+\sigma-1} = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

$$l_{n+1} = \frac{n(n+q-1)}{2n+q+\sigma-2} - \frac{(n+1)(n+q)}{2n+q+\sigma} = a_{2n+1} + a_{2n+2}.$$

Hieruit volgt:

$$l_n - \bar{l}_n = a_{2n-1} - a_{2n+1}.$$

$$l_n - \bar{l}_n = \left[\frac{(n-1)(n+\varrho-2)}{2n+\varrho+\sigma-4} - \frac{(n-1)(n+\varrho-1)}{2n+\varrho+\sigma-3} \right] - \left[\frac{n(n+\varrho-1)}{2n+\varrho+\sigma-2} - \frac{n(n+\varrho)}{2n+\varrho+\sigma-1} \right].$$

De twee tusschen haken staande uitdrukkingen gaan in elkaar over door n te vervangen door $n+1$, dus is op een constante na:

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{(n-1)(n+\varrho-2)}{2n+\varrho+\sigma-4} - \frac{(n-1)(n+\varrho-1)}{2n+\varrho+\sigma-3} \\ &= \frac{n-1}{(2n+\varrho+\sigma-4)(2n+\varrho+\sigma-3)} \\ &\quad \{ (n+\varrho-2)(2n+\varrho+\sigma-3) - (n+\varrho-1)(2n+\varrho+\sigma-4) \} \\ a_{2n-1} &= - \frac{(n-1)(n+\sigma-2)}{(2n+\varrho+\sigma-4)(2n+\varrho+\sigma-3)}. \end{aligned}$$

Evenzoo is:

$$\bar{l}_n - l_{n+1} = a_{2n} - a_{2n+2}.$$

$$\begin{aligned} \bar{l}_n - l_{n+1} &= \left[\frac{(n-1)(n+\varrho-1)}{2n+\varrho+\sigma-3} - \frac{n(n+\varrho-1)}{2n+\varrho+\sigma-2} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{n(n+\varrho)}{2n+\varrho+\sigma-1} - \frac{(n+1)(n+\varrho)}{2n+\varrho+\sigma} \right] \end{aligned}$$

dus op de constante na:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{n+\varrho-1}{(2n+\varrho+\sigma-3)(2n+\varrho+\sigma-2)} \{ (n-1)(2n+\varrho+\sigma-2) - n(2n+\varrho+\sigma-3) \} \\ a_{2n} &= - \frac{(n+\varrho-1)(n+\varrho+\sigma-2)}{(2n+\varrho+\sigma-3)(2n+\varrho+\sigma-2)}. \end{aligned}$$

Nu volgt uit de eerste a 's weer gemakkelijk, dat de constante gelijk nul is.

Hieruit volgt de corresponderende kettingbreuk:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{1}{x} - \frac{\frac{\varrho}{\varrho+\sigma}}{1} - \frac{\frac{\sigma}{(\varrho+\sigma)(\varrho+\sigma+1)}}{x} - \\ &\quad - \frac{\frac{(\varrho+1)(\varrho+\sigma)}{(\varrho+\sigma+1)(\varrho+\sigma+2)}}{1} - \frac{\frac{2(\sigma+1)}{(\varrho+\sigma+2)(\varrho+\sigma+3)}}{x} \text{ enz.} \end{aligned}$$

of ook

$$(26) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{x} - \frac{\varrho}{\varrho + \sigma} - \frac{\sigma}{(\varrho + \sigma + 1)x} - \frac{(\varrho + 1)(\varrho + \sigma)}{(\varrho + \sigma + 2)} - \\ - \frac{2(\sigma + 1)}{(\varrho + \sigma + 3)x} - \frac{(\varrho + 2)(\varrho + \sigma + 1)}{\varrho + \sigma + 4} - \dots$$

Door contractie is hieruit de geassocieerde kettingbreuk te verkrijgen, dan is nl.

$$l_n = a_{2n-1} + a_{2n}$$

$$k_n = -a_{2n-2} + a_{2n-1}.$$

en de kettingbreuk is hierdoor bepaald.

HOOFDSTUK III.

Toepassing op de vergelijking:

$$x(x-1)(ax-1)\mathfrak{R}' - \{(\varrho-1)(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + \alpha(\tau-1)x(x-1)\}\mathfrak{R} + Ax + B = 0.$$

§ 1. Opstelling der vergelijking voor $\mathfrak{R}$.

In alle gevallen, waarin in de vergelijking:

$$L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0$$

L hoogstens van den 2^{den}, M hoogstens van den 1^{sten} graad is, is Ω constant. Dit is niet meer het geval, wanneer wij thans voor L en M polynomen, respectievelijk van den 3^{den} en 2^{den} graad nemen.

De vergelijking (1) van blz. 3 is thans:

$$(x-a)(x-b)(x-c)\mathfrak{R}' + (lx^2 + mx + n)\mathfrak{R} + N = 0.$$

Substitueeren wij hierin:

$$x = a + (b-a)t, \text{ dus } x-b = (b-a)(t-1) \\ x-c = (c-a)\left(\frac{b-a}{c-a}t-1\right) \\ dx = (b-a)dt,$$

dan is:

$$(b-a)(c-a)t(t-a)\left(\frac{b-a}{c-a}t-1\right)\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \\ + [l\{a + (b-a)t\}^2 + m\{a + (b-a)t\} + n]\mathfrak{R} + N = 0.$$

Stellen wij $\frac{b-a}{c-a} = a$, dan is de vergelijking te schrijven in den vorm:

$$t(t-1)(at-1)\mathfrak{R}' - \{(\varrho-1)(t-1)(at-1) + (\sigma-1)t(at-1) + \alpha(\tau-1)t(t-1)\}\mathfrak{R} + N = 0,$$

waarin:

$$\varrho = 1 - \frac{la^2 + ma + n}{(a-b)(a-c)}, \quad \sigma = 1 - \frac{lb^2 + mb + n}{(b-a)(b-c)}, \quad \tau = 1 - \frac{lc^2 + mc + n}{(c-a)(c-b)}.$$

Nu is in § 4 Hoofdstuk I bewezen, dat wanneer L en M zijn van den 3^{den} en 2^{den} graad en aan de vergelijking een Stieltjes' integraal voldoet, N een polynoom is van den 1^{sten} graad.

Wij gaan dus uit van de vergelijking:

$$(1) \quad \dots x(x-1)(ax-1)\mathfrak{R}' - \\ - \{(\varrho-1)(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + a(\tau-1)x(x-1)\}\mathfrak{R} + \\ + Ax + B = 0.$$

Wij willen dit geval beschouwen als een uitbreiding van de toepassing C van Hoofdstuk II.

Terwijl men vroeger had:

$$L = x(x-1)$$

$$M = -\{(\varrho-1)(x-1) + (\sigma-1)x\},$$

heeft men thans:

$$L = x(x-1)(ax-1)$$

$$M = -\{(\varrho-1)(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + a(\tau-1)x(x-1)\}.$$

Voor $\tau = 1$ zijn L en M beide deelbaar door $ax - 1$.

Wij wenschen nu, dat voor $\tau = 1$ het oude geval te voorschijn treedt. Wij zullen daarom de grootheden A en B eerst later bepalen, in verband met de constante van de Stieltjesintegraal.

§ 2. Oplossing door een reeks naar afdalende machten gerangschikt.

In (1) is:

$$L = ax^3 - (a+1)x^2 + x.$$

$$M = (3 - \varrho - \sigma - \tau)ax^2 + \{a(\varrho + \tau - 2) + \varrho + \sigma - 2\}x + 1 - \varrho$$

Stellen wij:

$$\mathfrak{R} = \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

dus

$$\mathfrak{R}' = - \sum_1^{\infty} \frac{nc_n}{x^{n+1}},$$

dan wordt (1)

$$- \{ax^3 - (a+1)x^2 + x\} \sum_1^{\infty} \frac{nc_n}{x^{n+1}} + \\ + [(3-\varrho-\sigma-\tau)ax^2 + \{a(\varrho+\tau-2) + \varrho+\sigma-2\}x + 1-\varrho] \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{x^n} + \\ + Ax + B = 0.$$

Gelijkstelling der coëfficiënten van x , x^0 en $\frac{1}{x^{n-1}}$ geeft:

voor x : $-ac_1 + (3-\varrho-\sigma-\tau)ac_1 + A = 0,$

of wel $A = (\varrho + \sigma + \tau - 2)ac_1.$

Voor x^0 :

$$-2ac_2 + (a+1)c_1 + (3-\varrho-\sigma-\tau)ac_2 + \{a(\varrho+\tau-2) + \varrho+\sigma-2\}c_1 + B = 0$$

of:

$$B + \{a(\varrho + \tau - 1) + \varrho + \sigma - 1\}c_1 - (\varrho + \sigma + \tau - 1)ac_2 = 0.$$

Voor $\frac{1}{x^{n-1}}$:

$$-(n+1)ac_{n+1} + n(a+1)c_n - (n-1)c_{n-1} + (3-\varrho-\sigma-\tau)ac_{n+1} + \\ + \{a(\varrho + \tau - 2) + \varrho + \sigma - 2\}c_n + (1-\varrho)c_{n-1} = 0$$

of wel:

$$(2) \quad -(n+\varrho-2)c_{n-1} + \{a(n+\varrho+\tau-2) + n+\varrho+\sigma-2\}c_n - \\ - (n+\varrho+\sigma+\tau-2)ac_{n+1} = 0$$

als recurrente betrekking tusschen elke drie opeenvolgende c 's.

Voeren wij nu een c_0 in, zoodanig, dat deze betrekking ook geldt voor c_0 , c_1 en c_2 , dan moet

$$-(\varrho-1)c_0 + \{a(\varrho+\tau-1) + \varrho+\sigma-1\}c_1 - (\varrho+\sigma+\tau-1)ac_2 = 0$$

In verband met de boven opgestelde betrekking tusschen B , c_1 en c_2 volgt hieruit:

$$B = -(\varrho-1)c_0.$$

Wij vinden dus:

$$(3) \quad N(x) = (\varrho + \sigma + \tau - 2)ac_1x - (\varrho - 1)c_0.$$

§ 3. Oplossing door een Stieltjes' integraal.

In (1) is:

$$L = x(x-1)(ax-1),$$

$$M = -\{(\varrho-1)(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + a(\tau-1)x(x-1)\}.$$

Dan is:

$$m(-x) = e^{-\int \frac{M}{L} dx} = e^{\int \left\{ \frac{\varrho-1}{x} + \frac{\sigma-1}{x-1} + \frac{\alpha(\tau-1)}{ax-1} \right\} dx}$$

dus

$$m(-x) = Cx^{\varrho-1}(x-1)^{\sigma-1}(ax-1)^{\tau-1}.$$

of

$$m(x) = C(-x)^{\varrho-1}(-x-1)^{\sigma-1}(-ax-1)^{\tau-1}.$$

Als grenzen voor de integraal kunnen wij nemen -1 en 0 .

Men vindt dus voor $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R} = C \int_0^1 \frac{(-u)^{\varrho-1}(-u-1)^{\sigma-1}(-au-1)^{\tau-1}}{x+u} du$$

$$\mathfrak{R} = C \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1}(u-1)^{\sigma-1}(au-1)^{\tau-1}}{x-u} du$$

of als wij stellen:

$$C = (-1)^{\sigma+\tau} C'$$

$$\mathfrak{R} = C' \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1}(1-u)^{\sigma-1}(1-au)^{\tau-1}}{x-u} du.$$

Voor $\tau=1$ moet $\mathfrak{R}$ overgaan in de Stieltjes' integraal (22) blz. 39. Dus is

$$C' = \frac{\Gamma(\varrho+\sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)}$$

en dus

$$(4). \quad \mathfrak{R} = \frac{\Gamma(\varrho+\sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1}(1-u)^{\sigma-1}(1-au)^{\tau-1}}{x-u} du.$$

§ 4. Bepaling van de coëfficiënten van de reeks voor $\mathfrak{R}$ door middel van uitgebreide bètafuncties.

Er bestaat altijd een verband tusschen de constante, optredende in de Stieltjes' integraal, en de functie $N(x)$. De betrekking, dit verband aangevende, is te vinden uit de vergelijking:

$$L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0.$$

Nu krijgen wij voor $\mathfrak{R}'$ na differentiatie en partiële integratie, waarbij het geïntegreerde stuk wegvalt:

$$\mathfrak{R}' = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \int_0^1 du \frac{u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-2} (1-au)^{\tau-2}}{x-u} \times \\ \times \{(\varrho-1)(u-1)(au-1) + (\sigma-1)u(au-1) + (\tau-1)au(u-1)\}.$$

Gaan wij thans $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}'$ substitueeren in de vergelijking:

$$L\mathfrak{R}' + M\mathfrak{R} + N = 0,$$

dan komt er:

$$N = -\frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \left[(x-1)(ax-1)(\varrho-1) \int_0^1 du u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-1} (1-au)^{\tau-1} - \right. \\ \left. - x(ax-1)(\sigma-1) \int_0^1 du u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-2} (1-au)^{\tau-1} - \right. \\ \left. - x(x-1)\alpha^2(\tau-1) \int_0^1 du u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-1} (1-au)^{\tau-2} \right].$$

Wij zien hierin telkens optreden integralen van den vorm:

$$\int_0^1 du u^{p-1} (1-u)^{q-1} (1-au)^{r-1}.$$

Wij voeren daarvoor in:

$$(5) \quad B(p, q, r) = \int_0^1 du u^{p-1} (1-u)^{q-1} (1-au)^{r-1}$$

en gaan deze bestudeeren voor p, q en $r > 1$.

Nu is

$$(1-au)^{r-1} = 1 + \frac{1-r}{1} au + \frac{(1-r)(2-r)}{1 \cdot 2} \alpha^2 u^2 + \frac{(1-r)(2-r)(3-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 u^3 + \dots$$

(Deze reeks is convergent voor $|\alpha| < 1$, want reeds is $|u| < 1$),
dus

$$B(p, q, r) = B(p, q) + \frac{1-r}{1} \alpha B(p+1, q) + \frac{(1-r)(2-r)}{1 \cdot 2} \alpha^2 B(p+2, q) + \dots$$

Nu is

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q),$$

dus:

$$B(p, q, r) = B(p, q) \left\{ 1 + \frac{(1-r)p}{1 \cdot (p+q)} \alpha + \frac{(1-r)(2-r)p(p+1)}{1 \cdot 2 \cdot (p+q)(p+q+1)} \alpha^2 + \dots \right\}$$

of

$$(6) \quad B(p, q, r) = B(p, q) F(1-r, p, p+q, \alpha).$$

Dan is dus:

$$N(x) = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} [-(x-1)(ax-1)(\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau) + \\ + x(ax-1)(\sigma-1)B(\varrho, \sigma-1, \tau) + x(x-1)a^2(\tau-1)B(\varrho, \sigma, \tau-1)].$$

Aangezien $N(x)$ van den 1^{sten} graad is, moeten alle termen met x^2 wegvallen. Dus moet:

$$(7) (\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau) - (\sigma-1)B(\varrho, \sigma-1, \tau) - a(\tau-1)B(\varrho, \sigma, \tau-1) = 0.$$

Aan deze betrekking is voldaan, aangezien:

$$\int_0^1 d \{ u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-1} (1-au)^{\tau-1} \} = 0 \quad (\varrho > 1, \sigma > 1)$$

of:

$$(\varrho-1) \int_0^1 u^{\varrho-2} (1-u)^{\sigma-1} (1-au)^{\tau-1} - (\sigma-1) \int_0^1 u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-2} (1-au)^{\tau-1} - \\ - a(\tau-1) \int_0^1 u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-1} (1-au)^{\tau-2} = 0,$$

waaruit (7) volgt.

Wij vinden dus:

$$N(x) = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} [\{(\alpha+1)(\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau) - \\ - (\sigma-1)B(\varrho, \sigma-1, \tau) - a^2(\tau-1)B(\varrho, \sigma, \tau-1)\}x - (\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau)].$$

Nu kunnen wij volgens (7) $B(\varrho, \sigma, \tau-1)$ uitdrukken in $B(\varrho-1, \sigma, \tau)$ en $B(\varrho, \sigma-1, \tau)$.

Dan is:

$$N(x) = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} [\{(\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau) + (\alpha-1)(\sigma-1)B(\varrho, \sigma-1, \tau)\}x - \\ - (\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau)].$$

Aan den anderen kant is:

$$N(x) = (\varrho + \sigma + \tau - 2)ac_1x - (\varrho-1)c_0,$$

dus is:

$$c_0 = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} B(\varrho-1, \sigma, \tau)$$

en

$$(\varrho + \sigma + \tau - 2)ac_1 = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \times \\ \times \{(\varrho-1)B(\varrho-1, \sigma, \tau) + (\alpha-1)(\sigma-1)B(\varrho, \sigma-1, \tau)\},$$

dus is volgens (6)

$$\begin{aligned}
 (\varrho + \sigma + \tau - 2)ac_1 &= \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \{(\varrho - 1)B(\varrho - 1, \sigma)F(1 - \tau, \varrho - 1, \varrho + \sigma - 1, \alpha) + \\
 &\quad + (\alpha - 1)(\sigma - 1)B(\varrho, \sigma - 1)F(1 - \tau, \varrho, \varrho + \sigma - 1, \alpha)\} \\
 &= \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\varrho + \sigma - 1)} \{F(1 - \tau, \varrho - 1, \varrho + \sigma - 1, \alpha) + \\
 &\quad + (\alpha - 1)F(1 - \tau, \varrho, \varrho + \sigma - 1, \alpha)\}.
 \end{aligned}$$

Nu geldt in 't algemeen:

$$(8) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, z) + (z - 1)F(\alpha, \beta + 1, \gamma, z) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma} zF(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, z),$$

gelijk gemakkelijk uit de coëfficiënten van z^0 , z en z^n (voor $n \geq 2$) is aan te toonen.

Passen wij dit toe op

$$F(1 - \tau, \varrho - 1, \varrho + \sigma - 1, \alpha) + (\alpha - 1)F(1 - \tau, \varrho, \varrho + \sigma - 1, \alpha)$$

dan verkrijgen wij:

$$(\varrho + \sigma + \tau - 2)c_1 = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\varrho + \sigma - 1)} \frac{\varrho + \sigma + \tau - 2}{\varrho + \sigma - 1} F(1 - \tau, \varrho, \varrho + \sigma, \alpha)$$

dus

$$c_1 = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} B(\varrho, \sigma) F(1 - \tau, \varrho, \varrho + \sigma, \alpha)$$

$$c_1 = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} B(\varrho, \sigma, \tau).$$

Vergelijken wij deze uitdrukking van c_1 met die van c_0

$$c_0 = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} B(\varrho - 1, \sigma, \tau)$$

dan zien wij, dat alleen in de B-functie ϱ vervangen is door $\varrho - 1$.

Bewijzen wij thans, dat ook algemeen geldt:

$$(9) \quad \dots \dots c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} B(n + \varrho - 1, \sigma, \tau).$$

Wil dit juist zijn, dan moet volgens de recurrente betrekking (2) tusschen de c 's, ook waar zijn

$$\begin{aligned}
 &-(n + \varrho - 2)B(n + \varrho - 2, \sigma, \tau) + \\
 &+ \{\alpha(n + \varrho + \tau - 2) + n + \varrho + \sigma - 2\}B(n + \varrho - 1, \sigma, \tau) = \\
 &= (n + \varrho + \sigma + \tau - 2)\alpha B(n + \varrho, \sigma, \tau)
 \end{aligned}$$

of volgens (6):

$$-(n+\rho-2)B(n+\rho-2, \sigma)F(1-\tau, n+\rho-2, n+\rho+\sigma-2, \alpha) + \\ + \{\alpha(n+\rho+\tau-2) + n+\rho+\sigma-2\}B(n+\rho-1, \sigma)F(1-\tau, n+\rho-1, n+\rho+\sigma-1, \alpha) = \\ = (n+\rho+\sigma+\tau-2)\alpha B(n+\rho, \sigma)F(1-\tau, n+\rho, n+\rho+\sigma, \alpha).$$

of:

$$-(n+\rho+\sigma-2)F(1-\tau, n+\rho-2, n+\rho+\sigma-2, \alpha) + \\ + \{\alpha(n+\rho+\tau-2) + n+\rho+\sigma-2\}F(1-\tau, n+\rho-1, n+\rho+\sigma-1, \alpha) = \\ = \frac{(n+\rho+\sigma+\tau-2)(n+\rho-1)}{n+\rho+\sigma-1}\alpha F(1-\tau, n+\rho, n+\rho+\sigma, \alpha).$$

Nu geldt algemeen:

$$(10) -\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \{z(\beta-\alpha+1) + \gamma\}F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, z) = \\ = \frac{(\gamma-\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma+1}zF(\alpha, \beta+2, \gamma+2, z),$$

gelijk weer uit de coëfficiënten van z^0 , z en z^n (voor $n \geq 2$) is aan te toonen.

Substitueeren wij in (10)

$$\alpha = 1-\tau, \quad \beta = n+\rho-2, \quad \gamma = n+\rho+\sigma-2, \quad z = \alpha$$

dan verkrijgen wij de betrekking tusschen

$$F(1-\tau, n+\rho-2, n+\rho+\sigma-2, \alpha), \\ F(1-\tau, n+\rho-1, n+\rho+\sigma-1, \alpha) \text{ en } F(1-\tau, n+\rho, n+\rho+\sigma, \alpha).$$

Wanneer dus de betrekking (9) juist is voor c_{n-1} en c_n , dan is zij dit ook voor c_{n+1} . Nu geldt zij voor c_0 en c_1 , dus voor alle c 's.

Laten wij ten slotte zien, dat de waarden van c_n overeenkomen met die van de Stieltjes' integraal.

Nu is:

$$\frac{1}{x-u} = \frac{1}{x} + \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} + \dots,$$

dus is de coëfficiënt van x^{-n} in

$$\mathfrak{K} = \frac{\Gamma(\rho+\sigma)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{u^{\rho-1}(1-u)^{\sigma-1}(1-au)^{\tau-1}}{x-u} du,$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\rho+\sigma)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)} \int_0^1 u^{n+\rho-2}(1-u)^{\sigma-1}(1-au)^{\tau-1} du,$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\rho+\sigma)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)} B(n+\rho-1, \sigma, \tau)$$

in overeenstemming met (9).

Uit c_n en c_{n+1} is te vinden $r_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

Dan is nl.:

$$r_n = \frac{B(n + \rho, \sigma, \tau)}{B(n + \rho - 1, \sigma, \tau)} = \frac{B(n + \rho, \sigma)}{B(n + \rho - 1, \sigma)} \frac{F(1 - \tau, n + \rho, n + \rho + \sigma, \alpha)}{F(1 - \tau, n + \rho - 1, n + \rho + \sigma - 1, \alpha)}.$$

Nu is

$$B(n + \rho, \sigma) = \frac{n + \rho - 1}{n + \rho + \sigma - 1} B(n + \rho - 1, \sigma),$$

dus

$$(11) \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = r_n = \frac{n + \rho - 1}{n + \rho + \sigma - 1} \frac{F(1 - \tau, n + \rho, n + \rho + \sigma, \alpha)}{F(1 - \tau, n + \rho - 1, n + \rho + \sigma - 1, \alpha)}.$$

§ 5. Bepaling van het polynoom Ω_n .

In Hoofdstuk I § 4 en 7 hebben wij bewezen, dat de graad van Ω_n gelijk is aan $l - 2$ of $m - 1$. L en M zijn hier respectievelijk van den graad 3 en 2. Ω_n is dus van den 1^{sten} graad.

Het polynoom Ω_n kan aldus worden voorgesteld:

$$(12) \quad \dots \dots \dots \Omega_n = g_0 x + g_1.$$

Trachten wij thans de coëfficiënten g_0 en g_1 te bepalen.

De eerste gebroken vorm, door welken wij

$$\Re = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \dots$$

kunnen benaderen is: $\frac{c_1}{x - \frac{c_2}{c_1}}$.

Wij gaan nu Ω_1 uitrekenen:

Steeds is (zie Hoofdstuk I § 2)

$$\Omega_n = L(Q_n P_n' - P_n Q_n') + M P_n Q_n + N Q_n^2.$$

Nu is

$$\begin{aligned} P_1 &= c_1 & P_1' &= 0 \\ Q_1 &= x - \frac{c_2}{c_1} & Q_1' &= 1, \end{aligned}$$

terwijl L, M en N de waarden hebben zooals in § 2 is aangegeven, nl.:

$$L = ax^3 - (a + 1)x^2 + x.$$

$$M = (3 - \rho - \sigma - \tau)ax^2 + \{a(\rho + \tau - 2) + \rho + \sigma - 2\}x + 1 - \rho.$$

$$N = (\rho + \sigma + \tau - 2)ac_1 x - (\rho - 1)c_0.$$

Dan is dus:

$$\begin{aligned}\Omega_1 = & -\{\alpha x^3 - (\alpha + 1)x^2 + x\}c_1 + \\ & + [(3 - \rho - \sigma - \tau)\alpha x^2 + \{\alpha(\rho + \tau - 2) + \rho + \sigma - 2\}x + 1 - \rho](c_1 x - c_2) + \\ & + \{(\rho + \sigma + \tau - 2)\alpha c_1 x + (1 - \rho)c_0\} \left\{ x^2 - 2\frac{c_2}{c_1}x + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right\}.\end{aligned}$$

Nu is Ω_n van den 1^{sten} graad, dus moeten de coëfficiënten van x^3 en x^2 gelijk nul zijn.

De coëfficiënt van x^3 is:

$$-\alpha c_1 + \alpha c_1(3 - \rho - \sigma - \tau) + \alpha c_1(\rho + \sigma + \tau - 2) = 0.$$

De coëfficiënt van x^2 is:

$$\begin{aligned} & (\alpha + 1)c_1 - \alpha c_2(3 - \rho - \sigma - \tau) + \\ & \{\alpha(\rho + \tau - 2) + \rho + \sigma - 2\}c_1 - 2(\rho + \sigma + \tau - 2)\alpha c_2 + (1 - \rho)c_0 \\ \text{of} \end{aligned}$$

$$-(\rho - 1)c_0 + \{\alpha(\rho + \tau - 1) + \rho + \sigma - 1\}c_1 - (\rho + \sigma + \tau - 1)\alpha c_2 = 0$$

zie (2) blz. 47.

De coëfficiënt g_0 van x is:

$$\begin{aligned} g_0 = & -c_1 - \{\alpha(\rho + \tau - 2) + \rho + \sigma - 2\}c_2 + (1 - \rho)c_1 + \\ & + (\rho + \sigma + \tau - 2)\alpha\frac{c_2^2}{c_1} - 2(1 - \rho)\frac{c_0 c_2}{c_1}.\end{aligned}$$

Nu is c_0 uit te drukken in c_1 en c_2 . Wij vinden dan:

$$(13) \quad g_0 = c_2 \left[-\rho\frac{c_1}{c_2} + \{\alpha(\rho + \tau) + \rho + \sigma\} - (\rho + \sigma + \tau)\alpha\frac{c_2}{c_1} \right].$$

Ten slotte vinden wij voor den bekenden term:

$$g_1 = -c_2(1 - \rho) + (1 - \rho)c_0\frac{c_2^2}{c_1^2}$$

of bij vervanging van c_0 door c_1 en c_2

$$(14) \quad g_1 = c_2 \left[+(\rho - 1) - \{\alpha(\rho + \tau - 1) + \rho + \sigma - 1\}\frac{c_2}{c_1} + (\rho + \sigma + \tau - 1)\alpha\frac{c_2^2}{c_1^2} \right].$$

Deze beide waarden van g_0 en g_1 houden ten nauwste verband met de recurrente betrekking (2). Merken wij verder op, dat een factor f in Ω geen invloed heeft op de differentiaalvergelijking van LAGUERRE. Afgezien van dezen factor f , zal dan waarschijnlijk algemeen gelden:

$$(15) \quad g_0 = -(n + \rho - 1) \frac{1}{r_n} + \{\alpha(n + \rho + \tau - 1) + n + \rho + \sigma - 1\} - \\ - (n + \rho + \sigma + \tau - 1) \alpha r_n.$$

$$(16) \quad g_1 = (n + \rho - 2) - \{\alpha(n + \rho + \tau - 2) + n + \rho + \sigma - 2\} r_n + \\ + (n + \rho + \sigma + \tau - 2) \alpha r_n^2$$

waarin $r_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

Voor 't bewijs zie men de volgende §.

De waarden van g_0 en g_1 zijn ook anders te schrijven, g_0 bevat nl. den factor α , terwijl g_1 expliciet geen α bevat, doch alleen in de r grootheden afhankelijk is van α .

De waarde van g_0 kan aldus geschreven worden:

$$g_0 = \frac{1}{c_{n+1}} [-(n + \rho - 1) c_n + \{\alpha(n + \rho + \tau - 1) + n + \rho + \sigma - 1\} c_{n+1} - \\ - (n + \rho + \sigma + \tau - 1) \alpha r_n].$$

Volgens vergelijking (2) kan men hiervoor schrijven

$$g_0 = \frac{1}{c_{n+1}} (n + \rho + \sigma + \tau - 1) \alpha c_{n+2} - (n + \rho + \sigma + \tau - 1) \alpha r_n$$

$$(15') \quad \dots g_0 = (n + \rho + \sigma + \tau - 1) (r_{n+1} - r_n) \alpha.$$

Evenzoo heeft men:

$$g_1 = (n + \rho - 2) - \frac{r_n}{c_n} [\{\alpha(n + \rho + \tau - 2) + n + \rho + \sigma - 2\} c_n + \\ + (n + \rho + \sigma + \tau - 2) \alpha c_{n+1}] = (n + \rho - 2) - \frac{r_n}{c_n} (n + \rho - 2) c_{n-1}.$$

$$(16') \quad \dots g_1 = (n + \rho - 2) \left(1 - \frac{r_n}{r_{n-1}}\right).$$

§ 6. Bepaling van het polynoom H_n .

Uit Hoofdstuk I § 4 en 7 volgt, dat H_n thans van den 2^{den} graad is.

Verder hebben wij in § 7 bewezen, dat

$$h_0 = n g_0 \{m_0 - (n + 1) l_0\}$$

zijnde h_0 , l_0 en m_0 de coëfficiënten van de hoogste machten in H_n , L en M .

Nu is $l_0 = \alpha$ en $m_0 = (3 - \rho - \sigma - \tau) \alpha$,
dus $h_0 = -n(n + \rho + \sigma + \tau - 2) \alpha g_0$.

Het polynoom H_n is dus:

$$(17) \quad H_n = -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 2)ag_0 + h_1x + h_2.$$

De coëfficiënten van H_n zullen wij bepalen door weer eerst na te gaan H_1 .

Wij weten nl., dat $y = x - \frac{c_2}{c_1}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $n = 1$.

De differentiaalvergelijking van LAGUERRE is:

$$(18) \quad \dots \dots \dots py'' + qy' + ry = 0,$$

waarin:

$$p = \{ax^3 - (a + 1)x^2 + x\} (g_0x + g_1),$$

$$q = [(\varrho + \sigma + \tau)ax^2 - \{a(\varrho + \tau) + \varrho + \sigma\}x + \varrho] (g_0x + g_1) - \{ax^3 - (a + 1)x^2 + x\} g_0,$$

$$r = h_0x^2 + h_1x + h_2.$$

Nu is

$$y = x - \frac{c_2}{c_1}, \text{ dus } y' = 1, \quad y'' = 0,$$

$$\text{dus} \quad q + r\left(x - \frac{c_2}{c_1}\right) = 0.$$

Dit geeft:

$$[(\varrho + \sigma + \tau)ax^2 - \{a(\varrho + \tau) + \varrho + \sigma\}x + \varrho] (g_0x + g_1) - \{ax^3 - (a + 1)x^2 + x\} g_0 + (h_0x^2 + h_1x + h_2)\left(x - \frac{c_2}{c_1}\right) = 0.$$

In deze vergelijking moeten dus de coëfficiënten van x^3 , x^2 , x en x^0 gelijk nul zijn.

Dit geeft:

$$(\varrho + \sigma + \tau)ag_0 - ag_0 + h_0 = 0,$$

$$(\varrho + \sigma + \tau)ag_1 - \{a(\varrho + \tau) + \varrho + \sigma\}g_0 + (a + 1)g_0 - h_0\frac{c_2}{c_1} + h_1 = 0,$$

$$- \{a(\varrho + \tau) + \varrho + \sigma\}g_1 - \varrho g_0 - g_0 - h_1\frac{c_2}{c_1} + h_2 = 0,$$

$$\varrho g_1 - h_2\frac{c_2}{c_1} = 0.$$

Deze vier vergelijkingen zijn voldoende om de verhouding der coëfficiënten g_0 , g_1 , h_0 , h_1 en h_2 te bepalen. Daar echter g_0 en g_1 reeds bekend zijn, laten we de derde vergelijking achterwege. Overigens zij opgemerkt, dat als men h_0 , h_1 en h_2 elimineert, men een betrekking tusschen g_0 en g_1 verkrijgt, waaraan voldaan is.

Voor h_0, h_1, h_2 vinden wij:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= -(\varrho + \sigma + \tau - 1) \alpha g_0, \\
 (19) \quad h_1 &= -(\varrho + \sigma + \tau) \alpha g_1 + \{ \alpha (\varrho + \tau - 1) + \varrho + \sigma - 1 \} g_0 - \\
 &\quad - (\varrho + \sigma + \tau - 1) \alpha g_0 \frac{c_2}{c_1}. \\
 (20) \quad h_2 &= \varrho g_1 \frac{c_1}{c_2}.
 \end{aligned}$$

Nu is de algemeene waarde van h_0 bekend volgens (17).

In verband hiermee stellen wij op de *algemeene waarden* van h_1 en h_2 , nl.:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad . \quad . \quad . \quad h_0 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 2) \alpha g_0, \\
 (22) \quad . \quad . \quad . \quad h_1 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 1) \alpha g_1 + \\
 &\quad + n \{ \alpha (n + \varrho + \tau - 2) + n + \varrho + \sigma - 2 \} g_0 - n(n + \varrho + \sigma + \tau - 2) \alpha g_0 r_n, \\
 (23) \quad . \quad . \quad . \quad h_2 &= n(n + \varrho - 1) g_1 \frac{1}{r_n}.
 \end{aligned}$$

h_0 bevat den factor α^2 , aangezien g_0 den factor α bevat.

h_1 bevat den factor α , hetgeen aldus is in te zien:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 1) \alpha g_1 + \\
 &\quad + n g_0 \frac{1}{c_n} [\{ \alpha (n + \varrho + \tau - 2) + n + \varrho + \sigma - 2 \} c_n - (n + \varrho + \sigma + \tau - 2) \alpha c_{n+1}], \\
 h_1 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 1) \alpha g_1 + n g_0 \frac{1}{c_n} (n + \varrho - 2) c_{n-1}, \\
 h_1 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 1) \alpha g_1 + n(n + \varrho - 2) g_0 \frac{1}{r_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

g_0 heeft den factor α , g_1 niet, h_1 heeft dus ook den factor α . h_2 bevat geen α .

Wij zijn nu in staat om h_0, h_1, h_2 in de grootheden r uit te drukken. Dit geeft:

$$\begin{aligned}
 (21') \quad h_0 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 2)(n + \varrho + \sigma + \tau - 1)(r_{n+1} - r_n) \alpha^2, \\
 (22') \quad h_1 &= -n(n + \varrho + \sigma + \tau - 1)(n + \varrho - 2) \left(1 - \frac{r_{n+1}}{r_{n-1}} \right) \alpha, \\
 (23') \quad h_2 &= -n(n + \varrho - 1)(n + \varrho - 2) \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right).
 \end{aligned}$$

§ 7. *Bewijs voor de juistheid der gevonden waarden voor Ω_n en H_n .*

Gaan wij na, wat de waarden van g_0, g_1, h_0, h_1 en h_2 in de vergelijkingen (15'), (16'), (21'), (22') en 23' worden in de drie bijzondere gevallen $\tau = 1$, $\alpha = 1$ en $\alpha = 0$.

1^e. $\tau = 1$.

Uit (11) volgt:
$$r_n = \frac{n + \varrho - 1}{n + \varrho + \sigma - 1}.$$

Verder is:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{\alpha\sigma}{n + \varrho + \sigma - 1} & g_1 &= -\frac{\sigma}{n + \varrho + \sigma - 1} \\ h_0 &= -n\alpha^2\sigma & h_1 &= 2n\alpha\sigma & h_2 &= -n\sigma. \end{aligned}$$

Dan is

$$\Omega = g_0x + g_1 = \frac{\sigma}{n + \varrho + \sigma - 1} (ax - 1)$$

$$H = h_0x^2 + h_1x + h_2 = -n\sigma(ax - 1)^2.$$

Voor $N(x)$ volgt uit (3) en (9): $(\varrho + \sigma - 1)(ax - 1)$.

De vergelijking (1) is dan deelbaar door $ax - 1$ en wordt:

$$x(x-1)\mathfrak{R}' - \{(\varrho-1)(x-1) + (\sigma-1)x\}\mathfrak{R} + \varrho + \sigma - 1 = 0.$$

De vergelijking (18) is dan deelbaar door $(ax - 1)^2$ en wordt na herleiding:

$$x(x-1)Q'' + \{-\varrho + (\varrho + \sigma)x\}Q' - n(n + \varrho + \sigma - 1)Q = 0.$$

Deze vergelijkingen komen overeen met die van H. II toepassing C, gelijk het geval moest zijn.

2^e. $\alpha = 1$.

Nu is altijd:

$$(24) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Uit (11) volgt dan:

$$r_n = \frac{n + \varrho - 1}{n + \varrho + \sigma + \tau - 2},$$

$$\text{terwijl} \quad c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma) \Gamma(\sigma + \tau - 1)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(n + \varrho - 1)}{\Gamma(n + \varrho + \sigma + \tau - 2)}.$$

Verder is:

$$g_0 = \frac{\sigma + \tau - 1}{n + \varrho + \sigma + \tau - 2}, \quad g_1 = -\frac{\sigma + \tau - 1}{n + \varrho + \sigma + \tau - 2}.$$

$$h_0 = -n(\sigma + \tau - 1), \quad h_1 = 2n(\sigma + \tau - 1), \quad h_2 = -n(\sigma + \tau - 1).$$

Dan is

$$\Omega = \frac{\sigma + \tau - 1}{n + \varrho + \sigma + \tau - 2} (x - 1).$$

$$H = -n(\sigma + \tau - 1)(x - 1)^2.$$

1) WHITTAKER, Modern Analysis, § 136, p. 241.

Voor $N(x)$ vinden wij:

$$\frac{\Gamma(\varrho + \sigma) \Gamma(\sigma + \tau - 1)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\varrho + \sigma + \tau - 2)} (x - 1).$$

De vergelijking (1) is nu deelbaar door $x - 1$ en wordt:

$$x(x - 1) \mathfrak{R}' - \{(\varrho - 1)(x - 1) + (\sigma + \tau - 2)x\} \mathfrak{R} + \frac{\Gamma(\varrho + \sigma) \Gamma(\sigma + \tau - 1)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\varrho + \sigma + \tau - 2)} = 0.$$

Vergelijken wij deze vergelijking met (17) van H. II, waarin σ vervangen is door $\sigma + \tau - 1$, dan blijkt dat van deze vergelijking de oplossing gegeven kan worden door de volgende Stieltjes' integraal:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\varrho + \sigma + \tau - 2} \frac{\Gamma(\varrho + \sigma) \Gamma(\sigma + \tau - 1)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\varrho + \sigma + \tau - 2)} \times \\ \times \frac{\Gamma(\varrho + \sigma + \tau - 1)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma + \tau - 1)} \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma+\tau-2}}{x-u} du$$

of

$$\mathfrak{R} = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma+\tau-2}}{x-u} du$$

en deze laatste komt overeen met de Stieltjes' integraal, die wij verkrijgen door in (4) $\alpha = 1$ te substitueeren.

De vergelijking (12) is deelbaar door $(x - 1)^2$ en wordt:

$$x(x - 1) Q'' + \{(\varrho + \sigma + \tau - 1)x - \varrho\} Q' - n(n + \varrho + \sigma + \tau - 2) Q = 0.$$

Dit is in overeenstemming met de vergelijking (23) van H. II, wanneer wij weer σ vervangen door $\sigma + \tau - 1$.

3^e. $\alpha = 0$.

Dan is

$$r_n = \frac{n + \varrho - 1}{n + \varrho + \sigma - 1}$$

$$g_0 = 0 \quad g_1 = - \frac{\sigma}{n + \varrho + \sigma - 1}$$

$$h_0 = 0 \quad h_1 = 0 \quad h_2 = -n\sigma.$$

De vergelijkingen (1) en (18) gaan dan over in de vergelijkingen (17) en (23) van H. II.

De gevonden waarden van g_0, g_1, h_0, h_1 en h_2 zijn dus juist voor $n=1, a=0, a=1$ en $\tau=1$. De waarde van Ω_n kan dus van de gevondene alleen verschillen door een term van den vorm

$$a(a-1)(\tau-1)(n-1)X.$$

Wij zullen nu bewijzen, dat deze term niet kan bestaan.

Nu is altijd

$$c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} B(n + \varrho - 1, \sigma, \tau)$$

of:

$$c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(n + \varrho - 1)}{\Gamma(n + \varrho + \sigma - 1)} F(1 - \tau, n + \varrho - 1, n + \varrho + \sigma - 1, a).$$

Is τ geheel en positief, dan is c_n een polynoom in a van den graad $\tau - 1$. Dat c_n in 't algemeen in a van den graad $\tau - 1$ is, blijkt wanneer wij letten op de Stieltjes' integraal voor $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K} = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{u^{\varrho-1} (1-u)^{\sigma-1} (1-au)^{\tau-1}}{x-u} du,$$

waarin $(1-au)^{\tau-1}$ voorkomt.

Is nu evenals in § 3 v. H. I

$$P_n = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,$$

$$Q_n = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n$$

en nemen wij voor β_0 een functie van den graad nul in a , dan zijn volgens de vergelijkingen, die de α 's en β 's bepalen, alle β 's van den graad nul en alle α 's van den graad $\tau - 1$, waarbij, aangezien wij hier met een Stieltjes' integraal te maken hebben, steeds $\alpha_0 = 0$ is.

Dan is dus

$$P_n \text{ van den graad } \tau - 1 \text{ in } a,$$

$$Q_n \text{ " " " nul " } a.$$

Nu is steeds:

$$f\Omega_n = L(P_n'Q_n - P_nQ_n') + MP_nQ_n + NQ_n^2.$$

Aangezien L en M van den eersten graad in a zijn, zijn $L(P_n'Q_n - P_nQ_n')$ en MP_nQ_n van den graad τ in a . Dit is ook het geval met NQ_n^2 , omdat Q_n van den graad nul in a is en N van den graad τ .

$f\Omega_n$ is dus ook van den graad τ in α .

Kiezen wij nu voor f een functie van den graad $\tau - 1$ in α , dan is Ω_n van den eersten graad in α . Quadratische termen in α kunnen dus niet optreden, de factor X van den bewusten term moet dus nul zijn en hiermee is aangetoond, dat de gevonden waarde van Ω_n juist is.

Wij moeten thans nog bewijzen, dat ook H geen correctieterm kan hebben.

Nu is:
$$\Omega = g_0 x + g_1,$$

waarin g_0 den factor α bevat. α komt dus voor, gecombineerd met x .

De vergelijking van LAGUERRE is:

$$L\Omega Q'' + [(L' - M)\Omega - L\Omega']Q' + HQ = 0.$$

Hierin zijn de verschillende termen quadratisch in α , en wel blijkt uit de waarden van L en M , dat ook daarin steeds α gecombineerd met x optreedt, hetgeen ook het geval is met de verschillende termen $L\Omega$ en $(L' - M)\Omega - L\Omega'$. Dan moet dus ook in H elke α met een x gepaard gaan, dus α^2 met x^2 .

Nu is echter de juistheid van de coëfficiënt h_0 van x reeds bewezen, waaruit volgt, dat ook H geen anderen term heeft.

§ 8. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor Q_n .

De differentiaalvergelijking (18) wordt thans:

$$(25) \quad \{ \alpha x^3 - (\alpha + 1)x^2 + x \} (g_0 x + g_1) Q'' + \\ + \{ (\varrho + \sigma + \tau) \alpha x^2 - (\alpha (\varrho + \tau) + \varrho + \sigma) x + \varrho \} (g_0 x + g_1) - \\ - \{ \alpha x^3 - (\alpha + 1)x^2 + x \} g_0 \} Q' + (h_0 x^2 + h_1 x + h_2) Q = 0.$$

Stellen wij nu:

$$Q_n = x^n + p_n x^{n-1} + \dots$$

$$\text{dus } Q_n' = n x^{n-1} + (n-1) p_n x^{n-2} + \dots$$

$$Q_n'' = n(n-1) x^{n-2} + (n-1)(n-2) p_n x^{n-3} + \dots$$

dan geeft substitutie in (25) en gelijkstelling van de coëfficiënten der gelijknamige machten, 't volgende:

De coëfficiënt van x^{n+2} is nul volgens het verband tusschen g_0 en h_0 , zie (21).

De coëfficiënt van x^{n+1} geeft:

$$\begin{aligned} & n(n-1)\{ag_1 - (a+1)g_0\} + (n-1)(n-2)ag_0p_n + \\ & + n[(\varrho + \sigma + \tau)ag_1 - \{a(\varrho + \tau) + \varrho + \sigma\}g_0 + (a+1)g_0] + \\ & + (n-1)p_n\{(\varrho + \sigma + \tau)ag_0 - ag_0\} + h_1 + p_nh_0 = 0 \end{aligned}$$

of:

$$\begin{aligned} & nag_1(n + \varrho + \sigma + \tau - 1) - ng_0\{(n + \varrho + \tau - 2)a + n + \varrho + \sigma - 2\} + h_1 = \\ & = -p_n\{(n-1)ag_0(n + \varrho + \sigma + \tau - 3) + h_0\}. \end{aligned}$$

Nu kan men in 't eerste lid h_1 elimineeren, daar deze afhangt van g_0 en g_1 volgens (22), evenzoo in het tweede lid h_0 .

Men verkrijgt dan:

$$-n(n + \varrho + \sigma + \tau - 2)ag_0r_n = p_nag_0(2n + \varrho + \sigma + \tau - 3).$$

Hieruit volgt p_n , nl.:

$$(26) \quad \dots \quad p_n = -n \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 2}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 3} r_n.$$

Voor $\tau = 1$ wordt dit:

$$\begin{aligned} p_n &= -n \frac{n + \varrho + \sigma - 1}{2n + \varrho + \sigma - 2} \frac{n + \varrho - 1}{n + \varrho + \sigma - 1} \text{ zie blz. 53 (11)} \\ &= -n \frac{n + \varrho - 1}{2n + \varrho + \sigma - 2} \end{aligned}$$

in overeenstemming met de waarde van p_n in toepassing C H. II, blz. 41.

$$\text{Uit} \quad p_n = -n \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 2}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 3} r_n$$

$$\text{volgt} \quad p_{n-1} = -(n-1) \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 3}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 5} r_{n-1}$$

en hieruit de grootheid l_n uit:

$$Q_n = (x + l_n)Q_{n-1} + k_nQ_{n-2},$$

$$\text{nl.} \quad l_n = p_n - p_{n-1}.$$

dus

$$(27) \quad l_n = (n-1) \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 3}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 5} r_{n-1} - n \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 2}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 3} r_n.$$

§ 9. De differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$.

Gaan wij in de oorspronkelijke vergelijking (1) substitueeren:

$$\bar{R} = \frac{\bar{R} + c_1}{x}$$

dus

$$\bar{R}' = \frac{\bar{R}'}{x} - \frac{\bar{R} + c_1}{x^2}$$

dan wordt deze:

$$L \left\{ \frac{\bar{R}'}{x} - \frac{\bar{R} + c_1}{x^2} \right\} + M \frac{\bar{R} + c_1}{x} + N = 0,$$

of na vermenigvuldiging met x

$$x(x-1)(ax-1)\bar{R}' - (x-1)(ax-1)(\bar{R} + c_1) - \\ - \{(\varrho-1)(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + a(\tau-1)x(x-1)\} \times \\ \times (\bar{R} + c_1) + (\varrho + \sigma + \tau - 2)ac_1x^2 - (\varrho-1)c_0x = 0,$$

of

$$x(x-1)(ax-1)\bar{R}' - \{\varrho(x-1)(ax-1) + \\ + (\sigma-1)x(ax-1) + a(\tau-1)x(x-1)\} \bar{R} + \bar{N} = 0.$$

Hierin is:

$$\bar{N} = -c_1 \{ \varrho(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + \\ + a(\tau-1)x(x-1) - (\varrho + \sigma + \tau - 2)ax^2 \} - (\varrho-1)c_0x$$

of

$$\bar{N} = [\{(\varrho + \tau - 1)a + \varrho + \sigma - 1\}c_1 - (\varrho-1)c_0]x - \varrho c_1.$$

Aangezien c_0 , c_1 en c_2 samenhangen volgens de recurrente betrekking (2) vinden wij:

$$(28) \quad \bar{N} = (\varrho + \sigma + \tau - 1)ac_2x - \varrho c_1.$$

De vergelijking voor $\bar{R}$ is dan:

$$(29) \quad x(x-1)(ax-1)\bar{R}' - \{\varrho(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + \\ + a(\tau-1)x(x-1)\} \bar{R} + (\varrho + \sigma + \tau - 1)ac_2x - \varrho c_1 = 0.$$

Vergelijken wij deze vergelijking met (1) in verband met (3), dan blijkt, dat ϱ is vervangen door $\varrho + 1$ en de indices van de c 's één hoger zijn geworden. Deze verhooging van de indices van de c 's kunnen wij ook verklaren als gevolg van de vervanging van ϱ door $\varrho + 1$.

Volgens (9) is nl.:

$$c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} B(n + \varrho - 1, \sigma, \tau).$$

Vervangen wij hierin ϱ door $\varrho + 1$ en noemen we dit $\bar{c}_n$, dan is:

$$\bar{c}_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma + 1)}{\Gamma(\varrho + 1) \Gamma(\sigma)} B(n + \varrho, \sigma, \tau)$$

of

$$\bar{c}_n = \frac{\varrho + \sigma}{\varrho} c_{n+1}.$$

Onze vergelijking (29) is nu aldus te schrijven:

$$x(x-1)(ax-1)\bar{\mathfrak{R}}' - \{\varrho(x-1)(ax-1) + (\sigma-1)x(ax-1) + \\ + \alpha(\tau-1)x(x-1)\}\bar{\mathfrak{R}} + (\varrho + \sigma + \tau - 1)\alpha \frac{\varrho}{\varrho + \sigma} \bar{c}_1 - \varrho \frac{\varrho}{\varrho + \sigma} \bar{c}_0 = 0.$$

$\bar{\mathfrak{R}}$ moet dus den factor $\frac{\varrho}{\varrho + \sigma}$ bevatten. De oplossing van de vergelijking in reeksvorm is dan:

$$\bar{\mathfrak{R}} = \frac{\varrho}{\varrho + \sigma} \sum_1^{\infty} \frac{\bar{c}_n}{x^n} = \sum_1^{\infty} \frac{c_{n+1}}{x^n},$$

waaruit blijkt, dat $\bar{\mathfrak{R}}$ uit $\mathfrak{R}$ kan ontstaan door de indices één te verhoogen. Dit is trouwens in overeenstemming met het bovengenoemde verband tusschen $\mathfrak{R}$ en $\bar{\mathfrak{R}}$, nl.:

$$\mathfrak{R} = \frac{\bar{\mathfrak{R}} + c_1}{x}.$$

De factor $\frac{\varrho}{\varrho + \sigma}$ in $\bar{\mathfrak{R}}$ heeft wel invloed op de tellers, doch niet op de noemers van de komende kettingbreuk. Dit blijkt ook hieruit, dat $\bar{r}_n$ dezen factor niet bevat. Wij hebben n.l.:

$$\bar{r}_n = \frac{\bar{c}_{n+1}}{\bar{c}_n} = \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = r_{n+1}.$$

Door de vervanging van ϱ door $\varrho + 1$ zijn wij in staat om dadelijk de differentiaalvergelijking van LAGUERRE voor $\bar{Q}_n$ op op te schrijven en de samenhangende grootheden $\bar{p}_n$ en $\bar{l}_n$.

Dan is

$$(30) \quad \bar{l}_n = (n-1) \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 2}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 4} r_n - n \frac{n + \varrho + \sigma + \tau - 1}{2n + \varrho + \sigma + \tau - 2} r_{n+1} \\ \text{vergelijk (27).}$$

§ 10. Kettingbreuk voor $\mathfrak{R}$.

Wij hebben dus:

$$\begin{aligned} l_n &= (n-1) \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-3}{2n+\varrho+\sigma+\tau-5} r_{n-1} - n \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-2}{2n+\varrho+\sigma+\tau-3} r_n = a_{2n-1} + a_{2n}, \\ \bar{l}_n &= (n-1) \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-2}{2n+\varrho+\sigma+\tau-4} r_n - n \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-1}{2n+\varrho+\sigma+\tau-2} r_{n+1} = a_{2n} + a_{2n+1}, \\ l_{n+1} &= n \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-2}{2n+\varrho+\sigma+\tau-3} r_n - (n+1) \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-1}{2n+\varrho+\sigma+\tau-1} r_{n+1} = a_{2n+1} + a_{2n+2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$l_n - \bar{l}_n = a_{2n-1} - a_{2n+1}.$$

Dan is op een constante na:

$$(31) \quad a_{2n-1} = -(n-1) \left\{ \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-2}{2n+\varrho+\sigma+\tau-4} r_n - \frac{n+\varrho+\sigma+\tau-3}{2n+\varrho+\sigma+\tau-5} r_{n-1} \right\} \quad (n \geq 2).$$

Evenzoo is:

$$\bar{l}_n - l_{n+1} = a_{2n} - a_{2n+2}$$

en is dus op de constante na:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (n+\varrho+\sigma+\tau-2) \left\{ \frac{n-1}{2n+\varrho+\sigma+\tau-4} - \frac{n}{2n+\varrho+\sigma+\tau-3} \right\} r_n \\ \text{of} \\ (32) \quad a_{2n} &= - \frac{(n+\varrho+\sigma+\tau-2)(n+\varrho+\sigma+\tau-3)}{(2n+\varrho+\sigma+\tau-3)(2n+\varrho+\sigma+\tau-4)} r_n \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Nemen wij $\tau=1$, dan vinden wij:

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= -(n-1) \left\{ \frac{n+\varrho+\sigma-1}{2n+\varrho+\sigma-3} \frac{n+\varrho-1}{n+\varrho+\sigma-1} - \frac{n+\varrho+\sigma-2}{2n+\varrho+\sigma-4} \frac{n+\varrho-2}{n+\varrho+\sigma-2} \right\} \\ &= - \frac{(n-1)(n+\sigma-2)}{(2n+\varrho+\sigma-4)(2n+\varrho+\sigma-3)}. \end{aligned}$$

Evenzoo:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= - \frac{(n+\varrho+\sigma-1)(n+\varrho+\sigma-2)}{(2n+\varrho+\sigma-3)(2n+\varrho+\sigma-2)} \frac{(n+\varrho-1)}{(n+\varrho+\sigma-1)} = \\ &= - \frac{(n+\varrho-1)(n+\varrho+\sigma-2)}{(2n+\varrho+\sigma-3)(2n+\varrho+\sigma-2)}. \end{aligned}$$

Deze waarden zijn in overeenstemming met die van toepassing C, Hoofdstuk II, blz. 43.

Nu zijn de eerste a 's:

$$a_1 = c_1 \quad a_2 = -\frac{c_2}{c_1} \quad a_3 = -\left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_1}\right)$$

en hieruit zien wij, dat de constante gelijk nul is.

De corresponderende kettingbreuk is nu:

$$(33) \quad \mathfrak{R} = \frac{c_1}{x} - \frac{\frac{c_2}{c_1}}{1} - \frac{\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_1}}{x} - \frac{\frac{\varrho + \sigma + \tau - 1}{\varrho + \sigma + \tau + 1} \frac{c_3}{c_2}}{1} -$$

$$- \frac{2 \left\{ \frac{\varrho + \sigma + \tau + 1}{\varrho + \sigma + \tau + 2} \frac{c_4}{c_3} - \frac{\varrho + \sigma + \tau}{\varrho + \sigma + \tau + 1} \frac{c_3}{c_2} \right\}}{x} -$$

$$- \frac{\frac{\varrho + \sigma + \tau + 1}{\varrho + \sigma + \tau + 3} \frac{\varrho + \sigma + \tau}{\varrho + \sigma + \tau + 2} \frac{c_4}{c_3}}{1} -$$

$$- \frac{3 \left\{ \frac{\varrho + \sigma + \tau + 2}{\varrho + \sigma + \tau + 4} \frac{c_5}{c_4} - \frac{\varrho + \sigma + \tau + 1}{\varrho + \sigma + \tau + 3} \frac{c_4}{c_3} \right\}}{x} -$$

$$- \frac{\frac{\varrho + \sigma + \tau + 2}{\varrho + \sigma + \tau + 5} \frac{\varrho + \sigma + \tau + 1}{\varrho + \sigma + \tau + 4} \frac{c_5}{c_4}}{1} -$$

$$- \frac{4 \left\{ \frac{\varrho + \sigma + \tau + 3}{\varrho + \sigma + \tau + 6} \frac{c_6}{c_5} - \frac{\varrho + \sigma + \tau + 2}{\varrho + \sigma + \tau + 5} \frac{c_5}{c_4} \right\}}{x} + \dots$$

enz.

Deze gaat voor $\tau = 1$ over in de kettingbreuk (26) van toepassing C, Hoofdstuk II.

Door contractie is uit (33) de geassocieerde kettingbreuk te verkrijgen.

Over de naderingsbreuken van de geassocieerde kettingbreuk kunnen wij 't volgende opmerken:

$\frac{P_1}{Q_1}$ stemt met de reeks overeen in $\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$ en bevat als verhouding van de c 's $\frac{c_2}{c_1}$.

$\frac{P_2}{Q_2}$ stemt met de reeks overeen in $\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \frac{c_4}{x^4}$ en bevat als laatste verhouding van de c 's $\frac{c_3}{c_2}$.

In 't algemeen:

$\frac{P_n}{Q_n}$ stemt met de reeks overeen in $\frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \dots + \frac{c_{2n}}{x^{2n}}$

en bevat als laatste verhouding van de c 's $\frac{c_{n+1}}{c_n}$.

§ 11. *Behandeling van het bijzondere geval*

$$\varrho = \sigma = \tau = 2, \alpha = -1.$$

In 't algemeen was onze vergelijking:

$$x(x-1)(\alpha x-1)\mathfrak{R}' - \{(\varrho-1)(x-1)(\alpha x-1) + (\sigma-1)x(\alpha x-1) + \alpha(\tau-1)x(x-1)\}\mathfrak{R}' + Ax + B = 0$$

waarin:

$$Ax + B = (\varrho + \sigma + \tau - 2)\alpha c_1 x - (\varrho - 1)c_0$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} B(n + \varrho - 1, \sigma, \tau)$$

$$B(n + \varrho - 1, \sigma, \tau) = B(n + \varrho - 1, \sigma) F(1 - \tau, n + \varrho - 1, n + \varrho + \sigma - 1, \alpha).$$

De hypergeometrische reeks F breekt af, wanneer τ geheel en positief is, en wel des te eerder naarmate τ kleiner is. Daar het geval $\tau = 1$ reeds behandeld is, nemen wij thans $\tau = 2$. Nemen wij verder $\alpha = -1$, dan heeft onze differentiaal-vergelijking drie singuliere punten en wel in $x = -1$, $x = 0$ en $x = +1$.

Voor $\tau = 2$, $\alpha = -1$ verkrijgen wij:

$$c_n = \frac{\Gamma(\varrho + \sigma)}{\Gamma(\varrho)\Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(n + \varrho - 1)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(n + \varrho + \sigma - 1)} F(-1, n + \varrho - 1, n + \varrho + \sigma - 1, -1)$$

of

$$c_n = \frac{\varrho(\varrho + 1) \dots (\varrho + \sigma - 1)}{(n + \varrho - 1)(n + \varrho) \dots (n + \varrho + \sigma - 1)} (2n + 2\varrho + \sigma - 2).$$

Als σ even is, valt de factor $2n + 2\varrho + \sigma - 2$ weg tegen een der factoren in den noemer.

Nemen wij weer het eenvoudigste geval $\sigma = 2$, dan is

$$c_n = 2 \frac{\varrho(\varrho + 1)}{(n + \varrho - 1)(n + \varrho + 1)}.$$

In dit geval verkrijgen wij dan:

$$r_n = \frac{(n + \varrho - 1)(n + \varrho + 1)}{(n + \varrho)(n + \varrho + 2)}$$

$$a_{2n-1} = -(n-1) \left\{ \frac{(n+\varrho-1)(n+\varrho+1)}{(2n+\varrho)(n+\varrho)} - \frac{(n+\varrho-2)(n+\varrho)}{(2n+\varrho-1)(n+\varrho-1)} \right\} \quad \text{zie (31)}$$

$$a_{2n} = -\frac{(n + \varrho + 1)^2 (n + \varrho - 1)}{(n + \varrho)(2n + \varrho)(2n + \varrho + 1)} \quad \text{zie (32).}$$

Nemen wij ten slotte ook nog $\varrho = 2$ dan is in het geval van $\varrho = \sigma = \tau = 2$, $\alpha = -1$:

$$c_n = \frac{3 \cdot 4}{(n+1)(n+3)}$$

$$r_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)}$$

$$a_{2n-1} = -(n-1) \left\{ \frac{(n+3)}{2(n+2)} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} \right\}$$

$$a_{2n} = -\frac{(n+3)^2}{2(n+2)(2n+3)}$$

In dit geval wordt onze vergelijking:

$$x(x-1)(x+1)\mathfrak{R}' - (3x^2-1)\mathfrak{R} + 2(3x+2) = 0.$$

De oplossing van deze vergelijking kunnen wij geven als Stieltjes' integraal, als reeks of als kettingbreuk.

Wij vinden dan respectievelijk:

$$\mathfrak{R} = 3 \cdot 2 \int_0^1 \frac{u(1-u)(1+u)}{x-u} du$$

$$\mathfrak{R} = 3 \cdot 4 \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{1}{x} + \frac{1}{3 \cdot 5} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot 6} \frac{1}{x^3} + \dots \right\}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\frac{3}{2}}{x} - \frac{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}}{1} - \frac{\frac{5}{2 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}}{x} - \frac{\frac{5^2}{2 \cdot 4 \cdot 7}}{1} -$$

$$- \frac{2 \left\{ \frac{6}{2 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} \right\}}{x} - \frac{\frac{6^2}{2 \cdot 5 \cdot 9}}{1} - 3 \left\{ \frac{7}{2 \cdot 6} - \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 9} \right\} - \dots$$

Nemen wij $x=1$ dan vinden wij voor de integraal

$$\mathfrak{R} = 5.$$

Het getal 5 kan dus op de volgende manieren geschreven worden als reeks of als kettingbreuk:

$$5 = 3.4 \left\{ \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \dots \right\}$$

$$5 = \frac{3}{\frac{2}{1}} - \frac{2.4}{\frac{3.5}{1}} - \frac{5}{\frac{2.4}{1} - \frac{2.4}{3.5}} - \frac{5^2}{\frac{2.4.7}{1}} - 2 \left\{ \frac{6}{\frac{2.5}{1} - \frac{3.5}{4.7}} \right\} - \dots$$

waarvan de eerste betrekking is af te leiden uit de waarde van de volgende reeks

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots = \frac{3}{4}.$$

Door aan ϱ , σ , τ en α andere waarden te geven kan men meerdere betrekkingen afleiden.

Noot.

Kettingbreuk voor e.

Wanneer een differentiaalvergelijking is gegeven, kunnen wij vragen naar de oplossing als kettingbreuk.

In 't algemeen kunnen wij elke functie trachten te ontwikkelen in een kettingbreuk door eerst na te gaan aan welke differentiaalvergelijking de functie voldoet. Ook constanten als π en e kan men in een kettingbreuk ontwikkelen door eerst bijvoorbeeld een functie van e te ontwikkelen. Opdat een zekere functie volgens onze methode kan ontwikkeld worden in een kettingbreuk is noodig, dat de functie ontwikkeld kan worden naar negatieve machten van x , hierbij beginnende met $\frac{1}{x}$.

Nu is

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

dus

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{x^4} + \dots$$

en

$$e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{x^4} + \dots$$

$e^{\frac{1}{x}} - 1$ is dus een functie welke ontwikkeld kan worden naar negatieve machten, hierbij beginnende met $\frac{1}{x}$.

Nemen wij

$$\mathfrak{R} = e^{\frac{1}{x}} - 1,$$

dan is

$$\mathfrak{R}' = -e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2},$$

dus voldoet $\mathfrak{R}$ aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$x^2 \mathfrak{R}' + \mathfrak{R} + 1 = 0.$$

Nu is

$$L = x^2 \quad M = 1 \quad N = 1$$

De differentiaalvergelijking van LAGUERRE is:

$$x^2 Q'' + (2x - 1) Q' + HQ = 0.$$

Uit de hoogste machten volgt $H = -n(n+1)$, dus

$$x^2 Q'' + (2x - 1) Q' - n(n+1) Q = 0.$$

Nemen wij aan

$$Q = x^n + p_n x^{n-1} + q_n x^{n-2} + \dots$$

dus

$$Q' = nx^{n-1} + (n-1)p_n x^{n-2} + (n-2)q_n x^{n-3} + \dots$$

$$Q'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_n x^{n-3} + (n-2)(n-3)q_n x^{n-4} + \dots$$

Dit, gesubstitueerd, geeft:

$$(n-1)(n-2)p_n + 2(n-1)p_n - n - n(n+1)p_n = 0,$$

dus

$$p_n = -\frac{1}{2}$$

en

$$(n-2)(n-3)q_n + 2(n-2)q_n + \frac{1}{2}(n-1) - n(n+1)q_n = 0,$$

dus

$$q_n = \frac{n-1}{4(2n-1)}.$$

Nu is $p_n = -\frac{1}{2}$, $p_{n-1} = -\frac{1}{2}$, dus $l_n = 0$. $n \geq 2$.

Verder is

$$Q_n = xQ_{n-1} + k_n Q_{n-2},$$

dus

$$x^n - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{4(2n-1)}x^{n-2} + \dots =$$

$$= x\left(x^{n-1} - \frac{1}{2}x^{n-2} + \frac{n-2}{2(2n-3)}x^{n-3} + \dots\right) + k_n(x^{n-2} + \dots),$$

waaruit volgt:

$$\frac{n-1}{4(2n-1)} = \frac{n-2}{4(2n-3)} + k_n,$$

dus

$$k_n = \frac{1}{4(2n-3)(2n-1)} \text{ voor } n \geq 2.$$

Nu is $k_1 = 1$ en $l_1 = -\frac{1}{2}$.

Wij krijgen dus de kettingbreuk

$$e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3}}{x} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 5}}{x} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 7}}{x} + \dots$$

of

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3}}{x} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 5}}{x} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 7}}{x} + \dots$$

Voor $x = 1$ wordt dit

$$e = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3}}{1} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 5}}{1} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 7}}{1} + \dots$$

of

$$e = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{13} + \dots$$

De naderende breuken zijn:

$$\frac{3}{1} \quad \frac{19}{7} \quad \frac{193}{71} \quad \frac{2721}{1001} \dots$$

Vergelijken wij hiermede de kettingbreuk, die P. geeft, p. 134:

$$e = \{2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots\},$$

waarvan de naderende breuken zijn:

$$\frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{11}{4} \quad \frac{19}{7} \quad \frac{87}{32} \quad \frac{106}{39} \quad \frac{193}{71} \quad \frac{1264}{465} \quad \frac{1457}{536} \quad \frac{2721}{1001} \dots$$

De naderende breuken, welke naderende breuken zijn voor onze kettingbreuk, zijn onderstreept.

P. geeft op dezelfde bladzijde een uitdrukking voor $\sqrt[q]{e}$, dit houdt verband met onze $e^{\frac{1}{x}}$.

De kettingbreuk voor e kunnen wij ook aldus schrijven:

$$e = 1 + \frac{2}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \dots$$

en hieruit leiden wij 't volgende af:

$$e - 1 = \frac{2}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \dots$$

dus

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \dots$$

$$\frac{2}{e-1} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \dots$$

Tellen wij bij beide leden 1 op, dan is:

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \dots$$

dus

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \dots$$

zie P., p. 353.

Ook voor $\frac{\pi}{4}$ kan men aldus een kettingbreuk vinden door te beschouwen:

$$\mathfrak{A} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

en later $x=1$ te nemen.

Wij vinden voor $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{9}{7} + \frac{16}{9} + \frac{25}{11} + \dots$$

zie P., p. 351.



