



# **Bijdragen tot de theorie van elastische media met oriënteerbare deeltjes**

<https://hdl.handle.net/1874/272896>

8. 4<sup>e</sup> 192

15 Dec. 1920

BIJDAGEN TOT DE THEORIE  
VAN ELASTISCHE MEDIA MET  
- ORIËNTEERBARE DEELTJES -



W. KOSTER

Diss.  
Utrecht

1920













BIJDRAGEN TOT DE THEORIE VAN ELASTISCHE  
MEDIA MET ORIËNTEERBARE DEELTJES

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



4036 9328



*Diss. Utrecht 1920*

# BIJDRAGEN TOT DE THEORIE VAN ELASTISCHE MEDIA MET ORIËNTEERBARE DEELTJES

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING  
VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN  
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE  
UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNI-  
FICUS DR. W. VOGELSANG, HOOGLEERAAR IN DE  
FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,  
VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNI-  
VERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE  
FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VER-  
DEDIGEN OP WOENSDAG 15 DECEMBER DES NA-  
MIDDAGS OM 4 UUR, DOOR

**WILLEM KOSTER**

GEBOREN TE AMSTERDAM





AAN T.





Bij de voltooiing van dit proefschrift betuig ik mijn dank aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

Maar zeer in het bijzonder, en boven allen ben ik U, Hooggeleerde ORNSTEIN, Hooggeachte Promotor, erkentelijk voor Uw onvermoeide hulp, voor Uw hartelijke belangstelling. Speciaal ook voor die warmte in Uw steun, zonder welke warmte de moed tot wetenschappelijke arbeid mij teneenenmale was gaan ontbreken, ben ik U innig dankbaar.

---





## INHOUD.

---

### HOOFDSTUK I.

Bladz.

|                                                                                                                                                                  |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| De elastische differentiaal vergelijkingen voor een medium,<br>opgebouwd uit deeltjes, die een oriënteerende werking<br>op elkaar uitoefenen . . . . . , . . . . | 1 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

### HOOFDSTUK II.

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| Statische toepassingen . . . . . | 16 |
|----------------------------------|----|

### HOOFDSTUK III.

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| Dynamische toepassingen . . . . . | 36 |
|-----------------------------------|----|

### HOOFDSTUK IV.

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| Toepassing op de theorie van de soortelijke warmte . . | 58 |
| Stellingen. . . . .                                    | 67 |

---



## HOOFDSTUK I.

---

### **De elastische differentiaalvergelijkingen voor een medium, opgebouwd uit deeltjes, die een oriënteerende werking op elkaar uitoefenen.**

Wij zullen in dit hoofdstuk de differentiaalvergelijkingen afleiden voor een elastisch medium, dat opgebouwd is uit deeltjes, die oriënteerende werkingen op elkaar uitoefenen. Wij zullen ons daarbij beperken tot het geval, dat het medium isotroop is en dat de elongatie's en de hoeken, die de oriëntatie's bepalen, als kleine grootheden te beschouwen zijn.

De toestand van een elastisch medium, die gewoonlijk door de verschuiving der zwaartepunten der elementaire deeltjes kan worden vastgelegd, behoeft in ons geval nadere bepaling door het aangeven van drie hoekgrootheden, die de oriëntatie der deeltjes bepalen. De werkingen, die de deeltjes op elkaar uitoefenen, zullen niet alleen krachten zijn, doch ook de koppels zullen niet langer te verwaarloozen zijn. Terwijl verder de spanningen in het medium een algemeener vorm moeten krijgen en de spanningen, die met die der gewone elasticiteitstheorie analoog zijn, thans niet alleen van de deformatie's, doch ook van de hoeken, die de oriëntatie bepalen, afhankelijk gesteld moeten worden.

§ 1. Wij zullen er thans toe overgaan, dit schema nader uit te werken. Wij denken ons aan elk deeltje <sup>1)</sup> van het

---

<sup>1)</sup> Een willekeurig materiëel deeltje wordt hier geïdentificeerd door het geven van 3 parameterwaarden  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Vergelijk voor de theorie der media, gelijk wij die beschouwen HELLINGER. Enzykl. Math. Wiss. IV 2 II Heft 5 blad 609 en vlg.







der theor. Phys. I blad 223 en Cosserat. Corps déformables blad 137 af, dat daàr het totale, op een deeltje werkende koppel  $\rho L + Y_z - Z_y$  hiër met één letter genoemd is.

§ 2. Wij moeten nu van de deformatie van het medium rekenschap geven, d. w. z. verantwoorden, dat eenerzijds in elk medium door deformatie elastische spanningen optreden, anderzijds, dat door inwerkende spanningen deformatie's worden veroorzaakt. Hiertoe merken wij op, dat de elastische spanningen met de grootheden, die de deformatie van het medium bepalen, moeten samenhangen. De vergelijkingen, die dat verband aangeven, noemt HELLINGER de stofvergelijkingen. Deze vergelijkingen, gecombineerd met de vergelijkingen (1) ... (6) beheerschen het elastische evenwicht.

In de klassieke elasticiteitstheorie onderstelt men, dat de spanningen in een bepaald punt functie's van de deformatie in dat punt zijn, waarbij dus de spanningen functie's van de differentiaalquotienten van de verschuivingen der deeltjes worden.

VOLTERRA heeft deze onderstelling gewijzigd door aan te nemen, dat de spanningen zoogenaamde Fonctions de ligne van de deformatie's zijn, d. w. z. dat de deformatie's van vroegere tijdstippen de spanning op het gegeven tijdstip mede bepalen <sup>1)</sup>).

De eenvoudigste onderstelling is dan verder, dat de spanningen lineaire functie's van de deformatiegrootheden zijn. Deze onderstelling wordt gewoonlijk Wet van Hooke genoemd.

Hebben wij nu te doen met een medium met oriënteerbare deeltjes, dan zullen de spanningen en de draaispanningen niet alleen van de deformatiegrootheden afhangen, doch de draaiingen, of beter, hun differentiaalquotienten naar de coördinaten zullen thans ook een rol spelen. Wij zullen nu weder de veronderstelling invoeren, dat alle spanningsgrootheden lineaire functie's van de voorkomende deformatiegrootheden zijn. Daardoor krijgen wij het volgende schema:

<sup>1)</sup> Vergelijk W. KOSTER DZ. Over de theorie der hysteresis volgens VOLTERRA Versl. K. Akad. v. Wet. Deel XXIX p. 264. 1920.

$$\begin{aligned}
 (8) \dots X_x &= a_{1.1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.2} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots + a_{1.9} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \dots + a_{1.18} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 X_y &= a_{2.1} \frac{\partial u}{\partial x} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 (25) \dots N_z &= a_{18.1} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + a_{18.9} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{18.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \dots + a_{18.18} \frac{\partial \sigma}{\partial z}
 \end{aligned}$$

In dit schema zijn i. p. v. de hoeken  $\delta \lambda$ ,  $\delta \mu$ ,  $\delta \nu$  de hoeken  $\delta \omega$ ,  $\delta z$ ,  $\delta \sigma$  ingevoerd, die lineaire functie's van deze groot-heden zijn.

Wij breiden op deze wijze de Wet van Hooke uit voor een medium met oriënteerbare deeltjes.

Substitueeren wij deze waarden in de evenwichtsvergelijkingen (1) ... (6), dan krijgen wij zes vergelijkingen in de zes onbekenden  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\omega$ ,  $z$  en  $\sigma$ , waaruit deze dus te bepalen zijn als functie's van de onafhankelijk veranderlijken  $x$ ,  $y$  en  $z$ .

§ 3. Wij zullen thans het stelsel (8) ... (25) vereenvoudigen, door te veronderstellen, dat wij met een isotroop medium te doen hebben. De eerste eisch, die voor isotropie vervuld moet worden, is, dat de waarden van de spanningen niet veranderen, als wij de  $X$ as van richting omkeeren, d. w. z. invariant zijn voor de substitutie

$$x' = -x \quad u' = -u \quad \omega' = -\omega$$

Maken wij dus de getransformeerde deformatiegrootheden op, dan verkrijgen wij:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u'}{\partial x'} &= + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial z'} = - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \omega'}{\partial x'} = + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega'}{\partial y'} = - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial z'} = - \frac{\partial \omega}{\partial z} \\
 \frac{\partial v'}{\partial x'} &= - \frac{\partial v}{\partial z} \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \\
 &\quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad +
 \end{aligned}$$

Substitutie in (8) geeft:

$$\begin{aligned}
 X'_{x'} &= a_{1.1} \frac{\partial u'}{\partial x'} - a_{1.2} \frac{\partial u'}{\partial y'} - a_{1.3} \frac{\partial u'}{\partial z'} - a_{1.4} \frac{\partial v'}{\partial x'} + a_{1.5} \frac{\partial v'}{\partial y'} + a_{1.6} \frac{\partial v'}{\partial z'} - \\
 &\quad - a_{1.7} \frac{\partial w'}{\partial x'} + a_{1.8} \frac{\partial w'}{\partial y'} + a_{1.9} \frac{\partial w'}{\partial z'} +
 \end{aligned}$$



+  $_{1.10} \frac{\partial \omega'}{\partial x}$  + ... hetzelfde in  $\omega$ ,  $z$  en  $\sigma$ , maar alle 2<sup>e</sup> indices

9 hooger; en dus is:

$$\begin{aligned} a_{1.2} &= a_{1.3} = a_{1.4} = a_{1.7} = 0 \\ a_{1.11} &= a_{1.12} = a_{1.13} = a_{1.16} = 0 \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze vervolgende met de andere spanningen, krijgen wij het schema:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} a_{1.2} &= a_{1.3} &= a_{1.4} &= a_{1.7} &= 0 & a_{2.2} &= a_{2.3} &= a_{2.4} &= a_{2.7} &= 0 & a_{3.2} &= a_{3.3} &= a_{3.4} &= a_{3.7} &= 0 \\ a_{1.11} &= a_{1.12} &= a_{1.13} &= a_{1.16} &= 0 & a_{2.11} &= & - & - & - & - & a_{3.11} &= & - & - & - & - \\ a_{4.2} &= a_{4.3} &= a_{4.4} &= a_{4.7} &= 0 & a_{5.2} &= a_{5.3} &= a_{5.4} &= a_{5.7} &= 0 & a_{6.2} &= & - & - & - & - & = 0 \\ a_{4.11} &= & - & - & - & - & a_{5.11} &= & - & - & - & - & a_{6.11} &= & - & - & - & = 0 \\ a_{7.2} &= a_{7.3} &= a_{7.4} &= a_{7.7} &= 0 & a_{8.2} &= & - & - & - & = 0 & a_{9.2} &= & - & - & - & = 0 \\ a_{7.11} &= & - & - & - & = 0 & a_{8.11} &= & - & - & - & = 0 & a_{9.11} &= & - & - & - & = 0 \end{array}$$

en nog eens hetzelfde schema met alle eerste indices 9 hooger.

Er vervallen dus  $2 \times 9 \times 8 = 144$  coëfficiënten; er blijven  $18^2 - 144 = 180$  coëfficiënten over.

De 2<sup>e</sup> eisch, die voor een isotroop medium in vervulling moet gaan, is, dat de 3 assen gelijkwaardig zijn, d. w. z. door cyclische verschuiving moeten de spanningen in elkaar overgaan. Na schrapping van de vervallen coëfficiënten is er van de vergelijkingen (7) ... (24) nog overgebleven:

$$\begin{aligned} X_x &= a_{1.1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.6} \frac{\partial v}{\partial z} + a_{1.8} \frac{\partial w}{\partial y} + a_{1.9} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ &+ a_{1.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{1.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.15} \frac{\partial z}{\partial z} + a_{1.17} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + a_{1.18} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned}$$

Cyclisch verschoven:

$$\begin{aligned} (26) \dots Y_y &= a_{1.1} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.5} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.6} \frac{\partial w}{\partial x} + a_{1.8} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ &+ a_{1.9} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.10} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.14} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + a_{1.15} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + a_{1.17} \frac{\partial \omega}{\partial z} + a_{1.18} \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ (27) \dots Z_z &= - - - - - \end{aligned}$$

terwijl men had:

$$(28) \dots\dots Y_y = a_{5.1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{5.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{5.6} \frac{\partial v}{\partial z} + a_{5.8} \frac{\partial w}{\partial y} +$$

$$+ a_{5.9} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{5.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{5.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{5.15} \frac{\partial z}{\partial z} + a_{5.17} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + a_{5.18} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

$$(29) \dots\dots Z_z = - - - - -$$

Door vergelijking van de coëfficiënten van (26) met (28) en van (27) met (29) verkrijgt men nog de betrekkingen:

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} a_{1.6} = a_{1.8} = 0 \quad a_{1.1} = a_{5.5} = a_{9.9} \quad a_{1.15} = a_{1.17} = 0 \quad a_{1.10} = a_{5.14} = a_{9.18} \\ a_{5.6} = a_{5.8} = 0 \quad a_{1.5} = a_{5.9} = a_{9.1} \quad a_{5.15} = a_{5.17} = 0 \quad a_{1.14} = a_{5.18} = a_{9.10} \\ a_{9.6} = a_{9.8} = 0 \quad a_{1.9} = a_{5.1} = a_{9.5} \quad a_{9.15} = a_{9.17} = 0 \quad a_{1.18} = a_{5.10} = a_{9.14} \end{array} \right.$$

en nogeens hetzelfde schema met alle 1<sup>e</sup> indices 9 hooger. Hierdoor vervallen dus  $2 \times 24 = 48$  coëfficiënten; resten nog  $180 - 48 = 132$ .

Nu moet nog door de cyclische verschuiving blijken over te gaan  $X_y$  in  $Y_z$  en  $Z_x$  en verder  $X_z$  in  $Y_x$  en  $Z_y$ . Het zal duidelijk zijn, dat dit beide geeft een herhaling van (30), de eerste keer in plaats van de 1<sup>e</sup> indices 1, 5 en 9 voorop 2, 6 en 7 (èn alle 9 hooger); de 2<sup>e</sup> keer in plaats van 1, 5 en 9 voorop 3, 4 en 8 (èn alle 9 hooger). Er vervallen nu dus nog eens  $2 \times 48 = 96$  coëfficiënten. Er blijven dus nog  $132 - 96 = 36$  coëfficiënten over.

Het stel „stofvergelijkingen” neemt dus de volgende gedaante aan:

$$X_x = a_{1.1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.9} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{1.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.18} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

$$X_y = a_{2.2} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{2.11} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$X_z = a_{3.3} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{3.12} \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$Y_x = a_{3.3} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{3.12} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$Y_y = a_{1.9} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.1} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.5} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.18} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{1.10} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.14} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

$$Y_z = a_{2.2} \frac{\partial v}{\partial z} + a_{2.11} \frac{\partial z}{\partial z}$$



$$Z_x = a_{2.2} \frac{\partial w}{\partial x} + a_{1.11} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$Z_y = a_{3.3} \frac{\partial w}{\partial y} + a_{3.12} \frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

$$Z_z = a_{1.5} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.9} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.1} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.14} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{1.18} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.10} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

en hetzelfde nog eens in  $L_x \dots N_z$ , maar alle 1<sup>e</sup> indices 9 hooger.

De laatste eisch, waaraan voor een isotroop medium voldaan moet worden luidt: dat alle mogelijke richtingen gelijkwaardig moeten zijn, d.w.z., het stelsel moet invariant zijn voor een willekeurige orthogonale substitutie (assendraaiing).

Deze 3<sup>e</sup> voorwaarde, heeft ook omgekeerd tengevolge dat een medium, dat aan die 3 eischen voldoet <sup>1)</sup> ook noodzakelijk isotroop moet zijn.

Maken wij dus b.v. eens op  $X'_{y'}$ , dan moet blijken, dat

$$X'_{y'} = a_{2.2} \frac{\partial u'}{\partial y'} + a_{2.11} \frac{\partial \omega'}{\partial y'}$$

en wij krijgen dan dus weer coëfficiënten te identificeeren.

Er wordt dus toegepast de orthogonale substitutie:

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \quad \text{getransponeerd: } x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \quad y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$z = a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \quad z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

Verder is:

$$X_x = a_1 X_x + a_2 X_y + a_3 X_z \quad X'_{x'} = a_1 X_x + a_2 Y_x + a_3 Z_x$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Voortgezette substitutie's en dan identificatie van coëfficiënten, zooals boven aangegeven (af en toe ook gebruik maken van de eigenschappen van de orthogonale substitutie's als bijv.  $\sum a_i b_i = 0$  levert ten slotte het schema:

$$a_{1.5} = a_{1.9}$$

$$a_{1.14} = a_{1.18}$$

$$a_{2.2} = a_{3.3} = a_{1.1} - a_{1.5}$$

$$a_{2.11} = a_{3.12} = a_{1.10} - a_{1.14}$$

<sup>1)</sup> De derde eisch sluit 1<sup>e</sup> en 2<sup>e</sup> in zich; echter heb ik de vervulling van 1 en 2 laten voorafgaan, om de becijferingen voor 3 makkelijker te kunnen doorvoeren.

en hetzelfde met de 1<sup>e</sup> indices 9 hooger. Dit ook nog substitueerende, worden de „stof” vergelijkingen voor het isotrope georiënteerde medium:

$$\begin{aligned}
 X_x &= a_{1.1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.5} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{1.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.14} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 X_y &= (a_{1.1} - a_{1.5}) \frac{\partial u}{\partial y} + (a_{1.10} - a_{1.14}) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Z_z &= a_{1.5} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{1.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{1.1} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{1.14} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{1.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{1.10} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 L_x &= a_{10.1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{10.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{10.5} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{10.10} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{10.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{10.14} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 L_y &= (a_{10.1} - a_{10.5}) \frac{\partial u}{\partial y} + (a_{10.10} - a_{10.14}) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 N_z &= a_{10.5} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{10.5} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{10.1} \frac{\partial w}{\partial z} + a_{10.14} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_{10.14} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{10.10} \frac{\partial \sigma}{\partial z}
 \end{aligned}$$

1) Vervangen wij de coëfficiënten  $a$  hierin weer door de gebruikelijke coëfficiënten  $\lambda$  en  $\mu$ , dan krijgen wij,

$$\begin{aligned}
 X_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + (\nu + 2\xi) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \nu \frac{\partial z}{\partial y} + \nu \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 X_y &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} + 2\xi \frac{\partial \omega}{\partial y} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Z_z &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \nu \frac{\partial z}{\partial y} + (\nu + 2\xi) \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 L_x &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial z} + (\nu_1 + 2\xi_1) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\
 L_y &= 2\mu_1 \frac{\partial u}{\partial y} + 2\xi_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 N_z &= \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial z}{\partial y} + (\nu_1 + 2\xi_1) \frac{\partial \sigma}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Substitueeren wij deze waarden in de vergelijkingen (1) — (6), dan komt er, als wij weer, evenals in de klassieke theorie van de elasticiteit invoeren de afkortingen:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

en verder analoog:

$$(31) . a_{1.5} \frac{\partial \theta}{\partial x} + (a_{1.1} - a_{1.5}) \Delta^2 u + a_{1.14} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + (a_{1.10} - a_{1.14}) \Delta^2 \omega = \rho X$$

$$(32) . a_{1.5} \frac{\partial \theta}{\partial y} + (a_{1.1} - a_{1.5}) \Delta^2 v + a_{1.14} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + (a_{1.10} - a_{1.14}) \Delta^2 \kappa = \rho Y$$

$$(33) . a_{1.5} \frac{\partial \theta}{\partial z} + (a_{1.1} - a_{1.5}) \Delta^2 w + a_{1.14} \frac{\partial \varrho}{\partial z} + (a_{1.10} - a_{1.14}) \Delta^2 \sigma = \rho Z$$

$$(34) . a_{10.5} \frac{\partial \theta}{\partial x} + (a_{10.1} - a_{10.5}) \Delta^2 u + a_{10.14} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + (a_{10.10} - a_{10.14}) \Delta^2 \omega + \\ + (a_{1.1} - a_{1.5}) \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho L$$

$$(35) . a_{10.5} \frac{\partial \theta}{\partial y} + (a_{10.1} - a_{10.5}) \Delta^2 v + a_{10.14} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + (a_{10.10} - a_{10.14}) \Delta^2 \kappa + \\ + (a_{1.1} - a_{1.5}) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho M$$

$$(36) . a_{10.5} \frac{\partial \theta}{\partial z} + (a_{10.1} - a_{10.5}) \Delta^2 w + a_{10.14} \frac{\partial \varrho}{\partial z} + (a_{10.10} - a_{10.14}) \Delta^2 \sigma + \\ + (a_{1.1} - a_{1.5}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho N$$

Zetten wij hierin voor de coëfficiënten de gebruikelijke letters  $\lambda$  en  $\mu$ , dan krijgen wij:

$$(37) . (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + (\nu + \xi) \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \xi \Delta^2 \omega = \rho X$$

$$(38) . (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta^2 v + (\nu + \xi) \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \xi \Delta^2 \kappa = \rho Y$$

$$(39) . (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta^2 w + (\nu + \xi) \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \xi \Delta^2 \sigma = \rho Z$$

$$(40) . (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_1 \Delta^2 u + (\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \xi_1 \Delta^2 \omega + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho L$$

$$(41) . (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_1 \Delta^2 v + (\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \xi_1 \Delta^2 \kappa + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho M$$



$$(42). (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu_1 \Delta^2 w + (\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi_1 \Delta^2 \sigma + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho N$$

Dit stelsel van 6 simultane partieele differentiaalvergelijkingen van de 2<sup>e</sup> orde in de onbekende functie's  $u, v, w, \omega, z, \sigma$  van de onafhankelijk veranderlijken  $x y z$  vormen de elastische differentiaalvergelijkingen voor het isotrope georienteerde medium voor het geval van evenwicht.

Verder moeten in vervulling gaan de volgende randvoorwaarden:

$$(43) \dots X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = \bar{X}$$

$$(44) \dots Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz = \bar{Y}$$

$$(45) \dots Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz = \bar{Z}$$

$$(46) \dots L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz = \bar{L}$$

$$(47) \dots M_x \cos nx + M_y \cos ny + M_z \cos nz = \bar{M}$$

$$(48) \dots N_x \cos nx + N_y \cos ny + N_z \cos nz = \bar{N}$$

Hierin stellen  $\bar{X}, \bar{Y}$  en  $\bar{Z}$  voor de oppervlaktespanningen op het begrenzend oppervlak,  $\bar{L}, \bar{M}$  en  $\bar{N}$  op overeenkomstige wijze de draaispanningen; de niet-gestreepte letters zijn geen oppervlakte-, maar ruimtespanningen;  $n$  is de naar buiten gerichte normaal.

Wil men de vergelijkingen niet voor isotrope, maar voor kristallijne media, dan geeft het vorige reeds voor verschillende kristalstelsels de vorm der vergelijkingen. Want in de 1<sup>e</sup> stap hebben we aangegeven, welke coëfficiënten wegvallen, als de assenrichtingen mogen omgekeerd worden en de 2<sup>e</sup> stap gaf aan, welke coëfficiënten wegvielen, als men de assen met elkaar mag verwisselen.

Wij moeten nu nog de bewegingsvergelijkingen aangeven: Zooals bekend gelden voor de beweging om het zwaartepunt de Eulersche bewegingsvergelijkingen:

$$P \dot{p} + (R - Q) qr = L,$$

$$Q \dot{q} + (P - R) rp = M,$$

$$R \dot{r} + (Q - P) pq = N,$$

Hierin stellen  $P, Q$  en  $R$  voor de hoofdtraagheidsmomenten

van het deeltje,  $p$ ,  $q$  en  $r$  de rotatie's om die (bewegelijke) assen;  $L_1$ ,  $M_1$  en  $N_1$  zijn de momenten van de inwendige krachten om diezelfde assen.

Onderstellen wij nu, hetzij dat de rotatie's  $p$ ,  $q$  en  $r$  kleine grootheden zijn, hetzij dat onze deeltjes bolsymmetrie vertoonen, zoodat  $P = Q = R$ , dan kunnen de tweede termen in die linkerleden weggelaten worden en we houden over:

$$\begin{aligned} P \dot{p} &= L, \\ Q \dot{q} &= M, \\ R \dot{r} &= N, \end{aligned}$$

Wij bepalen nu, als steeds, de stand van dit bewegelijke assenstelsel t.o.v. een in het zwaartepunt aangebracht vast stelsel met behulp van de Eulersche hoeken  $\Theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$ .

Als wij nu aannemen, dat  $\Theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$  klein zijn, zoodat hun sinussen bij benadering nul, hun cosinussen bij benadering gelijk één genomen mogen worden, dan volgt uit gewone vectorontbinding, dat bij 1<sup>e</sup> benadering de rotatie's om de vaste assen gelijk zijn aan de rotatie's om de bewegelijke assen. Tevens volgt dan, dat de momenten  $L_1$ ,  $M_1$  en  $N_1$  bij benadering gelijk zijn aan de momenten om de vaste assen.

Voor de deeltjes, waaruit ons medium is opgebouwd, nemen wij nu den bolvorm aan; dan is, als we  $P = Q = R$  noemen  $\tau$   $L_1$  enz. te brengen tot de gedaante:

$$L_1 = \tau \frac{d\omega}{dt}, \text{ enz.}$$

Voeren wij dit in, dan komt, als pendant van het stel (1) — (6)

$$\rho \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

en analoge vergelijkingen in  $v$  en  $w$ ,  $Y$  en  $Z$ ; en verder

$$\rho L - \tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = 0$$

en analoge vergelijkingen in  $z$  en  $\sigma$ ,  $M$  en  $N$ .

Substitueeren wij hierin de stofvergelijkingen voor het isotrope medium en nemen wij weer voor de coëfficiënten daarin de gebruikelijke letters, dan krijgen wij als bewegingsvergelijkingen:



$$(49) \cdot (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + (\nu + \xi) \frac{\partial \varpi}{\partial x} + \xi \Delta^2 \omega = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho X$$

$$(50) \cdot (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta^2 v + (\nu + \xi) \frac{\partial \varpi}{\partial y} + \xi \Delta^2 \omega = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho Y$$

$$(51) \cdot (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta^2 w + (\nu + \xi) \frac{\partial \varpi}{\partial z} + \xi \Delta^2 \sigma = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho Z$$

$$(52) \dots (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_1 \Delta^2 u + (\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \varpi}{\partial x} + \xi_1 \Delta^2 \omega + \\ + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \rho L$$

$$(53) \dots (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_1 \Delta^2 v + (\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \varpi}{\partial y} + \xi_1 \Delta^2 \omega + \\ + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \rho M$$

$$(54) \dots (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu_1 \Delta^2 w + (\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \varpi}{\partial z} + \xi_1 \Delta^2 \sigma + \\ + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \rho N.$$

§ 4. Wij zullen de energievergelijking voor het georiënteerde medium onderzoeken. Daartoe brengen wij eerst de bewegingsvergelijkingen blzd. 11 rgl. 7 v. o. in den vorm:

$$\begin{array}{l|l} \rho \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 & \times u' d \tau_1 \\ \rho \left( Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 & \times v' d \tau_1 \\ \rho \left( Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 & \times w' d \tau_1 \\ \rho L - \tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = 0 & \times \omega' d \tau_1 \\ \rho M - \tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0 & \times \omega' d \tau_1 \\ \rho N - \tau \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} = 0 & \times \sigma' d \tau_1 \end{array}$$



Wij vermenigvuldigen respect. met de grootheden, die achter de streep zijn aangegeven, (d  $\tau_1$  is het volume-element) integreeren naar  $\tau$ , en tellen de zoo verkregen vergelijkingen op, dan komt er:

$$\begin{aligned} & \int_1 \rho (Xu' + Yv' + Zw') d\tau_1 - \int_2 \left( u' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + w' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \rho dt_1 + \\ & + \int_3 \left[ u' \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + v' \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \dots \right) + w' (\dots) \right] d\tau_1 + \\ & + \int_4 \rho (L\omega' + Mz' + N\sigma') d\tau_1 + \int_5 \left( \omega' \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \sigma' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \right) \tau d\tau_1 + \\ & + \int_6 \left[ \omega' \left( \frac{\partial L_x}{\partial x} + \dots \frac{\partial L_z}{\partial z} \right) + z' \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \dots \right) + \sigma' (\dots) \right] d\tau_1 \end{aligned}$$

$$\text{Kies nu } u' = \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad v' = \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad w' = \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

$$\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt \quad z' = \frac{\partial z}{\partial t} dt \quad \sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt$$

dan wordt  $\int_1$ :

$$(55) \dots \int_1 \rho \left( X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} + Z \frac{\partial w}{\partial t} \right) dt d\tau_1$$

Nu stelt  $\rho (X du + Y dv + Z dw) d\tau_1$  voor de arbeid verricht op het massaelement  $\rho d\tau_1$  door de massakrachten X, Y en Z in den tijd dt, waarin de deformatie  $du \dots d\sigma$  plaats grijpt; dus  $\int_1$  is de totaalarbeid, verricht door de massakrachten X, Y en Z in den tijd dt

Voorts wordt  $\int_4$ :

$$(56) \dots \int_4 \rho \left( L \frac{\partial \omega}{\partial t} + M \frac{\partial z}{\partial t} + N \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) dt d\tau_1,$$

voorstellende de totaalarbeid, verricht door de massamomenten L, M en N in den tijd dt.

De integralen 2 en 5 leveren samen:

$$\begin{aligned} (57) \dots \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int \rho \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} d\tau_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int \tau \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \right\} d\tau_1 \right] dt \end{aligned}$$

Noemt men de vorm [...]  $T_0$ , de totale kinetische energie, dan wordt dit  $-\frac{dT_0}{dt} dt$ .

Ter transformatie van de integraal

$$\int_3 \left[ u' \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + v' \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \dots \right) + w' \right] d\tau_1$$

gaan wij te werk als in de klassieke elasticiteits theorie (zie b.v. RIEMAN-WEBER II blz. 161 en vlg.). Men integreert partiëel en past op de positieve termen de stelling van GAUSS toe en verkrijgt aldus:

$$\int \left( \bar{X} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{Y} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{Z} \frac{\partial w}{\partial t} \right) dt do$$

Deze integraal stelt voor de in den tijd  $dt$  tegen de uitwendige oppervlakte krachten verrichte arbeid. En op dezelfde wijze van  $\int_6$ :

$$\int \left( \bar{L} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{M} \frac{\partial z}{\partial t} + \bar{N} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) dt do,$$

voorstellende de in den tijd  $dt$  tegen de uitwendige oppervlakte momenten verrichte arbeid.

Er rest nog van  $\int_3$

$$-\int \left( X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + X_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \dots - Z_z \frac{\partial w'}{\partial z} \right) d\tau_1$$

of na substitutie  $u' = \frac{\partial u}{\partial t} dt$ :

$$(58) \dots - \int \left[ X_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + X_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \\ \left. + Y_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \dots + Z_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} \right] dt d\tau_1,$$

en zoo nog van  $\int_6$ :

$$(59) \dots - \int \left[ L_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \right. \\ \left. + M_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \dots - N_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] dt d\tau_1,$$

Overzien we de vergelijkingen (55) — (59), dan volgt, in verband met de Energie stelling, dat (58) + (59) voorstelt de in den tijd  $dt$  gewonnen potentiële energie binnen in de ruimte  $\tau_1$ . De potentiële energie voor het georiënteerde medium neemt dus den vorm aan:

$$(60) \dots X_x d \frac{\partial u}{\partial x} + X_y d \frac{\partial u}{\partial y} + X_z d \frac{\partial u}{\partial z} + Y_x d \frac{\partial v}{\partial x} + \dots + \\ + L_x d \frac{\partial \omega}{\partial x} + \dots + N_z d \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

Men kan hierin verder voor  $X_x - N_z$  de uitdrukkingen schrijven van § 3 blz. 8, dan krijgt men de potentiële energie voor het isotrope georiënteerde medium.

Het isotrope oriënteerbare medium zal een potentiaalfunctie bezitten, indien de betrekking geldt:

$$a_{1,10} = a_{10,1} \text{ en } a_{1,14} = a_{10,5}$$

of, in de gebruikelijke notatie:

$$\lambda_1 = \nu \text{ en } \mu_1 = \xi$$

(Over de potentiaal bij georiënteerde media zie COSSERAT Corps déformables Hoofdstuk IV).

Ook hier is weer dezelfde opmerking te maken als aan het slot van § 3. Voor de kristallijne media krijgen wij de energie als we in (60) voor de krachten en momenten de voor het betrokken kristallijne medium geldende vergelijkingen gebruiken.



## HOOFDSTUK II.

### Statische toepassingen.

§ 1. Wij zullen onderstellen, dat er géén uitwendige krachten en momenten werken, d. w. z. de grootheden  $X, Y, Z, L, M$  en  $N$  in de rechterleden van de vergelijkingen (37) — (42) (Hoofdstuk I) worden nul gesteld. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Men kan aan deze vergelijkingen trachten te voldoen door de onderstelling:

$$(u \ v \ w) = \Delta \varphi + \text{Rot } \Phi$$

$$(\omega \ \kappa \ \sigma) = \Delta \psi + \text{Rot } \Psi,$$

waarin dus  $\varphi$  en  $\psi$  scalaire,  $\Phi$  en  $\Psi$  vectorpotentialen zijn. Daartoe moeten de functie's  $\varphi$  en  $\psi$  oplossingen zijn van de differentiaalvergelijkingen:

$$(61) \dots (\lambda + 2\mu) \Delta^2 \varphi = -(\nu + 2\xi) \Delta^2 \psi$$

$$(62) \dots -(\nu + 2\xi) \Delta^2 \varphi = (\nu_1 + 2\xi_1) \Delta^2 \psi$$

$$\text{Dit kan alleen als } \Delta^2 \varphi = \Delta^2 \psi = 0$$

Verder moeten de functies  $\Phi$  en  $\Psi$  oplossingen zijn van de vergelijkingen:

$$(63) \dots \mu \Delta^2 \Phi + \xi \Delta^2 \Psi = 0$$

$$(64) \dots \mu \Delta^2 \Phi = -\xi \Delta^2 \Psi.$$

of

en van:

$$(65) \dots -(\xi \Delta^2 - \mu \text{Rot}) \Phi = \xi_1 \Delta^2 \Psi.$$

Hieruit volgt voor  $\Phi$ :

$$(66) \dots (\xi \Delta^2 - \mu \text{Rot}) \Phi = -\frac{\mu \xi_1}{\xi} \Delta^2 \Phi$$

en een soortgelijke vergelijking voor  $\Psi$ .

Uit de gevonden grootheden  $\varphi, \Phi, \psi$  en  $\Psi$  zijn volgens de hierboven gemaakte onderstelling  $(u \ v \ w)$  en  $(\omega \ \kappa \ \sigma)$  te verkrijgen.

Men overtuigt zich gemakkelijk, dat er oplossingen kunnen zijn, waarbij  $u, v, w, \omega, \kappa$  en  $\sigma$  lineaire functie's van de coördinaten  $x, y$  en  $z$  zijn, waarbij wij dus krijgen een lineaire deformatie van het geheele stelsel.

De grootheden  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\omega$ ,  $z$  en  $\sigma$  moeten voldoen aan de vergelijkingen (37) — (42), waarin de grootheden  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $L$ ,  $M$  en  $N$  nul zijn. Verder moeten tusschen de grootheden  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  en  $\bar{N}$ , de krachten en koppels, die aan de grens van het lichaam werken, en de spanningen  $X_x \dots N_z$  de betrekkingen (43) — (48) bestaan. En ten slotte kunnen wij de spanningen  $X_x - N_z$  als functie's van de deformatiegrootheden uitdrukken volgens de vergelijkingen :

$$(67). X_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + (\nu + 2\xi) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \nu \frac{\partial z}{\partial y} + \nu \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

$$\vdots$$

$$(85). X_y = 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} + 2\xi \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ enz. tot en met } N_z$$

Als wij nu een zekere deformatie in het leven wenschen te roepen, die dus door een bepaalde oplossing van (37) — (42) gegeven is, kunnen wij vragen naar de uitwendige oppervlaktespanningen, die men hiertoe moet aanbrengen. Daar de deformatie voorgeschreven is, zijn de grootheden  $u - \sigma$ , en dus ook  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}$  als functie's van  $x$ ,  $y$  en  $z$  bekend. Door deze laatste te substitueeren in (67) — (85) krijgen wij de spanningscomponenten  $X_x - N_z$ .

Vullen wij deze weer in in (43) — (48), dan leveren deze de verlangde grootheden  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  en  $\bar{N}$  op.

Wij kunnen omgekeerd ook de oppervlakte krachten en koppels geven en vragen, welke deformatie hierdoor wordt veroorzaakt. D.w.z. wij moeten dan dus  $u - \sigma$  als functie's van  $x$ ,  $y$  en  $z$  bepalen. De gegeven grootheden  $\bar{X} - \bar{N}$  zal men daartoe substitueeren in (43) — (48). Hierdoor verkrijgt men  $X_x - N_z$ . Daarna kan men met behulp van (67) — (85) de waarden van  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}$  de grootheden, die de deformatie bepalen, vinden (om dan nog de grootheden  $u - \sigma$  zelf te vinden, moet men de gevonden  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}$  sub-



stitueeren in (37) — (42). Zij zullen dan niet geheel bepaald zijn, maar 12 willekeurige constanten bevatten. Om deze constanten te bepalen, kan men nog verdere voorwaarden stellen b.v., dat in de oorsprong van het coörd. stelsel:

$$x - \sigma = 0 \text{ en } \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ enz.)}$$

waarin bij gegeven krachten en koppels de deformatie bepaald moet worden. Wij zullen thans enkele bijzondere voorbeelden behandelen, waarin, bij gegeven krachten en koppels, de deformatie bepaald moet worden.

§ 2. Wij hebben vooropgesteld de onderstelling, dat de uitwendige ruimtekrachten en momenten alle nul zijn. Dit zal zeker zoo zijn, wanneer de spanningscomponenten in alle punten van het lichaam dezelfde waarden hebben.

Immers, dan worden de grootheden  $\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial N_z}{\partial z}$  alle gelijk nul, zoodat men uit de evenwichtsvergelijkingen (1) — (6) dadelijk ziet, dat dan ook  $X - N$  nul worden.

Maar als wij voor de spanningscomponenten constanten willen hebben, moeten de grootheden  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}$  constanten zijn, d.w.z.  $u - \sigma$  moeten lineaire functie's van  $x$ ,  $y$  en  $z$  zijn. Wij moeten een lineaire deformatie kiezen. Echter, aan de 1<sup>e</sup> afgeleiden, die optreden in de vergelijkingen (40), (41) en (42) zien wij, dat de meest algemeene lineaire deformatie niet aan het stelsel (37) — (42) voldoet. Substitueeren wij echter deze lineaire deformatie in (40), (41) en (42), dan volgt  $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$  enz. Wij moeten dus de deformatievector  $u$ ,  $v$ ,  $w$  rotatieloos nemen. Dan hebben wij dus:

$$\begin{aligned} (86) \quad u &= \alpha x + \gamma' y + \beta' z \\ : \quad v &= \gamma' x + \beta y + \alpha' z \\ : \quad w &= \beta' x + \alpha' y + \gamma z \\ : \quad \omega &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ : \quad z &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ (91) \quad \sigma &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

Als voorbeeld nemen wij een constante uitwendige opper-



vlakke kracht  $P$ , overal gericht langs den normaal naar buiten, terwijl de uitwendige oppervlakte momenten nul zijn. Wij willen hieraan trachten te voldoen met een deformatie (86)–(91), waarin wij dus nog beschikken over de coëfficiënten  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ .

Wij hebben dus:

$$\begin{array}{lll} \bar{X} = P \cos nx & \bar{Y} = P \cos ny & \bar{Z} = P \cos nz \\ \bar{L} = 0 & \bar{M} = 0 & \bar{N} = 0 \end{array}$$

Uit (43)–(48) volgt nu:

$$P \cos nx = \bar{X} = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz$$

$$P \cos ny = \bar{Y} = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz$$

$$P \cos nz = \bar{Z} = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz$$

$$0 = \bar{L} = L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz$$

$$0 = \bar{M} = M_x \cos nx + M_y \cos ny + M_z \cos nz$$

$$0 = \bar{N} = N_x \cos nx + N_y \cos ny + N_z \cos nz$$

Dit geeft:

$$(92) \quad - \quad - \quad L_x = L_y = L_z = \dots \dots \dots N_z = 0$$

$$(93) \quad - \quad - \quad X_y = X_z = Y_x = Y_z = Z_x = Z_y = 0$$

$$(94) \quad - \quad - \quad X_x = Y_y = Z_z = P$$

Daar wij trachten te voldoen met behulp van (86)–(91), volgt uit (67)–(85):

$$(95) \quad X_x = (\lambda + 2\mu)\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + (\nu + 2\xi)\alpha_1 + \nu\beta_2 + \nu\gamma_3$$

$$: \quad X_y = 2\mu\gamma' + 2\xi\alpha_2$$

$$: \quad X_z = 2\mu\beta' + 2\xi\alpha_3$$

$$: \quad Y_x = 2\mu\gamma' + 2\xi\beta_1$$

$$: \quad Y_y = \lambda\alpha + (\lambda + 2\mu)\beta + \lambda\gamma + \nu\alpha_1 + (\nu + 2\xi)\beta_2 + \nu\gamma_3$$

$$: \quad Y_z = 2\mu\alpha' + 2\xi\beta_3$$

$$: \quad Z_x = 2\mu\beta' + 2\xi\gamma_1$$

$$: \quad Z_y = 2\mu\alpha' + 2\xi\gamma_2$$

$$(113) \quad Z_z = \lambda\alpha + \lambda\beta + (\lambda + 2\mu)\gamma + \nu\alpha_1 + \nu\beta_2 + (\nu + 2\xi)\gamma_3$$

en nogeens precies hetzelfde schema in de letters

$L_x - N_z$ , maar in de rechterleden de coëfficiënten  $\nu$ ,  $\xi$ ,  $\nu_1$  en  $\xi_1$  i. p. v.  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  en  $\xi$ .

Toepassing van (95)–(113) levert nu, met behulp van (92):

$$(108a) \quad \mu \gamma' + \xi \alpha_2 = 0 \quad \mu \beta' + \xi \gamma_1 = 0 \quad (111a)$$

$$(109a) \quad \mu \beta' + \xi \alpha_3 = 0 \quad \mu \alpha' + \xi \beta_3 = 0 \quad (112a)$$

$$(110a) \quad \mu \gamma' + \xi \beta_1 = 0 \quad \mu \alpha' + \xi \gamma_2 = 0 \quad (113a)$$

Uit 108a en 110a volgt:  $\alpha_2 = \beta_1 = -\frac{\mu}{\xi} \gamma' \quad (114)$

„ 109a en 111a „  $\alpha_3 = \gamma_1 = -\frac{\mu}{\xi} \beta' \quad (115)$

„ 112a en 113a „  $\beta_3 = \gamma_2 = -\frac{\mu}{\xi} \alpha' \quad (116)$

En op dezelfde wijze volgt uit (93)

$$\alpha_2 = \beta_1 = -\frac{\mu_1}{\xi_1} \gamma' \quad (117)$$

$$\alpha_3 = \gamma_1 = -\frac{\mu_1}{\xi_1} \beta' \quad (118)$$

$$\beta_3 = \gamma_2 = -\frac{\mu_1}{\xi_1} \alpha' \quad (119)$$

Vergelijking van (114)–(116) met (117)–(119) levert:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Er rest nog:

$$L_x = M_y = N_z = 0 \quad X_x = Y_y = Z_z = P$$

Voeren wij dat in, dan levert

$$L_z = 0; (\nu + 2\xi)\alpha + \nu\beta + \nu\gamma + (\nu_1 + 2\xi_1)\alpha_1 + \nu_1\beta_2 + \nu_1\gamma_3 = 0$$

en analoog voor  $M_y = 0$  en  $N_z = 0$

$$\text{Verder levert } X_x = P; (\lambda + 2\mu)\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + (\nu + 2\xi)\alpha_1 + \nu\beta_2 + \nu\gamma_3 = P \text{ en analoog voor } Y_y = P \text{ en } Z_z = P$$

Wij hebben dus zes vergelijkingen met zes onbekenden,  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_2$  en  $\gamma_3$ , die volledige symmetrie t. o. v.  $\alpha \beta \gamma$  en ook t. o. v.  $\alpha_1, \beta_2$  en  $\gamma_3$  bezitten.

De oplossing luidt:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{P(3\nu_1 + 2\xi_1)}{(3\lambda + \mu)(3\nu_1 + 2\xi_1) - (3\nu + 2\xi)^2}$$

De divergentie  $\theta$  is dus:

$$\theta = \alpha + \beta + \gamma = \frac{3P}{3\lambda + 2\mu - \frac{(3\nu + 2\xi)^2}{3\nu_1 + 2\xi_1}}$$

terwijl de theorie voor het medium zonder inwendige draaiing levert:

$$\theta = \frac{3P}{3\lambda + 2\mu}$$

Verder wordt

$$\mathfrak{S} = - \frac{(3\nu + 2\xi) 3P}{(3\lambda + 2\mu)(3\nu_1 + 2\xi_1) - (3\nu + 2\xi)^2}$$

De volume verandering  $\theta$  vertoont dus een afwijking vergeleken met het geval van géén oriëntatie, afhankelijk van die 2<sup>e</sup> breuk in den noemer.

§ 3. Als tweede voorbeeld behandelen we het geval van een rechte cylinder met willekeurig grondvlak. Laat tegen de beide eindvlakken constante, gelijke, maar tegengestelde krachten  $P$  werken. De op het manteloppervlak werkende krachten of koppels zullen wij gelijk aan nul kiezen; eveneens de op het boven en benedenvlak werkende koppels.

Leggen wij de  $Z$  as in de richting van de beschrijvende lijn (de naar buiten gerichte normaal zij weer positief; de kracht  $P$  zij volgens de positieve normaal gericht en dus een trekkende kracht, dan is aan het eindvlak, waar  $z$  de grootste waarde heeft:

$\bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = 0 \quad \bar{Z} = P \quad \cos nx = 0 \quad \cos ny = 0 \quad \cos nz = 1$   
en voor het eindvlak, waar  $z$  de kleinere waarde heeft:

$\bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = 0 \quad \bar{Z} = -P \quad \cos nx = 0 \quad \cos ny = 0 \quad \cos nz = -1$

Op dezelfde wijze te werk gaande als in het 1<sup>e</sup> voorbeeld in § 2, vinden wij:

$$\bar{X} = 0 = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz$$

dus

$$X_z = 0 \quad \text{Evenzoo}$$

$$Y_z = 0 \quad \text{en}$$

$$Z_z = P \quad \text{en}$$

$$L_z = M_z = N_z = 0$$

Met behulp van de „stofvergelijkingen” dan wederom:

$$(120) \dots \mu \beta' + \xi \alpha_3 = 0 \quad \theta = \alpha + \beta + \gamma$$

$$(121) \dots \mu \alpha' + \xi \beta_3 = 0 \quad \mathfrak{S}_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$(122) \dots \lambda \theta + 2\mu \gamma + \nu \mathfrak{S} + 2\xi \gamma_3 = P$$



$$(123) \dots \xi \beta' + \xi_1 \alpha_3 = 0$$

$$(124) \dots \xi \alpha' + \xi_1 \beta_3 = 0$$

$$(125) \dots \nu \theta + 2 \xi \gamma + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \gamma_3 = 0$$

$$(120) \text{ en } (123) \text{ leveren } \alpha_3 = \beta' = 0$$

$$(121) \text{ en } (124) \quad \beta_3 = \alpha' = 0$$

Resten nog (122) en (125).

Schrijven wij nu op de voorwaarden voor het manteloppervlak: daar is:

$$\bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = 0 \quad \bar{Z} = 0 \quad \cos n z = 0$$

$$\bar{L} = 0 \quad \bar{M} = 0 \quad \bar{N} = 0$$

Substitueeren wij dit in het stel randvoorwaarden en bedenken dat dit stel moet gelden voor alle mogelijke waarden van  $\cos n x$  en van  $\cos n y$ , dan volgt:

$$\begin{aligned} X_x &= X_y = Y_x = Y_y = Z_x = Z_y = \\ &= L_x = L_y = M_x = M_y = N_x = N_y = 0 \end{aligned}$$

Dit levert:

$$(126) \dots \lambda \theta + 2 \mu \alpha + \nu \vartheta + 2 \xi \alpha_1 = 0$$

$$(127) \dots \mu \gamma' + \xi \alpha_2 = 0$$

$$(128) \dots \mu \gamma' + \xi \beta_1 = 0$$

$$(129) \dots \lambda \theta + 2 \mu \beta + \nu \vartheta + 2 \xi \beta_2 = 0$$

$$(130) \dots \mu \beta' + \xi \gamma_1 = 0$$

$$(131) \dots \mu \alpha' + \xi \gamma_2 = 0$$

$$(132) \dots \nu \theta + 2 \xi \alpha + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \alpha_1 = 0$$

$$(133) \dots \xi \gamma' + \xi_1 \alpha_2 = 0$$

$$(134) \dots \xi \gamma' + \xi_1 \beta_1 = 0$$

$$(135) \dots \xi \gamma' + \xi_1 \beta_1 = 0$$

$$(136) \dots \nu \theta + 2 \xi \beta + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \beta_2 = 0$$

$$(137) \dots \xi \beta' + \xi_1 \gamma_1 = 0$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad \alpha_2 = \beta_1 = 0 \quad \beta_1 = \gamma' = 0 \\ \alpha_3 = \beta_3 = 0 \end{aligned}$$

of, totaal met het vorige:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_2 = \beta_1 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$$

terwijl er dan nog resten van het bovenstaande stel vergelijkingen (126), (129), (132) en (136) en van het vorige (122)

en (125), totaal zes vergelijkingen ter berekening van de zes grootheden  $\alpha \beta \gamma \alpha_1 \beta_2 \gamma_3$ , als volgt:

$$\begin{aligned}\lambda \theta + 2 \mu \gamma + \nu \vartheta + 2 \xi \gamma_3 &= P \\ \lambda \theta + 2 \mu \alpha + \nu \vartheta + 2 \xi \alpha_1 &= 0 \\ \lambda \theta + 2 \mu \beta + \nu \vartheta + 2 \xi \beta_2 &= 0 \\ \nu \theta + 2 \xi \alpha + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \alpha_1 &= 0 \\ \nu \theta + 2 \xi \beta + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \beta_2 &= 0 \\ \nu \theta + 2 \xi \gamma + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \gamma_3 &= 0\end{aligned}$$

Oplossing levert:

$$\begin{aligned}\alpha = \beta = \gamma &= \frac{P}{2 \left( \mu - \mu_1 \frac{\xi}{\xi_1} \right)} \\ \gamma &= P \frac{\lambda + \mu - \frac{1}{3} \frac{\mu_1 \xi}{\xi_1} - \frac{1}{3} \frac{(3 \nu + 2 \xi)^2}{3 \nu_1 + 2 \xi_1}}{\left\{ 3 \lambda + 2 \mu - \frac{(3 \nu + 2 \xi)^2}{3 \nu_1 + 2 \xi_1} \right\} \left\{ \mu - \mu_1 \frac{\xi}{\xi_1} \right\}}\end{aligned}$$

terwijl men, zonder oriëntatie, voor dit geval heeft:

$$\gamma = P \frac{\lambda + \mu}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu}$$

§ 4. Wij zullen eenige elementaire vervormingen aangeven, die in staat stellen de elasticiteitscoëfficiënten voor het georiënteerde medium te bepalen. De zes onbekende coëfficiënten zijn,  $\lambda, \mu, \nu, \xi, \nu_1$  en  $\xi_1$ . We hebben dus ook zes onafhankelijke betrekkingen tusschen deze grootheden noodig.

Beschouwt men het eerste, door ons in dit hoofdstuk behandelde voorbeeld, dan levert de meting van  $\theta$  één betrekking. Zoo krijgen wij uit het 2<sup>e</sup> door ons behandelde voorbeeld twee betrekkingen, in totaal dus drie. Wij hebben er dus nog drie noodig.

Als volgende elementaire proef nemen wij weer een rechte cylinder van willekeurig grondvlak. Tegen het manteloppervlak werkt in loodrechte richting een constante drukkracht  $P$ , oppervlakte momenten alle nul. Op de eindvlakken zoowel oppervlaktekrachten als momenten alle nul. De  $z$  as leggen wij weer in de richting van de beschrijvende lijn.

De eindvlakken leveren nu:

$$\mu \beta' + \xi \alpha_3 = 0$$

$$\mu \alpha' + \xi \beta_3 = 0$$

$$\lambda \theta + 2 \mu \gamma + \nu \vartheta + 2 \xi \gamma_3 = 0$$

$$\xi \beta' + \xi_1 \alpha_3 = 0$$

$$\xi \alpha' + \xi_1 \beta_3 = 0$$

$$\nu \theta + 2 \xi \gamma + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \gamma_3 = 0$$

en het manteloppervlak geeft:

|                                                                      |                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\lambda \theta + 2 \mu \alpha + \nu \vartheta + 2 \xi \alpha_1 = P$ | $\nu \theta + 2 \xi \alpha + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \alpha_1 = 0$ |
| $\mu \gamma' + \xi \alpha_2$                                         | $\xi \gamma' + \xi_1 \alpha_2$                                       |
| $\mu \gamma' + \xi \beta_1$                                          | $\xi \gamma' + \xi_1 \beta_1$                                        |
| $\lambda \theta + 2 \mu \beta + \nu \vartheta + 2 \xi \beta_2 = P$   | $\nu \theta + 2 \xi \beta + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \beta_2 = 0$   |
| $\mu \beta' + \xi \gamma_1$                                          | $\xi \beta' + \xi_1 \gamma_1$                                        |
| $\mu \alpha' + \xi \gamma_2$                                         | $\xi \alpha' + \xi_1 \gamma_2$                                       |

Uit deze vergelijkingen leidt men dadelijk af:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

terwijl nog overblijven:

$$\lambda \theta + 2 \mu \alpha + \nu \vartheta + 2 \xi \alpha_1 = P$$

$$\lambda \theta + 2 \mu \beta + \nu \vartheta + 2 \xi \beta_2 = P$$

$$\lambda \theta + 2 \mu \gamma + \nu \vartheta + 2 \xi \gamma_3 = 0$$

$$\nu \theta + 2 \xi \alpha + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \alpha_1 = 0$$

$$\nu \theta + 2 \xi \beta + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \beta_2 = 0$$

$$\nu \theta + 2 \xi \gamma + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \gamma_3 = 0$$

zijnde zes vergelijkingen van de 1<sup>e</sup> graad in de zes onbekenden  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_2$  en  $\gamma_3$ .

Daar  $\alpha$  en  $\beta$  zoowel als  $\alpha_1$  en  $\beta_2$  volmaakt symmetrisch in die vergelijkingen optreden, zien we ineen:

$$\alpha = \beta \quad \text{en} \quad \alpha_1 = \beta_2$$

Oplossing levert verder:

$$\theta = \frac{2P}{3\lambda + 2\mu - \frac{(3\nu + 2\xi)^2}{3\nu_1 + 2\xi_1}}$$



$$\gamma = \frac{-\lambda - \frac{2\xi^2}{3\xi_1} - \frac{(3\nu + 2\xi)^2}{3(3\nu_1 + 2\xi_1)}}{\left[3\lambda + 2\mu - \frac{(3\nu + 2\xi)^2}{3\nu_1 + 2\xi_1}\right] \left(\mu - \frac{\xi^2}{\xi_1}\right)} P$$

en

$$\alpha = \gamma + \frac{P}{2\left(\mu - \frac{\xi^2}{\xi_1}\right)}$$

Hiermede hebben wij dus weer twee vergelijkingen in de onbekende grootheden  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\xi$ ,  $\nu_1$  en  $\xi_1$ . Nog één is er dus noodig.

Als laatste geval nemen wij de deformatie van een kubus. In het middelpunt leggen wij de oorsprong en de assen loodrecht op de zijvlakken. Tegen de beide vlakken  $x = \text{constant}$  werken twee constante tegengesteld gerichte krachten  $P$  in de  $X$  richting, oppervlakte momenten op die zijvlakken nul. Tegen de beide vlakken  $y = \text{constant}$  twee constante tegengesteld gerichte krachten  $Q$  in de  $Y$  richting en weer géén momenten. En ten slotte zij op de vlakken  $z = \text{constant}$  zoowel krachten als momenten alle nul.

Voor de vlakken  $x = \text{constant}$  is:

$$\begin{aligned} \cos nx &= 1 & \cos ny &= 0 & \cos nz &= 0 \\ X_x &= P & Y_x &= 0 & Z_x &= 0 \\ L_x &= 0 & M_x &= 0 & N_x &= 0 \end{aligned}$$

Zoo leveren de vlakken  $y = \text{constant}$ :

$$\begin{aligned} X_y &= 0 & Y_y &= Q & Z_y &= 0 \\ L_y &= 0 & M_y &= 0 & N_y &= 0 \end{aligned}$$

en  $z = \text{constant}$ ;

$$\begin{aligned} X_z &= 0 & Y_z &= 0 & Z_z &= 0 \\ L_z &= 0 & M_z &= 0 & N_z &= 0 \end{aligned}$$

Dit geeft aanleiding tot:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \beta' = \gamma' = 0 \\ \alpha_2 &= \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

en verder:

$$\begin{aligned}\lambda \theta + 2 \mu \alpha + \nu \vartheta + 2 \xi \alpha_1 &= P \\ \lambda \theta + 2 \mu \beta + \nu \vartheta + 2 \xi \beta_2 &= Q \\ \lambda \theta + 2 \mu \gamma + \nu \vartheta + 2 \xi \gamma_3 &= 0 \\ \nu \theta + 2 \xi \alpha + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \alpha_1 &= 0 \\ \nu \theta + 2 \xi \beta + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \beta_2 &= 0 \\ \nu \theta + 2 \xi \gamma + \nu_1 \vartheta + 2 \xi_1 \gamma_3 &= 0\end{aligned}$$

Door oplossing krijgt men:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{P + Q}{3 \lambda + 2 \mu - \frac{(3 \nu + 2 \xi)^2}{3 \nu_1 + 2 \xi_1}} \\ \alpha &= \frac{P + Q}{3 (3 \lambda + 2 \mu) - \frac{3 (3 \nu + 2 \xi)^2}{3 \nu_1 + 2 \xi_1}} + \frac{2 P - Q}{3 \left( \mu - \frac{\xi^2}{\xi_1} \right)} \\ \beta &= \alpha - \frac{P - Q}{\mu - \frac{\xi^2}{\xi_1}} \\ \gamma &= \alpha - \frac{P}{\mu - \frac{\xi^2}{\xi_1}}\end{aligned}$$

Hiermede heeft men voldoende vergelijkingen.

§ 5. Wij willen nu een paar voorbeelden geven van de wijze van werken, die wij op blad 7 het eerst genoemd hebben, nl. een deformatie wordt voorgeschreven en de oppervlakte spanningen, die noodig zijn, om die deformatie te leveren, worden gevraagd.

Wij beschouwen de eenvoudige deformatie

$$\begin{aligned}u &= \alpha x & \omega &= 0 \\ v &= 0 & \kappa &= 0 \\ w &= 0 & \sigma &= 0, \text{ welke aan (37)---(42) voldoet.}\end{aligned}$$

Welke spanningen zijn noodig om deze teweeg te brengen?

Het stelsel (67)---(85) van blz. 17 levert nu:

$$\begin{array}{lll} X_x = (\lambda + 2 \mu) \alpha & X_y = 0 & X_z = 0 \\ Y_x = 0 & Y_y = \lambda \alpha & Y_z = 0 \\ Z_x = 0 & Z_y = \lambda \alpha & Z_z = \lambda \alpha \\ L_x = (\nu + 2 \xi) \alpha & L_y = 0 & L_z = 0 \\ M_x = 0 & M_y = \nu \alpha & M_z = 0 \\ N_x = 0 & N_y = 0 & N_z = \nu \alpha \end{array}$$

Substitueeren wij dit in de randvoorwaarden (43)—(48) (hoofdstuk I), dan komt er voor de gezochte spanningen:

$$(\lambda + 2\mu) \alpha \cos nx = \bar{X}$$

$$\lambda \alpha \cos ny = \bar{Y}$$

$$\lambda \alpha \cos nz = \bar{Z}$$

$$(\nu + 2\xi) \alpha \cos nx = \bar{L}$$

$$\nu \alpha \cos ny = \bar{M}$$

$$\nu \alpha \cos nz = \bar{N}$$

Willen wij de zuivere compressie in het leven roepen door

$$u = \alpha x \quad \omega = 0$$

$$v = \beta y \quad \kappa = 0$$

$$w = \gamma z \quad \sigma = 0$$

De vergelijkingen (37—42) (hoofdstuk I) zijn zonder, d. w. z. vervuld. Verder krijgen wij:

$$X_x = (\lambda + 2\mu) \alpha + \lambda \beta + \lambda \gamma \quad L_x = (\nu + 2\xi) \alpha + \nu \beta + \nu \gamma$$

$$X_y = 0 \quad L_y = 0$$

$$X_z = 0 \quad L_z = 0$$

$$Y_x = 0 \quad M_x = 0$$

$$Y_y = \lambda \alpha + (\lambda + 2\mu) \beta + \lambda \gamma \quad M_y = \nu \alpha + (\nu + 2\xi) \beta + \nu \gamma$$

$$Y_z = 0 \quad M_z = 0$$

$$Z_x = 0 \quad N_x = 0$$

$$Z_y = 0 \quad N_y = 0$$

$$Z_z = \lambda \alpha + \lambda \beta + (\lambda + 2\mu) \gamma \quad N_z = \nu \alpha + \nu \beta + (\nu + 2\xi) \gamma$$

Dus de benoodigde oppervlakte-spanningen en koppels zijn:

$$\bar{X} = [(\lambda + 2\mu) \alpha + \lambda \beta + \lambda \gamma] \cos nx$$

$$\bar{Y} = [\lambda \alpha + (\lambda + 2\mu) \beta + \lambda \gamma] \cos ny$$

$$\bar{Z} = [\lambda \alpha + \lambda \beta + (\lambda + 2\mu) \gamma] \cos nz$$

$$\bar{L} = [(\nu + 2\xi) \alpha + \nu \beta + \nu \gamma] \cos nx$$

$$\bar{M} = [\nu \alpha + (\nu + 2\xi) \beta + \nu \gamma] \cos ny$$

$$\bar{N} = [\nu \alpha + \nu \beta + (\nu + 2\xi) \gamma] \cos nz$$

Wij zien hieraan, dat de richting van de oppervlaktespanning zoowel als van het oppervlaktekoppel in elk punt loodrecht op het oppervlak moet staan.



Beschouwen wij verder de deformatie:

$u = \gamma' y$   $v = 0$   $w = 0$  (of  $v = -\gamma' x$ , wat symmetrischer is)  
 $\omega = 0$   $z = 0$  en dan in de eerste plaats zien, hoe wij  
 de  $\sigma$  moeten kiezen, opdat de deformatie mogelijk zij, om  
 daarna te vragen, welke spanningen weer *die* deformatie in  
 het leven kunnen roepen.

De elastische differentiaal vergelijkingen ((37) — (42) (hoofdstuk I) leveren:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} = 0 & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} = 0 & \\ (\nu + 2\xi) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \xi \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0 & & \times \xi_1 \\ (\nu_1 + 2\xi_1) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = -\mu \gamma' & & \times \xi \\ \hline & & (-) \end{array}$$

$$[\xi_1 (\nu + 2\xi) - \xi (\nu_1 + 2\xi_1)] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \mu \gamma' \xi$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z^2 + C_1 z + C_2$$

waarin  $C_1$  en  $C_2$  tot op dit oogenblik zijn willekeurige functie's  
 van  $x$  en  $y$ . Daar  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} = 0$  is  $\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0$ . Evenzoo moet

$\frac{\partial C_1}{\partial y} = 0$  zijn. Verder moet nog:

$$(\nu + 2\xi) \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} + z \left( \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} \right) \xi + \left( \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right) \xi = 0$$

vervuld zijn, of dus

$$\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} = -\frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1}$$

Doe een eenvoudige keuze door te nemen  $\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2}$

dan wordt:

$$\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1}$$

Hiervan wordt een eenvoudige oplossing:

$$C_2 = -\frac{1}{4} \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} (x^2 + y^2)$$

zoodat dus ten slotte is:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z^2 - \frac{1}{4} \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} (x^2 + y^2)$$

Uit de vergelijkingen in de noot van blz. 8 verkrijgt men nu:

$$X_x = \nu \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \quad L_x = \nu_1 \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z$$

$$X_y = 2 \mu \gamma' \quad L_y = 2 \xi \gamma'$$

$$X_z = 0 \quad L_z = 0$$

$$Y_x = 0 \text{ (of } = -2 \mu \gamma' \text{ wat symmetrischer is)}$$

$$M_x = 0 \text{ (of } = -2 \xi \gamma' \text{ wat symmetrischer is)}$$

$$Y_y = \nu \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z$$

$$M_y = \nu_1 \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z$$

$$Y_z = 0$$

$$M_z = 0$$

$$Z_x = -\frac{1}{2} \xi \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} x$$

$$N_x = -\frac{1}{2} \xi_1 \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} x$$

$$Z_y = -\frac{1}{2} \xi \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} y$$

$$N_y = -\frac{1}{2} \xi_1 \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} y$$

$$Z_z = (\nu_1 + 2\xi_1) \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z$$

$$N_z = (\nu_1 + 2\xi_1) \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z$$

Substitueeren wij dit weer in de randvoorwaarden (43)–(48) (Hoofdstuk I) dan krijgen wij:

$$\bar{X} = \nu \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \cos nx + 2 \mu \gamma' \cos ny$$

$$\bar{Y} = [-2 \mu \gamma' \cos nx] + \frac{\nu \mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \cos ny$$

$$\begin{aligned} \bar{Z} = & -\frac{1}{2} \xi \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} x \cos nx - \frac{1}{2} \xi \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} y \cos ny + \\ & + (\nu + 2\xi) \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \cos nz \end{aligned}$$

$$\bar{L} = \nu_1 \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \cos nx + 2 \xi \gamma' \cos ny$$

$$\bar{M} = [-2 \xi \gamma' \cos nx] + \nu_1 \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \cos ny$$

$$\begin{aligned} \bar{N} = & -\frac{1}{2} \xi_1 \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} x \cos nx - \frac{1}{2} \xi_1 \frac{\mu \gamma' (\nu + 2\xi)}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} y \cos ny + \\ & + (\nu_1 + 2 \xi_1) \frac{\mu \gamma' \xi}{\xi_1 \nu - \xi \nu_1} z \cos nz \end{aligned}$$

Als laatste voorbeeld behandelen wij een geval van torsie. Beschouw een cylindrische staaf. De uitwendige ruimte krachten en momenten,  $X, Y, Z, L, M$  en  $N$  onderstellen wij alle gelijk nul. De deformatievector  $u, v, w$  nemen wij verder als volgt aan: Elke vlakke doorsnede ondergaat een draaiing in zijn vlak, om de staafas. De middendoorsnede van de staaf draait niet en verder is de hoek van draaiing van een willekeurige doorsnee evenredig met de afstand van die doorsnede tot de middendoorsnede.

Als  $Z$  as kiezen wij de staafas; als oorsprong het snijpunt van de  $Z$  as met de middendoorsnede. De zoo juist gedefinieerde torsie wordt voorgesteld door

$$(138) \dots\dots u = -\omega_1 z y \quad v = \omega_1 z x \quad w = 0$$

Hierin is  $\omega$  een constante, terwijl  $\omega z$  de oneindig kleine draaiingshoek voor de doorsnede  $z$  is.

In de eerste plaats zullen wij onderzoeken, welke gedaante bij de beschouwde torsie de oriëntatievector  $\omega, x, y, z$  aanneemt.

In de eerste plaats moeten de differentiaalvergelijkingen: (37) — (42) van hoofdstuk I vervuld worden.

Substitueeren wij hierin (138), dan verkrijgen wij de betrekkingen:

$$(\nu + \xi) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \xi \Delta^2 \omega = 0 \dots\dots\dots (139)$$

$$(\nu + \xi) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \xi \Delta^2 \omega = 0 \dots\dots\dots (140)$$

$$(\nu + \xi) \frac{\partial \omega}{\partial z} + \xi \Delta^2 \omega = 0 \dots\dots\dots (141)^1)$$

<sup>1)</sup> Hieruit volgt  $\Delta^2 \omega = 0$ .



$$(\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \xi_1 \Delta^2 \omega + \mu \omega_1 x = 0 \dots (142)$$

$$(\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + \xi_1 \Delta^2 z + \mu \omega_1 y = 0 \dots (143)$$

$$(\nu_1 + \xi_1) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + \xi_1 \Delta^2 \sigma - 2 \mu \omega_1 z = 0 \dots (144)^1)$$

Elimineert men uit (139) en (142) respectievelijk  $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}$  en  $\Delta^2 \omega$ , dan verkrijgt men:

$$(\xi \nu_1 - \xi_1 \nu) \Delta^2 \omega = \mu \omega_1 (\nu + \xi) x$$

of

$$(145) \dots \Delta^2 \omega = \frac{\mu \omega_1 (\nu + \xi)}{\xi \nu_1 - \xi_1 \nu} x$$

en

$$(\xi_1 \nu - \xi \nu_1) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} = \mu \omega \xi x$$

of

$$(146) \dots \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} = - \frac{\mu \omega_1 \xi}{\xi \nu_1 - \xi_1 \nu} x$$

Zoo leveren (140) en (143) en (141) en (144):

$$(147) \dots \Delta^2 z = \frac{\mu \omega_1 (\nu + \xi)}{\xi \nu_1 - \xi_1 \nu} y$$

$$(148) \dots \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = - \frac{\mu \omega_1 \xi}{\xi \nu_1 - \xi_1 \nu} y$$

$$(149) \dots \Delta^2 \sigma = - \frac{2 \mu (\nu + \xi) \omega_1}{\xi \nu_1 - \xi_1 \nu} z$$

$$(150) \dots \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} = \frac{2 \mu \omega_1 \xi}{\xi \nu_1 - \xi_1 \nu} z$$

Het stelsel (145) — 150) luidt door invoering van eenige hulp constanten;

$$\Delta^2 \omega = a x \dots (151) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} = - b x \dots (154)$$

$$\Delta^2 \omega = a x \dots (152) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = - b y \dots (155)$$

$$\Delta^2 \sigma = - 2 a z \dots (153) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} = + 2 b z \dots (156)$$

<sup>1)</sup> Hieruit volgt weer  $\Delta^2 \mathfrak{S} = 0$ .

Door integratie van (154), (155) en (156) verkrijgen wij:

$$(157) \cdot \mathfrak{S} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}by^2 + bz^2 + c,^1)$$

terwijl door differentiatie van (151), (152) en (153) respectievelijk naar  $x$ ,  $y$  en  $z$  verkregen wordt:

$$\Delta^2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = a$$

$$\Delta^2 \frac{\partial z}{\partial y} = a$$

$$\Delta^2 \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) = a$$

Hoewel nu de grootheden  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en  $-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$  aan dezelfde differentiaalvergelijking voldoen, n.l. aan  $\Delta^2 p = a$ , is het nog niet noodzakelijk, dat die 3 grootheden ook gelijk zijn. Integendeel, als men deze gelijk stelt, wordt  $\mathfrak{S} = 0$  hetgeen tegen (157) strijdt.

Wel geldt voor het verschil van twee van genoemde grootheden — dat wij  $q$  zullen noemen — dat  $q$  voldoet aan de vergelijking van Laplace d.w.z.:

$$\Delta^2 q = 0$$

Noemen wij dus 2 oplossingen van deze vergelijking respectievelijk  $q_1$  en  $q_2$ , dan verkrijgen wij:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + q_1$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + q_2$$

en dus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} + q_1 + (-2 \frac{\partial \omega}{\partial x} - 2 q_2) = \\ &= q_1 - q_2 \end{aligned}$$

Terwijl volgens (157) moet zijn:

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}by^2 + bz^2 + c$$

dus moet

$$(158) \dots q_1 - 2 q_2 = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}by^2 + bz^2 + c$$

<sup>1)</sup> In overeenstemming met de noot van de vorige bladzijde.

Het is dus nu de vraag, oplossingen van de vergelijking van Laplace te bepalen, die voldoen aan (158). Heeft men deze oplossing, dan moet men  $\omega$  oplossen uit (151), en door differentiëren  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$  bepalen; vervolgens telt men hierbij b.v.  $q_1$  op en verkrijgt zoo  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ; tenslotte daaruit na integratie  $z$  zelf; en op analoge wijze vindt men  $\sigma$ .

Daar  $-\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}by^2 + bz^2 + c$  aan de vergelijking van Laplace voldoet, kiezen wij dus voor  $q_2$  een willekeurige oplossing van die vergelijking, dan is

$$q_1 = 2q_2 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}by^2 + bz^2 + c$$

ook weer een oplossing van die vergelijking.

Hiermede is dus voor  $q_1$  en  $q_2$  een stel waarden gevonden, dat voldoet.

Nu is een oplossing voor  $\omega$  uit (151):

$$\omega = \frac{1}{6}ax^3 \text{ } ^1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2}ax^2$$

Kies verder  $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}by^2 - bz^2$ . Deze voldoen aan (158) <sup>2)</sup> en dus volgt uit blz. 32 rgl. 7 en 8 v.o.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(a+b)x^2 + \frac{1}{2}by^2 - bz^2 \\ z &= \frac{1}{2}(a+b)x^2y + \frac{1}{6}by^3 - byz^2 \\ \sigma &= -(a+b)x^2z - by^2z + \frac{2}{3}bz^3 \\ \omega &= \frac{1}{6}ax^3 \end{aligned}$$

Wij hebben dus nu verkregen:

$$(159) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots u = -\omega_1 zy \quad v = \omega_1 zx \quad w = 0 \\ \dots \omega = \frac{1}{6}ax^3 \quad z = \frac{1}{2}(a+b)x^2y + \frac{1}{6}by^3 - byz^2 \\ \text{en } \sigma = -(a+b)x^2z - by^2z + \frac{2}{3}bz^3 \end{array} \right.$$

Achteraf overtuigt men zich nu ook gemakkelijk, dat het stelsel (159) voldoet aan de differentiaalvergelijkingen (37) — (42).

<sup>1)</sup> Algemeen zou zijn:  $\omega = a(\alpha x^3 + \beta xy^2 + \gamma x^2y)$ , waarin  $6\alpha + 2\beta + 2\gamma = 1$  moet zijn.

<sup>2)</sup> De onderstelling  $q_1 = q_2$  is willekeurig; zij geeft ons een eenvoudige oplossing.



De vraag wordt nu, aan welke randvoorwaarden wij met deze oplossing (159) kunnen voldoen. Daartoe berekenen wij eerst de componenten der spanningen en momenten  $X_x \dots N_z$  (zie schema (67)–(85) § 1) en krijgen:

$$(160) \left\{ \begin{aligned} X_x &= (a\xi - \frac{1}{2}b\nu)x^2 - \frac{1}{2}b\nu y^2 + b\nu z^2 \\ X_y &= -2\mu\omega_1 z \\ X_z &= -2\mu\omega_1 y \\ Y_x &= 2\mu\omega_1 z + 2\xi(a+b)xy \\ Y_y &= [(a+b)\xi - \frac{1}{2}b\nu]x^2 + (b\xi - \frac{1}{2}b\nu)y^2 + \\ &\quad + (b\nu - 2b\xi)z^2 \\ Y_z &= 2\mu\omega_1 x - 4b\xi yz \\ Z_x &= -4(a+b)\xi xz \\ Z_y &= -4b\xi yz \\ Z_z &= -(\frac{1}{2}b\nu + 2(a+b)\xi)x^2 - (\frac{1}{2}b\nu + 2b\xi)y^2 + \\ &\quad + (b\nu + 4b\xi)z^2 \end{aligned} \right.$$

en precies hetzelfde schema nog eens over voor  $L_x \dots N_z$ , alleen overal de letters  $\mu, \nu$  en  $\xi$  vervangen resp. door  $\xi, \nu_1$  en  $\xi_1$  terwijl de letters  $a$  en  $b$  behouden blijven en voorstellen:

$$a = \frac{\mu\omega_1(\nu + \xi)}{\xi\nu_1 - \xi_1\nu} \quad \text{en} \quad b = \frac{\mu\omega_1\xi}{\xi\nu_1 - \xi_1\nu}$$

(zie blz. 31).

Substitueert men nu (160) in de randvoorwaarden, dan kan men bepalen, welke uitwendige oppervlaktespanningen en momenten moeten worden aangebracht, om de voorgeschreven deformatie, de torsie (159) te verkrijgen.

Wij behandelen nu eerst de randvoorwaarden op den mantel. Daar is  $\cos nz = 0$  <sup>1)</sup> en dus:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= [(a\xi - \frac{1}{2}b\nu)x^2 - \frac{1}{2}b\nu y^2 + b\nu z^2] \cos nx - 2\mu\omega z \cos ny \\ \bar{Y} &= [2\mu\omega_1 z + 2\xi(a+b)xy] \cos nx + \{[(a+b)\xi - \frac{1}{2}b\nu]x^2 + \\ &\quad + (b\xi - \frac{1}{2}b\nu)y^2 + (b\nu - 2b\xi)z^2\} \cos ny \\ \bar{Z} &= -4(a+b)\xi xz \cos nx - 4b\xi yz \cos ny \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> De letter  $n$  stelt overal de naar buiten gerichte normaal voor.

en voor  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  en  $\bar{N}$  analoge uitdrukkingen, waarin alléén de letters  $\mu$ ,  $\nu$  en  $\xi$  weer vervangen moeten worden resp. door  $\xi$ ,  $\nu_1$  en  $\xi_1$ .

Ten slotte resten nog de randvoorwaarden aan de eindvlakken. Daar is  $\cos nx = 0$ ,  $\cos ny = 0$ ,  $\cos nz = \pm 1$ . Wij krijgen voor het ééne eindvlak:

$$\bar{X} = -2\mu\omega_1 y$$

$$\bar{Y} = 2\mu\omega_1 x - 4b\xi yz$$

$$\bar{Z} = -\left(\frac{1}{2}b\nu + 2(a+b)\xi\right)x^2 - \left(\frac{1}{2}b\nu + 2b\xi\right)y^2 + (b\nu + 4b\xi)z^2$$

en weer analoge formules voor  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  en  $\bar{N}$ , waarin echter  $\mu$ ,  $\nu$  en  $\xi$  vervangen resp. door  $\xi$ ,  $\nu_1$  en  $\xi_1$ .

Aan het andere eindvlak hebben al deze grootheden dezelfde waarde, doch zijn zij tegengesteld in richting.

## HOOFDSTUK III.

### Dynamische toepassingen.

§ 1. Wij passen de vergelijkingen (49)–(54) (blz. 12 Hoofdstuk I) toe, onderstellen echter, dat de uitwendige krachten en momenten X, Y, Z, L, M en N alle gelijk nul zijn.

Wij trachten nu aan de vergelijkingen te voldoen door de onderstelling:

$$\begin{aligned}(u \ v \ w) &= \Delta \phi + \text{Rot } \Phi \\ (\omega \ \varkappa \ \sigma) &= \Delta \psi + \text{Rot } \Psi,\end{aligned}$$

waarbij dus  $\phi$  en  $\psi$  dan scalaire en  $\Phi$  en  $\Psi$  vectorpotentialen zijn.

Wij kunnen voldoen, indien de functies's  $\phi$  en  $\psi$  voldoen aan:

$$(161) \dots \left( (\lambda + 2\mu) \Delta^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = - (\nu + 2\xi) \Delta^2 \psi$$

$$(162) \dots (\nu + 2\xi) \Delta^2 \phi = (\nu_1 + 2\xi_1) \Delta^2 - \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi$$

Hieruit volgt voor  $\phi$ :

$$\left[ \left( (\nu_1 + 2\xi_1) \Delta^2 - \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( (\lambda + 2\mu) \Delta^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \right.$$

$$(163) \dots \dots \dots - (\nu + 2\xi)^2 \Delta^4 \left. \right] \phi = 0$$

en eenzelfde vergelijking voor  $\psi$ .

Verder krijgen wij:

$$\mu \Delta^2 \Phi + \xi \Delta^2 \Psi = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \text{ of}$$

$$(164) \dots \dots \dots (\mu \Delta^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \Phi = - \xi \Delta^2 \Psi. \text{ En evenzoo:}$$

$$(165) \dots \dots \dots - (\xi \Delta^2 - \mu \text{Rot}) \Phi = (-\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi_1 \Delta^2) \Psi$$



Hieruit volgt voor  $\Phi$ :

$$(166) \dots \left[ \left( \mu \Delta^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \xi_1 \Delta^2 - \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \right. \\ \left. (\xi \Delta^2 - \mu \text{Rot}) \xi \Delta^2 \right] \Phi = 0$$

en een soortgelijke vergelijking voor  $\Psi$ .

Uit deze vergelijkingen zijn de scalaire en de vector-potentiaal te bepalen:

Vergelijking (163) geeft:

$$\left\{ \left[ (\nu_1 + 2\xi_1)(\lambda + 2\mu) - (\nu + 2\xi)^2 \right] \Delta^4 - \left[ (\lambda + 2\mu)\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + (\nu_1 + 2\xi_1)\rho \right] \frac{\partial^2 \Delta^2}{\partial t^2} + \rho \tau \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\} \Phi = 0$$

en een soortgelijke vergelijking voor  $\psi$ .

Werkt men deze uit, dan verkrijgt men:

$$(167) \dots \left( a \Delta^4 + b \frac{\partial^2 \Delta^2}{\partial t^2} + c \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) \Phi = 0, \quad \text{waarin}$$

$$a = (\nu_1 + 2\xi_1)(\lambda + 2\mu) - (\nu + 2\xi)^2 = \lambda\nu_1 + 2\lambda\xi_1 + 2\mu\nu_1 + \\ + 4\mu\xi_1 - \nu^2 - 4\nu\xi - 4\xi^2$$

$$b = -(\lambda + 2\mu)\tau - (\nu_1 + 2\xi_1)\rho = -\lambda\tau - 2\mu\tau - \nu_1\rho - 2\xi_1\rho$$

$$c = \rho\tau = \rho\tau$$

terwijl voor  $\psi$  een analoge vergelijking geldt.

Op soortgelijke wijze te werk gaande, vindt men uit (166)

$$(168) \dots (a_1 \Delta^4 + b_1 \frac{\partial^2 \Delta^2}{\partial \tau^2} + c_1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} + d_1 \text{Rot} \Delta^2) \Phi = 0,$$

waarin:

$$a_1 = \mu \xi_1 - \xi^2$$

$$b_1 = -\mu\tau - \xi_1\rho$$

$$c_1 = \rho\tau \quad \text{en}$$

$$d_1 = \mu\xi \quad \text{is gesteld.}$$

Voor  $\Psi$  geldt wederom dezelfde vergelijking.

Ter oplossing van  $\Phi$  en  $\psi$  ontbinden wij (167) in de twee vergelijkingen:

$$(169) \dots \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_1 \Delta^2 \right) \Phi = 0 \quad \text{en} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_2 \Delta^2 \right) \Phi = 0,$$

$$\text{waarin } \alpha_1 \text{ en } \alpha_2 = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Een oplossing van elk van deze vergelijkingen is ook een oplossing van (167) <sup>1)</sup>

Wij gaan over tot de beschouwing van vergelijking (169), de vergelijking van d'ALEMBERT. In de eerste plaats zullen wij de oplossing nagaan voor het geval, dat de functie  $\phi$  slechts van  $t$  en van één coördinaat, bijv.  $x$  afhangt. Wij krijgen dan:

$$\phi = \phi_1(x + \sqrt{\alpha_1} t) + \phi_2(x - \sqrt{\alpha_1} t) + \phi_3(x + \sqrt{\alpha_2} t) + \phi_4(x - \sqrt{\alpha_2} t)$$

Hierin stellen  $\phi_1$  tot en met  $\phi_4$  willekeurige functie's voor.

Uit de gevonden grootheid  $\phi$  is door zeer eenvoudige integratie  $\psi$  af te leiden met behulp van (161) en (162) en verder  $u$ ,  $v$ ,  $w$  en  $\omega$ ,  $z$ ,  $\sigma$  volgens de onderstelling van blz. 36. Daarbij zijn alleen  $u$  en  $\omega$  van nul verschillend. De beschouwde

<sup>1)</sup> Men krijgt de oplossing van (161) en (162) iets symmetrischer, als men de uitdrukking (161) vermeerderd met (162), vermenigvuldigd met een willekeurige factor  $z$ , aldus:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu - z(\nu + 2\xi)) \Delta^2 \phi - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \\ & = (- (\nu + 2\xi) + z(\nu_1 + 2\xi_1)) \Delta^2 \psi - \tau z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi \end{aligned}$$

Eisch nu

$$\frac{\lambda + 2\mu - z(\nu + 2\xi)}{- (\nu + 2\xi) + z(\nu_1 + 2\xi_1)} = \frac{\rho}{\tau z} = \frac{1}{\alpha}, \text{ waaruit } z \text{ te bepalen is,}$$

dan wordt:

$$\left( (\lambda + 2\mu) - z(\nu + 2\xi) \right) \Delta^2 (\phi - \alpha \psi) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\phi - \alpha \psi)$$

$\phi - \alpha \psi$  is dus een oplossing van de vergelijking van d'ALEMBERT en wel met twee waarden voor  $z$  (en dus voor  $\alpha$ ). — Op dezelfde wijze vindt men  $\phi + \beta \psi$  als men de eerste breuk gelijk stelt aan de tweede met het negatieve teeken.

Men krijgt dan voor  $\phi - \alpha \psi$  en  $\phi + \beta \psi$  oplossingen met willekeurige functie's en zoo daaruit  $\phi$  en  $\psi$  als bij de overigen gelijkwaardige opzet van hierboven.



oplossingen stellen dus longitudinale, vlakke golven, met voortplantingssnelheden, gegeven door

$$V^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

voor. <sup>1)</sup>

Door  $u, v, w, \omega, z$  en  $\sigma$  evenredig met  $e^{ip\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right)}$  te stellen, kan hetzelfde resultaat voor periodieke golven verkregen worden.

Wij zullen in de 2<sup>e</sup> plaats de bolsymmetrische golven van de vergelijking (169) in het oog vatten. Daartoe gaan wij transformeeren op poolcoördinaten. Wij vragen naar *die* oplossingen  $\phi$ , die alléén van  $t$  en  $r$  afhangen, doch onafhankelijk zijn van de poolhoeken  $\vartheta$  en  $\psi$ . Dan is het voor de transformatie voldoende op te merken, dat

$$\Delta^2 = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

Hierdoor gaat de vergelijking (169) over in:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha \left( \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right)$$

Als oplossing hiervan vindt men:

$$\phi = \frac{1}{r} [\varphi_1(r + \sqrt{\alpha} t) + \varphi_2(r - \sqrt{\alpha} t)],$$

waarin  $\phi_1$  en  $\phi_2$  willekeurige functie's zijn. Voor  $\psi$  geldt

<sup>1)</sup> Voor een fysisch werkelijk geval moet  $b^2 > 4ac$  zijn; dan alleen krijgt toch  $V^2$  twee reële waarden. Dit is inderdaad zoo:

$$\begin{aligned} b^2 &= [(\lambda + 2\mu)\tau + (\nu_1 + 2\xi_1)\rho]^2 = (\lambda + 2\mu)^2\tau^2 + \\ &\quad + 2\rho\tau(\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) + (\nu_1 + 2\xi_1)^2\rho^2 \\ 4ac &= 4\rho\tau(\nu_1 + 2\xi_1)(\lambda + 2\mu) - 4\rho\tau(\nu + 2\xi)^2 \\ b^2 - 4ac &= (\lambda + 2\mu)^2\tau^2 + 2\rho\tau(\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) + \\ &\quad + (\nu_1 + 2\xi_1)^2\rho^2 + 4\rho\tau(\nu + 2\xi)^2 \text{ of} \\ b^2 - 4ac &= [(\lambda + 2\mu)\tau - (\nu_1 + 2\xi_1)\rho]^2 + [2(\nu + 2\xi)\sqrt{\rho\tau}]^2 \end{aligned}$$

Dit is een som van quadraten, dus essentieel positief, en dus is altijd  $b^2 - 4ac > 0$  of  $b^2 > 4ac$ .

Buitendien moeten die waarden voor  $V^2$  beide  $> 0$  zijn, anders wordt  $V$  zelf imaginair. Hiertoe is noodig, dat de absolute waarde van  $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$  is: daar  $c > 0$  is, wordt de voorwaarde hiervoor  $a > 0$ .



weder hetzelfde. — De bolvormige golven, die wij op deze wijze verkregen, zijn weder longitudinaal.

Wat periodieke bolgolven betreft, voor oplossingen, die fysisch van belang zijn, verkrijgt men voor de vergelijking

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \phi$$

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{r} P_{n\lambda}(\mu) \{ A_{kn\lambda} e^{-ikr} f_n(ikr) + B_{kn\lambda} e^{ikr} f_n(-ikr) \} \cos \lambda \phi_1 + \dots$$

en verder drie analoge vormen, waarin in de plaats van  $\cos \lambda \phi_1$  achtereenvolgens optreden de producten  $\cos \lambda \phi_1 \sin \lambda \phi_1$ ,  $\sin \lambda \phi_1 \cos \lambda \phi_1$  en  $\sin \lambda \phi_1 \sin \lambda \phi_1$  en waarin overal

$$P_{n\lambda}(\mu) \text{ voor } (1 - \mu^2)^{1/2} \lambda \frac{d^\lambda P_n(\mu)}{d\mu^\lambda}$$

staat. <sup>1)</sup>

Hierin is, als steeds,  $P_n$  de Legendre'sche bolfunctie van de  $n^e$  orde van de 1<sup>e</sup> soort;  $\mu = \cos \vartheta$ ; verder is

$$f_n(z) = 1 + \frac{n(n+1)}{2 \cdot z} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4 \cdot z^2} + \frac{(n-2) \dots (n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot z^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot z^n}$$

Periodieke cylindergolven <sup>2)</sup> worden gegeven door:

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \{ A_{kn} J_n(kr) + B_{kn} Y_n(kr) \} \cos n\vartheta + \{ A'_{kn} J_n(kr) + B'_{kn} Y_n(kr) \} \sin n\vartheta \right] \cos \lambda \phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \{ A''_{kn} J_n(kr) + B''_{kn} Y_n(kr) \} \sin n\vartheta + \{ A'''_{kn} J_n(kr) + B'''_{kn} Y_n(kr) \} \sin n\vartheta \right] \sin \lambda \phi_1$$

waarin  $J$  en  $Y$  resp. Besselsche en cylinderfunctie voorstellen.

<sup>1)</sup>  $\phi_1$  is hier de bekende poolhoek, een der 3 bolcoördinaten.

<sup>2)</sup> Zie bij period. bol- en cyl. golven Forsyth. Differentialgleichungen resp. blzd. 877 en blzd. 480 en 879.

Vraagt men speciaal naar cylindergolven, waarbij zoowel  $z$  als  $\vartheta$  constant worden gehouden, dus alleen  $r$  verandert, dan krijgt men

$$\phi = J_0(r)$$

Altijd weer moet na het bepalen van  $\phi$  uit de vergelijking (161) ((162)) de bijbehorende  $\psi$  bepaald worden.

Ten slotte willeu wij de vergelijking (169) nog eens algemeen beschouwen met naast zich de aanvangsvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= f(xyz) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= F(nyz) \end{aligned} \right\} \text{ voor } t=0$$

Hierin stellen  $f$  en  $F$  voor functie's van  $x$ ,  $y$  en  $z$ , die de heele ruimte door gegeven zijn.

Men krijgt voor een willekeurig punt  $x_1 y_1 z_1$ :

$$\phi(x_1 y_1 z_1) = X'(\sqrt{\alpha} t) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} X(\sqrt{\alpha} t)$$

Hierin is:

$$X'(\sqrt{\alpha} t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ t \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta f(x_1 + \sqrt{\alpha} t \sin \vartheta \cos \lambda, \right. \\ \left. y_1 + \sqrt{\alpha} t \sin \vartheta \sin \lambda, z_1 + \sqrt{\alpha} t \cos \vartheta) \right]$$

en

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} X(\sqrt{\alpha} t) = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta F(x_1 + \sqrt{\alpha} t \sin \vartheta \cos \lambda, \\ y_1 + \sqrt{\alpha} t \sin \vartheta \sin \lambda, z_1 + \sqrt{\alpha} t \cos \vartheta)$$

Laten voor beter overzicht  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  voorstellen de cosinussen van de hoeken, die een van het punt  $(x_1 y_1 z_1)$  uitgaande veranderlijke richting met de assen insluit, en laten we de toch overbodige index 1 van het veranderlijke punt  $x_1 y_1 z_1$  weg, dan krijgen wij als oplossing:

$$\phi(xyz) = \frac{t}{4\pi} \int F(x + \sqrt{\alpha} t \xi, y + \sqrt{\alpha} t \eta, z + \sqrt{\alpha} t \zeta) d\omega + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ t \int f(x + \sqrt{\alpha} t \xi, y + \sqrt{\alpha} t \eta, z + \sqrt{\alpha} t \zeta) d\omega^1 \right]$$

<sup>1)</sup> Zie RIEMANN-WEBER II § 124.



Deze integraal van Poisson van de vergelijking van d'ALEMBERT wordt oók verkregen, als men de formule van KIRCHHOFF gebruikt. (Zie voor de methode van KIRCHHOFF (uitbreiding van de methode van GREEN) voor de behandeling van de vergelijking van d'ALEMBERT: G. KIRCHHOFF. Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitz Ber. Ak. v. Wiss. Berlin 1882 (2 Sem) blzd. 641) <sup>1)</sup>

§ 2. Ter berekening van de vectorpotentialen  $\Phi$  en  $\Psi$  moeten wij nu overgaan tot de behandeling van de differentiaalvergelijking (168). Deze dient uitvoerig te geschieden, in de 1<sup>e</sup> plaats aan de hand van de methoden, genoemd door VOLTERRA. Dat willen wij op deze plaats niet doen.

Wij zullen de periodieke golven onderzoeken, die aan die vergelijking voldoen. Daartoe substitueeren wij  $\Phi = \Phi' e^{ipt}$  en krijgen:

$$(170) \dots [a_1 \Delta^4 + b_1 p^2 \Delta^2 + c_1 p^4 + d_1 \text{Rot } \Delta^2] \Phi' = 0$$

Zij  $\Phi$  weer een functie van slechts één coördinaat, b.v.  $x$  teneinde vlakke periodieke golven te krijgen. Dan kan  $\Phi'_x$  nul gesteld worden, daar in de uitdrukkingen voor  $u$ ,  $v$  en  $w$   $\Phi'_x$  slechts in diff.quotiënten naar  $y$  en  $z$  optreedt.

De vergelijking

$$(171) \dots a_1 \frac{\partial^4 \Phi'_x}{\partial x^4} + b_1 p^2 \frac{\partial^2 \Phi'_x}{\partial x^2} + c_1 p^4 \Phi'_x = 0$$

die uit (170) volgt, behoeft dus niet beschouwd te worden.

Verder volgt dan uit (170):

$$(172) \dots a_1 \frac{\partial^4 \Phi'_y}{\partial x^4} + b_1 p^2 \frac{\partial^2 \Phi'_y}{\partial x^2} + c_1 p^4 \Phi'_y - d_1 \frac{\partial^3 \Phi'_z}{\partial x^3} = 0$$

en

$$(173) \dots a_1 \frac{\partial^4 \Phi'_z}{\partial x^4} + b_1 p^2 \frac{\partial^2 \Phi'_z}{\partial x^2} + c_1 p^4 \Phi'_z + d_1 \frac{\partial^3 \Phi'_y}{\partial x^3} = 0$$

Oplossing levert:

$$\Phi_y = \left[ A'_1 e^{r_1 x} + \dots + A'_8 e^{r_8 x} \right] e^{ipt}$$

$$\Phi_z = \left[ B'_1 e^{r_1 x} + \dots + B'_8 e^{r_8 x} \right] e^{ipt}$$

<sup>1)</sup> Voor behandelingsmethoden van de vergel. van d'ALEMBERT en soortgelijke zie VOLTERRA. Drei Vorles. über neuere Fortschritte der mathem. Physik blzd 133 en vlg.



Hierin stellen  $r_1$  tot en met  $r_8$  voor de wortels van de vergelijking

$$(174) \dots a_1 r^4 + b_1 p^2 r^2 + c_1 p^4 = \pm d_1 r^3 \sqrt{-1}$$

waarvan geen enkele reëel kan zijn <sup>1)</sup>, hetgeen physisch juist

<sup>1)</sup> Een uitvoerig onderzoek voor deze vragen voor vlakke golven volgt in § 4. Om er hier toch reeds iets van te laten zien, het volgende:

Daar wij onderstellen, dat alle grootheden alléén maar functie van  $x$  zijn, wordt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial y} \Phi_z - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_y = 0 \\ v &= \frac{\partial}{\partial z} \Phi_x - \frac{\partial}{\partial x} \Phi_z = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi_z \\ w &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi_y - \frac{\partial}{\partial y} \Phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_y \end{aligned}$$

en analoge betrekkingen voor  $\omega$ ,  $z$ ,  $\sigma$ .

Wij hebben hier dus een transversale golf. Dit kan echter alleen, als de wortels  $r_i$  van (174) zuiver imaginair zijn. Aangenomen, dat dit zoo is, dan zien wij in (175), dat de factor

$$a_1 r_i^4 + b_1 p^2 r_i^2 + c_1 p^4$$

reëel wordt, daarentegen wordt  $\frac{1}{d_1 r_i^3}$  zuiver imaginair, zoodat wij krijgen

$$B_i = q A_i \sqrt{-1}$$

waarin  $q$  een reëel getal is. Daaruit volgt dan voor de  $\Phi_y$  en de  $\Phi_z$  en dus ook voor de  $v$  en de  $w$ , dat als de ééne een cos. is, is de andere een sin. en omgekeerd. Wij hebben dus ook hier, evenals in § 4 zal blijken, draaiing van het polarisatievlak.

Nu wat betreft het imaginair zijn van de wortels van (174). Stellen wij  $x = r_i$ , dan moeten dus de wortels van

$$a_1 x^4 - b_1 p^2 x^2 + c_1 p^4 = \pm d_1 x^3$$

alle reëel zijn.

Wanneer  $d_1$  klein is t.o.v. de coëfficiënten in het linkerlid (hetgeen b.v. in vervulling gaat voor groote waarden van  $p$ ) mogen wij het rechterlid bij het linker verwaarloozen, en er rest de vergelijking

$$a_1 x^4 - b_1 p^2 x^2 + c_1 p^4 = 0$$

Noemen wij de wortels hiervan  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ , dan is:

$$\alpha_1 \text{ en } \alpha_2 = \pm \frac{b_1 p^2}{2 a_1} \pm \frac{p^2}{2 a_1} \sqrt{b^2 - 4 a_1 c_1}$$

is.  $A'_1$  tot en met  $A'_8$  en  $B'_1$  tot en met  $B'_8$  zijn willekeurige constanten, verbonden door de betrekkingen

$$(175) \dots B_i = \frac{1}{d_1 r_i^3} (a_1 r_i^4 + b_1 p^2 r_i^2 + c_1 p^4) A_i \text{ (voor } i \text{ van } 1 \text{ tot } 8).$$

Deze willekeurige constanten mogen willekeurige functie's van  $p$  zijn en daar onze diff. vergelijkingen lineair zijn, zal men wéér een oplossing krijgen, door de zooeven beschouwde te sommeren naar  $p$  of zelfs te integreeren.

Uit de gevonden grootheid  $\Phi$  is weer door eenvoudige integratie  $\Psi$  af te leiden met behulp van (164) en (165).

§ 3. Door in het begin van § 1 de oplossing op te zetten in de gedaante

$$\begin{aligned} (u \ v \ w) &= \Delta \phi + \text{Rot } \Phi \\ (\omega \ \varkappa \ \sigma) &= \Delta \psi + \text{Rot } \Psi \end{aligned}$$

hebben wij deze oplossing gesplitst in een rotatielooze en een divergentielooze. Moet men nu tegelijk  $\Phi$  en  $\Psi$  (resp.  $\phi$  en  $\psi$ ) nul nemen, of zijn er oplossingen mogelijk van den vorm

$$\begin{aligned} (u \ v \ w) &= \Delta \phi & (\phi &= 0) \\ (\omega \ \varkappa \ \sigma) &= \Delta \psi + \text{Rot } \Psi & (\Psi &\neq 0) \end{aligned}$$

enz. analoog?

De functie's  $\Phi$  en  $\Psi$  hangen samen door de vergelijkingen (164) en (165). Hebben wij nu een oplossing van (166) voor

Nu moeten  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  altijd reëel positief zijn. Dit is inderdaad zoo:

$$\begin{aligned} b_1^2 - 4 a_1 c_1 &= (\mu \tau + \xi_1 \rho)^2 - 4 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau = \\ &= (\mu \tau - \xi_1 \rho)^2 + (2 \xi \sqrt{\tau \rho})^2, \end{aligned}$$

dit is een som van quadraten, dus altijd positief en daar de absolute waarde van die wortel kleiner is dan van de 1<sup>e</sup> term, zijn  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  dus altijd positief.

De oplossingen  $x$  hier, die de wortels uit de  $\alpha$ 's zijn, zijn dus alle reëel.

Nemen we niet aan, dat  $d_1$  klein is, dan krijgen wij deze volledige 4<sup>e</sup> graadsvergelijking te onderzoeken, hetgeen volmaakt parallel loopt met het onderzoek van de vergel. ( $\gamma$ ) voor de vlakke golven in § 5.



$\Phi$  gekozen, zoodanig dat  $\text{Rot } \Phi = 0$ .<sup>1)</sup> Daar  $\text{Rot } \Phi = 0$ , maken wij hiervan gebruik door te schrijven  $\Phi = \Delta X$ . Dit nu gaan wij substitueeren in (164), dan komt er:

$$\left( \mu \Delta^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta X = -\xi \Delta^2 \Psi,$$

terwijl uit (165) volgt:

$$-(\xi \Delta^2 - \mu \text{Rot}) \Delta X = \left( -\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi_1 \Delta^2 \right) \Psi$$

d. w. z.  $\Psi$  mag zijn een willekeurige oplossing van de 1<sup>e</sup> differentiaalvergelijking, waarin  $X$  een willekeurige functie is.

Om de vraag te beantwoorden, of  $\text{Rot } \Psi$  nul is, bepalen wij deze grootheid, door van beide leden van de vergelijkingen de rotatie te nemen. Wij krijgen dan:

$$\Delta^2 \text{Rot } \Psi = 0 \quad \text{en}$$

$$\left( -\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi_1 \Delta^2 \right) \text{Rot } \Psi = 0$$

of dus  $\Psi$  is onafhankelijk van den tijd en een oplossing van  $\Delta^2 \text{Rot } \Psi = 0$ ,

de vergelijking van LAPLACE. De vectorpotentiaal behoeft dus niet nul te zijn, doch is wel onafhankelijk van den tijd, wij hebben dientengevolge een statisch en geen dynamisch probleem.

Analoge behandeling geeft hetzelfde resultaat voor het omgekeerde en ook ten opzichte van  $\phi$  en  $\psi$ .

§ 4. Wij zullen ons nu verder beperken tot het onderzoek van de voortplanting van vlakke golven. Dan zijn alle grootheden evenredig met

$e^{i p \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right)}$ , terwijl hun amplituden  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$  en  $B_3$  zullen gesteld worden.

<sup>1)</sup> Een dergelijke oplossing bestaat, want is b.v.  $\chi$  een willekeurige oplossing van (166), dan is  $\Phi = \Delta \chi$  een oplossing van (164)–(165), zoodat  $\text{Rot } \Phi = 0$ .



Wij krijgen op dezen weg:

$$(\lambda + \mu) \frac{p^2}{V^2} \alpha (A_1 \alpha + A_2 \beta + A_3 \gamma) + \mu A_1 \frac{p^2}{V^2} +$$

$$+ (\nu + \xi) \frac{p^2}{V^2} \alpha (B_1 \alpha + B_2 \beta + B_3 \gamma) + \xi B_1 \frac{p^2}{V^2} = A_1 p^2 \rho$$

of

$$[(\lambda + \mu) \alpha^2 + \mu - \rho V^2] A_1 + (\lambda + \mu) \alpha \beta A_2 + (\lambda + \mu) \alpha \gamma A_3 +$$

$$+ [(\nu + \xi) \alpha^2 + \xi] B_1 + (\nu + \xi) \alpha \beta B_2 + (\nu + \xi) \alpha \gamma B_3 = 0$$

$$[(\nu + \xi) \alpha^2 + \xi] A_1 + [(\nu + \xi) \alpha \beta + \frac{i \mu}{p} \gamma V] A_2 +$$

$$[(\nu + \xi) \alpha \gamma - \frac{i \mu}{p} \beta V] A_3 + [(\nu_1 + \xi_1) \alpha^2 + \xi_1 - \tau V^2] B_1 +$$

$$+ (\nu_1 + \xi_1) \alpha \beta B_2 + (\nu_1 + \xi_1) \alpha \gamma B_3 = 0$$

Wij verkrijgen dus zes lineaire homogene vergelijkingen in  $A_1$  tot en met  $B_3$ . De voorwaarde, waaronder dit stel een van nul verschillende oplossing bezit, is dat de determinant der coëfficiënten gelijk is aan nul. Deze determinant der coëfficiënten wordt, evenals in het geval van het niet georiënteerde medium, een vergelijking ter berekening van  $V$ ; nu echter treedt ook nog de  $p$  erin op.

De genoemde determinant is:

$$\begin{vmatrix} (\lambda + \mu) \alpha^2 + \mu - \rho V^2 & (\lambda + \mu) \alpha \beta & (\lambda + \mu) \alpha \gamma & (\nu + \xi) \alpha^2 + \xi & (\nu + \xi) \alpha \beta & (\nu + \xi) \alpha \gamma \\ (\lambda + \mu) \alpha \beta & (\lambda + \mu) \beta^2 + \mu - \rho V^2 & (\lambda + \mu) \beta \gamma & (\nu + \xi) \alpha \beta & (\nu + \xi) \beta^2 + \xi & (\nu + \xi) \beta \gamma \\ (\lambda + \mu) \alpha \gamma & (\lambda + \mu) \beta \gamma & (\lambda + \mu) \gamma^2 + \mu - \rho V^2 & (\nu + \xi) \alpha \gamma & (\nu + \xi) \beta \gamma & (\nu + \xi) \gamma^2 + \xi \\ (\nu + \xi) \alpha^2 + \xi & (\nu + \xi) \alpha \beta + i \mu \gamma \frac{V}{p} & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{vmatrix} = 0$$

Daar  $\alpha \beta \gamma$  de richtingscosinussen van den normaal op het golfvlak voorstellen en wij een *isotroop* medium onderzoeken, zal dus deze determinant hetzelfde moeten blijven, indien wij

$\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  veranderen, zoodat  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  gelijk aan 1 blijft. Kiezen wij nu  $\alpha = 1$   $\beta = 0$   $\gamma = 0$ , dan verkrijgen wij:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu - \rho V^2 & 0 & 0 & \nu + 2\xi & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \rho V^2 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho V^2 & 0 & 0 & \xi \\ \nu + 2\xi & 0 & 0 & \nu_1 + 2\xi_1 - \tau V^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & i\mu \frac{V}{p} & 0 & \xi_1 - \tau V^2 & 0 \\ 0 & -i\mu \frac{V}{p} & \xi & 0 & 0 & \xi_1 - \tau V^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = -\frac{1}{p^2} \mu^2 \xi^2 V^2 \{c V^4 + b V^2 + a\} + \{c V^4 + b V^2 + a\} \times \\ \times [\rho \tau V^4 - (\mu \tau + \rho \xi_1) V^2 + \mu \xi_1 - \xi^2]^2 = 0$$

of

$$D = -\{c V^4 + b V^2 + a\} [\rho \tau V^4 - (\mu \tau + \rho \xi_1) V^2 + \mu \xi_1 - \xi^2]^2 p^2 - \mu^2 \xi^2 V^2 \{c V^4 + b V^2 + a\} = 0$$

Hierin hebben a, b en c weer de waarden van § 1.

De 1<sup>e</sup> factor van D gelijk nul stellen levert de reeds bij herhaling gevonden voortplantingssnelheid voor longitudinale golven, die onafhankelijk is van de frequentie (§ 2):

$$V = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \quad (\alpha_1)$$

Stellen wij de 2<sup>e</sup> factor gelijk nul, dan ontstaat de vergelijking:

$$[\rho \tau V^4 - (\mu \tau + \rho \xi_1) V^2 + \mu \xi_1 - \xi^2]^2 p^2 - \mu^2 \xi^2 V^2 = 0. \quad (\beta_1)$$

Er zijn transversale golven met een voortplantingssnelheid, afhankelijk van de frequentie, d. w. z. met dispersie.

Deze transversale golven zullen wij thans nader onderzoeken. Daartoe bepalen wij de verhouding van de v en de w; hiertoe zijn noodig  $A_2$  en  $A_3$ . De verhouding van deze 2 grootheden is gelijk aan die van de bijbehorende minoren uit D. Daar deze minoren echter beide blijken nul te worden is het eenvoudigste, opnieuw van de oorspronkelijke vergelijkingen (49)–(54) uit te gaan. Wij trachten te voldoen met behulp van een transversale golf, die zich in de

Xrichting voortplant. Deze golf wordt voorgesteld door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} u &= 0 & \omega &= 0 \\ v &= A_2 e^{ip\left(t - \frac{x}{V}\right)} & z &= B_2 e^{ip\left(t - \frac{x}{V}\right)} \\ w &= A_3 e^{ip\left(t - \frac{x}{V}\right)} & \sigma &= B_3 e^{ip\left(t - \frac{x}{V}\right)} \end{aligned}$$

Wij krijgen aldus:

$$A_2 [(\mu - \rho V^2)(\xi_1 - \tau V^2) - \xi^2] - A_3 i \frac{V}{p} \mu \xi = 0$$

$$\text{eni } A_3 [(\mu - \rho V^2)(\xi_1 - \tau V^2) - \xi^2] + A_2 i \frac{V}{p} \mu \xi = 0$$

In de eerste plaats laat zich uit deze beiden als coëfficiënten-determinant gelijk nul juist afleiden de vergelijking  $(\beta_1)$ . Verder hebben wij:

$$A_3 = \frac{[(\mu - \rho V^2)(\xi_1 - \tau V^2) - \xi^2]}{i \frac{V}{p} \mu \xi} A_2 \text{ of}$$

$$A_3 = -\frac{1}{\mu \xi} \frac{p}{V} i [(\mu - \rho V^2)(\xi_1 - \tau V^2) - \xi^2] A_2$$

en hieruit volgt, in verband met  $(\beta_1)$ ;  $A_3 = \pm A_2 i$ . Substitueeren wij dit nu in de formules voor  $v$  en  $w$ , dan ontstaan de betrekkingen:

$$v = A_2 e^{ip\left(t - \frac{x}{V}\right)}$$

$$w = \pm A_2 i e^{ip\left(t - \frac{x}{V}\right)}$$

Om nu de vergelijking voor de baan van het trillende punt af te leiden, moeten de reële gedeelten van deze oplossingen genomen worden. Wij nemen daarbij het geval, dat  $A_2$  reëel is. ( $A_2$  zuiver imaginair laat zich analoog behandelen.)

$$v = A_2 \cos p\left(t - \frac{x}{V}\right) \text{ en } w = \pm A_2 \sin p\left(t - \frac{x}{V}\right)$$



of iets algemeener

$$v = A_2 \cos p \left( t - \frac{x+q}{V} \right) \text{ en } w = \pm A_2 \sin p \left( t - \frac{x+q}{V} \right),$$

waarin  $q$  voorstelt een willekeurige phaseconstante. De vergelijking voor de baan wordt dus:

$$v^2 + w^2 = A_2^2,$$

d.w.z. de baan is een cirkel. De transversale golven vertoonen dus dispersie, beheerscht door vergelijking  $(\beta_1)$  en zijn cirkelvormig gepolariseerd. Verder verkrijgt men:

$$z = -A_2 \frac{\mu - \rho V^2}{\xi} e^{ip \left( t - \frac{x}{V} \right)} \text{ en } \sigma = \pm A_2 \frac{\mu - \rho V^2}{\xi} e^{ip \left( t - \frac{x}{V} \right)}$$

Nemen wij ook hiervan weer alléén de reële gedeelten en breiden wij uit met de willekeurige phaseconstante  $q$ , dan komt er:

$$z = -A_2 \frac{\mu - \rho V^2}{\xi} \cos p \left( t - \frac{x+q}{V} \right)$$

en

$$\sigma = \pm A_2 \frac{\mu - \rho V^2}{V} \sin p \left( t - \frac{x+q}{V} \right)$$

Hierbij is ondersteld, dat  $V$  reëel is; alleen gevallen, waarvoor aan deze onderstelling voldaan is, geven een fysisch mogelijke oplossing; immers complexe  $V$  zou beteekenen voortdurend verdwijnen van energie met de voortlopende golf.

§ 5. Wij zullen nu de transversale golven nader bestudeeren. Wij vonden voor de voortplantingssnelheid de vergelijking:

$$\xi^2 - (\mu - \rho V^2)(\xi_1 - \tau V^2) = \pm \mu \xi \frac{V}{p} \dots (\gamma')$$

Bij de vergelijking voor  $V$  die ontstaat, als wij in  $(\gamma')$  het  $+$  teeken kiezen, behoort voor  $v$  en  $w$  de oplossing:

$$(176) \quad \dots \left\{ \begin{array}{l} v = A_2 \cos p \left( t - \frac{x}{V} \right) \\ w = A_2 \sin p \left( t - \frac{x}{V} \right) \end{array} \right.$$

Daarentegen behoort bij de vergelijking voor  $V$ , als het — teeken gekozen wordt, de oplossing:

$$(177) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = A_2 \cos p \left( t - \frac{x}{V} \right) \\ w = -A_2 \sin p \left( t - \frac{x}{V} \right) \end{array} \right.$$

De cirkelvormig gepolariseerde golven, die door (177) worden voorgesteld, worden klaarblijkelijk in tegengestelde zin doorloopen als die, welke (176) voorstelt. Letten wij nu echter ook op de bijbehorende snelheden, dan zien wij dadelijk aan de vergelijkingen, dat die gelijk, doch tegengesteld zijn. Dit in aanmerking nemende, volgt, dat door (176) en (177) precies dezelfde beweging wordt voorgesteld en wij kunnen volstaan met het onderzoek van een der bewegingen.

De aard der beweging wordt beheerscht door de vergelijking

$$\xi^2 - (\mu - \rho V^2) (\xi_1 - \tau V^2) = + \mu \xi \frac{V}{p},$$

die ook in den vorm

$$(\gamma_1) \quad V^4 - \frac{\mu \tau + \rho \xi_1}{\rho \tau} V^2 + \frac{\mu \xi}{\rho \tau p} + V \frac{\mu \xi_1 - \xi^2}{\rho \tau} = 0$$

geschreven kan worden. De wortels van deze vergelijking zijn

$$V_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{Z_1} - \frac{1}{2} \sqrt{Z_2} - \frac{1}{2} \sqrt{Z_3}$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{Z_1} + \frac{1}{2} \sqrt{Z_2} - \frac{1}{2} \sqrt{Z_3}$$

$$V_3 = +\frac{1}{2} \sqrt{Z_1} - \frac{1}{2} \sqrt{Z_2} + \frac{1}{2} \sqrt{Z_3}$$

$$V_4 = +\frac{1}{2} \sqrt{Z_1} + \frac{1}{2} \sqrt{Z_2} + \frac{1}{2} \sqrt{Z_3}$$

waarbij  $z_1$ ,  $z_2$  en  $z_3$  voorstellen de wortels van de cubische resolvente:

$$(\delta_1) \quad z^3 - \frac{2(\mu \tau + \rho \xi_1)}{\rho \tau} z^2 + \frac{(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 - 4(\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}{\rho^2 \tau^2} z - \frac{\mu^2 \xi^2}{\rho^2 \tau^2 p^2} = 0$$

Door de substitutie  $z = z' + \frac{2(\mu \tau + \rho \xi_1)}{3 \rho \tau}$  komt deze in de gereduceerde vorm:

$$z'^3 - \frac{(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 + 12 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}{3 \rho^2 \tau^2} z + \frac{2 (\mu \tau + \xi_1)^3}{27 \rho^3 \tau^3} - \frac{8 (\mu \tau + \rho \xi_1) (\mu \xi_1 - \xi^2)}{3 \rho^2 \tau^2} - \frac{\mu^2 \xi^2}{\rho^2 \tau^2 p^2} = 0$$

of

$$z'^3 + az' + b = 0, \text{ waarin:}$$

$$a = - \frac{(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 + 12 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}{3 \rho^2 \tau^2}$$

$$b = \frac{2 (\mu \tau + \rho \xi_1)^3}{27 \rho^3 \tau^3} - \frac{8 (\mu \tau + \rho \xi_1) (\mu \xi_1 - \xi^2)}{3 \rho^2 \tau^2} - \frac{\mu^2 \xi^2}{\rho^2 \tau^2 p^2}$$

Daar de term met V het + teeken heeft in de vergelijking ( $\gamma_1$ ), zijn er nu, mathematisch gesproken, de volgende mogelijkheden:

1°. De vergelijking ( $\delta_1$ ) heeft slechts 1 reële wortel; de voorwaarde hiervoor is

$$1/4 b^2 + 1/27 a^3 > 0$$

Dan worden twee wortels V van ( $\gamma_1$ ) reël en twee zijn toegevoegd complex. Complexe wortels voor V mogen, gelijk op blz 49 is opgemerkt, niet voorkomen. De golven met frequentie's p, die aanleiding geven tot de betrekking

$$1/4 b^2 + 1/27 a^3 > 0$$

zijn zonder dissipatie niet stationnair mogelijk.

2°. De vergelijking ( $\delta_1$ ) heeft 3 reële wortels; de voorwaarde hiervoor is

$$1/4 b^2 + 1/27 a^3 < 0$$

Nu zijn er twee gevallen:

$$\text{I alle } z's > 0$$

$$\text{II er zijn 2 } z's < 0 \text{ en 1 } z > 0$$

(1 of 3 negatieve wortels z kan ( $\delta_1$ ) niet hebben, omdat het product der wortels positief moet zijn).

In het geval II worden alle wortels V onbestaanbaar. Dit laten wij dus verder rusten.

Overgangsgeval tusschen I en II is, dat de beide negatieve wortels uit II aan elkaar gelijk worden. Van de V's zijn nu



2 onbestaanbaar; 2 gelijk reëel; ook dit geval heeft weder geen physische beteekenis.

Rest dus nog het geval I:

Wij zien, dat  $V_1$  negatief is; alle vier de snelheden kunnen niet negatief zijn, daar hun som moet nul zijn; er blijven dus de mogelijkheden:

( $\alpha$ )... 1 wortel  $V$  pos. en 3 negatief

( $\beta$ )... 2 wortels  $V$  pos. en 2 negatief

( $\gamma$ )... 3 wortels  $V$  pos. en 1 negatief

Als overgangsgeval tusschen  $1^0$  en  $2^0$  heeft men nog:

$3^0$ . De vergelijking ( $\delta_1$ ) heeft 1 reële en 2 gelijke reële wortels; de voorwaarde hiervoor is:

$$\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{27} a^3 = 0,$$

Dan worden twee wortels  $V$  van ( $\gamma_1$ ) reëel verschillend en twee worden reëel gelijk. Wij hebben dus verder weer de gevallen:

( $\alpha'$ )... 1 wortel  $V$  pos. en 3 neg., waaronder 2 gelijke

( $\beta'$ )... 2 wortels  $V$  pos. en 2 neg.; of de 2 pos. of de 2 neg. zijn gelijk

( $\gamma'$ )... 3 wortels  $V$  pos. en 1 neg.; onder de 3 pos. zijn 2 gelijk.

Als resultaat hebben wij dus gekregen, dat stationnair zich alleen kunnen voortplanten golven met een frequentie  $p$ , die voldoet aan:

$$\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{27} a^3 \leq 0.$$

Schrijven wij voor de grootheid  $b$  van blad 51

$$b = b_1 - b_2 \cdot \frac{1}{p^2} \text{ waarin}$$

$$b_1 = \frac{2(\mu\tau + \rho\xi_1)}{27\rho^3\tau^3} - \frac{8(\mu\tau + \rho\xi_1)(\mu\xi_1 - \xi^2)}{3\rho^2\tau^2}$$

$$b_2 = \frac{\mu^2\xi^2}{\rho^2\tau^2}$$

dan wordt dit:

$$4a^3 + 27b_1^2 - 54b_1b_2 \cdot \frac{1}{p^2} + 27b_2^2 \cdot \frac{1}{p^4} \leq 0$$

of

$$(4a^3 + 27b_1^2)p^4 - 54b_1b_2p^2 + 27b_2^2 \leq 0.$$

De wortels  $p_1^2$  en  $p_2^2$  van deze voorwaarde, indien het gelijktteken geldt, worden voorgesteld door:

$$p^2 = \frac{27 b_1 b_2 \pm 6 a b_2 \sqrt{-3 a}}{4 a^3 + 27 b_1^2}$$

Indien de wortels  $p_1$  en  $p_2$ , die hierdoor geleverd worden, beide reëel zijn, dan kunnen dus, voor het geval dat  $4 a^3 + 27 b_1^2 > 0$ , alleen golven met frequentie  $p$ , gelegen tusschen  $p_1$  en  $p_2$  (d.w.z. grooter dan de kleinste, doch kleiner dan de grootste) zich in het medium voortplanten.

Is daarentegen  $4 a^3 + 27 b_1^2 < 0$ , dan zijn het juist de frequentie's  $p_1$  gelegen tusschen  $p_1$  en  $p_2$ , die uitgesloten zijn; met alle andere waarden van  $p$  kunnen zich golven voortplanten.

Zijn de wortels  $p_1$  en  $p_2$  onbestaanbaar, dan zal, als  $4 a^3 + 27 b_1^2 > 0$  is, geen enkele golf zich kunnen voortplanten; is daarentegen  $4 a^3 + 27 b_1^2 < 0$ , dan zijn voor dat geval golven met willekeurige frequentie  $p$  mogelijk. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Voor groote waarden van  $p$  reduceert zich de voorwaarde  $4 a^3 + 27 b_1^2 < 0$ , waaronder alle wortels  $z$  van  $(\delta_1)$  reëel zijn, tot:  $4 a^3 + 27 b_1^2 < 0$ . Substitueert men hierin voor  $a$  en  $b_1$  de waarden van blad 51 en 52, dan wordt dit:

$$-16 (\mu \xi_1 - \xi^2) [(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 - 4 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau]^2 < 0.$$

Noodzakelijk en voldoende hiervoor is:

$$\mu \xi_1 - \xi^2 > 0$$

Gelijk men door beschouwing van de quadratische vorm, die men krijgt, door in formule (60) blad 50 voor de componenten  $X_x \dots N_x$  de substitutie van de noot blad 8 toe te passen, ziet, als men zich beperkt tot deformatie's waarbij  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ , is dit (n.l.  $\mu \xi_1 - \xi^2 > 0$ ) één der voorwaarden, waaronder deze vorm definitief negatief is; terwijl de voorwaarden voor de realiteit der wortels  $z_1$ ,  $z_2$  en  $z_3$ , behalve de voorwaarde omtrent  $4 a^3 + 27 b_1^2$  ook met het karakter der potentiële energie in verband staan. Deze potentiële energie toch moet, indien de niet-gedeformeerde toestand een toestand van evenwicht is, een minimum zijn, hetgeen tot de bovengestelde eisch voert.

Zullen nu verder alle snelheden reëel zijn, dan moeten bovendien alle getallen  $z$  positief zijn. Lossen wij daartoe de vergelijking  $(\delta_1)$  op, nadat we hierin de laatste term, die immers



Voor golven, wier frequentie een mogelijke waarde bezit, zijn verder nog mogelijk de gevallen ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) en ( $\gamma$ ) blad 51 p in den noemer bevat, hebben weggelaten, dan krijgen wij:

$$z_1 \text{ en } z_2 = \frac{\mu \tau + \rho \xi_1}{\rho \tau} \pm \frac{2}{\rho \tau} \sqrt{(\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}$$

$$z_3 = 0$$

In de 1<sup>e</sup> plaats zien wij hier nogmaals, dat voorwaarde voor de realiteit van  $z_1$  en  $z_2$  is  $\mu \xi_1 - \xi^2 > 0$ . Verder moet nu voor positieve  $z$ 's

$(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 > 4 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau$  [zijn. Deze voorwaarde is altijd vervuld, want wij kunnen er voor schrijven:  $(\mu \tau - \rho \xi_1)^2 + (2 \xi \sqrt{\rho \tau})^2 > 0$  en hier staat in het linkerlid de som van 2 kwadraten.

De waarden, die de snelheden nu aannemen zijn:

$$V_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{z_1} - \frac{1}{2} \sqrt{z_2}$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{z_1} + \frac{1}{2} \sqrt{z_2}$$

$$V_3 = -V_2$$

$$V_4 = -V_1$$

Verkort laat zich dit schrijven:

$$V_1, V_2, V_3 \text{ en } V_4 = \pm \sqrt{\frac{1}{4} z_1 + \frac{1}{4} z_2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{z_1 z_2}}$$

Precies hetzelfde resultaat kunnen wij afleiden, door dadelijk in de vergelijking ( $\gamma_1$ ) (blz. 50) de term met  $p$  in den noemer weg te laten. Er komt dan ter oplossing van  $V$  de vergelijking:

$$V^4 - \frac{\mu \tau + \rho \xi_1}{\rho \tau} V^2 + \frac{\mu \xi_1 - \xi^2}{\rho \tau} = 0$$

en dus

$$V = \pm \sqrt{\frac{\mu \tau + \rho \xi_1 \pm \sqrt{(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 - 4 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}}{2 \rho \tau}}$$

Wij verkeerren nu in geval ( $\beta$ ) van blz. 52: er zijn twee wortels  $V$  positief en twee neg. met gelijke absolute waarde. Wij krijgen dus ook maar één draaiend polarisatievlak met een  $\delta$ :

$$\delta = \frac{1}{2} p \left[ \sqrt{\frac{\mu \tau + \rho \xi_1 + \sqrt{(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 - 4 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}}{2 \rho \tau}} - \sqrt{\frac{\mu \tau + \rho \xi_1 - \sqrt{(\mu \tau + \rho \xi_1)^2 - 4 (\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}}{2 \rho \tau}} \right]$$

$$\delta = \frac{1}{2} p \sqrt{\frac{1}{\rho \tau} (\mu \tau + \rho \xi_1 + 2 \sqrt{(\mu \xi_1 - \xi^2) \rho \tau}}$$

of zoo men wil:

$$\delta = \frac{1}{2} p \sqrt{\frac{\mu}{\rho} + \frac{\xi_1}{\tau} - 2 \sqrt{\frac{\mu \xi^2 - \xi^2}{\rho \tau}}}$$



en 52, terwijl bij  $p_1$  en  $p_2$  behooren de gevallen  $\alpha'$ ,  $\beta'$  en  $\gamma'$ . De gevallen  $\alpha$  en  $\gamma$  komen in wezen op hetzelfde neer; er planten zich voort één cirkelvormig gepolariseerde golf, in de ééne zin doorloopen en drie in de andere zin. De in verschillende zin doorloopen, cirkelvormig gepolariseerde golven met verschillende snelheid kunnen op de gebruikelijke wijze worden samengesteld en leveren dan een draaiend polarisatievlak. De in de ééne zin doorloopen cirkelvormig gepolariseerde golf laat zich dus met elk der drie andere samenstellen, telkens tot één draaiend polarisatievlak. Zoo loopen er dus drie draaiende polarisatievlakken. In geval ( $\beta$ ) planten zich voort twee cirkelvormig gepolariseerde golven in de ééne zin doorloopen, en twee in de andere zin; er zijn dan dus vier draaiende polarisatievlakken. Telkens is de draaiing  $\delta$  per c.M.

$$\delta = p \frac{V_i - V_k}{2},$$

waarin  $V_i$  en  $V_k$  voorstellen de absolute waarden van twee snelheden van verschillend teeken, (dit komt dus neer op snelheden van cirkelvormig gepolariseerde golven, die in tegen-gestelde zin doorloopen worden)  $p$  de frequentie.

Zoo komen bij de golven met frequentie's  $p_1$  en  $p_2$  de gevallen ( $\alpha'$ ) en ( $\gamma'$ ) op hetzelfde neer: één golf in de ééne zin doorloopen, twee in de andere zin, één daarvan moet dubbel geteld worden. Er loopen hier dus twee draaiende polarisatievlakken. In geval ( $\beta'$ ) loopen er nu ook twee golven, in de ééne zin gepolariseerd en één in de andere zin, terwijl nu de laatste dubbel geteld moet worden. Ook hier loopen dus twee draaiende polarisatievlakken. De draaiing  $\delta$  per c.M. is weer als boven.

§ 6. Het resultaat van de vorige paragraaf is dus, dat er longitudinale golven, met een voortplantingssnelheid, onafhankelijk van de frequentie  $p$  en transversale golven, met een van de frequentie afhankelijke voortplantingssnelheid bestaan.

Hier komen dus, met behulp van het elastische medium met oriënteerbare deeltjes dispersie- en polarisatieverschijnselen te voorschijn. De essentiële oorzaak hiervan is, dat in de

vergelijkingen (52), (53) en (54), behalve de 2<sup>e</sup> afgeleiden van de componenten van de verschuiving naar de coördinaten, ook nog de 1<sup>e</sup> afgeleiden optraden; dit bracht nl. de frequentie  $p$  in de vergelijking, die de voortplantingssnelheid bepaalt en gaf zoo aanleiding tot dispersie en circulaire polarisatie der golven.

In de elastische lichttheorie heeft men langs verschillende wegen getracht, dispersie- en polarisatieverschijnselen te verklaren. Het naast verwant aan de resultaten, die met behulp van het medium van oriënteerbare deeltjes verkregen zijn, althans in mathematisch opzicht, zijn die van NEUMANN. Deze geeft in zijn werken, <sup>1)</sup> naast de verklaring van dispersie, ook die van polarisatie. Hij voegt daartoe aan de gewone, elastische differentiaalvergelijkingen nog termen van den vorm  $C \frac{\partial v}{\partial z} - B \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $A \frac{\partial w}{\partial x} - C \frac{\partial u}{\partial z}$  en  $B \frac{\partial u}{\partial y} - A \frac{\partial v}{\partial x}$  toe. Ook bij hem komen, naast termen met 2<sup>e</sup> afgeleiden naar  $x$ ,  $y$  en  $z$ , termen met de 1<sup>e</sup> afgeleiden naar die grootheden voor. Deze krachtcomponenten verantwoordt NEUMANN door aan te nemen, dat tengevolge van de relatieve verschuiving van een aetherdeeltje t. o. v. een ander dit laatste er evenzoo op inwerkt als het element van een electrische stroom op een magneetpool. <sup>2)</sup>

In mathematisch opzicht nog verwant aan de gegeven beschouwingen is ook de wijze, waarop MAC CULLAGH te werk gaat en tevens ook de beschouwingen van de electromagnetische lichttheorie, waarvan de differentiaalvergelijkingen van MAC CULLAGH de formeele voorlooper zijn. In wezen stemmen beide soorten van vergelijkingen, die van MAC CULLAGH en die van de electro-magnetische lichttheorie overeen. <sup>3)</sup> Een directe mechanische interpretatie heeft MAC CULLAGH niet gegeven.

Zijn differentiaalvergelijkingen, waarin de rotatiecomponenten van de verschuivingsvector optreden, hebben de vorm:

<sup>1)</sup> Habilitationsschrift: Die Magn. Drehung der Pol. Ebene des Lichtes; en Über die Aetherbewegung in Kristalle. Math. Ann. 1 (1869) p. 325-358.

<sup>2)</sup> CLEBSCH heeft later dezelfde onderstelling gemaakt ter verklaring van cirk. pol. (Theorie der zirk. Pol. Medien J. f. Math. 57 (1860).

<sup>3)</sup> Zie FITZ GERALD. Phil. Mag. (5) 7 (1879) p. 216.



$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (Z) - \frac{\partial}{\partial z} (H) \text{ enz.,}$$

waarin  $\Xi$ ,  $H$  en  $Z$  resp.  $= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$  en  $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$ , terwijl

$$2\Phi = A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi\zeta + 2A_{23}\eta\zeta$$

en  $\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$ ;  $\eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$  en  $\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$  zijn.

Opgemerkt dient te worden, dat de potentiaalfunctie  $\Phi$ , die hierin optreedt, niet overeenkomt met de elastische potentiaal.

Deze vergelijkingen van MAC CULLAGH zijn minder algemeen dan de boven besprokene van NEUMANN. Ze onderscheiden zich van elkaar, doordat in die van MAC CULLAGH de derde afgeleiden van  $u$ ,  $v$  en  $w$  naar  $x$ ,  $y$  en  $z$  optreden, waar in die van NEUMANN eerste afgeleiden staan. Dit onderscheid intusschen is niet essentiëel, daar het er slechts op aankomt, het optreden van afgeleiden van oneven rangorde te motiveeren. Legt men intusschen de vergelijkingen van MAC-CULLAGH niet in electro-magnetische zin uit, dan hebben zij (Zie P. VOLKMANN. „Vorlesungen über die Theorie des Lichtes“) meer mathematische als physische beteekenis. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Vergelijk overigens WANGERIN. Enzykl. Math. Wiss. V III 1. 21.



## HOOFDSTUK IV.

### Toepassing op de theorie van de soortelijke warmte.

Wij zullen in dit hoofdstuk volgens de theorie van DEBIJE de soortelijke warmte bepalen, die een medium bezit, waarvoor de bewegingsvergelijkingen de in Hoofdstuk I aangegeven vorm hebben.

Bij toepassing op een elastisch lichaam, waarvoor de vergelijkingen de gebruikelijke vorm hebben, heeft de theorie van DEBIJE de volgende gedaante:

Wij denken ons een kubus, waarvan de deeltjes (elastische) trillingen uitvoeren <sup>1)</sup>, zoodanig, dat op de wanden van de kubus voldaan wordt aan de randvoorwaarde, dat de component van de uitwijking loodrecht op de wand steeds gelijk is aan nul. Dan wordt gevraagd te bepalen het aantal mogelijke bewegingen van verschillende frequentie met trillingsgetal kleiner dan een voorgeschreven getal  $p$  (of beter gelegen tusschen  $p$  en  $p + dp$ ). Bij dit alles de onderstelling, dat de waarden der frequentie's groot zijn, in aanmerking te nemen.

De elastische differentiaalvergelijkingen, waaraan voldaan moet worden, luiden:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

<sup>1)</sup> Wij nemen hier een kubus, terwijl DEBIJE in Ann. der Physik 1912 blz. 789 en vlg.) een bol heeft gebruikt; voor het eindresultaat, waar het gaat om een willekeurig stuk materie, zal dit geen verschil opleveren.

Om hieraan nu te voldoen, stellen wij:

$$u = A_1 e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \cdot e^{i p t}$$

$$v = A_2 e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \cdot e^{i p t}$$

$$w = A_3 e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \cdot e^{i p t}$$

De grootheden  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  en  $A_3$  worden dan, al naar het noodig is, imaginair gedacht. Als randvoorwaarden krijgen wij dan, indien wij de ribbe van de kubus 2 a noemen en de oorsprong in het middelpunt van de kubus denken:

$$(178) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Voor } x = \pm a \quad u = 0 \text{ dus } \alpha a = k_1 \pi \quad \alpha = \frac{k_1}{a} \pi \\ \text{,, } y = \pm a \quad v = 0 \quad \beta a = k_2 \pi \quad \beta = \frac{k_2}{a} \pi \\ \text{,, } z = \pm a \quad w = 0 \quad \gamma a = k_3 \pi \quad \gamma = \frac{k_3}{a} \pi \end{array} \right.$$

waarin  $k_1$ ,  $k_2$  en  $k_3$  willekeurige, doch *geheele* getallen voorstellen.

Substitueeren wij dit in de differentiaalvergelijkingen, dan komt er:

$$\begin{aligned} [(\lambda + \mu)\alpha^2 + \mu \sum \alpha^2 - \rho p^2] A_1 + (\lambda + \mu)\alpha\beta A_2 + (\lambda + \mu)\alpha\gamma A_3 &= 0 \\ (\lambda + \mu)\alpha\beta A_1 + [(\lambda + \mu)\beta^2 + \mu \sum \alpha^2 - \rho p^2] A_2 + (\lambda + \mu)\beta\gamma A_3 &= 0 \\ (\lambda + \mu)\alpha\gamma A_1 + (\lambda + \mu)\beta\gamma A_2 + [(\lambda + \mu)\gamma^2 + \mu \sum \alpha^2 - \rho p^2] A_3 &= 0 \end{aligned}$$

een stel van 3 lineaire homogene vergelijkingen in  $A_1$ ,  $A_2$  en  $A_3$ ; de voorwaarde, dat er een oplossing bestaat, is:

$$[\rho p^2 - (\lambda + 2\mu) \sum \alpha^2] [\rho p^2 - \mu (\sum \alpha^2)]^2 = 0$$

De eerste factor geeft longitudinale trillingen, de tweede dubbele factor (hij staat immers in zijn kwadraat) de transversale.

Wij krijgen dus:

$$p_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \sum \alpha^2 \quad p_2^2 = p_3^2 = \frac{\mu}{\rho} \sum \alpha^2$$

Vullen wij hierin de waarden van  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ , volgens (178) in, dan komt er:

$$p_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\pi^2}{a^2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

$$p_2^2 = p_3^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\pi^2}{a^2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

1)  $\sum \alpha^2$  stelt  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  voor.

en dus, als wij bedenken, dat er was voorgeschreven  $p_1$  (respect.  $p_2$  en  $p_3$ )  $\leq p$ , hebben wij:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \leq \frac{a^2 p^2}{\pi^2} \frac{\rho}{\lambda + 2\mu},$$

$$\text{resp. } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \leq \frac{a^2 p^2}{\pi^2} \frac{\rho}{\mu}$$

Nu wordt het aantal oplossingen van deze vergelijkingen gevraagd. De  $k$ 's zijn hierin de veranderlijke grootheden, zij moeten *geheele* getallen zijn. Schrijven wij:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{a^2 p^2}{\pi^2} \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}$$

resp.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{a^2 p^2}{\pi^2} \frac{\rho}{\mu}$$

en beschouwen  $x$ ,  $y$  en  $z$  als coördinaten van een punt, dan is  $x^2 + y^2 + z^2$  gelijk aan het kwadraat van de afstand van het punt  $(x, y, z)$  tot de oorsprong en is dus de vraag, die ons bezighoudt, terug te brengen tot de volgende:

Hoe groot is het aantal roosterpunten<sup>1)</sup> binnen of op de bol, met straal

$$\frac{ap}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$$

resp.

$$\frac{ap}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

gelegen.

Nu bewijst LANDAU in „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereiche“ (Zie „Nachrichten von den Kön. Ges. der Wiss. zu Gott. Math. Phys. Klasse 1912 blad 687—771), dat dit aantal is

$$\frac{4}{3} \pi r^3 + O(r^{3/2} + \varepsilon)$$

Hierin stelt  $r$  voor de straal van den bol.  $O$  — het teken van LANDAU — heeft de beteekenis van een correctieterm, die voor groote waarden van  $r$  nul wordt.  $O(r^{3/2} + \varepsilon)$  stelt voor een term, die voor groote waarden van  $r$  nul wordt van de orde  $3/2 + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  stelt als steeds voor een willekeurig klein, doch positief getal).

<sup>1)</sup> Roosterpunten zijn punten, waarvan de coördinaten geheele getallen zijn.



Afgezien van de correctieterm is dit resultaat van LANDAU trouwens plausibel, waar toch  $\frac{4}{3} \pi r^3$  voorstelt de inhoud van den bol.

Passen wij dit resultaat nu toe op ons geval, dan krijgen wij

$$\frac{4}{3} \pi \left( \frac{a p}{\pi} \right)^3 \left( \frac{\rho}{\lambda + 2 \mu} \right)^{3/2}$$

resp.  $\frac{4}{3} \pi \left( \frac{a p}{\pi} \right)^3 \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{3/2}$  twee keer.

Voeren wij ten slotte nog in het volume van de kubus  $V = (2a)^3$ , en verder voor frequentie, in overeenstemming met DEBYE niet  $p$ , maar  $\frac{p}{2\pi}$  (dus niet het aantal trillingen in  $2\pi$  seconden maar dat in één sec.) nemende, dan gaat dit over in:

$$\frac{4}{3} \pi \left( \frac{p}{2\pi} \right)^3 V \left( \frac{\rho}{\lambda + 2 \mu} \right)^{3/2}$$

of  $\frac{4}{3} p^3 V \left( \frac{\rho}{\lambda + 2 \mu} \right)^{3/2}$

resp.  $\frac{4}{3} p^3 V \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{3/2}$  twee keer, en dus, als wij

met DEBYE het aantal vrijheidsgraden voor het niet-oriënteerbare medium voorstellen door  $Z_0$  hebben wij:

$$Z_0 = \frac{4}{3} \pi V p^3 \left[ 2 \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{3/2} + \left( \frac{\rho}{\lambda + 2 \mu} \right)^{3/2} \right]$$

voor het aantal eigentrillingen met trillingsgetal  $< p$ .

DEBYE schrijft nu verder:

$$Z = V p^3 F, \quad \text{waarin dus}$$

$$F = \frac{4}{3} \pi \left[ 2 \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{3/2} + \left( \frac{\rho}{\lambda + 2 \mu} \right)^{3/2} \right]$$

Voor de maximale frequentie  $p_m$  krijgt hij dan:

$$p_m = \left( \frac{3 N}{V F} \right)^{1/3}, \quad \text{waarin } N$$

is het aantal atomen in  $V$ . De karakteristieke temperatuur wordt dan

$$\theta = \frac{h p_m}{k} \quad (h = \text{elementair werkingsquantum} = 7.10.10^{-27} \text{ erg. sec.})$$

$k = \text{BOLTZMAN'sche constante} = 1.47 \cdot 10^{-16}$ )

De functie  $F$  van de elastische grootheden, wordt voor het door ons beschouwde geval van een oriënteerbaar medium anders. Wij stellen ons nu ten doel deze te bepalen.

Differentiaalvergelijkingen voor het *georienteerde* elastische medium luiden:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + (\nu + \xi) \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \xi \Delta^2 \omega = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ enz.}$$

(Vergelijking (49)–(54) hoofdstuk I)

De randvoorwaarden luiden:

Voor  $x = \pm a$  moet  $u = 0$  en  $\omega = 0$

Voor  $y = \pm a$  moet  $v = 0$  en  $z = 0$

en voor  $z = \pm a$  moet  $w = 0$  en  $\sigma = 0$

Om hieraan te voldoen, stellen wij  $u, v, w, \omega, z$  en  $\sigma$  evenredig met de factor  $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + i p t}$  en met een constante en krijgen weer, juist als boven, uit de randvoorwaarden:

$$\alpha = \frac{k_1}{a} \pi$$

$$\beta = \frac{k_2}{a} \pi$$

$$\gamma = \frac{k_3}{a} \pi.$$

Substitueeren wij dit weer in de differentiaalvergelijkingen, dan komt er:

$$[(\lambda + \mu)\alpha^2 + \mu \Sigma \alpha^2 - \rho p^2] A_1 + (\lambda + \mu)\alpha \beta A_2 + (\lambda + \mu)\alpha \gamma A_3 + \\ + [(\nu + \xi)\alpha^2 + \xi \Sigma \alpha^2] B_1 + (\nu + \xi)\alpha \beta B_2 + (\nu + \xi)\alpha \gamma B_3 = 0$$

$$(\lambda + \mu)\alpha \beta A_1 + [(\lambda + \mu)\beta^2 + \mu \Sigma \alpha^2 - \rho p^2] A_2 + (\lambda + \mu)\beta \gamma A_3 + \\ + (\nu + \xi)\alpha \gamma B_1 + [(\nu + \xi)\beta^2 + \xi \Sigma \alpha^2] B_2 + (\nu + \xi)\beta \gamma B_3 = 0$$

$$(\lambda + \mu)\alpha \gamma A_1 + (\lambda + \mu)\beta \gamma A_2 + [(\lambda + \mu)\gamma^2 + \mu \Sigma \alpha^2 - \rho p^2] A_3 + \\ + (\nu + \xi)\alpha \gamma B_1 + (\nu + \xi)\beta \gamma B_2 + [(\nu + \xi)\gamma^2 + \xi \Sigma \alpha^2] B_3 = 0$$

$$[(\nu + \xi)\alpha^2 + \xi \Sigma \alpha^2] A_1 + [(\nu + \xi)\alpha \beta + \mu \gamma] A_2 + \\ + [(\nu + \xi)\alpha \gamma - \mu \beta] A_3 + [(\nu_1 + \xi_1)\alpha^2 + \xi_1 \Sigma \alpha^2 - \tau p^2] B_1 + \\ + (\nu_1 + \xi_1)\alpha \beta B_2 + (\nu_1 + \xi_1)\alpha \gamma B_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 &[(\nu + \xi) \alpha \beta - \mu \gamma] A_1 + [(\nu + \xi) \beta^2 + \xi \sum \alpha^2] A_2 + \\
 &+ [(\nu + \xi) \beta \gamma + \mu \alpha] A_3 + (\nu_1 + \xi_1) \alpha \beta B_1 + \\
 &+ [(\nu_1 + \xi_1) \beta^2 + \xi_1 \sum \alpha^2 - \tau p^2] B_2 + (\nu_1 + \xi_1) \beta \gamma B_3 = 0 \\
 &[(\nu + \xi) \alpha \gamma + \mu \beta] A_1 + [(\nu + \xi) \beta \gamma - \mu \alpha] A_2 + \\
 &+ [(\nu + \xi) \gamma^2 + \xi \sum \alpha^2] A_3 + (\nu_1 + \xi_1) \alpha \gamma B_1 + \\
 &+ (\nu_1 + \xi_1) \beta \gamma B_2 + [(\nu_1 + \xi_1) \gamma^2 + \xi_1 \sum \alpha^2 - \tau p^2] B_3 = 0
 \end{aligned}$$
 een stel van zes lineaire homogene vergelijkingen in  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$  en  $B_3$ ; de voorwaarde dat deze een van nul verschillende oplossing bezitten, is, dat de determinant der coëfficiënten gelijk aan nul is. In de elementen van die determinant treden naast termen van de tweede graad in  $\alpha, \beta, \gamma$  ook termen van de eerste graad. Daar het probleem opgelost moet worden voor groote waarden van  $p$ , dat is dus voor groote waarden van de  $k$ 's, of dus ook van  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  ( $\alpha = \frac{k_1}{a} \pi$  enz.) mogen we bij eerste benadering de laatste tegenover de eerste verwaarloozen.

Ontwikkelen wij deze determinant, dan komt er:

$$\begin{aligned}
 &[\rho \tau p^4 - \{\rho(\nu_1 + 2\xi_1) + \tau(\lambda + 2\mu)\} p^2 \sum \alpha^2 - \{(\nu + 2\xi)^2 - \\
 &\quad - (\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1)(\sum \alpha^2)^2\} \times \\
 &\times [\rho \tau p^4 - (\mu \tau + \rho \xi_1) p^2 \sum \alpha^2 + (\mu \xi_1 - \xi^2)(\sum \alpha^2)^2] = 0
 \end{aligned}$$

De eerste factor geeft de longitudinale trillingen, de tweede dubbele factor (hij staat immers in zijn kwadraat) geeft de transversale golven.

Wij krijgen dus:

$$\begin{aligned}
 p^2_{1 \text{ en } 1'} &= \left\{ \frac{\rho(\nu_1 + 2\xi_1) + \tau(\lambda + 2\mu)}{2\rho\tau} \pm \right. \\
 &\pm \frac{1}{2\rho\tau} [ \{ \rho(\nu_1 + 2\xi_1) + \tau(\lambda + 2\mu) \}^2 + 4\rho\tau \{ (\nu + 2\xi)^2 - \\
 &\quad - (\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) \} \sum \alpha^2 \\
 p^2_{2 \text{ en } 2'} &= p^2_{3 \text{ en } 3'} = \left[ \frac{\mu\tau + \rho\xi_1}{2\rho\tau} \pm \frac{1}{2\rho\tau} \{ (\mu\tau + \rho\xi_1)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 4\rho\tau(\mu\xi_1 - \xi^2) \}^{1/2} \right] \sum \alpha^2 \quad ^1)
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Zooals wij in hoofdstuk III op blz. 53 zagen, is de voorwaarde:

$$\begin{aligned}
 &(\mu\tau + \rho\xi_1)^2 > 4(\mu\xi_1 - \xi^2)\rho\tau \\
 \text{of} \quad &(\mu\tau + \rho\xi_1)^2 - 4(\mu\xi_1 - \xi^2)\rho\tau > 0 \\
 &\text{steeds vervuld.}
 \end{aligned}$$



Wij overtuigen ons gemakkelijk, dat dit resultaat overeenstemt met dat voor het geval van het niet-georiënteerde medium. Wij merken dan op, dat als wij aan alle elasticiteits-coëfficiënten, die ter bepaling van de invloed van de oriëntatie nieuw zijn ingevoerd, de waarde nul toekennen, de oplossingen voor de frequentie's  $p$  overgaan in die voor het medium zonder oriëntatie. Wij krijgen dan:

$$p^2_{1 \text{ en } 1'} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\rho} \pm \frac{1}{2\rho\tau} [\tau^2 (\lambda + 2\mu)^2]^{1/2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{ of } = 0$$

$$p^2_{2 \text{ en } 2'} = p^2_{3 \text{ en } 3'} = \frac{\mu}{2\rho} \pm \frac{1}{2\rho\tau} \{(\mu\tau)^2\}^{1/2} = \frac{\mu}{\rho} \text{ of } = 0$$

hetgeen overeenstemt.

Verder verloopt de berekening geheel analoog aan de theorie van het niet-georiënteerde medium, zoodat wij als resultaat krijgen:

Z georiënteerd  $= \frac{4}{3} \pi V p^3 [2(c_2)^{3/2} + 2(c_2')^{3/2} + (c_1)^{3/2} + (c_1')^{3/2}]$   
waarin

$$c_1 \text{ en } c_1' = \left\{ \frac{\rho(\nu_1 + 2\xi_1) + \tau(\lambda + 2\mu)}{2\rho\tau} \pm \frac{1}{2\rho\tau} \left[ \{ \rho(\nu_1 + 2\xi_1) - \tau(\lambda + 2\mu) \}^2 - 4\rho\tau \{ (\nu + 2\xi)^2 - (\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) \} \right]^{1/2} \right\}^{-1}$$

en

Dus is de wortel, die in  $p^2_{2 \text{ en } 2'}$  en in  $p^2_{3 \text{ en } 3'}$  voorkomt steeds reëel; opdat verder de waarde kleiner is dan  $\mu\tau + \rho\xi_1$ , moet  $\mu\xi_1 - \xi^2 > 0$  zijn; is dat het geval, dan zijn de grootheden  $p_2$ ,  $p_2'$ ,  $p_3$  en  $p_3'$  steeds reëel.

Op geheel dezelfde wijze toont men aan, dat óók  $p_1$  en  $p_1'$  altijd reëel zijn onder de voorwaarde dat

$$(\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) - (\nu + 2\xi)^2 > 0$$

want ook de hier optredende waarde onder het wortelteeken is steeds  $> 0$ , immers:

$$\begin{aligned} & \{ \rho(\nu_1 + 2\xi_1) + \tau(\lambda + 2\mu) \}^2 + 4\rho\tau(\nu + 2\xi)^2 - 4\rho\tau(\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) = \\ & = \rho^2(\nu_1 + 2\xi_1)^2 + \tau^2(\lambda + 2\mu)^2 - 2\rho\tau(\lambda + 2\mu)(\nu_1 + 2\xi_1) + 4\rho\tau(\nu + 2\xi)^2 \\ & = \{ \rho(\nu_1 + 2\xi_1) - \tau(\lambda + 2\mu) \}^2 + \{ 2(\nu + 2\xi) \sqrt{\rho\tau} \}^2 \end{aligned}$$

hetgeen een som van kwadraten is en dus essentieel grooter dan nul. De hier afgeleide voorwaarden zijn reeds behandeld in hoofdstuk III voor longitudinale golven op blz. 39 (noot), voor transversale op blz. 53 (noot).

$$c_{2\text{ en }2'} = \left[ \frac{\mu \tau + \rho \xi}{2 \rho \tau} \pm \frac{1}{2 \rho \tau} \left\{ (\mu \tau + \rho \xi)^2 - 4 \rho \tau (\mu \xi_1 - \xi^2) \right\}^{1/2} \right]^{-1}$$

De functie  $F$  van DEBYE wordt nu dus voor het georiënteerde medium:

$$F = \frac{4}{3} \pi [2 c_2^{3/2} + 2 c_2'^{3/2} + c_1^{3/2} + c_1'^{3/2}]$$

De maximum frequentie wordt weer:

$$p_m = \left( \frac{3 N}{V F} \right)^{1/3} \text{ en de karakteristieke temperatuur } \Theta:$$

$$\Theta = \frac{h p_m}{k}$$

Wij vestigen de aandacht op het feit, dat onze beschouwingen als bijzonder geval in de algemeene theorie der kristalnetten, zooals BORN die in zijn Dynamik der Kristallgitter ontwikkeld heeft, begrepen zijn.

---

<sup>2)</sup> Vergelijk M. BORN l. c. p. 37 e. v.





STELLINGEN.



## STELLINGEN.

---

1.

De methode, waarop VOLTERRA elastische hysteresis behandelt, is in strijd met het causaliteitsbeginsel.

(VOLTERRA. Fonctions de lignes Hfdst. VI.)

2.

Bij de behandeling der elastische hysteresis is de methode van PRANDTL te verkiezen boven die van VOLTERRA.

(Enzykl. Math. Wiss. IV 2 II.)

3.

De theorie van LINDEMANN voor het geleidingsvermogen van metalen bij lage temperaturen is onjuist.

(Sitz. Ber. Kön. Pr. Ak. v. Wiss. z. Berlin 1911 blzd. 316.)

4.

Een overzicht van de toepassingen der integraalvergelijkingen in de mathematische physica is gewenscht.

5.

De mooie resultaten, welke met de electronentheorie zijn bereikt, geven niet het recht, om de positie dezer theorie als onaantastbaar te beschouwen.



KEESING heeft gelijk, waar hij FORSYTH aanvalt, als deze de methode van Laplace behandelt ter oplossing van differentiaal-vergelijkingen door middel van bepaalde integralen.

(FORSYTH. Differential equations 4th ed. 1914 p. 277 en vlg.  
KEESING. Nieuw Archief II 8 1909 blad. 201.)

## 7.

In de hoogere algebra vangt men de behandeling van de hoogere machtsvergelijkingen dikwijls aan met niet scherp genoeg te definiëren, wat men verstaat onder het oplossen van hoogere machtsvergelijkingen.

## 8.

Het is toe te juichen, dat VAN DER CORPUT voor het aantal roosterpunten binnen een gebied, gebied en kromme bepaalt met de definitie's, zooals wij die kennen in de theorie der verzamelingen.

(V. D. CORPUT Dissertatie. Hfdst. I. § 15 en vlg.)

## 9.

Het vraagstuk, door Prof. Hk. DE VRIES behandeld in Versl. K. A. 28.9.12 kan ook opgelost worden, door de gezochte meetkundige plaats te beschouwen als een contactoppervlak.

## 10.

Terecht zegt BÖGER: „Thatsächlich bringt aber die Einführung der imaginären Punkte (in die Geometrie der Lage) kein Gewinn“.

(BÖGER. Ebene Geometris der Lage.)

## 11.

Voor de praktijk is het wenschelijk, de H.B.S. 5 jarig te laten, en niet 6 jarig te maken.

In tijden van niet zeer groote koersschommelingen in de waarden der effecten is het voor den premiemakelaar, bij verkoopen van een „keur in koper's keuze”, of bij koopen van een „keur in verkooper's keuze” voldoende, als hij in zijn tegenpositie koopt een premie „te leveren of (te ontvangen)” voor  $\frac{7}{20}$  van het aantal stukken, waarover de keur loopt (de vaste stukken dus niet meegerekend).

---















