



# Involuties in het complexe vlak

<https://hdl.handle.net/1874/266446>



4<sup>de</sup> 192

Thys 7 Juli 1917

# INVOLUTIES IN HET COMPLEXE VLAK.



EVA H. C. H. VEEN.



**A. qu.**  
**192**









INVOLUTIES IN HET COMPLEXE VLAK.



# Involuties in het Complexe Vlak.

---

## PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

**Dr. P. H. DAMSTÉ**

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Zaterdag 7 Juli 1917, des namiddags te 4 uur

DOOR

**EVA HELENA CATHARINA HILLEGONDA VEEN**

geboren te SNEEK.

---

Electr. drukkerij «de Industrie» J. VAN DRUTEN — Utrecht

1917









AAN MIJNE OUDERS.





Bij het einde van mijn academischen studietijd grijp ik gaarne de gelegenheid aan, allen, die tot mijne opleiding hebben medegewerkt, daarvoor dank te brengen.

Van de docenten bij het M. O. denk ik hier in de eerste plaats aan Dr. B. MEILINK, door wiens prettige, duidelijke lessen mijne liefde voor de natuurkunde werd opgewekt, welke mijne studierichting bepaalde.

In 't bijzonder geldt mijn dank U, Hoogleeraren en lectoren in de Facultéit der Wis- en Natuurkunde, U, Hooggeleerde JULIUS en NIJLAND voor Uw onderwijs en leiding, U, Hooggeleerde ORNSTEIN mede voor Uwe nooit te vergeefs ingeroepen hulp en Uwen vriendschappelijken omgang.

Niet gaarne zou ik U, Hooggeleerde KAPTEYN, hoewel Gij Uwe functie reeds hebt neergelegd, hier ongenoemd laten. Wees overtuigd, dat ik het steeds een groot voorrecht zal achten, Uwe leerling te zijn geweest.

Hoe zal ik ten slotte U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, mijne groote erkentelijkheid kunnen betuigen voor Uwe hulp en aanmoediging, vooral het laatste jaar in zoo ruime mate van U ondervonden? Met groote welwillendheid stelt Gij Uwe aantekeningen te mijner beschikking, ten einde ze in dit proefschrift te verwerken.

De duidelijke, boeiende wijze, waarop Gij ons de wiskundige problemen verklaardet, heeft altijd mijne groote bewondering gewekt. Uwe lessen zal ik mij steeds dankbaar blijven herinneren.



## INHOUD.

---

|                                                                                   | Bladz. |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------|
| INLEIDING . . . . .                                                               | 1      |
| HOOFDSTUK I.                                                                      |        |
| De kwadratische involutie . . . . .                                               | 3      |
| HOOFDSTUK II.                                                                     |        |
| Algemeene eigenschappen der involutie van den $n^{\text{den}}$<br>graad . . . . . | 16     |
| HOOFDSTUK III.                                                                    |        |
| Kubische involutie met twee drievoudige punten . . .                              | 28     |
| HOOFDSTUK IV.                                                                     |        |
| Kubische involutie met één drievoudig punt . . . . .                              | 44     |
| HOOFDSTUK V.                                                                      |        |
| Algemeene kubische involutie . . . . .                                            | 50     |
| HOOFDSTUK VI.                                                                     |        |
| Algemeene bikwadratische involutie . . . . .                                      | 74     |
| HOOFDSTUK VII.                                                                    |        |
| Bikwadratische involutie met viervoudig punt . . . .                              | 80     |
| HOOFDSTUK VIII.                                                                   |        |
| Bikwadratische involutie met metaharmonische dubbel-<br>punten . . . . .          | 84     |
| HOOFDSTUK IX.                                                                     |        |
| Bikwadratische involutie met drie drievoudige punten .                            | 94     |
| HOOFDSTUK X.                                                                      |        |
| Bikwadratische involutie met twee viervoudige punten .                            | 99     |
| HOOFDSTUK XI.                                                                     |        |
| Cyclische involutie van den $n^{\text{den}}$ graad . . . . .                      | 104    |

---





## INLEIDING.

---

Het begrip „involutie”.

Indien er tusschen de elementen van een unicursalen drager eene zoodanige wisselwerking bestaat, dat, door aanname van  $k$  elementen,  $(n - k)$  ( $n > k$ ) andere elementen zóó bepaald worden, dat in die groep van  $n$  elementen volkomen verwisselbaarheid heerscht, dan noemt men deze soort verwantschap eene involutie van den  $n^{\text{en}}$  graad en den  $k^{\text{en}}$  rang (teeken  $I_n^k$ ).

De verwisselbaarheid wordt zóó bedoeld, dat men, uit die groep  $k$  elementen willekeurig kiezende, steeds de overige  $n - k$  elementen verkrijgt.

Wordt  $k = 1$ , dan heeft men een stelsel van groepen van  $n$  punten of lijnen, die elk door aanname van één harer elementen volkomen bepaald zijn, eene  $I_n$ .

Eene  $I_n$  is door twee van haar groepen volkomen bepaald. Immers eene groep van  $n$  punten wordt voorgesteld door eene vergelijking van den  $n^{\text{en}}$  graad:

$$F_n(x) \equiv a_0 x^n - n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} \dots + \\ + (-1)^k \binom{n}{k} a_k x^{n-k} \dots = 0$$

en eene  $2^{\text{e}}$  groep door:

$$f_n(x) \equiv b_0 x^n - n b_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} b_2 x^{n-2} \dots + \\ + (-1)^k \binom{n}{k} b_k x^{n-k} \dots = 0,$$

daar de coëfficiënten in deze vergelijkingen volkomen bepaald worden door 2 stelsels van  $n$  vergelijkingen, die men verkrijgt door achtereenvolgens de parameters  $x$  der gegeven punten in de vergelijkingen  $F_n(x) = 0$  en  $f_n(x) = 0$  te substitueeren.

Nu zal  $F_n(x) = \lambda f_n(x)$  voor elke waarde van  $\lambda$  eene groep van  $n$  punten bepalen. En omgekeerd: substitueeren we in

$F_n(x) = \lambda f_n(x)$  den parameter  $x$  van een willekeurig punt, dan wordt daardoor eene waarde  $\lambda$  bepaald, die dan weer alle  $n$  punten van eene groep geeft.

Eene uitbreiding van dit begrip van involutie krijgt men door den parameter  $x$ , die de punten op een unicursalen drager bepaalt, te vervangen door de complexe veranderlijke  $z = x + i y$ .

Stelt men deze grootheid op de gebruikelijke wijze voor door een punt van een plat vlak, dan bepaalt eene vergelijking van den vorm

$$F_n(z) \equiv a_0 z^n - n a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a_k z^{n-k} \dots = 0 \quad (1)$$

(waarin nu de coëfficiënten ook complex kunnen zijn), eene groep van  $n$  punten in het vlak, die ook gedeeltelijk of zelfs geheel kunnen samenvallen.

De vergelijking  $F_n(z) = \lambda f_n(z)$  zal nu eene „*complexe involutie*” of eene „ $I_n$  in het *complexe vlak*” voorstellen, als men  $\lambda$  het gebied der complexe getallen laat doorloopen. (2)

Zij onderscheidt zich van de bovengenoemde involuties op rationale dragers vooral hierin, dat alle groepen uit bestaansbare punten zijn opgebouwd.

In het volgende zullen we nu deze „*complexe involuties*” nader onderzoeken.



## HOOFDSTUK I.

### De kwadratische involutie.

§ 1. Eene involutie in het complexe vlak, van den 2<sup>en</sup> graad en den 1<sup>en</sup> rang, eene  $I_2^1$  of  $I_2$  dus, wordt door 2 puntenparen  $P_1, P_2$  en  $Q_1, Q_2$  volkomen bepaald. Hare vergelijking is:

$$(z - p_1)(z - p_2) = \lambda(z - q_1)(z - q_2) \quad (3)$$

waarin  $p_1, p_2, q_1, q_2$  de complexe coördinaten der gegeven punten zijn en  $\lambda$  elke complexe waarde kan verkrijgen.

De dubbelpunten der  $I_2$  moeten tevens aan de afgeleide vergelijking

$$(z - p_1) + (z - p_2) = \lambda \{ (z - q_1) + (z - q_2) \} \quad (4)$$

voldoen; zij zijn dus bepaald door de volgende vergelijking, die ontstaat door eliminatie van  $\lambda$  uit (3) en (4):

$$\frac{1}{z - p_1} + \frac{1}{z - p_2} = \frac{1}{z - q_1} + \frac{1}{z - q_2}. \quad (5)$$

Nu is  $p_1 - z$  de vector die  $P_1$  met  $Z$  verbindt en dus de vector van het punt  $P_1$ , als het punt  $Z$  tot oorsprong wordt gekozen.

$$\text{Stelt men} \quad p_1 - z = \rho e^{i\varphi} \quad (6)$$

$$\text{dan is} \quad \frac{1}{p_1 - z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \quad (7)$$

de vector van een punt  $P_1'$ , dat uit  $P_1$  ontstaat door inversie ten opzichte van het punt  $Z$  als centrum gevolgd door spiegeling om eene lijn door  $Z$  evenwijdig aan de  $X$  as.

Vergelijking (5) kan dus worden vervangen door:

$$p_1' + p_2' = q_1' + q_2'. \quad (8)$$

Daar het linker lid van deze vergelijking het dubbele is van den vector van het midden der punten  $P_1', P_2'$ , volgt uit (8) dat dit midden samenvalt met het midden der punten

$Q_1'$ ,  $Q_2'$ , dat dus de lijnen  $P_1'P_2'$  en  $Q_1'Q_2'$  elkaar midden-doordeelen.

Door inversie uit elk der wortelpunten van (5) gaat de kwadratische involutie derhalve over in het samenstel van alle puntenparen, die het midden gemeen hebben. Voor dit gemeenschappelijk zwaartepunt  $M$  is  $m_1' = m_2'$  of  $\frac{1}{z - m_1} = \frac{1}{z - m_2}$  of  $m_1 = m_2$ . Het is dus het beeld van een dubbelpunt der oorspronkelijke  $I_2$ , en zelf een dubbelpunt der nieuwe  $I_2$ , die *isobarische*  $I_2$  zal genoemd worden. Haar tweede dubbelpunt ligt in het oneindige en is het beeld van het centrum van inversie.

Deze uitkomst leidt dus tot de volgende eigenschap:

1. „Twee puntenparen worden door inversie uit een der dubbelpunten van de door hen bepaalde kwadratische involutie omgezet in de toppen van een parallelogram.<sup>1)</sup>”

§ 2. Nemen we nu het midden der beide dubbelpunten  $A_1$  en  $A_2$  eener algemeene  $I_2$ , het „centraalpunt” of *centrum*, als oorsprong  $O$  aan en de verbindingslijn  $A_1A_2$ , de „hoofdas”, als  $X$  as, (terwijl we de  $Y$  as als „bij-as” der  $I_2$  zullen aanduiden), dan wordt de vergelijking der  $I_2$ :

$$(z - a)^2 = \lambda (z + a)^2 \quad (9)$$

of ook

$$(1 - \lambda) z^2 - 2(1 + \lambda) a z + (1 - \lambda) a^2 = 0 \quad (10)$$

waarin  $a$  de volstrekte waarde is van de afstanden  $OA_1$  en  $OA_2$ .

Is  $z_0$  de vector van het midden der beide, door eene bepaalde waarde van  $\lambda$  aangewezen, punten, dan is  $z_0$  gelijk aan de halve som der wortels van (10), dus

$$z_0 = (1 + \lambda) a : (1 - \lambda).$$

Verg. (10) wordt dan:

$$z^2 - 2 z_0 z + a^2 = 0. \quad (11)$$

Het produkt der vectoren  $z_1$ ,  $z_2$  van elke groep is dus

<sup>1)</sup> Vergelijk hierover vraagstuk XXII, deel IV, der Wiskundige Op-  
gaven. (Nieuwe reeks, Amsterdam 1891.)



onafhankelijk van de waarde  $z_0$  (of  $\lambda$ ) die de groep bepaalt en wel gelijk aan:

$$z_1 z_2 = a^2. \quad (13)$$

Aan het punt  $P_1$ , met  $z_1 = \rho e^{i\varphi}$ , is dus in de  $I_2$  een punt  $P_2$  met  $z_2 = \frac{a^2}{\rho} e^{-i\varphi}$  toegevoegd.

Het ontstaat dus uit  $P_1$  door inversie met straal  $a$  en centrum  $O$ , gevolgd door spiegeling t. o. v. de hoofdas. Tevens blijkt dat hoofd- en bij-as, als binnen- en buitenbissectrix van den hoek  $P_1 O P_2$ , de stralen  $O P_1$  en  $O P_2$  harmonisch scheiden.

Door spiegeling van  $P_2$  ten opzichte van de bij-as vindt men een punt  $P$  op het verlengde van  $P_1 O$ , waarvoor geldt:  $O P \times O P_1 = O A_1 \times O A_2$ ; d. w. z. de punten  $P_1$ ,  $P$ ,  $A_1$  en  $A_2$ , en dus ook de punten  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $A_1$  en  $A_2$ , liggen op een cirkel  $\mathfrak{A}$ .

Hieruit volgt deze eenvoudige *constructie* van een punt  $P_2$ , als de hoofdpunten en het bijbehorende punt  $P_1$  gegeven zijn.

Trek hoofd- en bij-as (snijpunt  $O$ ). Trek cirkel  $A_1 A_2 P_1$ , trek  $P_1 O$ ; haar snijpunt met den cirkel zij  $P$ . Spiegel  $P$  ten opzichte van de bij-as. Dit geeft op den cirkel het punt  $P_2$ .

§ 3. De vectoren  $z_1$  en  $z_2$  der beide punten eener groep voldoen beide aan vergelijking (9). Dus is

$$(z_1 - a)^2 = \lambda (z_1 + a)^2 \text{ en } (z_2 - a)^2 = \lambda (z_2 + a)^2,$$

waaruit volgt

$$\left(\frac{z_1 - a}{z_1 + a}\right)^2 = \left(\frac{z_2 - a}{z_2 + a}\right)^2.$$

Zoo lang nu  $z_1$  van  $z_2$  verschilt, is dus

$$\frac{z_1 - a}{z_1 + a} = -\frac{z_2 - a}{z_2 + a} \text{ of } \frac{z_1 + (-a)}{z_1 + a} : \frac{z_2 + (-a)}{z_2 + a} = -1. \quad (14)$$

Daar we hier eene dubbelverhouding hebben tusschen verbindingslijnen der vier punten  $A_1$ ,  $P_1$ ,  $A_2$ ,  $P_2$ , die gelijk is aan  $-1$ , ligt het voor de hand, de ligging dier punten eene „*harmonische*” te noemen.

De punten  $P_1$  en  $P_2$  noemen we dan *harmonisch gescheiden* door  $A_1$  en  $A_2$ .



Ook de stralenparen die  $A_1$ ,  $A_2$  en  $P_1$ ,  $P_2$  met eenig punt van den omgeschreven cirkel verbinden, scheiden elkaar harmonisch, hetgeen aldus blijkt.

De dubbelverhouding van zulk een vierstraal is onafhankelijk van de keus van den top  $T$ , omdat alle vierstralen de hoeken gelijk hebben; men noemt ze de *dubbelverhouding der vier concyclische punten*. Ze kan worden uitgedrukt in de koorden <sup>1)</sup> en is voor den vierhoek  $A_2 P_1 A_1 P_2$  gelijk aan

$$\frac{A_2 P_1}{A_1 P_1} : \frac{A_2 P_2}{A_1 P_2}.$$

Maar dit was juist de „complexe dubbelverhouding”,

$$\frac{z_1 - a}{z_1 + a} : \frac{z_2 - a}{z_2 + a} = -1,$$

dus is de dubbelverhouding van den vierstraal harmonisch, d. w. z. de stralenparen  $TA_1$ ,  $TA_2$ ;  $TP_1$ ,  $TP_2$  scheiden elkaar harmonisch.

Daar verg. (14) ook te schrijven is in den vorm

$$\frac{-a + z_1}{-a + z_2} : \frac{a + z_1}{a + z_2} = -1,$$

waarin  $z$  en  $a$  van rol verwisseld zijn, blijkt dat  $A_1$ ,  $A_2$  (vectoren  $-a$  en  $+a$ ) een paar vormen van eene  $I_2$  met dubbel-punten  $P_1$ ,  $P_2$  (vectoren  $z_1$  en  $z_2$ ).

Met behulp van de substituties

$$z - a = r e^{i\varphi}, \quad z + a = s e^{i\psi} \quad (15)$$

kan men (14) vervangen door:

$$\frac{r_1}{s_1} e^{i(\varphi_1 - \psi_1)} = - \frac{r_2}{s_2} e^{i(\varphi_2 - \psi_2)} \quad (16)$$

waaruit volgt

$$r_1 : s_1 = r_2 : s_2 \quad (17)$$

en

$$\phi_1 - \psi_1 = \phi_2 - \psi_2 \pm \pi. \quad (18)$$

Volgens verg. (17) geldt voor den koordenvierhoek  $A_1 P_1 A_2 P_2$

$$A_1 P_1 \times A_2 P_2 = A_1 P_2 \times A_2 P_1, \quad (19)$$

d. w. z. de produkten der overstaande zijden zijn even groot.

<sup>1)</sup> Een bewijs vindt men in J. CASEY, *A sequel to the first six books of the Elements of Euclid*. 4th edition 1886 p. 129.

Zulk een vierhoek wordt *harmonisch* genoemd. In verband hiermede kan ook de involutie *harmonisch* worden genoemd. Zij is dan te bepalen als te bestaan uit de paren overstaande hoekpunten van alle harmonische vierhoeken, die twee overstaande hoekpunten gemeen hebben. Hieruit blijkt dat de kwadratische involutie identiek is met de *harmonische involutie*, welke door Dr. JAN DE VRIES is behandeld.<sup>1)</sup>

Van een harmonischen vierhoek kan men aantoonen, dat hij ook *harmonisch* is volgens de bepaling van TUCKER. Deze noemt een koordenveelhoek harmonisch, als er in zijn vlak een punt K is aan te wijzen, waarvoor de loodlijnen op de zijden met die zijden evenredig zijn. Het punt K heet het *symmediaanpunt* van den veelhoek.<sup>2)</sup>

De naam „*harmonisch*” vindt zijne verklaring hierin, dat, wanneer de dubbelverhouding der hoekpunten van een koordenvierhoek — 1 is, de produkten der overstaande zijden even groot zijn.

We zullen nu nog aantoonen, dat er in dit laatste geval een punt K met de genoemde eigenschappen is aan te wijzen.

Nemen we hiervoor den vierhoek  $A_1 P_1 A_2 P_2$ , waarin (19) geldt.

Zijn  $V_1$  en  $V_2$  de projecties van  $A_2$  op  $A_1 P_1$  en  $A_1 P_2$ , dan volgt uit de driehoeken  $A_2 P_1 V_1$  en  $A_2 P_2 V_2$ , die gelijkvormig zijn, ( $\angle A_2 P_2 V_2 = \angle A_2 P_1 V_1 = \frac{1}{2}$  bg  $A_1 P_2 A_2$ ) dat:

$$A_2 V_1 : A_2 V_2 = A_2 P_1 : A_2 P_2$$

maar dan ook, volgens (19)

$$A_2 V_1 : A_2 V_2 = A_1 P_1 : A_1 P_2.$$

De afstanden van elk punt der diagonaal  $A_1 A_2$  tot de zijden  $A_1 P_1$  en  $A_1 P_2$  verhouden zich dus als die zijden. Eene analoge betrekking geldt voor de diagonaal  $P_1 P_2$ . Het snijpunt der diagonalen is dus het gezochte punt K, waaruit de loodlijnen op de zijden neergelaten, met die zijden evenredig zijn. Het is het *symmediaanpunt* van den harmonischen vierhoek  $A_1 P_1 A_2 P_2$ .

<sup>1)</sup> Involutions harmoniques dans le plan et sur la sphère (Archives du Musée Teyler, sér. 2, tome 4, p. 119—140).

<sup>2)</sup> Verg. CASEY. l. c. p. 199, 206.



§ 4. Daar volgens (17) de verhoudingen der afstanden van  $P_1$  en van  $P_2$  tot  $A_1$  en  $A_2$  gelijk zijn, liggen  $P_1$  en  $P_2$  op een cirkel  $\mathfrak{B}$  ten opzichte waarvan  $A_1$  en  $A_2$  toegevoegde punten zijn (*cirkel van APOLLONIUS*), terwijl uit (18) nogmaals de concyclische plaatsing der vier punten blijkt.

Zulk een cirkel  $\mathfrak{B}$  snijdt elken door  $A_1$  en  $A_2$  getrokken cirkel loodrecht.

Immers  $A_1 A_2$  snijdt  $\mathfrak{B}$  in twee punten C en D die harmonisch liggen t. o. v.  $A_1$  en  $A_2$ . Zij M hun midden, dan geldt  $MA_1 \times MA_2 = MC^2$  en  $MC = MP_1$  (straal van cirkel  $\mathfrak{B}$ ).

Dus  $MA_1 \times MA_2 = MP_1^2$  of  $MP_1$  is een raaklijn in  $P_1$ , waaruit de loodrechte snijding volgt.

Elk paar der  $I_2$  is dus aangewezen door de snijpunten van twee elkaar loodrecht snijdende cirkels  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$ . De cirkels  $\mathfrak{A}$  vormen een bundel met basispunten  $A_1$  en  $A_2$ , terwijl deze punten de grenspunten of puntecirkels zijn van den bundel door de cirkels  $\mathfrak{B}$  gevormd.

Daar, zooals gebleken is, hoofd- en bij-as de stralen  $OP_1$  en  $OP_2$  harmonisch scheiden, zal dit ook het geval zijn met de punten R en Q waarin die lijnen de transversaal  $P_1 P_2$  snijden. Maar dan is Q de pool van  $A_1 A_2$ .

Op elken cirkel  $\mathfrak{A}$  worden de paren der  $I_2$  dus ingesneden door lijnen uit de pool van  $A_1 A_2$  t. o. v.  $\mathfrak{A}$ . De raaklijnen uit de pool leveren in  $A_1$  en  $A_2$  de dubbelpunten van eene kwadratische involutie, die geheel op cirkel  $\mathfrak{A}$  ligt. Deze  $I_2$  behoort dus tot de complexe  $I_2$ .

Op elken cirkel  $\mathfrak{B}$  vindt men eveneens eene  $I_2$ ; deze wordt door de cirkels  $\mathfrak{A}$  ingesneden. Voor elk paar geldt  $z_1 z_2 = a^2$  en dus voor de dubbelpunten:  $z^2 = a^2$  of  $z = \pm a$ . De punten  $A_1, A_2$  zijn dus dubbelpunten, gelegen buiten den drager  $\mathfrak{B}$  der  $I_2$ , dus *ideale* dubbelpunten; de verbindingslijnen der paren van deze  $I_2$  gaan door één punt L van de hoofdas. De ligging van L zullen we nog nader bepalen.

Ook de hoofdas draagt eene  $I_2$ , waarvan C en D een paar en  $A_1, A_2$  werkelijke dubbelpunten zijn; deze  $I_2$  is de harmonische involutie bestaande uit „reële” punten, die in de complexe  $I_2$  begrepen is.



Voor de  $I_2$  op de bij-as (die eigenlijk een  $\mathfrak{B}$ -cirkel is met oneindig grooten straal), welke  $I_2$  ook in de complexe  $I_2$  is begrepen, zijn  $A_1, A_2$  weer ideale dubbelpunten.

Bepalen we nu het punt  $L$  nader.

De voorwaarde waaronder drie punten  $z, z_1, z_2$  op eene rechte lijn liggen, is:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

of ook

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x + iy & x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ x - iy & x_1 - iy_1 & x_2 - iy_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Duiden we  $x - iy$  door  $\bar{z}$  aan, dan wordt deze voorwaarde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Ligt het punt  $z$  op de hoofdas, dan is  $\bar{z} = z$  en (22) gaat over in:

$$z = \frac{z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1}{z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2}. \quad (23)$$

Is nu  $z_1 z_2 = a^2$ , dus reëel, dan is ook  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = a^2$ , daar de reëele deelen van  $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$  en van  $(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$  aan elkaar gelijk zijn.

We vinden dus uit (23) voor het snijpunt der hoofdas met de lijn, die  $z_1$  met  $z_2$  verbindt:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \\ &= \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{z_1 (z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2) - z_1 (z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2)} = \end{aligned}$$

$$\text{of} \quad z = a^2 \frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1 + a^2}. \quad (24)$$

Door de substituties:

$$z - a = r e^{i\varphi} \quad z + a = s e^{i\psi} \quad (25)$$

en dus

$$\bar{z} - a = r e^{-i\varphi} \quad \bar{z} + a = s e^{-i\psi} \quad (26)$$

waaruit volgt:

$$\begin{cases} z\bar{z} - a(z + \bar{z}) + a^2 = r^2 \\ z\bar{z} - a(z + \bar{z}) + a^2 = s^2 \end{cases} \quad (27)$$

en dus

$$2(z\bar{z} + a^2) = r^2 + s^2, \text{ en } 2a(z + \bar{z}) = s^2 - r^2 \quad (28)$$

gaat vergelijking (24) over in:

$$z = a \frac{s^2 - r^2}{s^2 + r^2}. \quad (29)$$

Zoolang de waarde  $s:r$  standvastig blijft, verandert de waarde van  $z$  dus niet.

Voor elken  $\mathfrak{B}$ -cirkel heeft dit quotient een standvastige waarde  $c$ ; dus is voor het bedoelde snijpunt

$$z = a \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}. \quad (30)$$

Het op de hoofdas gelegen snijpunt  $L$  der lijnen, die op den  $\mathfrak{B}$ -cirkel  $s = cr$  de paren der  $I_2$  insnijden, is dus bepaald door:

$$l = a \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}. \quad (31)$$

Voor de snijpunten  $C$  en  $D$  van cirkel  $\mathfrak{B}$  met de hoofdas is  $z_1 = z_1$ , dus, in verband met (24),

$$l = \frac{2a^2 z_1}{z_1^2 + a^2} \text{ of } z_1^2 - \frac{2a^2}{l} z_1 + a^2 = 0. \quad (32)$$

Aan deze vergelijking moeten de punten  $C$  en  $D$  voldoen.

Het midden  $M$  dier punten, dat is het middelpunt van cirkel  $\mathfrak{B}$ , wordt dus bepaald door

$$m = \frac{a^2}{l} \text{ of } ml = a^2. \quad (33)$$

De punten  $M$  en  $L$  vormen een paar der  $I_2$ , worden dus harmonisch gescheiden door  $A_1$  en  $A_2$ , zoodat de cirkel  $\mathfrak{B}$  op  $ML$  als middellijn, tot den bundel ( $\mathfrak{B}$ ) behoort.



Hieruit blijkt ook, dat  $L$  tusschen de dubbelpunten ligt. Elke rechte, die de hoofdas tusschen de dubbelpunten snijdt, bepaalt in dat snijpunt een punt  $L$  en dus volgens (31) eene daarbijbehoorende waarde  $c$  van een cirkel  $s = c r$ . De snijpunten met dien cirkel leveren het eenige paar der  $I_2$  dat zulke eene rechte bevat. De hoofd- en bijas dragen evenwel oneindig vele paren. Alle overige lijnen dragen geen enkel paar.

De lijnen, die de middens der door  $L$  gaande koorden van een  $\mathfrak{B}$ -cirkel met  $M$  verbinden, zijn loodlijnen op die koorden. Die middens liggen dus alle op cirkel  $\mathfrak{M}$ .

Hoe vinden we de standvastige waarde  $c_0 = s : r$ , die bij  $\mathfrak{M}$  behoort? Deze is afhankelijk van de waarde  $c$  van den bijbehoorenden  $\mathfrak{B}$ -cirkel. Voor  $L$  is  $s = l + a$ , en  $r = -l + a$ , dus is, in verband met (31)

$$\begin{aligned} c_0 = s : r &= \left( a \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} + a \right) : \left( a - a \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{2 a c^2}{c^2 + 1} : \frac{2 a}{c^2 + 1} \text{ of } c_0 = c^2. \end{aligned} \quad (34)$$

In woorden:

II. „De middens der paren der  $I_2$ , die op een bepaalden  $\mathfrak{B}$ -cirkel „ $s = c r$  liggen, worden verbonden door den cirkel  $s = c^2 r$ .“

§ 5. Voor twee paren der  $I_2$  geldt wegens  $z_1 z_2 = a^2$ , de betrekking:  $O P_1 \times O P_2 = O Q_1 \times O Q_2$  of:

$$O P_1 : O Q_2 = O Q_1 : O P_2. \quad (35)$$

Daar de hoofdas de hoeken  $P_1 O P_2$ ,  $Q_1 O Q_2$  middendoor-deelt, is  $\angle P_1 O Q_1 = \angle Q_2 O P_2$ . De driehoeken  $P_1 O Q_1$  en  $Q_2 O P_2$  zijn dus gelijkvormig. Zij  $S$  het snijpunt der lijnen  $P_1 Q_1$  en  $P_2 Q_2$ , dan ziet men, wegens de gelijkheid der hoeken  $P_1 Q_1 O$  en  $Q_2 P_2 O$ , de lijn  $OS$  uit de punten  $Q_1$  en  $P_2$  onder gelijke hoeken;  $O$ ,  $S$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$  liggen dus op een cirkel. Maar evenzoo liggen dan de punten  $O$ ,  $S$ ,  $P_1$ ,  $Q_2$  op een cirkel.

Hieruit volgt nu deze constructie voor het centraalpunt  $O$  en voor de dubbelpunten van eene  $I_2$ , die door de paren  $P_1 P_2$ ,  $Q_1 Q_2$  is bepaald:

III. „Bepaal het snijpunt  $S$  van  $P_1 Q_1$  en  $P_2 Q_2$ , breng

„cirkels door  $S$ ,  $P_1$ ,  $Q_2$  en door  $S$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$ , hun 2<sup>e</sup> snijpunt „O is het centraalpunt.

„De lijn, welke  $\angle P_1 O P_2$  middendoordeelt, is de hoofdas.  
 „De dubbelpunten der  $I_2$  worden op deze hoofdas ingesneden  
 „door een cirkel  $\mathfrak{A}$  door  $P_1$ ,  $P_2$ , wiens middelpunt gevonden  
 „wordt als snijpunt van de bijas (in O loodrecht op de hoofdas)  
 „met de lijn die  $P_1 P_2$  loodrecht middendoordeelt.” <sup>1)</sup>

We zagen dat een punt  $P_2$  uit een punt  $P_1$  eener  $I_2$  werd gevonden, door inversie van  $P_1$  uit O, gevolgd door spiegeling t. o. v. de hoofdas. Deze transformatie nu doet de lijn  $P_2 Q_1$  overgaan in den cirkel  $P_1 O Q_2$  en de lijn  $P_1 Q_2$  in den cirkel  $P_2 Q_1 O$ , dus het snijpunt R dier lijnen in het 2<sup>e</sup> snijpunt S der beide cirkels, m. a. w. S en R vormen ook een paar der  $I_2$ .

IV. „Elk paar overstaande hoekpunten van eene vierzijde „is steeds een paar van de door de beide andere paren bepaalde kwadratische involutie.”

Is het centrum der involutie bekend, dan is het punt  $C_2$ , dat een gegeven punt  $C_1$  aanvult tot een paar der  $I_2$  op de reeds genoemde wijze (§ 2) te bepalen.

Doch ook zonder het centrum te construeeren, kunnen we een punt  $C_1$  aanvullen tot een paar der  $I_2$ , die door twee puntenparen  $A_1, A_2$ ;  $B_1, B_2$  bepaald is.

Denken we ons n.l. de  $I_2$  door inversie uit een dubbelpunt omgezet in eene isobarische  $I_2$ , dan gelden voor drie paren de betrekkingen

$$a_1 + a_2 = 0, \quad b_1 + b_2 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0.$$

Voor een punt  $c'$ , dat harmonisch ligt met  $c_1$  t. o. v.  $a_1$  en  $a_2$ , is

$$c_1 c' = a_1^2,$$

voor een punt  $c''$ , dat harmonisch ligt met  $c_1$  t. o. v.  $b_1$  en  $b_2$ , geldt

$$c_1 c'' = b_1^2.$$

Zijn  $\gamma'$  en  $\gamma''$  nu nog bepaald door:

$$c' \gamma'' = b_1^2 \text{ en } c'' \gamma' = a_1^2$$

dan blijkt dat

$$c_1 : \gamma'' = a_1^2 : b_1^2 = \gamma' : c_1 \text{ of } c_1^2 = \gamma' \gamma''$$

dus ook  $c_2^2 = \gamma' \gamma''$ .

<sup>1)</sup> Eene constructie der dubbelpunten, zonder eerst het centraalpunt te bepalen, vindt men in de Wiskundige Opgaven. l. c. p. 71.



De punten  $\gamma'$  en  $\gamma''$  vormen dus een paar der  $I_2$ , die  $c_1$  en  $c_2$  tot dubbelpunten heeft, zijn dus harmonisch met  $c_1$  en  $c_2$ . Daar deze harmonische ligging bij terugkeer tot de oorspronkelijke figuur bewaard blijft, krijgen we nu de volgende constructie:

Bepaal  $C_1, C'$  harm. met  $A_1, A_2$ ;  $C', \Gamma''$  harm. met  $B_1, B_2$   
 $C_1, C''$  harm. met  $B_1, B_2$ ;  $C'', \Gamma'$  harm. met  $A_1, A_2$   
 en dan nog  $C_1, C_2$  harm. met  $\Gamma', \Gamma''$ ,  
 dan is  $C_2$  het punt, dat met  $C_1$  een paar vormt van de door  $A_1, A_2, B_1, B_2$  gegeven  $I_2$ .

In de constructie der dubbelpunten, als het centraalpunt gevonden is, (zie III), ligt ook de constructie opgesloten van het paar der  $I_2$ , dat een gegeven punt  $M$  tot midden heeft. Daartoe moeten de dubbelpunten  $A_1, A_2$  der  $I_2$  bekend zijn. Dan bestaat het bedoelde paar uit de dubbelpunten van eene tweede  $I_2$ , die  $M$  tot centraalpunt heeft en  $A_1, A_2$  als paar bevat.

De in III genoemde constructie van het centraalpunt gaat niet door als de beide paren  $P_1, P_2$ ;  $Q_1, Q_2$  collineair zijn. We kunnen dan twee gevallen onderscheiden, die beide eene andere oplossing toelaten.

De lijn, die de paren bevat, moet, volgens § 4, of hoofd- of bijas zijn.

Scheiden de puntenparen elkaar, dan is ze bijas. (Immers de puntenparen op de hoofdas scheiden elkaar niet. De punten van elk paar naderen tegelijk tot de dubbelpunten  $A_2$  of  $A_1$ .)

Daar de dubbelpunten met elk paar op een cirkel  $\mathfrak{A}$  liggen, zijn zij in dit geval de snijpunten der op  $P_1 P_2$  en  $Q_1 Q_2$  als middellijnen beschreven cirkels.

Scheiden de puntenparen elkaar niet, dan is hun drager de hoofdas. De dubbelpunten zijn dan de grenspunten van den bundel ( $\mathfrak{B}$ ) der cirkels op  $P_1 P_2$  en  $Q_1 Q_2$  als middellijnen. De constructie dezer grenspunten kan aldus worden uitgevoerd.

Een willekeurig punt van de machtlijn der beide cirkels  $\mathfrak{B}_P$  en  $\mathfrak{B}_Q$  wordt als middelpunt genomen van een cirkel, die  $\mathfrak{B}_P$  en  $\mathfrak{B}_Q$  loodrecht snijdt; deze snijdt dan op de hoofdas de grenspunten (of dubbelpunten der  $I_2$ ) in.



§ 6. Daar er slechts één stel waarden  $\lambda$  en  $\mu$  te vinden is, zoodanig, dat eene verg. van den vorm (10):

$(1 - \lambda) z^2 - 2(1 + \lambda) a z + (1 - \lambda) a^2 = 0$  en eene vergelijking  $(1 - \mu) z^2 - 2(1 + \mu) b z + (1 - \mu) b^2 = 0$ , welke eene tweede  $I_2$  voorstelt, eenzelfde stelsel wortels  $z_1$  en  $z_2$  bezitten, hebben twee kwadratische involuties dus slechts één paar gemeen.

Men vindt dit paar aldus: Bepaal de dubbelpunten  $A_1, A_2$  en  $B_1, B_2$  der beide  $I_2$ . Het gezochte paar is dan harmonisch zoowel met  $A_1, A_2$  als met  $B_1, B_2$ , bestaat dus uit de dubbelpunten van de  $I_2$ , waarvan  $A_1, A_2$  en  $B_1, B_2$  twee paren zijn.

Bepaalt men van eene  $I_2$  het paar  $C_1, C_2$ , dat met een gegeven paar  $B_1, B_2$  harmonisch ligt, dan vormen beide paren met de dubbelpunten  $A_1, A_2$  een merkwaardig puntenstelsel. De drie puntenparen zijn n.l. twee aan twee harmonisch en vormen een „metaharmonisch zestal”. Ze liggen paarsgewijze op een cirkel, terwijl de drie cirkels elkaar paarsgewijze rechthoekig snijden.

We zullen dit laatste even bewijzen. Elk paar van het metaharmonisch zestal is op te vatten als paar van eene involutie, waarvan een der andere paren de dubbelpunten vormt. Beschouwen we b.v.  $A_1, A_2$  als dubbelpunten, dan ligt het paar  $C_1, C_2$  op een cirkel door  $A_1, A_2$ , maar tevens op een cirkel die dezen rechthoekig snijdt (§ 4). Deze is echter dezelfde cirkel, als die, welke  $C_1$  en  $C_2$  met  $B_1$  en  $B_2$  vereenigt, want ook deze moet (daar  $B_1, B_2$  en  $C_1, C_2$  paren zijn van de  $I_2$  met  $A_1, A_2$  tot dubbelpunten) elken cirkel door  $A_1, A_2$ , dus ook den cirkel  $A_1 C_1 A_2 C_2$  rechthoekig snijden. Hetzelfde geldt voor de andere paren cirkels.

Het paar  $C_1, C_2$  is het gemeenschappelijk paar der beide  $I_2$ , die  $A_1, A_2$  en  $B_1, B_2$  tot dubbelpunten hebben, dus op bovengenoemde wijze te construeeren.

Zulk een metaharmonisch zestal wordt op den „complexen” bol gevormd door de toppen van een regelmatig achthoek, <sup>1)</sup> in het vlak door de toppen van een vierkant met het snijpunt der diagonalen en het punt in het oneindige. Hierin gaat

<sup>1)</sup> Verg. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Teubner 1884, blz. 55).



een metaharmonisch zestal  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  over door inversie uit één der punten.

De punten, aangewezen door de vergelijking (12)

$$z^2 - 2z_0 z + a^2 = 0,$$

dus een paar van de involutie met dubbelpunten  $z^2 - a^2 = 0$ , kunnen beschouwd worden als dubbelpunten eener  $I_2$  bepaald door:

$$z_1 z_2 - z_0 (z_1 + z_2) + a^2 = 0. \quad (36)$$

Het paar dat deze  $I_2$  gemeen heeft met de eerste, waarvoor  $z_1 z_2 = a^2$  is, vormt met de dubbelpunten der beide  $I_2$  een metaharmonisch zestal. Voor dat gemeenschappelijk paar geldt volgens (36)  $a^2 - z_0 (z_1 + z_2) + a^2 = 0$  dus  $z_1 + z_2 = 2a^2 : z_0$ .

Een metaharmonisch zestal kan dus worden voorgesteld door de drie vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} z^2 - a^2 &= 0 \\ z^2 - z_0 z + a^2 &= 0 \\ z^2 - \frac{2a^2}{z_0} z + a^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

In de laatste twee vergelijkingen hebben we eene harmonische groep met zwaartepunt  $\zeta = \frac{1}{2} \left( z_0 + \frac{a^2}{z_0} \right)$ .

De vergelijking dier groep zij:

$$z^4 - \sum (z)_1 z^3 + \sum (z)_2 z^2 - \sum (z)_3 z + (z)_4 = 0$$

dan is daarin dus:

$$\sum (z)_1 = 4\zeta$$

$$\begin{aligned} \sum (z)_2 &= z_1 z_2 + z_3 z_4 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) = \\ &= 2a^2 + 2z_0 \times \frac{2a^2}{z_0} = 6a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum (z)_3 &= z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_2 z_4 + z_2 z_3 z_4 = \\ &= (z_3 + z_1 + z_4 + z_2) a^2 = 4a^2 \zeta \end{aligned}$$

$$(z)_4 = z_1 z_2 z_3 z_4 = a^4.$$

Dit geeft voor de vergelijking van zulk eene groep:

$$z^4 - 4\zeta z^3 + 6a^2 z^2 - 4a^2 \zeta z + a^4 = 0. \quad (38)$$

## HOOFDSTUK II.

### Algemeene eigenschappen der involutie van den $n^{\text{den}}$ graad.

§ 1. In de inleiding zagen we dat eene  $I_n$  door twee  $n$ -puntige groepen bepaald is en door eene vergelijking van den vorm

$$F_n(z) = \lambda f_n(z). \quad (39)$$

Kennen we in plaats van het tweede  $n$ -tal,  $(n - 1)$  punten dier groep en verder nog een paar der  $I_n$  met de vectoren  $p_1$  en  $p_2$ , dan moeten we in:

$$F_n(z) = \lambda (z - z') f_{n-1}(z) \quad (40)$$

de grootheid  $z'$  trachten te bepalen.

Daar  $p_1$  en  $p_2$  ook aan vergelijking (40) moeten voldoen, gelden de betrekkingen:

$$\begin{aligned} F_n(p_1) &= \lambda (p_1 - z') f_{n-1}(p_1) \\ F_n(p_2) &= \lambda (p_2 - z') f_{n-1}(p_2) \end{aligned} \quad (41)$$

welke, na eliminatie van  $\lambda$  eene eerste-machtsvergelijking voor  $z'$  opleveren. Dus:

V. „Eene  $I_n$  is ook volkomen bepaald door eene volledige „groep,  $(n - 1)$  punten van eene tweede groep en twee „punten uit eene derde groep.”

Voor eene kubische involutie volgt hieruit, dat ze door eene groep van drie punten en twee paren bepaald is.

Vervangen we nu het  $(n - 1)$ tal door een  $(n - 2)$ tal en een puntenpaar met de vectoren  $q_1, q_2$ , dan verschijnen in de vergelijking der  $I_n$

$$F_n(z) = \lambda (z^2 + \mu z + \nu) f_{n-2}(z) \quad (42)$$

twee nader te bepalen grootheden  $\mu$  en  $\nu$ .

Aan (42) moet nu zoowel door de vectoren  $p_1, p_2$  als door  $q_1, q_2$  worden voldaan. Substitueeren we deze in (42), en



elimineeren uit de komende 4 vergelijkingen, twee aan twee genomen, de grootheid  $\lambda$ , dan krijgen we

$$\begin{aligned} F_n(p_1)(p_2^2 + \mu p_2 + \nu) f_{n-2}(p_2) = \\ = F_n(p_2)(p_1^2 + \mu p_1 + \nu) f_{n-2}(p_1) \end{aligned} \quad (43)$$

en eene dergelijke vergelijking voor  $q_1, q_2$ , welke twee vergelijkingen voldoende zijn om de beide onbekenden  $\mu$  en  $\nu$  ondubbelzinnig te bepalen.

Vervangen we het  $(n-2)$ tal nu weer door een  $(n-3)$ tal en een nieuw paar, dan blijkt door analoge redeneering, dat ook een  $n$ -tal, een  $(n-3)$ tal en 3 paren eene  $I_n$  bepalen. Eveneens een  $n$ -tal, een  $(n-4)$ tal en 4 paren.

Ten slotte blijkt in 't algemeen:

VI. „Eene  $I_n$  is volkomen bepaald door  $n$  punten uit eene „groep,  $k$  punten uit eene tweede groep en  $n-k$  tot verschillende groepen behorende paren.”

Voor  $k=2$  geeft dit in 't bijzonder:

VII. „Eene  $I_n$  is geheel bepaald door een  $n$ -tal en  $(n-1)$  „uit verschillende groepen genomen paren.” <sup>1)</sup>

Eene  $I_4$  is dus door een viertal en 3 paren bepaald.

Vervangen we nu ook het eerste  $n$ -tal door een  $(n-1)$ tal en een paar. In de vergelijking der  $I_n$ :

$$(z - \rho) \phi_{n-1}(z) = \lambda (z - \sigma) \psi_{n-1}(z) \quad (44)$$

moeten we dan de grootheden  $\rho$  en  $\sigma$  nader bepalen.

Zijn  $p_1, p_2; q_1, q_2$  de vectoren der twee gegeven paren, dan gelden de betrekkingen:

$$\begin{aligned} (p_k - \rho) \phi_{n-1}(p_k) &= \lambda (p_k - \sigma) \psi_{n-1}(p_k) \\ (q_k - \rho) \phi_{n-1}(q_k) &= \mu (q_k - \sigma) \psi_{n-1}(q_k) \end{aligned} \quad (45)$$

voor  $k=1$  en  $k=2$ .

Bij eliminatie van  $\lambda$  uit het eerste paar vergelijkingen, vindt men eene vergelijking van den vorm

$$a \rho \sigma + b \rho + c \sigma + d = 0.$$

Analoog levert eliminatie van  $\mu$  uit het tweede paar:

$$a' \rho \sigma + b' \rho + c' \sigma + d' = 0.$$

<sup>1)</sup> Men vergelijke: Dr. JAN DE VRIES, *Zur Theorie der Involutionen* (Monatshefte f. Math. u. Phys. III, S. 291).

Door eliminatie van  $\sigma$  ontstaat eene vergelijking die kwadratisch is in  $\rho$ .

We vinden dus voor  $\rho$  en  $\sigma$  in het algemeen twee verschillende stellen wortels, waardoor in (44) twee  $I_n$  worden bepaald.

VIII. „Door twee  $(n - 1)$ tallen en twee paren worden, in het algemeen, twee involuties van den  $n^{\text{den}}$  graad bepaald.

„Vier puntenparen behooren dus in het algemeen tot twee verschillende kubische involuties.”

Wanneer we de twee puntenparen  $p_1, p_2; q_1, q_2$  door één drietel  $p_1, p_2, p_3$  vervangen, wordt de  $I_n$  wederom ondubbeltinnig bepaald.

Immers dan gelden voor  $k = 1, 2, 3$  de vergelijkingen:

$$(p_k - \rho) \phi_{n-1}(p_k) = \lambda (p_k - \sigma) \psi_{n-1}(p_k), \quad (46)$$

en hieruit kunnen  $\rho, \lambda$  en  $\lambda \sigma$  lineair worden bepaald.

Geven we uit de beide eerste groepen telkens één punt minder, dan moet dit punt niet vervangen worden door een paar uit eene nieuwe groep, doch door het geven van een punt meer in de derde groep.

We zien dus:

IX. „Eene  $I_n$  is volkomen bepaald als men  $l$  punten uit eene groep,  $m$  punten eener tweede groep en  $(2n - l - m + 1)$  punten eener derde groep kent.”

Of ook: eene  $I_n$  is volkomen bepaald door drie groepen van respectievelijk  $n_1, n_2, n_3$  punten, als  $n_1 + n_2 + n_3 = 2n + 1$  is.

Willen we eene involutie door drie groepen van een gelijk aantal punten bepalen, b.v. elk van  $x$  punten, dan moet dus  $3x = 2n + 1$  zijn, dus  $x$  is oneven, stel  $x = 2r + 1$ ; dan is  $2n = 3x - 1 = 6r + 2$  en  $n = 3r + 1$ .

Als bijzonder geval van IX geldt dus:

„Eene involutie van den graad  $(3r + 1)$  is bepaald door drie  $(2r + 1)$ tallen.”

Zoo wordt b.v. door drie drietallen ééne  $I_4$  bepaald.

§ 2. Indien eene volledige groep van  $n$  punten eener  $I_n$  gegeven is, dan moeten, voor de bepaling der  $I_n$  door een



aantal onvolledige groepen, nog  $(n - 1)$  coëfficiënten van eene functie van den  $(n - 1)^{\text{en}}$  graad bepaald worden, welke functie,  $\phi_{n-1}(z)$ , de punten voorstelt, die een willekeurig aangenomen punt  $z'$  tot eene groep der  $I_n$  aanvullen.

Kent men nu verder nog eene gedeeltelijke groep van  $s$  punten  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , dan moeten deze aan eene vergelijking van den vorm

$$f_n(z) + \lambda(z - z')\phi_{n-1}(z) = 0 \quad (47)$$

voldoen. Men heeft dus  $s$  betrekkingen:

$$f_n(p_r) + \lambda(p_r - z')\phi_{n-1}(p_r) = 0 \text{ voor } r = 1, 2, \dots, s \quad (48)$$

Door eliminatie van  $\lambda$  uit de eerste dezer betrekkingen en telkens eene der overigen, ontstaan  $(s - 1)$  vergelijkingen, lineair in de  $(n - 1)$  onbekenden, van den vorm:

$$f_n(p_i)(p_i - z')\phi_{n-1}(p_i) = f_n(p_1)(p_1 - z')\phi_{n-1}(p_1) \quad (49)$$

voor  $i = 2, 3, \dots, s$ .

Zulk eene groep van  $s$  punten stelt ons dus in staat om  $(s - 1)$  coëfficiënten te bepalen.

Zoo zullen  $l$  gedeeltelijke groepen, die respectievelijk  $n_1, n_2, \dots, n_l$  punten bevatten, een aantal coëfficiënten bepalen, gelijk aan:

$$\sum_{i=1}^{l-1} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{l-1} n_i - l,$$

welk aantal gelijk moet zijn aan  $(n - 1)$ .

$$\text{Dus is: } \sum_{i=1}^{l-1} n_i = n + 1 - l. \quad (50)$$

Hieruit leiden we dus af:

X. Door een  $n$ -tal en  $l$  gedeeltelijke groepen, die achter-eenvolgens  $n_1, n_2, \dots, n_l$  punten bevatten, is eene  $I_n$  bepaald, wanneer voldaan is aan de betrekking

$$\sum_{i=1}^l n_i = n + 1 - 1.$$

Voor  $n_1 = n_2 = \dots = n_l = 2$  wordt

$$2l = n + 1 - 1 \text{ of } l = n - 1,$$

d. w. z. de  $l$  gedeeltelijke groepen worden dan  $(n - 1)$  paren en we vinden eigenschap VII terug.

§ 3. Denken we ons eene  $I_n$  gegeven door de vergelijking:

$$(x - a_n) f(x) + \lambda (x - b_n) g(x) = 0, \quad (51)$$

dus opgebouwd uit twee  $n$ -tallen  $a_1, a_2 \dots a_n$  en  $b_1, b_2 \dots b_n$ . Eene zekere waarde voor  $\lambda$ , b.v.  $\lambda = \beta : \alpha$  geeft eene bepaalde groep  $c_1, c_2 \dots c_n$ , die we door den vorm:  $(x - c_n) h(x)$  zullen aanduiden.

We kunnen dan schrijven:

$$\alpha (x - a_n) f(x) + \beta (x - b_n) g(x) \equiv (\alpha + \beta) (x - c_n) h(x) \quad (52)$$

of

$$\begin{aligned} (\alpha f(x) + \beta g(x))(x - c_n) + [\alpha (c_n - a_n) f(x) + \beta (c_n - b_n) g(x)] &\equiv \\ &\equiv (\alpha + \beta) (x - c_n) h(x). \end{aligned} \quad (53)$$

Stellen we nu

$$\begin{aligned} \alpha (c_n - a_n) f(x) + \beta (c_n - b_n) g(x) &\equiv \\ &\equiv (x - c_n) [\alpha (c_n - a_n) + \beta (c_n - b_n)] \phi(x) \end{aligned} \quad (54)$$

dan wil dit zeggen, dat de groep  $(x - c_n) \phi(x) = 0$  behoort tot de involutie  $f(x) + \mu g(x) = 0$ .

Door deze substitutie gaat vergelijking (53) over in:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + [\alpha (c_n - a_n) + \beta (c_n - b_n)] \phi(x) \equiv (\alpha + \beta) h(x) \quad (55)$$

Vermenigvuldiging van deze vergelijking met  $(x - b_n)$  en daarna vermindering met vergelijking (52), geeft, wanneer we nog  $\alpha (c_n - a_n) + \beta (c_n - b_n)$  door  $\gamma$  voorstellen:

$$\alpha (a_n - b_n) f(x) + \gamma (x - b_n) \phi(x) \equiv (\alpha + \beta) (c_n - b_n) h(x) \quad (56)$$

d. w. z. de groep  $(x - b_n) \phi(x) = 0$  behoort tot de involutie  $f(x) + \lambda h(x) = 0$ .

Indien we nog (55) met  $(x - a_n)$  vermenigvuldigen en met (52) verminderen, dan blijkt dat de groep

$(x - a_n) \phi(x) = 0$  behoort tot de involutie  $g(x) + \nu h(x) = 0$ .

Derhalve geldt de eigenschap:

$$\begin{aligned} \text{Zijn} \quad & \left. \begin{array}{l} a_1, a_2 \dots a_n \\ b_1, b_2 \dots b_n \\ c_1, c_2 \dots c_n \end{array} \right\} \text{ drie groepen eener } I_n, \text{ en} \\ & \left. \begin{array}{l} a_1, a_2 \dots a_{n-1} \\ b_1, b_2 \dots b_{n-1} \\ c_n, d_2 \dots d_{n-1} \end{array} \right\} \text{ drie groepen eener } I_{n-1}, \end{aligned}$$



dan behooren ook

$$\left. \begin{array}{l} a_1, a_2 \dots a_{n-1} \\ c_1, c_2 \dots c_{n-1} \\ b_n, d_2 \dots d_{n-1} \end{array} \right\} \text{ tot eene } I_{n-1}$$

en analoog

$$\left. \begin{array}{l} b_1, b_2 \dots b_{n-1} \\ c_1, c_2 \dots c_{n-1} \\ a_n, d_2 \dots d_{n-1} \end{array} \right\} \text{ tot eene } I_{n-1}.$$

We kunnen dit in woorden aldus weergeven:

XI. „Laat men uit iedere van drie groepen eener  $I_n$  een „punt weg, en vormt uit telkens twee der overgebleven groepen „drie involuties  $I_{n-1}$ , dan hebben deze  $I_{n-1}$  eene groep „van  $(n-2)$  punten gemeen. Deze groep wordt tot eene „volledige groep der betrokken  $I_{n-1}$  aangevuld door het punt „dat afgezonderd werd uit die groep der  $I_n$ , welke niet tot „deze  $I_{n-1}$  behoort.”

§ 4. We zullen deze stelling nog uitbreiden.

Zij eene  $I_n$  gegeven door de vergelijking:

$$f_k(x) f_{n-k}(x) + \lambda g_k(x) g_{n-k}(x) = 0 \quad (57)$$

en zij  $\lambda = \beta : \alpha$  de waarde voor  $\lambda$ , die eene groep  $h_n(x) = 0$  bepaalt, welke we eveneens door een produkt van 2 factoren voorstellen, dan is dus:

$$\alpha f_k(x) f_{n-k}(x) + \beta g_k(x) g_{n-k}(x) \equiv (\alpha + \beta) h_k(x) h_{n-k}(x). \quad (58)$$

De groepen  $f_k(x) = 0$  en  $h_k(x) = 0$  bepalen eene  $I_k$ ; de groep die een punt  $p$  daarin aanvult, worde voorgesteld door  $g_{k-1}(x)$ .

Dan kunnen we deze identiteit opschrijven:

$$\left. \begin{array}{l} f_k(x) \equiv \gamma h_k(x) + (1 - \gamma)(x - p) g_{k-1}(x) \\ \text{en analoog } g_k(x) \equiv \delta h_k(x) + (1 - \delta)(x - p) f_{k-1}(x) \end{array} \right\} \quad (59)$$

De laatste identiteit zegt, dat de groep van  $(k-1)$  punten, die hetzelfde punt  $p$  aanvult in de  $I_k$  welke door  $g_k$  en  $h_k$  bepaald is, door  $f_{k-1}(x)$  wordt aangewezen.

Substitueeren we (59) in (58). Dit geeft:

$$\alpha \gamma f_{n-k} h_k + \beta \delta g_{n-k} h_k + (x - p) [\alpha (1 - \gamma) g_{k-1} f_{n-k} + \beta (1 - \delta) f_{k-1} g_{n-k}] \equiv (\alpha + \beta) h_k(x) h_{n-k}(x). \quad (60)$$

Het karakter van identiteit van den vorm (60) eischt, dat het deel tusschen de vierkante haken den factor  $h_k(x)$  bevat. We kunnen dus schrijven:

$$\begin{aligned} \alpha(1-\gamma)f_{n-k}g_{k-1} + \beta(1-\delta)g_{n-k}f_{k-1} &\equiv \\ &\equiv (\alpha + \beta - \alpha\gamma - \beta\delta)h_k\phi_{n-k-1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Hierdoor gaat (60) over in:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma f_{n-k} + \beta\delta g_{n-k} + (\alpha + \beta - \alpha\gamma - \beta\delta)(x-p)\phi_{n-k-1} &\equiv \\ &\equiv (\alpha + \beta)h_{n-k}. \end{aligned} \quad (62)$$

Stellen we  $\alpha + \beta - \alpha\gamma - \beta\delta$  ter verkorting door  $\varepsilon$  voor, en elimineeren uit (62) en (58)  $g_{n-k}$  dan wordt gevonden

$$\begin{aligned} \alpha f_{n-k}(\gamma g_k - \delta f_k) + \varepsilon(x-p)\phi_{n-k-1}g_k &\equiv \\ &\equiv (\alpha + \beta)h_{n-k}(g_k - \delta h_k), \end{aligned} \quad (63)$$

of, in verband met (59) en na deeling door  $(x-p)$ :

$$\begin{aligned} \alpha f_{n-k} \{ \gamma(1-\delta)f_{k-1} - \delta(1-\gamma)g_{k-1} \} + \varepsilon\phi_{n-k-1}g_k &\equiv \\ &\equiv (\alpha + \beta)(1-\delta)h_{n-k}f_{k-1}. \end{aligned} \quad (64)$$

Stellen we  $(x-p) \{ \gamma(1-\delta)f_{k-1} - \delta(1-\gamma)g_{k-1} \}$ , hetgeen volgens (59) identiek gelijk is aan  $(\gamma g_k - \delta f_k)$ , identiek gelijk aan  $(x-p)(\gamma - \delta)h_{k-1}$ , dan is door  $h_{k-1}$  aangegeven de groep van  $(k-1)$  punten, die  $p$  aanvult tot eene groep der door  $g_k$  en  $f_k$  gevormde  $I_k$ . Tevens lezen we er uit, dat  $h_{k-1} = 0$  behoort tot  $f_{k-1} + \lambda g_{k-1} = 0$ .

De vorm (64) wordt nu:

$$\begin{aligned} \alpha f_{n-k}(\gamma - \delta)h_{k-1} + \varepsilon\phi_{n-k-1}g_k &\equiv \\ &\equiv (\alpha + \beta)(1-\delta)h_{n-k}f_{k-1}. \end{aligned} \quad (65)$$

Uit dit alles blijkt nu de eigenschap.

XII. „Bevat eene  $I_n$  de drie groepen  $\left\{ \begin{array}{l} f_k, f_{n-k} \\ g_k, g_{n-k} \\ h_k, h_{n-k} \end{array} \right.$  en men

„vormt uit een onderdeel van telkens twee dier groepen de „drie involuties

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k \\ h_k \\ (x-p)g_{k-1} \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} g_k \\ h_k \\ (x-p)f_{k-1} \end{array} \right. \quad \text{en} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_k \\ g_k \\ (x-p)h_{k-1} \end{array} \right.$$

„dan behooren

„  $g_{k-1}, f_{k-1}$  en  $h_{k-1}$  tot dezelfde  $I_{k-1}$ ,



„terwijl de drie  $I_{n-1}$ , bepaald door  $(f_{n-k} h_{k-1}, h_{n-k} f_{k-1})$ ,  
 „ $(g_{n-k} h_{k-1}, h_{n-k} g_{k-1})$  of  $(f_{n-k} g_{k-1}, g_{n-k} f_{k-1})$   
 „een  $(n-k-1)$ -puntige groep  $\phi_{n-k-1}$  gemeen hebben.  
 „Deze groep wordt tot eene volledige groep der betrokken  
 „ $I_{n-1}$  aangevuld door het  $k$ -tal uit die groep der  $I_n$ , welke  
 „niet tot vorming der  $I_{n-1}$  diende.”

Er bestaan dan dus drie  $I_{n-1}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{n-k} h_{k-1} \\ h_{n-k} f_{k-1} \\ g_k \phi_{n-k-1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} g_{n-k} f_{k-1} \\ f_{n-k} g_{k-1} \\ h_k \phi_{n-k-1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} h_{n-k} g_{k-1} \\ g_{n-k} h_{k-1} \\ f_k \phi_{n-k-1} \end{array} \right\}$$

In een bijzonder geval, voor  $k = n-1$ , verdwijnt  $\phi_{n-k-1}$ .

Hebben we dan de  $I_n$   $\left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \\ b_1, a_2, \dots, b_{n-1}, b_n \\ c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n \end{array} \right\}$  en vormen

de groepen

$$\left. \begin{array}{l} a_1, \dots, a_{n-1} \\ b_1, \dots, b_{n-1} \\ p \gamma_1 \dots \gamma_{n-2} \end{array} \right\} \text{ eene } I_{n-1} \text{ en } \left. \begin{array}{l} a_1, \dots, a_{n-1} \\ c_1, \dots, c_{n-1} \\ p \beta_1 \dots \beta_{n-2} \end{array} \right\} \text{ eene } I_{n-1}$$

dan vormen ook

$$\left. \begin{array}{l} b_n, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-2} \\ c_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-2} \\ a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \end{array} \right\} \text{ eene } I_{n-1}.$$

§ 5. De  $I_n$  voorgesteld door

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) + \lambda (z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n) = 0 \quad (66)$$

bevat voor  $\lambda = -1$  de groep:

$$(a_1 - b_1) z^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1}) z + (a_n - b_n) = 0. \quad (67)$$

De  $(n-1)$  wortels dezer vergelijking vormen dus met  $z = \infty$  eene groep der  $I_n$ ; we noemen ze *centraalpunten*, in overeenstemming met die benaming bij de  $I_2$ .

Kiezen we het nulpunt zóó, dat één der wortels van (67) nul wordt, dan moet in de nieuwe vergelijking  $a_n' = b_n'$  zijn; de  $I_n$  bevat dan eene groep:

$$z^n - 1 + c_2 z^{n-2} + c_3 z^{n-3} + \dots + c_{n-1} z = 0,$$

waarvan  $z = \infty$  en  $z = 0$  twee punten zijn. De  $I_n$  is dus voor te stellen door:

$$(z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n) + \mu (z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_{n-1} z) = 0. \quad (68)$$

Voor elke waarde  $\mu$ , d. i. voor elke groep is dus:

$$z_1 z_2 \dots z_n = d_n = \text{constant.}$$

XIII. „Kiest men één der  $(n - 1)$  centraalpunten van eene „ $I_n$  tot oorsprong der coördinaten, dan is het product der „wortels van elke groep der  $I_n$  constant.”

(Vergelijk Hoofdstuk I § 2, waar ook  $z = 0$  en  $z = \infty$  eene groep vormden der  $I_2$ ; daar gold  $z_1 z_2 = a^2$ .)

§ 6. De wortelpunten van de afgeleide der vergelijking  $F_n(z) = 0$  kunnen we de *brandpunten* noemen van de punten-groep, die door die vergelijking wordt aangeduid. Deze benaming herinnert aan de volgende, door Prof. VAN DEN BERG ontdekte eigenschap: <sup>1)</sup>

„De wortelpunten der afgeleide van eene vergelijking met „ $n$  verschillende wortels zijn de  $(n - 1)$  brandpunten van „eene kromme der  $(n - 1)^e$  klasse, welke de  $\frac{1}{2} n(n - 1)$  „zijden van den volledige  $n$  hoek der gegeven wortelpunten „in hare middens aanraakt.”

In overeenstemming met bovenstaande benaming, zullen we de  $I_{n-1}$ , welke bepaald wordt door de afgeleide der vergelijking eener gegeven  $I_n$ , de *focale involutie* dezer  $I_n$  noemen. Door eliminatie van  $\lambda$  tusschen de vergelijking:

$$\prod_1^n (z - p_k) = \lambda \prod_1^n (z - q_k) \quad (69)$$

eener  $I_n$  en die van hare focale  $I_{n-1}$

$$\sum^n \prod_1^{n-1} (z - p_k) = \lambda \sum^n \prod_1^{n-1} (z - q_k), \quad (70)$$

vinden we deze vergelijking voor de dubbelpunten der  $I_n$

$$\sum_1^n \frac{1}{z - p_k} = \sum_1^n \frac{1}{z - q_k} \quad (71)$$

<sup>1)</sup> Dr. J. F. VAN DEN BERG, *Nogmaals over afgeleide wortelpunten.* (Nieuw Arch. v. Wisk. deel XV blz. 140. Zie ook IX blz. 1 en XI blz. 153.)



Schijnbaar is de graad van deze vergelijking  $(2n - 1)$ ; indien we n.l. elk der beide sommen tot ééne breuk maken en dan kruislings vermenigvuldigen, wordt de vergelijking eene gelijkheid van twee polynomia van den graad  $(2n - 1)$ ; daar echter de coëfficiënt van  $z^{2n-1}$  in die beide polynomia gelijk is aan  $n$ , blijkt de vergelijking van den graad  $2(n - 1)$  te zijn.

XIV. „Eene  $I_n$  heeft  $2(n - 1)$  dubbelpunten”.

Door de substitutie

$$\frac{1}{z - p} = p', \quad \frac{1}{z - q} = q'$$

gaat vergelijking (71) over in:

$$\sum_1^n p' = \sum_1^n q' \quad (72)$$

Het eerste lid dezer vergelijking is het  $n$ -voud van den vector van het zwaartepunt der punten  $p'$ , en het tweede lid hetzelfde voor de punten  $q'$ . Deze groepen hebben dus het zwaartepunt gemeen, en daar  $\lambda$  geëlimineerd is, geldt dit voor alle groepen: zij vormen eene *isobarische*  $I_n$ .

Dus:

XV. „Door inversie uit elk van hare dubbelpunten gaat „eene  $I_n$  over in eene isobarische  $I_n$ ”.

En verder, als analogon van I:

XVI. „Twee willekeurige  $n$ -puntige groepen kunnen door „inversie uit  $2(n - 1)$ , in het algemeen verschillende, centra „in twee  $n$ -tallen met gemeenschappelijk zwaartepunt worden „omgezet.”

§ 7. Bezit eene  $I_n$  het  $n$ -voudige punt  $t$  en vervangen we de groep  $(q_k)$  in hare vergelijking door dat punt, dan gaat vergelijking (71) over in:

$$\sum_1^n \frac{1}{z - p_k} = \frac{n}{z - t} \quad (73)$$

welke vergelijking van den  $(n - 1)$ en graad is.

We noemen de  $(n - 1)$  wortelpunten van deze vergelijking, overeenkomstig eene bij rationale involuties gebruikelijke be-

naming de „harmonische centra van den  $(n - 1)$ en graad” der groep  $(p)$  ten opzichte van het punt  $t$  als pool.

Omgekeerd heet  $t$  „het harmonische centrum van den 1en graad” der groep  $(p)$  voor elk der  $(n - 1)$  wortelpunten als pool.<sup>1)</sup>

De wortelpunten van (73) zijn de dubbelpunten van de  $I_n$  voorgesteld door

$$\prod_1^n (z - p_k) = \lambda \prod_1^n (z - t)$$

of door

$$\prod_1^n (z - p_k) = \lambda (z - t)^n \quad (74)$$

De harmonische centra van den  $(n - 1)$ en graad voor de groep  $f_n(z) = 0$  naar de pool  $z = t$  zijn dus de  $(n - 1)$  dubbelpunten der  $I_n$

$$f_n(z) = \lambda (z - t)^n \quad (75)$$

Nemen we het zwaartepunt  $a_1$  der groep als pool  $t$ , dan wordt de vergelijking der  $I_n$ , wier dubbelpunten de harmonische centra vormen der groep ten opzichte van de pool  $a_1$ :

$$\begin{aligned} z^n - n a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} - \binom{n}{3} a_3 z^{n-3} \dots = \\ = \lambda (z - a_1)^n \end{aligned} \quad (76)$$

Voor  $\lambda = 1$  levert deze vergelijking:

$$(a_1^2 - a_2) z^{n-2} - \frac{n-2}{3} (a_1^3 - a_3) z^{n-3} + \dots = 0, \quad (77)$$

dat is dus eene groep der  $I_n$  (76), welke een dubbelpunt in het oneindige bezit, daar bij het ontbreken van de 2 termen van den hoogsten graad twee wortels der vergelijking oneindig zijn geworden.

XVII. „Het oneindig ver gelegen punt is dus één der „harmonische centra van den  $(n - 1)$ en graad van eene groep „ten opzichte van het zwaartepunt dier groep als pool”. En „weer omgekeerd:

„Het zwaartepunt eener groep is haar harmonisch centrum „van den eersten graad voor een oneindig ver gelegen pool.”

<sup>1)</sup> Verg. Dr. GUSTAV KOHN, *Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte* (Sitzber. d. k. Akad. d. Wissensch. II<sup>e</sup> Abth. 1883).



§ 8. De harmonische centra der groep  $f_n(z) = 0$  naar de pool  $z = 0$ , vinden we, volgens het bovenstaande, door eliminatie van  $\lambda$  uit de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} a_0 z^n - n a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a_k z^{n-k} \dots &= \lambda z^n \\ a_0 z^{n-1} - (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + \\ + (-1)^k \binom{n-1}{k} a_k z^{n-k-1} \dots &= \lambda z^{n-1} \end{aligned} \right\} (78)$$

Vermenigvuldigen wij daartoe de tweede vergelijking met  $z$  en trekken haar van de eerste af, dan ontstaat

$$\begin{aligned} a_1 z^{n-1} - (n-1) a_2 z^{n-2} \dots + \\ + (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} a_k z^{n-k} \dots = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

Door de substitutie  $z = \frac{1}{t}$

gaat (79) over in:

$$\begin{aligned} a_n t^{n-1} - (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \dots + \\ + (-1)^k \binom{n-1}{k} a_{n-k} t^{n-k-1} \dots = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

De wortelpunten van deze vergelijking zijn de brandpunten der groep:

$$a_n t^n - n a_{n-1} t^{n-1} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a_{n-k} t^{n-k} \dots = 0 \quad (81)$$

d.z. de inverse punten van de groep  $f_n(z) = 0$  uit het eerste lid van verg. (78 I).

We zien dus:

XVIII. „De inversen, ten opzichte van  $z = 0$ , der harmonische centra eener groep naar de pool  $z = 0$ , zijn de brandpunten der groep, welke door inversie der eerste groep, uit het punt  $z = 0$  als centrum, ontstaat.”

Voor de pool  $z = t = \infty$  vinden we nog:

„De harmonische centra van den  $(n-1)^{\text{en}}$  graad voor eene groep eener  $I_n$  naar de oneindig ver gelegen pool zijn de brandpunten der groep”.

### HOOFDSTUK III.

#### Kubische involutie met twee drievoudige punten.

§ 1. De vergelijking

$$(z - a)^3 = \lambda (z + a)^3 \quad (82)$$

bepaalt de groepen eener  $I_3$ , welke twee drievoudige punten  $z = -a$  en  $z = a$  bezit, die we door  $A_1$  en  $A_2$  aanduiden. Wij noemen ze de *hoofdpunten* der  $I_3$ .

Stellen we

$$e^{\frac{2}{3}\pi i} = \varepsilon,$$

dan geldt voor de vectoren van een drietal dezer  $I_3$ :

$$\frac{z_1 + a}{z_1 - a} = \varepsilon \frac{z_2 + a}{z_2 - a} = \varepsilon^2 \frac{z_3 + a}{z_3 - a}. \quad (83)$$

Immers uit (82) volgt:  $\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^3 = \frac{1}{\lambda}$ , welke vergelijking drie verschillende wortels heeft, die uit een van hen worden gevonden door vermenigvuldiging met elk der drie derdemachtswortels uit de eenheid, te weten 1,  $\varepsilon$  en  $\varepsilon^2$ .

Uit de eerste der drie vergelijkingen (83) leiden we af:

$$\frac{z_1 + a}{z_1 - a} = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) \frac{z_2 + a}{z_2 - a},$$

of

$$z_1 z_2 - a z_1 + a z_2 - a^2 = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) (z_1 z_2 - a z_2 + a z_1 - a^2),$$

$$z_2 \left\{ \frac{1}{2} (3 - i\sqrt{3}) z_1 + \frac{a}{2} (1 + i\sqrt{3}) \right\} = \frac{a}{2} (1 + i\sqrt{3}) z_1 + \frac{a^2}{2} (3 - i\sqrt{3}),$$

$$\text{waaruit} \quad z_2 = a \frac{z_1 + a \frac{3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}}{z_1 \frac{3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} + a} = a \frac{a\sqrt{3} + z_1 i}{z_1 \sqrt{3} + a i} \quad (84)$$



Deze vergelijking blijft waar, als we  $z_1$  en  $z_2$  door  $z_2$  en  $z_3$  of ook door  $z_3$  en  $z_1$  vervangen.

Tusschen elk tweetal punten bestaat volgens (84) eene verwantschap (1,1), dus eene projectiviteit, terwijl elk drietal der  $I_3$  blijkt invariant te zijn voor de cyclische projectiviteit, die door (84) is bepaald.

Is  $z_1 = a$  of  $-a$ , dan wordt ook  $z_2 = a$  of  $-a$ ; de hoofdpunten  $A_1$ ,  $A_2$  zijn dus de dubbelpunten dezer cyclische projectiviteit.

We noemen deze bijzondere  $I_3$  verder de *cyclische*  $I_3$ .

Uit vergelijking (83) volgt

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{z_1 + a}{z_1 - a} - 1 &= \varepsilon \left( 1 + \frac{z_2 + a}{z_2 - a} - 1 \right), \text{ of} \\ 1 + \frac{2a}{z_1 - a} &= \varepsilon \left( 1 + \frac{2a}{z_2 - a} \right) \text{ en evenzoo:} \\ 1 + \frac{2a}{z_2 - a} &= \varepsilon \left( 1 + \frac{2a}{z_3 - a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Hieruit door aftrekking en deeling door  $2a$

$$\frac{1}{z_1 - a} - \frac{1}{z_2 - a} = \varepsilon \left( \frac{1}{z_2 - a} - \frac{1}{z_3 - a} \right) \quad (86)$$

Door cyclische verwisseling der grootheden  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  ontstaan hieruit nog twee betrekkingen.

Door inversie met centrum  $z = a$ , dus door de substitutie

$$\frac{1}{z - a} = t,$$

wordt een punt  $Z$  door een punt  $T$  vervangen en gaat (86) over in:

$$t_1 - t_2 = \varepsilon (t_2 - t_3) \quad (87)$$

Hebben we een vector  $z_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  en een anderen  $z_2$ , die  $e^{i\alpha}$  maal zoo groot is, dan is

$$z_2 = r \{ \cos(\alpha + \theta) + i \sin(\alpha + \theta) \}$$

Deze 2<sup>e</sup> vector heeft dus denzelfden modulus als de eerste en maakt een hoek  $\alpha$  met den eersten.

Nu was  $\varepsilon = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ , dus lezen we in verg. (87), dat de vector

$(t_1 - t_2)$ , dat is de lijn  $T_1 T_2$ , met de lijn  $T_2 T_3$  een hoek van  $120^\circ$  of  $60^\circ$  maakt.

Zoo is ook de hoek tusschen  $T_2 T_3$  en  $T_3 T_1$  gelijk aan  $60^\circ$ .

Elk drietal der cyclische  $I_3$  wordt dus door inversie uit een van haar hoofdpunten omgezet in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek.

Uit verg. (83) volgt dat de hoeken, waaronder men de lijn  $A_1 A_2$  uit de punten eener groep ziet, eene reeks vormen met een verschil van  $120^\circ$ .

Uit verg. (83) volgt verder, dat  $Z_1, Z_2, Z_3$  op eenen cirkel liggen, ten opzichte waarvan  $A_1$  en  $A_2$  toegevoegde punten zijn, daar immers de afstanden tot die punten eene constante verhouding hebben. De cirkel is dus een  $\Re$ -cirkel (zie Hfdst. I § 4) van den bundel met grenspunten  $A_1, A_2$ .

Zijn  $C$  en  $D$  de snijpunten van den cirkel  $Z_1 Z_2 Z_3$  met de hoofdas, dan moeten bij inversie van dit drietal uit een der hoofdpunten, b.v. uit  $A_2$ , de punten  $A_1, A_2, C$  en  $D$  harmonisch blijven.  $A_2$  gaat over in het punt in het oneindige, de cirkel wordt omgezet in een cirkel en  $A_1$  wordt het midden van  $C$  en  $D$ , het middelpunt van den cirkel, dus ook het middelpunt van den gelijkzijdigen driehoek. De verschillende gelijkzijdige driehoeken, waarin de drietallen der cyclische  $I_3$  door inversie uit een hoofdpunt overgaan, hebben dus het *inverse beeld van het andere hoofdpunt tot gemeenschappelijk centrum*.

We kunnen dit aldus bevestigen.

Nemen we als drievoudige punten voor de  $I_3$  de punten  $z=0$  en  $z=c$ , dan wordt ze voorgesteld door

$$z^3 = \lambda (z - c)^3. \quad (88)$$

Dus is

$$\frac{z_3 - c}{z_3} = \varepsilon \frac{z_2 - c}{z_2} = \varepsilon^2 \frac{z_1 - c}{z_1} \quad (89)$$

of

$$1 - \frac{c}{z_2} = \varepsilon \left( 1 - \frac{c}{z_1} \right)$$

dus ook

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{z_2} = \varepsilon \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{z_1} \right). \quad (90)$$



Inverteeren we uit het punt  $z=0$ , substitueeren dus

$$z = \frac{1}{\zeta}, \quad c = \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{dan wordt} \quad & \gamma - \zeta_2 = \varepsilon (\gamma - \zeta_1) \\ \text{of:} \quad & \zeta_2 - \gamma = \varepsilon (\zeta_1 - \gamma) \} \\ \text{en zoo ook} \quad & \zeta_3 - \gamma = \varepsilon (\zeta_2 - \gamma) \} \end{aligned} \quad (91)$$

waaruit blijkt dat  $\gamma$  het centrum der gelijkzijdige driehoeken wordt.

XIX. „De *cyclische*  $I_3$  gaat door inversie uit elk van hare „hoofdpunten over in eene *isocentrische*  $I_3$ .”

§ 2. Uit verg. (86) volgt:

$$\frac{1}{z_1 - a} - \frac{\varepsilon}{z_3 - a} - \frac{1 + \varepsilon}{z_2 - a} = 0. \quad (92)$$

Daar echter  $\varepsilon$  voldoet aan de betrekking:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \quad (\text{immers } \varepsilon^3 = 1) \quad (93)$$

is voor (92) te schrijven:

$$\frac{1}{z_1 - a} + \frac{\varepsilon^2}{z_2 - a} + \frac{\varepsilon}{z_3 - a} = 0. \quad (94)$$

of:

$$\{ z_2 z_3 - a(z_2 + z_3) + a^2 \} + \varepsilon^2 \{ z_1 z_3 - a(z_1 + z_3) + a^2 \} + \varepsilon \{ z_1 z_2 - a(z_1 + z_2) + a^2 \} = 0.$$

In verband met (93) wordt dit

$$z_2 z_3 + \varepsilon^2 z_1 z_3 + \varepsilon z_1 z_2 = a \{ (1 + \varepsilon) z_2 + (\varepsilon + \varepsilon^2) z_1 + (1 + \varepsilon^2) z_3 \},$$

en nog eens (93) toepassende, vinden we

$$a = -(z_2 z_3 + \varepsilon z_1 z_2 + \varepsilon^2 z_1 z_3) : (z_1 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_2) \quad (95)$$

XX. „Door één drietel wordt een drievoudig punt eener „cyclische  $I_3$ , dus ook de cyclische  $I_3$  zelve, volkomen bepaald.”

De hier afgeleide formule geldt algemeen. Indien we n.l. uitgaan van de hoofdpunten  $a$  en  $b$ , dus van de vergelijking

$$(z - a)^3 = \lambda (z - b)^3$$

dan vinden wij uit verg. (83)

$$\frac{z_1 - b}{z_1 - a} = \varepsilon \frac{z_2 - b}{z_2 - a} = \varepsilon^2 \frac{z_3 - b}{z_3 - a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{waaruit} \\ \text{en dus ook} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + \frac{a-b}{z_1-a} = \varepsilon \left( 1 + \frac{a-b}{z_2-b} \right) \\ 1 + \frac{a-b}{z_2-a} = \varepsilon \left( 1 + \frac{a-b}{z_3-a} \right) \end{array} \quad (96)$$

Door aftrekking en deeling door  $(a-b)$  vinden wij verg. (86) terug, waaruit we de uitkomst (95) hebben afgeleid.

Wordt vergelijking (83) vervangen door

$$\frac{a-z_1}{a-z_2} = \varepsilon \frac{-a-z_1}{-a-z_2} \quad (97)$$

dan zien we eene verwisseling van  $a$  en  $z$  optreden.

Dus  $A_1$  en  $A_2$  zijn twee punten van een cyclische  $I_3$  die  $Z_1$  en  $Z_2$  tot hoofdpunten heeft. Daar nu (97) bij cyclische verwisseling van  $z_1, z_2, z_3$  ook blijft gelden, blijkt:

XXI. „De drie cyclische  $I_3$ , wier hoofdpunten achtereenvolgens liggen in de drie paren van eene groep eener cyclische  $I_3$ , bezitten in de hoofdpunten der oorspronkelijke  $I_3$  een gemeenschappelijk paar.”

§ 3. Uit (86) vindt men achtereenvolgens

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2-a} - \frac{1}{z_3-a} &= -e^{\frac{2}{3}\pi i} \left( \frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_3-a} \right), \\ \frac{z_3-z_2}{(z_2-a)(z_3-a)} &= -e^{\frac{2}{3}\pi i} \left( \frac{z_3-z_1}{(z_1-a)(z_3-a)} \right) \end{aligned}$$

en

$$D_1 \equiv \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} : \frac{a-z_2}{a-z_1} = -e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\varepsilon. \quad (98)$$

Hieruit door cyclische verwisseling:

$$\left. \begin{array}{l} \text{en} \\ D_2 \equiv \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} : \frac{a-z_3}{a-z_2} = -e^{-\frac{2}{3}\pi i} \\ D_3 \equiv \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} : \frac{a-z_1}{a-z_3} = -e^{-\frac{2}{3}\pi i} \end{array} \right\} \quad (98)$$

Van de complexe dubbelverhoudingen der punten  $A, Z_1, Z_2, Z_3$  zijn dus drie gelijk aan  $-\varepsilon$ , dus gelijk aan een der wortels van  $\delta^2 - \delta + 1 = 0$ .



Maken we de drie andere mogelijke dubbelverhoudingen op:

$$D_4 \equiv \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{a - z_1}{a - z_2},$$

$$D_5 \equiv \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} : \frac{a - z_2}{a - z_3},$$

$$D_6 \equiv \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} : \frac{a - z_3}{a - z_1},$$

dan blijken deze respectievelijk gelijk te zijn aan  $\frac{1}{D_1}$ ,  $\frac{1}{D_2}$  en  $\frac{1}{D_3}$ , dus onderling gelijk aan  $\gamma = -\frac{1}{\varepsilon}$ . Nu was  $\varepsilon$  een wortel van  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ , dus  $\frac{1}{\varepsilon}$  is een wortel van  $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} + 1 = 0$ .  $-\frac{1}{\varepsilon}$  of  $\gamma$  is dus een wortel van  $\gamma^2 - \gamma + 1 = 0$ .

De 6 complexe dubbelverhoudingen zijn dus drie aan drie gelijk aan een der beide wortels van  $\delta^2 - \delta + 1 = 0$ .

De vier punten A,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  vormen, wat men noemt een *equianharmonisch* viertal.

Door de substituties:

$$\begin{aligned} z_3 - z_2 &= b_1 e^{i\varphi}, & z_3 - z_1 &= b_2 e^{i\psi} \\ a - z_2 &= d_2 e^{i\alpha}, & a - z_1 &= d_1 e^{i\omega} \end{aligned}$$

gaat de eerste vergelijking van (98) over in:

$$b_1 d_1 : b_2 d_2 = e^{(\psi + \alpha - \varphi - \omega - \frac{1}{3}\pi)i}. \quad (99)$$

Hieruit volgt:

$$b_1 d_1 = b_2 d_2 = b_3 d_3 \text{ of:}$$

$$Z_2 Z_3 \times Z_1 A_2 = Z_3 Z_1 \times Z_2 A_2 = Z_1 Z_2 \times Z_3 A_2. \quad (100)$$

De vier punten  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $A_2$ , en natuurlijk evenzoo de punten  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $A_1$ , vormen dus een vierhoek, waarvan de produkten der overstaande zijden aan elkaar gelijk zijn (dus volgens Hoofdstuk I § 3 een harmonischen vierhoek), maar bovendien zijn deze produkten gelijk aan het produkt der diagonalen. Een dergelijke vierhoek is door NEUBERG een *isodynamische vierhoek* genoemd. Elk punt heet een *isodynamisch centrum* van den driehoek door de overige punten

gevormd. <sup>1)</sup> De beide hoofdpunten  $A_1$  en  $A_2$  zijn de *isodynamische centra* van driehoek  $Z_1 Z_2 Z_3$ .

Daar volgens (100)  $b_1 d_1 = b_2 d_2$  of  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{d_1}{d_2}$  is, is de verhouding der afstanden van de punten  $Z_3$  en  $A_2$  (en evenzoo van  $Z_3$  en  $A_1$ ) tot de punten  $Z_1$  en  $Z_2$  constant.  $Z_3$ ,  $A_2$  en  $A_1$  liggen dus op een cirkel van APOLLONIUS, t. o. waarvan  $Z_1$  en  $Z_2$  toegevoegde punten zijn. Maar hetzelfde geldt voor de andere zijden van den driehoek  $Z_1 Z_2 Z_3$ . *De isodynamische centra van een driehoek zijn dus de snijpunten der cirkels van APOLLONIUS.* Daar de genoemde betrekking tusschen de hoofdpunten en *elk* drietal bestaat, zien we dat *de cyclische  $I_3$  dus bestaat uit alle driehoeken, welke de isodynamische centra gemeen hebben.* <sup>2)</sup> Zij is dus (verg. XX) door een drietal volkomen bepaald.

De cirkels van APOLLONIUS der verschillende drietallen vormen den bundel  $\mathfrak{A}$  met basispunten  $A_1, A_2$ , wiens exemplaren alle cirkels  $\mathfrak{B}$  der drietallen loodrecht moeten snijden.

Het middelpunt van den cirkel van bundel  $\mathfrak{A}$ , die door  $Z_3$  gaat (cirkel  $\mathfrak{A}_3$ ), moet dus liggen op een raaklijn in  $Z_3$  aan cirkel  $Z_1 Z_2 Z_3$  en tevens op de lijn  $Z_1 Z_2$ . Zoo is ook de cirkel  $\mathfrak{A}_2$  te construeeren (die  $Z_2$  bevat) en we krijgen dus de volgende constructie voor de hoofdpunten  $A_1, A_2$  als de groep  $P_1, P_2, P_3$  gegeven is.

XXII. „Beschrijf den cirkel  $P_1 P_2 P_3$ . Trek daaraan in  $P_1$  en  $P_2$  de raaklijnen tot waar zij de lijnen  $P_2 P_3$ , en  $P_1 P_3$  in de punten  $S_1$  en  $S_2$  snijden. Beschrijf met  $S_1$  en  $S_2$  als middelpunten twee cirkels met stralen gelijk aan  $S_1 P_1$  en  $S_2 P_2$ , dan zijn de snijpunten dezer cirkels de hoofdpunten  $A_1$  en  $A_2$  van de cyclische  $I_3$ , die de groep  $P_1, P_2, P_3$  bevat.”

Om nu een punt  $Q_1$  aan te vullen tot eene groep dier  $I_3$ ,

<sup>1)</sup> J. NEUBERG. *Mémoire sur le tétraèdre.* (Memoires cour. par l'Acad. Royale de Belgique, 1886, tome XXXVII, p. 37).

Dr. JAN DE VRIES, *Isodynamische und metaharmonische Gebilde.* (Sitzber. Akad. Wien CI, S. 66—78).

<sup>2)</sup> Zij is dus identiek met de isodynamische involutie, welke door Dr. JAN DE VRIES is behandeld (Involutions harmoniques, l. c. p. 128).



beschrijven we cirkel  $A_1 A_2 Q_1$ , trekken in  $Q_1$  de raaklijn; deze snijdt de lijn  $A_1 A_2$  in het middelpunt van den cirkel  $Q_1 Q_2 Q_3$ . We construeeren nu eerst het inverse drietal, door  $Q_1$  uit  $A_1$  (of  $A_2$ ) op dezen cirkel te projecteeren en dat beeld tot een in dien cirkel beschreven gelijkzijdigen driehoek  $T_1 T_2 T_3$  te voltooien. De projecties van de twee nieuwe toppen uit  $A_1$  op den cirkel zijn dan, volgens het bovenstaande de gezochte punten  $Q_2$  en  $Q_3$ . (Om het inverse beeld van  $Q_1$  te vinden, hadden we eigenlijk nog  $T_1$  moeten spiegelen ten opzichte van de hoofdas, doch daar deze spiegeling ook weer zou moeten geschieden om dan uit  $T_2$  en  $T_3$  de punten  $Q_2$  en  $Q_3$  te vinden, blijft het resultaat hetzelfde.)

Indien één hoofdpunt  $A_1$  en een paar  $P_1, P_2$  der  $I_3$  gegeven zijn, dan kunnen we dat paar uit  $A_1$  als centrum, met een willekeurigen straal invertceeren in  $\Pi_1, \Pi_2$ . Op  $\Pi_1 \Pi_2$  als basis kunnen nu echter twee gelijkbeenige driehoeken met een tophoek van  $120^\circ$  geconstrueerd worden. Hunne toppen zijn dan elk het centrum van eene isocentrische  $I_3$  en tevens volgens § 1 van dit hoofdstuk het inverse beeld van het 2<sup>e</sup> hoofdpunt eener cyclische  $I_3$ , die  $A_1$  als hoofdpunt en  $P_1, P_2$  als paar bevat.

We zien dus:

XXIII. „Door één hoofdpunt en een paar der  $I_3$  worden „twee cyclische  $I_3$  bepaald”

§ 4. Vergelijking (82) is ook te schrijven in den vorm  $(1 - \lambda) z^3 - 3(1 + \lambda) a z^2 + 3 a^2 (1 - \lambda) z - a^3 (1 + \lambda) = 0$ . (101)

Door invoering van den vector  $z_0$  van het zwaartepunt der door  $\lambda$  bepaalde groep gaat ze over in:

$$z^3 - 3 z_0 z^2 + 3 a^2 z - a^3 z_0 = 0 \quad (102)$$

waarin dus  $z_0 = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$  is.

Vervangen we in (102)  $z$  door  $a^2 : t$ , dan is dus  $z t = a^2$ , d. w. z. de punten  $Z$  en  $T$  worden door de hoofdpunten harmonisch gescheiden. De punten  $T$  voldoen aan

$$t^3 - 3 \frac{a^2}{z_0} t^2 + 3 a^2 t - a^2 \frac{a^2}{z_0} = 0. \quad (103)$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat de punten T ook eene groep van de  $I_3$  vormen, met zwaartepunt  $t_0 = a^2 : z_0$ . Daar nu  $t_0 z_0 = a^2$  is, ligt het zwaartepunt van de groep T eveneens harmonisch met het zwaartepunt der oorspronkelijke groep ten opzichte van de hoofdpunten.

Tusschen de wortelpunten van (102) en van (103) bestaat dus een verband, dat onafhankelijk is van de keuze van het assenstelsel. Het linkerlid van (103) is dus de kubische covariant van het linkerlid van (102).

Uit verg. (83) volgt:

$$\left( \frac{z_2 + a}{z_2 - a} \right)^2 = \frac{z_1 + a}{z_1 - a} \cdot \frac{z_3 + a}{z_3 - a}. \quad (104)$$

Door de substitutie  $\frac{z + a}{z - a} = u$  vindt men hieruit

$$u_2^2 = u_1 u_3. \quad (105)$$

Tusschen de punten U en Z bestaat een verwantschap (1,1), wanneer dus 2 punten U samenvallen, is dit ook het geval met de overeenkomstige punten Z. Uit (105) lezen we nu af, dat  $Z_2$  een der dubbelpunten is van eene  $I_2$ , waarvan  $Z_1$  en  $Z_3$  een paar vormen. Haar tweede dubbelpunt is bepaald door het punt dat met  $-u_2$  overeenkomt, dus door

$$\frac{t_2 + a}{t_2 - a} = - \frac{z_2 + a}{z_2 - a}. \quad (106)$$

Een der dubbelverhoudingen, welke de beide dubbelpunten met de hoofdpunten bepalen, is dus gelijk aan  $-1$ ; het genoemde „tweede dubbelpunt” is dus het vierde harmonische punt tot het drietal  $Z_2, A_1, A_2$ , en bijgevolg identiek met het wortelpunt  $T_2$  uit (103).

Zoo zijn de punten  $Z_1$  en  $T_1$  dubbelpunten van eene  $I_2$ , die  $Z_2, Z_3$  als paar bevat, enz. Dus elk der wortelpunten van (103) is harmonisch gescheiden van een der wortelpunten van (102) ten opzichte van de beide andere punten der groep, en omgekeerd, eene bevestiging van het feit dat een kubische vorm de kubische covariant van zijn kubischen covariant is.

Elk der drietallen  $T_1, T_2, T_3$  en  $Z_1, Z_2, Z_3$  vormt met elk punt van het tweede drietal een harmonischen vierhoek.

Zoo zijn in vierhoek  $Z_1 Z_2 T_1 Z_3$  de afstanden van de diago-



naal  $Z_1 T_1$  tot de zijden  $Z_1 Z_2$  en  $Z_1 Z_3$  evenredig met die zijden.

De afstanden van het snijpunt der lijnen  $Z_k T_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) tot de zijden van  $\Delta Z_1 Z_2 Z_3$  zijn dus evenredig met die zijden, dus evenredig met die zijden, en dat snijpunt  $L$  is dus het *punt van LEMOINE* voor den driehoek  $Z_1 Z_2 Z_3$ . Maar om geheel analoge reden is het tevens het *punt van LEMOINE* voor  $\Delta T_1 T_2 T_3$ .

De punten  $A_1$  en  $A_2$ , de isodynamische centra van  $\Delta Z_1 Z_2 Z_3$  en tevens van  $\Delta T_1 T_2 T_3$ , zijn de snijpunten der cirkels van APOLLONIUS, maar tevens de dubbelpunten van eene  $I_2$ , waar- $T_1, Z_1; T_2, Z_2; T_3, Z_3$  paren vormen.

Daar deze paren alle op eenzelfde  $\mathfrak{B}$ -cirkel liggen, is het snijpunt  $L$  hunner verbindingslijnen het in (33) bedoelde punt  $L$  van de hoofdas  $A_1 A_2$ . Hierop ligt ook het middelpunt  $M$  van den  $\mathfrak{B}$ -cirkel. Daar volgens (33)  $ml = a^2$  is, zien we hier de eigenschap bevestigd <sup>1)</sup>, dat de isodynamische centra ( $A_1, A_2$ ) van een driehoek ( $Z_1 Z_2 Z_3$  of  $T_1 T_2 T_3$ ) met het symmedianaanpunt  $L$  en het middelpunt  $M$  van den omgeschreven cirkel collineair en tevens harmonisch liggen.

Daar de verbindingslijnen van alle concyclische paren der  $I_2$ , welke  $A_1$  en  $A_2$  tot dubbelpunten heeft, door één punt  $L$  der hoofdas gaan, geldt verder nog:

XXIV. „Alle concyclische drietallen der cyclische  $I_3$  hebben „het *punt van LEMOINE* gemeen.”

§ 5. De zes punten  $Z_k, T_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) zijn de wortelpunten van de vergelijking

$$(z^3 - 3z_0 z^2 + 3a^2 z - a^2 z_0)(z^3 - 3t_0 z^2 + 3a^2 z - a^2 t_0) = 0 \quad (107)$$

welke kan herleid worden tot

$$z^6 - 3(t_0 + z_0)z^5 + (6a^2 + 9t_0 z_0)z^4 - 10a^2(t_0 + z_0)z^3 + (6a^2 z_0 t_0 + 9a^4)z^2 - 3a^4(t_0 + z_0)z + a^4 z_0 t_0 = 0. \quad (108)$$

Door de substituties

$$z + \frac{a^2}{z} = 2v, \quad t_0 + z_0 = 2v_0, \quad (109)$$

waaruit volgt:

$$z^2 + \frac{a^4}{z^2} = 4v^2 - 2a^2 \text{ en } z^3 + \frac{a^6}{z^3} = 8v^3 - 6a^2 v$$

<sup>1)</sup> J. NEUBERG l. c. p. 40.

en met behulp van  $t_0 z_0 = a^2$  gaat verg. (108) na deeling door  $z^3$ , over in

$$v^3 - 3 v_0 v^2 + 3 a^2 v - a^2 v_0 = 0. \quad (110)$$

Uit  $z = \frac{a^2}{t}$  en dus  $t = \frac{a^2}{z}$  met  $z + \frac{a^2}{z} = 2 v$ , volgt, dat  $v_k$  de vectoren zijn van de middens der lijnen  $Z_k T_k$ , terwijl  $V_0$  volgens (109) het midden is van de zwaartepunten der beide drietallen, maar tevens volgens (110) het zwaartepunt van de nieuwe groep  $V_k$ . Dus:

XXV. „De middens der gemeenschappelijke symmedianen van twee covariante driehoeken der cyclische  $I_3$  vormen zelf ook een drietal der  $I_3$ .”

Zijn  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  en  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  twee, in denzelfden zin doorloopen drietallen der isocentrische  $I_3$ , die door inversie der cyclische  $I_3$  uit  $A_1$  als centrum is ontstaan, dan vormen de middens  $\Pi_k$  van  $\Gamma_k \Delta_k$  wegens de symmetrie der figuur, ook een gelijkzijdigen driehoek van de nieuwe  $I_3$ . Daar de punten  $\Pi_k$  ten opzichte van  $\Gamma_k$  en  $\Delta_k$  harmonisch zijn toegevoegd aan het punt in het oneindige, vinden we door eene inversie de eigenschap:

XXVI. „Worden de punten van een drietal der cyclische  $I_3$ , in bepaalden zin rondgaande, gekoppeld aan de punten van een ander drietal, dan wordt elk der hoofdpunten door de drie paren harmonisch gescheiden van de punten van een derde drietal der  $I_3$ .”

Daar we de punten van 2 drietallen, in eene bepaalde richting rondgaande, op drie wijzen kunnen paren, en dan telkens met *elk* der hoofdpunten een 4<sup>e</sup> harmonisch punt vinden, kunnen we op deze wijze uit twee gegeven drietallen, zes nieuwe groepen afleiden.

§ 6. De afgeleide der vergelijking (102):

$$z^3 - 3 z_0 z^2 + 3 a^2 z - a^2 z_0 = 0, \quad (102)$$

dat is:

$$z^2 - 2 z_0 z + a^2 = 0 \quad (111)$$

geeft ons voor elke waarde van  $z_0$  de brandpunten der groep,



die bij  $z_0$  behoort. Zij stelt eene kwadratische involutie voor, die de hoofdpunten  $A_1 A_2$  der  $I_3$  tot dubbelpunten heeft.

Hieruit volgt dan:

XXVII. „De brandpunten van STEINER van een driehoek „zijn harmonisch en concyclisch met de isodynamische centra „van dien driehoek”.

Immers die brandpunten vormen een paar der door (111) aangewezen  $I_2$ , welke de isodynamische centra tot dubbelpunten heeft.

De brandpunten van het met (102) covariante drietal der  $I_3$ , dat door  $z_0' = a^2 : z_0$  bepaald wordt, worden volgens (111) aangewezen door:

$$z^2 - 2 \frac{a^2}{z_0} z + a^2 = 0. \quad (112)$$

Nu bepalen (111) en (112) met de vergelijking

$$z^2 - a^2 = 0$$

volgens (37) een metaharmonisch zestal. Dus:

XXVIII. „De brandpunten van twee covariante drietallen „der cyclische  $I_3$  vormen met de hoofdpunten een metaharmonisch zestal”.

Daar uit (111) blijkt, dat het midden ( $z_0$ ) der brandpunten van eene groep der  $I_3$  tevens het zwaartepunt van die groep is, kunnen we die brandpunten construeeren als paar der  $I_2$  met dubbelpunten  $A_1 A_2$ , waarvan het midden bekend is. Ze zijn dus (vergel. Hfdst. I § 5) de dubbelpunten van eene  $I_2$ , waarvan de isodynamische centra  $A_1, A_2$  der groep een paar vormen en het zwaartepunt  $z_0$  het centraalpunt is.

§ 7. De brandpunten van een driehoek kunnen we, zonder van de isodynamische centra gebruik te maken, ook aldus vinden:

De brandpunten ( $F_1, F_2$ ) van de groep:

$$z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3 = 0 \quad (113)$$

worden bepaald door:

$$z^2 - 2 a_1 z + a_2 = 0. \quad (114)$$

Voor hen gelden dus de betrekkingen:

$$f_1 + f_2 = 2 a_1, f_1 f_2 = a_2 = \frac{1}{3} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) \quad (115)$$

Leggen we den oorsprong in het punt  $z_3$ , dan wordt

$$f_1 + f_2 = 2 a_1 = 2 z_0. \quad f_1 f_2 = \frac{1}{3} z_1 z_2 \quad (116)$$

De brandpunten  $F_1, F_2$  vormen dus ook een paar der  $I_2$  met dubbelpunten  $z = \pm \sqrt{\frac{1}{3} z_1 z_2}$ . Zij kunnen dan weer met behulp van hun midden, het zwaartepunt van den driehoek, worden gevonden.

Uit (116) volgt:

$$3 f_1 f_2 = z_1 z_2$$

of 
$$3 \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 e^{i(\psi_1 + \psi_2)} \quad (117)$$

Indien we nu nog de bissectrix van hoek  $Z_1 Z_2 Z_3$  als X-as aannemen, waardoor dus  $\psi_1 = -\psi_2$ , dan wordt het 2<sup>e</sup> lid van (117) gelijk aan  $r_1 r_2$ , dus reëel. Het eerste lid is dan dus ook reëel, waaruit volgt:  $\phi_1 + \phi_2 = 0$  of  $2\pi$ .

XXIX. „De rechten, uit een hoekpunt van een driehoek „getrokken naar de brandpunten van STEINER, zijn *isogonaal* „*verwant*”.

Uit de vergelijking (82) der  $I_3$  volgt:

$$\lambda = \frac{(z - a)^3}{(z + a)^3}$$

en uit de substituties (25) blijkt dus:

$$|\lambda| = \frac{|(z - a)^3|}{|(z + a)^3|} = \frac{r^3}{s^3} \quad (118)$$

Nu is voor alle groepen die op eenzelfde  $\mathfrak{B}$ -cirkel liggen,  $s = c r$ , dus  $r:s$  constant en  $|\lambda| = c^{-3}$ .

Voor de brandpunten dier groepen geldt:

$$(z - a)^2 = \lambda (z + a)^2 \quad (119)$$

Eliminatie van  $\lambda$  uit (82) en (119) levert dan:

$$s^2 = c^3 r^2 \quad (120)$$

XXX. „De brandpunten van alle drietallen van eenzelfde „ $\mathfrak{B}$ -cirkel  $s = c r$ , liggen op den cirkel  $s = c^{3/2} r$ , de zwaarte- „punten liggen op den cirkel  $s = c^3 r$ , terwijl de middens „( $V_k$ ) der paren ( $Z_k T_k$ ) van twee covariante drietallen op den „cirkel  $s = c^2 r$  gevonden worden”.



Immers voor de zwaartepunten geldt (zie verg. (101) en (102))

$$z_0 = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} a \text{ of } z_0 - a = \lambda (z_0 + a)$$

dus  $s = c^3 r$ .

En daar de punten  $Z_k, T_k$ , volgens § 4 van dit hoofdstuk, paren zijn op eenzelfde  $\mathfrak{B}$ -cirkel, van eene  $I_2$  die  $A_1, A_2$  tot dubbelpunten heeft, liggen volgens II de middens  $V_k$  op den cirkel  $s = c^2 r$ .

Deze cirkel is de in Hoofdstuk I, § 4 genoemde cirkel  $\mathfrak{M}$ , die het middelpunt van den  $\mathfrak{B}$ -cirkel  $s = cr$  en het gemeenschappelijke LEMOINE punt  $L$  van de driehoeken  $Z_1 Z_2 Z_3$  en  $T_1 T_2 T_3$  als tegenpunten bevat. Hij is dus in verband met XXIV de gemeenschappelijke cirkel van BROCARD voor alle in cirkel  $\mathfrak{B}$  beschreven driehoeken der  $I_3$ .

§ 8. Wanneer we willen weten hoeveel paren der cyclische  $I_3$  op eene willekeurige rechte liggen, en daarbij bedenken, dat dit aantal, indien het eindig is, voor *elke* rechte van het vlak hetzelfde zal zijn, dan kunnen we voor het gemak van het onderzoek wel eene rechte door een hoofdpunt beschouwen. Indien we nu de  $I_3$  door inversie uit het andere hoofdpunt (b.v.  $A_1$ ) omzetten in eene isocentrische  $I_3$ , dan gaat de rechte door  $A_2$  daarbij over in een cirkel  $\Gamma_1$  door het centrum van inversie  $A_1$  en door het inverse beeld van  $A_2$ , d. i. het centrum der nieuwe  $I_3$ . Laten we de punten van deze  $I_3 \pm 120^\circ$  om haar centrum wentelen, dan komt elk punt op de plaats van een ander punt van zijne groep. De cirkel  $\Gamma_1$  neemt daarbij een stand  $\Gamma_2$  aan, die behalve het centrum als draaipunt, nog slechts één punt met  $\Gamma_1$  gemeen heeft. Dit punt  $z_2$  is dus het eenige punt van den cirkel dat in den nieuwen stand de plaats inneemt van een punt zijner groep (waarmee het dus een „paar” vormde) in den ouden stand. Wentelen we dit punt  $z_2$   $120^\circ$  in tegengestelde richting, dan vinden we op  $\Gamma_1$  een punt  $z_1$ , dat nu dus met  $z_2$  een paar der  $I_3$  vormt, en wel het eenige paar dat  $\Gamma_1$  bevat.

In de cyclische  $I_3$  vinden we dus op eene willekeurige rechte lijn slechts één paar. De bijas maakt hierop eene uit-

zondering en draagt, als oneindig groote cirkel van den bundel  $\mathfrak{B}$ , oneindig vele drietallen, dus ook oneindig vele paren.

Een cirkel door één der hoofdpunten, zal bij inversie uit het andere hoofdpunt overgaan in een cirkel door het centrum van de isocentrische  $I_3$ , dus juist als het geval was met de rechte lijn. De cirkel gaat nu echter niet door het centrum van inversie. Daar nu cirkel  $\Gamma_1$  slechts één paar der isocentrische  $I_3$  bevatte, bevat dus ook een cirkel door een der hoofdpunten slechts één paar der cyclische  $I_3$ .

§ 9. Nemen we  $z = a$  en  $z = b$  als hoofdpunten der cyclische  $I_3$  aan, dan is hare vergelijking:

$$(z - a)^3 = \lambda (z - b)^3 \quad (121)$$

of

$$z^3 - 3 \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda} z^2 + 3 \frac{a^2 - \lambda b^2}{1 - \lambda} z - \frac{a^3 - \lambda b^3}{1 - \lambda} = 0.$$

Hiervoor is te schrijven:

$$\begin{aligned} z^3 - 3 \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda} z^2 + 3 \frac{a^2 - \lambda ab + b(a - \lambda b) + \lambda ab - ab}{1 - \lambda} z + \\ - \left( \frac{a^2(a - \lambda b) + b^2(a - \lambda b) + \lambda a^2 b - ab^2}{1 - \lambda} + \right. \\ \left. + \frac{a^2 b - \lambda ab^2 - a^2 b + \lambda ab^2}{1 - \lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Door de substitutie  $\frac{a - \lambda b}{1 - \lambda} = z_0$ , gaat dit over in:

$$z^3 - 3 z_0 z^2 + 3 [(a + b) z_0 - ab] z - [(a^2 + ab + b^2) z_0 + ab(a + b)] = 0. \quad (122)$$

Is de vergelijking der  $I_3$  in dezen vorm geschreven, dan zijn dus  $a$  en  $b$  de isodynamische centra.

Om nu de isodynamische centra van de groep:

$$c_0 z^3 - 3 c_1 z^2 + 3 c_2 z - c_3 = 0 \quad (123)$$

te vinden, stellen we de coëfficiënten uit (122) evenredig aan die uit (123) en drukken  $z_0$ ,  $a$  en  $b$  uit in de grootheden  $c$ .

We krijgen dus:

$$1) \quad \frac{c_1}{c_0} = z_0$$



$$2) \quad \frac{c_2}{c_0} = (a + b) z_0 - ab$$

$$3) \quad \frac{c_3}{c_0} = (a + b)^2 z_0 - ab z_0 - ab(a + b).$$

Na eenige herleiding vindt men hieruit:

$$(a + b) = \frac{c_0 c_3 - c_1 c_2}{c_0 c_2 - c_1^2}, \quad ab = \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_0 c_2 - c_1^2}.$$

De vergelijking die de hierdoor bepaalde waarden van  $a$  en  $b$  tot wortels heeft, dus

$$(c_0 c_2 - c_1^2) z^2 - (c_0 c_3 - c_1 c_2) z + (c_1 c_3 - c_2^2) = 0, \quad (124)$$

stelt nu de isodynamische centra voor van de groep (123).

Het linkerlid van vergelijking (124) is de *covariant van HESSE* van het linkerlid van (123).

Hieruit volgt tevens:

XXXI. „De wortelpunten van de Hessiana van eenen kubischen vorm zijn de snijpunten van de cirkels van APOLLONIUS.” <sup>1)</sup>

Voor  $c_2 = c_3 = 0$  heeft de groep (123) een dubbelpunt in  $z = 0$ , en wordt hare vergelijking:

$$z^2 (c_0 z - 3 c_1) = 0. \quad (125)$$

Verg. (124) gaat in dat geval over in:

$$z^2 = 0. \quad (126)$$

XXXII. „Bezit dus eene groep een dubbelpunt, dan vallen „de isodynamische centra ook in dat punt samen.”.

Uit het voorgaande besluiten we nog:

XXXIII. „Ten opzichte van elk drietal eener cyclische  $I_3$  „als grondvorm  $f(z) = 0$ , vormen de hoofdpunten  $A_1$  en  $A_2$  de „wortelpunten van den overeenkomstigen covariant van HESSE. „Elk drietal is equianharmonisch met elk der punten  $A_1, A_2$ .”

En dus:

XXXIV. „Alle kubische vormen, die de drietallen eener „cyclische  $I_3$  voorstellen, hebben een gemeenschappelijken kwadratischen covariant, met de hoofdpunten als wortelpunten.”

<sup>1)</sup> Vergelijk BELTRAMI. *Ricerche sulla geometria della forme binarie cubiche* (Acad. Bologna Ser. II. IX, 1870).

JAN DE VRIES. *Involutions cubiques dans le plan complexe*. (Rendiconti di Palermo. V 1891, p. 289—300).

## HOOFDSTUK IV.

### Kubische involutie met één drievoudig punt.

§ 1. De vergelijking

$$a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3 = \lambda (z - p)^3 \quad (127)$$

stelt eene  $I_3$  voor met  $z = p$  als drievoudig punt.

Hare focale  $I_2$ :

$$a_0 z^2 - 2 a_1 z + a_2 = \lambda (z - p)^2 \quad (128)$$

heeft  $z = p$  tot dubbelpunt.

Zij  $z = \alpha$  haar tweede dubbelpunt, dan kunnen we de eerste groep uit (128) vervangen door de groep

$$(z - \alpha)^2 = 0 \text{ of } z^2 - 2 \alpha z + \alpha^2 = 0.$$

Door dus in (127) ook  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \alpha$  en  $a_2 = \alpha^2$  te substitueeren, gaat deze over in

$$z^3 - 3 \alpha z^2 + 3 \alpha^2 z - \alpha^3 + \alpha^3 - a_3 = \lambda (z - p)^3$$

of, als we  $\alpha^3 - a_3 = -\beta^3$  stellen, in:

$$(z - \alpha)^3 - \beta^3 = \lambda (z - p)^3. \quad (129)$$

Voor  $\lambda = 0$ , krijgen we de groep:

$$(z - \alpha)^3 = \beta^3$$

$$z = \alpha + \beta e^{\frac{2}{3} \pi i k} = \alpha + \beta \varepsilon^k, \quad (k = 0, 1, 2). \quad (130)$$

Deze groep bestaat dus uit de toppen van een gelijkzijdigen driehoek, met middelpunt  $z = \alpha$ , waaraan we den naam „metacentrum” kunnen geven.

Bij eene  $I_3$  zonder drievoudige punten zal elk der beide dubbelpunten der focale  $I_2$  een middelpunt van eene symmetrische groep der  $I_3$ , een metacentrum zijn (verg. Hoofdstuk V § 1). Bij de thans beschouwde  $I_3$  wordt de tweede gelijkzijdige driehoek door het punt  $z = p$  vervangen, terwijl bij de



cyclische  $I_3$  de beide driehoeken in de hoofdpunten samengetrokken zijn.

Vergelijking (129) is te schrijven als:

$$(1 - \lambda)z^3 - 3(\alpha - p\lambda)z^2 + 3(\alpha^2 - p^2\lambda)z - (\alpha^3 - p^3\lambda) - \beta^3 = 0.$$

De substitutie  $z_0 = \frac{\alpha - p\lambda}{1 - \lambda}$  voor het zwaartepunt der door  $\lambda$  bepaalde groep, en de schrijfwijze:  $\alpha^3 + \beta^3 = \alpha\gamma^2$ , verder nog de keuze van het drievoudig punt  $z = p$ , tot oorsprong ( $z = p = 0$ ), doen de verg. overgaan in:

$$z^3 - 3z_0z^2 + 3\alpha z_0z - \gamma^2z_0 = 0. \quad (131)$$

De dubbelpunten der  $I_3$  vinden we door eliminatie van  $z_0$  uit deze vergelijking en hare afgeleide vergelijking, d. i. die van de focale  $I_2$ :

$$z^2 - 2z_0z + \alpha z_0 = 0. \quad (132)$$

Deze gebeurt het eenvoudigste, door (132) met  $z$  te vermenigvuldigen en (131) met dit produkt te verminderen.

We krijgen dan voor de dubbelpunten der  $I_3$ :

$$z^2 - 2\alpha z + \gamma^2 = 0 \quad (133)$$

Het metacentrum  $\alpha$  is dus juist het midden der dubbelpunten.

De isodynamische centra van het door  $z_0$  bepaalde drietal der  $I_3$  (131) worden, door toepassing van (124), aangewezen door:

$$(\alpha z_0 - z_0^2)z^2 - (\gamma^2 z_0 - \alpha z_0^2)z + (\gamma^2 z_0^2 - \alpha^2 z_0^2) = 0$$

of, na deeling door  $z_0$ , door

$$(z_0 - \alpha)z^2 - (\alpha z_0 - \gamma^2)z + (\alpha^2 - \gamma^2)z_0 = 0. \quad (134)$$

Vervangen we in (131)  $z$  door  $z_0$ , dan beschouwen we dus de punten, die met het zwaartepunt hunner groep samen vallen. Zij zijn dus elk het midden van de door hen zelf (als zwaartepunt  $z_0$ ) bepaalde groep.

Deze drie punten worden dus bepaald door de vergelijking:

$$2z_0^3 - 3\alpha z_0^2 + \gamma^2 z_0 = 0. \quad (135)$$

De wortel  $z_0 = 0$ , bepaalt het drievoudige punt, zooals uit (131) blijkt. Het midden der beide andere wortelpunten,

n.l.  $z_m = \frac{3}{4}\alpha$  ligt op de lijn, die het drievoudig punt ( $z = p = 0$ )

met het metacentrum ( $z = \alpha$ ) verbindt.

§ 2. Door inversie uit het drievoudige punt  $z = 0$ , gaat de  $I_3$

$$a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3 = \lambda z^3 \quad (136)$$

over in

$$a_3 t^3 - 3 a_2 t^2 + 3 a_1 t - a_0 = -\lambda = \mu. \quad (137)$$

Hare focale  $I_2$  wordt vervangen door ééne enkele groep, n.l.

$$a_3 t^2 - 2 a_2 t + a_1 = 0. \quad (138)$$

Daar deze vergelijking geen veranderlijke  $\mu$  meer bevat, stelt zij dus tevens de dubbelpunten van de  $I_3$  (137) voor. Het zwaartepunt is voor elke groep dezer  $I_3$  aangewezen door  $a_2 : a_3$ , dus onafhankelijk van de waarde  $\mu$ , die de groep bepaalt. We zien dus:

XXV. „Alle groepen van deze bijzondere *isobarische*  $I_3$  hebben de brandpunten gemeen. Deze zijn tevens de dubbelpunten der  $I_3$ , terwijl het drievoudig punt oneindig ver weg ligt.”

In verband met de in Hfdst. II § 6 genoemde stelling van prof. VAN DEN BERG, hebben we dus:

XXXVI. „Eene  $I_3$  met een drievoudig punt in het oneindige „bestaat uit de toppendrietalen van alle driehoeken, wier zijden „in het midden worden aangeraakt door confocale ellipsen, „die alle de twee dubbelpunten der  $I_3$  tot brandpunten hebben.”

§ 3. Bij de isobarische  $I_3$  met drievoudig punt  $z = 0$ , moet, overeenkomstig haar naam, het zwaartepunt van alle groepen in  $z = 0$  liggen. Volgens Hoofdstuk II § 7, zal de  $I_3$ , die in dat zwaartepunt een drievoudig punt bezit en verder eene groep met datzelfde zwaartepunt bevat, een dubbelpunt in het oneindige bezitten. Zij  $d$  het punt dat dit dubbelpunt tot een drietal aanvult (het „*vertakkingspunt*”), dan kunnen we de isobarische  $I_3$  met drievoudig punt  $z = 0$  dus voorstellen door

$$z^3 = \lambda (z - d) \quad (139)$$

Hare focale  $I_2$  is de, eveneens isobarische,  $I_2$

$$3 z^2 = \lambda \quad (140)$$

Eliminatie van  $\lambda$  uit de beide laatste vergelijkingen, levert eene vergelijking van den eersten graad, n.l. eene voor het



dubbelpunt, dat in het eindige gebied ligt. Dit is dus bepaald door

$$z = 1 \frac{1}{2} d.$$

Voor eene door  $\lambda$  bepaalde groep dezer  $I_3$  is:

$$z_1 z_2 z_3 = -\lambda d \text{ en } z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = -\lambda,$$

zoodat: 
$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{d}. \quad (141)$$

Is nu dus een punt  $Z_1$  gegeven, dan kan dit door twee punten  $Z_2$  en  $Z_3$  worden aangevuld tot een drietal eener isobarische  $I_3$  met drievoudig punt  $z = 0$ , daar we weten

$$z_2 + z_3 = -z_1 \text{ en } \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{d} - \frac{1}{z_1}$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen leiden we af, dat  $Z_2$  en  $Z_3$  een paar vormen van eene isobarische  $I_2$ , die  $t = -\frac{1}{2} z_1$  tot dubbelpunt heeft. Inverteeren we deze  $I_2$  uit  $z = 0$  dan zal de nieuwe  $I_2$  het dubbelpunt  $\frac{1}{t}$  en het dubbelpunt  $z = 0$  (de inversie van het oneindige dubbelpunt der eerste  $I_2$ ) bezitten en verder als paar de punten  $\frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ . Daar het midden dezer punten  $m = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{z_1} \right)$  bekend is, kunnen ze dus op de bekende wijze worden geconstrueerd, als dubbelpunten van eene  $I_2$ , die dat midden als centraalpunt en  $z = 0, z = \frac{1}{t}$  als paar bezit. Inversie in tegengestelden zin levert ons dan de punten  $Z_2, Z_3$ .

§ 4. Daar de niet-isobarische  $I_3$  door inversie uit elk harer dubbelpunten overgaat in eene isobarische  $I_3$ , waarbij het drievoudige punt natuurlijk in het gemeenschappelijke zwaartepunt komt te liggen, zal de voorgaande constructie ook tot aanvulling der niet-isobarische  $I_3$  kunnen dienen, zoodra daarvan de dubbelpunten en het drievoudige punt bekend zijn.

Kennen we het drievoudige punt en eene groep der  $I_3$ ,

dan invertceeren we deze groep uit dat punt als centrum en bepalen de brandpunten van deze groep (volgens de constructie in § 7 van Hoofdstuk III). Volgens XXXV zijn deze de dubbelpunten van de door inversie ontstane isobarische  $I_3$ . Door inversie van deze brandpunten in omgekeerden zin vinden we dus de dubbelpunten der  $I_3$ .

De aldus geconstrueerde dubbelpunten zijn tevens de harmonische centra van de gegeven groep naar het drievoudige punt als pool. (Verg. (75) en XVIII).

§ 5. Volgens (75) zijn de harmonische centra van de groep  $f_3(z)=0$  ten opzichte van de pool  $p$  de dubbelpunten van de involutie;  $f_3(z)=\lambda(z-p)^3$ , dat is juist de involutie die door verg. (127) wordt voorgesteld.

Eliminatie van  $\lambda$  uit (127) en (128) zal ons dus eene vergelijking geven voor de harmonische centra van

$$f_3(z) \equiv a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3 = 0 \text{ naar de pool } p.$$

Deze is:

$$(a_1 - a_0 p) z^2 - 2(a_2 - a_1 p) z + (a_3 - a_2 p) = 0. \quad (142)$$

Voor het midden  $m$  der harmonische centra geldt:

$$m = (a_2 - a_1 p) : (a_1 - a_0 p)$$

$$\text{zoodat} \quad a_0 m p - a_1 (m + p) + a_2 = 0. \quad (143)$$

De punten  $m$  en  $p$  vormen een paar der  $I_2$  met dubbelpunten (stel  $m = p = z$ ):

$$a_0 z^2 - 2 a_1 z + a_2 = 0 \quad (144)$$

dat zijn juist de brandpunten van het drietal  $f_3(z)=0$ .

Voor  $(a_1 - a_0 p)(a_3 - a_2 p) = (a_2 - a_1 p)^2$  heeft de verg. (142) twee gelijke wortels en vallen dus de harmonische centra van de groep voor de dan beschouwde pool samen. M. a. w. De dubbelpunten van de  $I_3$ , die uit de pool als drievoudig punt en uit de beschouwde groep opgebouwd is, vallen samen en vormen dus een tweede drievoudig punt. De  $I_3$  is dan dus eene cyclische  $I_3$ , en hiervan zijn de drievoudige punten de isodynamische centra voor alle groepen. (verg. Hfdst. III § 3).



XXXVII. „Vallen de harmonische centra van eene groep „eener  $I_3$  naar een pool  $p$  samen, dan vormen zij *met* die „pool  $p$  de isodynamische centra der groep”.

Heeft nu dus verg. (142) twee gelijke wortels, dan valt het midden  $m$  ook daarmee samen, dus wordt  $z = m$ , en dan zijn  $m$  en  $p$  de isodynamische centra der groep. Deze vormen dus ook een paar der  $I_2$ , waarvan de brandpunten van het drietal de dubbelpunten zijn (verg. Hoofdstuk III, § 6).

## HOOFDSTUK V.

### Algemeene kubische involutie. <sup>1)</sup>

§ 1. Met een enkel woord is in § 1 van het voorgaande hoofdstuk gezegd dat bij eene kubische involutie, die geen drievoudige punten bezit, de dubbelpunten der focale  $I_2$  beide metacentra zijn.

Ten bewijze hiervan leggen we de  $X$  as door de dubbelpunten der focale involutie en den assenoorsprong in het centrale punt dier  $I_2$ .

Hare vergelijking is dan:

$$(z - a)^2 = \lambda (z + a)^2,$$

of ook

$$z^2 - 2z_0 z + a^2 = 0, \quad (145)$$

bij invoering van het midden  $z_0 = a \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$  van een paar der involutie.

Door integratie ontstaat uit (145) de vergelijking van de  $I_3$ :

$$z^3 + 3a^2 z - c^3 = 3z_0 (z^2 - b^2) \quad (146)$$

waarin de integratieconstante door  $c^3 - 3z_0 b^2$  is voorgesteld. Uit de vergelijking blijkt dat  $z_0$  ook het zwaartepunt van een drietal der  $I_3$  is.

Beschouwen we de groepen, die bepaald worden door  $z_0 = \pm a$ , dan wordt verg. (146):

$$z^3 \mp 3a z^2 + 3a^2 z \pm 3ab^2 - c^3 = 0$$

of

$$(z \mp a)^3 \pm 3ab^2 \pm a^3 - c^3 = 0$$

$$(z \mp a)^3 = d^3$$

waaruit:

$$z = \pm a + d \varepsilon^k \quad (k = 0, 1, 2). \quad (147)$$

XXXVIII. „De dubbelpunten der focale involutie eener

<sup>1)</sup> Men vergelijke hiermede het boven aangehaalde artikel *Involutions cubiques dans le plan complexe*.



„algemeene  $I_3$  zijn dus de middelpunten van twee gelijkzijdige „driehoeken, wier toppen twee drietallen der  $I_3$  vormen; ze „zijn „metacentra”.

In de  $I_3$  komen niet meer dan deze twee gelijkzijdige tripels voor, daar bij een dusdanig tripel de brandpunten samen-vallen, dus een dubbelpunt van de focale involutie vormen, en de focale  $I_2$  slechts twee dubbelpunten heeft.

De gelijke wortels van (145) en (146) zijn de dubbelpunten der  $I_3$ . Elimineeren we dus de grootheid  $z_0$  uit die verge-lijkingen, dan vinden we:

$$z^4 - 3(a^2 + b^2)z^2 + 2c^3z - 3a^2b^2 = 0. \quad (148)$$

voor de dubbelpunten der  $I_3$ .

De coëfficiënt van  $z^3$  in deze vergelijking is gelijk aan nul, de oorsprong  $z = 0$  is dus het zwaartepunt der vier punten.

XXXIX. „Het midden der metacentra eener algemeene  $I_3$  „is tevens het zwaartepunt der dubbelpunten.”

Volgens I kunnen we deze vier punten door inversie uit een der dubbelpunten van elke der drie door hen bepaalde involuties, waarvan zij twee paren vormen, omzetten in de toppen van een parallelogram. Hunne vergelijking verkrijgt dan den vorm:

$$z^4 - (\alpha^2 + \beta^2)z^2 + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad (149)$$

wanneer het middelpunt van het parallelogram tot oorsprong wordt gekozen.

De coëfficiënt van  $z$  uit (148), n.l.  $c^3$  is in (149) gelijk aan nul.

We kunnen dus, zonder de algemeenheid te kort te doen, in het vervolg van ons onderzoek der algemeene  $I_3$  (146),  $c^3 = 0$  stellen.

§ 2. De vergelijking der algemeene  $I_3$  wordt nu dus:

$$z^3 - 3z_0z^2 + 3a^2z + 3b^2z_0 = 0. \quad (150)$$

De vergelijking (102):

$$z^3 - 3z_0z^2 + 3a^2z - a^2z_0 = 0 \quad (102)$$

stelt voor *elke* waarde van  $z_0$  een drietal voor, waarvan  $z^2 = a^2$  de isodynamische centra zijn (de hoofdpunten zijn

volgens Hoofdstuk III § 3 de isodynamische centra voor *alle* groepen eener cyclische  $I_3$ ). Voor  $z_0 = 0$  worden de vergelijkingen (102) en (150) identiek. De groep der algemeene  $I_3$ , die dus wordt voorgesteld door

$$z^3 + 3 a^2 z = 0 \quad (151)$$

heeft  $z^2 = a^2$  tot isodynamische centra.

De vergelijking (122) bepaalt de cyclische  $I_3$  met de hoofdpunten, tevens isodynamische centra,  $z = a$  en  $z = b$ . Vervangen we dus in (122):

$$z^3 - 3 z_0 z^2 + 3 [(a + b) z_0 - ab] z - [(a^2 + ab + b^2) z_0 + ab(a + b)] = 0 \quad (122)$$

$a$  door de waarde 0 en  $b$  door  $p$ , dan krijgen we als vergelijking der  $I_3$ :

$$z^3 - 3 z_0 z^2 + 3 p z_0 z - p^2 z_0 = 0 \quad (152)$$

waarvan de Hessiana dus  $z = 0$  en  $z = p$  tot wortels heeft.

De waarde van  $z_0$ , die de vergelijkingen (150) en (152) identiek aan elkaar gelijk maakt, zal ons dus een drietal der algemeene  $I_3$  opleveren, dat  $z = 0$  en  $z = p$  tot isodynamische centra, tot Hessiana, heeft.

Daarvoor moet dus  $p z_0 = a^2$  en  $p^2 = -3 b^2$  zijn.

$$\text{Of} \quad z_0^2 = -a^4 : 3 b^2, \quad z_0 = \pm a^2 : b \sqrt{-3}. \quad (153)$$

Hierbij behoort dan  $p = \pm b \sqrt{-3}$ .

§ 3. In het algemeen vinden we voor de isodynamische centra van eene, door haar zwaartepunt  $z_0$  bepaalde, groep der  $I_3$  (150) of:

$$z^3 + 3 a^2 z = 3 z_0 (z^2 - b^2) \quad (154)$$

door toepassing van (124):

$$(z_0^2 - a^2) t^2 - (a^2 + 3 b^2) z_0 t + (3 b^2 z_0^2 + a^4) = 0, \quad (155)$$

welke vergelijking ons *twee* waarden voor  $t$  oplevert.

Doch bij *elke* waarde van  $t$  vinden we uit (155) ook twee waarden voor  $z_0$ . De beide daarbij behorende groepen bezitten behalve  $t$  nog een tweede isodynamisch centrum,  $t'$ .

Bij elk punt  $t$ , behooren dus twee punten  $t'$ , die ieder met  $t$  de isodynamische centra vormen voor de beide groepen der



$I_3$ , die door  $t$  worden bepaald. Er bestaat tusschen de punten  $t$  en  $t'$  dus eene involutorische verwantschap (2, 2) met de vergelijking:

$$t^2 t'^2 + c_1 t t' (t + t') + c_2 (t^2 + t'^2) + d_2 t t' + c_3 (t + t') + c_4 = 0. \quad (156)$$

Zulk eene verwantschap is blijkbaar door vijf puntenparen volkomen bepaald.

Nu is eene  $I_3$  een bijzonder geval van eene (2, 2); immers, kiezen we één punt  $z$  (of  $t$ ), dan vinden we daarbij twee andere punten  $z$  (of  $t'$ ), die met het eerste eene groep vormen. Deze twee punten zijn nu ook aan elkander toegevoegd, wat bij eene algemeene involutorische (2, 2) niet het geval is.

Nu is eene  $I_3$  door een drietal en twee paren (zie VII) volkomen bepaald, welke tezamen vijf puntenparen vertegenwoordigen. Eene involutorische verwantschap (2, 2) die één involutorisch drietal bezit, zal dus identiek zijn met de  $I_3$ , die door dat drietal en twee willekeurige paren der (2, 2) wordt aangewezen.

We kunnen nu, door middel van (155) gemakkelijk twee gesloten of involutorische groepen van isodynamische centra  $t$  bepalen.

Beschouwen we de beide gelijkzijdige drietallen der  $I_3$ ; zij hebben hun centrum en het punt in het oneindige tot isodynamische centra. Werkelijk levert ook de substitutie  $z_0 = \pm a$ , uit de vergelijking (155) voor  $t$  de waarden  $t = \infty$  en  $t = \pm a$ .

Welke is nu de 2<sup>e</sup> groep die eveneens  $t = +a$  (of  $t = -a$ ) tot isodynamisch centrum heeft? Substitueeren we daartoe  $t = +a(-a)$  in (155), dan vinden we  $z_0 = +a(-a)$  en bovendien nog in beide gevallen  $z_0 = 0$ .

Hieruit volgt dat de groep met  $z_0 = 0$ , dat is, volgens (154) de groep 
$$z^3 + 3a^2z = 0 \quad (157)$$
 de punten  $t = +a, t = -a$ , tot isodynamische centra heeft (vergelijk: (151)).

In de gesloten groep  $t_1 = \infty, t_2 = a, t_3 = -a$  vormt dus elk paar de isodynamische centra voor een drietal der algemeene  $I_3$ , hetgeen we door het volgende schema kunnen weergeven:

$$\begin{array}{c}
 t_2 = a \quad z_0 = 0 \\
 z_0 = a \quad \text{---} \quad t_3 = -a \\
 t_1 = \infty \quad z_0 = -a
 \end{array}$$

In § 2 van dit hoofdstuk zagen we dat  $t = 0$  en  $t = \pm b\sqrt{-3}$  de isodynamische centra zijn van de beide groepen, bepaald door  $z_0 = \pm a^2 : b\sqrt{-3}$  (zie (153)).

Substitueeren we nu weer  $t = \pm b\sqrt{-3}$  in (155), dan vinden we natuurlijk de beide groepen  $z_0 = \pm a^2 : b\sqrt{-3}$  terug, maar bovendien is in beide gevallen, (zoowel voor  $t = +b\sqrt{-3}$ , als voor  $t = -b\sqrt{-3}$ ) de tweede wortel  $z_0$  van verg. (155) dezelfde en wel  $z_0 = \infty$ . De groep bepaald door  $z_0 = \infty$ , dat is volgens (154) de groep:

$$z^2 = b^2 \quad (158)$$

heeft dus de punten  $t = \pm b\sqrt{-3}$  tot isodynamische centra.

Eene tweede gesloten groep van isodynamische centra wordt dus gevormd door de punten  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = b\sqrt{-3}$  en  $t_3 = -b\sqrt{-3}$ , die het volgende schema geven:

$$\begin{array}{c}
 z_0 = \frac{a^2}{b\sqrt{-3}} \quad t_2 = b\sqrt{-3} \\
 t_1 = 0 \quad \text{---} \quad z_0 = \infty \\
 z_0 = -\frac{a^2}{b\sqrt{-3}} \quad t_3 = -b\sqrt{-3}
 \end{array}$$

De beide gevonden involutorische drietallen van isodynamische centra bepalen eene  $I_3$ , welke nu, volgens het bovenstaande, identiek is met de (2, 2) van alle isodynamische centra der groepen van de oorspronkelijke  $I_3$ . Deze laatste zijn dus paren van de tweede  $I_3$ . Volgens XXXII hebben de beide  $I_3$  de dubbelpunten gemeen. Deze vier dubbelpunten, beschouwd als vier puntenparen, bepalen volgens VIII hoogstens twee verschillende kubische involuties, derhalve zal de betrekking tusschen de beide genoemde  $I_3$  eene wederkeerige zijn.

Wanneer we uit de twee gevonden groepen de vergelijking der „covariante”  $I_3$  opstellen, dan blijkt dit ook.



Immers de beide drietallen:

$t_1 = \infty$ ,  $t_2 = a$ ,  $t_3 = -a$  en  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = b\sqrt{-3}$ ,  $t_3 = -b\sqrt{-3}$  bepalen de  $I_3$ :

$$(t - a)(t + a) = \lambda t(t - b\sqrt{-3})(t + b\sqrt{-3}).$$

of 
$$t^3 - \frac{1}{\lambda}t^2 + \frac{1}{\lambda}a^2 + 3b^2t = 0 \quad (159)$$

Zij  $t_0$  het zwaartepunt van de door  $\lambda$  bepaalde groep, dan is dus  $\frac{1}{\lambda} = 3t_0$  en dan wordt (159):

$$t^3 + 3b^2t = 3t_0(t^2 - a^2) \quad (160)$$

Vergelijking van (160) met (154) toont aan, dat de grootheden  $a^2$  en  $b^2$  in de beide  $I_3$  elkanders plaats innemen. De metacentra der covariante  $I_3$  zijn dus:  $t^2 = b^2$ .

We besluiten nu dus tot deze merkwaardige eigenschap:

XL. „Twee kubische involuties, die in vier gegeven punten dubbelpunten bezitten, zijn covariant in dien zin, dat de isodynamische centra van telkens drie groepen der eene involutie eene groep vormen van de andere involutie.”

En verder nog, mede in verband met XXXIX:

XLI. „Hunne metacentra liggen in de toppen van een „parallelogram, waarvan het middelpunt tevens het zwaartepunt der dubbelpunten is.”

§ 4. Zijn  $z = 0$  en  $z = \infty$  twee dubbelpunten eener algemeene  $I_3$  met de bijbehorende vertakkingspunten  $z = 3v$  en  $z = w$ , dan is de vergelijking der  $I_3$ :

$$z^2(z - 3v) = \lambda(z - w) \quad (161)$$

of 
$$z^3 - 3vz^2 - \lambda z + \lambda w = 0$$

De coëfficiënten uit verg. (123) zijn hier:

$$c_0 = 1, c_1 = v, c_2 = -\frac{\lambda}{3}, c_3 = -\lambda w,$$

zoodat verg. (124) ons voor de isodynamische centra van de door  $\lambda$  bepaalde groep oplevert:

$$\left(-\frac{1}{3}\lambda - v^2\right)h^2 - \left(-\lambda w + \frac{1}{3}\lambda v\right)h + \left(-\lambda vw - \frac{1}{9}\lambda^2\right) = 0 \text{ of:}$$

$$(3\lambda + 9v^2)h^2 + (3\lambda v - 9\lambda w)h + (\lambda^2 + 9\lambda vw) = 0. \quad (162)$$

$h = 0$  geeft  $\lambda = 0$  en  $\lambda = -9vw$ .

$\lambda = 0$  geeft  $h^2 = 0$  (waaruit we weer zien dat een dubbelpunt der isodynamische centra samenvalt met een dubbelpunt  $z = 0$  der oorspronkelijke  $I_3$ ),  $\lambda = -9vw$  geeft:

$$\begin{aligned} & (-27vw + 9v^2)h^2 + (-27v^2w + 81vw^2)h = 0 \\ \text{of} & \quad h^2 - 3wh = 0 \\ \text{d.i.} & \quad h = 0 \text{ of } h = 3w \end{aligned}$$

Eéne groep isodynamische centra bestaat dus uit

$$h = 0, h = 0, h = 3w.$$

$h = \infty$  geeft uit (162) de groep:  $3\lambda + 9v^2 = 0$ , dus  
 $\lambda = \infty$  en  $\lambda = -3v^2$ .

$\lambda = -3v^2$  geeft dan weer:

$$\begin{aligned} & (-9v^3 + 27v^2w)h + (9v^4 - 27v^3w) = 0 \\ \text{of} & \quad h = v \text{ en } h = \infty. \end{aligned}$$

Het punt  $h = \infty$  moet ook van de nieuwe  $I_3$  een dubbelpunt zijn; eene tweede gesloten groep van isodynamische centra bestaat dus uit

$$h = \infty, h = \infty, h = v$$

De covariante  $I_3$  is dus:

$$h^2(h - 3w) = \mu(h - v) \quad (163)$$

De focale  $I_2$  is:

$$3h^2 - 6wh = \mu \quad (164)$$

Eliminatie van  $\mu$  uit (163) en (164) geeft:

$$\begin{aligned} & h^2(h - 3w) = 3h^2(h - v) - 6wh(h - v) \\ \text{of:} & \quad 2h^3 - 3(v + w)h^2 + 6vwh = 0 \quad (165) \end{aligned}$$

voor de dubbelpunten, zoowel van de  $I_3$  (163) als van de  $I_3$  (161).

Van de vier wortels dezer vergelijking zijn  $h_1 = 0$  en  $h_2 = \infty$  de beide gegeven dubbelpunten met als bijbehorende vertakkingspunten  $h = 3v$  en  $h = w$  in de eerste  $I_3$  en  $h = 3w$ ,  $h = v$  in de tweede  $I_3$ .

In de volgende paragraaf zullen we nu de vertakkingspunten bepalen van de beide andere wortels,  $h_3$  en  $h_4$  uit (165).

§ 5. Is in het algemeen de vergelijking van eene  $I_3$  gegeven door

$$(a_0 + \lambda b_0)x^3 + (a_1 + \lambda b_1)x^2 + (a_2 + \lambda b_2)x + (a_3 + \lambda b_3) = 0 \quad (166)$$



dan is voor de groep met dubbelpunt  $x$  en derde punt (vertakkingspunt)  $y$ :

$$\text{de som der wortels } 2x + y = -\frac{a_1 + \lambda b_1}{a_0 + \lambda b_0}$$

$$\text{en het produkt } x^2 y = -\frac{a_3 + \lambda b_3}{a_0 + \lambda b_0}$$

Elimineeren we uit deze twee vergelijkingen de grootheid  $\lambda$ , dan krijgen we:

$$\begin{vmatrix} a_0(2x + y) + a_1 & b_0(2x + y) + b_1 \\ a_0(x^2 y) + a_3 & b_0(x^2 y) + b_3 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$(a_1 b_0 - a_0 b_1) x^2 y + (a_0 b_3 - a_3 b_0) (2x + y) + (a_1 b_3 - a_3 b_1) = 0, \quad (167)$$

welke vergelijking ons nu dus eene betrekking geeft tusschen het vertakkingspunt  $y$  behoorend bij een dubbelpunt  $x$  van de  $I_3$  (166).

Nu is de vergelijking (163) te schrijven als:

$$h^3 - 3wh^2 - \mu h + \mu v = 0, \quad (168)$$

waarin dus  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$ ,  $a_1 = -3w$ ,  $b_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = -1$ ,  $a_3 = 0$  en  $b_3 = v$  is.

Vergelijking (167) wordt dus hier:

$$v(2h + y) + (-3vw) = 0$$

of

$$y = 3w - 2h.$$

Nu is dus  $y_3 = 3w - 2h_3$  en  $y_4 = 3w - 2h_4$

waaruit volgt  $y_3 + y_4 = 6w - 2(h_3 + h_4)$  en

$$y_3 y_4 = 9w^2 - 6(h_3 + h_4)w + 4h_3 h_4.$$

Uit (165) volgt voor:  $h_3 + h_4$  de waarde  $\frac{3}{2}(v + w)$ ,

terwijl  $h_3 h_4 = 2vw$  is.

Dan wordt dus

$$\left. \begin{aligned} y_3 + y_4 &= 6w - 3(v + w) = 3(w - v) \\ y_3 y_4 &= 9w^2 - 9(v + w)w + 12vw = 3vw. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Indien we hierin  $v$  en  $w$  verwisselen, verkrijgen we de vertakkingspunten behoorende bij dezelfde dubbelpunten  $h_3$  en  $h_4$ , doch dan in de  $I_3$  (161).

De vergelijkingen voor de vertakkingspunten (buiten  $v, 3w, 3v$  en  $w$ ) zijn nu dus:

$$\text{en } \left. \begin{aligned} z^2 + 3(w - v)z + 3vw &= 0 \text{ bij } I_3 \text{ (161)} \\ z^2 + 3(v - w)z + 3vw &= 0 \text{ bij } I_3 \text{ (163)} \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

§ 6. Volgens (75) zijn de harmonische centra van de groep, bestaande uit de dubbelpunten  $h_2, h_3, h_4$  uit (165) naar de pool  $h_1$  (d. i.  $h_1 = 0$ ) de dubbelpunten der  $I_3$ :

$$2x^2 - 3(v + w)x + 6vw = \lambda x^3. \quad (171)$$

Eliminatie van  $\lambda$  uit deze vergelijking en hare afgeleide:

$$4x - 3(v + w) = 3\lambda x^2 \quad (172)$$

geeft ons voor die harmonische centra:

$$3 \{ 2x^2 - 3(v + w)x + 6vw \} - x \{ 4x - 3(v + w) \} = 0, \\ \text{of} \quad x^2 - 3(v + w)x + 9vw = 0, \quad (173)$$

d. i.  $x = 3v$  of  $x = 3w$ , en dit zijn juist de vertakkingspunten behoorende bij het dubbelpunt  $h_1 = 0$  in de beide  $I_3$ .

De wederkeerigheid in de betrekkingen der  $I_3$  en hare covariante  $I_3$  en de groote mate van symmetrie in de vergelijkingen doet ons nu besluiten tot:

XLII. „De harmonische centra van een drietal dubbel-  
„punten eener algemeene  $I_3$  ten opzichte van het vierde  
„dubbelpunt als pool, zijn de vertakkingspunten van dat vierde  
„dubbelpunt in de  $I_3$  en hare covariante  $I_3$ .”

§ 7. De vertakkingspunten (170) zijn twee paren van eene  $I_2$ , waarvoor  $z_1 z_2 = 3vw$ . Zij bepalen die  $I_2$  volkomen, en we kunnen deze voorstellen door:

$$z^2 - \lambda z + 3vw = 0. \quad (174)$$

$\lambda = \infty$  geeft  $z = 0$  en  $z = \infty$ , dat zijn twee dubbelpunten der beide  $I_3$ .

$\lambda = \frac{3}{2}(v + w)$  geeft:

$$2z^2 - 3(v + w)z + 6vw = 0. \quad (175)$$

Dit zijn (verg. (165)) juist de beide andere gemeenschappelijke dubbelpunten.



$\lambda = 3v + w$  geeft:

$$z^2 - (3v + w)z + 3vw = 0,$$

of  $(z - 3v)(z - w) = 0$ , dus  $z = 3v$  en  $z = w$ . (176)

Dit zijn de vertakkingspunten behorende bij  $z = 0$  en  $z = \infty$  in de oorspronkelijke  $I_3$  (161)

Eindelijk geeft  $\lambda = v + 3w$  nog de groep:

$$z^2 - (v + 3w)z + 3vw = 0,$$

of  $(z - v)(z - 3w) = 0$ , d. i.  $z = v$  en  $z = 3w$ ,

zijnde de vertakkingspunten behorende bij diezelfde dubbelpunten, doch in de covariante  $I_3$  (163).

XLIII. „De vier gemeenschappelijke dubbelpunten van eene „algemeene  $I_3$  en hare covariante  $I_3$  kunnen op drie wijzen „in paren worden gesplitst.

„Door elke splitsing wordt aan de twee vertakkingspunten, „behoorende bij een paar dubbelpunten in de eene  $I_3$ , een „ander tweetal, (behoorende bij datzelfde paar dubbelpunten „in de tweede  $I_3$ ), toegevoegd. De daardoor bepaalde  $I_2$  „bezit dan de beide dubbelpuntenparen en de in beide  $I_3$  „daarbijbehoorende vertakkingspunten als paren. De vier „dubbelpunten en de acht vertakkingspunten behooren in paren „tot drie  $I_2$ .”

Het volgende schema moge als overzicht dienen.

Bij de dubbelpunten  $d_i$  behooren in de eerste  $I_3$  de vertakkingspunten  $v_i$ , in de tweede de vertakkingspunten  $v_i'$ .

$$\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ v_1 * * v_1' & v_2 * * v_2' \\ d_3 & d_4 \\ v_3 * * v_3' & v_4 * * v_4' \end{array}$$

Nu bevat dus:

de  $I_2$ :  $(v_1 v_2, v_1' v_2')$  de paren:  $d_1 d_2, d_3 d_4, v_3 v_4, v_3' v_4'$ ,

de  $I_2$ :  $(v_1 v_3, v_1' v_3')$  de paren:  $d_1 d_3, d_2 d_4, v_2 v_4, v_2' v_4'$ ,

de  $I_2$ :  $(v_1 v_4, v_1' v_4')$  de paren:  $d_1 d_4, d_2 d_3, v_2 v_3, v_2' v_3'$ .

We kunnen de vertakkingspunten nog op andere wijze in paren brengen, b.v. een punt  $v_i$  met een punt  $v_k'$  en dan het punt  $v_i'$  met het punt  $v_k$ .

Zoo bouwen we uit de vertakkingspunten:

$v_1 = 3v$ ,  $v_2 = w$ ,  $v_1' = 3w$ ,  $v_2' = v$ , behoorende bij de dubbelpunten  $d_1 = 0$  en  $d_2 = \infty$ , de volgende  $I_2$  op:

$$(z - 3v)(z - v) = \lambda(z - 3w)(z - w) \quad (177)$$

of:  $z^2 - 4vz + 3v^2 = \lambda(z^2 - 4wz + 3w^2).$

Afgeleide:  $z - 2v = \lambda(z - 2w). \quad (178)$

Eliminatie van  $\lambda$  geeft ons voor de dubbelpunten der  $I_2$ :

$$(z - 2w)(z^2 - 4vz + 3v^2) = (z - 2v)(z^2 - 4wz + 3w^2),$$

of:  $z^3 - 2wz^2 - 4vz^2 + 8vwz - 6v^2w + 3v^2z =$

$$= z^3 - 2vz^2 - 4wz^2 + 8vwz + 3w^2z - 6vw^2,$$

of:  $2(w - v)z^2 + 3(v^2 - w^2)z - 6vw(v - w) = 0,$

of  $2z^2 - 3(v + w)z + 6vw = 0. \quad (179)$

Vergelijking met (165) doet ons zien, dat deze dubbelpunten, d. w. z. de dubbelpunten der  $I_2$  gevormd uit de vertakkingspunten  $v_1$ ,  $v_2'$ ;  $v_1'$ ,  $v_2$ , juist de dubbelpunten  $d_3$  en  $d_4$  der beide  $I_3$  zijn.

In het algemeen zal dus de  $I_2$  opgebouwd uit de vertakkingspunten  $v_i$ ,  $v_k'$ ;  $v_k$ ,  $v_i'$ , de punten  $d_j$  en  $d_l$  tot dubbelpunten hebben. (i, j, k en l kunnen elk 1, 2, 3 of 4 zijn, maar moeten tegelijkertijd alle verschillend zijn.)

§ 8. De beide covariante involuties (154) en (160) (zie § 3) worden identiek voor  $b = a$ . De vergelijking der dubbelpunten dier beide  $I_3$ :

$$z^4 - 3(a^2 + b^2)z^2 - 3a^2b^2 = 0 \quad (180)$$

(welke vergelijking uit (148) ontstaat bij  $c^3 = 0$ , zie § 1, slot) gaat dan over in:

$$z^4 - 6a^2z^2 - 3a^4 = 0. \quad (181)$$

Hieruit volgt:

$$z^2 = (3 \pm 2\sqrt{3})a^2. \quad (182)$$

Wanneer de punten  $z^2 = a^2$  op de X-as worden ondersteld, dan liggen ook de punten  $\beta^2 = (3 + 2\sqrt{3})a^2$  op de X-as, omdat de factor  $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$  reëel is.

Daar echter  $\sqrt{3 - 2\sqrt{3}}$  imaginair is, liggen de beide overige toppen van het parallelogram der dubbelpunten op de Y-as. Hiervoor geldt:  $z^2 = -\gamma^2 = (3 - 2\sqrt{3})a^2$ , dus:



$$\gamma_1 = a \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}, \gamma_2 = -a \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}.$$

De diagonalen van het parallelogram zijn  $2\gamma_1$  en  $2\beta_1$ , dus hun produkt is:  $4\beta_1\gamma_1 = 4a \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \cdot a \sqrt{3 - 2\sqrt{3}} = 4a^2 \sqrt{9 - 12} = 4a^2 \sqrt{3}$ .

Het kwadraat van eene zijde van het parallelogram is gelijk aan:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = (3 + 2\sqrt{3})a^2 - (3 - 2\sqrt{3})a^2 = 4a^2\sqrt{3}$ , dus gelijk aan het produkt der diagonalen.

De dubbelpunten van deze bijzondere  $I_3$  zijn dus de toppen van eene *isodynamische ruit*.

Daar hierin dus  $\beta^2 + \gamma^2$  gelijk was aan  $4\beta\gamma$ , en dus ook  $(2\beta)^2 + (2\gamma)^2 = 4(2\beta)(2\gamma)$ , zien we hier:

XLIV. „In eene isodynamische ruit is de som van de kwadraten der diagonalen gelijk aan hun viervoudig produkt.”

In § 3 van Hoofdstuk III zagen we dat de hoekpunten van een isodynamischen vierhoek een equianharmonisch viertal vormen. Bedenken we nog dat de beide in XL genoemde  $I_3$  in het nu beschouwde geval samengevallen zijn, dan levert dit:

XLV. „Vier equianharmonische punten zijn de dubbelpunten van eene  $I_3$ , waarin de drie paren van elk tripel isodynamische centra zijn voor drie groepen der  $I_3$ .”

We kunnen de  $I_3$  „aan zich zelve toegevoegd” noemen, eene „ $I_3$  sibiconjugata”, of ook wel de „isodynamische  $I_3$ .”

Daar de isodynamische centra van eene groep, die uit een dubbelpunt en een vertakkingspunt bestaat, eene *vertakkingsgroep* dus, volgens XXXII, met het dubbelpunt samenvallen, zullen ook de beide drietallen, waarvan zij, in het algemeen met een zelfde derde punt, de isodynamische centra vormen, tot ééne groep vereenigd zijn. Immers, zijn A, B, C, in onderstaande volgorde de isodynamische centra van de groepen I, II, III, dan moet, zoodra  $A \equiv B$  wordt, ook  $II \equiv III$  worden. B (of A) en C blijven dan de isodynamische centra van de vereenigde groepen II en III.



Hieruit:

XLVI. „De groepen der isodynamische  $I_3$  zijn (zie XLV) „in drietallen gerangschikt; aan elke der vier vertakkings- „groepen zijn daarbij twee samengevallen groepen toegevoegd”.

In verband met XL geldt deze stelling ook voor de algemeene  $I_3$ .

§ 9. Twee kubische involuties van den tweeden rang (zie inleiding) hebben eene kubische involutie van den eersten rang gemeen. Immers, zijn in de verg.:

$p z_1 z_2 z_3 - q (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) + r (z_1 + z_2 + z_3) - s = 0$   
twee der punten  $z_1, z_2, z_3$  gegeven, dan is het derde bepaald. Zij stelt derhalve eene  $I_3^2$  voor. Is nu nog eene tweede  $I_3^2$  gegeven door:

$p' z_1 z_2 z_3 - q' (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) + r' (z_1 + z_2 + z_3) - s' = 0$   
dan is het geven van één der punten  $z_1, z_2$  of  $z_3$  voldoende om uit de beide vergelijkingen samen de twee overige punten te bepalen.

We kunnen dus eene  $I_3^1$  bepalen door de twee vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} p z_1 z_2 z_3 - q (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) + r (z_1 + z_2 + z_3) - s &= 0 \\ p' z_1 z_2 z_3 - q' (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) + r' (z_1 + z_2 + z_3) - s' &= 0 \end{aligned} \right\} (183)$$

Bij eene dubbelpuntsgroep is  $z_1 = z_2 = z$  en het vertakkingspunt  $z_3 = z'$ . De dubbelpunten der  $I_3^1$  (183) moeten dus voldoen aan:

$$\left. \begin{aligned} p z^2 z' - q (z^2 + 2 z z') + r (2 z + z') - s &= 0 \\ p' z^2 z' - q' (z^2 + 2 z z') + r' (2 z + z') - s' &= 0 \end{aligned} \right\}, (184)$$

$$\text{of aan: } \begin{vmatrix} p z^2 - 2 q z + r, & q z^2 - 2 r z + s \\ p' z^2 - 2 q' z + r', & q' z^2 - 2 r' z + s' \end{vmatrix} = 0, (185)$$

welke vergelijking uit (184) ontstaat door eliminatie van het vertakkingspunt  $z'$ .

Deze zelfde vergelijking vinden we ook als we de dubbelpunten zoeken van de  $I_3$ , bepaald door:

$$\lambda(pz^3 - 3qz^2 + 3rz - s) + \lambda'(p'z^3 - 3q'z^2 + 3r'z - s') = 0 (186)$$

dus als we  $\lambda, \lambda'$  uit (186) en hare afgeleide

$$\lambda(pz^2 - 2qz + r) + \lambda'(p'z^2 - 2q'z + r') = 0 \text{ elimineeren.}$$



Dit geeft n.l.:

$$\frac{p z^3 - 3 q z^2 + 3 r z - s}{p z^2 - 2 q z + r} = \frac{p' z^3 - 3 q' z^2 + 3 r' z - s'}{p' z^2 - 2 q' z + r'}$$

of

$$z - \frac{q z^2 - 2 r z + s}{p z^2 - 2 q z + r} = z - \frac{q' z^2 - 2 r' z + s'}{p' z^2 - 2 q' z + r'}$$

waaruit het verdwijnen van den determinant (185) volgt.

De beide  $I_3$  (183) en (186) hebben dus de dubbelpunten gemeen, zijn dus volgens XL covariant, doch zijn in het algemeen verschillend.

Immers  $z_3 = 0$  bepaalt in (183) de groep, waarvoor:

$$\begin{cases} q z_1 z_2 + r (z_1 + z_2) + s = 0 \\ q' z_1 z_2 + r' (z_1 + z_2) + s' = 0 \\ z_1 z_2 + z (z_1 + z_2) + z^2 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{terwijl } z_1 z_2 \text{ ook wortels} \\ \text{zijn van} \end{array} \right\}$$

De punten  $z_1, z_2$  die met  $z_3 = 0$  eene groep vormen, zijn dus de wortels van:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} z^2 & z & 1 \\ s' & r' & q' \\ s & r & q \end{vmatrix} = 0$$

en die groep is dus:  $z \times \Delta = 0$  of:

$$(q' r - q r') z^3 + (q s' - q' s) z^2 + (r' s - r s') z = 0. \quad (187)$$

In de  $I_3$  (186) wordt de groep, waartoe  $z = 0$  behoort, bepaald door  $\lambda = s'$  en  $\lambda' = -s$ . Deze groep is:

$$(p s' - p' s) z^3 - 3 (q s' - q' s) z^2 + 3 (r s' - r' s) z = 0 \quad (188)$$

Het punt  $z = 0$  behoort dus in de beide  $I_3$  tot twee verschillende drietallen (187) en (188).

De beide covariante  $I_3$  (183) en (186) zijn dus verschillend.

Zij worden identiek, zoodra ze één tripel gemeen hebben, b.v. de tripels (187) en (188), waartoe  $z = 0$  behoort.

Daartoe moet:

$$3 (q' r - q r') = p' s - p s' \text{ zijn.}$$

Aan deze voorwaarde wordt voldaan, wanneer we eene  $I_3$  van den vorm (186) bepalen door een tripel van elk van twee geconjugeerde  $I_3$ .

Kiezen we b.v. van de  $I_3$  (154):  $z^3 + 3 a^2 z = 3 z_0 (z^2 - b^2)$  het tripel, waarvoor  $z_0 = \alpha$  en van de covariante  $I_3$  (160):

$z^3 + 3b^2z = 3z_0(z^2 - a^2)$  het tripel, waarvoor  $z_0 = \beta$ , dan wordt de vergelijking der nieuwe  $I_3$ :

$$(z^3 - 3\alpha z^2 + 3a^2 z^2 + 3\alpha b^2) + \mu(z^3 - 3\beta z^2 + 3b^2 z + 3\beta a^2) = 0 \quad (189)$$

waarvan de coëfficiënten aan de gevonden voorwaarde voldoen.

Immers:  $p = 1, \quad q = \alpha, \quad r = a^2, \quad s = -3\alpha b^2,$

$p' = 1, \quad q' = \beta, \quad r' = b^2, \quad s' = -3\beta a^2.$

Dus  $3(q'r - q'r') = 3(\beta a^2 - \alpha b^2)$  en ook:  
 $p's - p's' = 3(\beta a^2 - \alpha b^2)$

We hebben dus hiermee bewezen:

XLVII. „Twee willekeurige drietallen, elk gekozen uit eene „van twee geconjugeerde involuties, bepalen steeds eene aan „zich zelf toegevoegde involutie, eene  $I_3$  sibiconjugata.”

Verder is duidelijk:

XLVIII. „Eene  $I_3$  sibiconjugata is bepaald door een tripel „en een paar”.

Dit paar vormt niet de Hessiana van dat tripel.

Immers, we kunnen de isodynamische centra, de Hessiana, van het tripel bepalen en hebben daarin, zal de  $I_3$  aan zich zelf zijn toegevoegd, een paar der  $I_3$ . Door het tripel en de 2 paren is de  $I_3$  nu bepaald.

§ 10. Voor elke groep eener algemeene  $I_3$  geldt volgens (154):

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 3a^2. \quad (190)$$

Voor eene vertakkingsgroep met dubbelpunt  $z_1 = z_2 = z$  en vertakkingspunt  $z_3 = v$  geldt in 't bijzonder:

$$z^2 + 2vz - 3a^2 = 0. \quad (191)$$

De dubbelpunten  $z$  voldoen aan de verg. (180).

Elimineeren we dus  $z$  uit (191) en

$$z^4 - 3(a^2 + b^2)z^2 - 3a^2b^2 = 0, \quad (180)$$

dan vinden we eene betrekking voor de vertakkingspunten  $v$ .

We voeren die eliminatie uit met behulp van de methode van BEZOUT-CAUCHY.

$$\frac{z^4}{z^2} = \frac{3(a^2 + b^2)z^2 + 3a^2b^2}{-2vz + 3a^2}$$

$$\frac{z^3 - 3(a^2 + b^2)z}{z + 2v} = \frac{3a^2b^2}{3a^2}.$$



Deze 2 vergelijkingen worden tot:

$$\begin{aligned} & -2vz^3 + 3a^2z^2 = 3(a^2 + b^2)z^2 + 3a^2b^2, \\ \text{en} \quad & z^3 - 3(a^2 + b^2)z = b^2z + 2b^2v, \end{aligned}$$

zoodat nu de onbekenden  $z$ ,  $z^2$ ,  $z^3$  moeten geëlimineerd worden uit:

$$\left. \begin{aligned} 2vz^3 + 3b^2z^2 & \qquad \qquad \qquad + 3a^2b^2 = 0 \\ z^3 + & \qquad \qquad \qquad + (-3a^2 - 4b^2)z - 2b^2v = 0 \\ z^3 + 2vz^2 & \qquad \qquad \qquad - 3a^2z = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad z^2 + 2vz - 3a^2 = 0 \end{aligned} \right\} (192)$$

De determinant van dit stelsel moet dus gelijk nul zijn:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2v & 3b^2 & 0 & 3a^2b^2 \\ 1 & 0 & -3a^2 - 4b^2 & -2b^2v \\ 1 & 2v & -3a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2v & -3a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Deze determinant levert, uitgewerkt, voor de vertakkingspunten de vergelijking:

$$V \equiv 4b^2v^4 + (9a^4 + 18a^2b^2 - 3b^4)v^2 - 12a^2b^4 = 0. \quad (193)$$

Door verwisseling van  $a^2$  en  $b^2$  ontstaat:

$$V' \equiv 4a^2v^4 + (9b^4 + 18a^2b^2 - 3a^4)v^2 - 12a^4b^2 = 0, \quad (194)$$

waarvan de wortelpunten dus de vertakkingspunten der covariante  $I_3$  zijn.

Uit deze beide viertallen (193) en (194) kunnen we nu eene involutie van den vierden graad:

$$V = \lambda V' \quad (195)$$

opbouwen.

Voor  $\lambda = 1$  bevat deze de groep:

$$4(b^2 - a^2)v^4 + (12a^4 - 12b^4)v^2 - 12a^2b^2(b^2 - a^2) = 0,$$

of:

$$D \equiv v^4 - 3(a^2 + b^2)v^2 - 3a^2b^2 = 0, \quad (196)$$

dat is juist vergelijking (180), dus de groep der gemeenschappelijke dubbelpunten der beide  $I_3$ .

Voor  $\lambda = -1$  vinden we de volgende groep der  $I_4$  (195):  
 $4(a^3 + b^2)v^4 + (6a^4 + 36a^2b^2 + 6b^4)v^2 - 12a^2b^2(a^2 + b^2) = 0$   
 of:

$$E \equiv v^4 + \frac{3a^4 + 18a^2b^2 + 3b^4}{2(a^2 + b^2)}v^2 - 3a^2b^2 = 0. \quad (197)$$

De bikwadratische involutie (195) kan nu dus ook worden voorgesteld door

$$D = \mu E \quad (198)$$

of:

$$(\mu - 1)(v^4 - 3a^2b^2) + \left\{ \mu \frac{3a^4 + 18a^2b^2 + 3b^4}{2(a^2 + b^2)} + 3(a^2 + b^2) \right\} v^2 = 0.$$

Hieruit vinden we voor  $\mu = 1$  de groep  $v^2 = 0$ , terwijl de waarde  $\mu = -3(a^2 + b^2) \times 2(a^2 + b^2) : (3a^4 + 18a^2b^2 + 3b^4) = -2(a^2 + b^2) : (a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$ , welke den factor tusschen accolades gelijk nul maakt, ons de groep  $v^4 - 3a^2b^2 = 0$  geeft.

Ook uit deze beide groepen kan de  $I_4$  worden opgebouwd. Hare vergelijking wordt dan:

$$\left. \begin{aligned} z^4 - 3a^2b^2 &= \lambda z^2 \\ z^4 + g^4 &= \lambda z^2 \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

of

De focale  $I_3$  is:

$$4z^3 = 2\lambda z \text{ of } 2z^3 = \lambda z. \quad (200)$$

Eliminatie van  $\lambda$  uit (199) en (200) geeft ons voor de dubbelpunten der  $I_4$  de vergelijking:

$$\left. \begin{aligned} (z^4 + g^4)z &= z^2 \cdot 2z^3, \\ z^5 - g^4z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

of

Daar de  $I_4$  zes dubbelpunten bezit, zijn hare dubbelpunten dus; het punt in het oneindige, de toppen en het snijpunt der diagonalen van een vierkant  $z^4 = g^4$ . Zij vormen (verg. Hoofdstuk I § 6) dus een metaharmonisch zestal.

In verband met (193), (194) en (196) besluiten we tot:

XLIX. „De vier dubbelpunten eener  $I_3$ , hare vier vertakkingspunten en de vier vertakkingspunten der covariante  $I_3$  zijn „drie groepen eener bikwadratische involutie met metaharmonische dubbelpunten.”

Voor de vertakkingspunten der isodynamische  $I_3$  vinden we, door in verg. (193)  $b = a$  te stellen:

$$v^4 + 6a^2v^2 - 3a^4 = 0. \quad (202)$$

Bij vergelijking met (181) blijkt dat deze verg. (202) daaruit kan ontstaan, als men  $a$  door  $ai$  vervangt. Zij stelt dus eveneens eene isodynamische ruit voor, die uit de ruit der



dubbelpunten door wenteling van  $90^\circ$  om het centrum ontstaat.

Derhalve:

L. „Wanneer twee congruente, concentrische, isodynamische „ruiten een kwartslag in stand verschillen, zijn de toppen der „eene ruit de dubbelpunten, de toppen der andere ruit de „vertakkingspunten van eene isodynamische, dus aan zich zelf „toegevoegde, kubische involutie.”

### § 11. Tot de involutie (199)

$$z^4 - 3a^2 b^2 = \lambda z^2$$

behoort, voor  $\lambda = -6b^2$ , de groep:

$$z^4 + 6b^2 z^2 - 3a^2 b^2 = 0. \quad (203)$$

Hare harmonische centra van den derden graad ten opzichte van een pool  $p$  worden gevormd door de dubbelpunten der involutie:

$$z^4 + 6b^2 z^2 - 3a^2 b^2 = \mu (z - p)^4 \quad (204)$$

wier afgeleide:  $z^3 + 3b^2 z = \mu (z - p)^3$  is,

$$\text{dus door: } z^3 + \frac{3b^2}{p} z^2 + 3b^2 z - \frac{3a^2 b^2}{p} = 0. \quad (205)$$

Deze vergelijking geeft ons voor elke waarde van  $p$  een ander drietal harmonische centra ten opzichte van die veranderlijke pool  $p$ , waarvan het zwaartepunt  $z_0$  bepaald wordt door:

$$z_0 = -b^2 : p.$$

De harmonische centra, voor alle punten  $p$  van het vlak, van de groep (203) vormen dus de  $I_3$  (205)

$$\text{of } z^3 + 3b^2 z = 3z_0 (z^2 - a^2) \quad (160)$$

en dat is juist de  $I_3$  (160).

Zoo' zal de  $I_3$  (154):

$$z^3 + 3a^2 z = 3z_0 (z^2 - b^2) \quad (154)$$

de involutie zijn, gevormd door de harmonische centra van die groep uit de  $I_1$  (199), die door  $\lambda = -6a^2$  bepaald wordt, dus van de groep:

$$z^4 + 6a^2 z^2 - 3a^2 b^2 = 0. \quad (206)$$

LI. „De bikwadratische involutie, opgebouwd uit de vertakkingspunten eener  $I_3$  en die harer covariante  $I_3$  bevat

„twee viertallen, waarvoor de beide  $I_3$  juist de  $I_3$  der harmonische centra voor alle punten van het vlak zijn.”

§ 12. De wederkeerige betrekking tusschen eene  $I_3$  en hare covariante  $I_3$  kan ons goede diensten bewijzen bij het construeeren van groepen eener  $I_3$ . Zij b.v. gevraagd een punt  $C_1$  aan te vullen tot eene groep eener  $I_3$ , welke door twee gegeven drietallen  $A_k, B_k$  bepaald is.

Volgens Hoofdstuk II § 7 bezit een  $n$ -puntige groep  $(n-1)$  harmonische centra van den  $(n-1)^{en}$  graad ten opzichte van een pool  $p$  (het aantal dubbelpunten van eene  $I_n$ , die een  $n$ -voudig punt bezit:  $f_n(z) = \lambda(z-p)^n$  is van  $2(n-1)$  verlaagd tot  $n-1$ ).

Elke groep der  $I_3$  bezit dus twee harmonische centra van den tweeden graad ten opzichte van een pool  $P_1$ .

Deze vormen dus, voor alle groepen der  $I_3$  genomen, eene  $I_2$ . De dubbelpunten  $P_2$  en  $P_3$  dezer  $I_2$  vormen (zie XXXVII) elk met  $P_1$  de isodynamische centra voor een drietal der  $I_3$ , dus paren der covariante  $I_3$ ;  $P_2, P_3$  vormen dan ook een paar, dus  $P_1, P_2, P_3$  een drietal der covariante  $I_3$ .

Construeeren we nu eerst de harmonische centra van  $P_1$  ten opzichte van  $A_k$  en  $B_k$  (zie voor deze constructie Hoofdstuk IV § 4), en daarna de dubbelpunten  $P_2$  en  $P_3$  der door die twee paren harmonische centra bepaalde  $I_2$ .

Op geheel dezelfde wijze vullen we nu nog een willekeurig gekozen punt  $Q_1$  tot eene groep  $Q_1 Q_2 Q_3$  der covariante  $I_3$  aan.

Evenals nu het punt  $P_1$ , door het bekend zijn der groepen  $A_k$  en  $B_k$  der  $I_3$ , tot eene groep der covariante  $I_3$  is aangevuld, kunnen we omgekeerd, daar nu de groepen  $P_k$  en  $Q_k$  der covariante  $I_3$  bekend zijn, het punt  $C_1$  aanvullen tot eene groep  $C_1, C_2, C_3$  der  $I_3$ .

Daar de metacentra eener algemeene  $I_3$  de dubbelpunten der focale  $I_2$  zijn (XXXVIII), zijn zij te construeeren, zoodra we in de brandpunten der groepen  $A_k$  en  $B_k$  twee paren dezer  $I_2$  hebben gevonden.

§ 13. Zonder gebruik te maken van de covariante  $I_3$ , doch



lettende op de algemeene eigenschap XI kunnen we nog op andere wijze het paar  $C_2, C_3$  vinden, dat een gegeven punt  $C_1$  aanvult tot eene groep der  $I_3$ :  $(A_k, B_k)$ .

Immers de drie  $I_2$  opgebouwd uit  $(A_2, A_3; B_2, B_3)$ , uit  $(A_2, A_3; C_2, C_3)$  en uit  $(B_2, B_3; C_2, C_3)$  hebben in hetzelfde punt  $P_1$  een punt dat  $C_1, B_1$  of  $A_1$  tot een harer paren aanvult.

Bepalen we dus  $P_1$ , zoo dat  $C_1, P_1$  een paar wordt van de  $I_2$   $(A_2, A_3; B_2, B_3)$ , dan vormen de punten  $C_2, C_3$  het gemeenschappelijke paar der beide  $I_2$ :

$(A_2, A_3; B_1, P_1)$  en  $(B_2, B_3; A_1, P_1)$

Zij de  $I_3$  gegeven door twee paren,  $A_1, A_2; B_1, B_2$  en een drietal  $C_1, C_2, C_3$ , en zij gevraagd die paren tot drietallen aan te vullen.

Wederom maken we gebruik van eigenschap XI.

Zij  $P_3$  het punt dat met  $C_3$  een paar vormt van de  $I_2$   $(A_1, A_2; B_1, B_2)$ , welk punt volgens de reeds vroeger genoemde wijze (Hfdst. I § 5), te construeeren is, dan is  $B_3$  het punt dat met  $P_3$  een paar vormt van de  $I_2$   $(A_1, A_2; C_1, C_2)$ , terwijl  $A_3$  volgt uit de  $I_2$   $(B_1, B_2; C_1, C_2)$ , die  $A_3, P_3$  als paar moet bezitten.

§ 14. Twee  $I_3$ , die een tripel gemeen hebben, dat dus drie paren vertegenwoordigt, hebben nog één paar gemeen, daar twee  $I_3$  in het algemeen vier paren gemeen hebben.

We zullen deze eigenschap uitbreiden tot:

LII. „Eene  $I_p$  en eene  $I_q$  hebben  $(p - 1)(q - 1)$  paren „gemeen”.

Als uitbreiding van vergelijking (183) is duidelijk dat  $(p - 1)$  vergelijkingen van den vorm:

$$a_0(z)_p - a_1(z)_{p-1} + a_2(z)_{p-2} - \dots \pm a_{p-1}(z)_1 \mp a_p = 0 \quad (207)$$

welke elk afzonderlijk eene  $I_p^{p-1}$  voorstellen, te zamen eene  $I_p$  vertegenwoordigen.

We merken hierbij dus tevens op:

LIII. „ $(p - 1)$  involuties van graad  $p$  en rang  $(p - 1)$  „hebben ééne involutie van graad  $p$  en rang één gemeen”.

In vergelijking (207) stelt het symbool  $(z)_i$  de som voor van de produkten der  $p$  onbekenden  $i$  aan  $i$  genomen.

Elimineeren we nu uit  $(p - 1)$  vergelijkingen (207)  $(p - 2)$  der onbekenden, dan houden we eene vergelijking van den  $(p - 1)^{\text{en}}$  graad met twee onbekenden over, terwijl eene vergelijking van den  $(q - 1)^{\text{en}}$  graad met deze zelfde beide onbekenden ontstaat bij eliminatie van  $(q - 2)$  der onbekenden uit  $(q - 1)$  vergelijkingen van den vorm

$$b_0(z)_q - b_1(z)_{q-1} + b_2(z)_{q-2} - \dots \pm b_{p-1}(z)_1 \mp b_p = 0,$$

welke eene  $I_q$  voorstellen.

De beide vergelijkingen van den  $(p - 1)^{\text{en}}$  en den  $(q - 1)^{\text{en}}$  graad met twee onbekenden leveren ons  $(p - 1)(q - 1)$  oplossingen, als even zoo vele paren die zoowel tot de  $I_p$  als tot de  $I_q$  behooren.

Zij nu gevraagd het puntenpaar te construeeren dat twee  $I_3$ , die een tripel gemeen hebben, nog gemeen hebben.

Laten de  $I_3$  gegeven zijn door de drietallen:

$$A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3, \text{ en } A_1, A_2, A_3; C_1, C_2, C_3.$$

Vullen we het punt  $C_3$  door  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  aan tot een drietal der eerste  $I_3$  op de wijze als in § 12 of § 13 van dit hoofdstuk is genoemd, en evenzoo het punt  $B_3$  door  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$  tot een tripel der tweede  $I_3$ , dan hebben we dus drie groepen der beide  $I_3$ , welke het gezochte puntenpaar  $N_1, N_2$  gemeen zullen hebben.

$$\begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \\ B_1 & B_2 & B_3 & \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & C_3 & \\ N_1 & N_2 & X & \end{array} \left\{ \begin{array}{c} I \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \\ C_1 & C_2 & C_3 & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & B_3 & \\ N_1 & N_2 & Y & \end{array} \left\{ \begin{array}{c} II \end{array} \right.$$

Volgens eigenschap XI zal nu, wanneer de  $I_2(N_1, N_2; A_1, A_2)$  gevormd uit groepen van I, het paar  $B_3, P$  bevat, de

$$I_2(N_1, N_2; B_1, B_2)$$

het paar  $A_3, P$  bevatten.

Nu behooren  $N_1, N_2$  en  $A_1, A_2$  waaruit we de eerste  $I_2$  vormden, ook als paren tot II.

Weer gebruik makende van XI, zien we, dat het punt  $P$ , dat  $B_3$  tot een paar der genoemde  $I_2$  aanvult, het punt  $A_3$  zal aanvullen in de  $I_2$  gevormd uit  $N_1, N_2; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ .



Dus bestaan de  $I_2$ , bepaald door  $\left\{ \begin{matrix} N_1, N_2 \\ B_1, B_2 \\ A_3, P \end{matrix} \right.$  en  $\left\{ \begin{matrix} N_1, N_2 \\ \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \\ A_3, P \end{matrix} \right.$

welke, daar ze twee paren gelijk hebben, identiek zijn.

Het paar  $N_1, N_2$  behoort dus tot de  $I_2$  ( $B_1, B_2; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ ).

En evenzoo volgt uit de tweede en laatste kolom van het schema:

$$I \left\{ \begin{matrix} N_1 & N_2 \\ A_1 & A_2 \\ C_3 & Q \end{matrix} \right. \left\| I \left\{ \begin{matrix} N_1 & N_2 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 \\ A_3 & Q \end{matrix} \right. \right\| II \left\{ \begin{matrix} N_1 & N_2 \\ A_1 & A_2 \\ C_3 & Q \end{matrix} \right. \left\| II \left\{ \begin{matrix} N_1 & N_2 \\ C_1 & C_2 \\ A_3 & Q \end{matrix} \right.$$

dat  $N_1, N_2$  ook als paar behooren tot de  $I_2$  ( $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2, C_1 C_2$ )

Het gezochte paar  $N_1, N_2$  is dus (zie Hfdst. I § 6) te construeeren als gemeenschappelijk paar der beide  $I_2$  ( $B_1, B_2; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ ) en ( $C_1, C_2; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ ).

§ 15. Keeren we nu terug tot de vergelijking (146) der algemeene  $I_3$ :

$$z^3 + 3a^2z - c^3 = 3z_0(z^2 - b^2). \quad (146)$$

Wanneer we hierin  $z$  door  $z_0$  vervangen, zal eene vergelijking ontstaan, waarvan de wortelpunten elk het midden zijn van de beide andere punten der groep van de  $I_3$ , welke door zulk een wortelpunt bepaald wordt.

Deze vergelijking is:

$$2z_0^3 - 3(a^2 + b^2)z_0 + c^3 = 0, \quad (208)$$

dus juist de afgeleide van verg. (148), die de dubbelpunten der  $I_3$  voorstelt. Derhalve:

LIV. „De drie brandpunten van den vierhoek der dubbelpunten eener algemeene  $I_3$  zijn de middens der puntenparen, die elk van hen aanvullen tot groepen der  $I_3$ .”

Voor het midden  $m$  der isodynamische centra van eene groep met zwaartepunt  $z_0$  vinden we uit vergelijking (155):

$$m = (a^2 + 3b^2)z_0 : 2(z_0^2 - a^2). \quad (209)$$

Daar dus 2 waarden van  $z_0$  eenzelfde waarde voor  $m$  geven, en de isodynamische centra paren zijn van eene tweede  $I_3$ , zien we:

LV. „Elk punt van het vlak is het midden van twee „paren eener  $I_3$ .”

Deze eigenschap is slechts een bijzonder geval van de algemeene, welke uit LII volgt, dat eene  $I_3$  en eene  $I_2$  2 paren gemeen hebben.

§ 16. Beschouwen we de isobarische  $I_3$ , welke groepen  $z=0$  tot gemeenschappelijk zwaartepunt hebben, terwijl  $z^2=c^2$  het punt  $z=0$  tot een drietal aanvult. Eén dubbelpunt der  $I_3$  (welke door inversie uit eene algemeene  $I_3$  kan zijn ontstaan) ligt in het oneindige. Zij  $z=d$  het daarbij behoorende vertakkingspunt, dan kunnen we de  $I_3$  dus opbouwen uit de groepen:

$$z=0, z=c, z=-c \text{ en } z=\infty, z=\infty, z=d.$$

Hare vergelijking wordt dus:

$$z(z-c)(z+c)=\lambda(z-d),$$

$$\text{of} \quad z^3 - c^2 z - \lambda z + \lambda d = 0. \quad (210)$$

De kubische covariant van:

$$a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

is:

$$\begin{aligned} (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 + \\ - 3(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 + \\ - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3) x_2^3. \quad 1) \end{aligned} \quad (211)$$

Stellen we hierin

$$a_0=1, a_1=0, a_2=-\frac{1}{3}(c^2+\lambda), a_3=\lambda d \text{ en } x_1:x_2=z,$$

dan vinden we voor den kubischen covariant van (210), dus voor de covariante groep van een door eene bepaalde waarde van  $\lambda$  aangewezen drietal der  $I_3$ :

$$\begin{aligned} \lambda d z^3 - \frac{2}{3}(c^2+\lambda)^2 z^2 + \lambda d (c^2+\lambda) z - \lambda^2 d^2 + \\ + \frac{2}{27}(c^2+\lambda)^3 = 0. \end{aligned} \quad (212)$$

Daar deze vergelijking in  $\lambda$  van den derden graad is, levert dus elke waarde van  $z$  in het algemeen drie waarden voor  $\lambda$ .

1) CLEBSCH-LINDEMAN. Vorlesungen über Geometrie S. 219.



Elke dezer waarden geeft ons uit verg. (210) eene groep der  $I_3$  waarvan de covariante groep het gegeven punt  $z$  bevat.

Daar volgens § 4 van Hoofdstuk III eene groep met hare covariante groep op een cirkel ligt en tevens elk punt van de covariante groep harmonisch ligt met de punten van de groep zelve, volgt uit het bovenstaande, dat door elk punt van het vlak drie cirkels gaan, welke groepen der  $I_3$  dragen, die met dat punt harmonisch zijn.

Deze eigenschap blijft bij inversie onveranderd en geldt dan ook voor de niet-isobarische  $I_3$ . We vinden dus, mede in verband met vergel. (155):

LVI. „Elk punt van het vlak vormt met drie groepen eener „ $I_3$  harmonische vierhoeken en met twee groepen equianharmonische of isodynamische vierhoeken.”

Voor  $z = \infty$  levert vergel. (212), na deeling door  $z^3$ :

$$\lambda d = 0.$$

Daar de vergel. van den derden graad was, zijn de wortels nu dus  $\lambda^2 = \infty$  en  $\lambda = 0$ .

Van de drie cirkels die door een dubbelpunt der  $I_3$  gaan, (hier  $z = \infty$ ) vallen er dus twee samen.

Een dubbelpunt eener  $I_3$  vormt dus slechts met twee groepen der  $I_3$  harmonische vierhoeken.

Wordt in de vergelijking (210) der  $I_3$ ,  $c = 0$ , dus  $z = 0$  een drievoudig punt, dan wordt verg. (212):

$$\lambda d z^3 - \frac{2}{3} \lambda^2 z^2 + \lambda^2 d z - \lambda^2 d^2 + \frac{2}{27} \lambda^3 = 0 \quad (213)$$

welke vergelijking voor *elke* waarde van  $z$  de waarde  $\lambda = 0$  oplevert.

De hierdoor bepaalde groep van de  $I_3$  (210) is, (voor  $c = 0$ ):  $z^3 = 0$ , dus het drievoudige punt.

Het drievoudige punt ligt dus met elk punt harmonisch.

## HOOFDSTUK VI.

### Algemeene bikwadratische involutie.

§ 1. Uit de eigenschappen in het II<sup>e</sup> Hoofdstuk voor de algemeene  $I_n$  bewezen, met name uit V (of VI), VII en IX volgt dat eene bikwadratische involutie, behalve door:

- a) twee viertallen, ook volkomen bepaald is door:
- b) een viertal met een drietal en een paar;
- c) een viertal met drie paren, en
- d) drie drietallen.

De verg. (146):

$$z^3 + 3a^2z - c^3 = 3z_0(z^2 - b^2) \quad (146)$$

stelt eene algemeene  $I_3$  voor, wanneer het centraalpunt der focale  $I_2$  als oorsprong wordt gekozen.

We kunnen deze  $I_3$  nu beschouwen als de focale  $I_3$  van eene bikwadratische involutie, wier vergelijking dan door integratie van (146) gevonden wordt als:

$$\frac{1}{4}z^4 + \frac{3}{2}a^2z^2 - c^3z = z_0z^3 - 3z_0b^2z + \text{constante.}$$

Wordt deze integratie constante door  $z_0g^3 - \frac{1}{4}f^4$  aangeduid, dan wordt de verg. der  $I_4$ :

$$z^4 + 6a^2z^2 - 4c^3z + f^4 = 4z_0(z^3 - 3b^2z + g^3). \quad (214)$$

Vervangen we in deze vergelijking  $z$  door  $z_0$ , dan valt dus een punt van eene groep met het zwaartepunt van die groep samen.

De vergelijking wordt dan:

$$3z_0^4 - 6(a^2 + 2b^2)z_0^2 + 4(c^3 + g^3)z_0 - f^4 = 0 \quad (215)$$

Daar deze vergelijking van den vierden graad is, blijkt:

LVII. „Eene  $I_4$  bevat, in het algemeen, vier groepen, waarin „een punt het zwaartepunt der drie overige punten van de „groep is”.



Uit de wijze van afleiding van deze eigenschap en de analoge eigenschap die uit verg. (208) voor de  $I_3$  volgt, besluiten we terloops nog tot:

LVIII. „Eene  $I_n$  bevat, algemeen genomen,  $n$  groepen, „waarin één punt het zwaartepunt van de andere punten der „groep is”.

Is het zwaartepunt van een viertal tevens een zijner brandpunten, en kiezen we dit punt als oorsprong, dan bevat de vergelijking der groep geen  $z^3$  (daar de som der wortels gelijk nul is) en geen  $z^1$ , (daar de afgeleide vergelijking de wortel  $z = 0$  moet bezitten).

De groep kan dan steeds door:

$$z^4 - 6 p z^2 + q = 0 \quad (216)$$

worden voorgesteld.

De wortelpunten van deze vergelijking vormen een parallelogram met  $z = 0$  als middelpunt.

De brandpunten der groep zijn de wortels van:

$$z^3 - 3 p z = 0, \text{ d.i. } z = 0 \text{ en } z^2 = 3 p.$$

Het zwaartepunt is nu dus het midden van de beide andere brandpunten ( $z = \pm \sqrt{3 p}$ ).

Dit volgt ook uit het feit, dat, zooals uit (214), (146) en (145) blijkt, het zwaartepunt van eene groep eener  $I_4$  identiek is met dat van hare focale groep en met dat van de beide brandpunten van deze focale groep.

De brandpunten der groepen van de  $I_4$  vormen de  $I_3$  (146); volgens het bovenstaande is nu dus een zwaartepunt dat met een brandpunt samenvalt een der drie wortels van verg. (208):

$$2 z^3 - 3 (a^2 + b^2) z + c^3 = 0, \quad (208)$$

welke de focale groep voorstelt van de dubbelpunten der  $I_3$  (146), n.l. van:

$$z^4 - 3 (a^2 + b^2) z^2 + 2 c^3 z - 3 a^2 b^2 = 0 \quad (148)$$

We zien dus:

LIX. „De  $I_4$  bevat drie parallelogrammen, hare middelpunten zijn de brandpunten van den vierhoek der dubbelpunten der focale  $I_3$ .”

§ 2. Om de dubbelpunten der  $I_4$  te vinden moeten we uit verg. (214) en hare afgeleide (146), de grootheid  $z_0$  elimineeren.

Uit beide vergelijkingen volgt:

$$\frac{z^3 + 3a^2z - c^3}{z^4 + 6a^2z^2 - 4c^3z + f^4} = \frac{3(z^2 - b^2)}{4(z^3 - 3b^2z + g^3)},$$

of:

$$z^6 - (6a^2 + 9b^2)z^4 + (8c^3 + 4g^3)z^3 - (18a^2b^2 + 3f^4)z^2 + 12a^2g^3z - 4c^3g^3 + 3b^2f^4 = 0 \quad (217)$$

voor de dubbelpunten der  $I_4$  (214).

Elimineeren we verder nog  $z_0$  uit (214) en de tweede afgeleide, d.i. de afgeleide van (146):

$z^2 + a^2 = 2z_0z$ , welke de focale  $I_2$  voorstelt, dan vinden we:  $z_0 = (z^2 + a^2) : 2z$ , dus:

$$z^5 - (4a^2 + 6b^2)z^3 + (4c^3 + 2g^3)z^2 - (6a^2b^2 + f^4)z + 2a^2g^3 = 0. \quad (218)$$

Deze vergelijking is ook juist de afgeleide van de verg. der dubbelpunten (217).

Zij stelt die punten der  $I_4$  voor, die samenvallen met een brandpunt van het drietal brandpunten der groep, waartoe het punt behoort.

Wordt nu zulk een wortelpunt van (218) voorgesteld door  $z = 0$ , dan zal de tweede afgeleide van de vergelijking der groep, die door dat punt wordt aangewezen, ook den factor  $z = 0$  moeten bevatten. De vergelijking der groep mag dus geen  $z^2$  bevatten en heeft dan den vorm:

$$z^4 - 4pz^3 - 4qz = 0. \quad (219)$$

De afgeleide is  $z^3 - 3pz^2 - 4q = 0$   
en de tweede afgeleide:  $z^2 - 2pz = 0. \quad (220)$

De overige drie punten der groep ( $z = 0$  uitgezonderd) hebben tot vergelijking:

$$z^3 - 4pz^2 - 4q = 0$$

waarvan de afgeleide is:  $3z^2 - 8pz = 0.$

Het punt  $z = 0$  is dus tevens een brandpunt van de groep der overige drie punten.



We vinden dus:

LX. „Eene  $I_4$  bezit, in het algemeen, vijf groepen, waarin „een punt een brandpunt is van den driehoek der overige „punten der groep.

„Deze vijf brandpunten zijn tevens de brandpunten van den „zeshoek der dubbelpunten van de  $I_4$ .”

In § 1 werd het centraalpunt der focale  $I_2$ , dus het midden der metacentra der focale  $I_3$  als oorsprong gekozen. Met het oog op deze keuze lezen we uit de vergelijkingen (217), (208) (zie LIX), (215) en (218), die allen den tweeden term missen, de volgende eigenschap af:

LXI. „Het midden der metacentra eener  $I_4$  is het gemeenschappelijk zwaartepunt van het zestal dubbelpunten, van „de drie middelpunten der parallelogrammen, van de vier „punten, welke in de door hen bepaalde groepen zwaartepunten der drie overige punten zijn, en van de vijf punten, „welke in de door hen bepaalde groepen brandpunten der „drie overige punten zijn.”

§ 3. Wanneer de drie viertallen:

$$\left. \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3, A_4 \\ B_1, B_2, B_3, B_4 \\ C_1, C_2, C_3, C_4 \end{array} \right\} \text{ tot eene } I_4 \text{ behooren,}$$

en de drie drietallen:

$$\left. \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \\ C_1, C_2, C_3 \end{array} \right\} \text{ tot eene } I_3,$$

dan behooren volgens eigenschap XI ook de drietallen:

$$\left. \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ C_1, C_2, C_3 \\ B_4, D_2, D_3 \end{array} \right\} \text{ tot eene } I_3, \text{ en ook } \left. \begin{array}{l} B_1, B_2, B_3 \\ C_1, C_2, C_3 \\ A_4, D_2, D_3 \end{array} \right\} \text{ tot eene } I_3.$$

We zagen in § 9 van Hoofdstuk V, dat ééne der vergelijkingen (183) een  $I_3^2$  voorstelt. Om de drie onafhankelijke coëfficiënten uit die vergelijking te bepalen moeten in drie vergelijkingen de grootheden  $z_1, z_2, z_3$  bekend zijn. Dus:

LXII. „Eene  $I_3^2$  is door drie drietallen bepaald.”

Zoo bepalen dus de bovengenoemde groepen  $A_1, A_2, A_3$ ;  $B_1, B_2, B_3$  en  $C_1, C_2, C_3$  eene  $I_3^2$ . Hierin wordt nu het punten paar  $D_2, D_3$  zoowel door  $A_4, B_4$  als  $C_4$  tot eene groep aangevuld. Maar dan zal ook elk punt dit doen en we zien in  $D_2, D_3$  de *neutrale punten* der  $I_3^2$ .

Na deze tusschenbeschouwing op het gebied der involutie van den tweeden rang zijn we in staat om een drietal eener  $I_4$ , welke zooals onder d) genoemd, (§ 1 Hoofdstuk VI), door drie drietallen gegeven is, tot een viertal aan te vullen.

Zijn de drietallen  $A_k, B_k, C_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) gegeven, dan bepalen we eerst de neutrale punten  $D_2, D_3$  der door die drietallen aangewezen  $I_3^2$ .

Dan bestaat dus de  $I_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \\ C_4, D_2, D_3 \end{array} \right\} \text{ waarin echter } C_4 \text{ nog onbekend is.}$$

Vormen we nu de drie  $I_2$ :

$$\text{I } \left\{ \begin{array}{l} A_2, A_3 \\ B_2, B_3 \end{array} \right\}, \quad \text{II } \left\{ \begin{array}{l} A_2, A_3 \\ D_2, D_3 \end{array} \right\}, \quad \text{III } \left\{ \begin{array}{l} B_2, B_3 \\ D_2, D_3 \end{array} \right\}$$

dan zal, als  $C_4, \Gamma_4$  een paar is van I,  $B_1, \Gamma_4$  een paar van II en  $A_1, \Gamma_4$  een paar van III zijn. Zoowel in de II<sup>e</sup> als in de III<sup>e</sup>  $I_2$  is dus het punt  $\Gamma_4$  te bepalen. Daarna vinden we  $C_4$  als het punt dat  $\Gamma_4$  aanvult tot een paar der  $I_2$  ( $A_2, A_3$ ;  $B_2, B_3$ ).

Op geheel analoge wijze is  $A_4$  te construeeren volgens het schema:

$$\left. \begin{array}{l} B_1, B_2, B_3 \\ C_1, C_2, C_3 \\ A_4, D_2, D_3 \end{array} \right\} I_3 \quad \left. \begin{array}{l} B_2, B_3 \\ D_2, D_3 \\ C_1, \mathfrak{A}_4 \end{array} \right\} I_2 \text{ of } \left. \begin{array}{l} C_2, C_3 \\ D_2, D_3 \\ B_1, \mathfrak{A}_4 \end{array} \right\} I_2, \text{ dan: } \left. \begin{array}{l} B_2, B_3 \\ C_2, C_3 \\ A_4, \mathfrak{A}_4 \end{array} \right\} I_2$$

We willen ook nog eene constructie vermelden voor het geval dat de  $I_4$  zooals onder b) genoemd, gegeven is door een viertal  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , een drietal  $B_1 B_2 B_3$  en een paar  $C_3 C_4$ .<sup>1)</sup>

De neutrale punten  $D_2, D_3$  der nog onbekende  $I_3^2$ :

<sup>1)</sup> Deze constructies staan in het boven aangehaalde artikel: Zur Theorie der Involutionen. Monatshefte f. Mathem. u. Phys. III Jahrg.



$(A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3)$  vullen  $C_4$  aan tot tripel der  $I_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \\ C_4, D_2, D_3 \end{array} \right\} \text{ en zijn dus te construeeren.}$$

Maar nu vormen ook:

$$\left. \begin{array}{l} B_1, B_2, B_3 \\ A_4, D_2, D_3 \\ C_1, C_2, C_3 \end{array} \right\} \text{ drie groepen eener } I_3, \text{ en zijn}$$

dus de punten  $C_1, C_2$  te construeeren, die  $C_3$  hierin aanvullen.

## HOOFDSTUK VII.

### Bikwadratische involutie met viervoudig punt.

§ 1. Eene  $I_4$  met een viervoudig punt  $z = p$  wordt voorgesteld door:

$$a_0 z^4 - 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 - 4 a_3 z + a_4 = \lambda (z - p)^4 \quad (221)$$

Hare focale  $I_3$  door:

$$a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3 = \lambda (z - p)^3 \quad (222)$$

Eliminatie van  $\lambda$  geeft ons dus voor de dubbelpunten:

$$\begin{aligned} a_0 z^4 - 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 - 4 a_3 z + a_4 &= \\ &= (z - p) (a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3) \end{aligned}$$

of:

$$a_1 z^3 - 3 a_2 z^2 + 3 a_3 z - a_4 = p (a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3) \quad (223)$$

Volgens Hoofdstuk II § 7 zijn de wortelpunten van deze vergelijking de harmonische centra van den derden graad voor de groep der  $I_4$  (221) aangewezen door  $\lambda = 0$ , naar de pool  $p$ .

Is  $p$  veranderlijk, dan vormen deze harmonische centra voor elke waarde van  $p$  eene groep der  $I_3$  door (223) bepaald. Daar deze  $I_3$  vier dubbelpunten bezit, zijn er dus vier polen  $p$ , waarvoor twee der harmonische centra samenvallen.

Deze twee samengevallen harmonische centra, vormen als samengevallen dubbelpunten der  $I_4$  (221) een drievoudig punt dezer  $I_4$ . We zien dus:

LXIII. „Elk viertal punten behoort tot vier  $I_4$ , die een „viervoudig en een drievoudig punt bezitten.”

„Wanneer we in de bovenstaande vergelijkingen  $a_k$  vervangen door  $(a_k - \mu b_k)$ , waarin  $k = 0, 1, 2, 3$  of  $4$  is, dan gaat de vergelijking (223) over in:

$$\begin{aligned} (a_1 - \mu b_1) z^3 - 3 (a_2 - \mu b_2) z^2 + 3 (a_3 - \mu b_3) z - (a_4 - \mu b_4) &= \\ = p \{ (a_0 - \mu b_0) z^3 - 3 (a_1 - \mu b_1) z^2 + & \\ + 3 (a_2 - \mu b_2) z - (a_3 - \mu b_3) \}. & \end{aligned} \quad (224)$$



Met eene bepaalde waarde van  $\mu$  komt eene bepaalde groep der  $I_4$  (221), zooals die door de substitutie veranderd is, overeen ( $\lambda = 0$ ).

Voor die bepaalde waarde van  $\mu$  levert nu vergelijking (224), waarin we  $p$  onveranderlijk denken, de harmonische centra van den derden graad voor de beschouwde groep naar de pool  $p$ .

De harmonische centra voor de groepen eener algemeene  $I_4$  met parameter  $\mu$ , ten opzichte van één en dezelfde pool  $p$ , vormen nu dus volgens (224) eene  $I_3$  met diezelfde parameter  $\mu$ , welke aldus geschreven kan worden:

$$\begin{aligned} (a_1 - p a_0) z^3 - 3 (a_2 - p a_1) z^2 + 3 (a_3 - p a_2) z - (a_4 - p a_3) = \\ = \mu [(b_1 - p b_0) z^3 - 3 (b_2 - p b_1) z^2 + \\ 3 (b_3 - p b_2) z - (b_4 - p b_3)]. \end{aligned} \quad (225)$$

Deze vergelijking geeft voor vier waarden van  $\mu$  twee gelijke wortels, daar de  $I_3$  vier dubbelpunten bezit.

De  $I_4$  met parameter  $\mu$  bevat dus vier groepen, waarvoor twee der harmonische centra ten opzichte van een vaste pool  $p$  samenvallen, m. a. w.

LXIV. „Eene  $I_4$  bevat vier groepen, die elk met een gegeven punt als viervoudig element eene nieuwe  $I_4$  bepalen, welke ook nog een drievoudig punt bezit.”

Voor de pool in het oneindige,  $p = \infty$ , wordt verg. (223);

$$(122) \quad a_0 z^3 - 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z - a_3 = 0, \quad (226)$$

d.i. juist de focale groep van het linkerlid van (221), dus van de groep  $\lambda = 0$ .

De harmonische centra voor de pool  $p = \infty$  zijn dus de brandpunten der groep (verg. XVIII). Dit geeft:

LXV. „Eene algemeene  $I_4$  bezit vier groepen, waarvoor twee der brandpunten samenvallen.”

De in LXIII genoemde drievoudige punten waren de dubbelpunten van de door (223) aangewezen  $I_3$ .

Hare vergelijking vinden we dus door eliminatie van  $p$  uit (223) en hare afgeleide:

$$(227) \quad a_1 z^2 - 2 a_2 z + a_3 = p (a_0 z^2 - 2 a_1 z + a_2)$$

Door deeling van beide vergelijkingen op elkaar vinden we:

$$z + \frac{-a_2 z^2 + 2 a_3 z - a_4}{a_1 z^2 - 2 a_2 z + a_3} = z + \frac{-a_1 z^2 + 2 a_2 z - a_3}{a_0 z^2 - 2 a_1 z + a_2} \text{ of:}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 z^2 - 2 a_1 z + a_2, & a_1 z^2 - 2 a_2 z + a_3 \\ a_1 z^2 - 2 a_2 z + a_3, & a_2 z^2 - 2 a_3 z + a_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (228)$$

of:

$$(a_0 a_2 - a_1^2) z^4 - 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) z^3 + (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) z^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) z + (a_2 a_4 - a_3^2) = 0 \quad (229)$$

Daar het linkerlid van deze vergelijking de covariant van HESSE is van het linkerlid der vergelijking:

$$a_0 z^4 - 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 - 4 a_3 z + a_4 = 0 \quad (230)$$

kunnen we dus de vier punten die elk als drievoudig element voorkomen in eene  $I_4$  met een viervoudig punt en eene bepaalde groep, de *covariante groep* van dit gegeven viertal noemen.

Daar de met (223) covariante  $I_3$  dezelfde dubbelpunten (229) heeft, terwijl hare vergelijking op analoge wijze als (223) uit de groep (230) wordt afgeleid, uit eene geheel andere groep wordt gevonden, behoort dus het viertal (229) als covariante groep tot twee viertallen van het vlak. Er bestaat eene overeenkomst (1, 2) tusschen eene groep en hare covariante groep.

Ter vereenvoudiging kunnen we volgens I het viertal aangewezen door (230) omzetten in de toppen van een parallelogram.

Zij dan zijne vergelijking:

$$a_0 z^4 + 6 a_2 z^2 + a_4 = 0, \quad (231)$$

dan vinden we door de substituties  $a_1 = a_3 = 0$  in verg. (229) voor de covariante groep de vergelijking:

$$a_0 a_2 z^4 + (a_0 a_4 - 3 a_2^2) z^2 + a_2 a_4 = 0,$$

of

$$a_0 z^4 + 6 b_2 z^2 + a_4 = 0, \quad (232)$$

wanneer dus

$$a_0 a_4 - 3 a_2^2 = 6 a_2 b_2 \quad (233)$$

gesteld wordt.

Uit deze betrekking blijkt opnieuw de verwantschap (2, 1) tusschen eene groep en hare covariante groep. Immers bij gegeven  $a_0, a_4$  en  $b_2$ , dus bij een gegeven viertal (232), vinden



we uit (233) twee waarden voor  $a_2$ , dus twee viertallen (231), waarvoor het gegeven viertal de covariante groep is.

Is  $a_0 a_4 = 9 a_2^2$ , dan volgt uit (233)  $b_2 = a_2$ . De betrokken groep valt dan dus met de covariante groep samen. Dit gebeurt dus voor de beide waarden  $a_2 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{a_0 a_4}$ . De verwantschap (1, 2) bezit echter nog een derde coïncidentie-element. Hiervoor geldt:  $a_2 = \infty$ , want ook voor deze waarde worden de groepen (231) en (232) aan elkaar gelijk.

(231) wordt:

$$\frac{a_0}{a_2} z^4 + 6 z^2 + \frac{a_4}{a_2} = 0.$$

Voor  $a_2 = \infty$  geeft dit de groep:

$$z^2 = 0 \text{ en dus daarbij } z^2 = \infty.$$

(232) is te schrijven:

$$\frac{a_0}{a_2} z^4 + \frac{a_0 a_4}{a_2^2} z^2 - 3 z^2 + \frac{a_4}{a_2} = 0.$$

Voor  $a_2 = \infty$  geeft ook deze vergelijking de groep:

$$z^2 = 0, z^2 = \infty.$$

## HOOFDSTUK VIII.

### Bikwadratische involutie met metaharmonische dubbelpunten.

§ 1. Uit een viertal

$$a_0 z^4 + 6 a_2 z^2 + a_4 = 0 \quad (231)$$

en zijne covariante groep:

$$a_0 z^4 + \{(a_0 a_4 - 3 a_2^2) : a_2\} z^2 + a_4 = 0, \quad (232)$$

of

$$a_0 z^4 + 6 b_2 z^2 + a_4 = 0$$

kunnen we eene  $I_4$  opbouwen, door telkens van eene covariante groep weer de covariante groep te vormen. Zoo vormen we uit (232) de groep:

$$a_0 z^4 + \{(a_0 a_4 - 3 b_2^2) : b_2\} z^2 + a_4 = 0$$

of

$$a_0 z^4 + 6 c_2 z^2 + a_4 = 0, \quad (234)$$

enzoovoorts.

We zien, dat alle verdere groepen, zoo de twee eerste groepen, die de  $I_4$  geheel bepalen, parallelogrammen vormen, ook parallelogrammen bepalen, met hetzelfde middelpunt ( $z=0$ ), terwijl ook het produkt der diagonalen voor alle even groot is.

Dit laatste zien we het gemakkelijkst aldus:

De  $I_4$ , waartoe de viertallen (231), (232), (234) alle behooren, heeft tot vergelijking:

$$a_0 z^4 + 6 \lambda^2 z^2 + a_4 = 0. \quad (235)$$

Schrijven we de vergelijking als eene kwadratische:

$$a_0 y^2 + 6 \lambda^2 y + a_4 = 0, \quad (236)$$

dan zal, als  $y_1$  en  $y_2$  de wortels dezer vergelijking zijn, het produkt der diagonalen van een der parallelogrammen (235) worden voorgesteld door  $4 \sqrt{y_1 y_2}$ , welk produkt dus gelijk is aan  $4 \sqrt{a_4 : a_0}$ , d. w. z. onafhankelijk van  $\lambda$ .



De  $I_4$  (235), die ook door de vergelijking:

$$z^4 + 6\mu^2 z^2 + a^4 = 0 \quad (237)$$

voor te stellen is, blijkt bij vergelijking met (199) de  $I_4$  met metaharmonische dubbelpunten:  $z = \infty$  en  $z(z^4 - a^4) = 0$  te zijn, welke we reeds in Hoofdstuk V bij de beschouwing van twee covariante  $I_3$  hebben aangetroffen.

Tot welke groep der  $I_4$  behooren de punten  $z = a$ ,  $z = -a$ ? Voor deze waarden wordt vergelijking (237):

$$2a^4 + 6\mu^2 a^2 = 0, \text{ waaruit volgt } \mu^2 = -\frac{1}{3}a^2.$$

De vergelijking der gezochte groep is dus:

$$z^4 - 2a^2 z^2 + a^4 = 0 \text{ of } (z^2 - a^2)^2 = 0. \quad (238)$$

De groep bestaat dus uit de punten  $z^2 = a^2$ , dubbel geteld. Daar voor deze groep voldaan is aan de betrekking  $a_0 a_4 = 9a_2^2$ , ( $a_0 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{3}a^2$ ,  $a_4 = a^4$ ), valt (zie 233) de covariante groep met de groep zelf samen.

Evenzoo vormen de punten  $z^2 = -a^2$ , dubbel geteld, eene met hare covariante samenvallende groep der  $I_4$  en ook de punten  $z = 0$ ,  $z = \infty$ , welke laatste de groep voor  $\mu^2 = \infty$  vormen.

LXVI. „Eene  $I_4$  met metaharmonische dubbelpunten bezit „dus drie groepen, welke elk uit twee dubbelpunten bestaan, „en elk met hare covariante groep samenvallen.”

§ 2. Noemen we de zes metaharmonische dubbelpunten der  $I_4$ :  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \infty$ ,  $z_3 = a$ ,  $z_4 = -a$ ,  $z_5 = ai$ ,  $z_6 = -ai$ , dan zijn  $z_1$ ,  $z_3$  en  $z_5$  de wortelpunten van de vergelijking:

$$z(z - a)(z - ai) = 0 \text{ of } z^3 - (1 + i)az^2 + a^2iz = 0. \quad (239)$$

Door substitutie van

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1+i}{3}a, \quad c_2 = \frac{a^2i}{3}, \quad c_3 = 0$$

in verg. (124) vinden we voor de isodynamische centra van de groep (239):

$$\{ 3a^2i - (1+i)^2a^2\} z^2 + a^3i(1+i)z + a^4 = 0,$$

$$\text{of:} \quad z^2 + a(1+i)z - a^2i = 0. \quad (240)$$

De groep der drie overige dubbelpunten  $z_2, z_4$  en  $z_6$  heeft tot vergelijking:  $(z + a)(z + ai) = 0$  of

$$z^2 + (1 + i)az + a^2i = 0. \quad (241)$$

Door toepassing van (124) vinden we ook hier voor de isodynamische centra:

$$z^2 + a(1 + i)z - a^2i = 0,$$

welke vergelijking volkomen dezelfde is als (240).

De wortels van de verg. (240) zijn:

$$z = \frac{1}{2}a(1 + i)(-1 \pm \sqrt{3}) \quad (242)$$

Deze beide wortelpunten zijn dus de isodynamische centra van de beide groepen  $z_1, z_3, z_5$  en  $z_2, z_4, z_6$ , dus de hoofdpunten van de cyclische  $I_3$  die door de beide drietallen bepaald wordt. (Hoofdst. III, § 3).

Wanneer we uit de zes dubbelpunten der  $I_4$  nog andere paren van drietallen vormen en daarvan de isodynamische centra zoeken, dan blijken deze voor de navolgende paren telkens gelijk te zijn.

Die paren van drietallen:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 z_4 z_5 \\ z_2 z_3 z_6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} z_1 z_4 z_6 \\ z_2 z_3 z_5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} z_1 z_3 z_6 \\ z_2 z_4 z_5 \end{array} \right\}$$

vormen dus nog drie andere cyclische  $I_3$ .

Hunne overeenkomstige hoofdpunten zijn: (de isodynamische centra van de beide drietallen uit ieder paar):

$$z = -\frac{1}{2}a(1 - i)(-1 \pm \sqrt{3}) \quad (243)$$

$$z = -\frac{1}{2}a(1 + i)(-1 \pm \sqrt{3}) \quad (244)$$

$$z = +\frac{1}{2}a(1 - i)(-1 \pm \sqrt{3}) \quad (245)$$

Volgens XIX gaan de zes dubbelpunten door inversie uit één der hoofdpunten van de vier cyclische  $I_3$ , die zij bepalen, over in twee gelijkzijdige driehoeken. In § 6 van Hoofdstuk I zagen we dat zes metaharmonische punten de snijpunten vormden van drie onderling loodrechte cirkels. Daar



deze loodrechte snijding bij de inversie bewaard blijft, zijn de beide gelijkzijdige driehoeken *homothetisch*.

Immers: Laten A, D; B, E en C, F de drie paren snijpunten zijn van drie onderling loodrechte cirkels, waarvan O het machtpunt is. Beschouwen we de driehoeken OCB en OEF. Daarin is  $\angle OCB = \angle FEO = \frac{1}{2} \text{bg } FB$  en  $\angle OBC = \angle EFO = \frac{1}{2} \text{bg } EC$ . Uit de gelijkvormigheid der beschouwde driehoeken volgt nu:

$$OF : OB = OE : OC = EF : BC.$$

Ook is  $\triangle DOF \sim \triangle COA$  en  $\triangle DOE \sim \triangle BOA$ .

Hieruit:  $OD : OC = OF : OA = FD : AC$   
en  $OE : OA = OD : OB = DE : AB$ .

Indien nu de beide driehoeken ABC en DEF gelijkzijdig zijn, zijn de laatste verhoudingen in de drie aaneengeschakelde evenredigheden aan elkaar gelijk. Maar dan ook de eersten.

Dus:

$$OF : OB = OD : OC = OE : OA = OE : OC = OF : OA = OD : OB.$$

Hieruit volgt  $OA = OB = OC$  en  $OE = OD = OF$ .

Daar nu dus  $OD : OA = OE : OB = OF : OC$ , zijn de driehoeken ABC en DEF *tegengesteld homothetisch*.

Derhalve:

LXVII. „Een metaharmonisch zestal kan door inversie uit „acht verschillende centra worden omgezet in de toppen van „twee concentrische en homothetische gelijkzijdige driehoeken.”

§ 3. De inversiecentra  $z = \pm \frac{1}{2} a(1 + i)(-1 + \sqrt{3})$  en  $z = \pm \frac{1}{2} a(1 - i)(-1 - \sqrt{3})$  zijn wortelpunten van de vergelijking:

$$z^4 + 2a^2 i z^2 \sqrt{3} + a^4 = 0, \quad (246)$$

de overige vier van:

$$z^4 - 2a^2 i z^2 \sqrt{3} + a^4 = 0. \quad (247)$$

Deze vergelijkingen stellen twee groepen voor van de  $I_4$

(237), waarvan de diagonalen hoeken van  $45^\circ$  met de assen maken. Het produkt der diagonalen is volgens het voorgaande (§ 1 van dit hoofdstuk) gelijk aan  $4a^2$ , terwijl het kwadraat van eene zijde der ruit (246) bepaald is door

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = 2 \left\{ \frac{1}{2} a (-1 + \sqrt{3}) \right\}^2 + 2 \left\{ \frac{1}{2} a (-1 - \sqrt{3}) \right\}^2 = a^2 (2 - \sqrt{3}) + a^2 (2 + \sqrt{3}) = 4a^2.$$

Zoo vinden we ook voor het kwadraat van eene zijde der ruit (247):  $4a^2$ .

Daar van de vierhoeken (246) en (247) het produkt der overstaande zijden gelijk is aan het produkt der diagonalen, zijn de vierhoeken dus isodynamisch, hetgeen ook kan blijken bij vergelijking van (246) en (247) met de vergelijking (181). Vervangen we daarin  $-3a^4$  door  $a^4$  en dus  $-6a^2$  door

$$-6 \left\{ \pm \sqrt{-\frac{1}{3}a^4} \right\} = \pm 2a^2 i \sqrt{3} \text{ dan ontstaan uit (181)}$$

juist de vergelijkingen (246) en (247).

De covariante groep van

$$z^4 + 6\mu^2 z^2 + a^4 = 0$$

zij voorgesteld door:

$$z^4 + 6\mu'^2 z^2 + a^4 = 0,$$

dan volgt uit het verband van (233) met (231) en (232):

$$\mu'^2 = (a^4 - 3\mu^4) : 6\mu^2. \quad (248)$$

Is nu, zooals in (246), (247):

$6\mu^2 = \pm 2a^2 i \sqrt{3}$ , dan wordt voor de covariante groepen:

$$6\mu'^2 = \left\{ a^4 - 3 \left( \frac{1}{3} a^2 i \sqrt{3} \right)^2 \right\} : \pm \frac{1}{3} a^2 i \sqrt{3} = \mp 2a^2 i \sqrt{3}.$$

We zien dus:

LXVIII. „De acht hoofdpunten der vier cyclische  $I_3$  die „door de metaharmonische dubbelpunten eener  $I_4$  worden „bepaald, vormen, in twee isodynamische ruiten, twee groepen „der  $I_4$ , welke elkanders covarianten zijn.”

Het produkt van (246) en (247):

$$z^8 + 14a^4 z^4 + a^8 = 0 \quad (249)$$



stelt op den complexen bol de toppen van een kubus voor.<sup>1)</sup>

§ 4. De verg. (237) der  $I_4$  kunnen we ook schrijven in den vorm:

$$(z^2 + 2\lambda z + a^2)(z^2 - 2\lambda z + a^2) = 0, \quad (250)$$

waarin dan  $4\lambda^2 = 2a^2 - 6\mu^2$  is. Dan blijkt, dat elke groep der  $I_4$  is samengesteld uit twee paren der  $I_2$  met  $z = \pm a$  (twee der dubbelpunten der  $I_4$ ) tot dubbelpunten. Voor  $\lambda = 0$  vereenigen de beide paren zich tot het paar dubbelpunten  $z^2 = -a^2$ , voor  $\lambda = \infty$  tot het paar dubbelpunten  $z = 0$ ,  $z = \infty$  (verg. § 1).

Schrijven we de vergelijking der  $I_4$  (237) in den vorm:

$$(z^2 + 2\lambda z - a^2)(z^2 - 2\lambda z - a^2) = 0, \quad (251)$$

waarin dan  $4\lambda^2 = -2a^2 - 6\mu^2$ , dan zien we dat elke groep der  $I_4$  ook kan worden samengesteld uit twee paren der  $I_2$  met dubbelpunten  $z = \pm ai$  (de dubbelpunten  $z_5$  en  $z_6$  der  $I_4$ ). Voor  $\lambda = 0$  worden de beide paren tot het paar dubbelpunten  $z^2 = a^2$  vereenigd ( $z_3$  en  $z_4$ , zie § 2), voor  $\lambda = \infty$  hebben we het dubbel te tellen paar  $z = 0$ ,  $z = \infty$  (de dubbelpunten  $z_1$  en  $z_2$  der  $I_4$ ).

Ook is nog eene splitsing van elke groep der  $I_4$  mogelijk in paren van eene  $I_2$  die de dubbelpunten  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \infty$  der  $I_4$  tot dubbelpunten heeft. Deze  $I_2$  is voor te stellen door  $z^2 + \nu = 0$ . Voor  $\nu = 0$  geeft dit immers het dubbelpunt  $z^2 = 0$ , voor  $\nu = -\infty$  het dubbelpunt  $z^2 = \infty$ .

Eene groep der  $I_4$ :  $z^4 + 6\mu^2 z^2 + a^4 = 0$ , uit twee paren dezer  $I_2$  opgebouwd wordt dan aldus voorgesteld:

$$(z^2 + \nu)(z^2 + \nu') = 0, \quad (252)$$

of  $z^4 + (\nu + \nu')z^2 + \nu\nu' = 0$ .

Dus moet  $\nu + \nu' = 6\mu^2$  en  $\nu\nu' = a^4$  zijn, zoodat voor elke groep  $\mu$  de door  $\nu$  en  $\nu'$  bepaalde paren der  $I_2$  te vinden zijn. Voor  $\nu = a^2$ ,  $\nu' = a^2$  worden de beide paren tot het paar dubbelpunten  $z^2 = -a^2$  vereenigd ( $z_5$  en  $z_6$  der  $I_4$ ), voor  $\nu = -a^2$ ,  $\nu' = -a^2$  tot  $z^2 = a^2$ , d. z. de dubbelpunten  $z_3$  en  $z_4$  der  $I_4$ .

<sup>1)</sup> Verg. KLEIN. l. c. p. 50.

Uit dit alles blijkt dus:

LXIX. „Elke groep eener  $I_4$  met metaharmonische dubbelpunten kan op drie wijzen in paren worden gesplitst. Bij „elke splitsing zijn de dubbelpunten der door de beide paren „bepaalde  $I_2$  twee der dubbelpunten der  $I_4$ , terwijl de beide „andere paren dubbelpunten der  $I_4$  twee paren dezer  $I_2$  vormen.”

§ 5. Uit de beschouwingen van § 2 en de daarin afgeleide eigenschap LXVII, blijkt dat de  $I_4$  door inversie kan worden omgezet in eene  $I_4$ , waarvan de dubbelpunten twee gelijkzijdige driehoeken vormen, en dus door de vergelijking:

$$(z^3 - k^3)(z^3 - l^3) = 0 \quad (253)$$

kunnen worden voorgesteld.

Daar de twee driehoeken tegengesteld homothetisch zijn, zijn  $k$  en  $l$  afhankelijk van elkaar.

Zijn  $k$  en  $l$  dubbelpunten van de  $I_2$ :

$$z z' + a_1 (z + z') + a_2 = 0,$$

dan geldt

$$k^2 + 2 a_1 k + a_2 = 0 \text{ en } l^2 + 2 a_1 l + a_2 = 0,$$

waaruit volgt:  $a_1 = -\frac{1}{2}(k + l)$  en  $a_2 = kl$ .

De  $I_2$ :

$$z z' - \frac{1}{2}(k + l)(z + z') + kl = 0 \quad (254)$$

heeft dus de punten  $k$  en  $l$  tot dubbelpunten.

Zal  $z = \varepsilon k$ ,  $z' = \varepsilon l$  een paar van deze  $I_2$  vormen, dan

moet  $\varepsilon^2 kl - \frac{1}{2}(k + l)(\varepsilon k + \varepsilon l) + kl = 0$  zijn,

of  $2(\varepsilon^2 + 1)kl - \varepsilon(k + l)^2 = 0$ ,

of, wegens de betrekking  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ :

$$(k + l)^2 + 2kl = 0. \quad (255)$$

Opdat  $z = \varepsilon^2 k$ ,  $z' = \varepsilon^2 l$  een paar zij van de  $I_2$  (254) moet aan deze zelfde voorwaarde worden voldaan. Stellen we  $k + l = 2m$ , dan wordt de voorwaarde (255):

$$4m^2 + 2k(2m - k) = 0,$$

of

$$k^2 - 2mk - 2m^2 = 0$$

waaruit  $k = m(1 \pm \sqrt{3})$ .



Kiezen we  $k = m(1 + \sqrt{3})$ , dan is  $l = m(1 - \sqrt{3})$  (256)

Indien tusschen  $k$  en  $l$  het hier aangegeven verband bestaat, zullen dus ook de geïnverteerde dubbelpunten der  $I_4$  en elke groep voldoen aan LXIX. De metaharmonische groep (253) dier dubbelpunten:  $(z^3 - k^3)(z^3 - l^3) = 0$  wordt nu:

$$(z^3 - 10m^3 - 6m^3\sqrt{3})(z^3 - 10m^3 + 6m^3\sqrt{3}) = 0,$$

of 
$$z^6 + 20m^3z^3 - 8m^6 = 0 \quad (257)$$

De bikwadratische involutie, die door inversie uit de gegeven  $I_4$  is ontstaan en waarvan (257) de dubbelpunten voorstelt, kan nu niet alleen worden opgebouwd uit telkens twee paren der  $I_2$  (254), maar ook (verg. § 4) uit de beide  $I_2$  die achtereenvolgens  $\varepsilon k$ ,  $\varepsilon l$  en  $\varepsilon^2 k$ ,  $\varepsilon^2 l$  tot dubbelpunten hebben.

Deze drie  $I_2$  worden gelijktijdig door de verg.

$$zz' - \varepsilon^p m(z + z') - 2\varepsilon^{2p} m^2 = 0 \quad (p = 0, 1, 2) \quad (258)$$

voorgesteld.

Het punt  $z = \infty$  wordt door de dubbelpunten  $k$  en  $l$  der  $I_2$  (254) harmonisch gescheiden van het midden  $m$  dier punten;  $z = \infty$  en  $z = m$  vormen dus een paar dier  $I_2$ , dus ook een paar der  $I_4$ . Zoo vormen  $z = \infty$ ,  $z = m\varepsilon$  een paar der  $I_2$  met dubbelpunten  $k\varepsilon$  en  $l\varepsilon$  en verder  $z = \infty$ ,  $z = m\varepsilon^2$  een paar der  $I_2$  met dubbelpunten  $k\varepsilon^2$  en  $l\varepsilon^2$ .

We hebben dus drie punten  $z = m$ ,  $z = m\varepsilon$ , en  $z = m\varepsilon^2$ , die elk met  $z = \infty$  een paar der  $I_4$  vormen, gezamenlijk dus met  $z = \infty$  eene groep der  $I_4$ .

De vergelijking van dit viertal  $z = \infty$ ,  $z = m\varepsilon^p$ , is:

$$z^3 - m^3 = 0. \quad (259)$$

Het punt  $z' = 0$  wordt door een der drie punten  $z = -2\varepsilon^p m$  aangevuld tot een paar van de overeenkomstige  $I_2$  uit (258), vormt dus met elk dier punten een paar der  $I_4$ , en met de drie punten te zamen een viertal der  $I_4$  met vergelijking:

$$z(z + 2m)(z + 2\varepsilon m)(z + 2\varepsilon^2 m) = 0,$$

of 
$$z(z^3 + 8m^3) = 0. \quad (260)$$

Uit de beide groepen (259) en (260) kunnen we nu de  $I_4$  opgebouwd denken. Hare vergelijking wordt dan:

$$z^4 + 8m^3z = 4\lambda(z^3 - m^3),$$

of: 
$$z^4 - 4\lambda z^3 + 8m^3z + 4\lambda m^3 = 0. \quad (261)$$

Voor de covariante groep vinden we met behulp van (229) (welke de covariante groep van (230) voorstelt), ( $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \lambda$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = -2m^3$ ,  $a_4 = 4\lambda m^3$ ):

$$z^4 - 4\lambda^{-2} m^3 z^3 + 8m^3 z + 4\lambda^{-2} m^6 = 0 \quad (262)$$

Het zwaartepunt  $\lambda_c$  der covariante groep is gelijk aan  $\lambda^{-2} m^3$  of

$$\lambda^2 \lambda_c = m^3, \quad (263)$$

waarin dan  $\lambda$  het zwaartepunt van de gegeven groep is.

We zien hier weder dat elke groep als covariante groep tot twee andere groepen behoort.

De zwaartepunten  $\lambda$  en  $\lambda_c$  vallen samen voor  $\lambda^3 = m^3$ . De drie punten  $m \varepsilon^P$  zijn dus de coïncidenties van de verwantschap (1, 2) die tusschen  $\lambda_c$  en  $\lambda$  bestaat. Daar nu tusschen de punten van het vlak als polen en de harmonische centra ten opzichte van iedere pool voor een bepaald drietal punten ook eene verwantschap (1, 2) bestaat, kunnen we vermoeden, dat de waarden  $\lambda$  bij eene bepaalde  $\lambda_c$  behoorende, de harmonische centra zijn van de groep  $z^3 = m^3$  naar de pool  $\lambda_c$ .

Deze vinden we op de bekende wijze als dubbelpunten der  $I_3$ :  $z^3 - m^3 = \mu(z - \lambda_c)^3$ , dus door eliminatie van  $\mu$  uit deze vergelijking en uit hare afgeleide:  $z^2 = \mu(z - \lambda_c)^2$ , welke eliminatie ons werkelijk de vergelijking (263):  $z^2 \lambda_c = m^3$  oplevert.

Dus:

LXX. „Het zwaartepunt van de covariante groep van een viertal der  $I_4$  is het harmonisch centrum van den eersten „graad voor het drietal middens der paren dubbelpunten naar „het zwaartepunt van het gegeven viertal als pool.”

Vallen de beide harmonische centra van den tweeden graad (de bovengenoemde  $\lambda$ ) van eenig punt  $\lambda_c$  ten opzichte van de groep  $z^3 = m^3$  samen, dan vormen zij met  $\lambda_c$  de isodynamische centra van die groep (zie XXXVII). De groepen, waarvan  $\lambda$  en  $\lambda_c$  de zwaartepunten zijn, zijn dan elkanders covarianten. De beide wortels  $\lambda$  uit (263) of  $\lambda^2 = m^3 : \lambda_c$  worden nu gelijk voor  $\lambda = 0$  en voor  $\lambda = \infty$  (d. i.  $\lambda_c = 0$ ).

De daarbij behoorende, onderling covariante groepen vinden



we uit (261) en (262). In beide gevallen vinden we dezelfde groepen, n.l.

$$z(z^3 + 8m^3) = 0 \text{ en } z^3 - m^3 = 0.$$

Daar de  $I_4$  niet meer dan deze twee, onderling covariante, groepen bezit en de in LXVIII genoemde acht hoofdpunten twee onderling covariante groepen vormden van de oorspronkelijke  $I_4$ , vormen de twee eerstgenoemde groepen  $\{z(z^3 + 8m^3) = 0$  en  $z^3 - m^3 = 0\}$  de inverse beelden van die acht hoofdpunten.

Zij zijn dus (zie LXVII) de inversen van de acht inversiecentra (249), uit één waarvan de metaharmonische dubbelpunten der oorspronkelijke  $I_4$  in de toppen van de twee gelijkzijdige driehoeken (253) zijn omgezet.

## HOOFDSTUK IX.

### Bikwadratische involutie met drie drievoudige punten.

§ 1. Eene  $I_4$  met drievoudige elementen in  $z=0$ , en  $z=\infty$ , met de daarbij behorende vertakkingspunten  $z=u$  en  $z=v$ , wordt voorgesteld door:

$$z^3(z-u) = \lambda(z-v). \quad (264)$$

Zal zij een derde drievoudig punt bezitten in  $z=a$ , dan moet  $z=a$  dus gelijktijdig voldoen aan de vergelijking der  $I_4$  en aan hare eerste en tweede afgeleide:

$$\left. \begin{aligned} 3z^2(z-u) + z^3 &= \lambda \\ z(z-u) + z^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

Substitutie van  $z=a$  in de vergelijkingen (264) en (265) levert:

$$\left. \begin{aligned} a^3(a-u) &= \lambda(a-v) \\ 3a^2(a-u) + a^3 &= \lambda \\ (a-u) + a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

Uit deze vergelijkingen volgt  $u=2a$ ,  $\lambda=-2a^3$  en  $v=\frac{1}{2}a$ . Deze waarde voor  $\lambda$  bepaalt dus de groep der  $I_4$ , welke het drievoudige punt  $z=a$  zal bevatten. Deze groep wordt volgens (264) voorgesteld door:

$z^4 - 2az^3 + 2a^3z - a^4 = 0$  of  $(z+a)(z-a)^3 = 0$ , (267)  
zoodat  $z=-a$  het vertakkingspunt is van het drievoudige punt  $z=a$ . Deze beide worden door de beide andere drievoudige punten  $z=0$  en  $z=\infty$  harmonisch gescheiden.

Evenzoo vormen  $z=0$ ,  $z=u=2a$  met  $z=a$  en  $z=\infty$  eene harmonische groep en ook wordt het bij  $z=\infty$  behorende vertakkingspunt  $z=v=\frac{1}{2}a$  door de beide andere drievoudige punten  $z=0$  en  $z=a$  harmonisch gescheiden.

Daar tusschen de wortelpunten van de vergelijkingen (102) en (103), die elkanders covarianten waren, ook juist deze



betrekking bleek te bestaan (zie Hoofdst. III § 4), blijkt hier dus:

LXXI. „De drievoudige elementen van eene  $I_4$  en de drie „bijbehorende vertakkingspunten vormen twee tripels, die „elkanders covarianten zijn.”

§ 2. Volgens § 1 van Hoofdstuk III wordt elk drietal punten door inversie uit een der hoofdpunten van de door dat drietal bepaalde cyclische  $I_3$  omgezet in de toppen van een gelijkzijdigen driehoek. We kunnen dus de drievoudige elementen der  $I_4$  omzetten in de punten

$$z_1 = \alpha, \quad z_2 = \alpha \varepsilon, \quad z_3 = \alpha \varepsilon^2. \quad (268)$$

Zijn de vertakkingspunten  $u, v, w$  dan moet bij de inversie de harmonische scheiding van punt en vertakkingspunt door de twee andere punten blijven bestaan. Dus moet: (verg. (13), waar  $z_1$  en  $z_2$  harmonisch gescheiden worden door de dubbelpunten  $a$  en  $-a$ ):  $z_1 u = -z_2 z_3$  zijn,

$$\text{of:} \quad u = \{ -(\alpha \varepsilon)(\alpha \varepsilon^2) : \alpha = -\alpha \} \quad (269)$$

$$\text{En zoo wordt } v = -\alpha \varepsilon \text{ en } w = -\alpha \varepsilon^2 \}$$

Twee der drievoudige punten (268) bepalen dus met hunne vertakkingspunten (269) de  $I_4$ :

$$(z - \alpha \varepsilon)^3 (z + \alpha \varepsilon) = \lambda (z - \alpha \varepsilon^2)^3 (z + \alpha \varepsilon^2) \quad (270)$$

Voor  $\lambda = 1$  vinden we het viertal:

$$(z^3 - 3\alpha \varepsilon z^2 + 3\alpha^2 \varepsilon^2 z - \alpha^3)(z + \alpha \varepsilon) + \\ - (z^3 - 3\alpha \varepsilon^2 z^2 + 3\alpha^2 \varepsilon z - \alpha^3)(z + \alpha \varepsilon^2) = 0$$

$$\text{of:} \quad 2z^3 + \alpha^3 = 0 \text{ en } z = \infty \quad (271)$$

Dit viertal bestaat dus uit de toppen van een gelijkzijdigen driehoek met één zijner isodynamische centra. Voor  $\lambda = \varepsilon^2$  vinden we het viertal

$$z(z^3 + 2\alpha^3) = 0 \quad (272)$$

dus wederom een gelijkzijdigen driehoek met één zijner isodynamische centra, dus vier equianharmonische punten.

Door de substitutie

$$zt = \alpha^2 \varepsilon^k \quad (k = 0, 1, 2) \quad (273)$$

gaat de groep (271) over in:

$$2 \frac{\alpha^6 \varepsilon^{3k}}{t^3} + \alpha^3 = 0 \text{ of } 2\alpha^3 + t^3 = 0 \text{ en } t = 0,$$

dus juist de groep (272), terwijl diezelfde substitutie omgekeerd (272) omzet in (271).

Bouwen we de  $I_4$  op uit deze beide viertallen, dan krijgt hare vergelijking de gedaante:

$$z^4 + 2 \alpha^3 z = 2 \mu (2 z^3 + \alpha^3), \quad (274)$$

wanneer we door  $\mu$  het zwaartepunt eener groep aanduiden.

Deze vergelijking gaat door de substitutie (273) over in:

$$t^4 + 2 \alpha^3 t = \frac{\alpha^2 \varepsilon^k}{2 \mu} (2 t^3 + \alpha^3),$$

$$\text{of:} \quad t^4 + 2 \alpha^3 t = 2 \mu' (2 t^3 + \alpha^3). \quad (275)$$

Dit viertal is weer eene groep der  $I_4$  (274), waarbij dus tusschen de zwaartepunten der beide groepen de betrekking bestaat:

$$4 \mu \mu' = \alpha^2 \varepsilon^k \quad (k = 0, 1, 2) \quad (276)$$

De vergelijking (273) vertegenwoordigt voor elke waarde van  $k$  eene  $I_2$  met dubbelpunten  $\pm \sqrt{\alpha^2 \varepsilon^k}$ , dus voor  $k=0$  zijn de dubbelpunten dezer  $I_2$ ,  $\pm \alpha$ , dat is juist een der drievoudige elementen der  $I_4$  met het bijbehorende vertakkingspunt. Voor  $k=1$  of 4 heeft de  $I_2$  de dubbelpunten  $\pm \alpha \varepsilon^2$ ,  $k=2$  geeft de dubbelpunten  $\pm \alpha \varepsilon$ . Derhalve:

LXXII. „Eene  $I_4$  met drie drievoudige elementen wordt „door drie kwadratische involuties in zichzelf vervormd. Elke „dezer  $I_2$  heeft hare dubbelpunten in een drievoudig punt met „zijn vertakkingspunt. De beide andere vertakkingsgroepen „verwisselen onderling van plaats, terwijl dit ook voor telkens „twee groepen der  $I_4$  het geval is.”

Dat de eene vertakkingsgroep juist in de andere overgaat, blijkt, wanneer we b.v. voor  $k=0$  de substitutie  $z t = \alpha^2$  toepassen op de vertakkingsgroepen voor  $k=1$  of 2.

De groep  $(z - \alpha \varepsilon)^3 (z + \alpha \varepsilon) = 0$  gaat over in

$$(t - \alpha \varepsilon^2)^3 (t + \alpha \varepsilon^2) = 0 \text{ en omgekeerd.}$$

Bij de vervorming door de involutie  $z t = \alpha^2$  ( $k=0$ ) blijven, volgens (276), de groepen waarvoor  $4 \mu^2 = \alpha^2$  onveranderd. Hierbij behoort natuurlijk de groep gevormd door de dubbelpunten der  $I_2$ , d.i. de vertakkingsgroep  $(z - \alpha)^3 (z + \alpha) = 0$



en verder de groep:  $z^4 + 2\alpha z^3 + 2\alpha^3 z + \alpha^4 = 0$ , welke door substitutie van  $2\mu = -\alpha$  uit verg. (274) ontstaat.

De vergelijking dezer groep is te schrijven:

$$z^2 + \frac{\alpha^4}{z^2} + 2\alpha \left( z + \frac{\alpha^2}{z} \right) = 0.$$

Stellen we nu  $z + \frac{\alpha^2}{z} = 2u$ , (277)

dan gaat de vergelijking der groep over in:

$$u^2 + \alpha u - \frac{1}{2}\alpha^2 = 0. \quad (278)$$

Uit (277) of  $z^2 - 2uz + \alpha^2 = 0$  blijkt dat  $u$  het zwaartepunt is van een paar der  $I_2$  waarvoor  $z_1 z_2 = \alpha^2$ , dat is juist de involutie (voor  $k=0$ ) die we op de  $I_4$  toepassen. Uit (278) blijkt nu dus, dat die groep der  $I_4$  hierbij onveranderd blijft, welke uit twee paren der  $I_2$  bestaat, welker zwaartepunten voldoen aan  $u_1 u_2 = -\frac{1}{2}\alpha^2$ .

Is (zie (276))  $4\mu'\mu_1 = \alpha^2$ ,  $4\mu'\mu_2 = \alpha^2\varepsilon$  en  $4\mu'\mu_3 = \alpha\varepsilon^2$ , dan voldoen de zwaartepunten  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  der groepen welke door de drie kwadratische involuties uit eenzelfde groep der  $I_4$  ontstaan, aan de betrekking:

$$\mu_3 = \varepsilon\mu_2 = \varepsilon^2\mu_1.$$

LXXIII. „De zwaartepunten der drie groepen der  $I_4$ , welke „door de drie involutorische vervormingen uit eenzelfde groep „der  $I_4$  ontstaan, vormen de toppen van een gelijkzijdigen „driehoek, die (zie 268) concentrisch is met den driehoek „der drievoudige punten.”

De focale  $I_3$  van de involutie (274) heeft tot vergelijking:

$$2z^3 + \alpha^3 = 6\mu z^2. \quad (279)$$

Alle groepen dezer  $I_3$  hebben één brandpunt gemeen, daar hare afgeleide:  $z^2 = 2\mu z$ , onafhankelijk van  $\mu$ , den wortel  $z=0$  bevat.

§ 3. In het voorgaande hebben we de willekeurige  $I_4$  door inversie uit een der hoofdpunten van de cyclische  $I_3$ , die door het drietal drievoudige punten wordt bepaald, omgezet in eene nieuwe  $I_4$ .

Zulk een hoofdpunt is een der isodynamische centra van de groep der drie punten. Het gaat bij inversie over in het oneindig ver gelegen punt.

Daar nu volgens XVII, het zwaartepunt eener groep haar harmonisch centrum van den eersten graad is voor een oneindig ver gelegen pool vinden we door omgekeerde inversie uit het voorgaande voor de willekeurige  $I_1$  de eigenschap:

LXXIV. „De harmonische centra van den eersten graad „van de groepen eener  $I_4$  met drie drievoudige punten, naar „een der isodynamische centra van dat drietal punten als „pool, worden door de drie  $I_2$ , waarin de groepen der  $I_4$  „twee aan twee gerangschikt kunnen worden, eveneens in „paren gebracht.”

En in verband met LXXIII en XIX:

„De drie harmonische centra, die volgens deze drie ver- „vormingen met een vierde overeenkomen, behooren als drietal „tot de cyclische  $I_3$ , waarvan de drievoudige punten eene „groep vormen.”

---



## HOOFDSTUK X.

### Bikwadratische involutie met twee viervoudige punten.

§ 1. Eene  $I_4$  met viervoudige elementen in  $z = a$ , en  $z = -a$ , wordt voorgesteld door de vergelijking:

$$(z - a)^4 = \lambda (z + a)^4. \quad (280)$$

Bij invoering van het zwaartepunt  $z_0$  der door  $\lambda$  bepaalde groep, dat uit de schrijfwijze:

$$(1 - \lambda) z^4 - 4 a (1 + \lambda) z^3 + 6 a^2 (1 - \lambda) z^2 + 4 a^3 (1 + \lambda) z + a^4 (1 - \lambda) = 0$$

gelijk blijkt te zijn aan  $a(1 + \lambda) : (1 - \lambda)$ , gaat de vergelijking der  $I_4$  over in:

$$z^4 + 6 a^2 z^2 + a^4 = 4 z_0 (z^3 + a^2 z). \quad (281)$$

Volgens (38) is dit de vergelijking voor eene harmonische groep met zwaartepunt  $z_0$ , die met de punten  $z = \pm a$  een metaharmonisch zestal vormt. Deze punten zijn de viervoudige punten of hoofdpunten der  $I_4$ ; we zien dus:

LXXV. „Eene  $I_4$  met twee viervoudige punten bestaat uit „harmonische groepen, die elk met de hoofdpunten eene „metaharmonische groep vormen.”

Voor de vier punten eener groep vinden we uit (280):

$$(z - a) = (z + a) \sqrt[4]{\lambda},$$

$$\text{dus: } \frac{z_1 - a}{z_1 + a} = i \frac{z_2 - a}{z_2 + a} = - \frac{z_3 - a}{z_3 + a} = -i \frac{z_4 - a}{z_4 + a} \quad (282)$$

Stellen we  $(z - a) : (z + a)$  voor door  $u$ , dan liggen dus de punten  $U_1, U_2, U_3, U_4$  op een cirkel.

$$\text{De vergelijking} \quad u_1 = i u_2 \quad (283)$$

waarbij dan volgens (282) behoort:  $u_2 = i u_3, u_3 = i u_4$ , geeft eene cyclische projectiviteit aan, waarbij de punten  $U_1, U_2, U_3, U_4$  achtereenvolgens overgaan in  $U_4, U_1, U_2, U_3$ . Zoo wordt dus door die cyclische projectiviteit  $(z_1 - a) : (z_1 + a) = i (z_2 - a) : (z_2 + a)$ ,

de  $I_4$  in zichzelf omgezet, zóó, dat elk punt de plaats inneemt van een ander punt derzelfde groep en nadat die omzetting viermaal heeft plaats gehad, zijn eerste plaats weer inneemt.

Door de involutorische vervorming:

$$\frac{z_1 - a}{z_1 + a} = - \frac{z_3 - a}{z_3 + a} \text{ of } u_1 = -u_3 \quad (284)$$

gaat daarentegen elk punt  $U$  over in zijn tegenpunt op den cirkel, die zijne groep bevat en dus elk punt  $Z$  in het overstaande hoekpunt van den harmonischen vierhoek der  $I_4$ , die door het punt bepaald wordt.

De substitutie (15):

$$z - a = r e^{i\varphi}, \quad z + a = s e^{i\psi}$$

geeft, toegepast op (284):  $r_1 : s_1 = r_3 : s_3$

en:  $\phi_1 - \psi_1 = \phi_3 - \psi_3 \pm \pi$ .

Volgens (17) en (18) liggen dus de punten  $Z_1$  en  $Z_2$  op een  $\mathfrak{B}$ -cirkel van een bundel, die de hoofdpunten  $z = \pm a$  tot grenspunten heeft. En evenzoo de punten  $Z_2$  en  $Z_4$ .

Dat  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  en  $Z_4$  op eenzelfde  $\mathfrak{B}$ -cirkel liggen, blijkt, wanneer we de substitutie (15) ook nog toepassen op (283), dan:

$$r_1 : s_1 = r_2 : s_2$$

en:  $\phi_1 - \psi_1 = \phi_2 - \psi_2 + \frac{\pi}{2}$ .

Voor alle groepen op eenzelfde  $\mathfrak{B}$ -cirkel geldt  $s = c r$ , waarin dan  $c = \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right|$ , en dus  $|\lambda| = \frac{1}{c^4}$ , in verband met de uit (280) volgende vergelijking:

$$z - a = (z + a) \sqrt[4]{\lambda}$$

en de beide uit (15) volgende betrekkingen:

$$|z - a| = r \text{ en } |z + a| = s.$$

Voor het zwaartepunt eener groep geldt:

$$z_0 = a(1 + \lambda) : (1 - \lambda)$$

of

$$z_0 - a = \lambda(z_0 + a)$$

waaruit volgt:  $|z_0 + a| = \left| \frac{1}{\lambda} (z_0 - a) \right|$ .



De zwaartepunten der groepen, waarvoor de modulus van  $\lambda$  dezelfde is, en die dus liggen op een cirkel  $s = cr$ , zijn verbonden door den cirkel  $s = c^4 r$ .

§ 2. Uit (282) volgt:

$$\left. \begin{aligned} (z_1 - a)(z_3 + a) &= -(z_3 - a)(z_1 + a) \text{ of } z_1 z_3 = a^2 \\ \text{en } (z_2 - a)(z_4 + a) &= -(z_4 - a)(z_2 + a) \text{ of } z_2 z_4 = a^2 \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

We kunnen de  $I_4$  dus opbouwen uit paren der  $I_2$ , met dubbelpunten  $\pm a$ , door aan elk paar toe te voegen dat paar, waarin het door de cyclische projectiviteit (283) wordt omgezet.

Noemen we de punten van het toegevoegde paar  $t$ , dan dus:

$$\begin{aligned} (z - a) : (z + a) &= i(t - a) : (t + a) \\ \text{of } t(z - iz - a - ai) &= i(-az - a^2) + a^2 - az \\ \text{of } t &= a \frac{a - iz}{z - ai}. \end{aligned} \quad (286)$$

Uit de verg. (285) volgt:  $z_3 = a^2 : z_1$ , waaruit we voor het midden  $m$  van de diagonaal  $Z_1 Z_3$ ,  $m = \frac{z_1 + z_3}{2}$ , afleiden de betrekking:

$$z_1 + \frac{a^2}{z_1} = 2m.$$

Passen we nu de substitutie  $z + \frac{a^2}{z} = 2m$  toe op de vergelijking (281) van eene groep der  $I_4$ , dan ontstaat de kwadratische vergelijking:

$$m^2 - 2z_0 m + a^2 = 0. \quad (287)$$

De wortels  $m_1, m_2$  dezer vergelijking zijn nu dus de middens van de diagonalen der groep. Zij voldoen aan  $m_1 m_2 = a^2$ . Derhalve:

LXXVI. „De middens der diagonalen van elken vierhoek „der  $I_4$  worden door de hoofdpunten harmonisch gescheiden.”

Geheel analoog aan de bij de  $I_3$  met twee drievoudige punten, de cyclische  $I_3$ , gegeven bewijzen (Hoofdstuk III § 1), kunnen we hier deze eigenschap aantoonen:

LXXVII. „Eene  $I_4$  met twee viervoudige punten, eene „cyclische  $I_4$ , gaat door inversie uit elk harer hoofdpunten over

„in eene *isocentrische* involutie, welker groepen uit de toppen „van vierkanten bestaan.”

Zij nu  $B_1 C_1 B_2 C_2$  een vierhoek der  $I_4$  met hoofdpunten  $A_1$  en  $A_2$ . Zij  $D_1$  het snijpunt der overstaande zijden  $B_1 C_1$  en  $B_2 C_2$ , dus  $D_1 \equiv (B_1 C_1, B_2 C_2)$  en zoo  $D_2 \equiv (B_1 C_2, B_2 C_1)$ .

Door inversie uit  $A_1$  gaan de toppen van den vierhoek over in de toppen van het vierkant  $b_1 c_1 b_2 c_2$ , terwijl de zijden  $B_1 C_1$ ,  $B_2 C_2$ ,  $B_1 C_2$ ,  $B_2 C_1$  achtereenvolgens in de cirkels  $A_1 b_1 c_1$ ,  $A_1 b_2 c_2$ ,  $A_1 b_1 c_2$  en  $A_1 b_2 c_1$  worden omgezet. Met  $D_1$  en  $D_2$  komen in de inverse figuur natuurlijk de tweede snijpunten der cirkels  $A_1 b_1 c_1$ ,  $A_1 b_2 c_2$ , d. i.  $d_1$  en van  $A_1 b_1 c_2$ ,  $A_1 b_2 c_1$ , d. i.  $d_2$  overeen.

Het middelpunt van cirkel 1, zooals we  $A_1 b_1 c_1$  zullen noemen, ligt in de middelloodlijn van  $b_1 c_1$ , welke echter samenvalt met de middelloodlijn van  $b_2 c_2$ , waarop het middelpunt van cirkel 2 moet liggen. Daar deze lijn dus de middelpunten van 1 en 2 verbindt en daar  $A_1 d_1$  hunne machtslijn is, zal  $d_1$  het spiegelbeeld zijn van  $A_1$  ten opzichte van die middelloodlijn. Zoo ligt analoog  $d_2$  symmetrisch met  $A_1$  t. o. v. de middelloodlijn van  $b_1 c_2$  en  $b_2 c_1$ . Daar deze lijnen een rechten hoek vormen, is ook  $\angle d_1 A_1 d_2 = 90^\circ$ . De punten  $d_1$  en  $d_2$  zijn dus tegenpunten op den cirkel  $d_1 A d_2$ , die concentrisch is met het vierkant  $b_1 c_1 b_2 c_2$ .

Volgens (285) worden twee overstaande hoekpunten van een vierhoek der  $I_4$  door de hoofdpunten harmonisch gescheiden. Deze betrekking moet bij de inversie blijven bestaan en daar het punt  $A_1$  overgaat in  $a_\infty$ , zal het tweede hoofdpunt  $A_2$  overgaan in het centrum  $a_2$  van het vierkant  $b_1 c_1 b_2 c_2$ , dus van de isocentrische  $I_4$  (vergelijk Hoofdstuk III § 1).

De punten  $d_1$  en  $d_2$  worden nu door  $a_2$  en  $a_\infty$  harmonisch gescheiden. Daar dit ook vóór de inversie het geval was, vinden we:

LXXVIII. „De snijpunten der overstaande zijden van elken „vierhoek der cyclische  $I_4$  worden door de hoofdpunten harmonisch gescheiden.”

„Zij liggen op de lijn, die den afstand der hoofdpunten „loodrecht middendoordeelt.”



De cirkel  $A_1 d_1 d_2$  is de inversie van deze lijn, hetgeen we aldus kunnen aantoonen.

Inverteeren we den cirkel in omgekeerden zin, dan gaat hij over in eene lijn loodrecht op  $A_1 a_2$ . Het punt  $p$ , diametraal tegenover  $A_1$ , wordt door  $a_2$  en  $a_\infty$  harmonisch gescheiden van  $A_1$ . Het gaat dus over in een punt  $P$ , door  $A_2$  en  $A_1$  harmonisch gescheiden van het punt in het oneindige;  $P$  is dus het midden van  $A_1 A_2$  en bijgevolg gaat de cirkel in de middelloodlijn van  $A_1 A_2$  over.

Laten we de koorden  $B_2 C_2$  en  $B_1 C_1$  van den omgeschreven cirkel van den vierhoek tot raaklijnen worden in de punten  $C_2$  en  $C_1$  (twee overstaande toppen) dan blijft haar snijpunt op diezelfde rechte.

Daar de overstaande toppen van een vierhoek der  $I_4$  paren zijn van de  $I_2$  met  $\pm a$  tot dubbelpunten, hadden we het eerste deel van eigenschap LXXVIII ook kunnen afleiden uit IV.

Op volkomen analoge wijze als we in Hoofdstuk III § 5 voor de cyclische  $I_3$  eigenschap XXVI hebben afgeleid, leiden we voor de cyclische  $I_4$  af de eigenschap:

LXXIX. „Worden de toppen van een viertal der cyclische „ $I_4$  in bepaalden zin rondgaande, toegevoegd aan die van een „ander viertal, dan wordt elk der hoofdpunten door de vier gevormde paren harmonisch gescheiden van de punten van „een derde viertal der  $I_4$ .“

## HOOFDSTUK XI.

### Cyclische involutie van den $n^{\text{den}}$ graad.

§ 1. Daar we in het vorige hoofdstuk reeds analogie vonden tusschen de  $I_3$  met twee drievoudige en de  $I_4$  met twee viervoudige elementen, ligt het voor de hand de uitbreiding der eigenschappen na te gaan bij involuties van den  $n$ den graad met twee  $n$ -voudige punten.

Evenals de cyclische  $I_4$  uit eene  $I_2$  met dubbelpunten  $\pm a$  kan worden opgebouwd, door aan elk paar  $z$  een paar  $t$  toe te voegen, verbonden door  $\frac{z-a}{z+a} = i \frac{t-a}{t+a}$ , kan men uit eene  $I_3$  met twee drievoudige punten  $\pm a$ , eene cyclische  $I_6$  samenstellen, door aan elk drietal  $z$  een drietal  $t$  toe te voegen, verbonden door:  $\frac{z-a}{z+a} = \varepsilon \frac{1}{2} \frac{t-a}{t+a}$ , waarin  $\varepsilon = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ , evenals in Hoofdstuk III.

Zoo ontstaat in het algemeen uit eene cyclische involutie van den graad  $p$  eene cyclische involutie van den graad  $2p$ , als men aan elke groep  $(z)$  der  $I_p$  die groep  $(t)$  toevoegt, waarin ze door de substitutie

$$\frac{z-a}{z+a} = \omega \frac{t-a}{t+a}; \left( \omega = e^{\frac{\pi i}{p}} \right) \quad (288)$$

wordt omgezet.

Hierin zijn, als boven, de hoofdpunten der  $I_p: z = \pm a$ . We vinden dus nu algemeen (verg. Hoofdstuk III en X):

LXXX. „Eene cyclische  $I_n$  is invariant voor de cyclische projectiviteit, met periode  $n$ , opgesloten in:

$$\frac{z-a}{z+a} = \varepsilon^k \frac{t-a}{t+a} \quad (289)$$

„waarin  $\varepsilon$  den  $n^{\text{den}}$  machtswortel uit de eenheid, ( $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ )  
 „voorstelt, en  $k$  betrekkelijk ondeelbaar is met  $n$ .“



Heeft  $k$  een deeler gemeen met  $n$ , dan worden de punten eener groep zoodanig door de vervorming (289) verplaatst, dat elk punt, nadat de vervorming eenige keeren is herhaald, zijne oorspronkelijke plaats heeft hernomen, zonder alle punten der groep achtereenvolgens vervangen te hebben. De  $I_n$  is ten opzichte van zulk eene cyclische projectiviteit te beschouwen als eene involutie van lageren graad, daar immers elke groep in een aantal ondergroepen gesplitst is, die alle evenveel punten bevatten. Ook blijkt dit uit (289), waarin nu de exponent van  $e$  te vereenvoudigen is. Denken we ons vijf punten regelmatig op een cirkel geplaatst en genummerd van 1 tot 5. Stel  $k = 2$ , dan komt na eenmaal (289) te hebben toegepast, het punt 1 in drie, de 2<sup>e</sup> keer in 5, de 3<sup>e</sup> keer in 2 (slaat dus 1 over), de 4<sup>e</sup> keer in 4 en de 5<sup>e</sup> keer in 1 terug. De periode is dus werkelijk gelijk aan  $n$ .

Is nu  $n = 6$  (denk de punten 1 tot 6 regelmatig op een cirkelomtrek geplaatst) en b.v.  $k = 2$ , dan is elk punt na drie vervangingen reeds op de oude plaats terug (1 komt achtereenvolgens in 3, 5, 1). De  $I_6$  is nu te beschouwen als eene  $I_3$ , waarvan 1, 3, 5 en ook 2, 4, 6 twee groepen vormen. Is  $n = 6$ ,  $k = 3$ , dan wordt ze eene  $I_2$ , enz.

Door toepassing van de substitutie (15) zou ook hier blijken, dat de groepen der cyclische  $I_n$  gedragen worden door de cirkels van den bundel  $\mathfrak{B}$ , die de hoofdpunten (dat zijn de  $n$ -voudige punten) tot grenspunten heeft, terwijl de zwaartepunten der groepen gelegen op eenzelfde  $\mathfrak{B}$ -cirkel  $s = cr$ , verbonden zijn door den cirkel  $s = c^n r$  (verg. o.a. XXX).

Door inversie uit elk der hoofdpunten als centrum gaat de cyclische  $I_n$  over in eene *isocentrische*  $I_n$ , waarvan de groepen toppen van regelmatige  $n$ -hoeken zijn. (Het bewijs hiervoor loopt volkomen parallel met het aan XIX voorafgaande).

Daar de isocentrische  $I_n$  door het geven van drie opvolgende punten van een regelmatige  $n$ -hoek volkomen bepaald is, omdat we dan in het middelpunt een der hoofdpunten vinden, is ook de cyclische  $I_n$  door drie opvolgende punten eener groep ondubbelzinnig aangewezen.

Hoe de vector van een hoofdpunt samenhangt met de vec-

toren der drie gegeven punten moge uit het volgende blijken.

Duiden we, in het algemeen, de hoofdpunten der  $I_n$  aan door  $z = a$  en  $z = b$ , dan is hare vergelijking:

$$(z - a)^n = \lambda (z - b)^n \quad (290)$$

en voor drie punten  $Z_1, Z_2, Z_3$  geldt:

$$\frac{z_1 - b}{z_1 - a} = \varepsilon \frac{z_2 - b}{z_2 - a} = \varepsilon^2 \frac{z_3 - b}{z_3 - a}, \quad (291)$$

waarin  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , evenals in (289).

Uit (291) volgt:

$$1 + \frac{a - b}{z_1 - a} = \varepsilon \left( 1 + \frac{a - b}{z_2 - a} \right) \text{ en zoo ook}$$

$$1 + \frac{a - b}{z_2 - a} = \varepsilon \left( 1 + \frac{a - b}{z_3 - a} \right) \text{ Door aftrekking en deeling}$$

door  $(a - b)$  vinden we hieruit:

$$\frac{1}{z_1 - a} - \frac{1}{z_2 - a} = \varepsilon \left( \frac{1}{z_2 - a} - \frac{1}{z_3 - a} \right)$$

$$\text{of} \quad \frac{1}{z_1 - a} + \frac{\varepsilon}{z_3 - a} - \frac{1 + \varepsilon}{z_2 - a} = 0 \quad (292)$$

Dit geeft:

$$\{z_2 z_3 - a(z_2 + z_3) + a^2\} + \varepsilon \{z_1 z_2 - a(z_1 + z_2) + a^2\} + \\ - \{z_1 z_3 - a(z_1 + z_3) + a^2\} - \varepsilon \{z_1 z_3 - a(z_1 + z_3) + a^2\} = 0$$

Deze vergelijking levert ons voor  $a$  slechts ééne waarde, n.l.

$$a = \{z_2 z_3 + \varepsilon z_1 z_2 - (1 + \varepsilon) z_1 z_3\} : \{z_2 - z_1 + \varepsilon(z_2 - z_3)\} \quad (293)$$

Het bepaald zijn der cyclische  $I_n$  door drie opvolgende punten eener groep, geldt ook, wanneer men de opvolgende punten neemt van den stervormigen veelhoek, waartoe eene groep, bij  $n$  oneven, aanleiding geeft.

§ 2. Zij de vergelijking der  $I_n$ , met hoofdpunten  $\pm a$ , gegeven als:

$$(z - a)^n = \lambda (z + a)^n,$$

dan geldt voor de opvolgende punten eener groep:

$$\frac{z_1 - a}{z_1 + a} = \varepsilon \frac{z_2 - a}{z_2 + a} = \varepsilon^2 \frac{z_3 - a}{z_3 + a} = \dots = \varepsilon^{n-1} \frac{z_n - a}{z_n + a} \quad (294)$$



waaruit, in verband met:

$$\varepsilon^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = 1$$

deze betrekking volgt

$$\left(\frac{z_1 - a}{z_1 + a}\right)^2 = \frac{z_2 - a}{z_2 + a} \cdot \frac{z_n - a}{z_n + a} = \frac{z_k - a}{z_k + a} \cdot \frac{z_{n-k+2} - a}{z_{n-k+2} + a} \quad (295)$$

Hieruit blijkt, dat elk punt der groep een dubbelpunt is van de  $I_2$ , waarvan telkens twee punten die even ver van het eerste verwijderd zijn, paren vormen. Is  $n$  even, dan zal het tweede dubbelpunt dier  $I_2$  in het overstaande hoekpunt gevonden worden. Is  $Z_1$  het eene dubbelpunt, dan volgt uit (295), onverschillig of  $n$  even of oneven is voor het tweede dubbelpunt  $T_1$  de vergelijking:

$$\frac{t_1 - a}{t_1 + a} = - \frac{z_1 - a}{z_1 + a}, \quad (296)$$

zoodat die dubbelpuntenparen  $Z_k T_k$  groepen der  $I_2$  zijn, welke de hoofdpunten  $z = \pm a$  tot dubbelpunten heeft.

Daar deze groepen  $Z_k T_k$ , uitgaande van een bepaalden  $n$ -hoek, op denzelfden  $\mathfrak{S}$ -cirkel liggen, gaan de verbindingslijnen dier punten  $Z_k, T_k$  voor elken  $n$ -hoek door één punt  $L$ . Evenals bij de cyclische  $I_3$ , kunnen we ook hier aantoonen, dat dit punt  $L$  van de zijden van den veelhoek verwijderd is op afstanden, die met die zijden evenredig zijn. Het is dus het *symmediaanpunt* van een *harmonischen*  $n$ -hoek. <sup>1)</sup>

Trekken we aan den omgeschreven cirkel van een  $n$ -hoek der cyclische  $I_n$  in het punt  $P_k$  de raaklijn, welke door de lijn  $P_{k-1} P_{k+1}$  in het punt  $S_k$  gesneden wordt, dan is  $\overline{S_k P_k^2} = S_k P_{k-1} \times S_k P_{k+1}$ , maar ook gelijk aan  $S_k P_{k-1} \times S_k P_{k+1}$ , daar  $P_k$  een dubbelpunt is der  $I_2$ , waarvan  $P_{k-1}, P_{k+1}$  paren vormen. Derhalve:

LXXXI. „In een harmonischen veelhoek convergeeren de „diagonalen  $P_{k-l} P_{k+l}$  alle naar een punt op de raaklijn „in het hoekpunt  $P_k$  aan den omgeschreven cirkel getrokken. „Is het aantal zijden even, dan gaat ook de raaklijn in het „tegenover  $P_k$  gelegen hoekpunt door dit punt.”

<sup>1)</sup> Verg. CASEIJ, *Sequel.* I. c.



Wordt de groep  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) door inversie uit het hoofdpunt  $A$  omgezet in de toppen van een regelmatig veelhoek  $p_k$  met centrum  $a'$ , d.i. het inverse punt van het andere hoofdpunt, dan gaan de lijnen  $P_{k-1}P_{k+1}$  over in cirkels  $A p_{k-1} p_{k+1}$ , het snijpunt  $S_k$  dier lijnen wordt dus het tweede snijpunt  $s_k$  dier cirkels, d.i. het spiegelbeeld van  $A$  ten opzichte van de lijn  $a' p_k$ .

Stellen we  $\angle A a' p_1$  door  $\phi$  voor, dan is  $\angle A a' p_2 = \phi + \frac{2\pi}{n}$ ,  $\angle A a' p_3 = \phi + 2\frac{2\pi}{n}$ , in het algemeen  $\angle A a' p_k = \phi + \frac{k-1}{n} 2\pi$ . Volgens de juist genoemde symmetrische ligging van de punten  $s_k$  ten opzichte van het punt  $A$  en de lijn  $a' p_k$ , geldt nu  $\angle A a' s_1 = 2 \times \angle A a' p_1 = 2\phi$  en zoo  $\angle A a' s_k = 2\phi + \frac{k-1}{n} 4\pi$ .

De punten  $s_k$  liggen dus op den cirkel met  $a'$  als centrum en  $A a'$  tot straal; zij vormen een regelmatig veelhoek, die voor oneven waarden van  $n$  een  $n$ -hoek is, immers elke hoek  $s_k a' s_{k+1}$  is twee maal zoo groot als een middelpuntshoek  $p_k a' p_{k+1}$  van den gegeven  $n$ -hoek. Om dezelfde reden bezit de veelhoek  $s_k$  bij even waarden van  $n$  slechts  $\frac{1}{2} n$  zijden.

Is dan  $n = 2m$ , zoodat  $p_{k+m}$  het tegenpunt is van  $p_k$ , dan is  $S_{k+m}$  identiek met  $S_k$  (zie LXXXI) en dus ook  $s_{k+m} \equiv s_k$ .

Zooals we bij het bewijs van eigenschap LXXVIII in Hoofdstuk X hebben aangetoond, is de cirkel met  $a'$  als centrum en  $A a'$  als straal, dus hier de cirkel  $A s_1 s_2 \dots s_k$  de inversie van de middelloodlijn van  $A A'$ ; deze is de machtlijn van den cirkelbundel (23).

Voor elke cyclische  $I_n$  geldt dus:

LXXII. „De vergaarpunten  $S_k$  der diagonalen  $P_{k-1}P_{k+1}$  van eene groep der  $I_n$ , liggen op de machtlijn van den cirkelbundel, die de hoofdpunten der  $I_n$  tot grenspunten heeft.

„Voor involuties van oneven graad vormen zij eene groep der  $I_n$ , voor  $n = 2m$  vormen zij eene groep van eene  $I_m$ ; „deze heeft de hoofdpunten met de  $I_{2m}$  gemeen.”



Eene koorde  $P_k P_{k+1}$  gaat door inversie uit  $A$  over in den cirkel  $A p_k p_{k+1}$ . Het snijpunt van twee overstaande zijden van eene groep eener cyclische  $I_{2m}$  gaat dus over in het tweede snijpunt  $r_k$  van de cirkels  $A p_k p_{k+1}$  en  $A p_{k+m} p_{k+m+1}$ .  $A$  en  $r_k$  liggen op de machtlijn dier cirkels en wel symmetrisch ten opzichte van de middelloodlijn der beide evenwijdige koorden  $p_k p_{k+1}$  en  $p_{k+m} p_{k+m+1}$ , welke dus door  $a'$  gaat.

Stellen we weer  $\angle A a' p_1 = \phi$ , dan is nu  $\angle A a' p_k = \phi + \frac{k-1}{2m} 2\pi$ . Zij  $B_k$  het punt van den cirkel midden tusschen  $p_k$  en  $p_{k+1}$ , dan is  $\angle A a' B_k = \phi + \frac{k-1}{2m} 2\pi + \frac{2\pi}{4m}$ .

Hieruit volgt nu  $\angle A a' r_k = 2\phi + \frac{2k-1}{2m} 2\pi$ .

Ook alle punten  $r_k$ ,  $m$  in getal, liggen dus op denzelfden cirkel  $a'$  ( $A a'$ ) als de punten  $s_k$ .

Wij besluiten dus:

LXXXIII. „De snijpunten der overstaande zijden van een „harmonischen  $2m$ -hoek liggen op de machtlijn van den „cirkelbundel, die de hoofdpunten der cyclische  $I_{2m}$ , waartoe „de harmonische veelhoek behoort, tot puntcirkels heeft. Zij „vormen eene groep der  $I_m$  met dezelfde hoofdpunten.”

Voegen we de punten van eene groep der isocentrische  $I_n$  bij opvolging toe aan de punten eener tweede groep, dan worden de middens van elk paar door dat paar harmonisch gescheiden van het punt in het oneindige, dat de inversie is van het hoofdpunt  $A$ , terwijl die middens zelve een regelmatig  $n$ -hoek met centrum  $a'$ , dus eene groep der isocentrische  $I_n$  vormen.

Inversie in omgekeerden zin geeft ons nu:

LXXXIV. „Voegt men de toppen van een harmonischen „veelhoek, in bepaalde richting rondgaande, toe aan de toppen „van een tweeden veelhoek der  $I_n$ , dan wordt elk der hoofd- „punten door de aldus gevormde paren, harmonisch geschei- „den van de punten eener derde groep.”

Het harmonische centrum van den eersten graad voor eene

$l$ -puntige groep naar een hoofdpunt als pool, wordt, volgens XI, bij inversie uit dat hoofdpunt het zwaartepunt van het geïnverteerde  $l$ -tal. Nu zullen de zwaartepunten van  $n$   $l$ -tallen, die we vormen uit  $l$  groepen der isocentrische  $I_n$ , door op regelmatige wijze telkens één punt uit elke groep te nemen, zelf weer een regelmatigen  $n$ -hoek vormen met centrum  $a'$ , dus eene groep der isocentrische  $I_n$ . Maar dan geldt ook:

LXXXV. „Vormt men  $n$  groepen van  $l$  punten ( $P_k Q_k R_k \dots$ ) „uit de toppen van  $l$  veelhoeken ( $P_k, Q_k, R_k \dots$ ) der cyclische „ $I_n$ , dan vindt men in de harmonische centra van den eersten „graad voor elk dier  $n$  groepen, naar een hoofdpunt als pool „eene nieuwe groep der  $I_n$ .“

Voor  $l=2$  gaat deze eigenschap in de vorige over.



## STELLINGEN.

---

### I.

De complexe involuties kunnen goede diensten bewijzen bij het opsporen van eigenschappen van ruimtekrommen.

### II.

Het is wenschelijk, aan de uiteenzetting van de theorie der niet-lineaire partiële differentiaal-vergelijkingen der eerste orde te laten voorafgaan de behandeling van de contact-transformaties van AMPÈRE en van LEGENDRE.

### III.

De eigenschappen der monoiden worden het eenvoudigst afgeleid uit eene afbeelding met behulp van centrale projectie.

### IV.

Dat men het oneindige van het complexe vlak als punt opvat, wordt meetkundig eerst duidelijk door afbeelding van dat vlak op een bol.

### V.

De wijze, waarop STURM het begrip differentiaal afleidt, is af te keuren.

### VI.

Bij de structuurtheorie der kristallen zal men rekening hebben te houden met de onderzoekingen van Vegard, die er op wijzen, dat de ionen als structuurelementen optreden. (Dr. L. VEGARD. Phil. Mag. 1916).

## VII.

Ook bij radioactieve omzettingen kan men van entropieverandering spreken.

## VIII.

Om te verklaren, dat de radioactieve verschijnselen door het toeval worden beheerscht, is het niet noodzakelijk aan te nemen, dat het atoom uit een groot aantal deelen is opgebouwd.

(A. DEBIERNE. Annales de Physique. Tome IV. 1915).

## IX.

De proeven van RUNGE en PASCHEN hebben de aanwezigheid van zuurstof op de zon hoogst waarschijnlijk gemaakt.

C. RUNGE u. F. PASCHEN. Phys. Z. S. XIV. 1267. 1913).

## X.

De meening van WIEDMANN en HALLWACHS, „dasz Vorhandensein von Gas eine notwendige Bedingung merklicher Lichtelektrizität ist,” is onjuist.

(G. WIEDMANN u. W. HALLWACHS Ber. d. Phys. Ges. 2. 1914).

## XI.

Er bestaat analogie tusschen de verschijnselen van den ferro- en paramagnetischen en die van den vloeibaren en gasvormigen toestand.

(J. R. ASHWORTH. Phil. Mag. April 1917).

## XII.

De proeven van GANS en MIGUEZ hebben overtuigend bewezen, dat de lichtabsorptie niet volgens quanten geschiedt.

(R. GANS u. A. P. MIGUEZ. Annalen der Physik 3. 1917).











