



De theorie der spherische beelden in hare toepassing op de elektrische inductie

<https://hdl.handle.net/1874/261351>

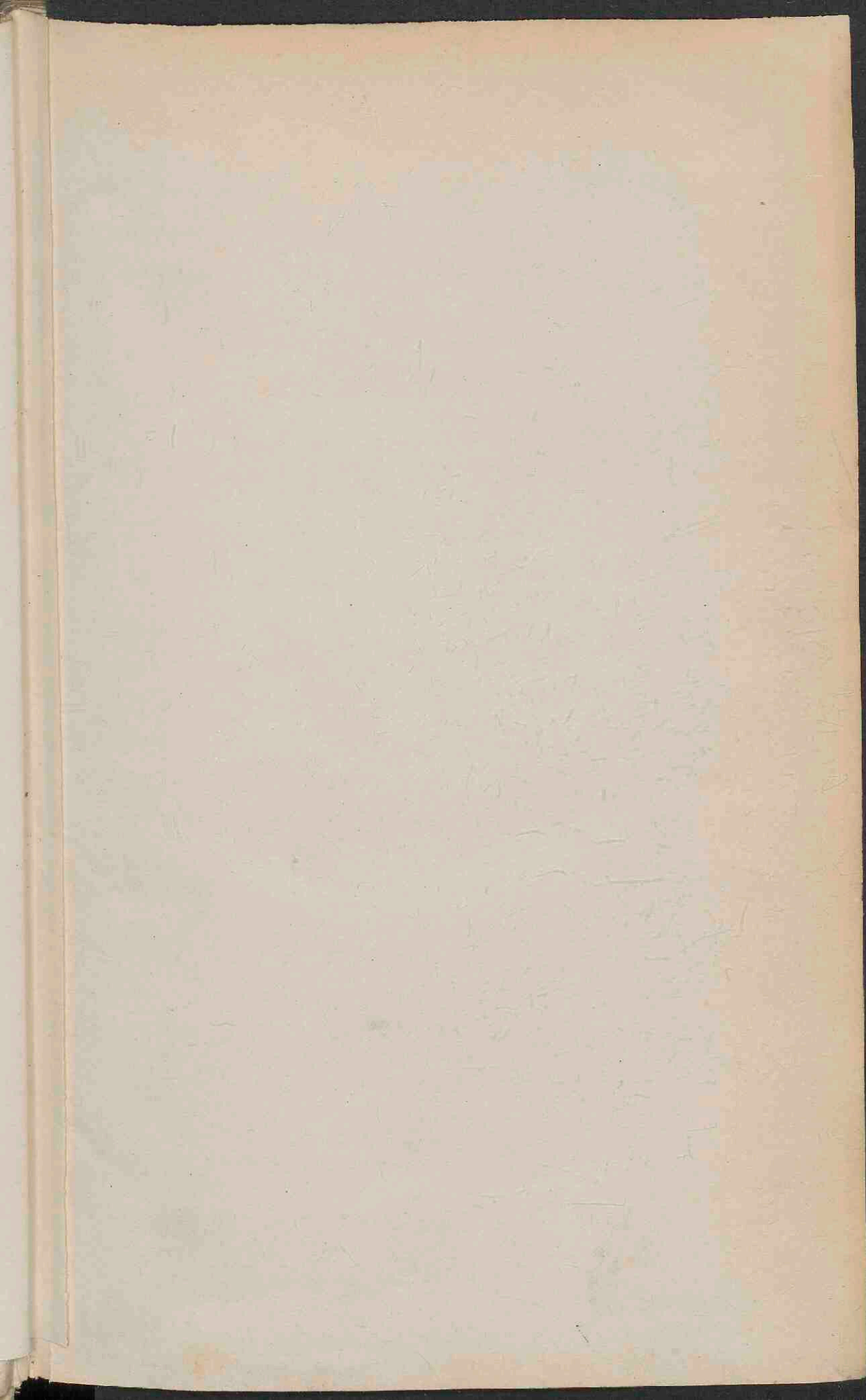
117.

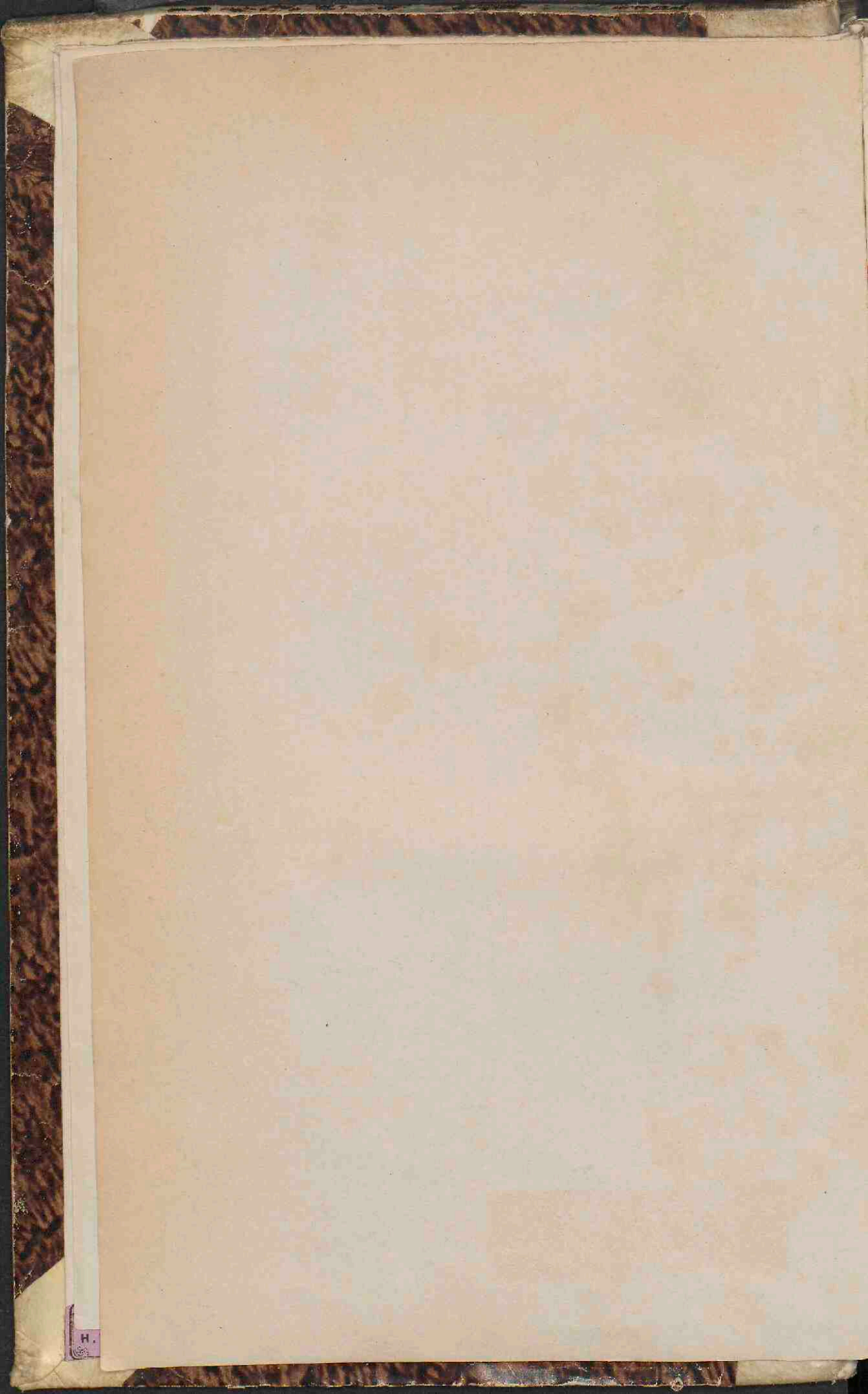
117.



Misc. doctr.
Qu. n^o 192

1. A. Harms, De theorie der spherische beelden in hare toepassing op de elektrische inductie.
2. H. Rost, Thascius (Caecilius) Cyprianus.
3. A. D. de Fries, Onderzoek betrekkelijk vroegere en latere amnestien.
4. G. J. Vos Ar., De nieuwe, Synodale bijbelvertaling.
5. J. E. Stark, De loopbaan van de planeet Hecate.
6. G. Folmer, Beschrijving en beoordeeling van een geval van verlamming door elektrische stroomen verbeterd.
7. E. A. E. van der Kemp, Sets over de onmaardigheid naar het Nederlandsch recht.
8. A. Nijland, Over den duur en het verloop der geïnduceerde galvanische stroomen.





H.

1870-1871
I
192

DE THEORIE
DER
SPHERISCHE BEELDEN
IN HARE TOEPASSING
OP DE
elektrische inductie.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^R. F. A. W. MIQUEL,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAAT

EN

VOLGENS BESLUIT DER PHILOSOPHISCHE FACULTEIT,

TER VERKERIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

op Dinsdag den 5 April 1870, des namiddags ten 3 ure,

TE VERDEDIGEN

DOOR

ALBERTUS HARMS,

geboren te *Amsterdam.*



UTRECHT,
A. VAN DORSTEN, Jr.
1870.

Stoomdruk van P. W. van de Weijer, Utrecht.



AAN MIJNE MOEDER.

DE WERK

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT



1290 4540

V O O R R E D E

De kleine verhandeling, den goedgunstigen lezer hierbij aangeboden, dankt haar bestaan aan de noodzakelijkheid. Bij het verlaten der akademie toch was het mijn geliefdskoosd denkbeeld een onderzoek te beproeven, aangaande het mechanisch equivalent der elektrische ontlading, eene kwestie door twee geleerden, Dove en Riess langs verschillende wegen, op verschillende wijze beantwoord en inderdaad voor de moderne wetenschap van groot belang. Maar spoedig bleek het mij dat alleen groote proevenreeksen het uitgangspunt mijner beschouwing zouden kunnen uitmaken, proeven voor welke mij de meest onontbeerlijke meetinstrumenten ontbraken, en die jaren

van inspanning konden vorderen. Noode en wellicht ter elfder ure koos ik mij dan ook een ander en wel het hier behandelde onderwerp. Van bronnen verstoken, slechts over enkele maanden kunnende beschikken, en daarenboven in de eerste plaats beziggehouden, door de vervulling der aan mijne betrekking verbonden verplichtingen, heb ik vele punten tot mijn onderwerp behoorende, geheel moeten voorbijgaan; andere werden slechts even aangestipt, ofschoon eene strenge wiskundige behandeling noodzakelijk ware; de omstandigheden mogen hier ten deele het gebrekkige van mijn arbeid verontschuldigen.

Waar ik aan den eindpaal sta mijner akademische loopbaan, is de gelegenheid mij welkom om een plicht te vervullen, die mij door moreele overtuiging wordt opgelegd.

Opentlijken dank heb ik te brengen aan U, mijne leermeesters, die niet alleen mijne wankele schreden met krachtige hand van den aanvang af hebt gesteund, maar ook met onverstoortbaar geduld, door toegenegen belangstelling, mijn moed en volharding bij eigen krachtsinspanning hebt opgewekt en gesterkt,

aan U in de eerste plaats, Nestor onzer Vaderlandsche Natuurkundigen, hooggeschatte van Rees, die het niet beneden U achtte, om uwen kostbaren tijd in bijzondere lessen aan mijne ontwikkeling te wijden en mij de gelegenheid gaaf, de kunst van experimenteeren onder uw ervaren oog te beoefenen,

aan U, hooggeachte Grinwis, die als promotor mijn arbeid onder uwe hoede wilt nemen; wat er daarin goeds

moge zijn, dank ik aan uwen raad, die mij steeds zoo gereedelijk en vriendschappelijk werd gegeven,

aan U Hooggeleerde Heeren Buys-Ballot en Hoek, mijne leermeesters in de wetenschap en in de humaniteit,

aan U Hooggeleerde Heeren Harting en Miquel, die mij de wetenschap der levende natuur aantrekkelijk hebt gemaakt,

hartelijk dank aan U allen; het bewustzijn van uwe sympathie was mij vaak ten zedelijken steun, waar ik die meer dan immer behoefde; nimmer hoop ik te vergeten, wat ik aan uw onderwijs en voorbeeld verplicht ben.

Een enkel woord van dank ook aan U, mijne akademie vrienden, die in verschillende omstandigheden arbeid of genoegen met mij hebt gedeeld; moge voor ons allen de wetenschap het vriendelijk gesternte zijn, dat met zijne liefelijke stralen de vooroordeelen en de bekrompenheid als nachtelijke spooksels verjaagt.

I N H O U D.



EERSTE HOOFDSTUK.

	Pag.
De theorie der Spherische beelden	1

TWEEDE HOOFDSTUK.

Ontwikkeling der Grondformulen ,	49
--	----

DERDE HOOFDSTUK.

Algemeene toepassing van de theorie der Spherische beelden op de elektrische inductie.	31
---	----

VIERDE HOOFDSTUK.

Toepassing op eenige voorbeelden.	41
---	----

VIJFDE HOOFDSTUK.

Onderlinge influentie van geleiders	68
Besluit . . ,	78
Stellingen	83



EERSTE HOOFDSTUK.

DE THEORIE DER SPHERISCHE BEELDEN.

§ 1.

De theorie der spherische beelden, die tot de veel vereenvoudigde oplossing van vele vraagstukken op het gebied der mathematische physika voert, en bij de behandeling der elektriske inductie onmisbaar is, werd door Murphy, in zijne »*Elementary principles etc., on Electricity*”, 1833, pag. 93 vv. bij wederkeerige influentie het eerst toegepast. — Wel is het niet waarschijnlijk dat hij hierbij, evenals latere onderzoekers, van het begrip van spiegeling uitgaat, ofschoon hij van »*reflected influence*” spreekt — maar het zal ons blijken dat dit begrip slechts in een zeer bijzonder geval de grondslag der beschouwing kan uitmaken, terwijl het door het schijnbaar wettigen van valsche benamingen, lichtelijk aanleiding tot verwarring geeft.

Het denkbeeld om de optische spiegeling op een geheel ander veld der physika toe te passen is uitlokkend genoeg, en hieruit zal het dan ook wel verklaard dienen te worden, dat men eenmaal eene enkele kleine analogie opgemerkt hebbende, zich begaf

tot namen als »elektrisch spiegelbeeld», »elektrische spiegeling», enz. die aan optische verschijnselen doen denken. — Thomson zelf, die, voor zoover mij bekend is, het begrip van spiegeling inleidt, (zie Journal de Liouville, dl. X: *Lettre par William Thomson*) is bij zijne volgende onderzoekingen (»*Extrait de deux lettres par Will. Thomson*» Journal de Liouville, dl. XII) tot eene meer algemeene behandeling van de theorie der beelden, door middel van kromlijnige coördinaten-stelsels overgegaan.

§ 2.

Drie bepaalde oppervlakken snijden elkaar in het algemeen in een bepaald punt; stellen wij in ieder dezer oppervlakken een zekeren parameter veranderlijk, dan kan, door aan elk dezer variabelen eene behoorlijke waarde te geven, het stelsel van oppervlakken door zeker punt der ruimte worden gelegd: de waarden aan de parameters toe te kennen opdat dit doel worde bereikt, noemt men de kromlijnige coördinaten van het punt.

Laten bijv. de oppervlakken, na afzondering der veranderlijke parameters ξ , η en ς , worden voorgesteld door de vergelijkingen

$$\xi = \varphi(x, y, z)$$

$$\eta = \psi(x, y, z)$$

$$\varsigma = \chi(x, y, z),$$

waar φ , ψ en χ bekende, maar overigens willekeurige functiën zijn. Geeft men nu aan de parameters de bepaalde waarden ξ_1 , η_1 en ς_1 dan zal door bovenstaande vergelijkingen zeker punt $P(x_1, y_1, z_1)$ worden aangewezen, en ξ_1 , η_1 en ς_1 zullen de kromlijnige coördinaten van P zijn. Het is duidelijk dat ξ eene constante waarde heeft over een zelfde oppervlak φ .

De potentiaal V van zekere elektriciteitsmassa zal alzoo, als parameter van een niveau-oppervlak, de kromlijnjige coördinaat van alle punten van hetzelfde voorstellen en wel eene spherische, elliptische, cylindrische, enz. naarmate het niveau-oppervlak φ , een sphaer, ellipsoïde, cylinder, enz. is. — Het is hier zeker niet de plaats om over de kromlijnjige coördinaten in het algemeen uit te wijden; om het gewicht hunner toepassing in herinnering te brengen, behoeven wij slechts de volgende woorden van Lamé te citeeren (*Leçons sur les coörd. curv. Discours préliminaire*): »Si l'hydrostatique et la théorie du potentiel ont introduit les familles des surfaces de niveau, la théorie de la chaleur celles des surfaces isothermes, la théorie de la lumière celles des surfaces d'ondes; c'est la théorie mathématique de l'équilibre d'élasticité des corps solides, qui a introduit la considération de trois familles conjuguées et orthogonales.» Het is deze laatste beschouwing, die wij hier op het vraagstuk der elektrishe inductie zullen toepassen, na alvorens, op het voetspoor van Thomson en Liouville te hebben aangewezen, hoe zij tot het begrip der beelden voert.

§ 3.

Thomson beschouwt (zie *Extrait etc.*) in het bijzonder spherische coördinaten, bepaald door de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \eta &= \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \zeta &= \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

die een stelsel van 3 orthogonale boloppervlakken voorstellen;

immers hunne differentiaal-quotienten voldoen aan de voorwaarden

$$\frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} \cdot \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{d\eta}{dz} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{ds}{dx} + \frac{d\xi}{dy} \cdot \frac{ds}{dy} + \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{ds}{dz} = 0$$

$$\frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{ds}{dx} + \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{ds}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \cdot \frac{ds}{dz} = 0.$$

Varieert men ξ , η en s in het stelsel (1) dan komt men tot eene reeks van geconjugeerde orthogonale boloppervlakken, wier snijpunten de geheele ruimte omvatten, terwijl voor ieder punt der ruimte een bepaald stelsel dezer parameters is aangewezen. — Door eliminatie van elk tweetal der coördinaten x , y , z (tusschen genoemde vergelijkingen), geraakt Thomson tot het stelsel

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + s^2} \\ y &= \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + s^2} \\ z &= \frac{s}{\xi^2 + \eta^2 + s^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

en behandelt daarna eene kwestie van temperatuursbepaling door middel der vergelijking

$$\frac{d^2 U}{dr_1^2} + \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{d^2 U}{ds^2} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

in welke U eene functie van x , y en z voorstelt en tevens

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + s^2}$$

is genomen. — De vergelijking (3) die voor onze beschouwingen van groot gewicht zal blijken, zal nader worden bewezen.

§ 4.

De vergelijkingen (1) en (2) voeren tot eene veel eenvoudiger methode, aangewezen door Liouville in eene noot op de brieven van Thomson.

Wanneer in de vergelijkingen (1) van Thomson

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = p \quad \text{en} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2} = p_1$$

wordt gesteld, voeren zij terstond tot de algemeene vergelijking

$$(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\varsigma_1 - \varsigma)^2 = \frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}{p^2 p_1^2}$$

Deze kiest Liouville als uitgangspunt voor zijne beschouwingen, waarbij hij de grootheden ξ , η en ς als onbekende functiën van x , y en z opvat, en verkrijgt dan langs zuiver analytischen weg tot oplossing de vergelijking

$$\xi - \xi_0 = \frac{\varphi(x, y, z)}{\varphi^2(x, y, z) + \psi^2(x, y, z) + \chi^2(x, y, z)}$$

en 2 dergelijke voor $\eta - \eta_0$ en $\varsigma - \varsigma_0$. Neemt men nu als bijzonder geval voor de arbitraire functiën

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x}{n^2}$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{y}{n^2}$$

$$\chi(x, y, z) = \frac{z}{n^2}$$

en daarenboven $\xi_0 = \eta_0 = \varsigma_0 = 0$, dan ontstaan de relatiën:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{n^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \eta &= \frac{n^2 y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varsigma &= \frac{n^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

waaruit men weder vindt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{n^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2} \\ y &= \frac{n^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2} \\ z &= \frac{n^2 \varsigma}{\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Het eigenaardige van de methode van Liouville ligt nu dáárin, dat hij ook ξ , η en ς als rechte lijnige coördinaten beschouwt en dus een 2^e systeem van assen aanneemt, dat langs het eerste valt, wijl, blijkens (4) of (5), ieder tweetal coördinaten van het eene systeem te gelijk met het overeenkomstige tweetal van het andere nul wordt. De vergelijkingen (5) stellen nu mede holoppervlakken voor, die bij aanname van bepaalde waarden x_1 , y_1 en z_1 , voor de parameters x , y en z , elkaar snijden in zeker punt P_1 , dat ξ_1 , η_1 en ς_1 , tot coördinaten heeft. Het punt P_1 (ξ_1 , η_1 , ς_1), zullen wij kortheidshalve het overeenkomstige van P (x_1 , y_1 , z_1) noemen.

§ 5.

Het punt P_1 kan door eene transformatie met wederkeerige voerstralen (par rayons vecteurs réciproques) uit P worden afgeleid. Vooreerst toch liggen P en P_1 op dezelfde rechte door den oorsprong, omdat volgens (4)

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\varsigma} \dots \dots \dots (6)$$

is.

Noemt men de voerstralen van P en P_1 resp. r en r_1 dus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

dan levert de som der kwadraten van (4)

$$r_1 = \frac{n^2}{r} \dots \dots \dots (7)$$

waardoor 't gezegde bewezen is.

Bovenstaande opmerking geeft ons ook de verklaring van de invocring van het begrip der spiegeling: Wanneer men namelijk (fig. 1) ¹⁾ uit een punt O van de lijn die P met den oorsprong verbindt, met den straal $2n$ een boloppervlak beschrijft, terwijl (A de oorsprong zijnde) $AO = n$ is genomen, zullen P en P_1 elkaars optische beelden zijn in dit boloppervlak als spiegel gedacht; immers men vindt:

$$\frac{1}{r+n} + \frac{1}{r_1+n} = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (8)$$

Het is daarom dat men P_1 ook het beeldpunt van P noemt.

Beschrijft men uit den oorsprong met den straal n een boloppervlak, dan zullen de snijpunten C en O van dit oppervlak met den voerstraal door P en P_1 , met deze laatste punten harmonisch gepaard zijn.

Het is duidelijk dat men de genoemde transformatie op ieder der punten van een oppervlak S , voorgesteld door de vergelijking $F(x, y, z) = 0$, kan toepassen. De overeenkomstige of beeldpunten zullen te zamen een oppervlak S_1 vormen, dat worde voorgesteld door $F_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$, en naar aanleiding van het voorgaande het beeld van S kan genoemd worden; om echter aan te wijzen dat hier aan geene optische spiegeling mag gedacht worden, geven wij het den naam van Spherisch beeld.

1) Deze figuur stelt een meridiaanvlak van den bol voor.

Inderdaad kan hier van spiegeling geen sprake zijn — indien toch elk tweetal overeenkomstige punten elkaars werkelijke spiegelbeelden in één zelfden bolvormigen spiegel waren, zouden ze steeds op dezelfde nevenas van dezen moeten liggen, en daar alle voerstralen tevens door den oorsprong gaan, zou deze het middenpunt van den onderstelden spiegel moeten zijn. Stellen wij de constante straal van dezen x , dan moet voldaan worden aan de relatie.

$$\frac{1}{r-x} - \frac{1}{x-r_1} = -\frac{2}{x}$$

of

$$x = \frac{2rn^2}{r^2 + n^2}$$

welke waarde varieert met r , zoodat het onmogelijk blijkt te zijn, door spiegeling in één boloppervlak een beeld van S in S_1 te projecteeren.

De vorm van het beeldoppervlak F_1^* (ξ, η, ς) laat zich onmiddellijk uit $F(x, y, z)$ bepalen. Het komt er dan slechts op aan de meetkundige plaats van de snijpunten van (5) te vinden, indien aan x, y en z achtereenvolgens alle waarden worden gegeven, die de vergelijking $F(x, y, z) = 0$ toelaat; m. a. w. men heeft tusschen (5) en de gegevene vergelijking van het oppervlak slechts de coördinaten x, y en z te elimineeren, hetgeen hier op eene eenvoudige substitutie nederkomt.

§ 6.

Indien door eene transformatie met wederkeerige voerstralen $F_1(\xi, \eta, \varsigma)$ uit $F(x, y, z)$ ontstaan is, zal door toepassing der zelfde transformatie op $F_1(\xi, \eta, \varsigma) = 0$ weder 't oorspronkelijk oppervlak te voorschijn komen.

Om dit te bewijzen, stellen wij dat in het algemeen de parameters aan de rechthoekige coördinaten van een punt zijn verbonden door de relatien

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z) \\ \eta &= \psi(x, y, z) \\ \varsigma &= \chi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (\alpha)$$

Laten deze door eliminatie van elk tweetal uit x , y en z voeren tot

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi^1(\xi, \eta, \varsigma) \\ y &= \psi^1(\xi, \eta, \varsigma) \\ z &= \chi^1(\xi, \eta, \varsigma) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (\beta)$$

in welke formule φ , φ^1 , ψ , ψ^1 , χ en χ^1 orthogonale boloppervlakken voorstellen, die hunne middenpunten op de coördinaten-assen hebben.

Het is nu vooreerst klaar, dat de vergelijkingen (β) identiek worden door substitutie der waarden van (α) en dus $\varphi^1(\xi, \eta, \varsigma)$ daardoor in x overgaat, enz. Indien dus in $F(x, y, z)$ eerst de waarden (β) worden gesteld, gaat zij over in

$$F\left(\varphi^1(\xi, \eta, \varsigma), \psi^1(\xi, \eta, \varsigma), \chi^1(\xi, \eta, \varsigma)\right) = F_1(\xi, \eta, \varsigma)$$

welke vergelijking mede identiek is. — Substitueert men nu in het 1^e lid weder de waarden (α) dan verandert het in $F(x, y, z)$, welke functie dus ook door het 2^e lid wordt opgeleverd.

Wij merken alzoo op dat het oorspronkelijk oppervlak S het spherisch beeld van S_1 is. Deze eigenschap herinnert ons weder aan de optische spiegeling. Ook bij deze toch kunnen beeld en voorwerp onderling verwisseld worden.

§ 7.

Alvorens verder te gaan is het niet ondienstig hier eene uitbreiding aan te wijzen van de methode van Liouville, in § 4 uiteengezet. Terwijl L. steeds den oorsprong koos als het punt, ten opzichte waarvan de transformatie met wederkeerige voorstralen plaats had, is het duidelijk dat die transformatie ook kan worden uitgevoerd ten opzichte van een willekeurig punt A , dat a , b en c tot coördinaten heeft, indien men de assen slechts evenwijdig aan zich zelve verplaatst denkt, tot de oorsprong in A is gekomen.

De vergelijkingen (4) worden alsdan

$$\xi - a = \frac{n^2(x - a)}{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

$$\eta - b = \frac{n^2(y - b)}{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

$$s - c = \frac{n^2(z - c)}{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

en stellen weder boloppervlakken voor, die slechts door de ligging hunner middenpunten van (4) verschillen: zoo zal de eerste bol van dit stelsel zijn middenpunt hebben in het punt $(a + \frac{n^2}{2\xi}, b, c)$, enz. De vergelijkingen (5) ondergaan dezelfde veranderingen. Noemt men r weder den afstand van A tot een punt van S en dus

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

dan worden de transformatie-formulen (4)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a + \frac{n^2(x-a)}{r^2} \\ \eta &= b + \frac{n^2(y-b)}{r^2} \\ \varsigma &= c + \frac{n^2(z-c)}{r^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

evenzoo de vergelijkingen (5)

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{n^2(\xi-a)}{r_1^2} \\ y &= b + \frac{n^2(\eta-b)}{r_1^2} \\ z &= c + \frac{n^2(\varsigma-c)}{r_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

waar r_1 de afstand van het punt (ξ, η, ς) van S_1 tot A aanwijst.

Overigens blijkt weder dat twee overeenkomstige punten P en P_1 op eene rechte door A liggen, immers volgens (9) is

$$\frac{x-a}{\xi-a} = \frac{y-b}{\eta-b} = \frac{z-c}{\varsigma-c};$$

tevens ontstaan ze uit elkaar door transformatie met wederkerige voerstralen, omdat men weêr heeft

$$r_1 = \frac{n^2}{r}.$$

Wij zullen het punt A waarop al de voerstralen der punten van S en S_1 uitloopen, voor het vervolg korthedshalve de pool der beide oppervlakken noemen.

Deze pool is de top van den omhullingskegel van beide oppervlakken, — van haren stand hangt in verband met den vorm van het oorspronkelijk oppervlak, de gedaante van het beeld af; de plaats van den oorsprong daarentegen heeft daarop klaarblijkelijk geen invloed.

§ 8.

Het is deze gedaante van het beeld, die ons zal doen besluiten of de hier besproken transformatie ons al of niet tot de explicite oplossing der elektrische verdeling bij inductie voert; reeds a priori kan worden aangemerkt, dat zij geheel nutteloos is als het beeld zich in het oneindige uitstrekt, en dus blijkbaar de pool in het oorspronkelijk oppervlak ligt.

Wij zullen hier eenige functiën en hare beeldoppervlakken beschouwen, en wel in het bijzonder die, welke een bol of ellipsoïde tot beeld hebben. Daarbij kiezen wij de pool tot oorsprong.

Laat het beeldoppervlak S_1 een bol zijn, uitgedrukt door

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (s - \gamma)^2 = R_1^2 \quad (11)$$

dan vindt men voor S door substitutie der waarden (4), den bol

$$\left(x - \frac{\alpha n^2}{q}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta n^2}{q}\right)^2 + \left(z - \frac{\gamma n^2}{q}\right)^2 = \left(\frac{R_1 n^2}{q}\right)^2 \quad (12)$$

waarbij q voor $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R_1^2)$ is gesteld.

Noemen wij den straal en de middenpuntscoördinaten van (12) resp. R, a, b en c dan wordt zij

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (12a)$$

en heeft men de vergelijkingen

$$a = \frac{n^2 \alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R_1^2}$$

$$b = \frac{n^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R_1^2}$$

$$c = \frac{n^2 \gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R_1^2}$$

$$R = \frac{n^2 R_1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R_1^2}$$

waaruit volgt

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{n^2 a}{a^2 + b^2 + c^2 - R^2} \\ \beta &= \frac{n^2 b}{a^2 + b^2 + c^2 - R^2} \\ \gamma &= \frac{n^2 c}{a^2 + b^2 + c^2 - R^2} \\ R_1 &= \frac{n^2 R}{a^2 + b^2 + c^2 - R^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

welke vergelijkingen den straal en de middenpuntscoördinaten van S_1 in die van S uitdrukken. Uit het voorgaande blijkt dat een bol in het algemeen een bol tot spherisch beeld heeft, terwijl het van de grootheid $a^2 + b^2 + c^2 - R^2$ en dus van de plaats der pool buiten of binnen S zal afhangen of de coördinaten α en a , β en b , γ en c dezelfde of tegengestelde teekens hebben.

De middenpunten der bollen liggen verder, blijkens (13), op eene rechte door de pool.

Bijzondere gevallen zijn als $q = 0$ of $= -R_1^2$ is.

a . Voor $q = 0$ wordt (12) d. i. het oorspronkelijk oppervlak een plat vlak van den vorm

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{n^2}{2}$$

terwijl de pool in den omtrek van het beeld komt te liggen, daar $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R_1^2$. Hieruit blijkt dat een plat vlak

$$Ax + By + Cz = D \dots \dots \dots (14)$$

tot Spherisch beeld heeft een bol, die door de pool gaat en wiens middenpunt tot coördinaten heeft

$$\frac{An^2}{2D}, \frac{Bn^2}{2D}, \frac{Cn^2}{2D} \dots \dots \dots (15)$$

zoodat het in de loodlijn ligt, die uit de pool op (14) wordt nedergelaten. De lengte dezer loodlijn is $\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ en de lengte van den straal des beelds is $\frac{n^2 \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{2D}$. Het platte vlak zal dus zijn beeld aanraken, als genomen wordt

$$\frac{n^2 \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{D} = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

of

$$n = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dat is: n gelijk de boven berekende loodlijn.

b. Indien $q = -R_1^2$, of α , β en γ allen *nul* worden, ligt de pool in het middenpunt van het Spherisch beeld en tevens, blijkens (12), in het middenpunt van het oorspronkelijk oppervlak. Derhalve is 't beeld van een bol ten opzichte van zijn middenpunt een concentrische bol, geheel binnen of buiten den oorspronkelijken gelegen

naarmate $R_1 <$ of $> R$

d. i. in verband met (7) $n <$ of $> R$ is aangenomen.

Nam men voor S_1 een willekeurig oppervlak van den 2^{en} graad, dan zou S blijken van den 4^{en} graad te zijn. In plaats van ons te verdiepen in algemeene beschouwingen, die bovendien buiten ons onderwerp zouden liggen, kiezen wij nog het eenvoudige geval dat S_1 eene omwentelingsellipsoïde is, wier omwentelingsas de pool bevat. Het is ligt in te zien dat ook S nu omwentelingsoppervlak is om dezelfde as, en men deze dus slechts als x - as hebbe aan te nemen, om het onderzoek tot de beschrij-

vende krommen, die elkaars beelden zijn terug te brengen: in de vergelijkingen der krommen moet $y^2 + z^2$ dan in de plaats van y^2 worden gesteld, opdat ze de beschreven oppervlakken voorstellen.

a. Stellen wij eerst de pool (en dus ook den oorsprong) in het middenpunt van het Spherisch beeld S_1 dan is dit

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \quad (16)$$

en de beschrijvende kromme van S wordt

$$n^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \right) - (x^2 + y^2)^2 = 0 \quad (17)$$

zijnde eene Lemniscate ¹⁾ (fig. 2, S) en een geïsoleerd punt, nl. het middenpunt dat door de vermenigvuldiging met $(x^2 + y^2)^2$ is ingevoerd.

b. Plaatst men de pool in het brandpunt, dan is S_1

$$\left(\frac{\xi + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{\beta} \right)^2 = 1 \quad (18)$$

stelt men nu $v = \frac{n^2 \alpha}{\beta^2}$, $w = \frac{n^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta^2}$ en $\frac{w}{v}$ dus de excentriciteit, dan wordt de getransformeerde

$$(x^2 + y^2 - wx)^2 = v^2 (x^2 + y^2) \quad (19)$$

d. i. cene circulaire conchoïde ²⁾ (fig. 3, S).

1) Voor $\alpha = -\beta$ wordt zij meer in het bijzonder de lijn, die gewoonlijk als lemniscate bekend is en een dubbel punt in het middenpunt heeft. (Zij is dan de omgekeerde der gelijkzijdige hyperbole.)

2) Circulaire conchoïde, wijl deze kromme zich geheel als de conchoïde van Nicomedes laat construeeren, wanneer de rechte bij de constructie van deze gebezigd, hier door een cirkel wordt vervangen.

c. Ten opzichte van den top is de vergelijking der ellips

$$\left(\frac{\xi - \alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1 \quad \dots \quad (20)$$

die voor de beschrijvende kromme van S levert

$$2x \left(\frac{x^2 + y^2}{\alpha}\right) = n^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) \quad \dots \quad (21)$$

of eene scissoïde ¹⁾ (fig. 4, S).

d. Indien de pool in een uitwendig punt der omwentelingsas ligt wordt de ellips

$$\left(\frac{\xi - p}{\alpha}\right)^2 + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \quad \dots \quad (22)$$

en het oppervlak S bekomt tot beschrijvende kromme

$$\left(\frac{p^2}{\alpha^2} - 1\right)(x^2 + y^2)^2 - 2n^2 \frac{px}{\alpha^2}(x^2 + y^2) + n^4 \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) = 0 \quad (23)$$

eene lijn, die wij geschiktelijk eene ovoïde zouden kunnen noemen (fig. 5, S).

De oppervlakken door de omwenteling van (17), (19), (21) en (23) ontstaan, geven dus allen eene ellipsoïde tot beeld, waarvan de constanten uit de parameters van deze krommen worden bepaald. — De vergelijkingen laten zich eenvoudiger in polaire coördinaten uitdrukken, ook zou het verder onderzoek ons tot zeer belangrijke eigenschappen en constructiën leiden; als niet direkt tot ons onderwerp behoorende, laten wij dit hier achterwege. — Verscheidene interessante bijzonderheden vindt men bij Schönfeldt, (zie zijne dissertatie »de omgekeerde kegelsneden», bij van Zweeden te Groningen, 1866.)

1) Scissoïde wijl zij in het bijzonder geval van $\frac{\beta}{\alpha} = 0$ de scissoïde van Diocles levert.

§ 9.

Een schoon voorbeeld van de aanwending der transformatie met wederkeerige voerstralen geeft Liouville (zie t. a. p. pag. 285). — Laat gegeven zijn 2 bollen die elkaar niet snijden, benevens de temperatuur in ieder hunner punten in functie der coördinaten, en gevraagd worden de temperatuur in ieder uitwendig punt te bepalen. — De oorsprong 0 kan nu steeds zoodanig genomen worden op de lijn, die de middenpunten der bollen vereenigt, dat hunne spherische beelden concentrisch worden. Bepaalt men nu voor een punt P_1 in de ruimte tusschen de beide beeldoppervlakken de temperatuur in functie der coördinaten ξ , η en ζ , door middel der functiën die over dezelve de temperatuur uitdrukken en door transformatie zijn ontstaan uit die, welke de temperatuur over de gegeven bollen bepalen, — dan behoeft de gevonden functie slechts in x , y , z getransformeerd te worden, om de gevraagde temperatuur te verkrijgen, in het met P_1 overeenkomende punt P .

Men ziet dat aldus het vraagstuk is gereduceerd tot het opsporen van de wet der temperaturen voor de ruimte tusschen 2 concentrische boloppervlakken.

Het bovenstaande zou alléén reeds voldoende zijn om het algemeen belang der zaak duidelijk aan te toonen; wij zullen nog, als daartoe onmiddellijk aanleiding vindende in ons onderwerp, kortelijk aanwijzen hoe ook in de theorie der electriciteitsverdeeling de transformatie met wederkeerige voerstralen tot groote vereenvoudigingen moet leiden.

Laat een elektrisch punt A met de massa q , eene zekere lading induceeren over een oppervlak S , dat met den grond is verbonden, dan zullen, overeenkomstig eene bekende eigenschap, de potentialen der induceerende en geïnduceerde hoeveelheden

in een punt P van S gelijk en tegengesteld van teeken zijn. Wordt nu de afstand van P tot A door r aangeduid, dan is de potentiaal der induceerende massa in dat punt $\frac{q}{r}$, en voor deze geldt in alle punten der ruimte, buiten de massa q , de bekende vergelijking

$$\frac{d^2 \frac{q}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{q}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{q}{r}}{dz^2} = 0 \quad \dots \quad (\alpha)$$

Maar deze kan, na omkeering der teekens, evenzeer worden beschouwd als betrekking te hebben op de potentiaal der over S geïnduceerde lading, in alle buiten S gelegen punten. Wij zullen nader aantonen, dat uit (α) volgt

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} + \frac{d^2 q}{d\eta^2} + \frac{d^2 q}{d\zeta^2} = 0 \quad \dots \quad (\beta)$$

welke relatie voor alle punten buiten S_1 ¹⁾ doorgaat, en dus het hoofdkarakter uitdrukt eener constante potentiaal q over S_1 — hetgeen derhalve op de mogelijkheid wijst om de bepaling der potentiaal eener geïnduceerde lading over S , terug te brengen tot de kwestie eener evenwichtslading over S_1 .

Het is Lipschitz inderdaad gelukt, (zie zijne verhandelingen bd. LVIII en LXI, Journal v. Crelle) het probleem in dezen zin op te lossen. — Wij zullen dus bij onzen arbeid met zijne beschouwingen ons voordeel doen, en tevens gebruik maken van verschillende ontwikkelingen, medegedeeld door Grinwis (*Wiskundige theorie der wrijvings-elektriciteit*) terwijl wij het gebruik der algemeene formules, door eenvoudige voorbeelden zullen trachten op te helderen.

1) De formule (α) geldt voor alle punten buiten S , de formule (β) voor alle daarmede overeenkomstige punten en dus voor alle punten buiten S_1 .

TWEEDE HOOFDSTUK.

ONTWIKKELING DER GRONDFORMULEN.

§ 1.

Als voortzetting onzer algemeene beschouwingen over de theorie der beelden, zullen wij eenige relatiën ontwikkelen tuschen de 1^e en 2^e differentiaal-parameters van eene functie en hare getransformeerde met wederkeerige voerstralen. — Ten einde daarbij het overzicht der formules gemakkelijker te maken, ontlicenen wij de volgende notaties aan Lamé: »*Leçons sur les coordonnées curvilignes*”, pag. 8.

De letter u duidt in het algemeen eene der variabelen x , y of z , en v eene der parameters ξ , η of ς aan.

Staat vóór eene uitdrukking met u of v het teeken Σ ¹⁾ dan wordt de som van drie termen bedoeld, in welke u of v achtereenvolgens door x , y en z of door ξ , η en ς zijn vervangen. —

1) Lamé hecht eenigzins andere beteekenis aan de symbolen Σ en S . — Het 1^e gebruikt hij uitsluitend bij verwisselingen van x , y en z het 2^e voor ξ , η en ς . — De boven aangegevene manier schijnt mij hier duidelijker.

Hetzelfde teeken vóór een vorm met u_0 en u_1 of met v_0 en v_1 stelt de som van drie termen voor, in welke deze letters met een willekeurig tweetal uit x, y, z of uit ξ, η, s zijn verwisseld.

Het teeken \S eindelijk vóór eene uitdrukking, waarin u en v voorkomen, beteekent de som van de termen in welke zij overgaat, door voor u en v , op alle mogelijke wijzen, x, y of z en ξ, η of s te schrijven, terwijl voor u_0 en u_1 of voor v_0 en v_1 alle mogelijke 2-tallen dier coördinaten moeten worden genomen.

Kiezen wij nu als poolpunt het punt A met de coördinaten a, b en c , dan moet gebruik gemaakt worden van de transformatie-formulen (9) en (10) uit het 1^e Hoofdstuk, nl.

$$\begin{array}{l} \xi = a + \frac{n^2(x-a)}{r^2} \\ \eta = b + \frac{n^2(y-b)}{r^2} \\ s = c + \frac{n^2(z-c)}{r^2} \\ \text{en} \\ x = a + \frac{n^2(\xi-a)}{r_1^2} \\ y = b + \frac{n^2(\eta-b)}{r_1^2} \\ z = c + \frac{n^2(s-c)}{r_1^2} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \xi \\ \eta \\ s \\ x \\ y \\ z \end{array}} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

a. Door differentiatie van de eerste groep dezer vergelijkingen ontstaat

$$d\xi = \frac{n^2}{r^2} \left\{ dx - \frac{x-a}{r^2} d(r^2) \right\}$$

$$d\eta = \frac{n^2}{r^2} \left\{ dy - \frac{y-b}{r^2} d(r^2) \right\}$$

$$ds = \frac{n^2}{r^2} \left\{ dz - \frac{z-c}{r^2} d(r^2) \right\};$$

de som van de 2^e machten dezer differentiaal-vergelijkingen levert, in verband met de vergelijkingen

$$d(r^2) = 2 \left((x - a) dx + (y - b) dy + (z - c) dz \right)$$

en

$$\frac{n}{r} = q,$$

de betrekking

$$\Sigma dv^2 = q^4 \Sigma du^2 \dots \dots \dots (2)$$

Op dezelfde wijze handelende ten opzichte van de tweede groep der vergelijkingen (1), komt door te stellen

$$\frac{n}{r_1} = q_1$$

de betrekking

$$\Sigma du^2 = q_1^4 \Sigma dv^2 \dots \dots \dots (3)$$

Aanmerking. Het is van belang op te merken, dat of (2) of (3) niet doorgaat, wanneer of het getransformeerde of het oorspronkelijk oppervlak zich in het oneindige uitstrekken.

In het eerste geval, bijv. wordt $r = 0$, voor de oneindig verwijderde punten van het beeld, en de boven aangenomen waarde voor $d\xi$ is derhalve onjuist. Behouden wij hier de oneindig kleinen van hoogere orde bij, dan komt

$$d\xi = \frac{n^2}{(r + dr)^2} \left\{ dx - \frac{(x - a)(2rdr + dr^2)}{r^2} \right\}$$

en daarin r en $x - a = 0$ stellende, vindt men

$$d\xi = \frac{n^2}{dr^2} dx.$$

Handelt men nu op dezelfde wijze met $d\eta$ en $d\zeta$, dan is ten slotte

$$\Sigma dv^2 = \left(\frac{n}{dr}\right)^4 \Sigma du^2.$$

Het verband tusschen deze formule en (3) behoeft verder geene toelichting.

b. Eene belangrijke relatie kan men vinden tusschen de produkten $dx dy dz$ en $d\xi d\eta d\zeta$. Daartoe bepaalt men de grootte van twee overeenkomstige inhoudsclementen dI en dI_1 . Laat α de hoek van den voerstraal met de x -as voorstellen, en φ de hoek zijn, dien het vlak door voerstraal en x -as gebracht, met het xz -vlak maakt, dan heeft men blijkbaar

$$\begin{aligned} dI &= r^2 dr d\alpha d\varphi \sin \alpha \\ dI_1 &= r_1^2 dr_1 d\alpha d\varphi \sin \alpha \end{aligned}$$

daar verder $r_1 = \frac{n^2}{r}$ en dus $dr_1 = -\frac{n^2}{r^2} dr$ is, vindt men dadelijk

$$\frac{dI_1}{dI} = -q^6;$$

de zijden dezer elementen evenwijdig zijnde, gaan zij door vermenigvuldiging met gelijke factoren in $d\xi d\eta d\zeta$ en $dx dy dz$ over, zoodat men komt tot

$$\frac{d\xi d\eta d\zeta}{dx dy dz} = -q^6 \dots \dots \dots (4)$$

Aanmerking. Ook deze formule geldt niet meer, wanneer r nul is of het getransformeerde oppervlak zich in het oneindige uitstrekt. In dat geval toch is de boven gevonden uitdrukking voor dI niet meer de ware, zoo als uit de volgende berekening blijkt, bij welke de hoogere machten van dr steeds zijn bijgehouden.

Zij (fig. 6) NOX de bedoelde hoek α . Stellen wij nu den inhoud van den elementairen sector $aOb = P$ en het vlakje $abcd$ dus dP , dan is

$$P = \frac{1}{2} r^2 d\alpha$$

en

$$dP = \frac{1}{2} (2rdr + dr^2) d\alpha.$$

De zwaartepunten z en z' van de beide sectoren aOb en cOd liggen op de lijn, die den hoek $d\alpha$ middendoor deelt. Hunne afstanden tot O zijn

$$Oz = \frac{\frac{2}{3} kr}{r d\alpha} \quad \text{en} \quad Oz' = \frac{\frac{2}{3} k' (r + dr)}{(r + dr) d\alpha}$$

In deze formules stellen k en k' de koorden ab en cd voor, die, als de hoogere machten van $d\alpha$ worden weggelaten, door de bogen worden vervangen, zoodat men verkrijgt

$$Oz = \frac{2}{3} r \quad \text{en} \quad Oz' = \frac{2}{3} (r + dr).$$

Noemen wij het zwaartepunt van dP nu z'' , dan komt door de vergelijking der momenten dadelijk

$$Oz'' = \frac{\frac{2}{3} (3r^2 dr + 3rdr^2 + dr^3)}{2rdr + dr^2}.$$

Volgens het theorema van Guldin is nu

$$dI = Oz'' \sin \alpha d\varphi \times dP$$

dat is na substitutie der waarde van Oz'' en van dP

$$dI = r^2 dr d\alpha d\varphi \sin \alpha + r dr^2 d\alpha d\varphi \sin \alpha + \frac{1}{3} dr^3 d\alpha d\varphi \sin \alpha;$$

de beide eerste termen vervallen en daarmede form. (4).

Het theorema van Taylor ten opzichte van r toegepast op de uitdrukking $\frac{1}{3} r^3 d\alpha d\varphi \sin \alpha$, welke den elementairen bolsector met kwadraatvormig grondvlak voorstelt, zoude tot hetzelfde resultaat hebben gevoerd. Zij deze uitdrukking $f(r)$ gesteld, dan heeft men

$$f(r + dr) = f(r) + dr f'(r) + \frac{dr^2}{1.2} f''(r) + \frac{dr^3}{1.2.3} f'''(r) + \text{enz.}$$

of daar $f(r + dr) = I + dI$ en $f(r) = I$ is,

$$dI = r^2 dr d\alpha d\varphi \sin \alpha + r dr^2 d\alpha d\varphi \sin \alpha + \frac{1}{2} dr^3 d\alpha d\varphi \sin \alpha + 0$$

waaruit blijkt, dat voor $r = 0$, $dI = \frac{1}{2} dr^3 d\alpha d\varphi \sin \alpha$ wordt, zooals te voorzien was, en ook uit onze vorige berekening bleek.

Op dezelfde wijze zou blijken, dat de omgekeerde formule van (4) d. i. $dx dy dz = -q_1^0 d\xi d\eta ds$ verviel, indien het oorspronkelijk oppervlak zich in het oneindige uitstrekte.

c. Beschouwen wij een paar overeenkomstige vlakke-elementen dS en dS_1 , dan bestaat tusschen een paar hunner gelijkstandige zijden ds en ds_1 (volgens (2)) de betrekking $ds_1^2 = q^4 ds^2$. Men heeft dus op een oneindig klein van hoogere orde na

$$\frac{dS_1}{dS} = q^4 \dots \dots \dots (5)$$

Aanmerkingen. 1°. Ligt dS_1 in het oneindige, dan gaat de formule (5) blijkens de aanmerking onder *a* nog door, als q slechts $= \frac{n}{dr}$ wordt genomen.

2°. Met behulp der formules (2), (4) en (5) zullen verdere relatiën worden ontwikkeld, en daarbij ondersteld worden dat S_1 eindig is en de pool dus niet in het oorspronkelijk oppervlak is gelegen; op het andere geval zal nader worden teruggekomen.

§ 2.

a. Tusschen de 1^e differentialen van x, y, z en ξ, η, s bestaan de identieke vergelijkingen

$$d\xi = \sum \frac{d\xi}{du} du, \quad d\eta = \sum \frac{d\eta}{du} du, \quad ds = \sum \frac{ds}{du} du \dots (\alpha)$$

neemt men de som harer kwadraten en vervangt het 1^e lid der komende vergelijking, d. i. Σdv^2 door hare waarde $q^4 \Sigma du^2$ uit (2) dan vindt men

$$q^4 \Sigma du^2 = S \left\{ \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du^2 + 2 \frac{dv}{du_0} \frac{dv}{du_1} du_0 du_1 \right\} \quad . . \quad (\beta)$$

Daar dx , dy en dz willekeurig zijn, kan men alle coëfficiënten der verschillende machten en produkten dezer grootheden gelijk nul stellen, waaruit volgt

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = q^4 \\ \Sigma \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 = q^4 \\ \Sigma \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 = q^4 \end{array} \right\} \text{ en } \left. \begin{array}{l} \Sigma \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} = 0 \\ \Sigma \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dz} = 0 \\ \Sigma \frac{dv}{dy} \frac{dv}{dz} = 0 \end{array} \right\} \quad . . \quad (\gamma)$$

Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (α) resp. met $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$ en $\frac{d\xi}{dx}$, dan vindt men, na optelling en gebruik makende van (γ), de identiteit

$$q^4 dx = \Sigma \frac{dv}{dx} dv.$$

Op dezelfde wijze komt, door vermenigvuldiging met $\frac{d\xi}{dy}$, $\frac{d\eta}{dy}$ en $\frac{d\xi}{dy}$

$$q^4 dy = \Sigma \frac{dv}{dy} dv,$$

en op soortgelijke wijze

$$q^4 dz = \Sigma \frac{dv}{dz} dv.$$

De som der kwadraten dezer drie laatste vergelijkingen levert, wanneer men het eerste lid $q^2 \sum dv^2$, volgens (2), door $q^2 \sum dv^2$ vervangt, de vergelijking

$$q^2 \sum dv^2 = \sum \left\{ \left(\frac{dv}{du} \right)^2 dv^2 + 2 \frac{dv_0}{du} \frac{dv_1}{du} dv_0 dv_1 \right\} \dots (\delta)$$

en daar hier $d\xi$, $d\eta$ en $d\zeta$ geheel willekeurig zijn, komt men weder tot het besluit dat de coëfficiënten alle nul moeten zijn, derhalve

$$\left. \begin{aligned} \sum \left(\frac{d\xi}{du} \right)^2 &= q^4 & \sum \frac{d\xi}{du} \frac{d\eta}{du} &= 0 \\ \sum \left(\frac{d\eta}{du} \right)^2 &= q^4 & \text{en} & \sum \frac{d\xi}{du} \frac{d\zeta}{du} &= 0 \\ \sum \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 &= q^4 & \sum \frac{d\eta}{du} \frac{d\zeta}{du} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (\varepsilon)$$

b. Laten nu U en W functiën van x , y en z zijn, die door substitutie der waarden (1) in de functiën U_1 en W_1 van ξ , η en ζ overgaan, dan heeft men in het algemeen

$$\frac{dU}{dx} = \sum \frac{dU_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{dU}{dy} = \sum \frac{dU_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dy}, \quad \frac{dU}{dz} = \sum \frac{dU_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \dots (\vartheta)$$

De som der kwadraten van deze, geeft bij inachtneming van (ε)

$$\sum \left(\frac{dU}{du} \right)^2 = q^4 \sum \left(\frac{dU_1}{d\xi} \right)^2 \dots \dots \dots (6)$$

Men heeft evenzoo

$$\frac{dW}{dx} = \sum \frac{dW_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{dW}{dy} = \sum \frac{dW_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dy}, \quad \frac{dW}{dz} = \sum \frac{dW_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \dots (\ast)$$

Vermenigvuldigt men nu ieder der vergelijkingen (ϑ), met de overeenkomstige van (\ast), neemt de som dezer produkten en vereenvoudigt deze, door middel der vergelijkingen (2), dan

verkrijgt men dadelijk

$$\Sigma \frac{dU}{du} \frac{dW}{du} = q^4 \Sigma \frac{dU_1}{dv} \frac{dW_1}{dv} \dots \dots \dots (7)$$

§ 3.

Terwijl de vergelijking (6) eene betrekking tusschen de differentiaal-parameters der 1^e orde, van de functie en hare getransformeerde voorstelt, bestaat tusschen hare differentiaal-parameters van de 2^e orde de relatie

$$\Sigma \frac{d^2 q U}{du^2} = U \Sigma \frac{d^2 q}{du^2} + q^3 \Sigma \frac{d^2 U_1}{dv^2} \dots \dots \dots (8)$$

Het schijnt van gewicht, deze vergelijking, die bij de theorie der elektrische inductie eene groote rol speelt, onmiddellijk aan de grondvergelijkingen der elektro-statika te doen aansluiten, weshalve wij haar uit het bekende theorema van Green zullen trachten af te leiden. Dit luidt (Grinwis t. a. p. pag. 24 B.

$$\int dk \Sigma \frac{dG}{du} \frac{dH}{du} = \int G ds \Sigma \frac{dH}{du} \frac{du}{dn} - \int G dk \Sigma \frac{d^2 H}{du^2}$$

waar ds een element voorstelt van het oppervlak, dat zekere ruimte k begrenst, terwijl G en H willekeurige functiën zijn.

Laten nu H en G functiën van ξ , η en s zijn en resp. U_1 en W_1 gesteld worden; verder zij W_1 het oppervlak $f(\xi, \eta, s) = 0$ dat de ruimte k_1 insluit, en welks element dus door ds_1 wordt aangeduid; de uitdrukking $G ds$, die in de eerste integraal van het 2^e lid van bovenstaande vergelijking voorkomt, wordt hier dus $W_1 ds_1$, maar daar W_1 of $f(\xi, \eta, s)$ voor alle punten van het oppervlak dat zij zelve voorstelt $= 0$ wordt, verdwijnt deze integraal, en de vergelijking verkrijgt den vorm

$$\int_{\xi, \eta, \varsigma} dk_1 \sum \frac{dU_1}{d\nu} \frac{dW_1}{d\nu} = - \int_{\xi, \eta, \varsigma} W_1 dk_1 \sum \frac{d^2 U_1}{d\nu^2} \dots (A)$$

Wij kunnen nu gemakkelijk de waarde vinden van het eerste lid, uitgedrukt in grootheden, die betrekking hebben op het systeem U en W waarvan U_1 en W_1 de getransformeerden voorstellen. Immers volgens (4) en (7) hebben wij

$$dk_1 = -q^4 dk \quad \text{en} \quad \sum \frac{dU}{du} \frac{dW}{du} = q^4 \sum \frac{dU_1}{d\nu} \frac{dW_1}{d\nu}$$

zoodat A wordt

$$\int q dk \sum \frac{dU}{du} \frac{dW}{du} = - \int q^5 W dk \sum \frac{d^2 U_1}{d\nu^2} \dots (A')$$

Aanmerking. In het 2^o lid dezer vergelijking is W_1 door W vervangen. Deze handelwijze wordt gebillijkt door de volgende redenering: de variabelen hier x , y en z zijnde, moeten de integralen ten opzichte van deze worden genomen; ten einde de waarde van W_1 voor een bepaald element dk met coördinaten x_1 , y_1 , z_1 te bekomen, moeten in deze functie daar zij van de variabelen ξ , η en ς afhankelijk is, de overeenkomstige waarden ξ_1 , η_1 , ς_1 worden gesteld; maar daardoor verkrijgt W dezelfde waarde die W door direkte substitutie van x_1 , y_1 en z_1 zou bekomen, daar deze beide functiën, overeenkomstig haar karakter, door de substitutiën (1) pag. 19 in elkaâr overgaan.

Gaan wij nog eenmaal van de grondformule uit en nemen daarin $H = qU$ en $G = W$, waarbij W de ruimte k overeenkomende met k_1 insluite, dan geeft zij

$$\int dk \sum \frac{dqU}{du} \frac{dW}{du} = - \int W dk \sum \frac{d^2 qU}{du^2} \dots (B)$$

of het eerste lid ontwikkelend:

$$\int U dk \Sigma \frac{dq}{du} \frac{dW}{du} + \int q dk \Sigma \frac{dU}{du} \frac{dW}{du} = - \int W dk \Sigma \frac{d^2 q U}{du^2} \dots (B)$$

De eerste term stelt de som voor van de volgende drie integralen

$$\left. \begin{aligned} & \int \int U dy dz \int \frac{dW}{dx} \frac{dq}{dx} dx \\ & \int \int U dx dz \int \frac{dW}{dy} \frac{dq}{dy} dy \\ & \int \int U dx dy \int \frac{dW}{dz} \frac{dq}{dz} dz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B')$$

in deze heeft men

$$\int \frac{dW}{dx} \frac{dq}{dx} dx = W \frac{dq}{dx} - \int W \frac{d^2 q}{dx^2} dx$$

$$\int \frac{dW}{dy} \frac{dq}{dy} dy = W \frac{dq}{dy} - \int W \frac{d^2 q}{dy^2} dy$$

$$\int \frac{dW}{dz} \frac{dq}{dz} dz = W \frac{dq}{dz} - \int W \frac{d^2 q}{dz^2} dz$$

en daar nu W aan de grenzen der integraal verdwijnt worden

$W \frac{dq}{dx}$, $W \frac{dq}{dy}$ en $W \frac{dq}{dz}$ allen $= 0$ zoodat voor de integralen (B'')

komt

$$- \int \int \int U W dk \frac{d^2 q}{dx^2}$$

$$- \int \int \int U W dk \frac{d^2 q}{dy^2}$$

$$- \int \int \int U W dk \frac{d^2 q}{dz^2}$$

De eerste term van (B) wordt alzoo

$$\int UWdk \sum \frac{d^2q}{du}$$

en (B') verkrijgt den vorm

$$-\int UWdk \sum \frac{d^2q}{du^2} + \int qdk \sum \frac{dU}{du} \frac{dW}{du} = -\int Wdk \sum \frac{d^2qU}{du^2} \quad (B''')$$

substitueert men voor den 2^{en} term de waarde uit (A), dan komt

$$\int UWdk \sum \frac{d^2q}{du^2} + \int Wq^5dk \sum \frac{d^2U_1}{dv^2} = \int Wdk \sum \frac{d^2qU}{du^2}$$

of

$$\int Wdk \left(U \sum \frac{d^2q}{du^2} + q^5 \sum \frac{d^2U_1}{dv^2} - \sum \frac{d^2qU}{du^2} \right) = 0.$$

In deze integraal nu zijn alle elementen Wdk negatief, daar W eerst aan de grenzen van $k = \text{nul}$ wordt — de coëfficiënt moet dus constant nul zijn opdat de geheele integraal verdwijne: waardoor de vergelijking (8) bewezen is.

Deze vergelijking zal later, zie pag. 34 en 35 worden gebezigd ten einde de betrekking (α) pag. 18 uit (β) aldaar af te leiden.

DERDE HOOFDSTUK.

ALGEMEENE TOEPASSING VAN DE THEORIE DER SPHERISCHE BEELDEN OP DE ELEKTRISCHE INDUKTIE.

§ 1.

Wanneer eene massa elektriciteit μ , geconcentreerd in een punt A (a, b, c) door influentie op een geïsoleerden, vooraf met Q elektriciteit geladen conductor S , eene hoeveelheid q neutrale vloeistof scheidt, dan kan de lading over S beschouwd worden als te bestaan uit:

- 1°. de oorspronkelijke evenwichtslading Q ;
- 2°. de lading $+q$ eveneens als evenwichtslading verspreid;
- 3°. de lading $-q$, zoodanig verdeeld, dat zij met de massa μ in A , over S eene constante potentiaal oplevert.

In dit geval toch, is over S de totale potentiaal van alle elektriciteit constant, en dus de vloeistof over dat oppervlak in evenwicht; daar nu de evenwichtstoestand, ook bij inductie slechts op ééne wijze mogelijk is, (zie Grinwis t. a. p. pag. 95) zoo is de aangewezen verdeeling de werkelijk plaats grijpende.

Hoe groot de onder 3° bedoelde constante is, blijkt als wij den conductor met den grond in geleidend verband brengen: de ladingen 1° en 2° verdwijnen dan en tevens wordt de totale potentiaal, d. i. nu de onder 3° genoemde, gelijk nul. — Derhalve bepaalt zich het vraagstuk der inductie tot het vinden eener lading van een oppervlak S , die met de induceerende massa, over dat oppervlak de constante potentiaal 0 levert. — Is een punt B van S op een afstand r van A verwijderd dan is de potentiaal der induceerende massa aldaar $\frac{\mu}{r}$, zoodat die der geïnduceerde hoeveelheid in dat punt $\frac{-\mu}{r}$ moet zijn.

De eenheid elektriciteit in A geconcentreerd, induceere nu over S eene zekere lading, wier uitwendige potentiaal in het punt P wij V_p noemen. — Laat verder het spherisch beeld van S ten opzichte van A als pool, door S_1 en de afstand van P tot A door t aangeduid worden, dan zullen wij bewijzen dat V_p den vorm $\frac{U}{t}$ of qU aanneemt, wanneer U de potentiaal van zekere evenwichtslading van S_1 in het met P overeenkomende punt P_1 voorstelt; — aldus zal door middel der vergelijking (8) van het vorige hoofdstuk, de beschouwing van de potentiaal V_p tot het onderzoek van U zijn teruggebracht. — Daartoe strekt de volgende

STELLING. Laten S en S_1 (fig. 7) 2 systemen van oppervlakken zijn, waarvan het 2° het beeld van het 1° is; laten de dichtheden in overeenkomstige punten B en B_1 zijn $\frac{n^2}{r^3} \lambda_1$ en λ_1 : dan zal tusschen hunne potentialen V en U in 2 overeenkomstige punten P en P_1 de betrekking $V = \frac{U}{t}$ bestaan. (De afstanden van

de punten B en P tot de pool A zijn resp. door r en t aangeduid.)

BEWIJS. Men kan deze stelling aldus bewijzen: indien λ en λ_1 de dichtheden in twee elementen dS en dS_1 , met de letters B en B_1 geteekend, voorstellen, en overigens de notaties der stelling worden bijgehouden, heeft men de bekende formules

$$V = \int \frac{\lambda dS}{PB} \dots \dots \dots (1)$$

en

$$U = \int \frac{\lambda_1 dS_1}{P_1 B_1} \dots \dots \dots (2)$$

nu zijn de driehoeken APB en $AP_1 B_1$ gelijkvormig omdat

$$AP_1 \times AP = AB_1 \times AB = n^2$$

zoodat

$$P_1 B_1 : PB = AB_1 : AP$$

en daar verder

$$AB_1 = \frac{n^2}{r} \quad \text{en} \quad AP = t$$

heeft men

$$P_1 B_1 = \frac{n^2}{rt} \times PB;$$

tevens is, overeenkomstig de vergelijking (4) van het 2^o Hoofdstuk

$$dS_1 = q^4 dS.$$

Substitueeren wij deze waarden van $P_1 B_1$ en dS_1 in (2) dan komt

$$U = t \int \frac{\frac{n^2}{r^3} \lambda_1 dS}{PB}$$

en wanneer wij hierin ten slotte $\frac{n^2}{r^3} \lambda_1 = \lambda$ stellen, vinden wij

$$U = tV \dots \dots \dots (3)$$

hetgeen te bewijzen was.

Aanmerking. In geval het punt A in het oorspronkelijk oppervlak is gelegen en het beeld dus oneindig is, gaat bovenstaande beschouwing door voor alle elementen van S , behalve voor het onmiddellijk naast A gelegene. — Onderzoeken wij dit dus afzonderlijk. Daarvoor is

$$AB_1 = \frac{n^2}{dr} \quad \text{en} \quad dS_1 = \frac{n^4}{dr^4} dS$$

(volgens de aanmerking pag. 21), en dus wordt

$$U = t \int \frac{\frac{n^2}{dr^3} r_1 dS}{PB}.$$

Men heeft dus slechts in het oog te houden dat voor dit element r in dr verandert, ten einde de formule ook in het hier bedoelde geval te kunnen aanwenden.

Later zal worden aangetoond (zie 4^e Hoofdstuk § 2): dat de lading door een punt in een oppervlak over dat oppervlak geïnduceerd, gelijk aan de induceerende massa, en in hetzelfde punt opgehoopt is.

§ 2.

Het voorgaande bewijs, dat, voorzoover mij bekend is, nog niet was gegeven, verdiende wellicht om zijne korthed en eenvoudigheid de vermelding; intusschen sluit het zich minder

geleidelijk aan het vorige analytisch onderzoek, en moet dus eer als op zich zelf staande beschouwd worden. Belangrijker is het betoog van Lipschitz (t. a. p. pag. 7, 8, 9 en 10), dat wij hier kortelijk resumeeren.

Opdat $\frac{U}{t}$ werkelijk de potentiaal V der bedoelde lading voorstelt, moet deze grootheid voldoen aan de door Dirichlet aangewezen karakters der potentiaal. Zij zijn de volgende:

1° $\frac{U}{t}$ moet in alle punten der ruimte continuë en eindig zijn, en hare 1° differentiaal-quotienten moeten deze eigenschap, voor alle buiten S gelegen punten, bezitten.

2° Moet $\frac{d\left(\frac{U}{t}\right)_u}{dn} - \frac{d\left(\frac{U}{t}\right)_i}{dn} = -4\pi \frac{u^2}{r^3} \lambda_1$ zijn, waarbij de indices u en i aanwijzen, dat de differentiaal-quotienten onmiddellijk buiten en binnen aan het oppervlak op eene zelfde normale genomen zijn, waarvan dn het element is.

3° De functie moet voldoen aan de betrekking $\sum \frac{d^2 \frac{U}{t}}{du^2} = 0$, waarvoor wij, volgens eene bekende notatie schrijven $\Delta^2 \frac{U}{t} = 0$.

4° De limiet van $\frac{U}{t}$ moet voor oneindig verwijderde punten nul zijn.

1° Aangaande de eerste eigenschap kan geen twijfel bestaan, daar U aan de genoemde voorwaarden voldoet en $\frac{1}{t}$ steeds eindig is, behalve voor punten P , die zeer nabij A zijn gelegen. In dat geval echter bevindt zich het overeenkomstige punt P_1 op oneindigen afstand, en de potentiaal U van S_1 nadert tot

$\frac{Q_1}{AP_1}$, d. i. tot $\frac{Q_1}{n^2}$, waar Q_1 de lading van S_1 voorstelt. Derhalve

convergeert de potentiaal V tot eene constante $\frac{Q_1}{n^2}$, en hare eerste differentiaal-quotienten tot 0, zoodat deze grootheden steeds eindig blijven.

2° De tweede eigenschap volgt door uitvoering der differentiaties, in verband met de opmerking, dat

$$\frac{dU_a}{dn_1} - \frac{dU_i}{dn_1} = -4\pi\lambda_1$$

en met behulp der vergelijkingen (6) en (7) van het vorige hoofdstuk; bij de differentiatie der beide uitdrukkingen, die op punten zeer nabij S gelegen, betrekking hebben, en in welke

dus t door r wordt vervangen, mogen $\frac{d}{dn}$, U en $\frac{1}{r}$ aan beide zijden van S gelijk worden genomen, daar men de oneindig kleinen van hoogere orde verwaarloost.

3° De vergelijking (8) van het vorige hoofdstuk, sluit het bewijs der derde eigenschap in zich; immers door invoering van $q = \frac{1}{t}$ wordt zij

$$\Sigma \frac{d^2 U}{du^2} = U \Sigma \frac{d^2 \frac{1}{t}}{du^2} + \left(\frac{1}{t}\right)^3 \Sigma \frac{d^2 U}{dv^2}$$

Nu blijkt door differentiatie, dat

$$\Sigma \frac{d^2 \frac{1}{t}}{du^2} \quad \text{of} \quad \frac{d^2 \frac{1}{t}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{t}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{t}}{dz^2} = 0,$$

daar $t^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, in welke uitdrukking x , y en z de coördinaten van P , en a , b en c die van de pool

voorstellen. De vergelijking (8) verkrijgt nu, als men het teeken Δ^2 bezigt, den vorm

$$\Delta^2 \frac{U}{t} = \left(\frac{1}{t}\right)^5 \Delta^2 U$$

en daar het 2^e lid = 0 is, omdat U eene potentiaal functie voorstelt, is ook het 1^e lid = 0.

4^o De vierde eigenschap eindelijk volgt dááruit, dat voor oneindig ver verwijderde punten, U eindig en t oneindig is.

§ 3.

De bewezen stelling leidt nu rechtstreeks tot eene methode om de dichtheid te vinden van eene lading, die door de elektriciteits-massa μ , in zeker punt $A(a, b, c)$ geplaatst, over S wordt geïnduceerd. Vooraf herinneren wij dat deze lading als eenig karakter de eigenschap bezit, dat zij in een punt van het geïnduceerde oppervlak eene potentiaal heeft, die gelijk en tegengesteld is aan de potentiaal der induceerende massa in hetzelfde punt, zoodat als wij den afstand van A tot een punt B van S , r noemen, de potentiaal der geïnduceerde lading in $B = \frac{-\mu}{r}$ moet zijn.

a. Ten einde nu de dichtheid der geïnduceerde lading, bijv. in een punt B te vinden, gaan wij op de volgende wijze te werk: — wij bepalen het beeld S_1 van S ten opzichte van A als pool, door middel der transformatie-formulen (10) pag. 11, in welke zekere willekeurige grootheid voor n wordt gesteld, en voorzien dit beeldoppervlak van eene evenwichtslading, die over hetzelfde de constante potentiaal $-\mu$ heeft, en wier dichtheid in ieder punt moet kunnen berekend worden. Verder trekken wij uit A den voorstraal r naar het punt B , en bepalen de dichtheid

waar V_u en \bar{V} potentialen eener evenwichtslading over zeker oppervlak S voorstellen, en wel resp. in het induceerend punt A en in een punt van het oppervlak zelve, en λ de dichtheid der geïnduceerde lading in het element dS is. Wij behoeven hier \bar{V} slechts $= -1$ aan te nemen om te verkrijgen

$$V_u = \int \lambda dS = Q \dots \dots \dots (4)$$

Aanmerkingen. 1°. Is in het punt A de massa μ geconcentreerd, dan wordt de vergelijking (α)

$$\mu V_u = - \int \bar{V} \lambda dS \dots \dots \dots (5)$$

en stelt men daarin $\bar{V} = -\mu$, dan komt (4) weder te voorschijn. Men neme dus de evenwichtslading slechts zoodanig, dat hare potentiaal over het oppervlak gelijk is aan de induceerende massa met tegengesteld teeken, dan zal hare uitwendige potentiaal in het induceerend punt, steeds de geïnduceerde massa uitdrukken.

2°. Voor de vergelijking (5) kunnen wij in ons geval schrijven

$$Q = - \frac{V_u}{\bar{V}} \mu \dots \dots \dots (6)$$

Is nu A uitwendig dan is steeds $V_u < \bar{V}$ en de geïnduceerde hoeveelheid is kleiner dan de induceerende. Ligt daarentegen A binnen of in S dan wordt $V_u = \bar{V}$; in dat geval zijn derhalve de beide hoeveelheden gelijk. Wij zullen dat later, zie pag. 46 en 48, voor bijzondere gevallen nader bevestigd zien.

§ 4.

Dichtheid, uitwendige potentiaal en massa van eene door een elektrisch punt geïnduceerde lading, worden alzoo, blijkens het voorgaande, door middel van evenwichtsladingen over S of zijn beeld bepaald.

Maar dit voert ons ook tot het geval, dat de induceerende massa, over eene niet geleidende ruimte of oppervlakte M , of over verschillende punten, op gegevene wijze is verdeeld. —

In het eerste geval zal de dichtheid der geheele op S gebonden lading, uit de som der partiëele dichtheden bestaan, die men verkrijgt, door elk punt van M afzonderlijk als induceerend te beschouwen. — Dit zelfde zal voor de beide andere te bepalen grootheden gelden, zoodat men, de bedoelde partiëele dichtheden, uitwendige potentialen en massa's in het algemeen door λ , v en q — en een element der induceerende massa door dk — voorstellende, voor de geheele grootheden vindt

$$L = \int \lambda dk$$

$$V = \int v dk$$

$$Q = \int q dk$$

Is de induceerende elektriciteit in enkele punten opgehoopt, dan leidt dezelfde methode ons tot summatiën; — evenwel is het duidelijk dat men in beide gevallen zelfs bij zeer vereenvoudigende bepalingen, op groote analytische moeilijkheden stuit. — Wat de inductie tusschen geleiders aangaat, het zal nader worden aangetoond, dat men ook in dat geval slechts met evenwichtsladingen te doen krijgt. — Al is het nu niet te ontkennen dat het algemeene vraagstuk der evenwichtsverdeeling nog onopgelost is, zoo kan toch, door de methode der niveau-oppervlakken van Green, deze verdeeling voor een onbepaald aantal oppervlakken worden opgespoord, en is dus de kwestie der inductie niet alleen op meer effen terrein overgebracht, maar ook werkelijk in vele gevallen volkomen oplosbaar.

VIERDE HOOFDSTUK.

TOEPASSING OP EENIGE VOORBEELDEN.

§ 1.

Wij zullen ter toepassing eenige gebondene ladingen onderzoeken en vangen aan met den bol; daarbij wordt het induceerend punt achtereenvolgens buiten, binnen en in het oppervlak van den bol aangenomen.

1° HET PUNT *A* BUITEN DEN BOL (fig. 8).

Nemen wij dit punt, waar de massa μ zij opgehoopt, als oorsprong van coördinaten, noemen het middenpunt van den bol O , zijn straal R , en den afstand van het middenpunt tot den oorsprong a , terwijl de x -as door het middenpunt wordt gelegd. — Bepalen wij nu eerst het beeld van het gegeven oppervlak: dit is volgens § 8 van het 1^e Hoofdstuk een bol, wiens middenpunt O_1 ¹⁾, naar aanleiding der formules (13) aldaar, mede op de x -as gelegen, en van A op een afstand

$$a_1 = \frac{n^2 a}{a^2 - R^2} \dots \dots \dots (1)$$

1) In het volgende zullen alle grootheden, die op de beelden betrekking hebben, met accenten worden geteekend.

verwijderd is, en die tot straal heeft

$$R_1 = \frac{n^2 R}{a^2 - R^2} \dots \dots \dots (2)$$

Laadt men dezen bol tot de constante potentiaal $-\mu$, en zij de ghecele lading Q_1 , dan heeft men klaarblijkelijk

$$\mu = -\frac{Q_1}{R_1} \dots \dots \dots (3)$$

daar ook in het middenpunt de potentiaal $-\mu$ is.

De massa Q_1 verspreidt zich gelijkmatig over het boloppervlak S_1 , zoodat men voor de dichtheid verkrijgt

$$\lambda_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \text{of} \quad \lambda_1 = \frac{-\mu}{4\pi R_1} \dots \dots (4)$$

na substitutie der waarde van Q_1 uit (3).

De uitwendige potentiaal U_n dezer lading is gelijk aan die eener zelfde massa in het middenpunt geconcentreerd, zoo wordt zij b. v. in het punt M_1

$$U_n = \frac{Q_1}{O_1 M_1} \quad \text{of} \quad = \frac{-\mu R_1}{O_1 M_1} \dots \dots (5)$$

Bepalen wij nu de dichtheid λ , de uitwendige potentiaal V en de massa Q der geïnduceerde lading.

a. De dichtheid. Volgens pag. 37 a, heeft men vooreerst

$$\lambda = \frac{n^2}{r^3} \lambda_1,$$

hetgeen door substitutie van (4) en (1) overgaat in

$$\lambda = \frac{-\mu(a^2 - R^2)}{4\pi R r^3} \dots \dots \dots (6)$$

d. i. hetzelfde resultaat door Grinwis (t. a. p. pag. 126) uit de

formule $\frac{dV_u}{dt} - \frac{dV_i}{dt} = -4\pi\lambda$ afgeleid.

b. Uitwendige potentiaal. Om deze te vinden b. v. in het uitwendig punt M met M_1 overeenkomende, bezigen wij de vergelijking (3) van het vorige hoofdstuk, die hier wordt

$V_u = \frac{U_u}{AM}$. Substitueeren wij in deze de waarde (5) voor U_u dan

komt vooreerst

$$V_u = \frac{-\mu R_1}{AM \cdot O_1 M_1}.$$

Deze formule laat eene vereenvoudiging toe, waarbij tevens al de op het beeld betrekking hebbende grootheden daaruit verdwijnen; bepaalt men nl. het beeldpunt P van O_1 , door $AP = \frac{n^2}{a_1}$ te nemen, dan ontstaan twee gelijkvormige driehoeken APM en $AO_1 M_1$, zoodat men heeft

$$AM \cdot O_1 M_1 = a_1 \cdot MP.$$

Substitueert men deze waarde in de boven gevonden grootheid voor V_u , en daarna voor R_1 en a_1 de uitdrukkingen (1) en (2), dan vindt men ten slotte

$$V_u = \frac{-\mu R}{a \cdot MP} \dots \dots \dots (7)$$

Ligt een punt M' binnen S , dan ligt zijn beeldpunt M_1 binnen S_1 ; — daar de potentiaal U aldaar steeds $= -\mu$ is, vindt men voor de potentiaal der geïnduceerde lading in een inwendig punt, na deeling door AM'

$$V_i = \frac{-\mu}{AM'} \dots \dots \dots (8)$$

Vallen M en M' in het oppervlak S te zamen, dan gaan de for-

mulen (7) en (8) in elkander over, daar alsdan

$$MP = \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2 \frac{R^3}{a} \cos \alpha} \text{ en } AM = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha}$$

en dus
$$MP = \frac{R}{a} \cdot AM \text{ is.}$$

c. De hoeveelheid Q der geïnduceerde lading wordt opgeleverd door de integraal $\int \lambda dS$ — evenwel vindt men haar hier eenvoudiger door de volgende redeneering: de potentiaal U der evenwichtslading over S_1 constant $= -\mu$ zijnde, heeft zij ook diezelfde waarde in het beeldpunt D_1 van O , daar dit beeldpunt binnen S_1 is gelegen. Voor de potentiaal V_e der geïnduceerde lading in het punt O heeft men dus, overeenkomstig de vergelijking $V = \frac{U}{t}$, de formule

$$V_e = \frac{-\mu}{a}$$

maar tevens is blijkbaar

$$V_e = \frac{Q}{R}$$

zoodat, door eliminatie van V_e volgt

$$Q = \frac{-R\mu}{a} \dots \dots \dots (9)$$

Aanmerking. De vergelijking der formules (7) en (9) leidt nog tot het merkwaardige resultaat dat men, voor de uitwendige werking, zich de geheele geïnduceerde lading in het punt P kan geconcentreerd denken, daar men, voor de uitwendige potentiaal in het punt M , de grootheid $\frac{Q}{MP}$ verkrijgt. Dit punt P blijkt tevens het beeldpunt van A in den bol S te zijn: immers

$$OP = a - AP \quad \text{of} \quad = a - \frac{n^2}{a_1} \quad \text{of door substitutie van (2)} \quad = \frac{R^2}{a}.$$

Tot deze uitkomst geraakt men ook, door de toepassing der kogelfunctiën, zie Grinwis (t. a. p. §§ 26 en 27).

2° ПЕТ PUNT A BINNEN DEN BOL (fig. 9). Neemt men bij de ontwikkeling van form. (12) 1° Hoofdstuk, q negatief, dan blijkt dat S_1 weder een bol is wiens straal bedraagt

$$R_1 = \frac{n^2 R}{R^2 - a^2}$$

terwijl het middenpunt O_1 van A is verwijderd, op een afstand

$$a_1 = - \frac{n^2 a}{R^2 - a^2},$$

en O en O_1 dus aan weêrszijden van A liggen.

a. Voor de dichtheid der geïnduceerde lading vindt men nu, langs den bij het 1° geval aangewezen weg, weder de uitdrukking (6) met omgekeerde teekens.

b. De uitwendige potentiaal verkrijgt eene andere gedaante: elk uitwendig punt M nl. heeft zijn beeldpunt M_1 binnen S_1 , en aldaar is de potentiaal U der evenwichtslading constant $= -\mu$; derhalve komt voor de uitwendige potentiaal V der geïnduceerde lading, in M

$$V_u = \frac{-\mu}{AM}, \quad \dots \dots \dots (10)$$

welke waarde gelijk en tegengesteld is aan de potentiaal der inducerende massa μ , die in het punt A is geconcentreerd.

Van een binnen S gelegen punt M' , bevindt zich het beeldpunt M'_1 buiten S_1 ; construeert men hier, zooals op pag. 43 geschiedde het punt P , en volgt nu overigens de methode die

tot form. (7) geleidde, dan vindt men dadelijk in dit geval

$$V_i = \frac{-\mu R}{a \cdot MP} \dots \dots \dots (11)$$

Ook hier worden, even als onder 1°, de beide uitdrukkingen voor V_u en V_i in het oppervlak S aan elkaâr gelijk; dan toch verkrijgt men voor AM en PM dezelfde uitdrukkingen als bij formule (8) zijn aangegeven.

c. Wat de geïnduceerde hoeveelheid aangaat, volg men slechts den weg die tot de formule (8) geleidde. Het beeldpunt D_1 van O ligt hier buiten den bol S_1 , en verder is

$$O_1D_1 = O_1A + AD_1 = a_1 + \frac{n^2}{a} = \frac{n^2R^2}{a(R^2 - a^2)}.$$

In D_1 is de potentiaal U der evenwichtslading over S_1 gelijk $\frac{Q_1}{O_1D_1}$, hetgeen na substitutie der waarden voor O_1D_1 , Q_1 en R_1 ¹⁾

overgaat in $U = \frac{-\mu a}{R}$. Benoemt men de potentiaal der geïnduceerde lading voor het punt O met V_c , dan is dus

$$V_c = \frac{U}{a} = -\frac{\mu}{R}$$

en daar tevens

$$V_c = \frac{Q}{R}$$

komt

$$Q = -\mu \dots \dots \dots (12)$$

In dit geval zijn dus de induceerende en geïnduceerde hoeveelheden gelijk. Zie aanmerking 2, pag. 39.

1) De vergelijkingen (3) en (2) leveren de waarden voor Q_1 en R_1 .

De formule voor de dichtheid

$$\lambda = \frac{n^2}{r^3} \lambda_1 = \frac{-n^2 \mu}{2\pi r_1 r^3}$$

kan na eenige herleiding ook dienen, om de dichtheid der over S geïnduceerde lading in het punt A zelve te bepalen, wanneer wij slechts in het oog houden, dat daarin r door dr moet worden vervangen, terwijl r_1 volgens (α) steeds ∞ is. Laat in fig. 10 AB , P_1C , de hoek BAO en 't element van den meridiaan van B , resp. x , r_1 , α en ds genoemd worden, dan vindt men lichtelijk

$$r_1 = AC \sin \alpha \quad \text{of} \quad = \frac{n^2 \sin \alpha}{r},$$

derhalve is
$$\lambda = \frac{-\mu}{2\pi r^2 \sin \alpha} \dots \dots \dots (13)$$

welke waarde oneindig wordt door $r = dr$ en dus $\sin \alpha = 1$ te stellen.

a. De dichtheid λ is dus $= \infty$ in het punt A zelve; in alle andere punten van S is zij $= 0$.

b. De hoeveelheid Q kan uit de integraal $\int \lambda dS$ berekend werden, in welke dS een ringvormig element van S kan voorstellen, wijl over al de deelen daarvan de dichtheid λ blijkbaar constant is. Deze integraal gaat door substitutie van

$$dS = 2\pi r ds \sin \alpha \quad \text{en} \quad ds = \frac{dr}{\sin \alpha}$$

en van de waarde van λ uit (13) over in

$$Q = \int \frac{-\mu dr}{r \sin \alpha}$$

maar daar tevens r onbepaald tot de grens 0 nadert, reduceert zij zich tot een enkel element, waarvoor $r = dr$ en $\sin \alpha = 1$ is; en men verkrijgt ten slotte

$$Q = -\mu \dots \dots \dots (14)$$

zoodat hier, even als in het 2° geval pag. 46, de geïnduceerde hoeveelheid aan de induceerende gelijk is.

c. De potentiaal der geheel in A opgehoopte lading Q is nu voor zeker willekeurig punt M natuurlijk

$$V_u = \frac{-\mu}{AM} \dots \dots \dots (15)$$

Aanmerkingen. 1°. De formules (7) — (12), die de hoeveelheden en potentialen der geïnduceerde ladingen uitdrukken als het induceerend punt buiten of binnen den bol ligt, gaan in (14) en (15) over, als men in dezelve $R = a$ stelt — zoo zal bijv. alsdan in de formule (7) MP door AM moeten vervangen worden, daar A in het oppervlak S liggende, met zijn beeld P in dat oppervlak zamenvalt.

2°. De formules (7), (10) en (15) stellen slechts een gedeelte voor van de uitwendige potentialen, die men in de punten M waarneemt. De totale potentialen, bij welke ook op den invloed der induceerende massa wordt gelet, vindt men door de gevondene waarden met $\frac{\mu}{AM}$ te vermeerderen; derhalve:

Ligt A buiten den bol, dan is de totale potentiaal in een uitwendig punt (zie form. 7) steeds positief ¹⁾; zij wordt 0 over het boloppervlak, en ook daarbinnen (blijkens form. 8).

Ligt A binnen den bol, dan is de totale potentiaal in een

1) De uitdrukking $\frac{\mu}{AM} - \frac{\mu R}{a \cdot AM}$ toch, kan geschreven worden $\frac{\mu}{AM \cdot PM} \times (MP - \frac{R}{a} AM)$. Benoemt men den afstand van O tot M met r dan wordt $MP = \frac{1}{a} \sqrt{R^2 + a^2 r^2 - 2aRr \cos \alpha}$ en $\frac{R}{a} AM = \frac{1}{a} \sqrt{R^2 r^2 + R^2 a^2 - 2aR^2 r \cos \alpha}$; door in deze vormen $r = R + \delta$ en $a = R + \varepsilon$ te stellen, blijkt dadelijk dat het verschil $(MP - \frac{R}{a} AM)$, en dus ook de uitwendige totale potentiaal positief is.

inwendig punt (zie form. 11) steeds positief ¹⁾; zij is 0 over het boloppervlak, en ook daarbuiten (overeenkomstig form. 10).

Ligt eindelijk A in het boloppervlak, dan is de totale potentiaal in alle punten der ruimte $= 0$.

§ 2.

INDUKTIE VAN EEN PUNT A , VOORZIEN VAN DE MASSA μ EN IN HET GEINFLUENCEERDE OPPERVLAK S ZELVE GELEGEN.

Welke kromming S in het punt A ook hebbe, zij kan altijd, tot op oneindig kleinen van de 2^o orde nauwkeurig worden voorgesteld door die van een oppervlak van den 2^{en} graad, dat zijn top in A heeft, en waarvan een der assen met de hoofdnormale in A op S geplaatst, zamenvalt. Naarmate dit oppervlak al of niet eene hyperboloïde is, zal het oneindig verwijderde gedeelte van het beeld S_1 aan weërszijde of aan dezelfde zijde van het raakvlak, in A aan S gebracht, gelegen zijn; maar in ieder geval nadert S_1 in al zijne richtingen tot asymptoten, die uit het gemeenschappelijk punt A kunnen worden getrokken, en in dat punt raaklijnen zijn aan het oorspronkelijk oppervlak. Beschouwen wij nu van S_1 alleen het gedeelte, dat onbepaald de asymptoten nadert, dan bestaat dat oppervlak bij benadering uit elementen, die ieder door 2 rechten uit A worden begrensd en het is dus ontwikkelbaar — maar nu is het ook duidelijk, na het gezegde aangaande het platte vlak, dat de integraal

1) Stelt men in de noot op de vorige pagina, in de waarden van MP en $\frac{R}{a}AM$, $r = R - \delta$ en $a = R - s$ dan wordt het bedoelde verschil weder positief.

$\int \frac{dS_1}{r}$ hier oneindig is ¹⁾. Daar wij nu verder n willekeurig groot kunnen nemen, kan een punt P_1 van S_1 zeer nabij A worden gebracht, en nemen wij dit punt P_1 als oorsprong van een stelsel van voerstralen r_1 dan kan in $\int \frac{dS_1}{r}$ de grootheid r door r_1 worden vervangen, (immers alleen de op oneindigen afstand van A gelegen elementen komen hier in aanmerking). Wij besluiten dus dat de integraal $\int \frac{dS_1}{r_1}$ mede oneindig is; à fortiori zal zij ∞ zijn als men haar over alle deelen van S_1 uitstrekt.

Verspreiden wij over S_1 eene evenwichtslading met de potentiaal $-\mu$ dan heeft men $-\mu = \int \frac{\lambda_1 dS_1}{r_1}$; zij δ_1 de kleinste en δ de grootste dichtheid dezer lading, dan is

$$\delta_1 \int \frac{dS_1}{r_1} < -\mu < \delta \int \frac{dS_1}{r_1}$$

of na deeling door $\int \frac{dS_1}{r_1}$

$$\delta_1 < 0 < \delta;$$

daar nu δ en δ_1 noodzakelijk hetzelfde teeken bezitten, zijn ze beiden 0 en is dus λ_1 , d. i. de dichtheid der evenwichtslading over het beeld, constant = 0. Derhalve zal de dichtheid der geïnduceerde lading $\lambda = \frac{n^2}{r^3} \lambda_1$ mede = 0 zijn, behalve in het punt A waar r oneindig klein is.

De hoeveelheid geïnduceerde elektriciteit levert ons de formule

1) Immers noemen wij den hoek van 2 assymptoten $d\alpha$, dan is $dS_1 = r d\alpha dr$ en dus de integraal $= \int d\alpha dr$, voor r van 0 tot ∞ , en voor α van 0 minstens tot 2π genomen.

$$Q = - \frac{V_u}{\bar{V}} \mu \quad (\text{zie 3}^\circ \text{ Hoofdstuk form. (6)})$$

maar daar V_u en \bar{V} hier gelijk zijn wordt $Q = -\mu$.

Deze geïnduceerde lading is dus gelijk aan de induceerende, zij is geheel in het punt A geconcentreerd, en de totale potentiaal in een willekeurig punt is derhalve 0.

Onder 3^o van de vorige § is hetzelfde resultaat voor een bijzonder geval verkregen.

§ 3.

INDUKTIE VAN EEN PUNT A MET DE MASSA μ OP EEN PLAT VLAK (fig. 11) ¹⁾.

Men neme het gegeven punt A als oorsprong van coördinaten, en als x -as de loodlijn daaruit op het vlak nedergelaten; is de lengte dezer loodlijn l , dan wordt de vergelijking van het vlak $x = l$.

Volgens § 8 van het 1^e Hoofdstuk is het beeld een boloppervlak dat door de pool gaat, en welks middenpunt O_1 , op de loodlijn l gelegen, tot coördinaten heeft $\left(\frac{n^2}{2l}, 0, 0\right)$ — voor den straal AO_1 komt dus

$$R_1 = \frac{n^2}{2l} \quad \dots \dots \dots (16)$$

1) Eene fraaie oplossing van dit probleem vindt men bij Grinwis (t a. p. pag. 112). Het schijnt mij evenwel juist het voordeel van de in deze bladzijden ontwikkelde methode dat zij veelal streng kan worden doorgevoerd.

Verspreidt men nu over dit beeld S_1 eene evenwichtslading Q_1 met de constante potentiaal $-\mu$, en zij de potentiaal in het middenpunt V_c , dan heeft men weder de algemeene vergelijking

$$V_c = \frac{Q_1}{R_1}$$

maar tevens is $V_c = -\mu$, waaruit volgt

$$Q_1 = -\mu R_1 \quad \text{of (zie (16))} \quad = \frac{-n^2}{2l} \mu \dots (17)$$

De dichtheid λ_1 der evenwichtslading over den bol is constant en dus

$$\lambda_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \text{of} \quad = \frac{-\mu l}{2\pi n^2} \dots (18)$$

Daar men zich de geheele massa, wat de uitwendige werking aangaat, in het middenpunt O_1 kan geconcentreerd denken, verkrijgt men voor de potentiaal U in een uitwendig M_1 de waarde

$$U = \frac{Q_1}{O_1 M_1} \quad \text{of volgens (17)} \quad = \frac{-\mu R_1}{O_1 M_1} \dots (19)$$

Gaan wij nu over tot de bepaling der dichtheid, uitwendige potentiaal en geheele massa van de over het vlak S geïnduceerde lading.

a. Voor de dichtheid λ heeft men eerst

$$\lambda = \frac{n^2}{r^3} \lambda_1$$

hetgeen door substitutie van (18) verandert in

$$\lambda = \frac{-\mu l}{2\pi r^3} \dots (20)$$

b. De hoeveelheid Q der geïnduceerde lading zullen wij uit de integraal $\int \lambda dS$ ontwikkelen.

Nooit men den hoek, dien de voerstraal uit A met de loodlijn op het vlak maakt φ , dan wordt een ringvormig element van dit vlak

$$dS = \frac{2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi}$$

vermenigvuldigt men deze waarde met λ (form. (20)), en merkt verder op dat $r \cos \varphi = l$, dan komt

$$Q = \int \lambda dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mu \sin \varphi d\varphi = -\mu \dots (21)$$

De geïnduceerde hoeveelheid is dus gelijk aan de induceerende en van de plaats van A onafhankelijk.

c. De potentiaal V . Bij de berekening van deze moet onderscheiden worden of het punt waarvoor men haar bepaalt, al of niet met A aan dezelfde zijde van het vlak S ligt.

In het eerste geval is volgens de grondformule $V = \frac{U}{t}$, in het punt M

$$V_m = \frac{U}{AM} \quad \text{of} \quad = \frac{-\mu R_1}{O_1 M_1 \cdot AM}$$

na substitutie der waarde (19) voor U . Deze uitdrukking laat zich echter gemakkelijk vereenvoudigen. Daartoe bepalen wij het punt P met O_1 overeenkomende, door op AO_1 den afstand $\frac{n^2}{AO_1}$ uittezetten; volgens form. (16) is deze $2l$, zoodat het punt P tegenover A en even ver van het vlak gelegen is. Trekken wij nu nog de lijn PM dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken APM en $AO_1 M_1$ (zie pag. 33) de evenredigheid $O_1 M_1 : PM = R_1 : AM$, waardoor de bovengevonden vergelijking voor V verandert in

$$V_m = \frac{-\mu}{PM} \dots \dots \dots (22)$$

In het tweede geval zij het punt bijv. in T geplaatst. Het overeenkomstige daarvan ligt nu blijkbaar binnen S_1 , aldaar is U standvastig $= -\mu$ en wij vinden

$$V_1 = \frac{-\mu}{AT} \cdot \dots \dots \dots (23)$$

Aanmerkingen. 1°. Verlangt men dus de potentiaal der geïnduceerde lading voor eenig punt, dat aan de zijde van P ligt, dan denke men zich die lading in A geplaatst; voor een punt aan de zijde van A stelle men haar in het punt P , dat met A symmetrisch is ten opzichte van het gegeven vlak.

2°. Het niveauoppervlak dezer lading bestaat, op grond van de formules (22) en (23), uit 2 bolsegmenten, die volgens een cirkel in S aan elkander sluiten, en met gelijke stralen uit A en P beschreven zijn; genoemde formules toch gaan voor een punt van dat vlak in elkaâr over.

3°. De totale potentiaal van de geïnduceerde en de induceerende massa's is steeds positief voor alle punten aan de zijde van A gelegen, — voor alle andere is zij $= 0$. Men kan dus zeker punt voor de werking van elektrische massa's beschermen, door tusschen deze en het punt een oneindig plat vlak te plaatsen.

4°. Men kan een plat vlak als een bol van oneindigen straal beschouwen — inderdaad de formules (6), (9), (7) en (8) van de vorige § veranderen in (20), (21), (22) en (23) als men in dezelve eerst $a = R + l$ en daarna $R = \infty$ stelt.

Zoo wordt alsdan bijv. (6)

$$\lambda = \frac{-\delta(a - R) \left(1 + \frac{a}{R}\right)}{4\pi r^3}$$

Wordt nu $(a - R) = l$ en $\frac{a}{R} = 1$ genomen, dan komt

$$\lambda = \frac{-\mu l}{2\pi r^3}.$$

Voor het overige valt de gegrontheid dezer opmerking dadelijk in het oog — wij stippen alleen nog aan, dat de punten in het eene geval binnen den bol gelegen analoog zijn met die, welke in het andere geval zich aan de van A afgekeerde zijde van het platte vlak bevinden.

§ 4.

INDUKTIE VAN EEN ELEKTRISCH PUNT A MET DE MASSA μ ,
OP EEN OMWENTELINGS-SCISSOÏDE.

Plaatsen wij het inducerend punt op de omwentelings-as en nemen daarin den oorsprong van coördinaten, dan heeft de beschrijvende lijn der scissoïde tot vergelijking (zie (21) pag. 16)

$$2x \left(\frac{x^2 + y^2}{\alpha} \right) = n \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \right)$$

Vermenigvuldigen wij haar met α en stellen wij

$$\frac{n^2}{\alpha} = u \quad \text{en} \quad \frac{n^2 \alpha}{\beta^2} = v \quad (\vartheta)$$

en u dus gelijk aan tweemaal den afstand van A tot den top der scissoïde, dan wordt zij

$$2x(x + y^2) = ux^2 + vy^2,$$

terwijl de constante parameters u en v in de vergelijking van het oppervlak moeten gegeven zijn. Het beeld van dit oppervlak is nu (zie (20) pag. 16) een omwentelings-ellipsoïde, die haren top in A en haar omwentelings-as langs de x -as heeft. Hare halve assen zijn α en β en worden bepaald uit (ϑ) , waarbij

n eene willekeurige waarde verkrijgt en hier $= 1$ wordt gesteld. Wij vinden alzoo

$$\alpha = \frac{1}{u} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{vu}} \quad \dots \quad (\varphi)$$

Dit beeldoppervlak S_1 moet nu tot de constante potentiaal $-\mu$ worden geladen, en vooreerst van deze lading Q_1 de dichtheid, de hoeveelheid en uitwendige potentiaal worden opgespoord ¹⁾.

Overeenkomstig de methode der niveau-oppervlakken van Green kan eene evenwichtslading over eene omwentelings-ellipsoïde, wat de uitwendige werking aangaat, vervangen worden door eene rechte lijn over welke dezelfde hoeveelheid gelijkmatig is verspreid. Noemen wij de lengte dezer lijn $2a$ dan heeft men

$$\alpha = a \frac{1+c}{1-c} \quad \beta = a \frac{2\sqrt{c}}{1-c} \quad -\mu = \frac{Q_1}{2a} \log c \quad \dots \quad (\psi)$$

Uit de beide eerste dezer formules vindt men

$$a = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{en} \quad c = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad \dots \quad (\psi)$$

terwijl de derde het middel levert om Q_1 in α en β en dus ook in u en v uit te drukken. Wij hebben dus

$$Q_1 = \frac{-2a\mu}{\log c} \quad \dots \quad (24)$$

De dichtheid λ_1 in het punt $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ wordt uitgedrukt door de formule

$$\lambda_1 = \frac{pQ_1}{4\pi\alpha\beta^2} \quad \dots \quad (25)$$

1) De nu volgende formules (ψ), (25) en (26) zijn ontleend aan Grinwis t. a. p. N^o. 16 en alleen veranderd voor zoover de verplaatsing van den oorsprong in den top der ellipsoïde dit noodzakelijk maakte. Hare ontwikkeling behoort niet tot ons onderwerp.

waarin p de loodlijn voorstelt, die uit het middelpunt der ellipsoïde is neêrgelaten op de raaklijn, welke in het meridiaanvlak van P_1 door dat punt aan de ellipsoïde is getrokken, zoodat

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\xi_1 - \alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{s_1}{\beta}\right)^2}};$$

ook λ_1 wordt dus eene functie van $\xi_1, \eta_1, s_1, \alpha$ en β . De uitwendige potentiaal U onzer evenwichtslading eindelijk, wordt

$$U = \frac{Q_1}{2a} \log. \left\{ \frac{\sqrt{(\xi - \alpha - a)^2 + \eta^2 + s^2} - (\xi - \alpha - a)}{\sqrt{(\xi - \alpha + a)^2 + \eta^2 + s^2} - (\xi - \alpha + a)} \right\}. \quad (26)$$

Uit het bovenstaande volgen nu onmiddellijk de dichtheid, de uitwendige potentiaal en de hoeveelheid van de over de gegeven scissoïde geïnduceerde lading.

a. De dichtheid λ in een punt $P(x_1, y_1, z_1)$ is, daar $n=1$ is genomen

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{r^3},$$

in deze uitdrukking substitueeren wij λ_1 uit (25), nadat de waarde van deze door de transformatie-formulen $\xi = \frac{x}{r^2}$, $\eta = \frac{y}{r^2}$ en $s = \frac{z}{r^2}$ in het stelsel (x, y, z) is overgebracht, en verder α en β en c in u en v zijn uitgedrukt. Wij vinden alsdan, als wij

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \delta \quad \text{en} \quad \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \delta' \quad \text{stellen}$$

$$\lambda = \frac{-\mu u \sqrt{v^2 - uv}}{2\pi r \sqrt{(ux - r^2)^2 + uvx^2 + uvz^2}} \frac{1}{\log\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)} \quad \dots \quad (27)$$

b. De uitwendige potentiaal V . Om deze voor zeker punt P te vinden hebben wij slechts de potentiaal U voor het overeenkomstige punt, door den voerstraal van P te deelen. Vooraf elimineeren wij in de uitdrukking (26) voor U , in het met P overeenkomende punt P_1 , de grootheden Q_1 en a , door middel der formules (24) en (ψ') en brengen den vorm daarna in het stelsel (x, y, z) over. Wij vinden alzoo

$$V = \frac{-\mu}{r \log \left(\frac{\delta}{\delta'} \right)} \log \left\{ \frac{\sqrt{(x - \delta r^2)^2 + y^2 + z^2} - (x - \delta r^2) r^2}{\sqrt{(x - \delta' r^2)^2 + y^2 + z^2} - (x - \delta' r^2) r^2} \right\} \quad (28)$$

c. De hoeveelheid Q wordt op de gewone wijze door de integraal $\int \lambda dS$ geleverd.

§ 5.

De stelling op pag. 38 vermeld zal dikwijls, zooals aldaar reeds is opgemerkt, kunnen worden aangewend, om tot het bedrag van de geïnduceerde lading te geraken, en wel speciaal in het geval, dat de evenwichtsverdeeling over S bekend is. Om dit duidelijk te maken, willen wij

de hoeveelheid elektriciteit, die over eene omwentelings-ellipsoïde door de massa μ , in zeker uitwendig punt geplaatst, wordt opgewekt, onderzoeken (fig. 12).

Wij hebben nu niets anders te doen dan de ellipsoïde van eene evenwichtslading tot de potentiaal μ te voorzien en van deze de potentiaal in A optesporen. Deze laatste grootheid zal alsdan de gevraagde hoeveelheid voorstellen.

Wij nemen den oorsprong van coördinaten in het middenpunt der ellipsoïde, noemen hare halve assen α en β , de grootte der evenwichtslading Q , en de coördinaten van A , x_0 , y_0 en z_0 . Overeenkomstig het voorgaande kan men nu, wat de uitwendige potentiaal aangaat, de lading Q vervangen door eene lijn $2a$, over welke dezelfde lading gelijkmatig is verdeeld. De dichtheid q over deze lijn wordt dan

$$q = \frac{Q}{2a}$$

of als wij de laatste der vergelijkingen (ψ) (vorige §) aanwenden

$$q = \frac{\mu}{\log c}.$$

Verder is reeds gebleken, (zie (ψ')), dat a de lineaire excentriciteit voorstelt, en dus $2a$ is, de lijn die de brandpunten der ellipsoïde vereenigt.

Wij vinden dus voor de uitwendige potentiaal in het punt A dadelijk

$$V_u = \int_{-a}^{+a} \frac{q dx}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

of na substitutie van q en integratie

$$V_u = \frac{\mu}{\log c} \log \frac{\sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2} - (x_0 - a)}{\sqrt{(x_0 + a)^2 + y_0^2 + z_0^2} - (x_0 + a)}. \quad (29)$$

Deze vorm wordt eenvoudiger als wij opmerken dat

$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2} = AF$$

$$\sqrt{(x_0 + a)^2 + y_0^2 + z_0^2} = AF'$$

$$(x_0 - a) = RF$$

en $(x_0 + a) = RF'$

derhalve

$$V_u = \frac{\mu}{\log c} \log \frac{AF - RF}{AF' - RF'} \dots \dots \dots (30)$$

Deze uitdrukking is nu gelijk aan de hoeveelheid der door A over de ellipsoïde geïnduceerde lading; de grootheid c heeft daarin de waarde (ψ') zie pag. 57.

§ 6.

INFLUENTIE EENER VASTE ELEKTRISCHE MASSA, DIE OP GEGE-
VENE WIJZE OVER EENE RUIMTE IS VERDEELD, OP EEN MET
DEN GROND VERBONDEN GELEIDER.

Bij onze vorige beschouwingen werd de induceerende massa steeds in één punt geconcentreerd gedacht: intusschen strekt de hier aangegevene methode zich ook uit tot het geval dat zij continue over een zekere ruimte M is verspreid. Wij zullen dit, naar aanleiding van het opgemerkte op het einde van het 3^e hoofdstuk, kortelijk aanwijzen. Hierbij zullen de coördinaten van eenig punt dezer ruimte door x_1, y_1 en z_1 , die van een punt van het geïnfluenceerde oppervlak S door x, y en z , eindelijk die van eenig beeldoppervlak door ξ, η en ϵ , worden aangeduid, terwijl we onderstellen dat de induceerende massa M begrensd is door een bepaald oppervlak $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, en dat de dichtheid daar binnen eene functie φ der coördinaten is.

Wij onderzoeken nu de partieele lading, op S gebonden door de elektriciteit $\varphi dx_1 dy_1 dz_1$, die in eenig element P van M is opgehoopt, en verspreiden daartoe over het beeld van S , ten opzichte van P , eene evenwichtslading tot de constante potentiaal $\varphi dx_1 dy_1 dz_1$: de dichtheid en uitwendige potentiaal dezer evenwichtslading zijn nu, overeenkomstig het

vroeger ontwikkelde, voldoende om dezelfde grootheden voor de bedoelde partieele lading van S te bepalen. Het is duidelijk dat deze laatste grootheden functiën zullen zijn van de coördinaten x_1, y_1 en z_1 van P en hare 1^e differentialen. Wij behoeven ze dus slechts te integreeren ten opzichte van deze variabelen, binnen de grenzen die het oppervlak $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ aangeeft, d. i. over de geheele ruimte M , ten einde de dichtheid λ en de uitwendige potentiaal V te verkrijgen van de lading, die door alle punten van M te zamen over S wordt geïnduceerd. Op de gewone wijze levert ons daarna de integraal $\int \lambda dS$ de massa Q der op S gebonden lading.

Hoe eenvoudig deze theoretische beginselen ook zijn, hunne toepassing heeft menigmaal bezwaar, niet alleen voor zoover het onderzoek der evenwichtsverdeding over het beeld van S betreft, maar ook, en voornamelijk ten gevolge der vereischte integratiën. Wij zullen ons hier dan ook bepalen tot het geval, dat M en S beiden bollen zijn en φ constant is. Beteekenen wij den straal van M met R_0 , dien van S met R , den afstand der middelpunten van beiden met b en zij de oorsprong van coördinaten in het middenpunt O van S geplaatst (fig. 13).

a. De dichtheid. Het element P induceert over S eene lading, wier dichtheid in het punt G bijv., zie form. (6) pag. 42, wordt uitgedrukt door $\frac{\mu (a^2 - R^2)}{4\pi R r^3}$, wanneer wij daarin stellen

$$\mu = \varphi dx_1 dy_1 dz_1$$

$$a = PO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$r = PG = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

De som der waarden, die bovenstaande uitdrukking verkrijgt wanneer achtereenvolgens ieder punt van M als induceerend wordt aangenomen, of m. a. w. haar integraal ten opzichte van

x_1 , y_1 en z_1 over de geheele ruimte M zal nu de geheele dichtheid in G voorstellen. Voor deze vindt men dus

$$\lambda = \frac{-\varphi}{4\pi R} \int_{x_1} \int_{y_1} \int_{z_1} \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2) dx_1 dy_1 dz_1}{\left((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \right)^{3/2}}. \quad (31)$$

Uit de vergelijking voor het oppervlak van M , d. i.

$$(x_1 - b)^2 + y_1^2 + z_1^2 = R_0^2$$

volgt voor de grenzen van x_1 $b \pm \sqrt{R_0^2 - y_1^2 - z_1^2}$

voor die van y_1 $\pm \sqrt{R_0^2 - z_1^2}$

en voor die van z_1 $\pm R_0$

en door integratie vinden wij

$$\lambda = \frac{-\varphi R_0^3 (b^2 - R^2)}{3R \left((x - b)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \dots \dots \dots (32)$$

Voeren wij in Q_0 d. i. de geheele massa in M geplaatste electriciteit en dus

$$Q_0 = \frac{4\pi\varphi R_0^3}{3}$$

en merken wij tevens op dat

$$(x - b)^2 + y^2 + z^2 = AG^2$$

dan verkrijgt λ den vorm

$$\lambda = \frac{-Q_0 (b - R^2)}{4\pi R \cdot AG^2} \dots \dots \dots (33)$$

waaruit blijkt: dat de dichtheid der geïnduceerde lading dezelfde is, die ze zijn zoude, indien de geheele induceerende massa in het middenpunt A van den bol M ware geconcentreerd.

b. Om de hoeveelheid Q der over S gebonden lading te bepalen, vermenigvuldige men de waarde (33) met dS d. i. met $\frac{R dx dy}{z}$ en integreere daarna ten opzichte van x en y over S ; men vindt dan

$$Q = \frac{-Q_0(b^2 - R^2)}{4\pi} \int_x \int_y \frac{dx dy}{z \left((x-b)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \quad (34)$$

Door middel der vergelijking van S

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

elimineert men uit bovenstaande waarde de variabele z en bepaalt de grenzen der integralen: deze zijn

$$\text{voor } x \dots \dots \dots \pm \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\text{en voor } y \dots \dots \dots \pm R$$

en na integratie heeft men

$$Q = \frac{-Q_0 R}{b} \quad \dots \quad (35)$$

d. i. de hoeveelheid, die de massa Q_0 in het middenpunt van M gesteld, over S zoude induceeren. — Dit resultaat was trouwens na de opmerking aan het einde van a wel te voorzien.

c. De uitwendige potentiaal kan mede afgeleid worden uit die eener partieele lading, door een punt van M , bijv. P over S opgewekt. Deze kan voor de uitwendige werking vervangen worden door de hoeveelheid $\frac{-\mu R}{a}$ geplaatst in P_1 , zijnde het beeld van P in den bol S (zie pag. 43 form. (7)); stelt men voor μ weder de boven vermelde waarde, dan wordt die hoeveelheid $\frac{-\varphi R dx_1 dy_1 dz_1}{PO}$, en hare potentiaal in het punt $N(p, q, t)$ is alzoo $\frac{-\varphi R dx_1 dy_1 dz_1}{PO \cdot P_1 N}$, welke waarde nu nog

slechts ten opzichte van x_1, y_1 en z_1 , behoeft geïntegreerd te worden om de geheele potentiaal der lading over S in het punt N te bekomen.

Wij merken nu op dat (daar $P_1 (\xi, \eta, s)$ het beeld van P is) de coördinaten van P_1 zijn

$$\xi = \frac{R^2 x_1}{PO^2} \quad \eta = \frac{R^2 y_1}{PO^2} \quad s = \frac{R^2 z_1}{PO^2},$$

dat verder dus

$$P_1 N = \sqrt{\left(\frac{R^2 x_1}{PO^2} - p\right)^2 + \left(\frac{R^2 y_1}{PO^2} - q\right)^2 + \left(\frac{R^2 z_1}{PO^2} - t\right)^2}$$

en eindelijk

$$PO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Ten slotte vinden wij dan

$$V_u = -\varphi R \int_{x_1} \int_{y_1} \int_{z_1} \frac{dx_1 dy_1 dz_1}{\sqrt{(p^2 + q^2 + t^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2R^2(px_1 + qy_1 + tz_1) + R^4}}$$

of na integratie

$$V_u = -\frac{4\pi \varphi R R_0^3}{3b \sqrt{\left(\frac{R^2}{b} - p\right)^2 + q^2 + t^2}} \quad \dots \quad (36)$$

Deze formule kan in veel eenvoudiger gedaante worden gebracht; vooreerst toch is

$$-\frac{4\pi \varphi R R_0^3}{3b} = \frac{R}{b} \cdot Q_0 = Q;$$

bepalen wij verder het beeldpunt A_1 van A in den bol S dan wordt $OA_1 = \frac{R^2}{b}$, en men vindt

$$A_1 N = \sqrt{\left(\frac{R^2}{b} - p\right)^2 + q^2 + t^2}$$

zoodat (36) verandert in

$$V_u = \frac{Q}{A_1 N} \dots \dots \dots (37)$$

Derhalve kan hieruit ook besloten worden tot de stelling, dat de inductie plaats heeft als of de induceerende zich in A bevond.

Aanmerking. Het vraagstuk, waarvan hier de analytische oplossing gegeven werd, ten einde den algemeenen weg aan te duiden, laat eene andere meer eenvoudige behandeling toe. Verdeelt men nl. den bol M in een oneindig aantal concentrische schillen, dan kan ieder van deze als eene evenwichtslading worden beschouwd, en als zoodanig, wat de uitwendige werking betreft, door dezelfde massa in het middenpunt worden vervangen. Daar nu de inductie slechts van de uitwendige werking der induceerende massa afhangt, kan de vraag tot de inductie door één enkel punt, het middenpunt van M , worden teruggebracht. —

§ 7.

In het vorige is steeds ondersteld dat de geïnfluenceerde geleider met den grond was verbonden; er blijft ons over aan te wijzen hoe de formules moeten gewijzigd worden als de geleider is geïsoleerd. — Reeds bleek het, (3^e Hoofdstuk § 4) dat alsdan het met de induceerende massa gelijknamige gedeelte der gescheiden neutrale vloeistof benevens de massa die vóór de inductie aan den geleider mocht zijn medegeedeeld zich als evenwichtsladingen over den geleider zullen verspreiden; terwijl de gebondene hoeveelheid geheel den stand zal aannemen, die voor het geval van afleiding ontwikkeld is. ¹⁾ — De geheele dicht-

1) Sommige elementaire proeven b.v. het laden van den elektrokoop door inductie, worden door deze beschouwing opgehelderd.

heid in een punt des geleiders is dus de som van 2 dichtheden, waarvan de eene door de hier ontwikkelde theorie der Spherische beelden, de andere b.v. door de methode der niveauoppervlakken kan worden bepaald. Op dezelfde wijze blijkt dat de gevondene uitwendige potentiaal slechts met die eener evenwichtslading over S behoeft te worden vermeerderd, ten einde de uitwendige potentiaal bij eenen gisoleerden conductor te verkrijgen — de geheele lading van den conductor eindelijk zal nul zijn, tenzij hij vóór de inductie van eene was voorzien. — Het vraagstuk der inductie door een punt of eene vaste elektrische massa, is derhalve geheel opgelost als men

- 1° van den geleider ten opzichte van een willekeurig punt der ruimte het beeld kan bepalen;
- 2° de evenwichtsverdeeling over dit beeld en tevens
- 3° dergelijke verdeeling over den geleider kent.

Het eerste punt levert weinige zwarigheden op — aan de beide anderen daarentegen zijn dezelfde analytische moeielijkheden verbonden; — reeds oppervlakken van den 2^{en} graad voeren tot beelden voor welke de evenwichtsverdeeling hoogst bezwaarlijk te vinden, en grootendeels nog niet onderzocht is. Overigens onderstellende, dat het aangevoerde voldoende was, om de theoretische beginselen op te helderen, meenen wij onze beschouwingen over de inductie door vaste punten of massa's hier te mogen eindigen.

VIJFDE HOOFDSTUK.

ONDERLINGE INFLUENTIE VAN GELEIDERS.

§ 1.

Wij hebben in het 2^o en 3^o hoofdstuk aangewezen, hoe de verdeeling bij inductie door bepaalde op gegevene wijze geplaatste elektriciteitsmassa's, door de theorie der beelden tot de evenwichtsverdeeling wordt teruggebracht, en verder in het 4^o hoofdstuk de methode door voorbeelden opgehelderd. Er blijft ons dus over het geval te onderzoeken, dat geleiders, vooraf van elektrische ladingen voorzien, onder elkaars invloed worden gebracht. Wij zullen trachten aan te toonen, dat bij deze aanname de verdeeling onmiddellijk uit het vorige volgt, en hare bepaling dus mede onder het bereik der bedoelde methode valt.

Verschillende geleerden hebben zich met dit probleem bezighouden, voornamelijk uitgaande van de algemeene formules voor de attractie door La Place in zijne »*Mécanique Céleste*»

ontwikkeld; intusschen is men meestal gebleven bij het geval dat beide conductoren bollen zijn. Zoo heeft Poisson in eene verhandeling voorkomende in »*Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'institut de France*» 1811, de oplossing in dit geval afgeleid uit een onderzoek aangaande de dikte der homogene elektrische lagen, die de bollen moeten bedekken, opdat de werking binnen ieder van die lagen = nul zij. Zijne tabellen, door Plana herzien, hebben gediend om de theorie aan de waarnemingen van Coulomb te toetsen. Neuman heeft later, naar aanleiding van zijn onderzoek der temperaturen in eene ruimte door twee boloppervlakken begrensd, de kwestie der elektrische verdeeling bij inductie over dergelijke oppervlakken, uit de hoofdeigenschappen der potentiaal afgeleid. Eene belangrijke schrede voorwaarts werd gedaan door Murphy, waar hij in zijn geschrift »*Elementary principles etc. On electricity part I*», pag. 93, eene stelling geeft, die de zaak merkbaar vereenvoudigt en de toepassing van de methode der beelden hier mogelijk maakt; het voordeel daarvan blijkt reeds dadelijk uit de beknopte en eenvoudige wijze, waarop hij tot de oplossing van de onderlinge influentie van 2 bollen geraakt. De stelling van Murphy werd door Lipschitz in zijne verhandeling (bd. LXI, *Journal v. Crelle*) tot een willekeurig aantal conductoren uitgebreid. Wij zullen ons hier tot eene korte uitschetsing van de bedoelde stelling en hare gevolgen moeten beperken en ons van toepassingen onthouden: — de meest vereenvoudigende onderstelling toch dat de conductoren bollen zijn, voert reeds tot berekeningen, wier vermelding meer ruimte en tijd zoude vorderen dan wij ter onzer beschikking hebben; — ook is dit geval door Grinwis (t. a. p. pag. 172—223) duidelijk en uitvoerig in bijzonderheden behandeld.

Het beginsel van Murphy kan aldus worden geformuleerd:

Wanneer twee conductoren A en B , ieder van zekere lading voorzien, op elkander influenceeren, en de eindpotentialaalen op de eerste C , op de tweede D is, onderstelle men dat zij aanvankelijk afzonderlijk tot deze potentialen geladen zijn; — dat daarna de evenwichtslading van A influenceert op B en daarop eene lading bindt, die weder op hare beurt op A eene lading te voorschijn roept, enz., dat op dezelfde wijze de evenwichtslading van B , over A eene lading induceert, die weder op B terugwerkt, enz. — m. a. w. dat de inductie »per saltum» plaats heeft — de superpositie van de aldus voor ieder der conductoren verkregen ladingen zal dan ten slotte de ware verdeling bij inductie voorstellen

Deze stelling kan worden bewezen als volgt:

Laat de oorspronkelijke evenwichtslading over A zijn

	Q_a	met de	potentialaalen	V_a
deze induceere over B de lading	— Q_b	»	»	— V_b
deze laatste bindt op A	»	»	»	»
deze weder op B	— Q'_a	»	»	— V'_a
	»	»	»	»
	— Q'_b	»	»	— V'_b
		enz.		

de achtereenvolgende ladingen over A zijn nu: $Q_a, Q'_a, Q''_a, \text{enz.}$ }
 met de potentialen $V_a, V'_a, V''_a, \text{enz.}$ }
 die over B $— Q_b, — Q'_b, — Q''_b, \text{enz.}$ }
 met de potentialen $— V_b, — V'_b, — V''_b, \text{enz.}$ }
 terwijl volgens de onderstelling V_a in een punt van A de constante waarde C aanneemt.

Laat verder de oorspronkelijke evenwichtslading over B zijn

	R_b	met de	potentialaalen	U_b
deze induceere over A de lading	— R_a	»	»	— U_a
deze induc. weder over B	»	»	»	»
deze weder over A	— R'_b	»	»	— U'_b
		enz.		

Zoodat dientengevolge de achtereenvolgende ladingen over A de waarden verkrijgen

$$\left. \begin{array}{l} -R_a, -R'_a, -R''_a, \text{ enz.} \\ \text{met de potentialen } -U_a, -U'_a, -U''_a, \text{ enz.} \\ \text{en de ladingen over } B \text{ zijn } R_b, R'_b, R''_b, \text{ enz.} \\ \text{met de potentialen } U_b, U'_b, U''_b, \text{ enz.} \end{array} \right\} \cdot \beta$$

terwijl volgens de onderstelling U_b in een punt van B de constante waarde D verkrijgt.

De geheele hoeveelheid is dus

$$\left. \begin{array}{l} \text{op } A \quad Q_a + Q'_a + Q''_a + \text{ enz.} \quad -R_a - R'_a - R''_a - \text{ enz.} \\ \text{op } B \quad -Q_b - Q'_b - Q''_b - \text{ enz.} \quad +R_b + R'_b + R''_b + \text{ enz.} \end{array} \right\} (1)$$

en de totale potentiaal van het stelsel in een uitwendig punt is

$$V_u = V_a - V_b + V'_a - V'_b + \text{ enz.} \quad + U_b - U_a + U'_b - U'_a + \text{ enz.} \quad (2)$$

Deze uitdrukking zal nu de werkelijke potentiaal der elektriciteits-verdeeling bij wederkeerige inductie der 2 geleiders voorstellen, als zij voor een punt van A gelijk aan C en voor een punt van B gelijk aan D wordt, immers zal in dat geval alle elektriciteit over het stelsel in evenwicht zijn, en ook bij inductie is dit slechts op ééne wijze mogelijk. Om de waarde van (2) voor een punt van A te vinden, schrijven wij voor die vergelijking

$$V_u = V_a - (V'_b - V'_a) - (V''_b - V''_a) - \text{ enz.} + (U_b - U_a) + (U'_b - U'_a) + \text{ enz.}$$

Nu geldt de stelling dat de som der potentialen van eene induceerende en eene geïnduceerde elektriciteitsmassa in een punt van het geïnduceerde oppervlak $= 0$ is. Dientengevolge verdwijnt ieder tusschen haakjes geplaatst verschil en wij vinden

$$V_u = V_a \text{ of volgens de onderstelling } = C.$$

Op dezelfde wijze wordt (2) voor een punt van B

$$V_u = (V_a - V_b) + (V'_a - V'_b) + \text{ enz.} \quad + U_b - (U_a - U_b) - (U'_a - U'_b) - \text{ enz.}$$

en daar hier weder de tusschen haakjes geplaatste verschillen nul worden komt er

$$V_a = U_b \text{ of volgens de onderstelling } = D$$

De uitdrukking (2) is derhalve de totale potentiaal van het stelsel — en dus stellen ook de waarden (1) de ladingen over de twee conductoren voor.

Het komt er dus op aan de dichtheden en uitwendige potentialen van de ladingen (1) te bepalen en dit kan nu door middel der Spherische beelden worden teruggebracht, tot het onderzoek van evenwichtsladingen over de conductoren en hunne beelden ten opzichte van willekeurige punten.

Stellen wij ons bijv. ten doel de reeks (α) der ladingen en potentialen te vinden. De dichtheid q_a en de uitwendige potentiaal V_a van de evenwichtslading Q_a over A als bekend aannemende, beschouwen wij een willekeurig massa-element $q_a ds_a$ dezer lading als vast induceerend punt, en zoeken de dichtheid en uitwendige potentiaal der lading, door dit punt over den 2^{en} conductor B geïnduceerd. Daartoe is, blijkens het voorgaande slechts noodig, dat men de evenwichtsverdeeling over het beeld B_1 van B ten opzichte van een willekeurig punt, kenne. De uitdrukkingen voor de dichtheid en de uitwendige potentiaal gevonden, zijn nu noodzakelijk functiën van de coördinaten van het als induceerend beschouwde punt, en moeten nu ten opzichte van deze worden geïntegreerd over het geheele oppervlak A , *d.w.z.* binnen de grenzen, door de vergelijking van dat oppervlak aangewezen. De integralen zullen de dichtheid — q_b en de uitwendige potentiaal — V_b der geïnduceerde lading — Q_b van B voorstellen. Van deze lading wordt nu weder een element — $q_b ds_b$ als induceerend punt aangenomen, en geheel langs den zoeven bewandelden weg komt men nu, van de werking van

dit enkele element uitgaande, tot de dichtheid q'_a , en de uitwendige potentiaal V_a der geheele lading Q_a , die over A door de geheele lading $-Q_b$ wordt te voorschijn geroepen. Op dezelfde wijze kan men nu van een element $q'_a ds_a$ uitgaan om $-q'_b$ en V_b te vinden, en aldus voortgaande achtereenvolgens al de termen der reeks (α) bepalen, terwijl men klaarblijkelijk slechts van de lading R_b van B behoeft uit te gaan, om evenzoo de waarden (β) te verkrijgen.

De ontwikkeling, die wij hier gaven is niets dan eene herhaalde toepassing van de methode op pag. 40 (3^e Hoofdstuk § 4) uiteengezet, en op pag. 60 (4^e Hoofdstuk § 7) nader besproken. De vraag is alzoo teruggebracht tot het vinden der evenwichtsverdeeling over de beide conductoren en hunne beelden ten opzichte van een willekeurig punt. Heeft deze meestal reeds bezwaar, ook de uitvoeren integratiën en ten slotte de summatiën der reeksen (1) en (2) maken de opgave, ondanks alle vereenvoudiging, tot eene zeer ingewikkelde. Wij zullen dan ook dienaangaande niet in verdere bespiegelingen treden.

De convergentie der reeksen (1) kan met behulp der formule (6) pag. 39 gemakkelijk worden aangetoond. Q_b zal nl. kleiner zijn dan de lading, die over B geïnduceerd zoude worden als Q_a ware opgehoopt in het punt P van A dat 't dichtst bij B is gelegen — maar, die lading M noemende, heeft men volgens (6) $M = -\frac{V_u}{\bar{V}} Q_a$, waar V_u en \bar{V} potentialen eener evenwichtslading over B resp. in P en in een punt van B voorstellen. Het quotient $\frac{V_u}{\bar{V}}$ is dus kleiner dan

1 — stellen wij het $= \frac{1}{m}$ dan komt

$$Q_b < -\frac{1}{m} Q_a$$

De lading Q'_a , die Q_b over A induceert, zal weder kleiner zijn dan ze zou worden als Q_b geheel was opgehoopt in het punt P^1 van B dat het naast bij A is gelegen. Noemt men de lading in dat geval N , dan heeft men weder

$$N = -\frac{V_u}{\bar{V}} Q_b$$

waar V_u en \bar{V} potentialen eener evenwichtslading over A , resp. in P^1 , en een punt van A voorstellen. Derhalve is $\frac{V_u}{\bar{V}}$ weder < 1 en kan $= \frac{1}{n}$ gesteld worden, men vindt dan

$$Q'_a < -\frac{1}{n} Q_b < \frac{1}{mn} Q_a \dots \dots \dots (\beta)$$

Op dezelfde wijze volgt

$$Q''_a < \frac{1}{mn} Q'_a < \frac{1}{(mn)^2} Q_a \dots \dots \dots (\gamma)$$

en ten slotte als wij de som $Q_a + Q'_a + Q''_a + \text{enz.}$ S noemen

$$S < Q_a \left(1 + \frac{1}{mn} + \left(\frac{1}{mn} \right)^2 + \text{enz.} \right)$$

of
$$S < Q_a \frac{mn}{mn - 1} \dots \dots \dots (\delta)$$

waaruit blijkt dat S naar eene bepaalde grootheid convergeert; — van ieder der reeksen in (1) voorkomende, kan op grond eener zelfde redenering, hetzelfde worden beweerd.

§ 2.

Lipschitz heeft eene methode gegeven, om ook bij een willekeurig aantal n geleiders, de evenwichtsverdeling bij

wederkeerige influentie door middel van het theorema van Murphy te vinden (zie verhandel. *Journal v. Crelle.*)

a. Hij verdeelt daartoe het geheele systeem in 2 deelen; het eene deel bestaat slechts uit een enkelen conductor, het andere bevat de $(n - 1)$ overigen. Op ieder der geleiders wordt nu eene evenwichtslading gedacht tot de gegevene constante potentiaal, die na de influentie plaats grijpt, en er wordt aangenomen dat al de geleiders van het 2^e deel te zamen op den enkelen afgezonderden influenceeren. Van dezen wordt alzoo de geheele lading en potentiaal gevonden, zoodat ten opzichte van hem het probleem is opgelost.

b. Van de $(n - 1)$ overigen, allen voorzien met de ladingen, die onder *a* voor hen gevonden zijn, zondert men nu weder een enkelen af en beschouwt zijne inductie tegenover de $(n - 2)$ overblijvenden: daardoor verkrijgt men de geheele lading en potentiaal van den 2^{en} afgezonderden, enz.

c. Het valt in het oog dat men ook den omgekeerden weg kan gaan, en kan aanvangen met een willekeurig 2-tal der geleiders op zichzelf te beschouwen, geheel op de wijze, zooals dit in de vorige § is uiteengezet: — deze beide, ieder voorzien van de aldus gevonden lading, worden nu onderzocht in hunne influenceerende werking tegenover een 3^{en}, die vooraf geladen is tot de constante potentiaal, na de influentie over hem waargenomen. Alzoo worden nieuwe ladingen voor ieder der 3 conductoren gevonden, die men nu weêr gezamenlijk laat influenceeren op een 4^{en}, nadat deze geladen is tot de daarover gegeven evenwichtspotentiaal, enz.

d. Bij vermeerdering van het aantal geleiders neemt de omvang der bewerking zeer snel toe. Overzien wij die bijv. wanneer er 3 conductoren zijn, die wij door *A*, *B* en *C* aanduiden.

Bij de onderlinge influentie van A en B , wordt de dichtheid der lading van ieder dezer conductoren door 2 reeksen uitgedrukt (zie form. (1) vorige §), wier termen bepaalde integralen zijn.

Is de dichtheid der oorspronkelijke evenwichtslading van A bijv. α en die van B , β , dan verkrijgt men voor de einddichtheid in een punt van A de waarde

$$\pi_a = \alpha_a + \alpha'_a + \alpha''_a + \text{enz.} - \beta_a - \beta'_a - \beta''_a - \text{enz.} \dots \quad (3)$$

en voor die in een punt van B

$$\mu_b = -\alpha_b - \alpha'_b - \alpha''_b - \text{enz.} + \beta_b + \beta'_b + \beta''_b + \text{enz.} \dots \quad (4)$$

Na de summation zal π_a van de coördinaten van het beschouwde punt van A , en μ_b van die van een punt van B afhangen, terwijl het verder nauwelijks vermelding behoeft, dat de termen van (3) alle bepaalde integralen over B , die van (4) bepaalde integralen over A zijn, behalve α_a en β_b die dichtheden van evenwichtsladingen voorstellen.

Neemt men nu den 3^{en} conductor C mede in de beschouwing op, dan zullen de evenwichtslading van dezen, en de zooeven gevonden lading van A op elkander influenceeren; op hen zullen zich nieuwe ladingen vormen, ieder door 2 reeksen bepaald; — op dezelfde wijze B tegen over C stellende, vindt men nog 2 reeksen voor de komende ladingen van ieder van deze.

Noemen wij bijv. de dichtheid der evenwichtslading over C , γ dan komt voor de einddichtheid in een punt van A

$$D_a = \pi_a + \pi'_a + \pi''_a + \text{enz.} - \gamma_a - \gamma'_a - \gamma''_a - \text{enz.}$$

voor die in een punt van B

$$D_b = \mu_b + \mu'_b + \mu''_b + \text{enz.} - \gamma_b - \gamma'_b - \gamma''_b - \text{enz.}$$

en eindelijk voor een punt van C

$$D_c = -\pi_c - \pi'_c - \text{enz.} - \mu_c - \mu'_c - \text{enz.} + \gamma_c + \gamma'_c + \gamma''_c + \text{enz.}$$

in welke laatste uitdrukking $\gamma'_c + \gamma''_c + \text{enz.}$ de som van 2 reeksen voorstelt, waarvan de eene door de reeks der γ_a , de andere door die der γ_b wordt opgewekt.

Ten slotte is het duidelijk dat de totale potentiaal 8 summatiën vordert, daar ieder der reeksen van D_a , D_b en D_c tot eene reeks van potentialen aanleiding geeft.

BESLUIT.

Aan het einde van het voorliggende proefschrift is het wellicht niet ongepast in enkele trekken het doel dat wij ons voorstelden, te schetsen en na te gaan in hoeverre dit werd bereikt. Wij zullen in dit opzicht kort moeten zijn — trouwens van deze eerste proeve zal wel niemand veel resultaten verwachten.

De theorie der elektro-statika bestaat uit 3 hoofddeelen: ten eerste onderzoekt zij het algemeene vraagstuk der evenwichtsverdeeling over een oppervlak — in de tweede plaats beschouwt zij de verdeeling bij influentie om ten derde met de theorie der elektrische ontlading te besluiten.

Voor zooverre het eerste gedeelte betreft mag men veilig beweren dat zij reeds het karakter van eenheid heeft aangenomen, dat haar als toepassing der wiskunde voegt. Het begrip der potentiaal-functie vooropstellende, ontwikkelt zij de oplossing van het vraagstuk geheel uit het bekende theorema van Green, dat als gevolg tot de methode der niveau-oppervlakken voert. Alzoo

loopt door dat deel een enkele draad, dien men van de eenvoudige hypothese der 2 vloeistoffen tot aan het einde kan volgen, en, al mag van een eenigzins volledig leerboek gevorderd worden, dat het ook een overzicht geven van andere methoden, die vaak in bijzondere gevallen vruchtbaar bleken te zijn, dit overzicht zal zoodanig kunnen worden toegevoegd dat het den logischen gang der redencring niet verstoort.

Van de theorie der elektrische ontlading kan in hoofdzaak hetzelfde gezegd worden, sedert Helmholtz (*»Erhaltung der Kraft»* 1847) het beginsel der levendige krachten toepassende, tot de stelling kwam, dat de bij de ontlading verrichte arbeid door de toeneming der potentiaal op zich zelve wordt gemeten.

Geheel anders, wat de logische eenheid aangaat, is het met de theorie der influentie. Nu eens wordt de kwestie tot het algemeene karakter der potentiaal teruggevoerd, zooals bijv. bij de inductie door vaste massa's (zie Grinwis t. a. p. pag. 138, en vv. of Beer pag. 48 en vv.); dan weder bezigt men de theorie der kogelfunctiën voor de inductie op een bol; een andermaal bij de theorie van den condensator, de stelling van Rieman; eindelijk wordt het beginsel der Spherische beelden aangewend bij het algemeene geval van de influentie van een willekeurig aantal geleiders.

Dit laatste beginsel trekt vooral de aandacht; eerstens dewijl het grondbegrip zoo hoogst eenvoudig, het aantal formules zoo klein, en hare ontwikkeling zoo gemakkelijk is; ten tweede wegens de uitgebreidheid der toepassing: immers zoo wel bij de inductie door één punt als bij de onderlinge influentie van twee bolvormige geleiders wordt het zonder bezwaar gebezigd; maar vooral verdient de strekking te worden opgemerkt: het brengt nl. het probleem der inductie tot dat der evenwichtsverdeeling terug en zal dus bij eene consequente toepassing, de beide

eerste deelen der elektro-statika tot een stelselmatig geheel maken. Het bovenstaande bracht mij op het denkbeeld, om een onderzoek dienaangaande tot onderwerp voor mijne dissertatie te kiezen.

De algemeene beschouwingen over inductie die men o. a. bij Grinwis t. a. p. pag. 90—106 aantreft, meende ik te mogen achterwegen laten; daarentegen was het noodzakelijk vooraf het begrip der Spherische beelden en de relatiën tot welke het aanleiding geeft, zooveel mogelijk in het licht te plaatsen; — en in bijzonderheden te treden voor het geval dat het oorspronkelijk oppervlak of het beeld zich in het oneindige uitstrekt.

Eene enkele stelling was daarna (zie 3^e Hoofdstuk) voldoende om het ontwikkelde van algemeene toepassing te maken op het vraagstuk der elektrische inductie door een enkel punt, en dus ook door vaste massa's, terwijl eenige voorbeelden dit nader moesten ophelderen. Al zijn deze laatste weinig in aantal, ze zijn toch m. i. genoegzaam om aan te toonen dat de methode der beelden niet onpraktisch is; de hier gegevene behandeling der influentie over een boloppervlak bijv. kan wat de eenvoud en bondigheid der ontwikkeling, en het volledige der resultaten betreft, zeker de vergelijking met de oplossing dier opgave door kogelfunctiën doorstaan. Evenzoo zal de bepaling der inductie door vaste massa's, met behulp der beelden, langs korteren weg worden bereikt dan door de bekende formule

$$V = \int \frac{1}{4\pi} \frac{\sum_0^{\infty} \frac{dV^r}{dn}}{ds}, \text{ wanneer eenmaal de evenwichtsverdee-}$$

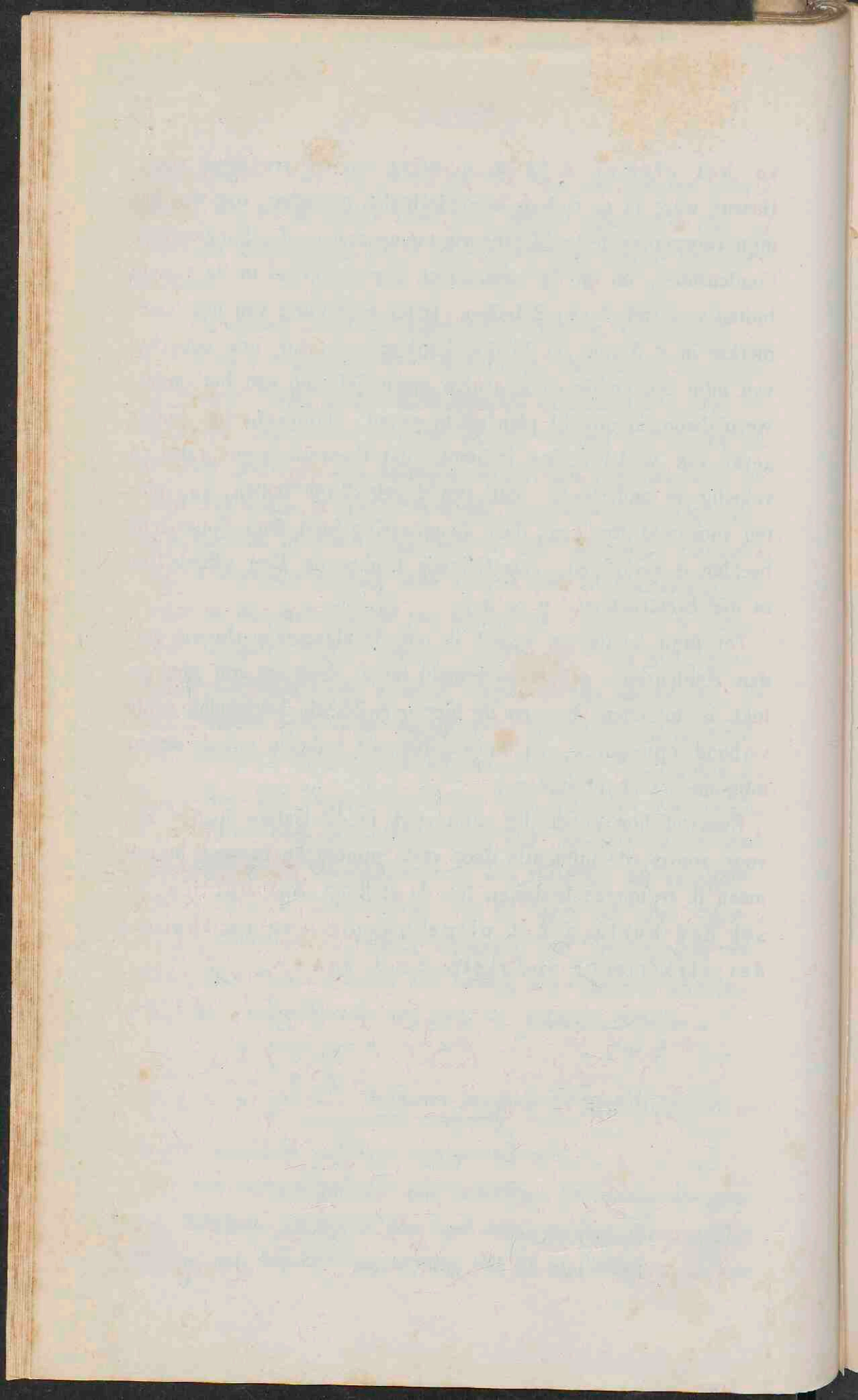
ling over geleiders vollediger bekend zal zijn.

Wat het laatste gedeelte »de onderlinge influentie van geleiders» aangaat, moest ik zeer kort zijn, en kon alleen op het voetspoor van Lipschitz aantoonen, dat de methode der beelden

in het algemeen tot de oplossing van dit vraagstuk voert. Gaarne ware ik in nadere bijzonderheden getreden; zoo was het mijn voornemen de beeldentheorie toetepassen op den Spherischen Condensator, en op de verandering der potentiaal in de ruimte buiten een stelsel van 2 bollen, (naar aanleiding van het opgemerkte in § 9 van het 1^o Hoofdstuk): — maar het beperkte van mijn tijd en de eigenaardige moeielijkheden van het onderwerp dwongen mij dit plan op te geven. Trouwens het eenige geval van wederkeerige influentie dat theoretisch en praktisch volledig is onderzocht, dat van 2 geleidende bollen, kan hier ten voorbeeld strekken, daar de oplossing juist door Spherische beelden is verkregen, (zie Grinwis t. a. p. en Beer »*Einleitung in die Eektrostatik*'' u. s. w.)

Tot mijn leedwezen moest ik ook de algemeene theorie van den condensator geheel onvermeld laten, daar het mij niet gelukt is tusschen deze en de hier ontwikkelde beginselen enig verband optesporen, en bovengenoemde redenen mij dwongen mijn onderzoek te staken.

Evenwel hoe onvolledig mijn werk in dit laatste opzicht zij, voor zoover de influentie door vaste punten en massa's betreft meen ik te mogen besluiten tot de stelling, dat het beginsel der beelden het uitgangspunt van de theorie der elektrische inductie moet zijn.



STELLINGEN.

I.

Bij de theorie der elektrische inductie moet de methode der beelden worden vooropgesteld :

- 1^o Omdat zij die theorie tot de leer der evenwichtsverdeling terugbrengt.
- 2^o Omdat hare toepassing in vele gevallen hoogst eenvoudig is.

II.

Het vraagstuk der evenwichtsverdeling van elektriciteit over een oppervlak, verwacht zijne verdere oplossing van de omkeering der methode van Green.

III.

Zeer ten onrechte beweert Dr. Bellaar Spruijt :
De vrij algemeen verspreide meening, dat de studie der

mathesis een der meest werkzame middelen zou zijn ter ontwikkeling van den menschelijken geest, is een gevaarlijk dwaalbegrip. Aan elke inrichting van onderwijs, die zich algemeene ontwikkeling ten doel stelt, moet de beoefening der mathesis beschouwd worden als een noodzakelijk kwaad, dat binnen de engst mogelijke grenzen behoort te worden beperkt.

IV.

Bij het onderwijs in de Mechanika aan eene Hoogere Burgerschool, moet aan de Dynamika eene ondergeschikte plaats worden gegeven.

V.

Bij het Middelbaar Onderwijs in de natuurkunde moet niet zoozeer uitgebreide feitenkennis, dan wel een juist inzicht in het verband der verschijnselen het hoofddoel zijn.

VI.

De oneindig kleinen moeten als limieten worden beschouwd; daarom is het bijv. onjuist te beweren dat de kromte-cirkel van eene kromme drie punten met deze gemeen heeft.

VII.

Van de methoden ter benadering der wortels eener hoogere-machtsvergelijking, is die van Horner de eenige doeltreffende.

VIII.

Het aannemen van een absoluut nulpunt van temperatuur heeft geen ander nut, dan dat het de formules eenigzins vereenvoudigt.

IX.

De verdienste van den meter als onveranderlijke op de natuur gegronde eenheid is ingebeeld; de golflengte van een bepaalden toon in eene bepaalde middenstof ware als zoodanig meer aanbevelen.

X.

De stelling, dat bij het ontstaan van een elektrischen stroom, de scheiding der elektriciteiten door contact, aan de chemische werking voorafgaat, is niet in strijd met het beginsel van het behoud van arbeidsvermogen.

XI.

Het is voor de verklaring van de voortplanting der licht- en warmtestralen niet noodzakelijk het bestaan van een aether aantennemmen.

XII.

De resultaten door de spektraal-analyse ten opzichte der zonsatmosfeer verkregen, bezitten eene hooge mate van waarschijnlijkheid.

XIII.

Om de afplatting der aarde te verklaren, behoeft men niet van een oorspronkelijk vloeibaren toestand der aarde uittegaan.

XIV.

De snelheid van de aswenteling der aarde moet tengevolge van de eb en vloed verminderen.

XV.

Het verschil in de getallen, die men vindt voor de snelheid van het licht, uitgaande 1^o van de waarneming der maansverduisteringen op Jupiter en 2^o van de aberratie der vaste sterren, wordt veroorzaakt door het hoogst gebrekkige onzer waarneming bij de 1^e methode.

XVI.

De stelling: „de wiskunde is eene hypothetische wetenschap” is minstens *zonderling*.

XVII.

Beide methoden, die analytische und die synthetische sind vereint allein im stande, der Mechanik die schärfe und die Klarheit zu verleihen, welke heutzutage alle mathematischen Wissenschaften auszeichnen sollen.

DR. WILHELM SCHELL.

XVIII.

Het verschijnsel dat de soortelijke warmte van vaste lichamen bij verhooging van temperatuur toeneemt, wordt door de mechanische warmtetheorie voldoende verklaard.

XIX.

Bij de waarneming der inclinatie verdient de aard-induktor van Weber de voorkeur boven het gewone inclinatorium.

E R R A T U M.

pag. 84, reg. 16 vb. *staat*: als limieten *moet zijn*: als naderende tot limieten.

Fig. 1.

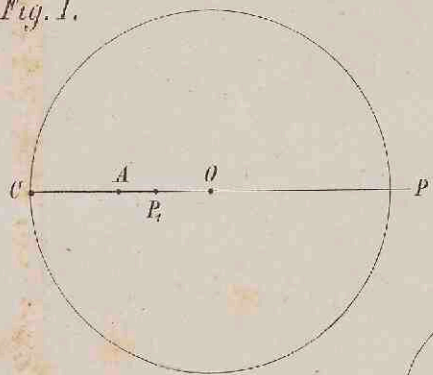


Fig. 4.

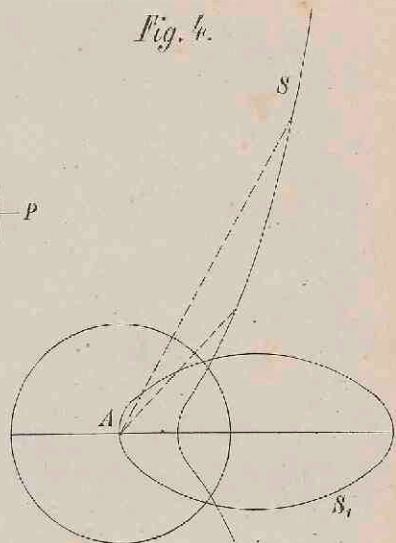


Fig. 7.

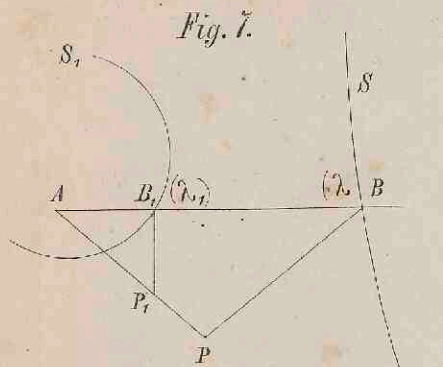


Fig. 10.

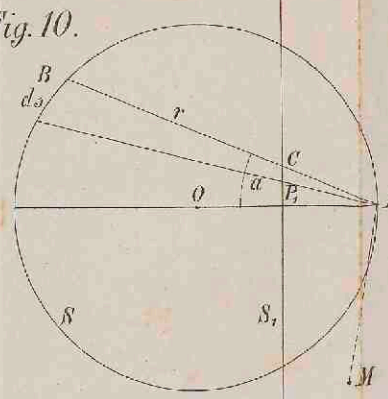


Fig. 11.

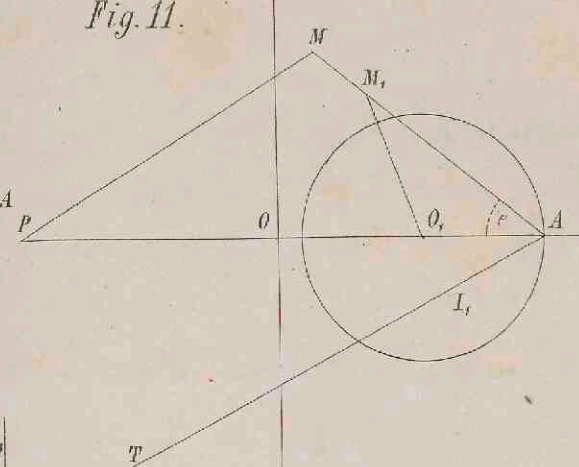


Fig. 2.

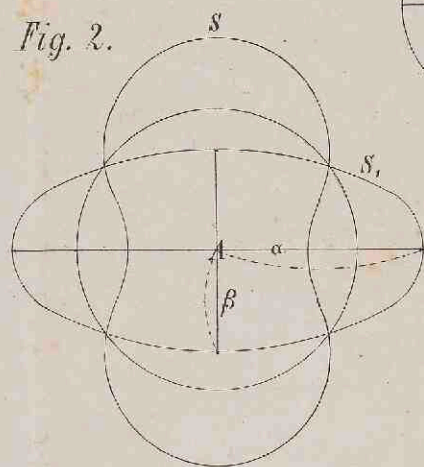


Fig. 6.

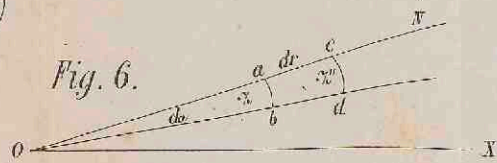


Fig. 12.

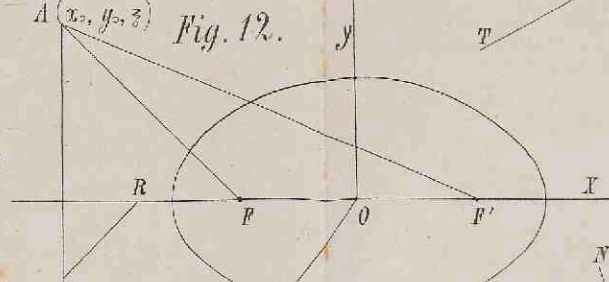


Fig. 8.

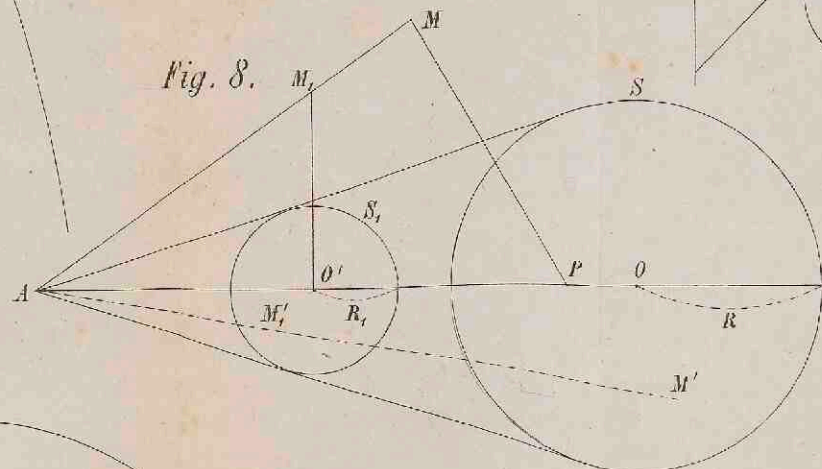


Fig. 13.

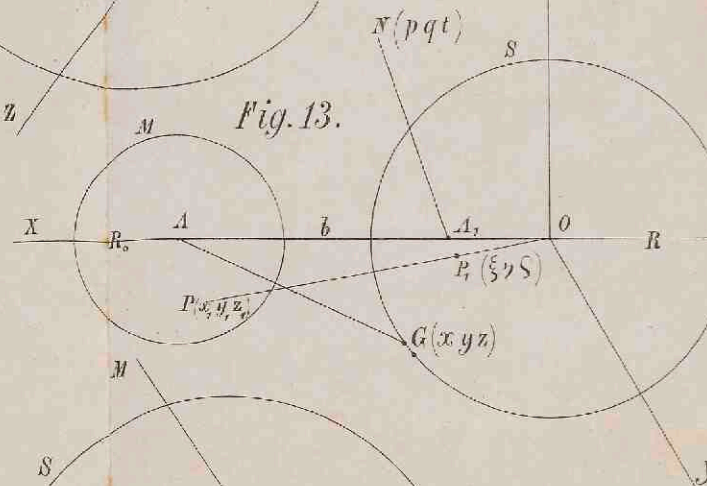


Fig. 3.

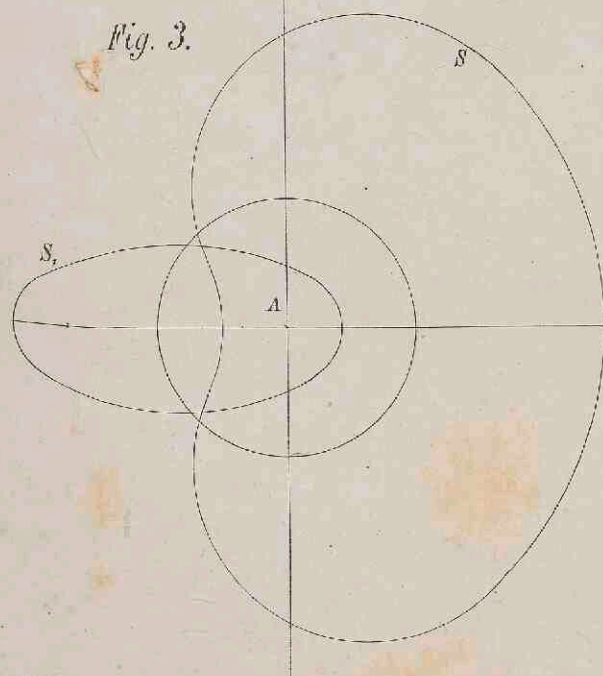


Fig. 5.

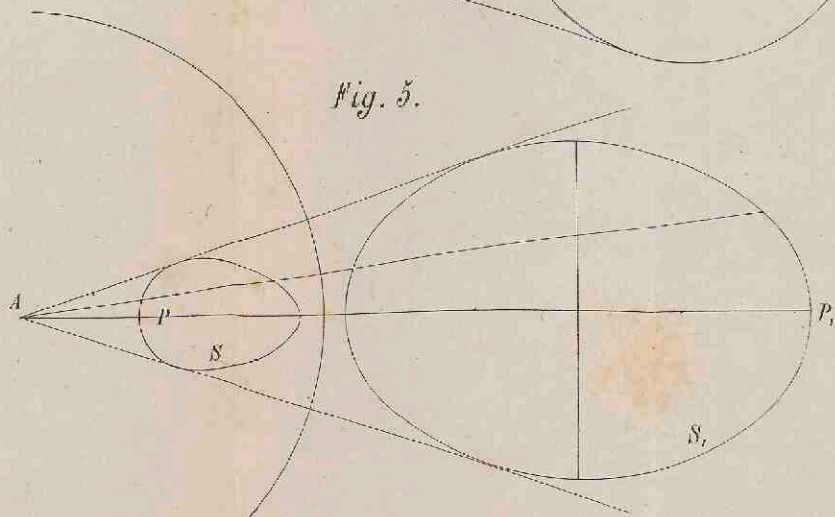


Fig. 9.

