Over kromme lijnen die uit de poolvergelijking der kegelsneden worden afgeleid

2.

OVER KROMME LIJNEN

DIE UIT DE

POOLVERGELIJKING DER KEGELSNEDEN

KUNNEN WORDEN AFGELEID.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. J. J. VAN OOSTERZEE,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE THEOLOGISCHE FACULTEIT,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT

op Woensdag 3 Maart, des namiddags 1 uur

TE VERDEDIGEN

DOOR

GERRIT JAN HOFS,

GEBOREN TE DIEREN.

ARNHEM — G. J. THIEME — 1869.

VOORREDE.

De vele werkzaamheden welke ik te vervullen heb, sedert mijn verblijf in Gelderlands hoofdstad, als leeraar aan de aldaar bestaande hoogere burgerschool, zijn oorzaak dat dit academisch proefschrift niet eerder voltooid is. Ook zoude bijkans wederom eene vacantie voor mij in plaats van eene gewenschte en noodige rusttijd, een periode van vernieuwde inspanning geworden zijn, indien niet mijn promotor, Prof. Grinwis, *zoo welwillend geweest ware in de afgeloopene kersvacantie zijne vrije uren voor mij beschikbaar te stellen. Ik zeg UHGl. hiervoor van harte dank. Mocht ik van het voorrecht verstoken geweest zijn U tijdens mijn verblijf in de* *academiestad te leeren kennen; Uwe welwillendheid is oorzaak dat ik aan UHGl. groote verplichting gevoel.*

Aan de overige hoogleeraren der Phil. faculteit breng ik mijnen welgemeenden dank toe voor de bereidwilligheid waarmede ik steeds hulp verkregen heb waar mijne krachten te kort schoten, en voor de belangstelling welke ik steeds van hunne zijde ondervond.

Ik zal mij gelukkig achten indien hunne raadgevingen en hunne kennis mij mogten voorthelpen, daar waar hunne hulp door mij wordt ingeroepen.

INHOUD.

INLEIDING.

Eene rechte welke eene kromme doorsnijdt, zal met deze één of meer punten gemeen hebben, afhangende van den stand van de rechte en van den aard der kromme. Zoo zal in 't algemeen een rechte slechts één punt met eene snijlijn gemeen hebben; een geslotene lijn, b. v. cirkel, en ellips minstens twee. Vordert men nu twee snijpunten van eene snijlijn met rechten zoo moet men minstens twee rechten hebben welke in hetzelfde vlak gelegen zijn. Liggen in het vlak waarin de snijlijn getrokken is een cirkel en een rechte, zoo kunnen in het algemeen 3 snijpunten voorkomen. Het aantal snijpunten dat men op deze wijze verkrijgt is steeds gelijk aan de som der getallen die den graad aangeven der vergelijkingen voor de krommen. Indien men den naam van overeenkomstige punten geeft aan de twee punten welke op ééne snijlijn gelegen zijn en welke de snijpunten zijn van zulk eene snijlijn met twee krommen of met eene geslotene kromme, dan bevat dit proefschrift een *onderzoek naar het geheel van punten in welke de afstanden tusschen twee overeenkomstige punten* *in een bundel van snijlijnen, welke uit hetzelfde punt voortkomen, in eene gegevene verhouding verdeeld worden.* Het punt waaruit de snijlijnen getrokken worden, noem ik oorsprong of het punt O. Het onderzoek dat ik mij alhier heb voorgesteld in 't werk te stellen, zoude, in zijnen geheelen omvang genomen, een onafzienbaar veld van nasporingen opleveren. Uit de tallooze gevallen die zich kunnen voordoen heb ik eenige bijzondere gevallen gekozen *en wel voor zoo verre de snijlijnen getrokken worden door krommen, welke den tweeden graad niet te boven gaan.*

Ter vermijding van herhalingen welke in elk der afdeelingen terug zouden komen, beschouwen wij ons vraagstuk eerst voor een bijzonder geval, hetwelk gelijke resultaten oplevert, met welke kromme men ook te doen hebbe.

De ligging van het punt O willekeurig zijnde, zoo kunnen wij ons voor genoemd bijzonder geval voorstellen dat de oorsprong overeenkomt met een punt van een der krommen; dan verandert eene der snijpunten van de snijlijn in een vast punt, namelijk dat van den oorsprong zelven, en de oplossing van het vraagstuk: *de vergelijking der kromme te vinden gaande door de punten welke de afstanden van een vast punt tot de punten van de gegevene kromme in eene gegevene reden verdeelen*, gereduceerd tot een eenvoudig geval. Immers zal het gemakkelijk zijn aan te toonen dat dit geheel van punten eene kromme is, welke niet alleen gelijksoortig, maar ook gelijkvormig is met de oorspronkelijke en dus alleen in de afmetingen verschilt. Stel de oorspronkelijke afstanden staan tot de verlangden in reden als de getallen m en n, dan zal eene rechte lijn, op deze wijze ontstaan, evenwijdig zijn aan de oorspronkelijke en op een afstand van O gelegen zijn, welke eveneens tot den afstand van de gegevene rechte tot O staat als n : m. Is

$$y = A'x + b'$$

de vergelijking der gegevene kromme zoo zal de nieuwe tot vergelijking hebben

$$y = A'x + \frac{b'm}{n}$$

Is

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

de vergelijking van den oorspronkelijken cirkel, zoo zal

$$\left(x - \frac{am}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{bm}{n}\right)^2 = \frac{r^2m^2}{n^2}$$

die der nieuwe zijn.

De vergelijkingen der nieuwe krommen worden onmiddelijk gevonden door de constante grootheden welke in de vergelijking der gegevene kromme voorkomen te veranderen in andere welke op de gegevene wijze van de oorspronkelijke afhangen.

Aangezien de nieuwe kromme steeds gelijkvormig is met de opgegevene, zoo biedt het trekken van een bundel snijlijnen een gemakkelijk middel aan om gegevene krommen op eene vergroote of verkleinde schaal in teekening te brengen. Hetzelfde volbrengende met eene geslotene kromme of met een tal van krommen welke een deel van het vlak van teekening insluiten, zoo kan deze constructie dienen om figuren daar te stellen, gelijkvormig met eene gegevene en welker zijden of inhouden in eene gegeven reden staan tot die van de oorspronkelijke figuren. In deze nieuwe figuren zullen daarenboven de voorkomende bijzondere punten, als raakpunten, middel-, brand-, keerpunten enz. in dezelfde stralen liggen, welke de overeenkomstige punten in de eerste figuur met het punt O vereenigen. Zet men de evenredige afstanden op deze stralen af, maar in tegengestelden zin, te rekenen van het punt O zoo verkrijgt men, gelijk bekend is, krommen, welke bij tegenoverstand gelijkvormig zijn.

Gaat men nog eenen stap verder, en verbeeldt men zich den oorsprong op oneindig grooten afstand, of met andere woorden, trekt men snijlijnen welke aan elkander evenwijdig zijn, zoo verkrijgt men eene nieuwe figuur die in niets van de eerste verschilt, indien men op elk der snijlijnen punten neemt, welker afstanden tot het punt O evenveel verschillen van de afstanden waarop de snijpunten dezer snijlijnen met de gegevene figuur van het punt O gelegen zijn.

I. HET VRAAGSTUK IN RUIMEREN ZIN OPGEVAT.

De kromme door welke de snijlijnen getrokken worden zij voorgesteld door

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad . \quad (\alpha)$$

substitueerende in deze:

$$y = Mx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta).$$

zijnde de vergelijking van eene der snijlijnen.

Zoo verkrijgt men:

$$x^2(A + BM^2 + 2CM) + 2x(D + EM) + F = 0$$

deze vergelijking oplossende ten opzichte van x zoo vinden wij voor de abscissen der snijpunten van (α) en (β)

$$x_1 = \frac{-D - EM + \sqrt{\left\{(D + EM)^2 - F(A + BM^2 + 2CM)\right\}}}{A + BM^2 + 2CM}$$

$$x_2 = \frac{-D - EM - \sqrt{\left\{(D + EM)^2 - F(A + BM^2 + 2CM)\right\}}}{A + BM^2 + 2CM}$$

de oorspronkelijke ordinaten dezer snijpunten zijn:

$$y_1 = M\frac{-D - EM + \sqrt{\left\{(D + EM)^2 - F(A + BM^2 + 2CM)\right\}}}{A + BM^2 + 2CM}$$

$$y_2 = M\frac{-D - EM - \sqrt{\left\{(D + EM)^2 - F(A + BM^2 + 2CM)\right\}}}{A + BM^2 + 2CM}.$$

Elk punt der kromme waarover in dit proefschrift gehandeld wordt heeft tot coördinaten:

$x' = x_1 + k(x_2 - x_1)$ en $y' = y_1 + k(y_2 - y_1)$ of

$x' = (1-k)x_1 + kx_2$ en $y' = (1-k)y_1 + ky_2$.

In deze vergelijkingen de gevondene waarden van x_1, x_2, y_1 en y_2 substitueerende zoo vindt men:

$$x^1 = \frac{-D-EM+(1-2k)\sqrt{\{(D+EM)^2-F(A+BM^2+2CM)\}}}{A+BM^2+2CM}$$

$$y^1 = M\frac{-D-EM+(1-2k)\sqrt{\{(D+EM)^2-F(A+BM^2+2CM)\}}}{A+BM^2+2CM}$$

Om te geraken tot de vergelijking onzer kromme, zal de waarde van M moeten geëlimineerd worden.

Bij de oplossing van (x^1) met betrekking tot M geraken wij tot de vierde machtvergelijking: (stellende $1-2k = p$)

$M^4 [B^2 x^2] + 2M^3 [B(Ex + 2Cx^2)] + M^2 [2x(BD + 2CE) + 2x^2 (AB + 2C^2) + E^2 (1-p^2) + p^2 BF] + 2M [x(2CD + AE) + x^2 2AC + DE(1-p^2) + CF p^2] + 2AD x + A^2 x^2 D^2 (1-p^2) + AF p^2 = 0.$

De moeite, verbonden aan de oplossing dezer vergelijking, en de ingewikkelde formulen die men zoude verkrijgen voor M in functie van x, A, B, enz., geeft ons genoegzame aanwijzing om den ingetreden weg van onderzoek te verlaten, te meer, daar ons onderzoek zich niet bepalen zal tot de enkele krommen welke in (α) zijn opgesloten, maar wij in eenige vraagstukken combinaties zullen aantreffen van rechten en krommen, waarin de algemeene vergelijking niet voorziet. Daarenboven zal tot nader onderzoek der verkregene kromme dikwijls de voorkeur moeten gegeven worden aan de poolvergelijking, om redenen die ter gelegene plaatse zijn vermeld.

Ik stel mij dan voor het vraagstuk voor enkele gevallen door de zuiver analytische methode op te lossen, terwijl ik telkens zal verwijzen naar de daarop volgende oplossing door middel van figuren, welk laatste middel ten deele zal dienen om zich eene duidelijker voorstelling te maken van de kromme welke het resultaat is van ons onderzoek, ten deele om ons te hulp te komen bij het overwinnen van voorkomende bezwaren.

II. HET VRAAGSTUK VOOR BIJZONDERE GEVALLEN OPGELOST.

1. TWEE RECHTEN.

Een aantal lijnen, uitgaande van een punt O, snijdt twee rechten, PQ en RS. Gevraagd de vergelijking der kromme gaande door de punten welke de afstanden tusschen de snijpunten der lijnen met de gegevene rechten in eene gegevene verhouding verdeelen.

a. *Twee evenwijdige rechten.*

De twee rechten zijn:

$$y = ax + b \quad \text{en} \quad y = ax + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eene der snijlijnen zij $y = mx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

door substitutie van (2) in (1) zal men vinden:

$$x_1 = \frac{b}{m - a} \qquad \text{en} \qquad x_2 = \frac{c}{m - a}$$

Zij voor dit en de volgende gevallen k het verhoudingsgetal, zoo zal elke abscis der gevraagde kromme zijn:

$x' = x + k(x_2 - x_1) = kx_2 + (1 - k)x_1$ of na substitutie

$x' = \frac{ck}{m - a} + (1 - k) \frac{b}{m - a}$ waaruit gevonden wordt

$mx' = y' = ax' + b + k(c - b)$ zijnde deze vergelijking die eener rechte evenwijdig aan de gegevenen; een resultaat dat in het oog vallend is, even als de antwoorden die men verkrijgen zal bijaldien eene der rechten door den oorsprong gaat, als ook bijaldien de oorsprong gelegen is op gelijke afstanden van de gegevene rechten, in welk laatste geval $b = - c$ is en de vergelijking wordt $y' = ax + c(2k - 1)$.

b. *Twee elkander snijdende rechten.*

$$y = ax + b \qquad \text{en} \qquad y = cx + d$$

substitueerende $y = mx$.

Zoo vindt men voor de ordinaten der snijpunten met de eerste rechte

$$x_1 = \frac{b}{m - a}$$

$$y_1 = \frac{bm}{m - a} = mx_1$$

en voor die der andere

$$x_2 = \frac{d}{m - c}$$

$$y_2 = \frac{dm}{m - c} = mx_2$$

substitueerende de waarden van x_1 en x_2 in

$x' = kx_2 + (1 - k)x_1 \qquad x' = \frac{kd}{m - c} + (1 - k)\frac{b}{m - a}$

Zoo vindt men voor m:

$$m = \frac{(a-c)x + kd + b(1-k)}{2x}$$

$$\pm \sqrt{\left\{\frac{x^2(a-c)^2 + (kd+b)^2 + 2kx(bc+cd-ad-ab)}{4x^2}\right.}$$

$$\left.\frac{+\,2bx((a-c)+bk(bk-2b-2c)}{4x^2}\right\}$$

hieruit de waarde mx afleidende zal men gemakkelijk geraken tot de vergelijking

$y^2 - y(ax+cx+kd+b-bk) + x(akd+bc-bck) + acx^2 = o$

welke blijkens het volgende onder eene eenvoudigere gedaante kan herleid worden.

Fig. I. Stel de lijnen snijden elkander in het punt N. ON zij de as van het polaire coördinaten-stelsel. Stel $\angle$ RNX $= \beta$, $\angle$ PNX $= \alpha$ en ON $=$ p.

In de driehoeken ONC en OND

$ON : OC = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\alpha \qquad ON : OD = \sin(\beta - \varphi) : \sin\beta$

$$OC = \frac{p \sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} \qquad OD = \frac{p \sin\beta}{\sin(\beta - \varphi)}$$

$$OL = OC + k(OD - OC) = (1-k)\,OC + k.OD$$

$$Z = (1-k)\frac{p \sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} + k\frac{p \sin\beta}{\sin(\beta - \varphi)}$$

Na ontwikkeling der noemers en substitueerende $\cos\varphi = \frac{x}{z}$ en $\sin\varphi = \frac{y}{1}$ zoo vindt men na eenige herleidingen:

$$px \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - py \operatorname{tg}\alpha + pky(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = x^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$
$$= x^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - xy(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + y^2$$

of stellende $\operatorname{tg}\alpha = A$, en $\operatorname{tg}\beta = B$

$$ABpx + p(Ak - Bk - A)\,y = ABx^2$$
$$-(A+B)\,xy + y^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Om te onderzoeken of deze vergelijking de eenvoudigste is stelle men een' anderen oorsprong, vervange x door $x + m$, waardoor de vergelijking wordt:

$$ABpx + ABpm + p(Ak - Bk - A)y = ABx^2 + 2ABmx$$
$$+ ABm^2 - Axy - Bxy - Amy - Bmy + y^2$$

door $m = \frac{1}{2}p$ te stellen, vervalt de term waarin x voorkomt en wordt de vergelijking onder haar eenvoudigste gedaante:

$$y^2 - p\{(k - \tfrac{1}{2})(A - B)\}y - (A + B)xy + ABx^2$$
$$- \tfrac{1}{4}ABp^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

dit is de vergelijking der kromme welke aan ons vraagstuk voldoet, terwijl nu het punt Z, d. i. het midden van de lijn ON het snijpunt der coördinaatassen is.

Volkomen dezelfde vergelijking verkrijgt men voor de kromme VV′OUU′, indien men uitgaat van de driehoeken ONW en ONA en vervolgens den oorsprong eveneens verplaatst naar Z.

Bovenstaande vergelijking is slechts in twee gevallen te ontbinden in twee drietermige factoren van den eersten graad, nam. ingeval $k = 0$ of $k = 1$ wordt genomen.

De leer der onbepaalde coefficienten toepassende ter ontbinding in factoren, voorgesteld onder den vorm

$$y + Gx + H = 0 \qquad \text{en} \qquad y + Ix + N = 0$$

zoo zal men vijf vergelijkingen met 4 onbekenden verkrijgen; de vijf vergelijkingen zijn

$$H + N = -p(k - \tfrac{1}{2})(A - B), \quad G + I = -(A + B)$$
$$HI + GN = 0 \qquad GI = AB \qquad HN = -\tfrac{1}{4}ABp^2.$$

Uit de vier eerste vergelijkingen vindt men

$$N = -Ap(k - \tfrac{1}{2}) \qquad H = Bp(k - \tfrac{1}{2}).$$

Het product dezer vergelijkingen

$HN = - ABp^2 (k - 1/2)^2$ vergelijkende met de vijfde der gestelde vergelijkingen, zoo ziet men dat alleen voor $k = o$ of $k = 1$ de ontbinding plaats kan hebben. Voor de factoren zelven vindt men

$$y - Ax - 1/2 Ap \quad \text{en} \quad y - Bx + 1/2 Bp$$

welke aan nul gelijk gesteld wordende juist de vergelijkingen der rechten PQ en RS opleveren.

Dezelfde vergelijkingen verkrijgt men ook indien in de oorspronkelijke voor A, B gesteld wordt, of omgekeerd.

De algemeene vergelijking van den tweeden graad $Mx^2 + Ny^2 + 2Oxy + 2Px + Qy + R = o$ zijnde, zoo weet men dat de voorwaarde $\Delta = O^2 - MN \gtreqless o$ een kromme geeft met een middelpunt, terwijl de voorwaarde $\Delta = O^2 - MN = o$ een kromme zonder middelpunt oplevert.

Hier is

$$O^2 - MN = \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 - AB = \left(\frac{A - B}{2}\right)^2$$

en dus wegens de tweedemachtsverheffing nooit kleiner dan o en dus geen ellips. Δ kan niet gelijk o zijn tenzij $A = B$ worde, welk geval niet tot ons vraagstuk behoort, aangezien het gelijk worden van A en B met zich voert het op elkander vallen der lijnen PQ en RS. Onze kromme kan dus geen parabool zijn, ook in het algemeen geen kromme zonder middelpunt.

Verder weten wij dat de voorwaarden:

$$\Delta = O^2 - MN > o$$

$$r = - P(NP - OQ) - Q(MQ - OP) - R(O^2 - MN) \gtreqless o$$

voldoende zijn tot het nemen van het besluit dat de kromme eene hyperbool is.

Dat aan de eerste voorwaarde in ons vraagstuk voldaan wordt, is aangetoond.

Substitueeren wij de waarden uit onze vergelijking in de algemeene vorm voor r, zoo wordt

$$r = \{-\tfrac{1}{2}p(k-\tfrac{1}{2})(A-B)\}\{-\tfrac{1}{2}ABp(k-\tfrac{1}{2})(A-B)\}$$
$$-\tfrac{1}{4}ABp^2\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$$

welke formule na herleiding wordt

$$r = ABp^2\left(\frac{A-B}{2}\right)^2(k-1)\,k$$

Het bestaan van eene der vijf voorwaarden:

$$A = o, B = o, A = B, k = 1, k = o$$

is voldoende om $r = o$ te maken. Volgens hetgeen reeds besproken is, kan echter geen dezer voorwaarden bestaanbaar zijn met den aard van het vraagstuk. r is dus $\gtreqless$ o; dit gevoegd bij het reeds aangetoonde $\Delta > o$, geeft ons recht om aan te nemen dat de geconstrueerde kromme een hyperbool is.

Tot verder onderzoek der kromme gebruiken wij vergelijking (1), welke die der kromme LNM is, bijaldien O de oorsprong is. Een gemakkelijk in te stellen onderzoek kan ons overtuigen dat dezelfde vergelijking die der kromme VOU is, als N als oorsprong der coordinaatassen geldt.

Vooreerst de vraag: Welk bijzonder geval doet zich voor, indien het punt O gelegen is in de lijn welke den hoek midden door deelt, dien de beide rechten met elkander vormen. In dit geval is $\angle$ PNO $= \beta$ en dus $\alpha = 180 - \beta$, en tg $\alpha = -$ tg β of $A = -B$. De vergelijking verandert hierdoor in

$$-A^2px + p(2k-1)Ay = -A^2x^2 + y^2$$

in welke vergelijking

$$\Delta = A^2 > 0 \qquad r = \frac{A^4 p^2}{2}(2k(1-k)-1) \gtreqless 0$$

Indien $k = \frac{1}{2}$ genomen wordt, zoo verandert de laatste vergelijking in

$$y^2 = A^2(x^2 - px)$$

stellende in deze $x = x + m$

zoo wordt de vergelijking

$$y^2 = A^2(x^2 + 2mx + m^2 - px - pm)$$

Door in deze $m = p$ te stellen vindt men

$$y^2 = A^2(p + x)x$$

zijnde de topvergelijking eener hyperbool, welker top gelegen is in het punt N.

Op het midden van ON eene loodlijn oprichtende en hare lengte tusschen Z en het snijpunt met PQ, q noemende, zoo is $A = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{2q}{p}$ of $A^2 = \frac{4q^2}{p^2}$ en dus

$$y^2 = \frac{q^2}{{}^1/_4\, p^2}(p + x)x \quad \text{of stellende } ON = 2p',$$

$$y^2 = \frac{q^2}{p'^2}(2p' + x)x$$ in welke vergelijking tevens de groote en de kleine as $\frac{1}{2}p'$ en $\frac{1}{2}q$ zijn opgenomen.

Men kan naar aanleiding van het behandelde een gemakkelijk middel aangeven ter constructie van eene hyperbool welke gegevene assen moet hebben en welker top is aangeduid.

Indien de lijnen PQ en RS elkander zoo snijden dat $\alpha = 90 - \beta$, zoodat $A = -\frac{I}{B}$, dan verandert (1) in de veronderstelling dat $k = \frac{1}{2}$ is, in

$$-px - \tfrac{1}{2}\left(\frac{B^2-1}{B}\right)py = -x^2 - \left(\frac{B^2-1}{B}\right)xy + y^2.$$

Voor het geval dat $B = 1$, of $\beta = 45°$ is, wordt de vergelijking $x^2 - y^2 = px$.

Hierin wederom $x = x + m$ en vervolgens $m = \tfrac{1}{2}p$ stellende, zoo verkrijgt men

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{4}p^2$$

de vergelijking eener gelijkzijdige hyperbool, welker as is p, en welker middelpunt is het punt Z.

De waarde welke in de algemeene vergelijking gevonden is voor Γ, nam.

$$\Gamma = ABp^2 \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 (k-1)k$$

toont aan dat voor elke waarde van k, behalve $k = o$, en $k = 1$, de kromme eene hyperbool zal zijn, derhalve ook voor $k \lesseqgtr 1$, zoodat men in de constructie niet gebonden is aan punten liggende in het vlak der hoeken PNR en SNQ.

Wij hebben gezien dat OX de rechte is, gaande door den top en door het middelpunt, ingeval $A = -B$ en $k = \tfrac{1}{2}$ genomen wordt, en dat onder deze gegevens Z het middelpunt der hyperbool is.

Hernemen wij de vergelijking (1)

$$ABpx + p(AK - Bk - A)y = ABx^2 - (A+B)xy + y^2$$

stellen wij $x = x + m$

$y = y + n$

dan verkrijgen wij na behoorlijke herleiding

$$y^2 + ABx^2 - (A+B)xy - (ABp - 2ABm + An + Bn)x$$
$$- (Akp - Bkp - AP + Am + Bm - 2n)y - ABpm$$
$$- Akpn + Bkpn + Apn + ABm^2 - Amn - Bmn + n^2 = o.$$

Zal deze vergelijking eene middelpuntsvergelijking zijn, zoo weten wij met het oog op de algemeene vorm der middelpuntsvergelijking

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

in welke a en b de bekende beteekenis hebben van halve assen, dat de volgende betrekkingen tusschen A, B, m en n moeten plaats hebben.

$$A + B = o. \qquad ABp - 2ABm + An + Bn = o$$

en $$Akp - Bkp - Ap + Am + Bm - 2n = o.$$

Na ontwikkeling volgt:

$$A = -B \qquad m = \tfrac{1}{2} p \qquad n = -\tfrac{1}{2} Ap(1 - 2k). \text{ (III)}$$

Wij komen dus tot het besluit dat geheel onafhankelijk van de grootte van k, indien $\alpha = 180 - \beta$, de toppen van alle hyperbolen welke aan ons vraagstuk voldoen, gelegen zijn in de lijn welke in L loodrecht op Ox wordt opgericht. De hoogte der top boven de lijn welke den oorsprong met het snijpunt der twee rechten vereenigt wordt aangegeven door

$$n = -\tfrac{1}{2} Ap\ (1 - 2k).$$

Daarenboven zijn de middellijnen der hyperbolen alle evenwijdig aan ON.

Is $k = \frac{1}{2}$ dan komen wij tot een vroeger besproken geval terug. Voor $k > \frac{1}{2}$ is n positief; voor $k < \frac{1}{2}$ is n negatief. Wederom zien wij dat $k = o$ of $k = 1$ voor n eene met den aard van ons vraagstuk onbestaanbare waarde oplevert. Immers $n = \pm \frac{1}{2} Ap$ zoude eene top aangeven in de lijn PQ of in de lijn RS buiten het punt N.

Substitueert men in (I) de waarden welke in (III) zijn aangegeven, zoo verkrijgen wij na herleidingen en vereenvoudigingen:

$$y^2 = A^2(x^2 - p^2k(1 - k)).$$

Deze vergelijking stemt in vorm geheel overeen met de algemeene vergelijking

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

De beide assen van de hyperbool zijn dan

$$2p\sqrt{k(1-k)} \quad \text{en} \quad 2Ap\sqrt{k(1-k)}.$$

De grootte van k houdt hier op willekeurig te zijn daar voor $k > 1$ men voor de assen onbestaanbare uitdrukkingen verkrijgt. Bij de toeneming van de waarde van k zal dan ook de hyperbool eene verandering ondergaan, waarbij voor $k = 1$ de rechte RS aangezien kan worden als den overgang daar te stellen tusschen twee stellen van hyperbolen van welke de krommingen naar tegengestelde zijden zijn gericht.

2. EEN CIRKEL.

Een aantal lijnen uitgaande van een punt O snijdt eenen cirkel. Men vraagt de kromme te bepalen gaande door de punten, waarin de koorden als deelen dezer lijnen in eene zelfde gegevene verhouding verdeeld worden.

Uit den aard der zaak volgt dat de algemeenheid der eindvergelijking niet verminderd wordt indien wij uitgaan van de vergelijking: $(x-a)^2+y^2=r^2$ substitueerende in deze $y=mx$ zoo vinden wij voor de abscissen der beide snijpunten:

$$x=\frac{a+\sqrt{(r^2+m^2(r^2-a^2))}}{1+m^2} \text{ en } x_2=\frac{a-\sqrt{(r^2+m^2(r^2-a^2))}}{1+m^2}$$

deze waarden substitueerende in

$$x^1=kx_2+(1-k)x_1$$

zoo vindt men

$$x^1=\frac{a+(1-2k)\sqrt{(r^2+m^2(r^2-a^2))}}{1+m^2}$$

stellende $1-2k=p$.

zoo zal na herleiding en tweedemachtsverheffing uit

$$x^2+2x^2m^2+x^2m^4-2ax-2axm^2+a^2=p^2r^2(1+m^2)-a^2p^2m^2$$

gevonden worden:

$$2x^2m^2 = 2x^2 - 2ax - p^2(r^2 - a^2)$$
$$\pm p \sqrt{(p^2r^4 + 4ar^2x + a^4p^2 + 4a^2x^2 - 4a^3x - 2a^2p^2r^2)}$$

stellende $2y^2 = 2x^2m^2$

zoo zal de eindvergelijking zijn:

$$y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 2axy^2 - 2ax^3 + a^2x^2 + p^2r^2y^2 - p^2r^2x^2 - a^2p^2y^2 = o.$$

Tot dezelfde vergelijking kunnen wij ook geraken door uit te gaan van de poolvergelijking. Daar we deze later moeten gebruiken, zoo zullen we gezegde afleiding doen voofafgaan.

(Fig. 2). Zij de straal $= r$ en de lijn OM welke den oorsprong met het middelpunt vereenigt $= c$ en tevens gelegen op de as der abscissen.

OB zij eene der snijlijnen op welke MC loodrecht getrokken is, dus $AC = BC$. De koorde is in D verdeeld in twee stukken, zoodat $AD = k. AB = 2k. AC.$

$$OD = AO + AD = OC - AC + 2k\,AC = OC + (2k - 1)\,AC$$

$$z = c \cos \varphi + (2k - 1) \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2 \varphi)}. \qquad (A)$$

De grens voor bestaanbare waarden voor z wordt bereikt, indien $c \sin \varphi = r$ is

of
$$c \cos \varphi = \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)} = \sqrt{(c^2 - r^2)}$$

wat dan ook duidelijk is, aangezien de snijlijn dan overgaat in eene raaklijn.

Onafhankelijk dus van k, zullen alle krommen, in onze vergelijking vervat, gaan door de beide raakpunten der uiterste snijlijnen.

Voor (A) kan men schrijven, bij overgang tot rechthoekige coördinaten:

$$z = \frac{cx}{z} + (2k - 1) \frac{\sqrt{z^2 r^2 - c^2 y^2}}{z}$$

$$z^2 = cx + (2k - 1) \sqrt{(z^2 r^2 - c^2 y^2)}$$

Bij de verdere herleiding, waartoe eene machtsverheffing gevorderd wordt, zal het onderscheid tusschen het positieve en negatieve teeken van den tweeden term van het tweede lid der vergelijking verloren raken.

Voor z de waarde $c \cos \varphi - (2k - 1) \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2 \varphi)}$ schrijvende, ziet men bij de beschouwing der figuur

(1) $z = OC - (2k-1) AC = OC + AC - 2k. AC = OB - 2k. AC$

en volgens de eerste gegevens voldoet de kromme aan de voorwaarde

(2) $z = AO + 2k\, AC$

Voor (1) kan men schrijven $z = OC + (1 - 2k)\, AC$

voor (2) $z = OC - (1 - 2k)\, AC$

zoodat de vergelijking der kromme wordt

$z = OC \pm \delta\, AC$ zijnde δ de constante waarde van $1 - 2k$

of

$$z = c \cos \varphi \pm \delta \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2 \varphi)}$$

(B) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2cx^3 - 2cxy^2 + c^2x^2 + \delta^2 (y^2(c^2 - r^2) - r^2x^2) = o$

of

$$(x^2 + y^2 - cx)^2 + \delta^2 (y^2 (c^2 - r^2) - r^2 x^2) = o$$

Verplaatst men den oorsprong der coördinaten naar M, zoo wordt de vergelijking:

$$(x^2 + y^2 + cx)^2 + \delta^2 (y^2 (c^2 - r^2) - r^2 (x + c)^2) = o$$

In deze vierdemachtsvergelijkingen zijn nu telkens twee krommen opgesloten, welke in de raakpunten der uiterste snijlijnen met den cirkel te samenkomen. Wilde men elk der krommen afzonderlijk beschouwen, dan zal dit niet anders kunnen geschieden dan door middel der poolvergelijking (A), waarbij dan hetzij de positieve of de negatieve waarde der wortelgrootheid alleen moet genomen worden, wat later geschieden zal

Deze vergelijking duidt aan dat de kromme symetrisch is ten opzichte van de lijn OM, aangezien er geene onevene machten van y voorkomen. Overigens komt de kromme in niets overeen met eene der bekenden.

De vergelijking (B) is slechts in vijf bijzondere gevallen te ontbinden in factoren. 1°. Indien $\delta = 1$; 2°. $\delta = -1$; 3°. $\delta = o$; 4°. $c = r$ en 5°. $c = o$, welke gevallen geheel van elkander onafhankelijk zijn.

De beide eerste gevallen samenvattende, zoo zal indien wij stellen $\delta = \pm 1$, de nieuwe vergelijking, zoo als trouwens klaarblijkelijk is die des oorspronkelijken cirkels zijn. Deze substituties verrichtende, zoo vinden wij voor de eerste gevallen:

$$x^4 - 2cx^3 + (c^2 - r^2)\,x^2 - 2cxy^2 + 2x^2y^2 +$$
$$(c^2 - r^2)y^2 + y^4 = o \text{ of}$$
$$(x^2 + y^2)\,(x^2 - 2cx + y^2 + c^2 - r^2) = o$$

zijnde de tweede factor aan o gelijk gesteld, de vergelijking van den cirkel.

Voor $\delta = o$ wordt (B)

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2cx^3 - 2cxy^2 + c^2x^2 = o \text{ of}$$
$$(x^2 + y^2 - cx)^2 = o$$

zijnde deze vergelijking die eens cirkels van welken het middelpunt gelegen is op de helft van OM. Substitueerende nam. $x = x + m$ in $x^2 + y^2 - cx = o$ zoo vindt men $x^2 + 2mx + m^2 + y^2 - cx - cm = o$.

De substitutie $m = ½\,c$ geeft

$$x^2 + y^2 = ¼\,c^2.$$

De straal is dus ½ c en de cirkel gaat door de punten O en M.

Voor $c = r$ wordt (B)

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2rx^3 - 2rxy^2 - r^2(4\delta^2 - 1)x^2 = 0$$

dan wordt tevens de oorsprong verplaatst naar den omtrek des cirkels. De vergelijking schrijvende onder de gedaante

$$x^4 - 2rx^3 + (2y^2 - 4\delta^2r^2)x^2 - 2rxy^2 + y^4 = 0$$

zoo valt gemakkelijk in te zien dat het eerste lid in factoren kan ontbonden worden nam.:

$$\{x^2 + y^2 + r(2\delta - 1)x\} \{x^2 + y^2 - r(2\delta + 1)x\} = 0.$$

De vorm dezer twee factoren geeft te kennen dat ingeval $c = r$ is de kromme, zal bestaan uit twee cirkels, welker stralen zijn $r(\delta - \frac{1}{2})$ en $r(\delta + \frac{1}{2})$.

Blijkens den vorm dezer factoren is, onafhankelijk van de waarde van δ, de cirkel, voorgesteld door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - r(2\delta + 1)x = 0$$

steeds gekeerd aan dezelfde zijde van de raaklijn door G aan den oorspronkelijken cirkel getrokken. De tweede cirkel is naar deze zelfde zijde gekeerd voor elke waarde van δ kleiner dan $\frac{1}{2}$ maar is naar de tegengestelde zijde gekeerd voor $\delta > \frac{1}{2}$, in welk geval de beide cirkels elkander uitwendig raken.

Voor $c = 0$ wordt (B) na deeling door $x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 = 4\delta^2r^2$$

zijnde de vergelijking eens cirkels wiens straal is $2\delta r$.

Hernemen wij de poolvergelijking

$$z = c \cos \varphi \pm \delta \sqrt{(r^2 - c^2 \sin \varphi)}$$

dan zal voor constante waarden voor c en r, de vorm der kromme alleen afhangen van het getal δ. Ingeval de oorsprong in het middelpunt ware gelegen van den cirkel C M dan zouden de verschillende krommen gelijkvormige figuren zijn en wel concentrische cirkels.

De vraag: hoe groot moet δ genomen worden opdat de kromme één- of tweemaal een punt met den oorsprong gemeen hebbe, voor welk geval dan z éénmaal of meermalen o wordt, kan op de volgende wijze beantwoord worden. Moet de kromme slechts éénmaal door den oorsprong gaan dan zal wegens de aangetoonde symetrie dit slechts kunnen plaats hebben voor eene waarde van φ, welke, zonder acht te slaan op het verschil van positieve of negatieve teekens, slechts eenmaal voorkomt, d. i. voor $\varphi = o$. Deze bijzondere waarden van z en φ in de vergelijking substitueerende, vindt men:

$$o = c - \delta r \text{ dus } \delta = \frac{c}{r}$$

Om deze kromme te construeeren neemt men op de snijlijnen aan weerszijden van den boog C M stukken welke vierde evenredigen zijn tot de middellijn, den afstand van den oorsprong tot het middelpunt en de koorde op de snijlijn gelegen. Voor $\delta < \frac{c}{r}$ kan z niet o worden tenzij $c = r$ worde, een geval dat reeds besproken is. Voor $\delta > \frac{c}{r}$ zal de kromme tweemaal een punt met den oorsprong gemeen hebben liggende in twee snijlijnen welke eenen gelijken hoek maken met den oorsprong der hoeken, terwijl de eene hoek $+\varphi'$ en de andere $-\varphi'$ zal zijn. De vergelijking wijst trouwens aan dat voor $+\varphi'$ en $-\varphi'$ de waarde van z dezelfde blijft; immers $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ en $\sin^2\varphi = \sin^2(-\varphi)$. De waarde van φ voor welke het gezegde zal plaats vinden wordt gevonden door

$$o = c \cos \varphi' \pm \delta \sqrt{r^2 - c^2 \sin^2 \varphi}$$

uit welke vergelijking men zal vinden

$$\sin \varphi' = \pm \sqrt{\frac{r^2 \delta^2 - c^2}{c^2 \delta^2 - c^2}}$$

Substitueert men in deze laatste vergelijking $\delta = \frac{c}{r}$ zoo komen wij tot het reeds gevondene resultaat terug. Ook geraken wij tot eene bekende eigenschap des cirkels indien $c = r$ genomen wordt waardoor $\sin \varphi = \pm 1$ of $\varphi = 90°$ of $270°$ d. i. zal een cirkel slechts één punt gemeen hebben met eene snijlijn welke door een punt van den omtrek gaat, zoo moet de snijlijn in dat punt raaklijn zijn.

Ingeval $\delta = \frac{c}{r}$ verkrijgt men figuur OHEJFLO; voor welke de vergelijking (B) dan verandert in:

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 2cx^3 - 2cxy^2 + \frac{c^2(c^2 - r^2)}{r^2} y^2 = o$$

Uit de figuur blijkt dat te beginnen bij de waarde $\delta = o$, de eene tak der kromme hare holle zijde en de andere hare bolle zijde gekeerd heeft naar den oorsprong. Ook zal bij het toenemen der waarde δ, de eene tak der kromme, welke hare holle zijde naar O gekeerd had, deze van genoemd punt afgewend hebben. Is er eene waarde voor δ te vinden, zoodanig dat de bedoelde tak eene rechte wordt. Aangezien de kromme steeds door de punten E en F moet gaan, zoude voor deze bijzondere waarde de kromme in de koorde EF zijn overgegaan. Kan de rechte EF de verschillende koorden AC, GM, enz. in punten snijden, waarin de koorden in stukken verdeeld worden, welke in dezelfde verhouding tot elkander staan. Voor de koorde GM wordt de genoemde verhouding gevonden door het trekken der koorde EF en het berekenen van het quotient: MN : GM.

Nu volgt uit den rechthoekigen driehoek OFM, omdat $\angle$ MNF recht is onmiddelijk.

$$\frac{MN}{GM} = \frac{r}{c}$$

De vraag kan nu teruggebracht worden tot het onderzoeken naar de mogelijkheid of de vergelijking:

$$z = c \cos \varphi - \frac{r}{c} \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2 \varphi)}$$

die eener rechte kan zijn. De rechte EF heeft tot poolvergelijking.

$$z = ON \sec \varphi = \frac{c^2 - r^2}{c} \sec \varphi.$$

Bijaldien de eene tak der kromme voor eene bijzondere waarde van δ konde overgaan in de rechte EF, zoude

$$c \cos \varphi - \frac{r}{c} \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{c^2 - r^2}{c} \sec \varphi$$

eene identieke vergelijking moeten zijn. Stellen wij om dit te onderzoeken gemakshalve $c = 2r$, dan vinden wij, de vergelijking ten opzichte van φ oplossende, voor φ in plaats van eene onbepaalde waarde begrensd tusschen de twee uiterste grenzen voor de hoeken welke de raaklijnen aan den cirkel met OM vormen: $\varphi = 0$ of $\varphi = \pm 30^\circ$. Deze bepaalde waarden van φ, voor de punten die de kromme gemeen heeft met OM en met de raaklijnen, duiden aan dat genoemde vergelijking geene rechte kan zijn, voor eenige waarde van δ.

Dat voor eene bijzondere waarde van φ de kromme niet overgaat in eene rechte toont aan dat de kromme niet bij den overgang, in al hare punten te gelijker tijd hare bolle zijde naar den oorsprong keert.

Waar zal voor elk punt der kromme die tot EGF nadert de genoemde overgang plaats hebben? Nemen wij ter beantwoording dezer vraag de poolvergelijking

$$z = c \cos\varphi - \delta \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2\varphi)}$$

behoorende bij die tak der kromme, voor welke wij eerst ons onderzoek instellen. Immers indien

$$V = z^2 + 2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z\frac{d^2z}{d\varphi^2}$$ negatief zijnde, bij verandering der veranderlijken overgaat in eene positieve grootheid, of omgekeerd. Nu is

$$z^2 = c^2\cos^2\varphi - 2c\delta\cos\varphi\sqrt{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)} + \delta^2(r^2 - c^2\sin^2\varphi)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -c\sin\varphi + \delta c^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)}}$$

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -c\cos\varphi + \delta c^2 \frac{r^2 - 2r^2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

Door substitutie en na eenige aangebrachte vereenvoudigingen zal men vinden:

$$V = \frac{(2c^2r^2 - 2c^4\sin^2\varphi + c^2\delta^2r^2 - 4c^2\delta^2r^2\sin^2\varphi\sqrt{r^2 - c^2\sin^2\varphi}}{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$+ \frac{(2\delta^2 c^4 \sin^2\varphi + \delta^2 r^4)\sqrt{r^2 - c^2\sin^2\varphi}}{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$- \frac{3c\delta r^4\cos\varphi - 4r^2c^3\delta\sin^2\varphi\cos\varphi + c^3\delta r^2\cos\varphi}{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

Ter beoordeeling van de positieve of negatieve waarde van deze uitdrukking moet de waarde van φ en van δ

bekend zijn, als ook de verhouding welke er bestaat tusschen c en r; dewijl het teeken van V afhangt van φ, δ en $\frac{c}{r}$.

Het algemeen antwoord kan nu luiden: ingeval de bovengevondene waarde van V negatief is, zal een punt der kromme, behoorende bij aangenomen waarden van de in de formule bevatte variabelen, behooren tot dat gedeelte, dat zijne bolle zijde naar den oorsprong gekeerd heeft. Nemen wij als toepassing een punt der kromme, behoorende bij de waarde $\varphi = o$, welke waarde steeds aan φ eigen kan zijn, onafhankelijk van de grootte van δ en van de verhouding die er bestaat tusschen den afstand van den oorsprong tot het middelpunt en de grootte van straal. Na substitutie en herleiding wordt dan de vorige formule:

$$\frac{2c^2r + c^2\delta^2r + \delta^2r^3 - 3c\delta r^2 - c^3\delta}{r}$$

Aangezien de noemer steeds positief is, zal het teeken van de vereenvoudigde vorm negatief zijn, zoolang

$$3c\delta r^2 + c^3\delta > 2c^2r + c^2\delta^2r + \delta^2r^3 \quad \text{of indien}$$
$$c^2\delta^2r + \delta^2r^3 - c^3\delta - 3c\delta r^2 < -2c^2r$$

Eene grenswaarde voor δ vinden wij indien wij het eerste lid der laatste vergelijking gelijk aan $(-2c^2r)$ stellen.

Indien aangenomen wordt dat $p < 2c^2r$

$$\delta^2(c^2r + r^3) + \delta(c^3 - 3cr^2) = -p$$

$$\delta = \frac{c^3 + 3cr^2}{2(c^2r + r^3)} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{c^3 + 3cr^2}{2(c^2r + r^3)}\right)^2 - \frac{p}{c^2r + r^3}\right\}}$$

Zoo lang aan p eene waarde gegeven wordt welke overeen te brengen is met de gestelde voorwaarde, zoo zal deze waarde van φ aangenomen wordende de kromme voor $\varphi = o$ zijne bolle zijde naar den oorsprong gekeerd hebben. Substitueeren wij $p = 2c^2r$ in de formule, zoo vinden wij voor de vermelde grenswaarde:

$$\delta = \frac{c}{r} \text{ of } \frac{2cr}{c^2 + r^2}$$

De eerste grenswaarde van δ is in het oog loopend bij het beschouwen der figuur, aangezien de kromme in dit geval juist door den oorsprong gaat, namelijk OHEIFLO. Neemt men voor δ eene waarde grooter dan $\frac{c}{r}$, dan gaat deze laatste over in de kromme ONEPFQO RSTO.

Wat aangaat het beloop der andere tak der kromme, zoo zal eene beschouwing der figuur ons tot de overtuiging brengen dat zij nooit hare bolle zijde naar den oorsprong zal keeren. Analytisch bewijzen wij dit door aan te toonen dat indien de vergelijking is

$$z = c \cos \varphi + \delta \sqrt{(r^2 - c^2\sin^2\delta)}$$

nooit eenige waarde van δ aan de uitdrukking

$$V = z^2 + 2 \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z \frac{d^2z}{d^2\varphi}$$

eene negatieve waarde kan geven.

De eerste en tweede differentialen zoekende van z, zoo vinden wij

$$z^2 = c^2\cos^2\varphi + 2c\delta\cos\delta \sqrt{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)} + \delta^2(r^2 - c^2\sin^2\varphi)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = - c \cos\varphi - \delta c^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)}}$$

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = - c \cos\varphi - \delta c^2 \frac{r^2 - 2r^2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{(r^2 - c^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

Deze waarden substitueerende in V zoo vinden wij dezelfde formule als in het vorige geval, alleen met verwisseling van de teekens der drie laatste termen van den teller. Voor eene waarde $\varphi = o$ wordt de formule na vereenvoudiging

$$\frac{2c^2r + c^2\delta^2r + \delta^2r^3 + 3c\delta r^2 + c^3\delta}{r}$$

Aangezien alle factoren, in de termen voorkomende, positief zijn, zoo bestaat er geene mogelijkheid dat de laatste vorm ooit negatief wordt. De tak EMF zal dus bij elke waarde welke men aan de veranderlijken geeft, hare holle zijde naar den oorsprong der coördinaten gekeerd hebben.

Wij hebben steeds het geval besproken dat $c > r$ en met een enkel woord gewag gemaakt van de verandering die de kromme ondergaat ingeval $c = r$ wordt. Er blijft nog over met een enkel woord het geval te bespreken dat $c < r$.

De vorige resultaten blijven voor een groot deel geldig; de kromme wordt echter eene andere.

Fig. III. De cirkelboog EMF uit de tot nu toe behandelde kromme, van waar de stukken werden afgepast, welke in eene gegevene verhouding stonden tot de koorde, gaat nu over in eene geslotene kromme welker punten gelegen zijn op het midden der koorden. De vergelijking dezer kromme wordt gevonden door M met het midden dier koorden te verbinden, dan zal, aangezien deze verbindingslijnen loodrechten zijn, behoudens dezelfde notaties als boven

$$z = c \cos \varphi$$

de vergelijking zijn; waaruit blijkt dat de kromme, welke wij den naam van richtlijn willen geven, een cirkel is, wiens straal is ½ c, en gaande door de punten O en het middelpunt des cirkels. De vereenigingslijn dezer punten is eene middellijn. Voor deze kromme zal dezelfde vergelijking gelden als die, welke wij voor het eerste geval gevonden hebben; echter wordt de waarde van z niet meer beperkt door de voorwaarde dat de hoek φ aan zekere eischen voldoen moet.

De verhouding $\frac{c}{r}$ kleiner zijnde dan 1, zoo zal de kromme eene geslotene zijn, even als wanneer $\frac{c}{r} = 1$ genomen wordt. De verhouding die er bestaat tusschen den straal en den afstand van den oorsprong tot het middelpunt des cirkels bepaalt dus de uitgebreidheid der kromme, zonder dat ooit eene oneindig voortloopende tak kan ontstaan.

Met een enkel woord zij hier nog opgemerkt, dat, indien het punt O op oneindig grooten afstand verwijderd is, en dus de snijlijnen overgaan in onderling evenwijdige rechten, de kromme gaande door het midden der koorden is overgegaan in eene rechte loodrecht gericht op de snijlijnen. De kromme welke nu ontstaan zal door aan weerszijden van de genoemde loodlijn (middellijn) evenredige deelen der koorden af te meten, is, volgens eene bekende constructie eene ellips, welks vergelijking is $(\delta x)^2 + y^2 = \delta r^2$, zijnde hierbij het punt M de nieuwe oorsprong der coördinaten.

3. COMBINATIE VAN EENE RECHTE MET EENEN CIRKEL.

Een aantal lijnen uitgaande van een punt O snijdt eene rechte en eenen cirkel. Men vraagt de kromme te bepalen gaande door de punten dier snijlijnen, welker afstanden tot de rechte en den cirkel in eene gegevene verhouding staan.

Stellen wij den cirkel en de rechte voor door de vergelijkingen:

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \qquad y = cx + b$$

$y = mx$ substitueerende:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{(r^2 + m^2(r^2 - a^2))}}{1 + m^2} \qquad x_3 = \frac{b}{m - c}$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{(r^2 + m^2(r^2 - a^2))}}{1 + m^2}$$

stellende dat de rechte den cirkel niet snijdt en met betrekking tot den oorsprong vóór den cirkel gelegen is: dan zullen

$$x'_2 = x_3 + k(x_1 - x_3) \text{ en } x'' = x_3 + k(x_2 - x_3) \ldots . (\alpha)$$

de punten zijn van twee krommen.

Ingeval zonder snijding van de rechte en den cirkel de cirkel gelegen is tusschen den oorsprong en de rechte gelden de abscissen:

$$x^{III} = x_1 + k(x_3 - x_1) \text{ en } x^{IV} = x_2 + k(x_3 - x_2)$$

De substitutie geeft

$$x^{I} = k\left\{\frac{a + \sqrt{(r^2 + m^2(r^2 - a^2))}}{1 + m^2}\right\} + (1 - k)\frac{b}{m - c} \ldots (1)$$

$$x^{II} = k\left\{\frac{a - \sqrt{(r^2 + m^2(r^2 - a^2))}}{1 + m^2}\right\} + (1 - k)\frac{b}{m - c} \ldots (2)$$

$$x^{III} = k\frac{b}{m - c} + (1 - k)\left\{\frac{a + \sqrt{(r^2 + m^2(r^2 - a^2))}}{1 + m^2}\right\} \ldots (3)$$

$$x^{IV} = k\frac{b}{m - c} + (1 - k)\left\{\frac{a - \sqrt{(r^2 \div m^2 (r^2 - a^2))}}{1 + m^2}\right\} \ldots (4)$$

Blijkbaar zullen (1) en (2) of de beide vergelijkingen (α), als men de grootheden welke niet onder het wortelteeken staan in het eerste lid brengt en daarna de aldus geschrevene vergelijkingen tot de tweede macht verheft, dezelfde eindvergelijking opleveren, in welke de twee verschillende krommen vervat zijn.

Hetzelfde geldt van de krommen (3) en (4) of de beide vergelijkingen (β).

Door (1) of (2) te herleiden ter opsporing van eene waarde van m, zal men vinden:

$$x(m^3 - cm^2 + m - c) - b(1 - k)(1 + m^2) - a\,k\,(m - c)$$
$$= k(m - c)\sqrt{(r^2 + m^2(r^2 - a^2))}.$$

De onbekende is nog aanwezig onder het wortelteeken. De laatste vergelijking moet dus wederom tot de tweede macht verheven worden, waardoor eene zesdemachtsvergelijking zal ontstaan. Even zoo is het gesteld bij de ontwikkeling van (3) en (4). Tot contrôle van de gevonden zesdemachtsvergelijking zoude men $a = b = o$ kunnen stellen, waardoor zoo als duidelijk is de waarde van m in $y = mx$ gesubstitueerd de vergelijking van een' cirkel zal te voorschijn treden.

Immers voor $a = b = o$ zal men na deeling door $(m - c)\sqrt{(m^2 + 1)}$ vinden:

$m^2x^2 = y^2 = f^2r^2 - x^2$ zijnde de vergelijking van eenen cirkel welke fr tot straal heeft. Wij zullen de poolvergelijking dezer kromme opsporen, gebruik makende van de figuur, en daarenboven een bijzonder geval bespreken, waardoor de nieuwe kromme in de theoretische mechanica eene beteekenis verkrijgt.

Zij RS de gegevene rechte en MI der gegevene cirkel. Stel $AO = a$, $MO = b$; trek GM loodrecht op den straal OD.

Zij $BN = k.BE$ en $BN' = k.BD$.

$$OB : OA = \sin\alpha : \sin(\alpha - \varphi)$$

$$OB = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

$$OE = OG - EG = b\cos\varphi - \sqrt{(r^2 - b^2\sin^2\varphi)}$$
$$OD = OG + EG = b\cos\varphi + \sqrt{(r^2 - b^2\sin^2\varphi)}.$$
$$ON = OB + k.BE = OB + k(OE - OB) = (1-k)OB + k.OE$$
$$= (1-k)\frac{a \sin}{\sin(\alpha - \varphi)} + k\left\{b\cos\varphi - \sqrt{(r^2 - b^2\sin^2\varphi)}\right\} \quad . (\alpha)$$
$$ON' = OB + k.BD = OB + k(OD - OB) = (1-k)OB + k.OD$$
$$= (1-k)\frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} + k\left\{b\cos\varphi + \sqrt{(r^2 - b^2\sin^2\varphi)}\right\} \quad . (\beta)$$

Deze beide vergelijkingen, die voor de krommen gelden, welke op de twee aangeduide wijzen ontstaan duiden aan, dat er op eene eenvoudige wijze eene vergelijking af te leiden is, die de twee krommen bevat, en wel door voor de wortelgrootheid van (α) of van (β) het dubbele teeken $\pm$ te plaatsen.

Uit genoemde vergelijkingen blijkt, wat trouwens ook volgt uit den aard der figuur, dat beide krommen de punten gemeen hebben voor welke $r^2 - b^2 \sin^2 \varphi = o$ is, of ook blijkt dat voor de gemeenschappelijke punten de hoek φ eene waarde heeft, aangeduid door:

$$\sin \varphi = \pm \frac{r}{b}$$

d. i. indien de snijlijnen overgaan in raaklijnen. De bijzondere gevallen dat k de waarde verkrijgt van 1 of o, behoeven wegens de van zelf in het oog loopende gevolgen geene bijzondere vermelding, even min als het geval dat $a = o$ wordt, wanneer de kromme overgaat in eenen cirkel, maar tevens het vraagstuk ophoudt het bedoelde te zijn.

Een bijzonder geval doet zich voor ingeval de rechte gaat door het middelpunt des cirkels, zoodat de vergelijkingen overgaan in

$$(1 - k) \frac{b \sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} + k \left\{ b \cos \varphi \pm \sqrt{(r^2 - b^2 \sin^2 \varphi)} \right\}$$

Ligt daarenboven het punt o in den omtrek des cirkels, en is dus $a = b = r$ en ook $\alpha = 90^0$, zoo veranderen de vergelijkingen (α) en (β) in:

$$z = (1 - k) r \sec \varphi \qquad \text{en}$$

$$z = (1 - k) r \sec \varphi + 2kr \cos \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

zijnde de eerste vergelijking die eener rechte evenwijdig aan de gegevene, en de tweede die eener kromme, welke blijkens de vergelijking op twee rechthoekige coördinaten symetrisch is ten opzichte van eene der assen. Zij IM de abscis, I de oorsprong, zoo verandert de laatste vergelijking na eenige herleidingen in:

$$x^3 + xy^2 = x^2r + y^2r - kry^2 + krx^2 \qquad \text{of}$$

$$(x^2 + y^2)(x - r) = (x^2 - y^2) kr$$

De laatste vergelijking kan ook voorgesteld worden onder den vorm:

$$y = x \sqrt{\frac{x - r(1+k)}{r(1-k) - x}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Uit (γ) blijkt dat voor eene waarde $\varphi = 90^\circ$, $z = \infty$ is; de ordinaat is dus asymptoot aan de kromme. Uit de vergelijking (δ) volgt, dat alle krommen, voor welke genoemde vergelijking geldt, door hetzelfde punt van den omtrek des cirkels gaan. Immers voor $x = r$ zal ook $y = r$ zijn. Ook hebben deze krommen eene andere eigenschap gemeen, in zooverre zij alle een buigpunt hebben, welks ordinaten weder afhankelijk zijn van de waarde van k.

Differentieerende, zoo vindt men:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{(k^2-1)r^2 + (2-k)rx - x^2}{\{r(1-k) - x\}^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{x - r(1+k)}{r(1-k) - x}\right)}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x(k-2) + 2r(1-k^2)}{\{r(1-k) - x\}^{5/2}\,\{x - r(1+k)\}^{1/2}} \quad . \; . \quad (\zeta)$$

Uit de waarde van de tweede differentiaal blijkt dat voor

$$x = \frac{2r(1-k^2)}{2-k}, \quad x = r(1-k) \quad \text{en} \quad x = r(1+k)$$

de gevondene (ζ) o of $\frac{1}{o}$ kan worden. Om te weten of deze waarden van x de abscissen zijn van de buigpunten der kromme, moet onderzocht worden of deze drie waarden, met eene kleine grootheid h vermeerderd en verminderd, in de waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesubstitueerd, aan de tweede differentiaal verschillende teekens geeft.

Substitueerende in (5) de waarde

$$x = \frac{2r(1-k^2)}{2-k} - h$$

zoo vindt men na de noodige herleidingen:

$$\frac{-h(2-k)^4}{\{3kr(1-k)-h(2-k)\}^2} \times$$

$$\sqrt{\Big\{\Big(3kr(1-k)-h(2-k)\Big)\Big(kr(1+k)-h(k-2)\Big)\Big\}} \quad (1)$$

substitueerende $x = \dfrac{2r(1-k^2)}{2-k} + h$

zoo vindt men

$$\frac{h(2-k)^4}{\{3kr(1-k)+h(2-k)\}^2} \times$$

$$\sqrt{\Big(3kr(1-k)+h(2-k)\Big)\Big(kr(1+k)+h(k-2)\Big)\Big\}} \quad (2)$$

voor $x = r(1-k)+h$

wordt de bovenstaande formule

$$\frac{3kr(k-1)+h(k-2)}{h^2\sqrt{\{h(2kr-h)\}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

terwijl $x = r(1-k)-h$ substitueerende geeft

$$\frac{3kr(1-k)-h(k-2)}{h^2\sqrt{\{h(-2kr-h)\}}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

terwijl de substituties der waarden

$$x = r(1+k)+h \quad \text{en} \quad x = r(1+k)-h$$

beurtelings geven

$$\frac{h(k-2)-kr(1+k)}{(2kr+h)^2\sqrt{\{h(-2kr-h)\}}} \quad . \quad . \quad (5)$$

en

$$\frac{h(k-2)+kr(1+k)}{(2kr-h)^2\sqrt{\{h(2kr-h)\}}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Van deze grootheden zijn, blijkens de negatieve vormen achter het wortelteeken, (4) en (5) onbestaanbaar; waaruit volgt dat voor de abscissen $x = r(1 - k)$ en $x = r(1 + k)$ de kromme geen buigpunt oplevert.

Aangezien k kleiner is dan 1 en *h* eene zeer kleine waarde heeft, zoo volgt hieruit dat (1) negatief en (2) positief is, en dat de kromme een buigpunt heeft in het punt welks abscis is

$$x = \frac{2r(1 - k^2)}{2 - k}$$

De krommen welker vergelijkingen aangegeven worden door (δ), hebben dus twee buigpunten, overeenkomende met de twee punten welker abscissen zijn

$$x = \frac{2r(1 - k^2)}{2 - k}$$

Voor de ordinaat van dit punt zal men na substitutie van laatstgenoemde waarde in (δ) vinden:

$$y = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{3(1+k-2k^2-2k^3+k^4+k^5)}{4 - 8k + 5k^2 - k^3}} = \frac{2r(1-k^2)}{3(2-k)}\sqrt{\frac{3(1+k)}{1-k}}$$

Elk der krommen heeft dus twee buigpunten, welke aan weerszijden van de abscis gelegen zijn. Aangezien de coördinaten dier punten ook afhankelijk zijn van de grootheid k, zoo vallen genoemde buigpunten niet in elkander, indien aan k verschillende waarden gegeven worden.

Reeds is opgemerkt dat onafhankelijk van de bijzondere waarde aan k te geven, alle krommen zullen gaan door de punten, wier coordinaten zijn $x = r$, $y = \pm r$. Eéne dier krommen heeft in dit punt zijn buigpunt, namelijk die welke aangeduid wordt door (δ), ingeval $k = ½$ is, dus

$$y = \sqrt{\frac{2x - 3r}{r - 2x}}$$

De kromme voorgesteld door (δ) heeft in vorm veel overeenkomst met de conchoïde van Nicomedes, en wel in het bijzonder met de bovenste tak van deze, of ook met de kromme van Agnesi (eng. witch of. Agnesi), en komt met eerstgenoemde lijn in eenige eigenschappen overeen. Zoo heeft de bovenste conchoïde twee buigpunten en twee oneindig voortloopende takken. Fig. V stelt de hier behandelde kromme voor.

Eindelijk zij nog opgemerkt, dat ingeval de middellijn gelegen is in de rechte, welke het punt buiten den cirkel met het middelpunt vereenigt, de krommen welke dan ontstaan alle cirkels zijn, welker middelpunten en stralen afhangen van de ligging van het punt, waaruit de straalbundel getrokken wordt en van de grootheid k. Dit verdiende geene bijzondere vermelding, aangezien de op deze wijze ontstane krommen te rangschikken zijn onder de krommen, waarover met een enkel woord sprake geweest is in het begin van dit proefschrift met het doel om noodelooze herhalingen te vermijden. Hier ter plaatse wordt echter deze bijzonderheid ten overvloede aangestipt met het oog op het volgende.

De kromme waarvan in deze afdeeling sprake is, heeft, voor zoo verre wij ons bepalen tot het geval, dat de rechte eene middellijn is des cirkels, in de theoretische mechanica nog eene bijzondere beteekenis. Bekend is dat, als de richtingen van 3 krachten, welke met elkander evenwicht maken gelegen zijn in het vlak dat gebracht wordt door de drie aangrijpingspunten, alsdan de richtingen, verlengd wordende, elkander in één punt moeten snijden. Stellen wij ons het vlak der teekening (fig. V) als het verticale vlak voor en de lijn RS gericht naar het middelpunt der aarde. Zij MC een staaf, welke in M om een scharnier draaibaar is, zoo dat de staaf omdraaiende in het verticale vlak de verschillende standen aanneemt, voorgesteld door de stralen van den cirkel. Laat die staaf in elk dier standen in evenwicht gehouden worden, behalve door den weêrstand aangebracht door de scharnier, door eene kracht uitgaande van een punt O in hetzelfde vlak gelegen waarin de draaing plaats heeft, en steeds gericht naar dat uiteinde der staaf, hetwelk den omtrek des cirkels beschrijft; b. v. door een draad zonder gewicht, welke draad naar gelang van den stand der staaf moet vervangen worden door een onbuigzaam stangetje, mede zonder gewicht. In elk der standen zullen het middelpunt M, het punt O en het zwaartepunt der staaf drie aangrijpingspunten van krachten zijn, en wel van den weêrstand in M, van de spanning der draad en van de zwaartekracht. Is de staaf in een der standen in evenwicht, zoo zullen, volgens het zoo even opgemerkte, de drie richtingen der krachten elkander in één punt moeten snijden. Bepaalt men voor elk der standen gezegd snijpunt, zoo zal het geheel dier snijpunten de bedoelde kromme opleveren. Wij zullen tevens aantoonen dat voor het geval de staaf homogeen is en overal dezelfde afmetingen heeft, dit geval overeenkomt met het aannemen der waarde voor $k = \frac{1}{2}$, en dat het geven der verschillende waarden aan k overeenkomt met de verschillende plaatsen van het zwaartepunt ingeval de staaf niet in een der genoemde gevallen verkeert.

Nemen wij aan, dat het zwaartepunt gelegen is in het punt D, dan zal dit even als het uiteinde C tijdens de omdraaing een' cirkel beschrijven. Trekt men voor elken stand der staaf uit het zwaartepunt eene lijn evenwijdig met de verticale RS, zoo zal het ontmoetingspunt dezer laatst getrokkene en van de rechte die het uiteinde der staaf met O vereenigt, het gemeenschappelijk aangrijpingspunt der krachten zijn of die der resultante. Beschouwen wij twee standen MC en MC′, zoodanig dat de uiteinden C en C′ op dezelfde snijlijn gelegen zijn, welke men uit O trekt, en veronderstellen wij dat het zwaartepunt der staaf gelegen is in een punt waarin de staaf verdeeld wordt in deelen die tot elkander in reden staan als de getallen 1 en k, dan is klaarblijkelijk na het trekken der richtingen van de krachten

$$CA : CB = CD : CM \quad \text{en} \quad C'A' : C'B = C'D' : C'M.$$

De gedeelten der snijlijnen begrepen tusschen de snijpunten van deze met den cirkel en de verticale middellijn, worden dus ook hier in deelen verdeeld welke in eene gegevene verhouding tot elkander staan. Het vraagstuk is dus teruggebracht tot het bijzonder geval van het in deze afdeeling behandelde.

Was het punt O gelegen in het verlengde van de middellijn, zoo zoude ook het aangrijpingspunt der resultante een' cirkel beschrijven, wat ook plaats zal hebben indien het punt O gelegen ware op den omtrek des cirkels en wel daar waar de verticale middellijn dezen snijdt.

4. TWEE CIRKELS.

Dit vraagstuk zal het groote bezwaar opleveren dat ter opsporing van de waarde van m eene vergelijking moet opgelost worden waarin de onbekende voorkomt in de achtste macht, zonder dat genoemde vergelijking in factoren is te ontbinden. Zelfs verdwijnt dit bezwaar niet, bijaldien de cirkels concentrisch zijn, wat uit het volgende voorbeeld blijkt.

Zijn de vergelijkingen van de cirkels

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \quad \text{en} \quad (x-a)^2+y^2=t^2$$

in welke $t < r$

bij substitutie van $y = mx$

vindt men voor de abscissen der 4 snijpunten

$$x_1 = \frac{a+\sqrt{\{r^2+m^2(r^2-a^2)\}}}{1+m^2} \qquad x_3 = \frac{a+\sqrt{\{t^2+m^2(t^2-a^2)\}}}{1+m^2}$$

$$x_2 = \frac{a-\sqrt{\{r^2+m^2(r^2-a^2)\}}}{1+m^2} \qquad x_4 = \frac{a-\sqrt{\{t^2+m^2(t^2-a^2)\}}}{1+m^2}$$

Stel de abscis van een punt der kromme moet voldoen aan de voorwaarde:

$$x^1 = x_3 + k(x_1 - x_3) = kx_1 + (1-k)x_3$$

dan vindt men na substitutie

$$x(1+m^2)-a = k\sqrt{\{r^2+m^2(r^2-a^2)\}} + (1-k)\sqrt{\{t^2+m^2(t^2-a^2)\}}$$

Ingeval $a = o$ wordt zoo komen wij tot de vergelijking:

$$m^2 x^2 = \{t + k(r - t)\}^2 - x^2$$

of $y^2 + x^2 = \{t + k(r - t)\}^2$, zoo als te verwachten was. Opdat het vraagstuk oplosbaar zij behoeven de cirkels niet concentrisch te zijn. Er is nog een geval dat echter tot eene eenvoudige kwestie behoort waarin in eenigen zin voorzien is in de inleiding, ter plaatse waar sprake was van noodelooze herhalingen, d. i. als de stralen der beide cirkels tot elkander in reden staan als de afstanden der middelpunten tot den oorsprong en dus de beide cirkels zijn

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \quad \text{en} \quad \left(x - \frac{at}{r}\right)^2 + y^2 = t^2$$

wij zullen dan weder een cirkel verkrijgen, wiens vergelijking is:

$$\left[x - \left\{ka + (1-k)\frac{at}{r}\right\}^2\right]^2 + y^2 = r^2\left\{k + (1-k)\frac{t}{r}\right\}^2$$

5. OVERIGE KEGELSNEDEN.

De cirkel reeds besproken zijnde, zoo zal met een enkel woord gewag gemaakt worden van de andere kegelsneden, om naar aanleiding van eene bijzondere eigenschap, die zich bij den cirkel voordoet, een onderzoek in te stellen in hoe verre dit bijzonder geval ook bekende krommen oplevert bij de andere kegelsneden.

Gaan we uit niet van de algemeene tweedemachtsvergelijking maar van de algemeene topvergelijking: $y'^2 = px' + qx'^2$, in welke p de parameter en q eene grootheid is, welke voor de ellips, hyperbool en de parabool respectievelijk eene negatieve, positieve waarde verkrijgt of o wordt.

Stellen wij $y' = y - t$ en $x' = x - u$ dan zal de algemeene vergelijking voor de drie kegelsneden voor rechthoekige coördinaatassen zijn

$$y^2 - 2yt + t^2 - px + pu - qx^2 + 2qxu - qu^2 = o$$

in welke vergelijking $-u$ en $-t$ de coördinaten zijn van den nieuwen oorsprong en ook van het punt waaruit de snijlijnen getrokken worden ten opzichte van het coördinatensysteem bij de oorspronkelijke topvergelijking.

Substitueerende $y = mx$ in de laatste vergelijking, zoo vinden wij:

$$x^2 (m^2 - q) - x (2mt + p - 2qu) = qu^2 - pu - t^2$$

voor de twee waarden van x uit deze vindt men:

$$x_1 = \frac{2mt + p - 2qu}{2 (m^2 - q)}$$

$$+ \frac{\sqrt{\{p^2 + 4mpt - 8mtqu + 4m^2 qu^2 - 4m^2 pu + 4qt^2\}}}{2 (m^2 - q)}$$

$$x_2 = \frac{2mt + p - 2qu}{2 (m^2 - q)}$$

$$- \frac{\sqrt{\{p^2 + 4mpt - 8mtqu + 4 m^2 qu^2 - 4m^2 pu + 4qt^2\}}}{2 (m^2 - q)}$$

stellende de grootheid onder het wortelteeken $= f$, zoo is de abscis van elk punt der verlangde kromme

$$x^1 = x_2 + k(x_1 - x_2) = \frac{2mt + p - 2qu + (2k-1) \sqrt{f}}{2(m^2 - q)}$$

$y' = mx'$ zijnde, zoo moet wederom de waarde van m uit de laatste vergelijking opgespoord worden.

Wederom stuiten we op eene hoogeremachtsvergelijking, terwijl bij den cirkel gebleken is dat ook zonder deze op te lossen, wij tot het resultaat kwamen dat eene willekeurige waarde van k tot krommen voerden, welker vergelijkingen tot hoogere machten opklommen. Door $k = ½$ te nemen, verkrijgen we daar een' nieuwen cirkel. Het is mijn voornemen om na te gaan in hoeverre deze bijzondere waarde van k aanleiding geeft tot het verkrijgen van bekende krommen bij de andere kegelsneden.

Voor $k = ½$ wordt

$$x_1 = \frac{2mt + p - 2qu}{2(m^2 - q)}$$

Deze vergelijking ten opzichte van m oplossende, zoo vindt men

$$m = \frac{t \pm \sqrt{(t^2 + 2px - 4qux + 4qx^2)}}{2x}$$

$(2mx - t)^2 = (2y - t)^2 = t^2 + 2px - 4qux + 4qx^2$ of

(1) $2qx^2 - 2y^2 + (p - 2qu)\,x + 2ty = o$, zijnde de vergelijking van de kromme.

1. *Parabool.*

De vergelijking (1) gaat, indien de primitieve topvergelijking die eens parabools is, over in

$$-2y^2 + px + 2ty = o \qquad \text{omdat } q = o \text{ is.}$$

$$\Delta = C^2 - AB = o$$

$r = -D(BD - CE) - E(AE - CD) - F(C^2 - AB) = \frac{1}{2}p^2$ dus niet o.

De nieuwe vergelijking: $-2y^2 + px + 2ty = o$ is dus weder die van een parabool.

2. *Ellips.*

q is negatief

schrijvende (1) onder de gedaante:

$$-2qx^2 + 2y^2 - (p - 2qu)x - 2ty = o.$$

$\Delta = C^2 - AB = o + 4q < o$

$r = -D(BD - CE) - E(AE - CD) - F(C^2 - AB) =$

$$-AD^2 - AE^2 = -2\left(\frac{p - 2qu}{2}\right)^2 + 2qt^2 < o$$

de vergelijking (1) is dus bijaldien q negatief is, die van eene nieuwe ellips.

3. *Hyperbool.*

q is positief

$\Delta = C^2 - AB = o + 4q > o.$

$r = -BD^2 - AE^2 = 2\left(\frac{p - 2qu}{2}\right)^2 - 2qt^2$ dus niet o de vergelijking (1) is dus voor eene positieve waarde van q die eener nieuwe hyperbool.

Om de coördinaten der toppen dezer nieuw verkregene kegelsneden te bepalen en tevens om de ligging der assen aan te geven substitueeren wij in:

$$2qx_1^2 - 2y_1^2 + (p - 2qu)x^1 + 2ty^1 = o$$

de waarde $x' = a + x \cos \alpha - y \sin \alpha$

$$y' = b + x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

waarin a en b de coördinaten van een' nieuwen oorsprong ten opzichte van het punt, waaruit de snijlijnen getrokken worden, en α de hoek beteekent, welke de nieuwe onderling rechthoekige assen moeten doorloopen om de oude assen te bedekken, indien zij om de snijpunten met deze in den positieven zin draaien.

De substitutie geeft:

$$2q(a^2 + 2ax \cos \alpha + x^2\cos^2\alpha - 2ay \sin\alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) - 2(b^2 + 2bx \sin \alpha + x^2 \sin^2 \alpha + 2by \cos \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha) + (p - 2qu)(a + x \cos \alpha - y \sin \alpha) + 2t(b + x \sin \alpha + y \cos \alpha) = o.$$

Zal deze vergelijking de topvergelijking der nieuwe kegelsnede zijn, dan moet ze in vorm overeenkomen met de algemeene topvergelijking

$$y^2 = px + qx^2.$$

De som der coëfficienten y en ook de som der termen, waarin noch x noch y voorkomen moeten o zijn, even als de som der coefficienten van het product xy of

$$-4aq \sin \alpha - 4b \cos \alpha - p \sin \alpha + 2qu \sin \alpha + 2t \cos \alpha = o$$

$$2a^2q - 2b^2 + ap - 2aqu + 2bt = o$$

$$- 4q \sin \alpha \cos \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha = o.$$

Uit deze drie vergelijkingen moeten de waarden van a, b en α bepaald worden.

Deze vergelijkingen oplossende zoo zal men vinden:

$$\alpha = o, b = \tfrac{1}{2} t$$

en $$a = \frac{-p + 2qu \pm \sqrt{p^2 - 4pqu + 4q^2u^2 - 4qt^2}}{4q}$$

dit dubbel teeken voor a heeft betrekking op de twee toppen bij de ellips en de hyperbool, terwijl bij de parabool, $q = o$ zijnde, gevonden wordt

$$a = \frac{-p + 2qu \pm p}{4q} = \frac{2qu}{4q} \text{ of } \frac{-2p + 2qu}{4q} = \frac{u}{2} \text{ of } \infty,$$

welke laatste waarde met eene bekende eigenschap der parabool overeenstemt. Uit $\alpha = o$ zien wij dat de assen der nieuwe kegelsneden evenwijdig zijn met die der oorspronkelijken. De dubbele waarde van a geeft tevens het middel aan de hand om de lengte der eerste as te bepalen. Deze zal gelijk zijn aan

$$\frac{\sqrt{\{p^2 - 4pqu + 4q^2u^2 - 4qt^2\}}}{2q}$$

zijnde voor de parabool $= \infty$.

Voor de ellips en hyperbool kunnen we deze lengte aangeven in functie van de assen der oorspronkelijke kromme. Noemende deze assen 2m en 2n, zoo is bij de ellips $p = \frac{2n^2}{m}$ en $q = -\frac{n^2}{m^2}$, bij de hyperbool $p = \frac{2n^2}{m}$ en $q = \frac{n^2}{m^2}$.

Voor de eerste as der ellips vinden wij na substitutie

$$\frac{1}{n}\sqrt{(m^2n^2 + 2mn^2u + n^2u^2 + m^2t^2)}.$$

Voor de eerste as der hyperbool vindt men op dezelfde wijze

$$\frac{1}{n} \sqrt{(m^2n^2 - 2mn^2u + n^2u^2 - m^2t^2)}.$$

Wat de ligging betreft van den top der nieuwe kromme, zoo zien we uit de waarden voor a en b dat de coördinaten van den top afhangen van de ligging van O, en dat genoemde top steeds gelegen is op de lijn welke op gelijke afstanden van de beide abscissen evenwijdig aan deze getrokken wordt. Voor $t = o$ wordt

$$a = \frac{-p + 2qu \pm (p - 2qu)}{4q} = o \text{ of } \frac{2qu - p}{2q} \text{ en } b = o$$

Dus ligt de top in de as der oorspronkelijke of in haar verlengde, terwijl indien daarenboven $u = o$ wordt, zoo als te voorzien was, de as wordt m, zijnde de helft der oorspronkelijke.

We zijn in staat de nieuwe kegelsnede volkomen te bepalen door middel van de vergelijkingen, zoowel wat hare afmetingen betreft als ook hare ligging. Echter zal, indien we de aangeduide constructie bewerkstelligen, slechts een gedeelte der kromme kunnen in teekening gebracht worden, indien namelijk het punt O gelegen is buiten het vlak door de kromme ingesloten.

De uiterste snijlijnen op welke nog een punt aan te wijzen is, zijn de raaklijnen uit het punt O aan de kegelsnede getrokken. De beide vergelijkingen welke wij hebben èn van de oorspronkelijke èn van de nieuwe kegelsnede geven ons een middel aan de hand om de uiterste punten der geconstrueerde kromme te bepalen. De punten komen namelijk overéén met de snijpunten der twee krommen. Om hare coördinaten te bepalen losse men eene der vergelijkingen :

$$2qx^2 - 2y^2 + (p - 2qu)\,x + 2ty = o \qquad \text{en}$$

$$y^2 - 2yt + t^2 - px + pu - qx^2 + 2qxu - qu^2 = o$$

op ten opzichte van y of x, dan zal men door substitutie de coördinaten der snijpunten kunnen vinden. Ik zal deze lange berekening achterwege laten, omdat er een gemakkelijker middel bestaat om genoemde punten te vinden. Tot toepassing van het gezegde zal ik het eenvoudigste geval nemen en beantwoorden de vraag op de aangewezen wijze voor het geval dat de parabool de oorspronkelijke kromme is. De vergelijkingen voor beide krommen zijn dan:

$$-\ 2y^2 + px + 2ty = o$$

$$y^2 - 2yt + t^2 - px + pu = o$$

Men vindt dan $\quad y' = \sqrt{(t^2 + pu)} \quad$ en

$$x' = 2\,\frac{t^2 + pu - t\sqrt{(t^2 + pu)}}{p}$$

Zoo als te voorzien was snijden de krommen elkander in twee punten, welke aan weerszijde liggen van de uit O met de as evenwijdig getrokkene rechte, en wel op gelijken afstand van deze gelegen. Is $t = o$, zoo wordt $x' = 2u$; eene waarde welke overeenkomt met de bekende waarde der subtangers op de as der parabool, enz.

Even als bij den cirkel geschied is kunnen we nu de punten der nieuw verkregene kromme als uitgangspunten beschouwen om van daar op de snijlijnen stukken aftepassen welke een evenmatig deel zullen uitmaken van de koorden der krommen waarop de punten liggen. Wij zullen er uit kunnen zien dat geen andere waarde voor k als $^1/_2$ vergelijkingen van den tweeden graad zullen opleveren.

Het onderzoek in dit academisch proefschrift ingesteld, kan uit den aard der zaak zeer uitgebreid worden, indien behalve de hier besprokene gevallen nog andere combinaties genomen worden van rechten met krommen of van deze laatsten onderling. Eene ontzettende uitbreiding kan het onderzoek verkrijgen indien men andere krommen dan die welker vergelijkingen tot den tweeden graad opklimmen in aanmerking neemt. De graad waartoe de eindvergelijking opklimt afhangende van dien waartoe de vergelijkingen opklimmen welke behooren tot de oorspronkelijken, zoo zullen we steeds hoogere machtsvergelijkingen verkrijgen. Om tot deze te geraken zal het raadzaam zijn uittegaan van de poolvergelijkingen en deze te herlei en tot vergelijkingen welke betrekking hebben op twee rechthoekige coördinaatassen, zoo als onder anderen bij den cirkel geschied is. De op deze wijze gevondene poolvergelijking biedt daarenboven het voordeel aan om onmiddelijk de al of niet bestaanbare punten aan te geven, of liever, geeft aan op welke snijlijnen welke uit O getrokken worden, punten der kromme kunnen liggen. In de poolvergelijking ligt dus de uiterste grens opgesloten der kromme voor zoo verre deze geconstitueerd moet worden.

Het valt ligt intezien dat het onderzoek dat in dit geschrift is ingesteld omtrent het geheel van punten dat op de genoemde wijze ontstaat ook kan ingesteld worden ingeval de oorspronkelijke krommen overgaan in rechte of gebogene oppervlakken. Daar waar in de besprokene gevallen rechten ontstaan zijn, zullen dan rechte vlakken te voorschijn treden, cirkels veranderen in bollen. Was hier de hyperbool de ontstane kromme, we zullen deze zien overgaan in hyperboloïde, enz.

THESES.

I.

Mij houdende aan de gewone opvatting van het woord, beweer ik dat op zuiver mathematisch gebied geen thesis te stellen is.

II.

Bij het onderwijs in de wiskunde moet aan de analytische methode de voorkeur gegeven worden boven de synthetische.

III.

Zonder met Lamarle intestemmen als hij zegt dat de aard eener kromme niet bekend is, als men haar ontstaan niet heeft nagegaan, zoo beweer ik evenwel dat de essentieele bepaling eener kromme niet voldoende is.

IV.

De pogingen welke in de mathematische werken aangewend zijn tot het geven van een begrip van oneindig groote en oneindig kleine grootheden zijn vruchteloos geweest.

V.

De ervaring is geen grondslag van de wiskunde.

VI.

De leer der evenredigheden moet niet uit de lagere wiskunde verbannen worden.

VII.

Het verschijnsel van toenadering en verwijdering van drijvende lichamen, ingeval zij in elkanders nabijheid gebracht zijn, is in het leerboek der mechanica van Ch. Delaunay slecht verklaard.

VIII.

Het is wenschelijk aan datgene wat in de mechanica »arbeid" genoemd wordt eenen anderen naam te geven.

IX.

Indien de hoogtewaarnemingen zouden berusten op directe meting der zwaartekracht in plaats van op luchtdruk, zoo heeft men geen recht om te beweren dat de uitkomsten nauwkeuriger zullen zijn dan in het laatste geval.

X.

De afplatting der aarde bewijst niet dat ze vroeger gloeiend vloeibaar moet geweest zijn.

XI.

De theorie van Prof. Philipp Spiller, ontwikkeld in »die Weltschöpfung vom Standpuncte der neuen Wissenschaft," is ter verklaring van het planetenstelsel de meest aanneembare.

XII.

De amphioxus moet niet onder de visschen gerangschikt worden.

XIII.

De geur der bloemen is bevorderlijk aan, soms wellicht noodig voor de voortteling der plant.

XIV.

Bij de phanerogamen behoort de zelfbevruchting tot de zeldzaamheden.

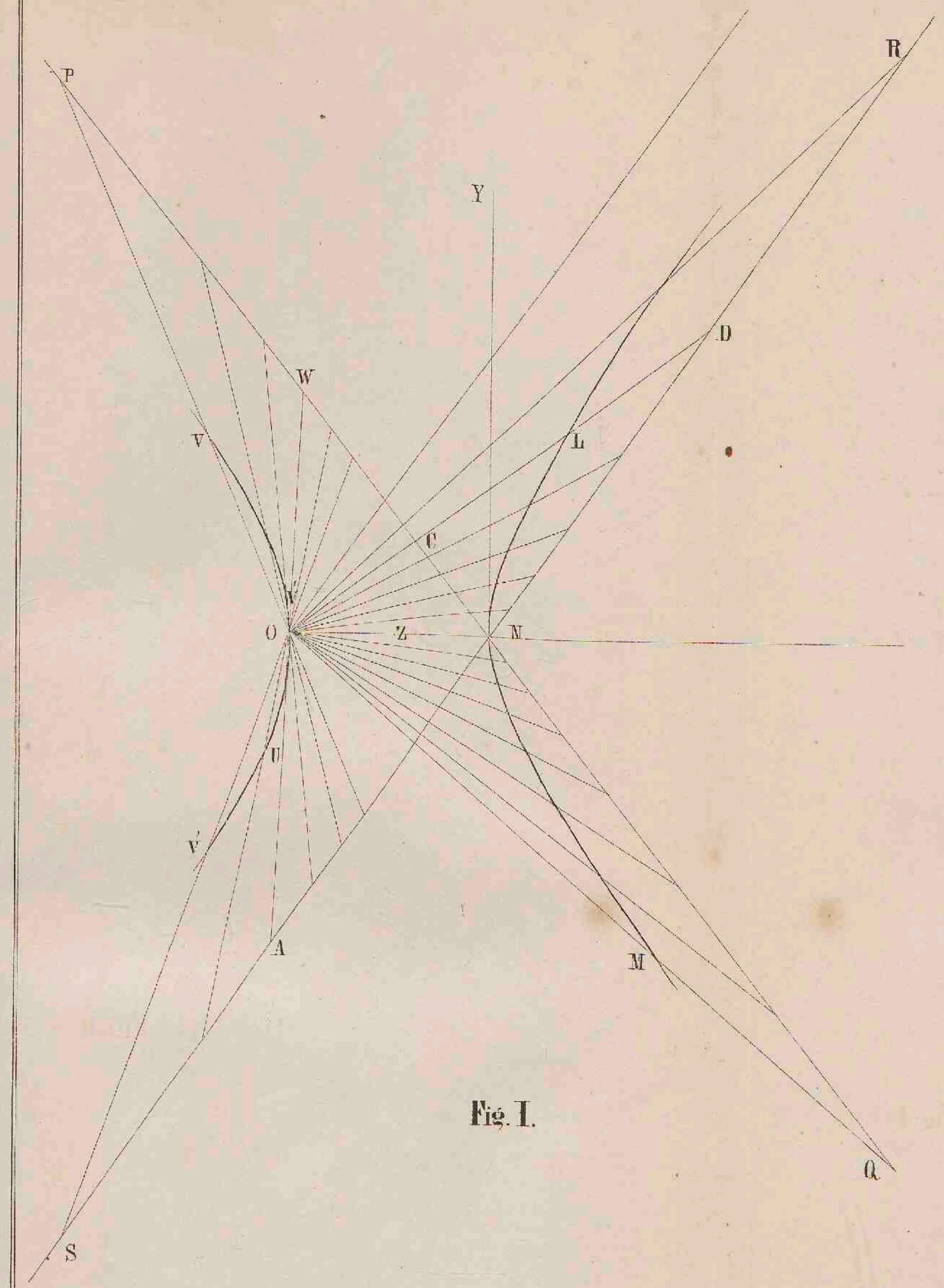

Fig. I.

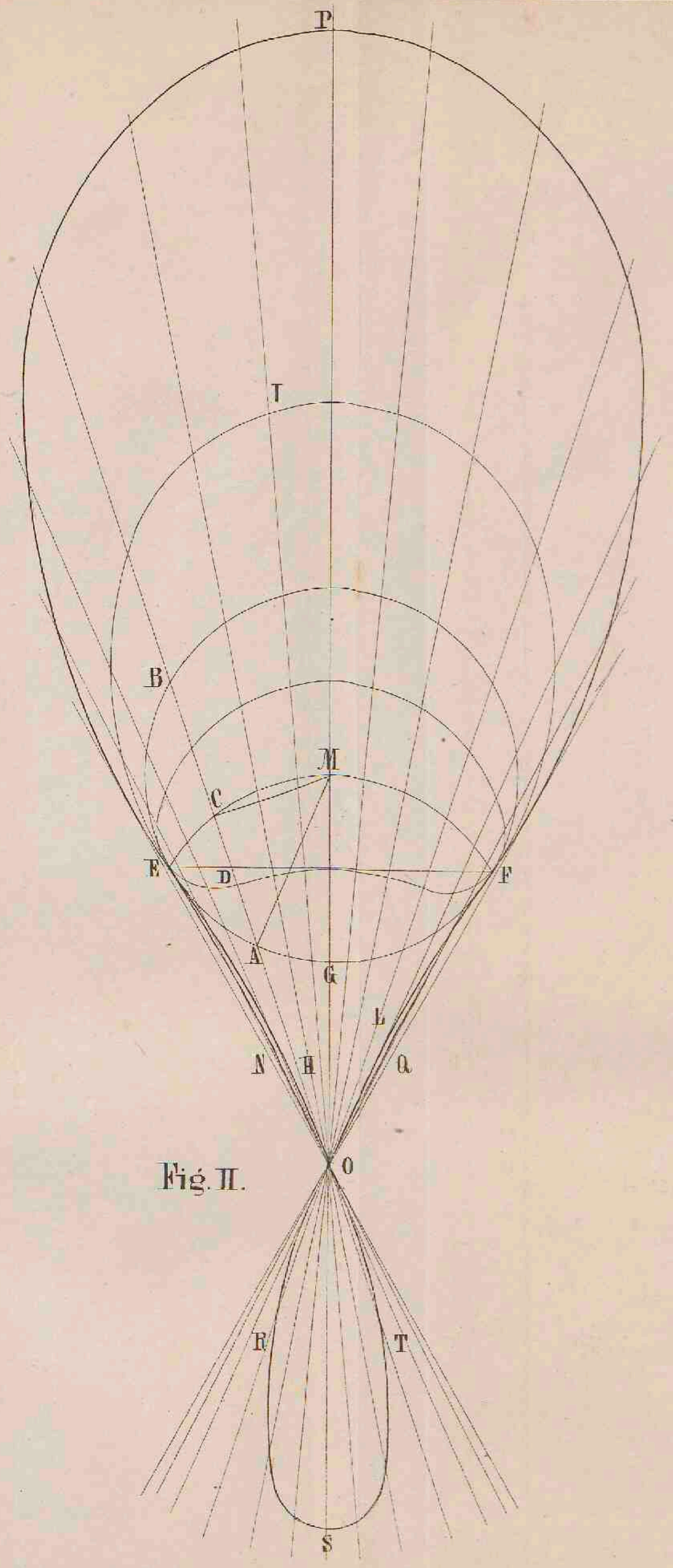

Fig. II.

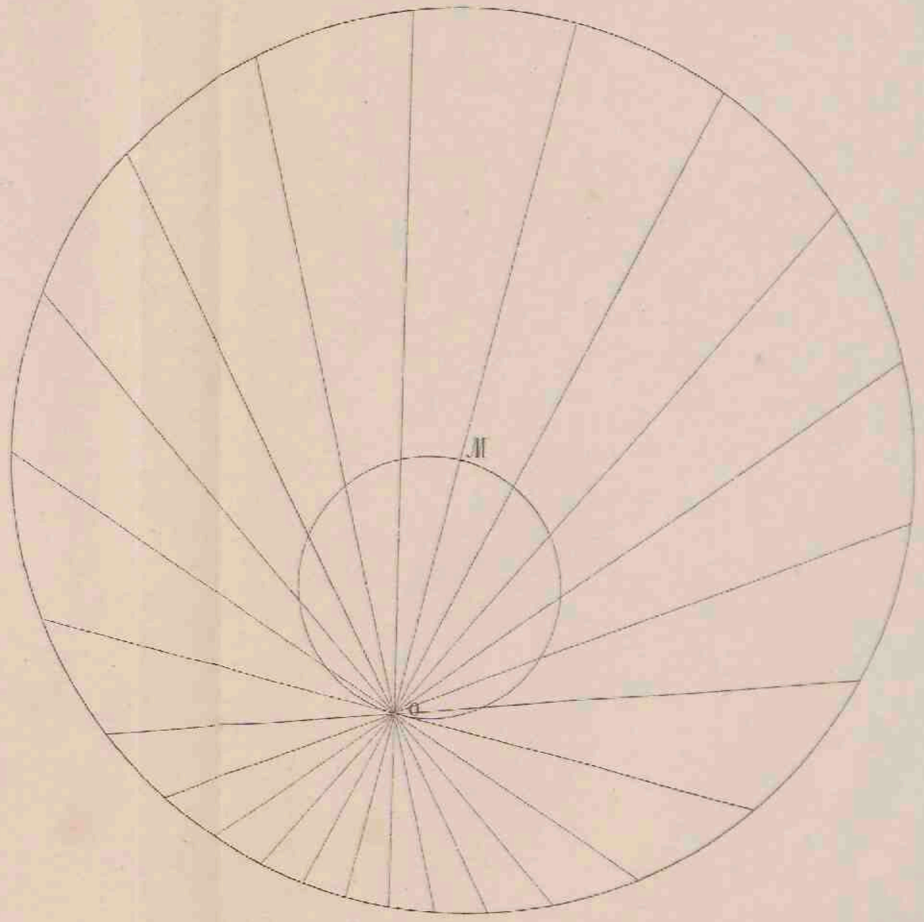

Fig. III.

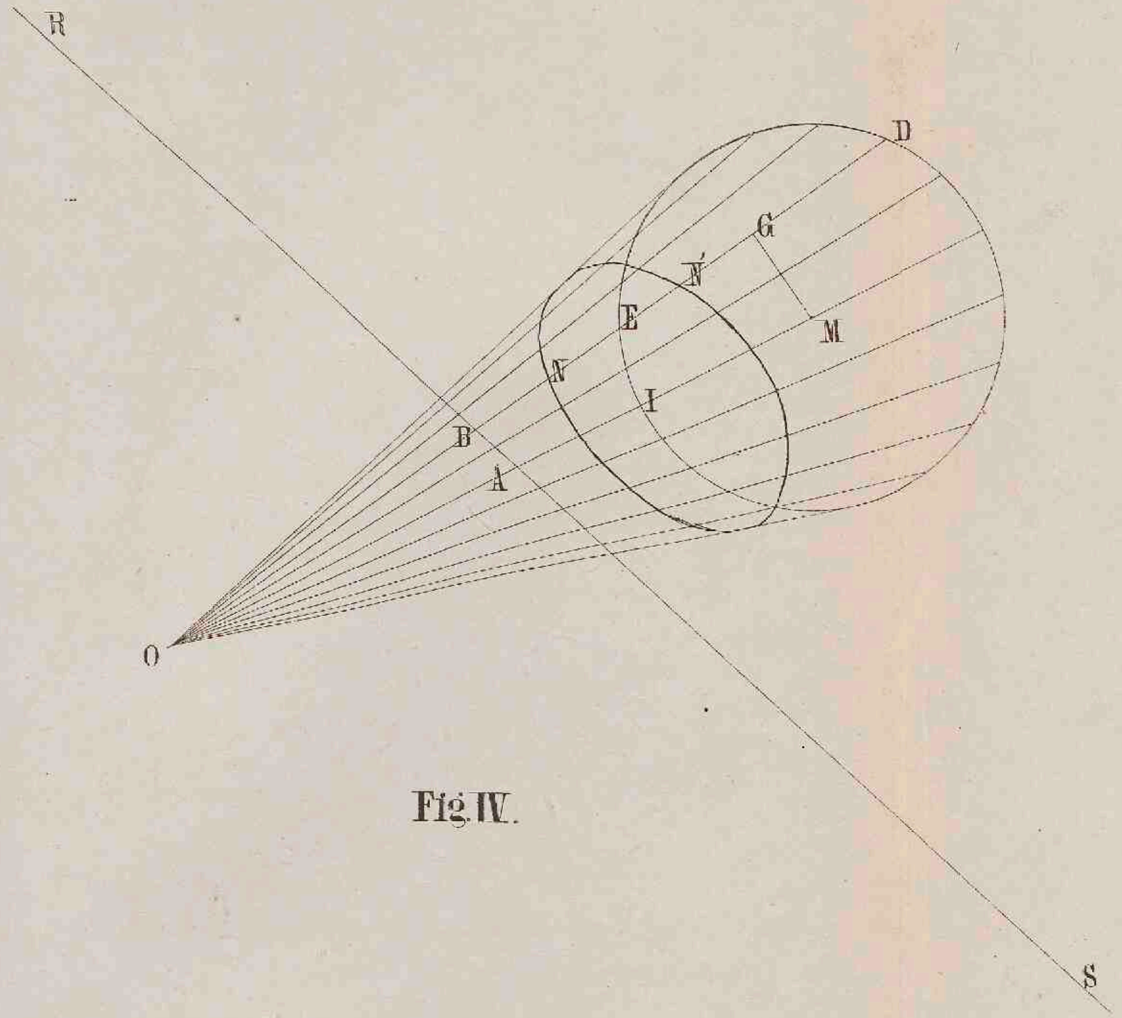

Fig. IV.

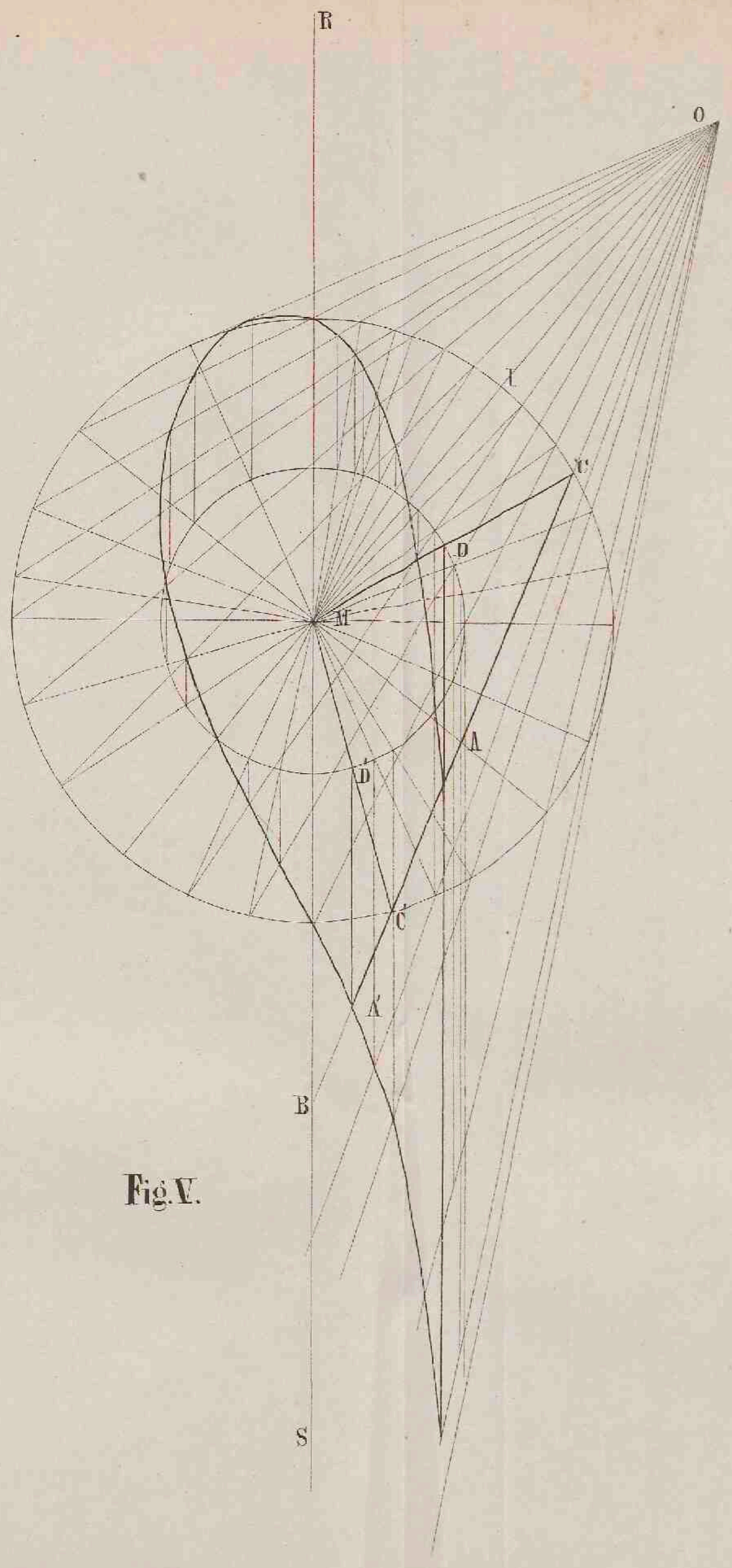

Fig. V.

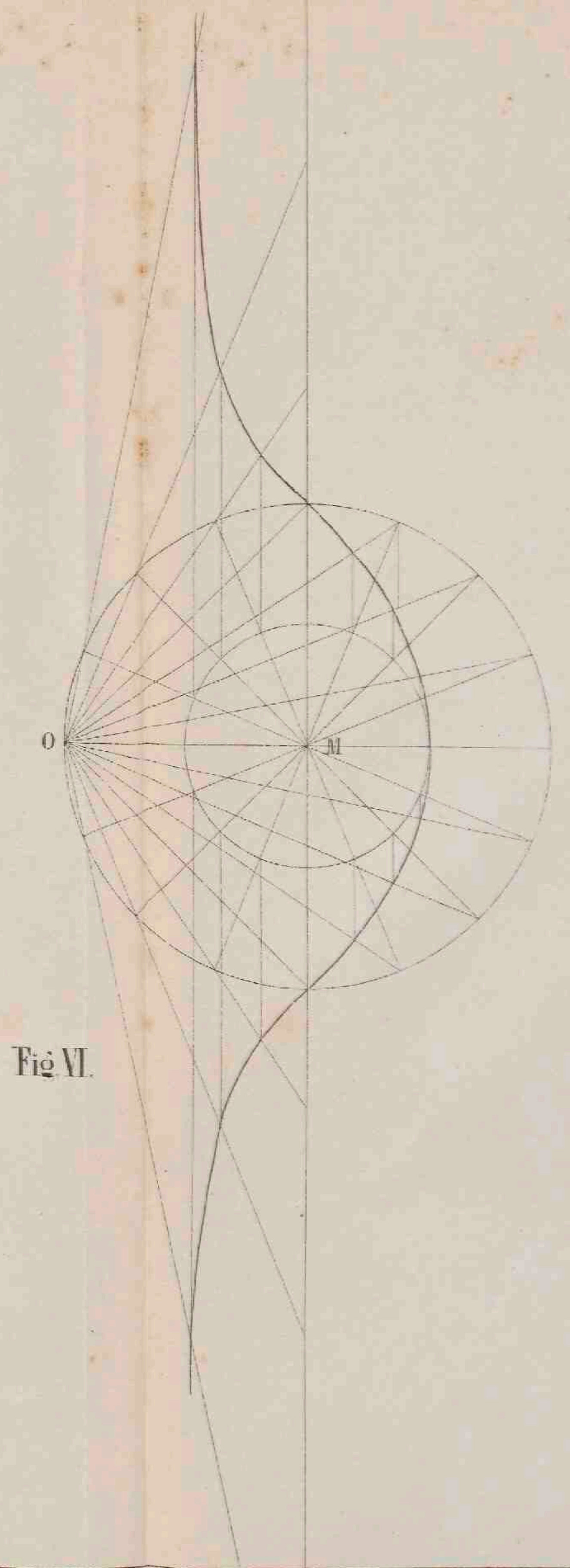

Fig. VI.