Over eene functie voorgesteld door eene reeks van Dirichlet

Over eene functie voorgesteld door eene reeks van Dirichlet

N. G. W. H. Beeger

Over eene functie voorgesteld door eene reeks van Dirichlet

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. ERNST COHEN HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 9 JUNI 1916 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR DOOR

NICOLAAS GEORGE WIJNAND HENRI BEEGER

GEBOREN TE UTRECHT

GEBROEDERS HOITSEMA — 1916 — GRONINGEN

AAN MIJNE VROUW.

Bij het eindigen van mijne universitaire studie, maak ik van de gelegenheid gebruik U, mijne Heeren Hoogleeraren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, en verder allen, die tot mijne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, mijnen hartelijken dank te betuigen.

In 't bijzonder gevoel ik mij gedrongen U, Hooggeleerde KAPTEYN, *hooggeachte Promotor, te danken voor Uwe boeiende colleges, die grooten invloed gehad hebben op de richting waarin mijne studie zich ten slotte heeft bewogen, en voor de bereidwilligheid waarmede Gij mij steeds zijt tegemoet getreden.*

Ook aan U, Hooggeleerde DE VRIES, *ben ik grooten dank verschuldigd voor mijne wiskundige vorming. Uwe schitterende lessen zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.*

ERRATA.

Bladz.	19,	regel	14	van	boven,	staat	§ 1,	moet zijn	§ 2.
„	20.	„	3	„	onder,	„	(2) § 1,	„ „	(4) § 2.
„	32,	„	11	„	„	„	(2) van § 12,	„ „	van § 11.

INHOUD.

INLEIDING.

Alle reeksen van de gedaante

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{-\lambda_n s}$$

waarin s een complexe veranderlijke voorstelt en a_n en λ_n reëele getallen zijn, noemt men „reeksen van Dirichlet".

Bijzondere gevallen van deze reeksen zijn het eerst gebruikt door Lejeune-Dirichlet bij zijne onderzoekingen over het klassenaantal der kwadratische vormen met een gegeven determinant en bij het bewijs van het theorema over het aantal priemgetallen die voorkomen in een rekenkundige reeks. Sindsdien is er een uitgebreide litteratuur over verschenen, welke men uitvoerig kan vinden in het „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" van E. Landau. Dit werk geeft een volledige uiteenzetting van de theorie dier reeksen. Ik zal er steeds naar verwijzen als „Handbuch". Verder is in 1915 verschenen: „The general theory of Dirichlet's series" by G. H. Hardy and Marcel Riesz. Dit geeft ook de algemeene theorie, hoewel minder uitgebreid, benevens eenige nieuwere gezichtspunten over de sommabiliteit.

De theorie der bedoelde reeksen is echter nog verre van volledig. Men kent nog niet de noodige en voldoende voorwaarden waaraan een functie moet voldoen om in een reeks van Dirichlet ontwikkeld te kunnen worden. Of anders gezegd, men weet niet in 't algemeen door welke analytische kenmerken van de functie de convergentielijn van hare reeks van Dirichlet bepaald wordt. Dat het niet de polen zijn, is uit voorbeelden bekend.

Het doel van dit proefschrift is de studie der functie die bepaald wordt door de reeks

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^s} + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \cdot \frac{1}{5^s} + \cdots\cdots$$

Het is een reeks van Dirichlet waarbij

$$\lambda_n = \log n$$

$$a_{2n} = 0 \qquad a_{2n+1} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}.$$

In de jaren 1910 en 1911 is het onderzoek dezer functie als prijsvraag uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap. Antwoorden zijn er niet op ingekomen. Enkele hoofdzaken van het onderzoek zijn door mij reeds vroeger behandeld in Deel X van het Nieuw Archief, blz. 416 (1913).

De variabele s zal ik, waar zulks noodig is, steeds voorstellen door

$$s = \sigma + it.$$

HOOFDSTUK I.

Onderzoek van de reeks en de coëfficienten.

§ 1. *De reeks* $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^s} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^s} + \dots$

Zooals reeds in de inleiding is gezegd, is dit een reeks van Dirichlet. Zij convergeert dus in een halfvlak. Om de convergentielijn te bepalen, kan worden gebruik gemaakt van het elementaire convergentie-kenmerk [1])

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$$

door dit toe te passen op de reeks der moduli

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^\sigma} + \dots$$

Men vindt dan dat de reeks convergeert voor

$$\sigma > \tfrac{1}{2}.$$

Hiermede is gevonden dat de convergentielijn

$$\sigma = \tfrac{1}{2}$$

is en dat de reeks in het gebied $\sigma > \frac{1}{2}$ absoluut convergeert.

Volgens de algemeene theorie der Dirichletsche reeksen stelt de reeks in het genoemde gebied dus eene uniforme functie voor, terwijl men, om de afgeleide dezer functie te krijgen, de

---

[1]) Eenvoudiger door gebruik te maken van de, in § 3 afgeleide, benaderde waarden voor a_{2n+1}.

reeks term voor term differentieeren mag. De functie stel ik voor door D(s); dan is dus

$$(1) \quad . \; . \; . \quad D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, (2n-1)}{2 \, . \, 4 \, . \, . \, . \, . \, 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)^s}$$

$$(2) \quad . \; . \quad D'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, (2n-1)}{2 \, . \, 4 \, . \, . \, . \, . \, 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)^s} \log (2n+1)$$

voor

$$\sigma > \tfrac{1}{2}.$$

§ 2. *Eigenschappen van de coëfficienten a_{2n+1}.*

Zooals gemakkelijk is in te zien heeft men:

$$(1) \quad . \; . \; . \quad a_{2n+1} = \frac{1 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, (2n-1)}{2 \, . \, 4 \, . \, . \, . \, . \, 2n} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n} \, (n!)^2}$$

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n} \, a_{2n-1}$$

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a_{2n+1} < a_{2n-1}.$$

Met het oog op latere toepassingen zullen hier nog andere eigenschappen worden afgeleid.

$$(4) \quad . \; . \; . \quad a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = (2n+1) \, a_{2n+1}.$$

Bewijs: Nemen we aan, zooals voor kleine waarden van m door berekening te controleeren is, dat (3) geldt voor alle waarden van n tot en met m, dan is dus

$$1 + a_3 + \ldots + a_{2m+1} = (2m+1) \, a_{2m+1}$$

Hieruit volgt:

$$1 + a_3 + \ldots + a_{2m+1} + a_{2m+3} = (2m+1) \, a_{2m+1} + a_{2m+3} =$$

(volgens (2))

$$= (2m+1) \frac{2m+2}{2m+1} \, a_{2m+3} + a_{2m+3}$$

$$= (2m+3) \, a_{2m+3}.$$

De formule (4) geldt dus ook voor $n = m + 1$ en derhalve voor alle waarden van n.

Deze eigenschap laat zich ook bewijzen door gebruik te maken van een der beide integralen:

$$a_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi.$$

De afleiding dezer formule zal ik hier niet geven; men vindt ze in de gewone leerboeken over integraalrekening.

Door middel van de binomiaalformule vindt men de ontwikkeling:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)}} = (1-x)^{-1/2} = 1 + a_3 x + a_5 x^2 + \ldots.$$

Hiermede kan de volgende betrekking worden afgeleid:

$$(5) \quad . \; . \; . \quad a_1\, a_{2n-1} + a_3\, a_{2n-1} + \ldots\, a_{2n+1}\, a_1 = 1.$$

Verhef beide leden van de ontwikkeling in 't kwadraat:

$$\frac{1}{1-x} = \Sigma\,(a_1\, a_{2n-1} + \ldots + a_{2n+1}\, a_1)\, x^{n-1}.$$

Ook is, volgens het binomium:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots.$$

Door coëfficientengelijkstelling vindt men (5).

Nog eene andere betrekking moet hier worden bewezen:

$$(6) \quad 1 + 3a_3 + 5a_5 + \ldots + (2n+1)\, a_{2n+1} = \tfrac{1}{3}(2n+1)(2n+3)\, a_{2n-1}.$$

Neem weer aan dat de formule geldt voor alle waarden van n van 1 tot en met m. Dan is

$$1 + 3a_3 + \ldots + (2m+1)\, a_{2m+1} = \tfrac{1}{3}(2m+1)(2m+3)\, a_{2m+1}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} & 1 + 3a_3 + \ldots + (2m+3)\, a_{2m+3} = \\ & = \tfrac{1}{3}(2m+1)(2m+3)\, a_{2m+1} + (2m+3)\, a_{2m+3} \\ & = \left\{\tfrac{1}{3}(2m+1)(2m+3)\frac{2m+2}{2m+1} + (2m+3)\right\} a_{2m+3} \\ & = (2m+3)\left(\frac{2m+2}{3} + 1\right) a_{2m+3} \\ & = \tfrac{1}{3}(2m+3)(2m+5)\, a_{2m+3}. \end{aligned}$$

De formule geldt dus ook voor $n = m + 1$ en is derhalve algemeen geldig.

§ 3. *Benaderde waarden der coëfficienten* a_{2n+1}.

Om benaderde uitdrukkingen te vinden voor de coëfficienten, kan gebruik gemaakt worden van productontwikkelingen die men afleidt uit het bekende product voor de sinusfunctie:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\dots$$

Door eerst te kiezen $x=\frac{\pi}{2}$ wordt de, eveneens bekende, formule van Wallis gevonden:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n=\infty}\frac{2^2 \,.\, 4 \dots . (2n)^2}{3^2 \,.\, 5^2 \dots . (2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Deze kan ook aldus, worden geschreven:

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n=\infty}\frac{1\,.\,3}{2^2}\cdot\frac{3\,.\,5}{4^2}\cdot\frac{5\,.\,7}{6^2}\dots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}.$$

Van iedere breuk uit het rechterlid is de teller kleiner dan den noemer. Alle breuken zijn dus kleiner dan de eenheid. Het product wordt dus kleiner, als n grooter wordt. Hieruit volgt:

$$\frac{2}{\pi}<\frac{1\,.\,3}{2^2}\cdot\frac{3\,.\,5}{4^2}\dots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

of

$$<\left\{\frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\dots 2n}\right\}^2(2n+1)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}}<\frac{1\,.\,3\,.\,5\dots 2n-1}{2\,.\,4\,.\,6\dots 2n},$$

zoodat

$$a_{2n+1}>\sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}}$$

of

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad a_{2n+1}>\frac{0{,}797}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

Door nu te nemen $x=\frac{\pi}{4}$, in het bovenstaande product voor $\sin x$, komt er:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{8^2}\right)\dots$$

of

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{2}=\lim_{n=\infty}\frac{3\,.\,5}{4^2}\cdot\frac{7\,.\,9}{8^2}\dots\frac{(4n-1)(4n+1)}{(4n)^2}.$$

We schrijven

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{5.7}{4.8} \cdot \frac{9.11}{8.12} \cdots \frac{(4n-3)(4n-1)}{(4n-4)4n} \cdot \frac{4n+1}{4n}$$

Omdat $\lim\limits_{n=\infty} \frac{4n+1}{4n} = 1$, is ook

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{5.7}{4.8} \cdots \frac{(4n-3)(4n-1)}{(4n-4)4n}.$$

De breuken uit het rechterlid, behalve $\frac{3}{4}$, zijn alle grooter dan de eenheid, want de teller is $(4n-3)(4n-1) = 16n^2 - 16n + 3$ en de noemer $(4n-4) . 4n = 16n^2 - 16n$.

Hieruit volgt dat

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} > \frac{3}{4} \cdot \frac{5.7}{4.8} \cdots \frac{(4n-3)(4n-1)}{4n-4.4n}$$

of

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} > \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{4n-1}{4n} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{8} \cdots \frac{4n-2}{4n-4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} > \frac{1.3.5\ldots(4n-1)}{2.4.6\ldots 4n} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n-2}$$

$$> \frac{1.3.5\ldots(4n-1)}{2.4.6\ldots 4n} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} . (2n-1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} > a_{4n+1}\, a_{2n-1}\, (2n-1)$$

$$a_{4n+1} < \frac{\sqrt{2}}{\pi\, a_{2n-1}\,(2n-1)}.$$

Door gebruik te maken van (1) volgt hieruit:

$$a_{4n+1} < \frac{\sqrt{2}}{\pi . \sqrt{\frac{2}{\pi(2n-1)}}\,(2n-1)}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{(2n-1)}}{2n-1}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

Gemakkelijk laat zich bewijzen dat voor $n \geq 7$

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)}} < \sqrt{\frac{2\frac{1}{4}}{4n+1}}$$

want hieruit volgt:

$$4n + 1 < 2\tfrac{1}{4}(2n - 1)$$

$$3\tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}n.$$

Dus is

$$a_{4n+1} < \sqrt{\frac{2\frac{1}{4}}{\pi(4n+1)}}.$$

Door directe berekening vindt men dat deze ongelijkheid ook geldt voor $n = 1, 2 \dots 6$.

Uit de afgeleide grens volgt

$$\frac{4n+1}{4n+2} \cdot a_{4n+1} < \frac{4n+1}{(4n+2)\sqrt{\pi(2n-1)}}$$

of, daar

$$\frac{4n+1}{4n+2} a_{4n+1} = a_{4n+3},$$

$$a_{4n+3} < \frac{4n+1}{(4n+2)\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

Voor $\geqq 7$ is weer

$$\frac{4n+1}{(4n+2)\sqrt{(2n-1)}} < \frac{1}{\sqrt{(4n+3)}}$$

dus

$$a_{4n+3} < \sqrt{\frac{2\frac{1}{4}}{\pi(4n+3)}}.$$

Door direkte berekening blijkt deze formule ook te gelden voor $n = 1, 2 \dots 6$.

Hiermede is dus in 't algemeen aangetoond dat

$$a_{2n+1} < \sqrt{\frac{2\frac{1}{4}}{\pi(2n+1)}}$$

of

(2) . . . . . . $$a_{2n+1} < \frac{0{,}8463}{\sqrt{(2n+1)}}$$

alleen voor $n = 1$ geldt dit niet, want $a_3 = \frac{1}{2}$.

Verder is blijkbaar

(3) . . $$\lim_{n=\infty} a_{2n+1} = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}} = \lim_{n=\infty} \frac{0{,}797}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

HOOFDSTUK II.

Integraal-vorm en onderzoek der functie voor geheele waarden van de variabele.

§ 4. *Integraal-vorm voor de functie.*

Ten einde een integraalvorm voor de functie te vinden, maken we gebruik van de bekende integraal

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{(2n+1)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(2n-1)\,x}\, x^{s-1}\, dx$$

die gemakkelijk is af te leiden uit de bekende integraal voor de Γ-functie

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-x}\, dx$$

door daarin x te vervangen door $(2n+1)\,x$.

Stellen we in de reeks

$$\sum_0^\infty \frac{1\,.\,3\,...\,(2n-1)}{2\,.\,4\,...\,2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)^s}$$

voor $\frac{1}{(2n+1)^s}$ de integraal uit (1) in de plaats, dan krijgen we

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^\infty \frac{1\,.\,3\,...\,2n-1}{2\,.\,4\,...\,2n} \cdot \int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-(2n+1)\,x}\, dx.$$

Om aan te toonen dat we hier het Σ-teeken en de integraal mogen verwisselen, beschouwen we de reeks

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1\,.\,3\,...\,2n-1}{2\,.\,4\,...\,2n} (e^{-x})^{2n+1}.$$

Het is een machtreeks met e^{-x} als variabele.

Stellen we $e^{-x}=y$ dan gaat de reeks over in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3\ldots.2n-1}{2.4\ldots.2n}\, y^{2n+1}.$$

Men vindt nu, door middel van 't binomium van Newton:

$$(4)\quad \ldots\ldots \quad \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3\ldots.2n-1}{2.4\ldots.2n}\, y^{2n+1}.$$

De reeks in 't tweede lid convergeert blijkbaar voor $|y| < 1$ en wel uniform zooals alle machtreeksen. Daaruit volgt dat de reeks (3) ook uniform convergeert voor alle positieve waarden van x. De reeks (3) mag dus term voor term geïntegreerd worden, m. a. w. in (2) mag Σ met $\int$ verwisseld worden. Doen we dit zoo vinden we, door meteen van (4) gebruik te maken:

$$D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, x^{s-1}}{\sqrt{(1-e^{-2x})}}\, dx$$

of

$$(5)\quad \ldots\ldots \quad D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\, dx.$$

Eerst dienen we nu na te gaan in welk gebied deze integraal een zin heeft. Het eenige punt waarin de integrand onbepaald zou kunnen toenemen is het punt $x=0$ want door de macht van e in den noemer, nadert hij voor $x=\infty$ zeer sterk tot 0 voor iedere waarde van s. In de omgeving van $x=0$ kunnen we den integrand aldus ontwikkelen:

$$\int \frac{x^{s-1}\, dx}{\sqrt{\left(2x+\frac{4x^2}{2!}+\ldots\right)}} = \int \frac{x^{s-3/2}}{\sqrt{\left(2+\frac{4x}{2!}+\ldots\right)}}\, dx.$$

Volgens een bekende regel zal dus de integraal een zin hebben in 't geval dat

$$R(s) > \tfrac{1}{2}.$$

Hieruit blijkt derhalve dat de integraalvorm (5) de functie in hetzelfde gebied voorstelt als de reeks van Dirichlet.

Substitueeren we nog in de integraal

$$e^{-x} = \sin t$$

hetgeen geoorloofd is omdat x loopt van 0 tot ∞.

We vinden

$$(6)\quad D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log \frac{1}{\sin t}\right\}^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log \frac{1}{\cos t}\right\}^{s-1} dt.$$

§ 5. *Onderzoek van de functie voor geheele positieve waarden van de variabele s.*

Door middel van de laatste integraal der vorige paragraaf zijn we in staat om een en ander te weten te komen van de waarden der functie voor geheele positieve waarden van de veranderlijke. We stellen dus $s = n$ en vinden

$$D(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n-1} (\log \sin t)^{n-1} dt = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin t)^{n-1} dt.$$

De reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log \sin t)^n}{n!} x^n = e^{x \log \sin t} = (\sin t)^x$$

convergeert uniform voor alle waarden van x tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ en mag dus term voor term geïntegreerd worden.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$$

of

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D(n+1) x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt.$$

De laatste integraal kunnen we in Γ-functies uitdrukken. Daartoe substitueeren we

$$\sin t = \sqrt{y}$$

waardoor de integraal overgaat in de Eulersche integraal:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{x-1}{2}} (1-y)^{-1/2} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Volgens een bekende formule kunnen we hiervoor schrijven

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

omdat $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

We hebben dus gevonden:

$$(1)\;.\;.\;\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{D}\,(n+1)\,x^n=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}\qquad |x|<1.$$

Deze vergelijking stelt ons in staat om uit eigenschappen van de functie in het rechterlid, eigenschappen van de coëfficienten uit het linkerlid af te leiden. Vervangen we x door $-x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{D}\,(n+1)\,x^n=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{-x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{x}{2}+1\right)}$$

Volgens de bekende formule der Γ-functies is

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

en dus

$$\Gamma\left(\frac{-x+1}{2}\right)=\Gamma\left(1-\frac{x+1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{x+1}{2}\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(-\frac{x}{2}+1\right)=\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{x}{2}\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Door deze uitdrukkingen te substitueeren vinden we:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{D}\,(n+1)\,x^n=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\frac{x}{2}\pi}{\sin\frac{x+1}{2}\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

De sinus in den noemer werken we uit en door toepassing van de formule

$$a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

schrijven we

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{x}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right).$$

Er komt dan:

$$(2) \quad . \quad . \quad \sum_{n=0}^{\infty} D(n+1)\,x^n = \sqrt{\pi}\,.\,\frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

Vergelijken we deze uitkomst met (1) zoo blijkt dat het in (2) optredende quotient van Γ-functies juist het omgekeerde is van dat uit (1). Dus door (1) en (2) te vermenigvuldigen valt dit quotient weg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D(n+1)\,x^n \,.\, \sum_{n=0}^{\infty} D(n+1)\,x^n = \frac{1}{2}\,\pi\,.\,\frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,\pi.$$

Volgens de bekende ontwikkeling van tg $k\pi$ is:

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,\pi = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!}\,B_n\,\pi^{2n-1}\,x^{2n-2}$$

waarin B_n de Bernoulliaansche getallen voorstellen.

Dit substitueerende vinden we:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D(n+1)\,x^n \,.\, \sum_{n=0}^{\infty} D(n+1)\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!}\,B_n\,\pi^{2n}\,x^{2n-2}.$$

Na vermenigvuldiging van de (natuurlijk absoluut) convergeerende machtreeksen, krijgen we, door de coëfficienten van x^{2n-2} uit beide leden aan elkaar gelijk te stellen:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad D(1)D(2n-1) - D(2)D(2n-2) + \ldots.$$

$$\ldots. + D(2n-1)D(1) = \frac{2^{2n}-1}{(2n)!}\,\pi^{2n}\,B_n.$$

Hiermede hebben we een recurrente betrekking tusschen de D's gevonden.

Deelen we beide leden door π^{2n} dan toont de formule aan dat het linkerlid een rationaal getal is.

Uit de reeks van Dirichlet volgt verder:

$$(4) \quad . \ D(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} = \operatorname{bg} \sin 1 = \frac{\pi}{2}$$

en uit formule (6) van de vorige paragraaf

$$(5) \quad . \ . \ D(2) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt = \frac{\pi}{2} \log 2 = 1{,}08856 \ldots .$$

volgens de bekende integraal die door Euler is bepaald.

Door middel van (3) vindt men hiermede voor $n = 2$

$$D(1)\,D(3) - D(2)\,D(2) + D(3)\,D(1) =$$

$$= \frac{15}{4\,!} \pi^4 B_2 = \frac{15}{24} \cdot \frac{1}{30} \pi^4 = \frac{1}{48} \pi^4.$$

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} D(3) - \frac{\pi^2}{4} (\log 2)^2 = \frac{1}{48} \pi^4.$$

$$(6) \quad . \ . \ D(3) = \frac{1}{48} \pi^3 + \frac{\pi}{4} (\log 2)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x)^2\, dx.$$

Eene andere recurrente betrekking kan op soortgelijke wijze worden afgeleid. Ik ga weer uit van (1) en differentieer naar x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n\, D(n+1)\, x^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) \Gamma'\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma'\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}.$$

Door invoering van de notatie

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x)$$

kan hiervoor geschreven worden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . nD(n+1)\, x^{n-1} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left\{ \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}+1\right) \right\} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

of

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\mathrm{D}(n+1)\,x^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right\}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{D}(n+1)\,x^n.$$

We gaan nu de functie

$$f(x) = \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

in eene reeks naar opklimmende machten van x ontwikkelen. Dat deze ontwikkeling mogelijk is volgt uit het feit dat de functie in de omgeving van den oorsprong regulier is; want voor $x=0$ is

$$\psi\left(\tfrac{1}{2}\right) - \psi\left(1\right) = -2\log 2 = \text{eindig}$$

zooals we verderop zullen bewijzen.

Volgens de formule van Mac-Laurin is

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots.$$

waarbij

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}\left\{\psi^{(n)}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \psi^{(n)}(1)\right\}.$$

Bij de theorie van de Γ-functie wordt afgeleid de formule

$$\psi(x+1) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{y^x - 1}{y-1}\,dy.$$

De volledige afleiding zou ons te ver voeren maar we kunnen haar gemakkelijk verkrijgen uit de meer bekende formule (zie de leerboeken)

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x) = \int_0^{\infty}\left\{e^{-\alpha} - \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right\}\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Hieruit volgt namelijk:

$$\psi(x+1) - \psi(1) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha(x+1)}}{1-e^{-\alpha}}\,d\alpha.$$

Stellen we nu $e^{-\alpha} = y$ dan gaat deze in de aangegeven formule over. Er volgt uit, door n-malige differentiatie:

$$\psi^{(n)}(x+1) = \int_0^1 \frac{y^x(\log y)^n}{y-1}\,dy$$

dus

$$\psi^{(n)}\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int_0^1 \frac{y^{-1/2}(\log y)^n}{y-1}\,dy \quad \text{en} \quad \psi^{(n)}(1)=\int_0^1 \frac{(\log y)^n}{y-1}\,dy.$$

dus

$$f^{(n)}(0)=\frac{1}{2^n}\int_0^1 \frac{(y^{-1/2}-1)(\log y)^n}{y-1}\,dy$$

of

$$f^{(n)}(0)=-\frac{1}{2^n}\int_0^1 \frac{(\log y)^n\,dy}{(\sqrt{y}+1)\sqrt{y}}.$$

Hierin substitueeren we

$$\log y=-2t:$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\,2\int_0^\infty \frac{t^n\,e^{-t}\,dt}{e^{-t}+1}.$$

Den integrand ontwikkelen we:

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\,.\,2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^\infty t^n\,e^{-kt}\,dt.$$

Volgens een reeds meer gebruikte integraal is:

$$\int_0^\infty t^n\,e^{-kt}\,dt=\frac{n!}{k^{n+1}}$$

dus

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}2\,.\,n!\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^{n+1}}=$$

$$=(-1)^{n+1}2\,.\,n!\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\right\}$$

We weten verder dat

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}=\zeta(n+1)$$

waarbij ζ de functie van Riemann voorstelt.

Ten slotte hebben we derhalve gevonden:

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}2\,.\,n!\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\zeta(n+1) \qquad n>0.$$

Volgens de reeds gebruikte integraalformule voor $\psi(x+1)$ is

$$f(0)=\psi(\tfrac{1}{2})-\psi(1)=\int\limits_0^1 \frac{y^{-1/2}-1}{y-1}\,dy=-2\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t}=-2\log 2.$$

Uit dit alles volgt nu de ontwikkeling die we zochten:

$$\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}+1\right)=-2\log 2+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\zeta(n+1)x^n.$$

We substitueeren dit in (7):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \, . \, n\,\mathrm{D}(n+1)\,x^{n-1}=$$

$$=\left(-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\zeta(n+1)x^n\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{D}(n+1)x^n.$$

Door, na uitvoering van de vermenigvuldiging, de coëfficienten van x^{n-2} uit beide leden aan elkaar gelijk te stellen, vinden we de betrekking:

$$(8)\quad (n-1)\mathrm{D}(n)=\mathrm{D}(n-1)\log 2+\sum_{k=1}^{n-2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\zeta(k+1)\,\mathrm{D}(n-k-1).$$

De theorie der ζ-functie geeft verder nog

$$\zeta(2m)=\frac{(2\pi)^{2m}}{4m\,(2m-1)\,!}\,\mathrm{B}_m$$

maar een dergelijke somformule is voor $\zeta(2m+1)$ niet bekend, zoodat we met formule (8) alle D's niet achtereenvolgens kunnen berekenen maar ze wel in ζ-functies uitdrukken. Zoo vinden we:

$$\mathrm{D}(4)=\frac{\pi}{12}(\log 2)^3+\tfrac{1}{48}\pi^3\log 2+\tfrac{1}{8}\pi\zeta(3)$$

en met behulp van (3):

$$\mathrm{D}(5)=\tfrac{19}{11520}\pi^5+\tfrac{1}{96}\pi^3(\log 2)^2+\tfrac{1}{48}\pi(\log 2)^4+\tfrac{1}{8}\pi\log 2\,.\,\zeta(3).$$

De formule (8) geeft dezelfde waarde van D(5).

HOOFDSTUK III.

Over de analytische voortzetting van de functie.

§ 6. *Voortzetting in de strook* $-\frac{1}{2} < \sigma < +\frac{1}{2}$ *door een reeks van Dirichlet.*

Volgens een algemeen theorema van Landau[1]) heeft de functie een pool in het punt $s = \frac{1}{2}$. Ook zonder hiervan gebruik te maken is het volgende duidelijk.

De reeks voor $D(s)$ wordt vermenigvuldigd met

$$\frac{1}{2^{s-1/2}}$$

waardoor er komt:

$$\frac{1}{2^{s-1/2}} D(s) = \frac{\sqrt{2}}{2^s} + \frac{a_3\sqrt{2}}{6^s} + \frac{a_5\sqrt{2}}{10^s} + \dots.$$

Hieruit volgt, door deze reeks af te trekken van de reeks voor $D(s)$:

$$(1) \quad \left(1 - \frac{1}{2^{s-1/2}}\right) D(s) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{0}{4^s} + \frac{a_5}{5^s} - \frac{a_3\sqrt{2}}{6^s} + \frac{a_7}{7^s} + + \frac{0}{8^s} + \frac{a_9}{9_s} - \dots.$$

Is het getal in den noemer van een term gelijk aan een viervoud, zoo is de coëfficient van dezen term $= 0$; is het een $4\nu \pm 1$ zoo is de coëfficient $= a_{4\nu \pm 1}$ en is het een $4\nu + 2$ dan is de coëfficient gelijk aan $-a_{2\nu+1}\sqrt{2}$.

Uit hetgeen vroeger reeds opgemerkt is omtrent de reeks

$$D(s) = 1 + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_5}{5^s} + \dots.$$

volgt dat de reeks (1) absoluut convergeert voor $\sigma > \frac{1}{2}$.

De reeks (1) *convergeert voor* $\sigma > -\frac{1}{2}$.

---

[1]) Handbuch II pag. 880.

Om dit te bewijzen wordt gebruik gemaakt van de volgende algemeene eigenschap der reeksen van Dirichlet[1]):

Als de convergentie-abscis van een reeks van Dirichlet > 0 is, dan wordt hij bepaald door de formule

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad a = \lim_{n=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{n} a_n \right|}{\log n}$$

De reeks uit (1) schrijven we nu als volgt:

$$(3) \quad \ldots \quad 1 - \frac{2\sqrt{2}}{2^s} + \frac{3a_3}{3^s} + \frac{5a_5}{5^s} - \frac{6a_3\sqrt{2}}{6^s} + \ldots\ldots$$

We weten dan zeker dat de convergentie-abscis > 0 is.

Zij $S(n) =$ de som der eerste n coefficienten van de reeks (3):

$$\begin{aligned} S(4n) &= 1 - 2\sqrt{2} + 3a_3 + \ldots + (4n-1)a_{4n-1} = \\ &= 1 + 3a_3 + \ldots + (4n-1)a_{4n-1} - \\ &\qquad - 2\sqrt{2}\,(1 + 3a_3 + \ldots + (2n-1)\,a_{2n-1}) \\ &= \frac{(4n-1)(4n+1)}{3} a_{4n-1} - 2\sqrt{2}\,\frac{(2n-1)(2n+1)}{3} a_{2n-1} \end{aligned}$$

het laatste door toepassing van (4) § 1.

Op dezelfde wijze vinden we:

$$S(4n+1) = \frac{(4n+1)(4n+3)}{3} a_{4n+1} - 2\sqrt{2}\,\frac{(2n-1)(2n+1)}{3} a_{2n-1}$$

$$S(4n-1) = \frac{(4n-1)(4n+1)}{3} a_{4n-1} - 2\sqrt{2}\,\frac{(2n-1)(2n+1)}{3} a_{2n-1}$$

$$S(4n+2) = \frac{(4n+1)(4n+3)}{3} a_{4n+1} - 2\sqrt{2}\,\frac{(2n+1)(2n+3)}{3} a_{2n+1}$$

Volgens (2) is nu voor $S(4n)$:

$$a = \lim_{n=\infty} \frac{\log \left| \frac{(4n-1)(4n+1)}{3} a_{4n-1} - 2\sqrt{2}\,\frac{(2n-1)(2n+1)}{3} a_{2n-1} \right|}{\log 4n}$$

Om deze limiet te bepalen kan worden gebruik gemaakt van (3) uit § 3:

$$\lim_{n=\infty} a_{2n+1} = c \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

---

[1]) Handbuch II pag. 732.

Dus

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \frac{\log \left| \frac{(4n-1)(4n+1)}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4n-1)}} - 2\sqrt{2}\,\frac{(2n-1)(2n+1)}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2n-1)}} \right|}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log \left| (4n-1)^{1/2}(4n+1) - 2\sqrt{2}\,(2n-1)^{1/2}(2n+1) \right|}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log 8n\sqrt{n} \left| \left(1-\frac{1}{4n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{4n}\right) - \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \right|}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log 8n\sqrt{n} \left| \left(1-\frac{1}{8n}\right)\left(1+\frac{1}{4n}\right) - \left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) \right|}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log 8n\sqrt{n} \left| -\frac{3}{8n} - \frac{5}{32n^2} \right|}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log \left(3\sqrt{n} + \frac{5}{4\sqrt{n}}\right)}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log 3\sqrt{n}}{\log 4n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \tfrac{1}{2}\,\frac{\log n}{\log 4n}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

Op geheel dezelfde wijze kan men voor $S(4n+1)$, $S(4n-1)$ en $S(4n+2)$ de limietovergang volvoeren. Daarbij wordt steeds gevonden

$$\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Hiermede is bewezen dat de reeks (3) de lijn $\sigma = \frac{1}{2}$ tot convergentielijn heeft; m. a. w. de reeks (1) heeft de lijn $\sigma = -\frac{1}{2}$ tot convergentielijn.

Thans zal bewezen worden dat de reeks uit (1) voor $s = 0$ de waarde 0 heeft, zoodat

$$D(0) = 0.$$

Zij $S(n)$ de som van de eerste n termen der reeks (1) voor $s = 0$ dan is (ook volgens formule (2) § 1):

$$S(4n) = 1 + a_3 + \ldots a_{4n-1} - \sqrt{2}\,(1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) =$$
$$= (4n-1)\,a_{4n-1} - \sqrt{2}\,(2n-1)\,a_{2n-1}.$$

$$S(4n+1) = 1 + a_3 + \dots + a_{4n+1} - \sqrt{2}(1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) =$$
$$= (4n+1)\, a_{4n+1} - \sqrt{2}\,(2n-1)\, a_{2n-1}.$$
$$S(4n+2) = 1 + a_3 + \dots + a_{4n+1} - \sqrt{2}(1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}) =$$
$$= (4n+1)\, a_{4n+1} - \sqrt{2}\,(2n+1)\, a_{2n+1}.$$
$$S(4n+3) = 1 + a_3 + \dots + a_{4n+3} - \sqrt{2}\,(1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}) =$$
$$= (4n+3)\, a_{4n+3} - \sqrt{2}\,(2n+1)\, a_{2n+1}.$$

De waarde der reeks (1) voor $s = 0$ krijgen we door de limiet te bepalen van deze uitdrukkingen voor $n = \infty$. Daartoe wordt gebruik gemaakt van de formule

$$\lim_{n=\infty} a_{2n+1} = c \lim \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

Zoo is bijv.:

$$\lim S(4n) = \lim \left\{ (4n-1) \frac{c}{\sqrt{(4n-1)}} - \sqrt{2}\,(2n-1) \frac{c}{\sqrt{(2n-1)}} \right\}$$
$$= c \lim \left\{ \sqrt{(4n-1)} - \sqrt{2\,(2n-1)} \right\}$$
$$= 2c \lim \left\{ \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{1/2} \right\}$$
$$= 2c \lim \left\{ 1 - \frac{1}{8n} - 1 + \frac{1}{4n} \right\}$$
$$= 2c \lim \left\{ \frac{1}{8n} \right\}$$
$$= 0.$$

Op dezelfde wijze vindt men de limiet 0 van de 3 andere uitdrukkingen van S.

Substitueert men in (1) voor s de waarden 1 en 2 (bijv.), dan vindt men door middel van de vroeger gevonden waarden

$$D(1) = \frac{\pi}{2}$$

en

$$D(2) = \frac{\pi}{2} \log 2,$$

de volgende numerische uitkomsten:

$$(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} - \frac{a_3\sqrt{2}}{6} + \frac{a_7}{7} + \dots$$

$$(1 - \tfrac{1}{4}\sqrt{2})\frac{\pi}{2} \log 2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \frac{a_5}{5^2} - \frac{a_3\sqrt{2}}{6^2} + \frac{a_7}{7^2} + \dots$$

en zooals reeds bewezen is:

$$0 = 1 - \sqrt{2} + a_3 + a_5 - a_3\sqrt{2} + a_7 + \dots$$

§ 7. *Voortzetting in dezelfde strook door middel van eene integraal.*

Gemakkelijk is na te gaan dat

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{s-1/2}-x^{s-1/2}\right]=$$
$$=\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{s-3/2}\cdot\frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}-x^{s-3/2}.$$

Nemen we aan dat $\sigma > \frac{1}{2}$ is, dan blijkt dat de vorm tusschen [ ] de waarde 1 aanneemt voor $x=0$ en de waarde 0 voor $x=\infty$.

Daarom is

$$-\frac{1}{s-\frac{1}{2}}=\int_0^\infty\left[\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{s-3/2}\cdot\frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}-x^{s-3/2}\right].$$

Verder is, volgens (5) § 4

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s)=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx \qquad \sigma>\tfrac{1}{2}.$$

Dus ook

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s)-\frac{2^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}=$$
$$=\int_0^\infty\left[\frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}+2^{-1/2}\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{s-3/2}\frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}-2^{-1/2}x^{s-3/2}\right]dx$$

of

$$(1)\quad \Gamma(s)\mathrm{D}(s)-\frac{2^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}=2^{-1/2}\int_0^\infty x^{s-3/2}\left[\sqrt{\frac{2x}{e^{2x}-1}}+\frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^{s+1/2}}-1\right]dx.$$

Deze integraal bestaat voor $\sigma > -\frac{1}{2}$ en geeft dus eene analytische voortzetting van de functie $\mathrm{D}(s)$ in de bovengenoemde strook. Want voor $x=\infty$ is de integrand $=0$. In de omgeving van $x=0$ kan hij aldus ontwikkeld worden:

$$x^{s-3/2}\left[\frac{2^{1/2}x^{1/2}}{\sqrt{(2x+2x^2+\ldots}}+\frac{1-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\ldots\right)-x\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\ldots\right)}{\left(x-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)^{s+1/2}}-1\right]=$$
$$=x^{s-3/2}\left[(1+x)^{-1/2}+\tfrac{1}{2}x^2\,.\,x^{-s-1/2}(1-\tfrac{1}{2}x)^{-s-1/2}-1\right]=$$
$$=x^{s-3/2}\left[1-\tfrac{1}{2}x+\ldots+\tfrac{1}{2}x^{-s+3/2}(1-\tfrac{1}{2}x)^{-s-1/2}-1\right]=$$
$$=x^{s-3/2}\left[-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}x^{-s+3/2}(1+(s+\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}x+\ldots)\right]=$$
$$=-\tfrac{1}{2}x^{s-1/2}+\tfrac{1}{2}+(s+\tfrac{1}{2})\,.\,\tfrac{1}{2}x+\ldots$$

Is $\sigma < \frac{1}{2}$ dan geeft de term $-\frac{1}{2}x^{s-1/2}$ de laagste macht van x. De integraal bestaat dus voor het geval dat

$$\sigma - \tfrac{1}{2} > -1$$

$$\sigma > -\tfrac{1}{2}.$$

Is $\sigma \geq \frac{1}{2}$ zoo is de laagste macht van $x = 0$ en de integraal behoudt een zin.

§ 8. *Achtereenvolgende voortzetting in de strooken* $-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2} < \sigma < -\frac{1}{2}$ *enz.*

Door partiëele integratie zullen we, uitgaande van den integraalvorm (5) § 4:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx$$

den factor $\dfrac{1}{s-\frac{1}{2}}$ vóór het integraalteeken trachten te krijgen. Deze factor moet er zijn, of anders een factor $\dfrac{1}{(s-\frac{1}{2})^2}$. We schrijven daartoe de integraal aldus

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,x^{s-3/2}\,dx$$

en integreeren partiëel:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\frac{x^{1/2}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,x^{-1/2}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty x^{s-1/2}\frac{e^{2x}-1-2xe^{2x}}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx$$

of

$$(1)\quad \Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = -\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty x^{s-1/2}\frac{e^{2x}-1-2xe^{2x}}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx.$$

Deze integraal bestaat als $\mathrm{R}(s) > -\frac{1}{2}$. Want voor $x = \infty$ is de integrand $= 0$. Voor $x = 0$ kunnen we teller en noemer van den integrand naar opklimmende machten van x ontwikkelen. We krijgen dan

$$\int_0^\infty x^{s-1/2}\,\frac{2x + \frac{4x^2}{2!} + \ldots - 2x\,(1 + 2x + \ldots)}{2x^2\left(2 + \frac{4x}{2!} + \ldots\right)^{3/2}} \quad \text{of}$$

$$\int_0^\infty \frac{-2x^2 + \ldots}{2x^2 + \ldots}\,x^{s-1/2}\,dx.$$

De integraal heeft dus een zin als $R(s-\frac{1}{2}) > -1$ m. a. w. als $R(s) > -\frac{1}{2}$.

De integraal (1) geeft ons dus een analytische voortzetting van de functie $D(s)$ in de strook tusschen $\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$.

Het vermoeden ligt nu voor de hand dat in het punt $s = -\frac{1}{2}$ de functie ook een pool heeft.

Om deze ook te voorschijn te laten treden schrijven we (1) aldus en integreeren weer partiëel:

$$\Gamma(s)\,D(s) = -\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{e^{2x}-1-2xe^{2x}}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,x^{s-1/2}\,dx$$

$$\Gamma(s)\,D(s) = -\frac{1}{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})}\,\frac{e^{2x}-1-2xe^{2x}}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,x^{s+1/2}\Bigg|_0^\infty +$$

$$+\frac{1}{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})}\int_0^\infty x^{s+1/2}\,\frac{-8x^2e^{2x}(e^{2x}-1)-(e^{2x}-1)^2-4xe^{2x}(e^{2x}-1)+12x^2e^{4x}}{2^2x^{3/2}(e^{2x}-1)^{5/2}}$$

Het grensstuk is weer $= 0$ en dus is

(2) . . . . $\Gamma(s)\,D(s) =$

$$= \frac{1}{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})}\int_0^\infty x^{s+1/2}\,\frac{-8x^2e^{2x}(e^{2x}-1)-(e^{2x}-1)^2-4xe^{2x}(e^{2x}-1)+12x^2e^{4x}}{2^2x^{3/2}(e^{2x}\ 1)^{5/2}}\,dx$$

Wanneer we nu op dezelfde wijze als bij (1) nagaan in welk gebied de integraal bestaat dan vinden we, omdat de teller van de breuk begint met $8x^3$:

$$R(s) > -\tfrac{3}{2}.$$

Hiermede is dus aangetoond dat de functie $D(s)$ in $s = -\frac{1}{2}$ een enkelvoudige pool heeft.

Op dezen weg zouden we kunnen doorgaan en telkens partiëel integreeren. Maar we zullen een anderen weg moeten inslaan om een algemeene uitdrukking te krijgen. Want het is niet in te zien welke integrand we krijgen na n maal partieel geïntegreerd te hebben. Echter geeft het voorgaande ons reeds het vermoeden dat er wel een analytische uitdrukking moet zijn die de functie in het geheele vlak voorstelt, terwijl er polen liggen in de punten $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \ldots\ldots$

§ 9. *Analytische voorstelling voor het geheele vlak.*

Gaan wij uit van den integraalvorm

$$D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}.$$

Bij het onderzoek naar het gebied waarin deze integraal bestaat is het ons al gebleken dat de grens 0 maakt dat zij slechts een zin heeft als $R(s) > \frac{1}{2}$. We zullen daarom de integraal splitsen in twee andere:

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx.$$

De laatste integraal heeft voor alle waarden van s een zin. De eerste ontwikkelen we in een reeks die in 't geheele vlak zal blijken te convergeeren.

Beschouwen we de functie

$$\sqrt{\frac{2x}{(e^{2x}-1)}}.$$

De pool die het dichtst bij den oorsprong ligt is

$$\pi i$$

want de functie is in den oorsprong zelf eindig.

Zij kan dus volgens de theorie der complexe functies in een machtreeks worden ontwikkeld die zal convergeeren voor $|x| < \pi$.
Zij dan:

$$(3) \quad . \quad . \quad \sqrt{\frac{2x}{e^{2x}-1}} = 1 + a_1 2x + a_2 2^2 x^2 + a_3 2^3 x^3 + \ldots$$
$$|x| < \pi.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{(e^{2x}-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} + a_1 2^{1/2} x^{1/2} + 2^{3/2} a_2 x^{3/2} + 2^{5/2} a_3 x^{5/2} + \ldots.$$

We mogen deze machtreeks vermenigvuldigen met x^{s-1} en daarna term voor term integreeren tusschen de grenzen 0 en 1.

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx = \frac{1}{2^{1/2}} \int_0^1 x^{s-3/2}\,dx + 2^{1/2} a_1 \int_0^1 x^{s-1/2}\,dx + \ldots.$$

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx = \frac{1}{2^{1/2}} \cdot \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + 2^{1/2} a_1 \frac{1}{s+\frac{1}{2}} + 2^{3/2} a_2 \frac{1}{s+\frac{3}{2}} + \ldots$$

Hiermede is dus gevonden:

$$(4) \quad . \quad . \quad D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left[\int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1/2}a_n}{s+n-\frac{1}{2}}\right].$$

$$a_0 = 1.$$

De integraal heeft, zooals we reeds gezegd hebben, in ieder punt van 't vlak een zin. We zullen bewijzen dat de reeks ook voor alle waarden van s convergeert, behalve in de punten $s = -n + \frac{1}{2}$. $n = 0, 1, 2 \ldots$

De reeks (3) convergeert voor alle waarden van x waarvan de modulus $< \pi$ is. De moduli van de termen der reeks uit (4) zijn

$$(5) \quad . \quad 2^{n-1/2}\,|a_n|\,\frac{1}{|s+n-\frac{1}{2}|} = 2^{n-1/2}\,|a_n|\,\frac{1}{\sqrt{((\sigma+n-\frac{1}{2})^2+t^2)}}.$$

Nu is de modulus van den overeenkomstigen term van (3), nadat beide leden gedeeld zijn door $\sqrt{2}$:

$$2^{n-1/2}\,|a_n|\,.\,|x|^n$$

(3) convergeert voor $x = 1$. De modulus wordt dan

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2^{n-1/2}\,|a_n|.$$

Voor alle waarden van σ en t is dus (5) kleiner dan (6), waaruit volgt dat de reeks uit (4) uniform convergeert voor alle waarden van s, behalve voor $s = -n + \frac{1}{2}$.

§ 10. *Ontwikkeling van de integraal* $Q(s) = \int_1^\infty \frac{x^{s-1}dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}$ *in een machtreeks.*

Deze integraal stelt een geheele functie van s voor en is dus te ontwikkelen in een, overal convergente, machtreeks.

$$(1) \quad Q(s) = \int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}} = \int_1^\infty \frac{e^{s\log x}}{x\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx = \sum_0^\infty \frac{s^n}{n!}\int_1^\infty \frac{(\log x)^n}{x\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx.$$

De coëfficienten dezer reeks hebben dus de gedaante:

$$\frac{1}{n!}\int_1^\infty \frac{(\log x)^n}{x\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx$$

Natuurlijk kan de functie ook aldus ontwikkeld worden:

$$(2) \quad Q(s) = \int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}} = \int_1^\infty \frac{e^{(s-1)\log x}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(s-1)^n}{n!}\int_1^\infty \frac{(\log x)^n}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx$$

waarbij de coëfficienten dus den vorm

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad k_n = \frac{1}{n!}\int_1^\infty \frac{(\log x)^n}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx$$

hebben. Er volgt uit:

$$Q(1) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}.$$

Hierin stellen we $e^{2x} = \frac{1}{\sin^2 t}\cdot$ Daardoor ontstaat er:

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad Q(1) = \int_0^{\mathrm{bgsin}\frac{1}{e}} dt = \mathrm{bgsin}\,\frac{1}{e}\cdot$$

Daar $D(1) = \frac{\pi}{2}$ volgt uit (4) § 9:

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{\pi}{2} - \mathrm{bgsin}\,\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-\frac{1}{2}} a_n}{n+\frac{1}{2}}.$$

Verder is duidelijk dat uit (2) volgt:

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad Q'(1) = \int_1^\infty \frac{\log x}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx.$$

Door den noemer van deze integraal volgens het binomium te ontwikkelen, ontstaat de reeks:

$$Q'(1) = \int_1^\infty \log x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\, e^{-(2n+1)x}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \int_1^\infty e^{-(2n+1)x} \log x\,dx.$$

Door partiëele integratie:

$$\int_1^\infty e^{-(2n+1)x} \log x\,dx = \frac{1}{2n+1}\int_1^\infty \frac{e^{-(2n+1)x}}{x}\,dx.$$

Stel hierin $x = \frac{t}{2n+1}$ dan gaat deze integraal over in

$$\frac{1}{2n+1}\int_{2n+1}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{1}{2n+1}\,li\,(e^{-(2n+1)})$$

als li de integraallogarithmus voorstelt.

Dus

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \, li\,(e^{-(2n+1)}).$$

Alle coëfficienten k_n kan men op soortgelijke wijze ontwikkelen.

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad k_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \int_1^{\infty} (\log x)^n e^{-(2m+1)x} \, dx.$$

HOOFDSTUK IV.

Eenige bepaalde integralen die in D-functies kunnen worden uitgedrukt; reeksontwikkelingen.

§ 11. *Bepaalde integralen die in D-functies kunnen worden uitgedrukt.*

Uitgaande van de integraal

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx \qquad \mathrm{R}(s) > \tfrac{1}{2}$$

vindt men door partiëele integratie:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{x^s}{(e^{2x}-1)^{1/2}}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{x^s e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx \qquad \text{of}$$

als men s door $s-1$ vervangt:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Gamma(s)\,\mathrm{D}(s-1) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx. \qquad \mathrm{R}(s) > \tfrac{3}{2}$$

Hieruit volgt verder:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s-1) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx + \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx$$

hetgeen door gebruikmaking van (1) overgaat in:

$$\Gamma(s)\,\{\mathrm{D}(s-1) - \mathrm{D}(s)\} = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx.$$

De eerste integreeren we weer partiëel aldus:

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,d(x^s) = \frac{1}{s}\,\frac{e^{2x}.\,x^s}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s\,\frac{e^{2x}+2}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,e^{2x}\,dx \quad \text{of}$$

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s-1) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{x^s e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx + \frac{3}{s}\int_0^\infty \frac{x^s e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx.$$

In verband met (2) volgt hieruit na rangschikking:

$$\int_0^\infty \frac{x^s e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = \tfrac{1}{3}\,\Gamma(s+1)\,\{D(s-1)-D(s)\}$$

en na vervanging van s door $s-1$:

$$(3)\quad . \; . \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = \tfrac{1}{3}\,\Gamma(s)\,\{D(s-2)-D(s-1)\}.$$

Deze integraal bestaat alleen als $R(s) > \frac{5}{2}$ zooals blijkt, door op te merken dat voor de grens $x = 0$ aan deze voorwaarde moet voldaan zijn.

Verder kunnen we nu weer een formule afleiden die met (2) overeenkomt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx + \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx.$$

De eerste integraal van het rechterlid vervangen we door de waarde uit (2) en vinden dan na rangschikking:

$$(4)\quad . \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = \tfrac{1}{3}\,\Gamma(s)\,\{D(s-2)-4D(s-1)+3D(s)\}$$

$$R(s) > \tfrac{5}{2}.$$

Op de integralen uit (3) en (4) kunnen we nu weer dezelfde bewerkingen toepassen als op die van (1) en (2). Zoo voortgaande vinden we de volgende formules:

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{7/2}}\,dx = \frac{1}{3.5}\,\Gamma(s)\{D(s-3)-4D(s-2)+3D(s-1)\}.$$

$$(6)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{7/2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3.5}\,\Gamma(s)\,\{D(s-3)-9D(s-2)+23D(s-1)-15D(s)\}.$$

$$(7)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{9/2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3.5.7}\,\Gamma(s)\,\{D(s-4)-9D(s-3)+23D(s-2)-15D(s-1)\}.$$

$$(8)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{3x}-1)^{9/2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{3.5.7}\,\Gamma(s)\{D(s-4)-16D(s-3)+86D(s-2)-176D(s-1)+105D(s)\}.$$

Men kan deze rij formules gemakkelijk voortzetten. Hef blijkt nl. dat de getallencoëfficient in den noemer steeds het volgende oneven getal als factor er bij krijgt. De coëfficienten van de termen tusschen de accolades zijn altijd gelijk bij de laatste formule van een stel en de eerste van het volgende stel. Verder worden die coëfficienten aldus gevormd: Om b.v. formule (8) te krijgen trekt men van de coëfficienten van (7) resp. de 7-vouden van de coëfficienten der overeenkomstige termen van (6) af; aldus

$$-9-7.1=-16$$
$$23-7.(-9)=86$$
$$-15-7.23=-176$$
$$0-7.(-15)=105.$$

§ 12. *Numerische resultaten.*

Uit de bewezen betrekkingen kunnen we nog enkele numerische resultaten afleiden door de numerische uitkomsten van § 5 te gebruiken.

Zoo volgt uit (1) voor $s=3$:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin t)^2 \frac{dt}{\cos^2 t} = \pi \log 2,$$

voor $s=2$:

$$\int_0^\infty \frac{x e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin t) \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\pi}{2},$$

uit (2) voor $s=3$:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin t)^2 \operatorname{tg}^2 t\,dt = \pi \log 2 - \frac{\pi}{2}(\log 2)^2 - \frac{1}{24}\pi^3,$$

voor $s=2$:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\,.\operatorname{tg}^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}(1-\log 2),$$

uit (3) voor $s=3$:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin t)^2 \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\,dt = \tfrac{1}{3}\pi(1-\log 2)$$

voor $s=4$:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin t)^3 \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t}\,dt = -\tfrac{1}{24}\,\pi^3 + \pi\log 2 - \frac{\pi}{2}(\log 2)^2$$

uit (4) voor $s=3$:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin t)^2 \operatorname{tg}^4 t\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\pi + \tfrac{1}{24}\,\pi^3 - \tfrac{8}{3}\,\pi\log 2 + \tfrac{1}{2}\,\pi\,(\log 2)^2$$

uit (5) voor $s=4$:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{7/2}}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin t)^3 \frac{\sin^4 t}{\cos^6 t}\,dt = \tfrac{1}{5}\pi - \tfrac{4}{5}\pi\log 2 + \tfrac{1}{40}\pi^3 + \tfrac{3}{10}\pi(\log 2)^2.$$

§ 13. *Reeksontwikkeling voor D(s).*

We gaan uit van den integraalvorm

$$(1)\quad \ldots\ldots\quad \mathrm{D}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx$$

en van de formule (2) van § 12:

$$(2)\quad \ldots\quad \int_0^\infty \frac{x^s}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = \Gamma(s+1)\,[\mathrm{D}(s) - \mathrm{D}(s+1)].$$

Ik vermenigvuldig teller en noemer van den integrand uit (1) met $e^{2x}-1$:

$$\Gamma(s)\mathrm{D}(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\left(2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \ldots\right)dx.$$

Door term voor term te integreeren en de optredende integralen te vervangen door hunne uitdrukkingen uit (2) vind ik:

$$\Gamma(s)\mathrm{D}(s) = 2\Gamma(s+1)\{\mathrm{D}(s)-\mathrm{D}(s+1)\} + \frac{2^2}{2!}\Gamma(s+2)\{\mathrm{D}(s+1)-\mathrm{D}(s+2)\} + \ldots.$$

hetgeen, door gebruik te maken van een bekende eigenschap der Γ-functie overgaat in:

$$(3)\quad \mathrm{D}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\{\mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s+n)\}\,s(s+1)\ldots.(s+n-1)\ ^{1)}.$$

---

1) Op deze ontwikkeling werd ik attent gemaakt door Prof. W. Kapteyn.

Om na te gaan in welk gebied de reeks convergeert schrijven we haar in dezen vorm:

$$(3a) \ldots\ldots\ldots (1-2s)\,\mathrm{D}(s) =$$

$$= -2s\,\mathrm{D}(s+1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} s(s+1)\ldots(s+n-1) \{ \mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s+n) \}$$

en leiden eene benaderde uitdrukking af voor den factor

$$\mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s+n)$$

$$\mathrm{D}(s+n)-1-\mathrm{D}(s+n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{s+n-1}} - \frac{1}{3^{s+n}}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{5^{s+n-1}} - \frac{1}{5^{s+n}}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3^{s+n}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{4}{5^{s+n}} + \ldots$$

$$|\mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s+n)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3^{\sigma+n}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{4}{5^{\sigma+n}} + \ldots$$

als $\qquad \mathrm{R}(s) = \sigma \qquad s = \sigma + it.$

Blijkbaar volgt hieruit:

$$|\mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s+n)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{\sigma+n-1}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^{\sigma+n-1}} + \ldots$$

$$< \frac{1}{3^{n-2}}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{\sigma+1}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^{\sigma+1}} + \ldots\right).$$

Kiezen we σ positief dan geldt voor de reeks uit het rechterlid

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{\sigma+1}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^{\sigma+1}} + \ldots < \mathrm{D}(1) - 1 < \frac{\pi}{2} - 1,$$

dus

$$|\mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s+n)| < \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{3^{n-2}}.$$

De reeks der moduli van $(3a)$ wordt thans:

$$\sum \frac{2^n}{n!} (\sigma^2 + t^2)^{1/2} (\overline{\sigma+1}^2 + t^2)^{1/2} (\overline{\sigma+2}^2 + t^2)^{1/2} \ldots$$

$$\ldots (\overline{\sigma+n-1}^2 + t^2)^{1/2} \,|\mathrm{D}(s+n-1) - \mathrm{D}(s)|.$$

De termen dezer reeks zijn blijkbaar kleiner dan de overeenkomstige termen van de reeks:

$$\sum \frac{2^n}{n!} (\sigma^2 + t^2)^{1/2} \ldots (\overline{\sigma+n-1}^2 + t^2)^{1/2} \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{3^{n-2}}.$$

De convergentie van deze laat zich met een eenvoudig convergentiekenmerk onderzoeken:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}\frac{(\overline{\sigma + n}^2 + t^2)^{1/2}}{n+1} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(\sigma+n)^2+t^2}{(n+1)^2}}$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

De reeks convergeert dus en de reeks ($3a$) convergeert voor alle waarden van s waarvan het reëele gedeelte positief is, en wel absoluut en uniform.

Is het reëele deel van s negatief, dan zijn, vanaf een zekeren term, stelde de m-de, de reëele deelen van de functies

$$D(s+n-1) \quad \text{en} \quad D(s+n)$$

toch weer positief. Volgens het voorgaande is dus

$$|\,D(s+n-1) - D(s+n)\,| < \frac{\frac{\pi}{2}-1}{3^{n-m-2}} \qquad n > m.$$

Het verdere bewijs is als het vorige.

De reeks ($3a$) convergeert dus in het geheele vlak.

In de punten

$$s = -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{5}{2}\ldots.$$

heeft $D(s)$, zooals we reeds weten, polen. Voor éen dier waarden van s worden telkens termen van de reeks oneindig groot.

§ 14. *Reeksontwikkeling voor* $2^s \dfrac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} D(s)$.

We weten dat

$$\Gamma(s)\,D(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{2x}-1}\sqrt{(e^{2x}-1)}\,dx.$$

Ik ontwikkel den factor $\sqrt{(e^{2x}-1)}$ in een reeks.

De functie $\sqrt{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}$ kan in een machtreeks ontwikkeld worden, die in 't geheele vlak convergeert, omdat de functie geen singuliere punten heeft.

$$\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{2x}} = 1 + \beta_1(2x) + \beta_2(2x)^2 + \beta_3(2x)^3 + \ldots.$$

Hieruit volgt:

$$\Gamma(s)\mathrm{D}(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{2x}-1}\{(2x)^{1/2}+\beta_1(2x)^{3/2}+\beta_2(2x)^{5/2}+\ldots\}\,dx.$$

De reeks

$$\frac{2^{1/2}x^{s-1/2}}{e^{2x}-1}+2^{3/2}\beta_1\frac{x^{s+1/2}}{e^{2x}-1}+2^{5/2}\beta_2\frac{x^{s+3/2}}{e^{2x}-1}+\ldots.$$

convergeert uniform voor alle waarden van x. Zij mag dus term voor term geïntegreerd worden tusschen de grenzen 0 en ∞ omdat tevens voor $x=\infty$ de termen de waarde 0 hebben:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s)=\sum 2^{\frac{2n+1}{2}}\beta_n\int_0^\infty \frac{x^{s+\frac{2n-1}{2}}}{e^{2x}-1}\,dx.$$

Nu is

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx.$$

Stellen we $x=2y$ dan gaat deze betrekking over in:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s)\,\Gamma(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{2x}-1}\,dx.$$

Dit invoerende ontstaat de vergelijking:

$$2^s\,\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\,\Gamma\left(s+\frac{2n+1}{2}\right)\zeta\left(s+\frac{2n+1}{2}\right).$$

Door gebruik te maken van een bekende eigenschap van de Γ-functie, kan hiervoor geschreven worden:

$$2^s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\mathrm{D}(s)=\zeta(s+\tfrac{1}{2})+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s+\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{3}{2})\ldots\left(s+\frac{2n-1}{2}\right)\zeta\left(s+\frac{2n+1}{2}\right).$$

§ 15. *Reeksontwikkeling voor* $\dfrac{\Gamma(s)}{2^{s+1/2}\,\Gamma(s+\frac{1}{2})}\zeta(s)$.

Gaan we uit van de betrekking

$$\frac{1}{2^s}\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{2x}-1}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\sqrt{(e^{2x}-1)}\,dx$$

en maken weer gebruik van de ontwikkeling uit § 14.

Op dezelfde wijze als bij de afleiding van de vorige reeks-ontwikkeling vinden we:

$$\frac{1}{2^s}\Gamma(s)\zeta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{2n+1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{x^{s+\frac{2n+1}{2}}}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx.$$

De integralen uit het rechterlid zijn in § 11 in D-functies uitgedrukt. Door die formules toe te passen vindt men, na herleiding:

$$\frac{\Gamma(s)}{2^{s+1/2}\Gamma(s+\frac{1}{2})}\zeta(s)=D(s-\tfrac{1}{2})-D(s+\tfrac{1}{2})+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\beta_n(s+\tfrac{1}{2})\ldots\left(s+\frac{2n-1}{2}\right)\times\left\{D\left(s+\frac{2n-1}{2}\right)-D\left(s+\frac{2n+1}{2}\right)\right\}.$$

In § 37 heb ik verschillende betrekkingen afgeleid tusschen de coëfficienten β_n.

§ 16. *Andere ontwikkeling voor $D(s)$.*

$$\Gamma(s)D(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{1/2}}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}(e^{2x}-1)^2\,dx.$$

Volgens § 33 (1) is

$$\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(2)}{n!}x^n\,.\,2^n$$

en daar volgens (17) § 33

$$T_n(2)=\frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$$

volgt hieruit:

$$\Gamma(s)D(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}(2^{n+2}-2)}{(n+2)!}x^{n+2}\,dx$$

of

$$\Gamma(s)D(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}(2^{n+2}-2)}{(n+2)!}\int_0^{\infty}\frac{x^{s+n+1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}\,dx.$$

De hier optredende integralen hebben we bepaald in (4) § 11. Volgens die formules krijgen we derhalve:

$$\Gamma(s)D(s)=\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}(2^{n+2}-2)}{(n+2)!}\Gamma(s+n+2)\left[D(s+n)-4D(s+n+1)+3D(s+n+2)\right]$$

of na deeling door $\Gamma(s)$:

$$(1)\ \mathrm{D}(s) = \tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+3}(2^{n+1}-1)}{(n+2)!}s(s+1)\ldots(s+n+1)\,[\mathrm{D}(s+n)-4\,\mathrm{D}(s+n+1)+3\mathrm{D}(s+n+2)].$$

Om de convergentie te onderzoeken gaan we te werk als volgt:

$$\mathrm{D}(s+n) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{s+n}} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5^{s+n}} + \ldots.$$

$$-4\,\mathrm{D}(s+n+1) = -4 - 4\,.\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{s+n+1}} - 4\,.\,\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5^{s+n+1}} - \ldots.$$

$$3\,\mathrm{D}(s+n+2) = 3 + 3\,.\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{s+n+2}} + 3\,.\,\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5^{s+n+2}} + \ldots.$$

Optellende komt er:

$$\mathrm{D}(s+n) - 4\,\mathrm{D}(s+n+1) + 3\,\mathrm{D}(s+n+2) =$$

$$= \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{5^2-4\,.\,5+3}{5^{s+n+2}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{7^2-4\,.\,7+3}{7^{s+n+2}} + \ldots.$$

Derhalve is, als $s = \sigma + it$:

$$|\,\mathrm{D}(s+n) - 4\,\mathrm{D}(s+n+1) + 3\mathrm{D}(s+n+2)\,|$$

$$< \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{5^2-4\,.\,5+3}{5^{\sigma+n+2}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{7^2-4\,.\,7+3}{7^{\sigma+n+2}} + \ldots.$$

$$< \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{5^2}{5^{\sigma+n+2}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{7^2}{7^{\sigma+n+2}} + \ldots.$$

$$< \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5^{\sigma+n}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{1}{7^{\sigma+n}} + \ldots.$$

$$< \frac{1}{5^n}\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{1}{5^\sigma} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7^\sigma} + \ldots\right)$$

$$< \frac{1}{5^n}\,.\,\mathrm{C}.$$

De factor tusschen de haakjes is, als $\sigma > \frac{1}{2}$ is, een constante eindige grootheid. De reeks der moduli van (1) heeft dus de eigenschap dat de termen kleiner zijn dan de overeenkomstige termen van de reeks

$$\sum\frac{2^{n+3}(2^{n+1}-1)}{(n+2)!}(\sigma^2+t^2)^{1/2}\{(\sigma+1)^2+t^2\}^{1/2}\ldots.\cdot\frac{1}{5^n}$$

voor alle waarden van $\sigma > \frac{1}{2}$. De convergentie van deze laatste reeks onderzoeken we weer met een eenvoudig kenmerk:

$$u_n = \frac{2^{n+2}(2^{n+2}-2)}{(n+2)!}(\sigma^2+t^2)^{1/2} \dots (\overline{\sigma+n+1}^{\,2}+t^2)^{1/2} \cdot \frac{1}{5^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2^{n+3}-2[(\sigma+n+2)^2+t^2]^{1/2}}{5(2^{n+2}-2)(n+3)} = \frac{2(2^{n+2}-1)}{5(2^{n+1}-1)} \cdot \frac{\{(\sigma+n+2)^2+t^2\}^{1/2}}{n+3}$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{5} < 1.$$

De reeks convergeert dus voor alle waarden van s waarvan het reëele gedeelte $> \frac{1}{2}$ is en wel absoluut en uniform.

Op geheel analoge wijze zouden we nog andere dergelijke reeksontwikkelingen kunnen afleiden met behulp der andere integralen van § 11.

§ 17. *Nog andere reeksen.*

Bovendien kan men uit ieder stel integralen nog weer een nieuwe reeksontwikkeling vinden.

Nemen we bijv. de formule

$$\tfrac{1}{3}\Gamma(s)\{D(s-2)-D(s-1)\} = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{(e^{2x}-1)^{5/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}.$$

Door verwisseling van het integraal- met het somteeken ontstaat:

$$\tfrac{1}{3}\Gamma(s)\{D(s-2)-D(s-1)\} = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \int_0^\infty \frac{x^{s+n-1}}{(e^{2x}-1)^{5/2}}dx$$

waaruit weer volgt, als we voor de integralen hunne uitdrukkingen in D-functies in de plaats zetten en daarna door $\Gamma(s)$ deelen:

$$D(s-2)-D(s-1) = D(s-2)-4D(s-1)+3D(s)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} s(s+1)\dots(s+n-1)[D(s+n-2)-4D(s+n-1)+3D(s+n)].$$

Na eenige herleiding kan dit als volgt worden geschreven:

$$D(s-1)-D(s) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} s(s+1) \dots$$
$$\dots (s+n-1)[D(s+n-2)-4D(s+n-1)+3D(s+n)].$$

Op dezelfde wijze als bij de vorige reeks vindt men dat zij convergeert indien $R(s) > 2$.

HOOFDSTUK V.

Over de polen van D(s) en hunne residuen.

§ 18. In § 9 is afgeleid de formule:

$$(1)\qquad D(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\left[\int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}\,dx+2^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\alpha_n}{s+n-\frac{1}{2}}\right].$$

In § 36 zal worden aangetoond dat de coëficienten α_n alle van nul verschillen. Daarmede zal dus bewezen zijn dat de functie D(s) polen heeft in de punten

$$s=-n+\tfrac{1}{2}\quad n=0,\,1,\,2,\ldots.$$

Daar de voorstelling (1) voor het geheele vlak geldt en de functie $\Gamma(s)$ geen nullen heeft kan de functie D(s) geen andere polen bezitten dan de genoemde.

Zooals reeds eerder is gebleken, is de residu van de pool $s=\frac{1}{2}$ gelijk aan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

omdat $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

In 't algemeen heeft men voor de residu van de pool $s=-n+\frac{1}{2}$:

$$\frac{2^{n-1/2}\alpha_n}{\Gamma(-n+\frac{1}{2})}=\frac{2^{n-1/2}\alpha_n}{\pi}\Gamma(n-\tfrac{1}{2})\sin(n-\tfrac{1}{2})\pi$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1/2}\alpha_n}{\pi}\,\frac{1\,.\,3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\sqrt{\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-3)\,\alpha_n.$$

In de omgeving van $s=\frac{1}{2}$ is

$$D(s)=\text{hol. functie}+\frac{2^{-1/2}}{\Gamma(s)}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{2}}.$$

Dus is

$$(s-\tfrac{1}{2})\,\mathrm{D}(s) = (s-\tfrac{1}{2}) \times \text{hol. functie} + \frac{2^{-1/2}}{\Gamma(s)}$$

of

$$\lim_{s=1/2} (s-\tfrac{1}{2})\,\mathrm{D}(s) = \frac{2^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Thans zullen nog een paar uitdrukkingen worden afgeleid voor

$$\lim_{s=1/2}\left(\mathrm{D}(s) - \frac{2^{-1/2}\pi^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}\right).$$

We weten reeds dat de functie

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) - \frac{2^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}$$

holomorph is in de omgeving van het punt $s=\frac{1}{2}$. Die functie kan dus in die omgeving (en wel met een straal $=1$ omdat de naastbijliggende polen zijn $s=-\frac{1}{2}$) in een machtreeks ontwikkeld worden. Daartoe maak ik gebruik van (1) § 8

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = -\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty x^{s-1/2}\,\frac{e^{2x}-1-2xe^{2x}}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{(s-1/2)\log x}\,\frac{-e^{2x}+1+2x\,e^{2x}}{2\,x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx.$$

De volgende ontwikkeling ontstaat dus, door de macht van e in den integrand op de gewone wijze in een reeks te ontwikkelen:

$$\Gamma(s)\mathrm{D}(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-\frac{1}{2})^n}{n!}\int_0^\infty \frac{2\,x\,e^{2x}-e^{2x}+1}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,(\log x)^n\,dx.$$

Er volgt uit:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) - \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s-\frac{1}{2})^{n-1}}{n!}\int_0^\infty \frac{2x\,e^{2x}-e^{2x}+1}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}}\,(\log x)^n\,dx.$$

Ten eerste blijkt hieruit dat

$$\int_0^\infty \frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{2x^{1/2}\,(e^{2x}-1)^{3/2}}\,dx = \sqrt{2}$$

omdat vroeger reeds gevonden is dat

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) - \frac{2^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}$$

een holomorphe functie is.

Verder is dan:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) - \frac{2^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-\frac{1}{2})^{n-1}}{n!} \int_0^{\infty} \frac{2x\,e^{2x} - e^{2x} + 1}{2x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}} (\log x)^n \, dx.$$

Na deeling door $\Gamma(s)$ volgt hieruit:

$$\lim_{s=1/2}\left(\mathrm{D}(s) - \frac{2^{-1/2}\pi^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{2x\,e^{2x} - e^{2x} + 1}{x^{1/2}(e^{2x}-1)^{3/2}} \log x \; dx.$$

Eene andere uitdrukking wordt verkregen door formule (1) van § 7. Voor $s = \frac{1}{2}$ vindt men daaruit, na deeling door $\Gamma(s)$:

$$\lim_{s=1/2}\left(\mathrm{D}(s) - \frac{2^{-1/2}\pi^{-1/2}}{s-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{2x(e^{2x}-1)}} - \frac{1}{e^x - 1}\right] dx$$

na eenige herleiding, die hier achterwege gelaten is.

HOOFDSTUK VI.

Eenige betrekkingen die voortvloeien uit een paar algemeene theorema's der reeksen van Dirichlet.

§ 19. *Het theorema voor de som der coëfficienten.*

We gaan nu gebruik maken van een theorema dat voor alle reeksen van Dirichlet geldt.

Het is als volgt [1]):

Zij $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ een reeks van Dirichlet die convergeert in een halfvlak, dan is, als de integraal genomen wordt over eene verticale lijn binnen het convergentiegebied, terwijl $\gamma > 0$:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{\omega = \infty} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{e^{xs}}{s} f(s)\, ds = 2\pi i \sum_{\lambda_n \leq x}{}' a_n$$

waarbij het ′ bij de Σ beteekent dat als $x = \lambda_n$ is, de laatste term van de som a_{n_0} als coëfficient $\frac{1}{2}$ heeft. Overigens loopt de sommatie over alle a_n's waarvan de bijbehoorende λ_n's kleiner of gelijk aan x zijn.

In ons geval moet dus $\gamma > \frac{1}{2}$ zijn en verder is $\lambda_n = \log n$ $a_{2n} = 0$. Kiezen we eerst

$$x = \log(2n+1)$$

dan volgt uit (4):

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{s \log(2n+1)}}{s} \mathrm{D}(s)\, ds = 2\pi i (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} + \tfrac{1}{2} a_{2n+1})$$

of als we formule (4) § 2 toepassen:

---

[1]) Handbuch II pag. 820.

$$(5)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(2n+1)^z\,\frac{D(z)}{z}\,dz=(2n+1)\,a_{2n+1}-\tfrac{1}{2}a_{2n+1}$$

$$\gamma>\tfrac{1}{2}.$$

Kiezen we ook nog voor x een getal dat voldoet aan

$$\log(2n+1)>x\geq\log 2n.$$

Nu is $a_{2n}=0$ dus er komt:

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{xs}\,\frac{D(s)}{s}\,ds=2\pi i\,(a_1+a_3+\ldots.+a_{2n-1})$$

en door toepassing van (4) § 2:

$$(6)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{xs}\,\frac{D(s)}{s}\,ds=(2n-1)\,a_{2n-1},\ \gamma>\tfrac{1}{2},\ \log(2n+1)>x\geq\log 2n.$$

Deelen we de termen van (5) door $(2n+1)^s$ en sommeeren de uitkomst van $n=0$ tot ∞ dan ontstaat de betrekking:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+\infty}\sum\frac{1}{(2n+1)^{s-z}}\,\frac{D(z)}{z}\,dz=\sum\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^{s-1}}-\frac{1}{2}\sum\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^s}$$

of

$$(7)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\zeta(s-z)\,\frac{D(z)}{z}\,dz=D(s-1)-\tfrac{1}{2}D(s)$$

$$\gamma>\tfrac{1}{2}\quad R(s)>\gamma+1.$$

Beschouwen we de integraal

$$\int\zeta(s-z)\,\frac{D(z)}{z}\,dz$$

genomen over een rechthoek die aldus bepaald is

$$z=x+iy$$

$$\delta\leq R(z)\leq\gamma\quad 0<\delta<\gamma$$

$$u\geq y\geq -v\quad u, v \text{ positief.}$$

Binnen dezen rechthoek ligt alleen de pool $z=\frac{1}{2}$ als we nemen $R(s)>\gamma+1$. De residu van deze pool is blijkbaar gelijk aan

$$\zeta(s-\tfrac{1}{2})\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\zeta(s-\tfrac{1}{2}).$$

Volgens het theorema over de residuen van Cauchy is dus de genoemde integraal gelijk aan $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\zeta(s-\frac{1}{2})$. Derhalve is:

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma-iv}^{\gamma+iu}\zeta(s-z)\frac{D(z)}{z}dz+\int_{\gamma}^{\delta}\zeta(s-x-iu)\frac{D(x+iu)}{x+iu}dx+\right.$$

$$\left.+\int_{\delta+iu}^{\delta-iv}\zeta(s-z)\frac{D(z)}{z}dz+\int_{\delta}^{\gamma}\zeta(s-x+iv)\frac{D(x-iv)}{x-iv}dx\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\zeta(s-\tfrac{1}{2}).$$

Gaan we thans over tot $\lim u=\infty$ $\lim v=\infty$. De tweede en de vierde integraal naderen dan tot nul, zoodat er overblijft:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\zeta(s-z)\frac{D(z)}{z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta+i\infty}^{\delta-i\infty}\zeta(s-z)\frac{D(z)}{z}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\zeta(s-\tfrac{1}{2})$$

of, in verband met (7):

$$(8)\;.\;\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\zeta(s-\tfrac{1}{2})-D(s-1)+\tfrac{1}{2}D(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta+i\infty}^{\delta-i\infty}\zeta(s-z)\frac{D(z)}{z}dz$$

$$0<\delta<\tfrac{1}{2}\quad R(s)>\tfrac{3}{2}.$$

Uit de eigenschap (6) § 2 volgt door middel van het theorema (4):

$$(9)\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(2n+1)^s\frac{D(s-1)}{s}ds=\frac{(2n+1)(2n+3)}{3}a_{2n+1}-\tfrac{1}{2}(2n+1)a_{2n+1}$$

door toepassing op de reeks

$$D(s-1)=1+\frac{3a_3}{3^s}+\frac{5a_5}{5^s}+\ldots.$$

(5) kan ook aldus geschreven worden:

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega=\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}(2n+1)^s\frac{D(s)}{s}ds=(2n+\tfrac{1}{2})\,a_{2n+1}\qquad\text{en (9):}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega=\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}(2n+1)^s\frac{D(s-1)}{s}ds=(2n+1)\,(\tfrac{2}{3}n+\tfrac{1}{2})\,a_{2n+1}$$

Door combinatie dezer twee resultaten komt er na eenige herleiding:

$$\lim_{\omega=\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}(2n+1)^s\left(\frac{3\,D(s-1)}{4n+3}-\frac{D(s)}{4n+1}\right)\frac{ds}{s}=0.$$

§ 20. *Het theorema over het gemiddelde.*

Volgens een bekend theorema[1]) is:

$$\lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}f(\beta+it)\,g(\gamma-it)\,dt=\sum_{1}^{\infty}b_n\,c_n\,e^{-\lambda_n(\beta+\gamma)}$$

als $f(s)=\sum_{1}^{\infty}b_n e^{-\lambda_n s}$ voor $\sigma=\beta$ en

$g(s)=\sum_{1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n s}$ voor $\sigma=\gamma$ absoluut convergeeren.

Kiezen we $f(s)=D(s)$ en $g(s)=\zeta(s)$ dan wordt dit:

$$\lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}D(\beta+it)\,\zeta(\gamma-it)\,dt=\sum a_{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^{\beta+\gamma}}=D(\beta+\gamma).$$

$$(1)\quad .\ .\ .\ \lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2}\int_{-\omega}^{\omega}D(\beta+it)\,\zeta(\gamma-it)\,dt=D(\beta+\gamma)$$

$$\beta>\tfrac{1}{2}\qquad\gamma>1$$

Gemakkelijk is aan te toonen dat deze formule ook geldt voor voor geheel willekeurige reëele waarden van β en γ. We beschouwen daartoe de integraal

$$\int D(z)\,\zeta(s-z)\,dz.$$

Als integraalweg nemen we den omtrek van een rechthoek die aldus bepaald is

$$z=x+iy$$

$$\beta>x>\beta'\qquad\qquad \omega>y>-\omega.$$

Volgens de residuenstelling van Cauchy is deze integraal gelijk

[1]) Handbuch II pag. 776.

aan $2\pi i$ maal de som van de residuen der polen die binnen den rechthoek liggen:

$$i\int_{-\omega}^{\omega} D(\beta+it)\,\zeta(s-\beta-it)dt+\int_{\beta}^{\beta'} D(x+i\omega)\,\zeta(s-x-i\omega)\,dx\,+$$

$$+\,i\int_{\omega}^{-\omega} D(\beta'+it)\,\zeta(s-\beta'-it)dt+\int_{\beta'}^{\beta} D(x-i\omega)\,\zeta(s-x+i\omega)\,dx=$$

$= 2\pi i \times$ som der residuen.

Deelen we alle termen door 2ω en gaan over tot de limiet $\omega = \infty$ dan verdwijnen de tweede en de vierde integraal omdat de integrandi nul worden, doordat $D(z)\,\zeta(s-z)$ voor $z = x \pm i\infty$ eindig is, Ook het rechterlid verdwijnt, dus blijft er alleen over

$$\lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega} D(\beta+it)\,\zeta(s-\beta-it)\,dt = \lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{+\omega} D(\beta'+it)\,\zeta(s-\beta'-it)\,dt$$

waaruit volgt:

$$(2)\quad .\ .\quad \lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{+\omega} D(\beta'+it)\,\zeta(\gamma'-it)\,dt = D(\beta'+\gamma')$$

waarbij nu β' en γ' willekeurig zijn, maar niet

$$\beta' = \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2} \ldots \text{ of } \gamma' = -1, -2, \ldots$$

HOOFDSTUK VII.

De reeks van Dirichlet voor de fuctie $\frac{1}{D(s)}$.

§ 21. *De reeks en hare convergentie.*

Stel dat voor $\sigma > \alpha$ de functie $\frac{1}{D(s)}$ in een reeks van Dirichlet kan ontwikkeld worden:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{D(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)^s}.$$

Nemen we verder aan dat de reeks absoluut convergeert voor $\sigma > \alpha$ dan zal de reeks, die ontstaat door de reeks uit (1) te vermenigvuldigen met de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)^s} = D(s),$$

convergeeren voor $\sigma > \alpha$ als $\alpha > \frac{1}{2}$. Deze productreeks moet echter, omdat

$$D(s) \cdot \frac{1}{D(s)} = 1,$$

voor alle waarden van s de waarde 1 bezitten. Hieruit volgt dat de coëfficienten der productreeks alle $= 0$ moeten zijn behalve $b_1 = 1$ [1]). Zooals gemakkelijk is na te gaan zijn deze coëfficienten van den vorm

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{d} a_d \, b_{\frac{2n+1}{d}} = 0$$

waarbij de sommatie loopt over alle deelers d van $2n+1$, de eenheid en 't getal zelf, ook als deelers beschouwd.

De betrekking (2) stelt ons in staat de coëfficienten b_{2n+1} uit te drukken in de coëfficienten a_{2n+1}.

---

[1]) Handbuch II, p. 742.

Ze geeft b.v., als $p, q, r \ldots$ priemgetallen voorstellen:

(3) . $b_p = -a_p \quad b_{pq} = -a_{pq} + 2a_pa_q \quad b_{p^2} = -a_{p^2} + a^2_p.$

Wordt met behulp dezer formules de getallenwaarde berekend van de coëfficienten b_{2n+1} zoo vindt men, omdat $b_1 = 1$:

$$b_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_5 = -\tfrac{3}{8} \quad b_7 = -\tfrac{5}{16} \quad b_9 = -\tfrac{3}{128}$$

$$b_{11} = -\tfrac{63}{256}, \quad b_{13} = -\tfrac{231}{1024} \quad b_{15} = \tfrac{339}{2048}.$$

Al deze coëfficienten hebben dus een waarde waarvan de modulus kleiner is dan de index. Wij kunnen nu bewijzen dat algemeen

(4) . . . . $| b_{2n+1} | < (2n+1)^{7/8}.$

Voor kleine waarden van n is dus aan deze ongelijkheid voldaan. Uit (2) volgt

(5) . . . . . . $| b_{2n+1} | < \sum\limits_d a_d \left| \frac{b_{2n+1}}{d} \right|.$

Alle b's uit het rechterlid hebben indices die kleiner zijn dan $(2n+1)^{7/8}$. Als dus ondersteld wordt dat voor alle b's, waarvan de index kleiner is dan $2n+1$, aan (4) voldaan wordt, dan volgt uit (5):

$$| b_{2n+1} | < \sum_d a_d . \left(\frac{2n+1}{d}\right)^{7/8} \text{ of}$$

$$< (2n+1)^{7/8} \sum_d \frac{a_d}{d^{7/8}}$$

$$< (2n+1)^{7/8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)^{7/8}} = (2n+1)^{7/8} (\mathrm{D}(\tfrac{7}{8}) - 1)$$

het laatste omdat $d \geq 3$ is. Dus

$$| b_{2n+1} | < (2n+1)^{7/8} (\mathrm{D}(\tfrac{7}{8}) - 1)$$
$$< (2n+1)^{7/8}$$

zie de benadering van $\mathrm{D}(\frac{7}{8})$ in § 22.

Het blijkt dus dat ook

$$| b_{2n+1} | < (2n+1)^{7/8}$$

(4) is dus algemeen geldig. Hieruit volgt nu direct dat de reeks (1) absoluut convergeert voor $\sigma > 1\frac{7}{8}$ want in dat geval zijn de termen kleiner dan de overeenkomstige termen van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{\sigma - 7/8}}$$

en deze convergeert, zooals bekend is voor $\sigma > 1\frac{7}{8}$. Voor $\sigma > 1\frac{7}{8}$ geldt dus nu:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{1}{D(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)^s}.$$

Hiermede is echter de convergentielijn van de reeks uit (1) niet gevonden, want omdat uit de berekende waarden van b_{2n+1} blijkt dat ze van veel lagere orde dan

$$(2n+1)^{7/8}$$

zijn, ligt het vermoeden voor de hand dat de reeks ook nog voor veel kleiner waarden van σ zal convergeeren, vooral omdat bewezen is dat $D(s)$ geen nullen heeft voor $\sigma > \frac{7}{8}$ en dus $\frac{1}{D(s)}$ holomorph is in het gebied $\sigma > \frac{7}{8}$. Maar, zooals in de inleiding is gezegd, wordt de convergentielijn niet bepaald door de polen.

Ik vermoed dat de reeks uit (1) convergeert voor $\sigma > \frac{1}{2}$ en misschien wel voor $\sigma > 0$. Dit vermoeden wordt gewettigd door het heuristisch bewijs van § 23.

§ 22. *Benadering van* $D(\frac{7}{8})$.

Uit de reeks van Dirichlet volgt

$$D(\tfrac{7}{8}) > D(1) \quad \text{dus}$$

$$D(\tfrac{7}{8}) > \frac{\pi}{2} = 1{,}5707.$$

Verder is

$$D(\tfrac{7}{8}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{7}{8})} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[8]{x}\sqrt{(e^{2x}-1)}}$$

$$\Gamma(\tfrac{7}{8})\, D(\tfrac{7}{8}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[8]{x}\sqrt{(e^{2x}-1)}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[8]{x}\sqrt{(e^{2x}-1)}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[8]{x}\sqrt{(1+x)x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(e^{2x}-1)}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-5/8}(1+x)^{-1/2} - \int_1^\infty \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(1-e^{-x})}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left\{ x^{-5/8} + \tfrac{1}{2}x^{3/8} + \tfrac{3}{8}\, x^{11/8} \right\} dx - \arcsin e^{-x} \Big|_1^\infty$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{11} + \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{8}{19} \right\} + \arc \sin \frac{1}{e}$$

$$< 2{,}1168.$$

$$D(\tfrac{7}{8}) < \frac{2{,}1168}{1{,}09}$$

$$D(\tfrac{7}{8}) < 2.$$

Op soortgelijke wijze vindt men

$$D(\tfrac{3}{4}) < 2{,}3, \quad D(\tfrac{5}{6}) < 2{,}05$$

§ 23. *Afleiding van de betrekking:*

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \quad \sum_{n=0}^{x} \left[\frac{2x+1}{2n+1}\right]' a_{\left[\frac{2x+1}{2x+1}\right]} b_{2n+1} = 1.$$

De formule (2) § 21

$$\sum_{d} a_d \, b_{\frac{2n+1}{d}} = 0$$

sommeeren we van $n = 0$ tot $n = x$ en vinden dan, omdat $b_1 = 1$:

$$\sum_{n=0}^{x} \sum_{d} a_d \, b_{\frac{2n+1}{d}} = 1.$$

Hiervoor mag ook geschreven worden:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \sum_{n=0}^{x} \sum_{d} a_{\frac{2n+1}{d}} \, b_d = 1$$

want als d een deeler van $2n + 1$ is, is $\frac{2n+1}{d}$ er ook een.

Als voorbeeld geef ik het geval dat $n = 5$:

$$b_1 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) + (a_5 b_1 + a_1 b_5) + (a_7 b_1 + a_1 b_7) +$$
$$+ (a_9 b_1 + a_3 b_3 + a_1 b_9) + (a_{11} b_1 + a_1 b_{11}) = 1.$$

Merken we nu eerst op dat d in (2) alle deelers doorloopt van de oneven getallen 1 tot $2x + 1$; m. a. w. d doorloopt alle oneven getallen van 1 tot $2x + 1$. De volgorde der sommatie uit (2) keeren we om:

$$\sum_{d} b_d \sum_{n=0}^{x} a_{\frac{2n+1}{d}} = 1.$$

De som $\sum_{n=0}^{n} a_{\frac{2n+1}{d}}$ bevat dan alle coëfficienten a waarvoor $\frac{2n+1}{d}$

een geheel getal is, en de sommatie moet dus geschieden over alle waarden van n waarvoor $\frac{2n+1}{d}$ een geheel, oneven getal is en die kleiner dan x zijn. Zij k het grootste oneven getal $< \frac{2x+1}{d}$ dan is dus

$$\sum_{n=0}^{x} a_{\frac{2n+1}{d}} = a_1 + a_3 + \ldots + a_k = k a_k$$

het laatste volgens de eigenschap (4) § 2.

Volgens de bepaling van k is

$$k = \left[\frac{2x+1}{d}\right]$$

of als dit getal even is

$$k = \left[\frac{2x+1}{d}\right] - 1.$$

Wanneer nu verder door het symbool

$$\left[\frac{2x+1}{d}\right]'$$

wordt aangeduid het getal

$$\left[\frac{2x+1}{d}\right]$$

of datzelfde getal verminderd met de eenheid, al naar gelang $\left[\frac{2n+1}{d}\right]$ oneven of even is, dan is dus bewezen dat

$$\sum_{d} b_d \left[\frac{2x+1}{d}\right]' a_{\left[\frac{2x+1}{d}\right]'} = 1.$$

Omdat echter, zooals reeds gezegd is, d alle oneven getallen $\leq 2x+1$ doorloopt, kan dit laatste resultaat ook aldus worden uitgedrukt:

$$\sum_{n=0}^{x} \left[\frac{2x+1}{2n+1}\right]' a_{\left[\frac{2x+1}{2n+1}\right]'} b_{2n+1} = 1.$$

Voorbeeld: $x = 7$.

$$15a_{15}b_1 + 5a_5b_3 + 3a_3b_5 + a_1b_7 + a_1b_9 + a_1b_{11} + a_1b_{13} + a_1b_{15} = 1.$$

§ 24. *Heuristisch bewijs voor de convergentie voor $\sigma = \frac{1}{2}$.*

Door de formule (1) § 23 kan een heuristisch bewijs gegeven worden van het volgende theorema:

De reeks

$$1+\frac{b_3}{3^s}+\frac{b_5}{5^s}+\dots$$

convergeert voor $s=\frac{1}{2}$ *en heeft dan de waarde 0.*

Ik schrijf de formule als volgt:

$$(1)\; b_1+\frac{\left[\frac{2x+1}{3}\right]' a_{\left[\frac{2x+1}{3}\right]}}{(2x+1)\,a_{2x+1}}\,b_3+\frac{\left[\frac{2x+1}{5}\right]' a_{\left[\frac{2x+1}{5}\right]'}}{(2x+1)\,a_{2x+1}}\,b_5+\dots+\frac{1}{(2x+1)\,a_{2x+1}}=$$

$$=\frac{1}{(2x+1)\,a_{2x+1}}$$

en bepaal eerst

$$\lim_{x=\infty}\frac{\left[\frac{2x+1}{2n+1}\right]' a_{\left[\frac{2x+1}{2n+1}\right]'}}{(2x+1)\,a_{2x+1}}=l$$

door middel van de formule (3) § 3

$$\lim a_{2k+1}=\lim\frac{c}{\sqrt{(2k+1)}}$$ vind ik:

$$l=\frac{c\sqrt{\left[\frac{2x+1}{2n+1}\right]'}}{c\sqrt{(2x+1)}}=\sqrt{\frac{\frac{2x+1}{2n+1}-\varepsilon-1'}{2x+1}}.$$

Het teeken $1'$ beteekent 1 of 0.

$$l=\sqrt{\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{\varepsilon+1'}{2x+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

De termen van bovengenoemde formule (1) naderen derhalve tot:

$$b_1+\frac{b_3}{\sqrt{3}}+\frac{b_5}{\sqrt{5}}\dots\text{ enz.}$$

Het rechterlid nadert tot 0 dus is

$$(2)\;\dots\dots\dots\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)}}=0.$$

De reeks

$$\sum\frac{b_{2n+1}}{(2n+1)^s}$$

convergeert derhalve voor $s=0$ en dus volgens de bekende theorie ook voor $s>0$.

Nu heb ik dit genoemd een heuristisch bewijs en wel om de volgende reden. Terwijl de termen, bij bovenstaande limietovergang, naderen tot $\frac{b_{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)}}$ resp., wordt het aantal termen steeds grooter. Hoe grooter echter x wordt, hoe meer termen van (1) tot coëfficient hebben

$$\frac{1}{(2x+1)\,a_{2x+1}}$$

en deze uitdrukking nadert niet tot $\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}$ zooals eigenlijk ondersteld is, maar tot $\frac{1}{\sqrt{(2x+1)}}$. Om kort te gaan:

Om (2) te bewijzen zou men moeten bepalen

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{b_3}{\sqrt{3}}+\frac{b_5}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{b_{2x+1}}{\sqrt{(2x+1)}}\right)$$

en dit is bij de boven doorgevoerde limietovergang niet geschied.

De overeenkomstige kwestie als hier behandeld is, vindt men bij de ζ-functie van Riemann. Euler leidde reeds in 1748 langs heuristischen weg de betrekking

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0$$

af. Doch eerst in 1897 gelukte het von Mangoldt dit langs streng exacten weg te bewijzen, met behulp van door Hadamard ontdekte theorema's.

§ 25. *Over het teeken en over benaderde waarden van de coëfficienten b.*

1°. Zij $2n+1=p^2$, p priem, dan is b_{2n+1} negatief en

$$-\frac{0{,}2112}{\sqrt{(2n+1)}}<b_{2n+1}<-\frac{0{,}0807}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

Voor $n=4$ geldt hetzelfde teeken.

Bewijs: We weten dat

$$b_{p^2}=-a_{p^2}+a_p^2.$$

Door middel van de in § 3 afgeleide grenswaarden voor a_{2n+1}, volgt hieruit, als $n>1$:

$$b_{p^2}<-\frac{0{,}797}{\sqrt{p^2}}+\frac{0{,}8463^2}{\sqrt{p^2}}<-\frac{0{,}0807}{\sqrt{p^2}}$$

$$b_{p^2}>-\frac{0{,}8463}{\sqrt{p^2}}+\frac{0{,}797^2}{\sqrt{p^2}}>-\frac{0{,}2112}{\sqrt{p^2}}.$$

2°. Als $2n+1=pq$, p en q priem, dan is b_{2n+1} positief en

$$\frac{0,4239}{\sqrt{(2n+1)}} < b_{2n+1} < \frac{0,6355}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

We weten dat

$$b_{2n+1} = -a_{2n+1} + 2a_p a_q.$$

Dus

$$b_{2n+1} < -\frac{0,797}{\sqrt{(2n+1)}} + 2 \cdot \frac{0,8463^2}{\sqrt{(2n+1)}} < \frac{0,6355}{\sqrt{(2n+1)}}$$

$$b_{2n+1} > -\frac{0,8463}{\sqrt{(2n+1)}} + 2\,\frac{0,797^2}{\sqrt{(2n+1)}} > \frac{0,4239}{\sqrt{(2n+1)}}.$$

Langs dezen weg kunnen we echter niet verder komen. De getallen, zooals 0,6355 en 0,4239, worden steeds grooter en houden niet meer hetzelfde teeken zooals in beide bovenstaande gevallen.

Uit de berekende waarden van b_{2n+1} schijnt te volgen dat het teeken van b_{2n+1} gelijk is aan $(-1)^{\varrho}$ als ϱ het aantal verschillende priemfactoren van $2n+1$ is. Ik heb dit echter niet kunnen bewijzen.

§ 26. *Tabel van de coëfficienten a en b* [1]).

	a_{2n+1}		b_{2n+1}	
$2n+1$	exacte waarde.	waarde in 4 decimalen.	exacte waarde.	waarde in 4 decimalen.
1.	1	1,0000		
3.	$\frac{1}{2}$	0,5000		
5.	$\frac{3}{2^3}$	0,3750		
7.	$\frac{5}{2^4}$	0,3125		
9.	$\frac{5.7}{2^7}$	0,2734	$-\frac{3}{2^7}$	— 0,0234
11.	$\frac{3^2.7}{2^8}$	0,2460		
13.	$\frac{3.7.11}{2^{10}}$	0,2255		

[1]) Omdat $b_{2n+1} = -a_{2n+1}$ als $2n+1 =$ priemgetal, heb ik die getallen b_{2n+1} niet ingevuld.

$2n+1$	a_{2n+1} exacte waarde.	a_{2n+1} waarde in 4 decimalen.	b_{2n+1} exacte waarde.	b_{2n+1} waarde in 4 decimalen.
15	$\frac{3.11.13}{2^{11}}$	0,2094	$\frac{3.113}{2^{11}}$	0,1656
17	$\frac{3^2.5.11.13}{2^{15}}$	0,1963		
19	$\frac{5.11.13.17}{2^{16}}$	0,1854		
21	$\frac{11.13.17.19}{2^{18}}$	0,1761	$\frac{35731}{2^{18}}$	0,1363
23	$\frac{3.7.13.17.19}{2^{19}}$	0,1681		
25	$\frac{7.13.17.19.23}{2^{22}}$	0,1611	$-\frac{5.43.401}{2^{22}}$	— 0,0206
27	$\frac{7.17.19.23.25}{2^{23}}$	0,1549	$-\frac{3^3.19.107}{2^{23}}$	— 0,0065

$2n+1$	a_{2n+1} waarde in 4 decimalen.	b_{2n+1} waarde in 4 decimalen.	$2n+1$	a_{2n+1} waarde in 4 decimalen.	b_{2n+1} waarde in 4 decimalen.
29	0,1494		69	0,0964	0,0717
31	0,1444		71	0,0950	
33	0,1399	0,1016	73	0,0937	
35	0,1358	0,0986	75	0,0924	0,0148
37	0,1320		77	0,0912	0,0625
39	0,1286	0,0999	79	0,0900	
41	0,1253		81	0,0889	— 0,0019
43	0,1223		83	0,0878	
45	0,1196	0,0136	85	0,0868	0,0604
47	0,1170		87	0,0858	0,0636
49	0,1146	— 0,0170	89	0,0848	
51	0,1123	0,0840	91	0,0839	0,0571
53	0,1101		93	0,0830	0,0615
55	0,1081	0,0764	95	0,0821	0,0570
57	0,1061	0.0793	97	0,0812	
59	0,1043		99	0,0804	0,0095
61	0,1026		101	0,0796	
63	0,1009	0,0117	103	0,0788	
56	0,0993	0,0698	105	0,0781	— 0,0309
67	0,0978				

§ 27. *De algemeene uitdrukking der coëfficiënten* b_{2n+1}.

Het doel is te bewijzen dat

$$(1) \quad b_{2n+1} = \sum (-1)^{\mu+\nu+\varrho\ldots} \frac{(\mu+\nu+\varrho\ldots)!}{\mu!\,\nu!\,\varrho!\ldots} a_k^\mu a_j^\nu a_i^\varrho \ldots$$

als de sommatie loopt over alle stellen waarden die voldoen aan

$$k^\mu j^\nu i^\varrho \ldots = 2n+1.$$

Door middel van (2) § 21 vindt men, door herhaalde toepassing dezer betrekking:

$$b_9 = -a_9 + a_3^2$$
$$b_{15} = -a_{15} + 2a_3 a_5$$
$$b_{45} = -a_{45} + 2a_3 a_{15} + 2a_5 a_9 - 3a_3^2 a_5$$

enz.

Hierdoor blijkt dat aan (1) voldaan wordt voor kleine waarden van $2n+1$. Nemen we dus aan dat (1) geldt voor alle waarden van n van $n=1$ tot $n=m$. Uit de betrekking (2) § 21 volgt dan

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad b_{2m+3} = -a_{2m+3} - \sum_d a_d b_{\frac{2m+3}{d}}.$$

Ten eerste is nu duidelijk dat alle termen van den vorm

$$a_k^\mu a_j^\nu \ldots\ldots \qquad k^\mu j^\nu \ldots\ldots = 2m+3$$

in de uitdrukking voor b_{2m+3} moeten voorkomen; want in $b_{\frac{2m+3}{d}}$ komen zulke termen voor, en zij worden vermenigvuldigd met a_d. Gaan we na wat de coëfficient wordt van een willekeurigen term, van b_{2m+3} bijv:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_k^\mu a_j^\nu a_i^\varrho \ldots\ldots$$

waarbij dus

$$k^\mu j^\nu i^\varrho \ldots = 2m+3.$$

Uit (2) volgt dat deze term ontstaat uit de termen:

$$a_k b_{\frac{2m+3}{k}},\; a_j b_{\frac{2m+3}{j}},\; a_i b_{\frac{2m+3}{i}}, \ldots\ldots$$

De coëfficienten dezer termen zijn resp.:

$$(-1)^{\mu-1+\nu+\varrho+\ldots} \frac{(\mu-1+\nu+\ldots)!}{(\mu-1)!\,\nu!\,\varrho!\ldots};\; (-1)^{\mu+\nu-1+\varrho\ldots} \frac{(\mu+\nu-1+\varrho+\ldots)!}{\mu!\,(\nu-1)!\,\varrho!\ldots};$$

enz.

Om dus de coëfficient van den term (3) te krijgen, moeten wij de hierboven genoemde coëfficienten optellen en met tegengesteld teeken nemen, volgens (2). Er komt dan:

$$(-1)^{\mu+\nu+\varrho+\dots} \frac{(\mu-1+\nu+\dots)!}{\mu!\,\nu!\,\varrho!\dots}(\mu+\nu+\varrho\dots)=$$

$$=(-1)^{\mu+\nu+\varrho+\dots} \frac{(\mu+\nu+\varrho+\dots)!}{\mu!\,\nu!\,\varrho!\dots}.$$

Hiermede is het gestelde bewezen.

Als we in de reeks voor D (s) de coëfficienten a_{2n+1} alle vervangen door de eenheid, dan gaat de reeks over in:

$$1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\dots$$

en de reeks voor $\frac{1}{D(s)}$ gaat over in

$$\sum \frac{\mu(2n+1)}{(2n+1)^s}$$

zooals bekend is uit de theorie van de ζ-functie. $\mu(2n+1)$ is hier de bekende getallen-theoretische functie, die gedefinieerd is als volgt:

$\mu(2n+1)=0$ als $2n+1=$ kwadraat.
$=1$ als $2n+1$ kwadraatvrij is en een even aantal verschillende priemfactoren bevat.
$=-1$ als $2n+1$ kwadraatvrij is en een oneven aantal verschillende priemfactoren bevat.

Door in (1) ook alle a's door de eenheid te vervangen vindt men omdat (1) eigenlijk voor alle reeksen, d.w.z. voor alle coefficienten a met de bijbehoorende b's geldt:

$$(4) \quad \dots \quad \sum (-1)^{\mu+\nu+\dots} \frac{\mu+\nu+\dots}{\mu!\,\nu!\dots} = \mu(2n+1)$$

waarbij de sommatie loopt over alle stellen waarden waarvoor

$$k^{\mu}\, j^{\nu}\dots = 2n+1.$$

HOOFDSTUK VIII.

Over de nullen van D(s).

§ 28. *Er zijn geen nullen waarvan* $\sigma > \frac{7}{8}$ *is.*

Uit de reeks van Dirichlet volgt direct dat de functie D(*s*) geen reëele nullen heeft waarvan $\sigma > \frac{1}{2}$, want voor een dusdanige waarde van *s* zijn alle termen van de reeks positief.

De functie heeft geen nullen in het gebied $\sigma \geq \frac{7}{8}$.

Bewijs:

$$D(s) = 1 + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_5}{5^s} + \ldots.$$

$$D(s) - 1 = \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_5}{5^s} + \ldots.$$

$$| D(s) - 1 | \leq \frac{a_3}{3^\sigma} + \frac{a_5}{5^\sigma} + \ldots.$$

Zij $\eta \leq \sigma$ dan is

$$| D(s) - 1 | \leq \frac{1}{3^{\sigma-\eta}} \frac{a_3}{3^\eta} + \frac{1}{5^{\sigma-\eta}} \frac{a_5}{5^\eta} + \ldots.$$

Nemen we bovendien aan dat $\eta = \frac{7}{8}$ dan is

$$\begin{aligned} | D(s) - 1 | &\leq \frac{1}{3^{\sigma-\eta}} \left(\frac{a_3}{3^\eta} + \frac{a_5}{5^\eta} + \ldots \right) \\ &\leq \frac{1}{3^{\sigma-\eta}} (D(\tfrac{7}{8}) - 1) \\ &\leq \frac{1}{3^{\sigma-7/8}} (D(\tfrac{7}{8}) - 1). \end{aligned}$$

Nu is $D(\frac{7}{8}) < 2$ zie § 22, dus $| D(s) - 1 | < \frac{1}{3^{\sigma-7/8}}$. Dus $| D(s) | > 1 - \frac{1}{3^{\sigma-7/8}} > 0$ zooals te bewijzen was.

Uit het theorema, dat in § 24 langs heuristischen weg bewezen is, n.l. dat de reeks

$$\frac{1}{\mathrm{D}(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)^s}$$

convergeert voor $\sigma \geq \frac{1}{2}$, zou volgen dat de functie $\mathrm{D}(s)$ geen nullen heeft in het geheele convergentiegebied $\sigma > \frac{1}{2}$.

§ 29. *Over de nullen op de reëele as.*

Formule (4) van § 9 stelt de functie in 't geheele vlak voor. De Γ-functie, die in den noemer optreedt, heeft zooals we weten, polen in de punten

$$0, \; -1, \; -2, \ldots .$$

Omdat de integraal uit (4) voor deze waarden van s eindig is en de reeks uit (4) voor die waarden convergeert, zal de functie $\mathrm{D}(s)$ in die punten nullen hebben, en wel enkelvoudige, omdat de polen van $\Gamma(s)$ ook enkelvoudig zijn.

We zullen nu bewijzen dat de functie geen nullen heeft tusschen $s = \frac{1}{2}$ en $s = -\frac{1}{2}$ op de reëele as behalve in $s = 0$. Daartoe gebruiken we de formule (1) § 8 die na een kleine herleiding overgaat in:

$$\Gamma(s)\,\mathrm{D}(s) = \frac{1}{2s-1} \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{(e^{2x}-1)^{3/2}}\, dx.$$

Voor s nemen we een reëele waarde tusschen $-\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$. De integrand heeft dan in 't geheele integratie-gebied een positieve waarde want de noemer is steeds positief en om te bewijzen dat de teller hetzelfde teeken heeft is het voldoende aan te toonen dat

$$2xe^{2x} + 1 > e^{2x}$$

dus dat $1 + 2x + \frac{(2x)^2}{1!} + \frac{(2x)^3}{2!} + \ldots > 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots$

Het laatste blijkt onmiddellijk want iedere term van het linkerlid is grooter dan den overeenkomstigen term van het rechterlid. De integraal heeft derhalve eene positieve waarde.

De factor $\frac{1}{2s-1}$ is in 't genoemde gebied negatief. Verder is het bekend dat $\Gamma(s)$ voor $-\frac{1}{2} < s < 0$ negatief is en voor $\frac{1}{2} > s > 0$ positief. Dus heeft $\mathrm{D}(s)$ voor $-\frac{1}{2} < s < 0$ een positieve waarde en voor $\frac{1}{2} > s > 0$ een negatieve. Tusschen $-\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ heeft dus $\mathrm{D}(s)$ derhalve geen andere nullen dan $s = 0$.

HOOFDSTUK IX.

De reeks van Dirichlet voor log D (s).

§ 30. *De reeks voor log D (s) en hare convergentie.*

Wanneer bewezen was dat de functie D(s) geen nullen heeft waarvan het reëele deel $> \frac{1}{2}$ is dan zou daarmede tevens aangetoond zijn, dat de reeks, die als exponent fungeert in de betrekking:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad D(s) = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n+1}}{(2n+1)^s}}$$

convergeert voor $R(s) > \frac{1}{2}$.

Immers is het volgende theorema bewezen [1]):

Is
$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-l_n s}$$

een reeks van Dirichlet die tot convergentielijn heeft de lijn $\sigma = \alpha$ en die absoluut convergeert in een zeker gebied, terwijl $f(s) \neq 0$ voor $\sigma > \alpha$, dan geldt eveneens voor $\sigma > \alpha$ de ontwikkeling

$$f(s) = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}}$$

m. a. w. de exponent-reeks heeft $\sigma = \alpha$ tot convergentielijn.

Daar echter niet exact bewezen is dat D (s) geen nullen heeft waarvan het reëele deel grooter dan $\frac{1}{2}$ is, kunnen we dit theorema niet toepassen en moeten we ons tevreden stellen met een minder zeggend theorema [2]):

Er is een getal G, zoodat de functie D (s) geen nullen heeft

---

[1]) Handbuch II pag. 861.

[2]) Handbuch II pag. 746.

waarvan het reëele deel grooter is dan G en in dat gebied geldt (1).

In § 22 is aangetoond dat $G = \frac{7}{8}$. In het gebied $R(s) > \frac{7}{8}$ geldt derhalve (1). Maar de convergentielijn van de exponentreeks uit (1) is hiermede niet vastgesteld.

Uit (1) volgt nu

$$\log D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n+1}}{(2n+1)^s}.$$

Door differentiatie volgt hieruit:

$$\frac{D'(s)}{D(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n+1} \log (2n+1)}{(2n+1)^s}$$

en

$$D'(s) = -D(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n+1} \log (2n+1)}{(2n+1)^s}.$$

Door voor $D'(s)$ en $D(s)$ de reeksen in de plaats te stellen, wordt door vermenigvuldiging gevonden een betrekking tusschen de coëfficienten:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad a_{2n+1} \log (2n+1) = \sum_{d} a_d \, c_{\frac{2n+1}{d}} \log \frac{2n+1}{d}$$

waarbij de sommatie loopt over alle deelers d van $2n+1$, de eenheid meegerekend.

Door herhaalde toepassing dezer betrekking wordt gevonden:

$$c_p = a_p \qquad c_{p^2q} = a_{p^2q} - a_p a_{pq} + a_p^2 a_q - a_{p^2} a_q$$

$$c_{pq} = a_{pq} - a_p a_q \qquad c_{pqr} = a_{pqr} - a_p a_{qr} - a_q a_{pr} - a_r a_{pq} + 2 a_p a_q a_r$$

$$c_{p^2} = a_{p^2} - \tfrac{1}{2} a_p^2 \qquad c_{p^3} = a_{p^3} - a_p a_{p^2} + \tfrac{1}{3} a_p^3.$$

In deze voorbeelden verdwijnen dus de log. geheel. Ze geven de volgende getallenwaarden:

$$c_9 = \frac{19}{2^7} \qquad c_{45} = 0{,}0061 \ldots.$$

$$c_{15} = \frac{3^2 . 5}{2^{11}} \qquad c_{105} = -0{,}0041 \ldots.$$

$$c_{21} = \frac{3 . 23 . 521}{2^{16}}$$

$$c_{25} = \frac{5 . 47 . 269}{2^{22}}.$$

§ 31. *Algemeene uitdrukking voor de coëfficienten* c_{2n+1}.

De, op de vorige bladzijde, gevonden formules voor c_{pq}, c_{p^2} enz. zijn byzondere gevallen van de volgende formule:

$$(1)\quad c_{2n+1} = \sum (-1)^{\mu+\nu+\varrho+\dots-1} \frac{(\mu+\nu+\varrho+\dots-1)!}{\mu!\,\nu!\,\varrho!\dots} a_i^{\mu} a_j^{\nu} a_k^{\varrho}\dots$$

$$2n+1 = i^{\mu} j^{\nu} k^{\varrho}\dots$$

terwijl de sommatie loopt over de stellen waarden van $\mu, \nu, \varrho \dots i, j, k, \dots$ die voldoen aan de vergelijking

$$2n+1 = i^{\mu} j^{\nu} k^{\varrho}\dots$$

Aan deze formule voor c_{2n+1} wordt dus voldaan voor eenige kleine waarden van n. Door een bewijs van n op $n+1$ bewijzen we nu de algemeene geldigheid. Nemen we dus aan dat de formule geldt voor alle waarden van n tot aan m, dus ook nog voor c_{2m+1}. Volgens (2) § 30 is:

$$a_{2m+3} \log(2m+3) = \sum_d a_d\, c_{\frac{2m+3}{d}} \log \frac{2m+3}{d}.$$

Lossen we hieruit c_{2m+3} op:

$$(2)\quad c_{2m+3} \log(2m+3) = a_{2m+3} \log(2m+3) - \sum_d a_d\, c_{\frac{2m+3}{d}} \log \frac{2m+3}{d}.$$

Alle deelers d van $2m+3$, zijn kleiner dan $2m+1$, dus voor alle c's uit het rechterlid geldt (1). Om nu te laten zien dat alle door (1) vereischte termen in het rechterlid van (2) voorkomen met de vereischte coëfficienten voorzien', kiezen we een willekeurig product:

$$a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} a_{\gamma}^{\varrho} \dots a_{\lambda}^{\sigma} \quad \text{waarbij } \alpha^{\mu} \beta^{\nu} \gamma^{\varrho} \dots \lambda^{\sigma} = 2m+3.$$

Dit ontstaat uit de volgende termen van (2):

1⁰. Uit $a_{\alpha}\, c_{\frac{2m+3}{\alpha}} \log \frac{2m+3}{\alpha}$,

met de coëff. $-(-1)^{\mu-1+\nu+\dots+\sigma-1} \dfrac{(\mu-1+\nu+\dots+\sigma-1)!}{(\mu-1)!\,\nu!\dots\sigma!} \log \dfrac{2m+3}{\alpha}$

2⁰. Uit $a_{\beta}\, c_{\frac{2m+3}{\beta}} \log \frac{2m+3}{\beta}$,

met de coëff. $-(-1)^{\mu+\nu-1+\dots+\sigma-1} \dfrac{(\mu+\nu-1+\dots+\sigma-1)!}{\mu!\,(\nu-1)!\dots\sigma!} \log \dfrac{2m+3}{\beta}$

3^0. Uit $\underset{\gamma}{a_\gamma}\, c_{2m+3} \log \frac{2m+3}{\gamma}$,

met de coëff. — $(-1)^{\mu+\nu+\varrho-1+..\sigma-1} \frac{(\mu+\nu+\varrho-1+..+\sigma-1)!}{(\mu!\nu!(\varrho-1)!..\sigma!} \log \frac{2m+3}{\gamma}$

4^0. enz.

De coëfficient van het uitgekozen product wordt derhalve gelijk aan de som van al de genoemde coëfficienten; dus gelijk aan

$$(-1)^{\mu+\nu+\pi+....+\sigma-1} \frac{(\mu+\nu+\varrho+....+\sigma-2)!}{\mu!\,\nu!\,....\,\sigma!} \left\{\mu \log \frac{2m+3}{\alpha} + \nu \log \frac{2m+3}{\beta} + \ldots\right\}$$

$$= (-1)^{\mu+\nu+....+\sigma-1} \frac{(\mu+\nu+\varrho+....-2)!}{\mu!\,\nu!\,....\,\sigma!} \log \frac{(2m+3)^{\mu+\nu+....\sigma}}{\alpha^\mu \beta^\mu \gamma^\mu .... \lambda^\mu}$$

$$= (-1)^{\mu+\nu+....\sigma-1} \frac{(\mu+\nu+\varrho+....-2)!}{\mu!\,\nu!\,....\,\sigma!} \log (2m+3)^{\mu+\nu+....+\sigma-1}$$

$$= (-1)^{\mu+\nu+....+\sigma-1} \frac{(\mu+\nu+\varrho+\ldots-1)!}{\mu!\,\nu!\ldots\sigma!} \log (2m+3).$$

Hieruit blijkt dat men alle termen door $\log(2m+3)$ kan deelen, waarmede bewezen is dat (1) ook geldt voor $2m+3$ en derhalve algemeen geldig is.

Neemt men in (1) alle coëfficienten $a = 1$ dan gaat de reeks voor $D(s)$ over in de reeks

$$1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots.$$

Hiervoor is, volgens de theorie der ζ-functie van Riemann:

$c_{2n+1} = 1$ als $2n+1 =$ priemgetal

$= \frac{1}{n}$ als $2n+1 = n^{\text{de}}$ macht van een priemgetal

$= 0$ als $2n+1$ meer dan 1 priemfactor bezit.

Derhalve is

$$(3) \quad \sum (-1)^{\mu+\nu+....-1} \frac{(\mu+\nu+....-1)!}{\mu!\,\nu!\,....} = \begin{cases} 1 \text{ als } 2n+1 \text{ priem is} \\ \frac{1}{n} \text{ als } 2n+1 = p^n \\ 0 \text{ als } 2n+1 \text{ meer dan} \\ \quad 1 \text{ priemfactor bezit} \end{cases}$$

en als de sommatie loopt over alle stellen waarden die voldoen aan

$$i^\mu j^\nu \ldots = 2n+1.$$

§ 32. *Betrekking tusschen de coëfficienten b en c.*

We weten dat:

$$\frac{1}{D(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)^s}$$

$$\frac{D'(s)}{D(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n+1}\log(2n+1)}{(2n+1)^s}$$

$$D'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}\log(2n+1)}{(2n+1)^s}.$$

Verder is

$$D'(s) \,.\, \frac{1}{D(s)} = \frac{D'(s)}{D(s)}.$$

Door dus de betreffende reeksen op Dirichlet'sche wijze te vermenigvuldigen en de coëfficienten van beide leden aan elkaar gelijk te stellen, vindt men

$$\sum_{d} a_d \, b_{\frac{2n+1}{d}} \log d = c_{2n+1} \log(2n+1)$$

waarbij de sommatie loopt over de deelers d van $2n+1$, het getal zelf als deeler meegerekend.

HOOFDSTUK X.

De Stirlingsche polynomia.

§ 33. *Afleiding van theorema's over de Stirlingsche polynomia.*

In deze § beschouwen we de polynomia $T_n(x)$ die door de volgende ontwikkeling gedefinieerd zijn:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{e^v - 1}{v}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(x)}{n!} v^n.$$

Nielsen[1]) bestudeerde dezelfde ontwikkeling maar schreef ze in een eenigszins anderen vorm. Zijne polynomia $\psi_n(x)$, die door de formule

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{(x+1)(n+1)!} T_{n+1}(-x-1)$$

in verband staan met de polynomia $T_n(x)$, heeft hij den naam van Stirlingsche polynomia gegeven. De polynomia $T_n(x)$ zijn bestudeerd door Prof. Dr. G. Frobenius[2]). De betrekkingen die hij vindt hebben een veel eleganter vorm dan die van Nielsen. Daarom heb ik de schrijfwijze (1) gekozen. De eigenschappen van de polynomia zal ik hierachter grootendeels langs anderen weg afleiden dan dit door Prof. Frobenius geschied is en aan de bekende formules nog een paar nieuwe toevoegen.

Hoewel de hierbedoelde polynomia $T_n(x)$ dus eigenlijk niet juist de Stirlingsche polynomia zijn, heb ik gemeend ze toch denzelfden naam te moeten geven omdat ze er zeer nauw mee samenhangen.

---

1) Handbuch der Theorie der Gamma-function p. 72.

2) Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome. Sitz. Ber. d. K. Preuss. Acad. v. W. Band XXXIX pag. 836.

1. Afleiding van de recurrente betrekking

$$(2) \quad . \quad . \quad (x+n)\,T_n(x) - x\,T_n(x-1) = nx\,T_{n-1}(x).$$

We differentieeren hiertoe (1) naar v:

$$x\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^{x-1} \cdot \frac{ve^v-(e^v-1)}{v^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{n-1}\,.\,nT_n(x)}{n!}$$

We schrijven

$$\frac{ve^v-(e^v-1)}{v^2} = \frac{e^v-1}{v} - \frac{e^v-1}{v^2} + \frac{1}{v}$$

waardoor we krijgen:

$$x\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^x - \frac{x}{v}\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^x + \frac{x}{v}\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{n-1}\,.\,nT_n(x)}{n!}.$$

Voor de termen uit het linkerlid stellen we de betreffende ontwikkelingen in de plaats en stellen daarna de coëfficienten van v^{n-1} uit beide leden aan elkaar gelijk:

$$x\frac{T_{n-1}(x)}{(n-1)!} - x\frac{T_n(x)}{n!} + x\frac{T_n(x-1)}{n!} = n\frac{T_n(x)}{n!} \qquad \text{of}$$

$$nxT_{n-1}(x) + xT_n(x-1) = (x+n)\,T_n(x)$$

hetgeen na eenige herleiding in 't gestelde overgaat.

2. Afleiding van het additie-theorema:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T_n(x+y) = (T(x)+T(y))^{(n)}.$$

Deze schrijfwijze is symbolisch. Na ontwikkeling van de macht moet voor iedere T^m in de plaats gezet worden T_m.

Door vermenigvuldiging van

$$\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^x = \sum \frac{T_n(x)}{n!}\,v^n \quad \text{met} \quad \left(\frac{e^v-1}{v}\right)^y = \sum \frac{T^n(y)}{n!}\,v^n$$

vindt men gemakkelijk

$$\left(\frac{e^v-1}{v}\right)^{x+y} = \sum \frac{1}{n!}\,(T(x)+T(y))^{(n)}\,v^n.$$

Stelt men voor 't eerste lid in de plaats, de ontwikkeling $\sum \frac{T_n(x+y)}{n!}\,v^n$ dan vindt men door gelijkstelling der coëfficienten uit beide leden, de te bewijzen formule.

3. Afleiding van de betrekking

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T_n(x) = (x - T(x))^{(n)}.$$

In de formule (1) vervangen we ν door $-\nu$:

$$\left(\frac{e^{-\nu}-1}{-\nu}\right)^x = \sum (-1)^n \frac{T_n(x)}{n!} \nu^n$$

Nu is

$$e^{-\nu x}\left(\frac{e^{\nu}-1}{\nu}\right)^x = \left(\frac{1-e^{-\nu}}{\nu}\right)^x = \left(\frac{e^{-\nu}-1}{-\nu}\right)^x.$$

Dus

$$\left(\frac{e^{-\nu}-1}{-\nu}\right)^x = e^{-\nu x}\left(\frac{e^{\nu}-1}{\nu}\right)^x = \sum (-1)^n \frac{T_n(x)}{n!} \nu^n$$

of

$$\sum (-1)^n \frac{x^n \nu^n}{n!} \sum \frac{T_n(x)}{n!} \nu^n = \sum (-1)^n \frac{T_n(x)}{n!} \nu^n.$$

Na vermenigvuldiging van het eerste lid vindt men weer door gelijkstelling der coëfficienten de te bewijzen formule.

4. Afleiding van

(5) . . . . $T_n(-1) = h^{(n)}$

waarbij het symbool $h^{(n)}$ aldus is gedefinieerd:

(6) . . . . $h^{(2n)} = (-1)^{n-1} B_n$; $h^{(2n+1)} = 0$; $h^1 = -\frac{1}{2}$.

De getallen B_n zijn de Bernoulliaansche getallen:

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66} \text{ enz.}$$

Stelt men in (1) $x = -1$ zoo vindt men

$$\frac{\nu}{e^{\nu}-1} = \sum \frac{T_n(-1)}{n!} \nu^n.$$

Volgens een bekende ontwikkeling is

$$\frac{\nu}{e^{\nu}-1} = \sum \frac{h^n}{n!} \nu^n.$$

Door gelijkstelling der coefficienten uit beide ontwikkelingen krijgt men de te bewijzen formule.

5. Afleiding van

(7) . . . . $T_n(1) = \frac{1}{n+1}$.

Uit (1) volgt voor $x = 1$

$$\frac{e^{\nu}-1}{\nu} = \sum \frac{T_n(1)}{n!} \nu^n.$$

Ook is echter

$$\frac{e^{\nu}-1}{\nu} = \frac{1}{1!} + \frac{\nu}{2!} + \frac{\nu^2}{3!} + \ldots.$$

Vergelijkt men weer deze beide reeksen dan ziet men de juistheid van (7) dadelijk in.

6. Afleiding van

(8) . . . . $T_n(-2) = -nh^{n-1} - (n-1)h^n$.

In (2) stellen we $x = -1$. Er komt dan

$$-n\,T_{n-1}(-1) - T_n(-2) = (n-1)\,T_n(-1).$$

Door toepassing van (5) volgt hieruit terstond (8).

7. Afleiding van

(9) . . . . $\dfrac{n}{x}\,T_n(x) = (T(x) - h)^{(n)} - T_n(x)$.

In (3) nemen we $y = -1$:

$$T_n(x-1) = (T(x) + T(-1))^n = (\text{volgens } (5))\;(T(x) + h)^n.$$

Maar volgens (1) is

$$T_n(x-1) = \left(1 + \frac{n}{x}\right) T_n(x) - n\,T_{n-1}(x)$$

zoodat

$$\left(1+\frac{n}{x}\right)T_n(x) - nT_{n-1}(x) = T_n(x) + \binom{n}{1}h_1\,T_{n-1}(x) + \binom{n}{2}h^2T_{n-2}(x) + \ldots.$$

Door gebruikmaking van (6) kan dit blijkbaar ook aldus worden geschreven:

$$\frac{n}{x}T_n(x) = T_n(x) - \binom{n}{1}h_1T_{n-1}(x) + \binom{n}{2}h^2T_{n-2}(x) - \binom{n}{3}h^3\,T_{n-3}(x) + \ldots - T_n(x)$$

of

(10) . . . . , . $\dfrac{n}{x}\,T_n(x) = (T - h)^n - T_n(x)$.

7. Afleiding van de formule

(11) . $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\binom{x+r}{r} S_{n-r}(x+1)\,T_r(x) = n\binom{x+n}{n}T_n(x)$

waarin $S_{n-r}(x+1)$ de functie van Bernoulli voorstelt, die voor geheele waarden van x is gedefinieerd door

$$S_n(x) = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (x-1)^n$$

en voor alle waarden van x door

$$S_n(x) = \frac{1}{n+1}\,\{(x+h)^{(n)} - h^{(n)}\}.$$

We vervangen in (1) x door $-x$:

$$(n-x)\,T_n(-x) + x\,T_n(-x-1) = -nx\,T_{n-1}(-x)$$

en substitueeren hierin

$$(12) \quad . \quad . \quad T_n(-x) = (-1)^n \frac{1}{\binom{x-1}{n}} F_n(x), \quad T_0(-x) = F_0(x).$$

Na een kleine herleiding en na vermenigvuldiging met $\binom{x-1}{n}$ vinden we dan:

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_n(x+1) - F_n(x) = x F_{n-1}(x).$$

Hieruit zullen we den algemeenen vorm van de functie $F_n(x)$ bepalen voor 't geval dat x een geheel getal is. Door differentiatie van (1) naar v en na deeling door v vindt men gemakkelijk

$$T_1(x) = \tfrac{1}{2}x$$

waaruit volgt, door de substitutie (12):

$$F_1(x) = \tfrac{1}{2}x(x-1).$$

Onderstellen we nu voorloopig dat x een heel getal is dan is dus $F_1(x)$ gelijk aan de som van de getallen van 1 tot en met $x-1$. In 't algemeen bewijzen we daarom dat $F_n(x)$ gelijk is aan de som der producten n aan n van de getallen $1, 2, 3 \ldots .$ $x-1, 0, 0 \ldots .$

Nemen we aan dat dit laatste zoo is voor $n = 1, 2, \ldots . m.$ Volgens (13) is

$$\begin{aligned}
&F_{m+1}(x) - F_{m+1}(x-1) = (x-1)F_m(x-1)\\
&F_{m+1}(x-1) - F_{m+1}(x-2) = (x-2)F_m(x-2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F_{m+1}(2) - F_{m+1}(1) = 1 \,.\, F_m(1)\\
\hline
&F_{m+1}(x) - F_{m+1}(1) = (x-1)F_m(x-1) + (x-2)F_m(x-2) + \ldots + 1 \,.\, F_m(1).
\end{aligned}$$

Volgens (10) is

$$F_n(x) = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!} T_n(-x).$$

Daar $T_n(-1) = h^n$ volgens (5) is dus $F_n(1) = 0$ en derhalve

$$F_{m+1}(x) = (x-1)F_m(x-1) + (x-2)F_m(x-2) + \ldots + 1 \,.\, F_m(1),$$

Volgens onze onderstelling omtrent F_m bestaat het rechterlid uit de producten $m+1$ aan $m+1$ van de getallen 1 tot en met $x-1$. Hiermede is het gestelde bewezen.

Beschouwen we nu de vergelijking

$$z^n - F_1(x)\, z^{n-1} + F_2(x)\, z^{n-2} - \ldots + (-1)^n F_n(x) = 0.$$

Omdat $F_n(x)$ voorstelt de som van de producten der getallen van 1 tot $x - 1$, n aan n genomen, zijn de wortels dezer vergelijking juist de getallen

$$1, 2, \ldots\, x - 1, 0, 0 \ldots$$

Voor z stellen we in de vergelijking achtereenvolgens die getallen in de plaats en tellen de uitkomsten op. Door invoering van de reeds vroeger genoemde notatie $S_n(x)$ voor de functie van Bernoulli krijgen we dan deze betrekking:

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r S_{n-r}(x)\, F_r(x) = (-1)^{n+1}\, n\, F_n(x).$$

Hierin voeren we weer de functies $T_n(x)$ in door de substitutie (12). Het resultaat is:

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r S_{n-r}(x) \binom{x-1}{r} T_r(-x) = -\binom{x-1}{n} T_n(-x)\,.\,n.$$

Hierin vervangen we x door $-x$ en maken tevens gebruik van de bekende betrekkingen:

$$S_n(-x) = (-1)^{n+1} S_n(x+1)$$

$$\binom{-x-1}{r} = (-1)^r \binom{x+r}{r}.$$

We vinden alsdan de vereischte betrekking (11).

8. Geval dat x een positief geheel getal is.

Volgens de additieformule en formule (7) is:

$$T_n(2) = \{T(1) + T(1)\}^n = \frac{1}{n+1} + \binom{n}{1}\frac{1}{n\,.\,2} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n-1).3} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{n!\,2!} + \frac{n!}{(n-1)!\,3!} + \ldots + \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+2}{1} \right\}.$$

(14) . . . . $T_n(2) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} (2^{n+2} - 2).$

Op soortgelijke wijze zullen we nog $T_n(3)$ afleiden:

$$T_n(3) = \{T(2) + T(1)\}^n = T_n(2) + \binom{n}{1} T_{n-1}(2)\, T_1(1) + \ldots + T_n(1)$$

$$= \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}\cdot\frac{2^{n+1}-2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{n!}{(n-2)!\,2!\,(n-1)n}\cdot\frac{2^n-2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left[\binom{n+3}{1}2^{n+2} + \binom{n+3}{2}2^{n+1} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \binom{n+3}{n}2^3 + \binom{n+3}{n+1}2 - 2\left\{\binom{n+3}{1} + \binom{n+3}{2} + \ldots + \binom{n+3}{n}\right\}\right].$$

$$(15) \quad \ldots \quad T_n(3) = \frac{3^{n+3} - 3\,.\,2^{n+3} + 3\,.\,1^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Wanneer we nu de beide afgeleide formules bezien ontstaat 't vermoeden dat in 't algemeen, als x een positief geheel getal voorstelt:

$$T_n(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}\left\{x^{n+n} - \binom{x}{1}(x-1)^{n+x} + \right.$$

$$\left. + \binom{x}{2}(x-2)^{n+x} - \ldots + (-1)^{x-1}\binom{x}{1}\right\}.$$

We bewijzen deze formule in 't algemeen door de methode van n op $n+1$. Nemen we dus aan dat de formule geldt voor alle waarden van x tot aan $x = m$. We weten reeds dat dit zoo is voor $m = 3$. Volgens (1) is dan

$$(x+n+1)\,T_n(x+1) = (x+1)\,T_n(x) + n(x+1)\,T_{n-1}(x+1)$$

$$= \frac{x+1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}\left\{x^{n+x} - \binom{x}{1}(x-1)^{n+x} + \ldots\right\} +$$

$$+ \frac{n(x+1)}{n(n+1)\ldots(n+x)}\left\{(x+1)^{n+x} - \binom{x+1}{1}(x)^{n+x} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}\left\{(x+1)^{n+x+1} - \binom{x+1}{1}x^{n+x+1} + \ldots\right\}$$

$$T_n(x+1) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x+1)}\left\{(x+1)^{n+x+1} - \binom{x+1}{1}x^{n+x+1} + \ldots\right\}.$$

De formule geldt dus ook voor $x = m+1$, waarmede bewezen is dat zij voor alle geheele positieve waarden van x geldt.

Men zou deze formule ook hebben kunnen afleiden door den vorm

$$\left(\frac{e^v - 1}{v}\right)^x = \frac{1}{v^x}(e^v - 1)^x$$

eerst te ontwikkelen volgens het binomium van Newton en daarna de daarbij optredende machten van e weer in reeksen naar machten van v.

In het additietheorema stel ik

$$y = \Delta x = \text{kleine grootheid:}$$

$$T_n(x+\Delta x) = \{T(x)+T(\Delta x)\}^n = T_n(x) + \binom{n}{1} T_{n-1}(x)\, T_1(\Delta x) + \ldots.$$

of
$$\frac{T_n(x+\Delta x)-T_n(x)}{\Delta x} = \left\{T(x) + \frac{T(\Delta x)}{\Delta x}\right\}^n - T^n(x).$$

Door over te gaan tot de limiet $\Delta x = 0$, waarbij dus

$$\lim \frac{T(\Delta x)}{\Delta x} = T'(0),$$

volgt hieruit:

(16) . . . . . $T'_n(x) = \{T(x) + T'(0)\}^n - T_n(x).$

Hierbij kunnen we voor $T'_n(0)$ schrijven, volgens formule (10):

$$T_n'(0) = \frac{(-1)^n}{n} h^n.$$

Voor $x = -1$ geeft de formule (16) nog, in verband met (5)

$$T'_n(-1) = (h + T'(0))^n - h^n \qquad \text{of}$$

(17) $T'_n(-1) = -\binom{n}{1}\frac{1}{1} h_{n-1} h_1 + \binom{n}{2}\frac{1}{2} h_{n-2} h_2 - \ldots + \frac{(-1)^n}{n} h^n.$

Voor 't geval dat n oneven is, reduceert zich deze formule tot:

$$T'_n(-1) = -\binom{n}{1}\frac{1}{n} h_{n-1} h_1 + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n-1} h_1 h_{n-1} \qquad \text{of}$$

(17a) . . . . . $T'_n(-1) = \frac{n(n-2)}{2(n-1)} h_{n-1}$ (n oneven).

Door de formule (16) te differentieeren vind ik:

(18) . . $T''_n(x) = \{T'(x) + T'(0)\}^n - T'_n(x) - T'_n(0).$

Is n oneven dan volgt er gemakkelijk uit

(19) . . . . . . $T''_n(0) = \frac{n}{n-1} h_{n-1}$ (n oneven).

Met behulp van (16) kan men dus achtereenvolgens de coëfficienten van

$$T_n(x) = p_1 x + p_2 x^2 + \ldots.$$

berekenen want

$$p_k = T_k^{(n)}(0).$$

Een limietovergang, als ik bij het additietheorema heb toegepast, kan ook toepast worden op een formule die Frobinius aldus schrijft:

$$\binom{T(x+y)}{n} = \sum_{r+s=n} \binom{T(x)}{r} \binom{T(y)}{s}.$$

Ik zal de afleiding van deze hier niet geven omdat ik de formule verder niet gebruik. Stel ik weer $y = \Delta x$

$$\binom{T(x+\Delta x)}{n} = \sum_{r+s=n} \binom{T(x)}{r} \binom{T(\Delta x)}{s}$$

en schrijf de formule aldus:

$$\binom{T(x+\Delta x)}{n} - \binom{T(x)}{n} = \sum_{r+s=n}^{s\neq 0} \binom{T(x)}{r} \binom{T(\Delta x)}{s}.$$

Overgaande tot de lim $\Delta x = 0$, na deeling door Δx, vind ik

(20) . . . . $$\binom{T'(x)}{n} = \sum_{r+s=n}^{s\neq 0} \binom{T(x)}{r} \binom{T(0)}{s}.$$

§ 34. *Reeksontwikkeling voor $2^x \cos \frac{1}{2} v x \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{v}\right)^x$ enz.*

In de reeksontwikkeling

$$\left(\frac{e^v - 1}{v}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{v^n}{n!}$$

stel ik voor v in de plaats iv. Het linkerlid kan dan als volgt herleid worden:

$$\left(\frac{e^{iv}-1}{iv}\right)^x = e^{1/2 ivx} . 2^x \left(\frac{e^{1/2 iv} - e^{-1/2 iv}}{2iv}\right)^x = 2^x e^{1/2 ivx} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{v}\right)^x =$$

$$= 2^x (\cos \tfrac{1}{2} vx + i \sin \tfrac{1}{2} vx) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{v}\right)^x.$$

Door de reëele deelen en ook de imaginaire aan elkaar gelijk te stellen, vind ik de volgende twee reeksen:

$$2^x \cos \tfrac{1}{2} vx \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{v}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_{2n}(x)}{(2n)!} v^{2n}$$

$$2^x \sin \tfrac{1}{2} vx \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{v}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} v^{2n+1}.$$

Hierin vervang ik nog v door $2v$:

(1) . . . $$\cos vx \left(\frac{\sin v}{v}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_{2n}(x)}{(2n)!} (2v)^{2n}$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \sin \nu x \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} (2\nu)^{2n+1}.$$

In (1) vervangen we x door $-x$:

$$\cos \nu x \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_{2n}(-x)}{(2n)!} (2\nu)^{2n}.$$

Deze uitkomst vermenigvuldig ik met (1):

$$\cos^2 \nu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{T_{2n}(-x)}{(2n)!} + \frac{T_{2n-2}(-x)}{(2n-2)!} \cdot \frac{T_2(x)}{2!} + \ldots + \frac{T_{2n}(x)}{(2n)!} \right\} (2\nu)^{2n}$$

of, daar $\cos 2\nu x = -1 + 2\cos^2 \nu x$,

$$\cos 2\nu x = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ T_{2n}(-x) + \binom{2n}{2} T_{n-2}(-x) T_2(x) + \ldots \right\} \frac{(2\nu)^{2n}}{(2n)!}.$$

Wanneer we het linkerlid ook ontwikkelen naar de opklimmende machten van ν en daarna de coëfficienten uit beide leden aan elkaar gelijkstellen, komt de volgende formule voor den dag:

$$(3) \quad \frac{1}{2} x^{2n} = T_{2n}(-x) + \binom{2n}{2} T_{2n-2}(-x) T_2(x) +$$
$$+ \binom{2n}{4} T_{2n-4}(-x) T_4(x) + \ldots + T_{2n}(x).$$

Op geheel dezelfde wijze leidt men uit (2) af:

$$(4) \quad -\frac{1}{2} x^{2n} = \binom{2n}{1} T_{2n-1}(-x) T_1(x) + \binom{2n}{3} T_{2n-3}(-x) T_3(x) + \ldots +$$
$$+ \binom{2n}{2n-1} T_1(-x) T_{2n-1}(x).$$

HOOFDSTUK XI.

Onderzoek van de coëfficienten α_n. Recurrente betrekkingen tusschen de α's.

§ 35. Deze coëfficienten zijn opgetreden bij de ontwikkeling (3) in § 9

$$\sqrt{\frac{x}{e^x-1}} = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots .$$

Vergelijken we deze met de in § 33 bestudeerde, dan vinden we:

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad \alpha_n = \frac{1}{n!} \mathrm{T}_n\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Uit de betrekkingen die reeds voor de polynomia T_n zijn afgeleid, zullen we derhalve betrekkingen tusschen de α's kunnen vinden. Eenige hiervan hadden we ook wel direct kunnen afleiden door bovenstaande reeksontwikkeling te bestudeeren, maar andere laten zich beter uit de formules voor T_n vinden.

Stellen we eerst in (3) § 33 $x = y = -\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{T}_n(-1) = (\mathrm{T}(-\tfrac{1}{2}) + \mathrm{T}(-\tfrac{1}{2}))^{(n)}.$$

Door van (5) gebruik te maken en van (1) komt er

$$h^n = n!\,\alpha_n + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}(n-1)!\,\alpha_{n-1}\alpha_1 + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}(n-2)!\,2!\,\alpha_{n-2}\alpha_2 + \ldots$$

of

$$(2) \quad . \; . \quad \alpha_n + \alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_n = \frac{h^n}{n!}.$$

Stellen we thans in (4) § 33 $x = -\frac{1}{2}$. Men vindt

$$(3) \quad \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n-1)!}\alpha_1 + \frac{2^2}{(n-2)!}\alpha_2 + \frac{2^3}{(n-3)!}\alpha_3 + \ldots + 2^n\alpha_n = (-1)^n \,.\, 2^n\alpha_n.$$

Hetzelfde doen we met (9) § 33 Het resultaat is

$$(4) \quad . \; \frac{h^1}{1!}\alpha_{n-1} - \frac{h^2}{2!}\alpha_{n-2} + \frac{h^3}{3!}\alpha_{n-3} - \ldots - (-1)^n\frac{h^n}{n!} = 2n\alpha_n.$$

In formule (2) § 33 vervangen we x door $x+1$. Daardoor gaat zij over in:

$$(x+n+1)\,T_n(x+1)-(x+1)\,T_n(x)=n(x+1)\,T_{n-1}(x+1).$$

Uit (3) § 33 volgt:

$$T_n(x+1)=(T(x)+T(1))^n \qquad \text{en}$$

$$T_{n-1}(x+1)=(T(x)+T(1))^{n-1}.$$

Deze uitdrukkingen substitueeren we en voeren ten slotte nog in:

$$x=-\tfrac{1}{2} \text{ en } T^n(1)=\frac{1}{n+1} \qquad \text{volgens (7) § 33.}$$

Na eenige herleiding vinden we dan:

$$\frac{2n}{n!}\,a_n+\frac{2n-1}{2!}\,a_{n-1}+\frac{2n-2}{3!}\,a_{n-3}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}\,a_0=0.$$

Op een andere afleiding van deze formule werd ik attent gemaakt door Prof. Kapteyn. We maken gebruik van (3) § 13 en schrijven deze in den volgenden vorm:

$$\Gamma(s)\,D(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\,\{s+n-1)\,\Gamma(s+n-1)\,D(s+n-1)-\Gamma(s+n)\,D(s+n)\}.$$

Nu is

$$\Gamma(s+n-1)\,D(s+n-1)=\frac{2^{-1/2}a_0}{s+n-\frac{3}{2}}+\frac{2^{1/2}a_1}{s+n-\frac{1}{2}}+\frac{2^{3/2}a_2}{s+n+\frac{1}{2}}+\ldots+\text{hol. functie.}$$

dus

$$(s+n-1)\,\Gamma(s+n-1)\,D(s+n-1)=\frac{2^{-3/2}a_0}{s+n-\frac{3}{2}}-\frac{2^{-1/2}a_1}{s+n-\frac{1}{2}}-\frac{3\,.\,2^{1/2}a_2}{s+n+\frac{1}{2}}-\ldots+\text{hol. functie.}$$

als we gebruik maken van de identiteiten:

$$(s+n-1)\frac{1}{s+n+\frac{m}{2}}=1-\frac{\frac{m}{2}}{s+n+\frac{m}{2}} \qquad m=-3,-1,1,2,\ldots$$

Ook is

$$\Gamma(s+n)\,D(s+n)=\frac{2^{-1/2}a_0}{s+n-\frac{1}{2}}+\frac{2^{1/2}a_1}{s+n+\frac{1}{2}}+\frac{2^{3/2}a_2}{s+n+\frac{3}{2}}+\ldots+\text{hol. functie.}$$

Dus

$$(s+n-1)\,\Gamma(s+n-1)\,D(s+n-1)-\Gamma(s+n)\,D(s+n)=$$

$$=\frac{2^{-3/2}a_0}{s+n-\frac{3}{2}}-\frac{2^{-1/2}(a_0+a_1)}{s+n-\frac{1}{2}}-\frac{2^{1/2}(3a_2+a_1)}{s+n+\frac{1}{2}}-\frac{2^{3/2}(5a_3+a_2)}{s+n+\frac{3}{2}}-\ldots$$

De reeks voor $\Gamma(s)\,D(s)$ kunnen we nu aldus schrijven:

$$\Gamma(s)D(s)=\frac{2}{1!}\left\{\frac{2^{-3/2}\alpha_0}{s-\frac{1}{2}}-\frac{2^{-1/2}(\alpha_1+\alpha_0)}{s+\frac{1}{2}}-\frac{2^{1/2}(3\alpha_2+\alpha_1)}{s+\frac{3}{2}}-\ldots+\text{hol. functie}\right\}+$$

$$+\frac{2^2}{2!}\left\{\frac{2^{-3/2}\alpha_0}{s+\frac{1}{2}}-\frac{2^{-1/2}(\alpha_1+\alpha_0)}{s+\frac{3}{2}}-\ldots \quad ,, \quad ,, \right\}+$$

$$+\frac{2^3}{3!}\left\{\frac{2^{-3/2}\alpha_0}{s+\frac{3}{2}}-\ldots \quad ,, \quad ,, \right\}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

of

$$\Gamma(s)D(s)=\sum\frac{-2^{\frac{2n-1}{2}}}{s+n-\frac{1}{2}}\left(\frac{(2n-1)\alpha_n+\alpha_{n-1}}{1!}+\frac{(2n-3)\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}}{2!}+\ldots\right)$$

$$+\text{ holom. functie.}$$

Door vergelijking met

$$\Gamma(s)\,D(s)=\sum\frac{2^{n-1/2}\alpha_n}{s+n-\frac{1}{2}}+\text{hol. functie}$$

volgt hieruit

$$2^{n-1/2}\alpha_n+2^{\frac{2n-1}{2}}\left(\frac{(2n-1)\alpha_n+\alpha_{n-1}}{1!}+\frac{(2n-3)\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}}{2!}+\ldots\right)=0$$

of

$$2n\,\alpha_n+\frac{2n-1}{2!}\alpha_{n-1}+\frac{2n-2}{3!}\alpha_{n-2}+\ldots=0.$$

Substitueeren we thans in (2) § 33 voor x, $x-1$ en stellen voor $T_n(x-1)$ en $T_n(x-2)$ volgens (3):

$$T_n(x-1)=(T(x)+T(-1))^n$$

$$T_n(x-2)=(T(x)+T(-2))^n$$

$$(x+n-1)(T(x)+T(-1))^n-(x-1)(T(x)+T(-2))^n=$$

$$=n(x-1)(T(x)+T(-1))^{n-1}.$$

Na herleiding stellen we $x=-\frac{1}{2}$ en maken gebruik van (5) en (8) § 33. Het resultaat is de formule:

$$5)\quad 2n\alpha_n+\frac{2n-3}{1!}h_1\alpha_{n-1}+\frac{2n-6}{2!}h_2\alpha_{n-2}+\frac{2n-9}{3!}h_3\alpha_{n-3}+\ldots+\frac{2n-3n}{n!}h^n=0.$$

§ 36. *Alle coëfficienten α zijn $\neq 0$. Bewijs.*

Zooals reeds in § 18 is aangegeven, is ons doel om te bewijzen dat de coëfficienten α_n alle van nul verschillen. Om tot dit bewijs te komen zullen we eerst met een der voor de α's afgeleide formules eenige α's bereken. We vinden:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2^2} \qquad \alpha_5 = -\frac{19}{2^{16}\,.\,3^2\,.\,5}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2^5\,.\,3} \qquad \alpha_6 = \frac{79}{2^{16}\,.\,3^2\,.\,5\,.\,7}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2^7\,.\,3} \qquad \alpha_7 = \frac{3049}{2^{21}\,.\,3^4\,.\,5\,.\,7}$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{2^{11}\,.\,5} \qquad \alpha_8 = -\frac{1052297}{2^{26}\,.\,3^3\,.\,5^2\,.\,7}$$

Door deze tabel ontstaat reeds het vermoeden dat geen der coëfficienten gelijk is aan nul en dat verder

voor n oneven het teeken van α_n is $(-1)^{\frac{n+1}{2}}$

voor n even het teeken van α_n is $(-1)^{\frac{n+2}{2}}$

Gaan we er toe over dit in 't algemeen te bewijzen.

Eerst het geval dat n oneven is. De termen van (4) § 35 vermenigvuldigen we met $2n-3$ en trekken het resultaat van (5) af. We vinden dan (voor n oneven):

$$(1) \quad 2n\,(2n-2)\,\alpha_n + (4n-9)\frac{h^2}{2\,!}\alpha_{n-2} +$$
$$+ (4n-15)\frac{h^4}{4\,!}\alpha_{n-4} + \ldots + n\frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}\alpha_1 = 0.$$

Gaan we nu uit van de onderstelling dat voor alle α's tot aan α_{n-2} het teeken $(-1)^{\frac{n+1}{2}}$ is en dat geen der bedoelde α's gelijk is aan nul. We bewijzen nu dat α_n ook niet gelijk is aan nul en dat 't teeken is $(-1)^{\frac{n+1}{2}}$. Onze beweringen omtrent de α's zijn daarmede in 't algemeen bewezen. Letten we dus daartoe op de teekens der termen die in (1) voorkomen. Volgens (6) § 33 is:

$$\textit{het teeken van } h^{2k} = (-1)^{k-1}$$

en volgens onze onderstelling is:

$$\textit{het teeken van } \alpha_{n-2k} = (-1)^{\frac{n-2k+1}{2}}$$

dus het teeken van alle termen (op de eerste na) uit (1) is

$$(-1^{k-1+\frac{n-2k+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Als we dus uit (1) a_n oplossen dan vinden we daarvoor een som van termen waarvan er geen enkele $= 0$ is en die alle het teeken $(-1)^{\frac{n-1}{2}+1} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$ hebben. Hieruit volgt dat $a_n \neq 0$ en dat het teeken van a_n is $(-1)^{\frac{n+1}{2}}$. Dit is hiermede dus voor alle a_n's (n oneven) bewezen.

Nu het geval dat n even is.

Uit (11) § 33 leiden we een formule voor de a's af, op de gewone wijze, door te stellen $x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}+r}{r} S_{n-r}\left(\frac{1}{2}\right) T_r\left(-\frac{1}{2}\right) = n\binom{-\frac{1}{2}+n}{n} T_n(-\tfrac{1}{2}).$$

Ten einde deze verder te herleiden maken we gebruik van de volgende, uit de theorie der Bernoulli'sche functie, bekende formule

$$S_m\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2^{m+1}-1}{2^m(m+1)} h^{m+1}.$$

Verder is

$$\binom{-\frac{1}{2}+r}{r} = \frac{(-\frac{1}{2}+r)(-\frac{3}{2}+r)\ldots\ldots\frac{1}{2}}{r!} = c_r = \text{pos. getal.}$$

Derhalve is

$$nc_n\, n!\, a_n = -\sum_{r=0}^{n-1} c_r \cdot \frac{2^{n-r+1}-1}{2^{n-r}(n-r+1)} h^{n-r+1} a_r \,.\, r!$$

Omdat n even is en $h^{2k+1} = 0$, komen er in 't rechterlid slechts a's voor met oneven index, dus heeft iedere term van de som uit het linkerlid een van nul verschillende waarde en het teeken van een term

$$c_r \frac{2^{n-r+1}-1}{2^{n-r}(n-r+1)} h^{n-r+1} a_r \,.\, r!$$

is

$$(-1)^{\frac{n-r+1}{2}-1} \cdot (-1)^{\frac{r+1}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Alle termen hebben derhalve 't zelfde teeken.

Daaruit volgt dat $a_n \neq 0$ en dat 't teeken van a_n is

$$-(-1)^{\frac{n}{2}} = -(1)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Dit is juist hetgeen we over de $a'_n s$ hebben beweerd.

Met dit alles is dus aangetoond dat geen der coëfficienten $a_n = 0$ is.

HOOFDSTUK XII.

§ 37. *De coëfficienten* β_n *van* § 14 en 15.

Ze zijn ontstaan door de reeksontwikkeling

$$\sqrt{\frac{(e^x - 1)}{x}} = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots .$$

Derhalve is

$$\beta_n = \frac{1}{n!} \mathrm{T}_n\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Volgens (3) § 33 is voor $x = y = \frac{1}{2}$

$$\mathrm{T}_n(1) = \left\{ \mathrm{T}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \mathrm{T}\left(\tfrac{1}{2}\right) \right\}^{(n)}$$

en omdat volgens (7) § 33 $\mathrm{T}_n(1) = \frac{1}{n+1}$; is:

$$(1) \quad . \quad \frac{1}{(n+1)!} = \beta_n + \beta_{n-1}\beta_1 + \beta_{n-2}\beta_2 + \ldots + \beta_1\beta_{n-1} + \beta_n.$$

Volgens (4) § 33 vindt men op gelijke wijze:

$$(2) \quad 2^n\beta_n = 1 - \frac{2}{(n-1)!}\beta_1 + \frac{2^2}{(n-2)!}\beta_2 - \frac{2^3}{(n-3)!}\beta_3 + \ldots + (-1)^n 2^n \beta_n.$$

Eveneens uit (9) § 33

$$(3) \quad . \quad 2n\beta_n = -h_1\beta_{n-1} + \frac{h_2}{2!}\beta_{n-2} + \frac{h_3}{3!}\beta_{n-3} + \ldots + (-1)^n h_n.$$

Nog andere betrekkingen kunnen uit de formules van de Stirlingsche polynomia worden afgeleid. Ik zal ze hier achterwege laten.

Hier volgen de getallenwaarden der eerste 7 getallen β_n:

$$\beta_0 = 1 \qquad \beta_2 = \frac{5}{3 \cdot 2^5} \qquad \beta_4 = \frac{79}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5} \qquad \beta_6 = \frac{71}{2^{16} \cdot 3^3 \cdot 7}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2^2} \qquad \beta_3 = \frac{1}{2^7} \qquad \beta_5 = \frac{3}{2^{13} \cdot 5} \qquad \beta_7 = \frac{113}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Stelt men in (3) § 33 $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ dan ontstaat de betrekking tusschen de coëfficienten α en β:

$$\beta_n + \beta_{n-1}\,\alpha_1 + \beta_{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$$

en stelt men $x = 1$ $y = -\frac{1}{2}$ dan komt er:

$$\beta_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\alpha_1 + \frac{1}{(n-1)!}\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

waardoor de getallen β in de getallen α zijn uitgedrukt.

HOOFDSTUK XIII.

§ 38. *Het integreeren van een differentiaalvergelijking.*

Prof. Kapteyn heeft in 1908 de volgende differentiaalvergelijking op onderstaande manier geïntegreerd en daarbij is de functie D(s) te voorschijn gekomen:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{n^2}{x^2}-1\right)y=0.$$

Deze kan uit de vergelijking van Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0$$

worden afgeleid door te stellen $z=ix \quad \nu=in$. Derhalve is de oplossing van (1):

$$y=\mathrm{A}\,\mathrm{I}_{in}(ix)+\mathrm{B}\,\mathrm{I}_{-in}(ix)$$

zooals volgt uit de theorie van de Besselsche functies.

Verder is

$$\mathrm{I}_\nu(t)=\frac{t^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi e^{it\cos\varphi}(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi \quad \mathrm{R}(\nu)>-\tfrac{1}{2}$$

$$\mathrm{I}_{in}(ix)=\frac{(ix)^{in}}{2^{in}\sqrt{\pi}\,\Gamma(in+\frac{1}{2})}\int_0^\pi e^{-x\cos\varphi}(\sin\varphi)^{2in}\,d\varphi$$

of

$$\mathrm{I}_{in}(ix)=\frac{i^{in}}{2^{in}\sqrt{\pi}\,\Gamma(in+\frac{1}{2})}\{\cos(n\log x)+i\sin(n\log x)\}\,.$$

$$.\int_0^\pi e^{-x\cos\varphi}\{\cos(2n\log\sin\varphi)+i\sin(2n\log\sin\varphi)\}\,d\varphi.$$

Wanneer we nu stellen

$$\mathrm{P}_n(x)=\int_0^\pi e^{-x\cos\varphi}\cos(\log x^n\sin^{2n}\varphi)\,d\varphi,$$

$$\mathrm{Q}_n(x)=\int_0^\pi e^{-x\cos\varphi}\sin(\log x^n\sin^{2n}\varphi)\,d\varphi,$$

dan is de algemeene oplossing van (1):

(2) . . . . $y = AP_n(x) + BQ_n(x).$

Voor P_n en Q_n kunnen we nog schrijven

$$P_n(x) = \cos(n \log x)\, U_n(x) - \sin(n \log x)\, V_n(x)$$

$$Q_n(x) = \cos(n \log x)\, V_n(x) + \sin(n \log x)\, U_n(x)$$

waarbij dan

$$U_n(x) = \int_0^\pi e^{-x\cos\varphi} \cos(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi$$

$$V_n(x) = \int_0^\pi e^{-x\cos\varphi} \sin(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi.$$

Dat (2) werkelijk de algemeene integraal is van (1) kan men verifieeren.

We ontwikkelen nu U_n en V_n aldus:

$$U_n(x) = \int_0^\pi \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!}\cos^2\varphi + \frac{x^4}{4!}\cos^4\varphi - \ldots \right\} \cos(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi$$

$$V_n(x) = \int_0^\pi \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!}\cos^2\varphi + \frac{x^4}{4!}\cos^4\varphi - \ldots \right\} \sin(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi.$$

De integralen die hierin optreden zijn:

$$H_p = \int_0^\pi \cos^p\varphi \cos(2n \log\sin\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \cos^p\varphi \cos(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi$$

$$K_p = \int_0^\pi \cos^p\varphi \sin(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \cos^p\varphi \sin(2n \operatorname{logsin}\varphi)\, d\varphi.$$

Door deze notatie wordt

$$U_n = 2\left\{ H_0 - \frac{x^2}{2!} H_2 + \frac{x^4}{4!} H_4 - \ldots \right\}$$

$$V_n = 2\left\{ K_0 - \frac{x^2}{2!} K_2 + \frac{x^4}{4!} - K_4 \ldots \right\}$$

Door partiëele integratie wordt gevonden:

$$(4n^2 + p^2) H_p - 2(p-1)^2 H_{p-2} + (p-1)(p-3) H_{p-4} = 0$$

$$(4n^2 + p^2) K_p - 2(p-1)^2 K_{p-2} + (p-1)(p-3) K_{p-4} = 0$$

en hieruit tevens

$$K_p = \frac{1}{2n}\,[pH_p - (p-1)\,H_{p-2}]$$

$$H_p = -\frac{1}{2n}\,[pK_p - (p-1)\,K_{p-2}].$$

Door deze betrekkingen kunnen alle H's en K's uitgedrukt worden in H_0 en K_0.

Nu is

$$H_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,(2n \log \sin \varphi)\, d\varphi$$

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\,(2n \log \sin \varphi)\, d\varphi$$

$$H_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 - \frac{(2n)^2}{2!}(\log \sin \varphi)^2 + \ldots\right\} d\varphi$$

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{2n \log \sin \varphi - \frac{(2n)^3}{3!}(\log \sin \varphi)^3 + \ldots\right\} d\varphi.$$

In verband met de betrekking (6) van § 4 wordt dit, door term voor term te integreeren:

$$H_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\,(2n)^{2m}\,D\,(2m+1),$$

$$K_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\,(2n)^{2m+1}\,D\,(2m+2).$$

De laatste reeksen convergeeren alleen voor

$$n < \tfrac{1}{2},$$

want alleen in dat geval is voldaan aan de noodige en voldoende voorwaarde

$$\lim_{m=\infty} (2n)^{2m+1}\,D\,(2m+2) = 0.$$

STELLINGEN.

I.

Het is van belang voor de theorie der reeksen van Dirichlet dat nog andere bijzondere, daartoe behoorende reeksen, geheel worden onderzocht.

II.

De wijze waarop door G. Frobenius de theorie der polynomia van Stirling is behandeld, verdient de voorkeur boven de manier waarop N. Nielsen dit heeft gedaan.

(G. Frobenius. Berl. Sitz. Ber. Band XXXIX bl. 836).

(N. Nielsen. Handbuch der Γ-function).

III.

Het is verkeerd om, zoals in 't leerboek der hoogere algebra van Lobatto-Rahusen geschiedt, het begrip „uniforme convergentie" wel te behandelen en toe te passen, maar de naam niet te noemen.

(Lobatto-Rahusen. Lessen over de hoogere algebra 7de druk 1909. § 231 en volgende).

IV.

De imaginaire cirkelpunten en de isotrope richtingen van 't platte vlak worden ten onrechte in sommige leerboeken der analytische meetkunde buiten beschouwing gelaten.

V.

De naam „geodetische cirkels" die Darboux geeft aan de krommen van constante geodetische kromming, is voor deze krommen af te keuren.

(Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces II, pag. 151).

VI.

Hoewel de uitkomst van Wolfke, voor de constante van Balmer, nauwkeuriger is dan die van Bohr, is toch de laatste te verkiezen boven de eerste.

Wolfke. Phys. Zeitschr. 1916, bl. 71.

Bohr. Phil. Mag. XXVI, pag. 1, 1913.

VII.

Ten onrechte beweert Föppl dat de electronentheorie streeft naar eene verandering van de grondslagen der Meetkunde.

(Föppl. Einleitung in die Maxwell'sche Theorie. 3te Auflage, pag. 451).

VIII.

De isothermen van Amagat zijn, vooral wat het gedeelte bij hoogen druk betreft, onbetrouwbaar.

IX.

De afname van de veldsterkte van een electromagneet, onmiddellijk na het aanzetten van den stroom, is niet voldoende verklaard.

(Dissertatie H. R. Woltjer. Amsterdam, 1914.)

X.

De theorie die Chamberlin en Moulton gegeven hebben voor de verklaring van het ontstaan van ons zonnestelsel, kan als gevallen beschouwd worden.

XI.

Poincaré beweert dat voor iedere functie waarvan het eerste en het tweede differentiaalquotient eindig zijn, het volgende geldt: Neemt men één der 10000 waarden van zoo'n functie (voor $x = 1, 2, \ldots 10000$) dan is de kans, dat de 3[de] decimaal even is, gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Deze bewering is onjuist.

XII.

Het is ongemotiveerd dat de 2[de] alinea van art. 89 van de wet op het M. O. steeds van kracht is, voor zoover betreft hun, die aan een der Rijksinstellingen tot opleiding van officieren den cursus hebben ten einde gebracht.
