

Een afbeelding van het cirkelveld op de puntenruimte

<https://hdl.handle.net/1874/273368>

15 Nov. 1920.
1920

H. 4^e 192.

Een afbeelding van het cirkelveld
— op de puntenruimte —



J. SMIT

A. qu.
192

Een afbeelding van het cirkelveld op de
puntenruimte

A. 4^e 192, 1920

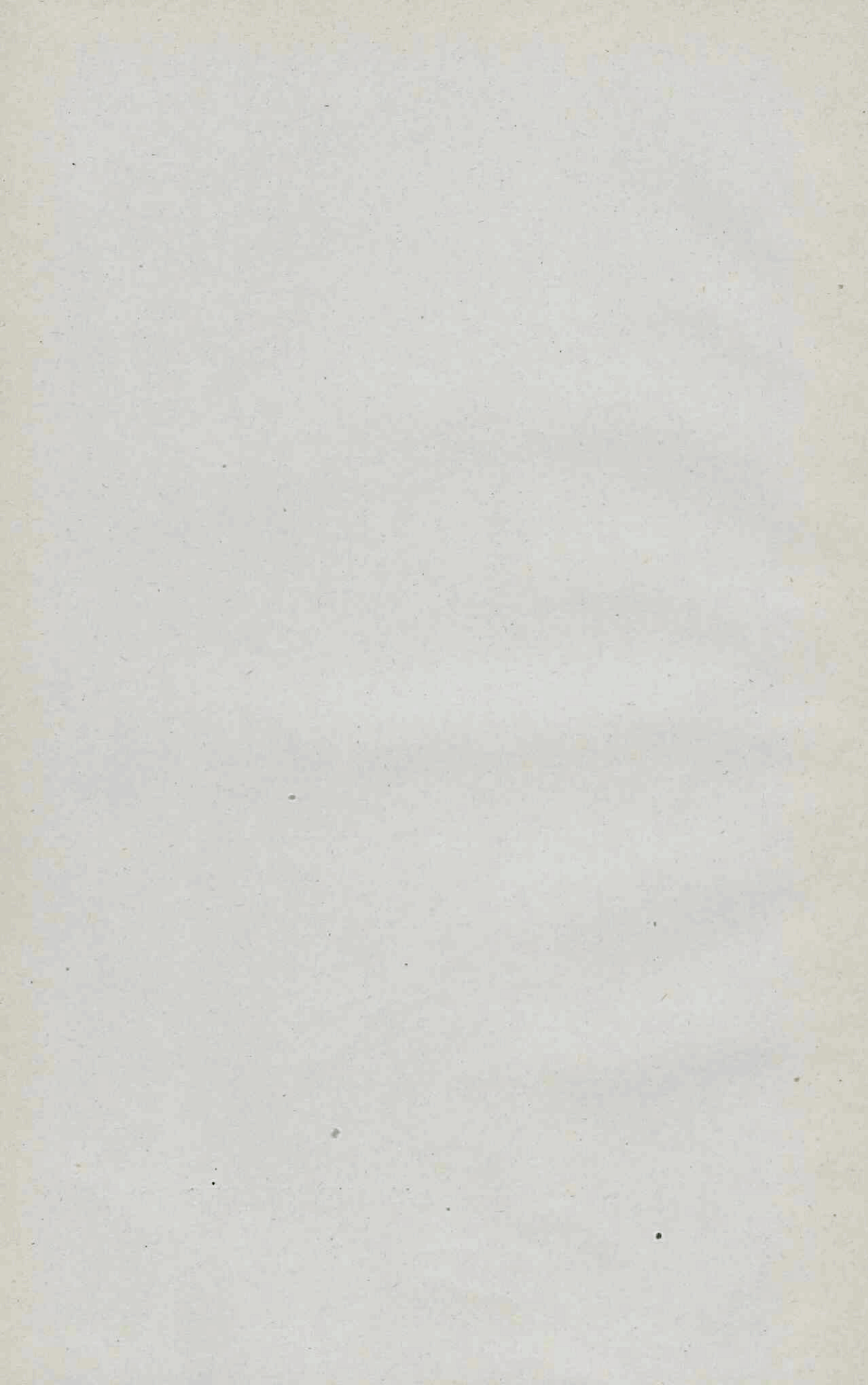
Een afbeelding van het cirkelveld op de puntenruimte

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD
VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUUR-
KUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT
TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN REC-
TOR-MAGNIFICUS DR. W. VOGELSANG,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS
BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVER-
SITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN
DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP **MAANDAG**
15 NOVEMBER 1920, DES NAMIDDAGS TE
4 UUR DOOR **JAN SMIT**, GEBOREN TE
GOUDA :: :: :: :: :: :: :: :: :: :: ::



AAN MIJN OUDERS.



Bij het voltooiën van dit proefschrift is het mij aangenaam U, Hoogleraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, te danken voor het onderwijs, dat ik van U heb ontvangen.

In het bijzonder geldt mijn dank U, Hooggeleerde DE VRIES.

Uw welwillendheid en Uw steun bij het schrijven van dit proefschrift, Hooggeachte Promotor, zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.

Ook aan U, Hooggeleerde KAPTEYN, mijn bijzonderen dank voor de van U ontvangen lessen.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I. Afbeelding van den cirkel, den cirkelbundel en het cirkelnet.	2
„ II. De puntcirkels	5
„ III. Orthogonaal en diametraal snijden van cirkels.	5
„ IV. Soorten van cirkels.	9
„ V. Soorten van cirkelnetten	11
„ VI. Structuur en eigenschappen van de cirkelnetten	12
„ VII. Toegevoegde cirkelbundels en machtlijnen.	16
„ VIII. De pooltetraeders van P_0 en de orthocentrische groep	21
„ IX. De cirkelbundel en de punten- involutie op een rechte	34
„ X. Onderlinge ligging van bundels en netten	37
„ XI. Pool en poollijn	41
„ XII. Harmonische cirkelviertallen, bundels en netten	46
„ XIII. De cirkels, die een gegeven cirkel onder eenzelfde hoek snijden	48
„ XIV. De inversie en de gelijkvormig- heidsnetten.	55
„ XV. De cirkels uit een bundel, die een gegeven cirkel raken of onder een gegeven hoek snijden. ,	65
„ XVI. Het cirkelstelsel met index 2	70
„ XVII. De cirkels, die aan twee gegeven cirkels raken	79

HOOFDSTUK XVIII.	De cirkels, die twee gegeven cirkels onder eenzelfde gegeven hoek snijden	84
„ XIX.	Het raakprobleem van APOLLONIUS	88
„ XX.	De cirkels, die een gegeven cirkel Λ_1 onder een gegeven hoek α_1 en een gegeven cirkel Λ_2 onder een gegeven hoek α_2 snijden .	94
„ XXI.	Het probleem van STEINER . .	97
„ XXII.	De kwadratische cirkelcongruentie	99
„ XXIII.	De kromtecirkels van de parabool	105
„ XXIV.	Conclusie	107
STELLINGEN		110

INLEIDING.

In zijn „Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme“, legt Dr. TH. REYE den bol t. o. van drie onderling loodrechte coördinaatassen vast door de coördinaten van zijn middelpunt en door de macht t. o. van dien bol van den oorsprong van het coördinaten-systeem. Die vier grootheden noemt hij de coördinaten van den bol. De ruimte van vier afmetingen, waarin elk punt een bol afbeeldt, bestudeert hij evenwel niet.

In de Verslagen van de Kon. Akad. v. Wet. XXV, blz. 960, bepaalt Dr. K. W. WALSTRA den cirkel in het platte vlak op overeenkomstige wijze als Dr. REYE den bol in de ruimte. Hij gaat evenwel een stap verder en maakt een begin met de bestudeering van de puntenruimte, die het cirkelveld afbeeldt. De door hem verkregen resultaten zijn in dit proefschrift, dat zich met die afbeelding zal bezighouden, gebruikt.

HOOFDSTUK I.

Afbeelding van den cirkel, den cirkelbundel en het cirkelnet.

§ 1. Een cirkel in het vlak XOY heeft tot vergelijking:

$$a(X^2 + Y^2) - 2bX - 2cY + d = 0$$

of

$$X^2 + Y^2 - 2\frac{b}{a}X - 2\frac{c}{a}Y + \frac{d}{a} = 0$$

Door de grootheden $\frac{b}{a}$ en $\frac{c}{a}$, de coördinaten van zijn middelpunt, en $\frac{d}{a}$, de macht van den oorsprong t. o. van den cirkel, is de cirkel geheel bepaald.

Beschouwt men nu $\frac{b}{a} = x$, $\frac{c}{a} = y$ en $\frac{d}{a} = z$ als coördinaten van een punt, dan wordt dit punt in de ruimte verkregen door in het middelpunt van den cirkel een loodlijn op het vlak XOY op te richten en daarop in de richting van de Z as de z , d. i. de macht van den oorsprong t. o. van den cirkel af te passen.

Het punt $x|y|z$ is nu het *beeldpunt* van den cirkel.

De vergelijking van den cirkel wordt nu:

$$X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + z = 0.$$

De vergelijking van den cirkel is ook te brengen tot den vorm:

$$X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + x^2 + y^2 = r^2.$$

Hierin zijn x en y de coördinaten van het middelpunt en is r de straal van den cirkel.

Uit de beschouwing van die beide vergelijkingen volgt,

dat tusschen de coördinaten van het beeldpunt en den straal van een cirkel de betrekking bestaat:

$$x^2 + y^2 = z + r^2.$$

§ 2. Een cirkelbundel in het vlak $X O Y$ wordt voorgesteld door de vergelijking:

$$(a_1 + \lambda a_2)(X^2 + Y^2) - 2(b_1 + \lambda b_2)X - 2(c_1 + \lambda c_2)Y + d_1 + \lambda d_2 = 0$$

of

$$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 = 0$$

Voor de coördinaten x , y en z van het beeldpunt van een willekeurigen cirkel uit den bundel gelden de betrekkingen:

$$x = \frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

$$y = \frac{c_1 + \lambda c_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

$$z = \frac{d_1 + \lambda d_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

Vervangt men nu $\frac{b_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_1}, \frac{d_1}{a_1}$, door x_1, y_1, z_1 , de coördinaten van het beeldpunt van Γ_1 , en $\frac{b_2}{a_2}, \frac{c_2}{a_2}, \frac{d_2}{a_2}$, door x_2, y_2, z_2 , de coördinaten van het beeldpunt van Γ_2 , dan worden deze betrekkingen:

$$x = \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

$$y = \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

$$z = \frac{a_1 z_1 + \lambda a_2 z_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

Een cirkelbundel wordt afgebeeld door een puntenreeks op de rechte, die gaat door de beeldpunten van de beide cirkels, welke den bundel bepalen.

§ 3. Een cirkelnet in het vlak $X O Y$ wordt voorgesteld door de vergelijking:

$$(a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3)(X^2 + Y^2) - 2(b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3)X - 2(c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3)Y + d_1 + \lambda d_2 + \mu d_3 = 0$$

of

$$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \mu \Gamma_3 = 0$$

Voor de coördinaten x , y en z van het beeldpunt van een willekeurigen cirkel uit het net gelden de betrekkingen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \mu a_3 x_3}{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3} \\ y &= \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2 + \mu a_3 y_3}{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3} \\ z &= \frac{a_1 z_1 + \lambda a_2 z_2 + \mu a_3 z_3}{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3} \end{aligned}$$

Hierin zijn $x_1 | y_1 | z_1$, $x_2 | y_2 | z_2$, $x_3 | y_3 | z_3$ de coördinaten van de beeldpunten van $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

Elimineert men uit die betrekkingen de parameters $\frac{\lambda a_2}{a_1}$ en $\frac{\mu a_3}{a_1}$, dan zal de vergelijking,

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ontstaan uit die eliminatie, gelden voor de beeldpunten van de cirkels van het net.

Een cirkelnet wordt afgebeeld door het puntenveld van een plat vlak, dat gaat door de beeldpunten van de drie cirkels, die dat net bepalen.

Behooren de drie cirkels tot eenzelfde bundel, dan gaat de bovenstaande vergelijking over in een identiteit en wordt het net onbepaald.

HOOFDSTUK II.

De puntcirkels.

In hoofdstuk I is gevonden, dat voor de coördinaten van het beeldpunt en den straal van een cirkel de betrekking geldt:

$$x^2 + y^2 = z + r^2.$$

Voor de coördinaten van de beeldpunten van alle puntcirkels geldt dus:

$$x^2 + y^2 = z.$$

De puntcirkels in het vlak XOY worden afgebeeld door een *omwentelingsparaboloïde*, waarvan de as samenvalt met de Z -as en die raakt aan het vlak XOY in den coördinatenoorsprong.

Die paraboloïde zal voortaan met P_0 worden aangeduid.

HOOFDSTUK III.

Orthogonaal en diametraal snijden van cirkels.

§ 1. Voor twee orthogonaal snijdende cirkels Γ_1 en Γ met middelpunten $x_1 | y_1$, en $x | y$ en stralen r en r_1 geldt:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r_1^2 + r^2$$

Na invoering van de betrekkingen tusschen de coördinaten van het beeldpunt en den straal van den cirkel (hoofdstuk I, § 1) wordt dit

$$2x_1x + 2y_1y = z + z_1.$$

De beeldpunten van twee orthogonaal snijdende cirkels worden door P_0 harmonisch gescheiden.

Beschouwt men $x_1 | y_1 | z_1$ als de coördinaten van een vast punt en $x | y | z$ als loopende coördinaten, dan volgt uit die vergelijking:

1°. *De cirkels, die een gegeven cirkel orthogonaal snijden vormen een net, dat wordt afgebeeld door het poolvlak van het beeldpunt van dien cirkel t. o. van P_0 .*

2°. Een cirkelnet is bepaald door den cirkel, die alle exemplaren van dat net orthogonaal snijdt. (De orthogonaalcirkel van het net).

§ 2. Aangezien elk punt van Γ_1 kan worden beschouwd als een puntcirkel, die Γ_1 orthogonaal snijdt zullen de punten van Γ_1 , of kortweg, zal de omtrek van Γ_1 op P_0 worden afgebeeld door de ellips volgens welke P_0 door het poolvlak van het beeldpunt van Γ_1 wordt gesneden.

De raakkegel aan P_0 met $x_1 | y_1 | z_1$ tot top en de rechte cylinder met Γ_1 tot richtlijn doorsnijden elkaar gedeeltelijk volgens de kromme, die P_0 en het poolvlak van $x_1 | y_1 | z_1$ t. o. van P_0 met elkaar gemeen hebben.

§ 3. Wanneer de cirkel Γ_1 met middelpunt $x_1 | y_1$ en straal r_1 door den cirkel Γ met middelpunt $x | y$ en straal r diametraal wordt gesneden geldt:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2 - r_1^2$$

Na invoering van de coördinaten van de beeldpunten van Γ en Γ_1 (hoofdstuk I, § 1) wordt die betrekking:

$$2 x_1 x + 2 y_1 y - z = 2 x_1^2 + 2 y_1^2 - z_1$$

Bij de substitutie $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ ontstaat een identiteit.

Beschouwt men $x_1 | y_1 | z_1$ als de coördinaten van een vast punt en $x | y | z$ als loopende coördinaten, dan volgt uit die vergelijking:

1°. *De cirkels, die een gegeven cirkel diametraal snijden vormen een net, waartoe die gegeven cirkel zelf behoort.*

2°. Een cirkelnet is bepaald door den cirkel, die door alle exemplaren van dat net diametraal wordt gesneden. (De diametraalcirkel van het net).

De beide netten, waarvan een gegeven cirkel orthogonaalcirkel, resp. diametraalcirkel is, worden wat dadelijk

blijkt uit de boven afgeleide vergelijkingen, door evenwijdige vlakken afgebeeld. Die netten zijn aan elkaar toe te voegen.

Het beeldvlak van het net, waarvoor een gegeven cirkel Γ_1 diametraalcirkel is, wordt dus gevonden als men door het beeldpunt van dien cirkel een vlak aanbrengt evenwijdig met het poolvlak van dat beeldpunt t. o. van P_0 .

§ 4. De voorwaarde, dat Γ_1 door Γ diametraal wordt gesneden,

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2 - r_1^2$$

is ook te schrijven in den vorm:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2 + (ir_1)^2.$$

De voorwaarde, dat Γ_1 door Γ orthogonaal wordt gesneden

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2 + r_1^2$$

is ook te schrijven in den vorm:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2 - (ir_1)^2$$

Hieruit volgt:

1) Een cirkel, die een cirkel met straal r_1 diametraal (orthogonaal) snijdt, snijdt een anderen cirkel met hetzelfde middelpunt en straal ir_1 orthogonaal (diametraal).

2) Orthogonaal- en diametraalcirkel van eenzelfde cirkelnet hebben hetzelfde middelpunt; tusschen hun stralen r^1 en r_1 bestaat de betrekking $r^1 = ir_1$.

§ 5. Zijn van een cirkelnet de coördinaten van het beeldpunt C_1 van zijn diametraalcirkel x_1, y_1, z_1 en de straal r_1 en zijn de coördinaten van het beeldpunt C^1 van zijn orthogonaalcirkel x_1, y_1, z^1 en de straal r^1 , dan gelden de volgende betrekkingen:

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1 + r_1^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = z^1 + r^1^2$$

$$r^1^2 = -r_1^2.$$

Hieruit volgt:

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{z_1 + z^1}{2}.$$

Dit beteekent, dat de vertikale verbindingsrechte van de beeldpunten van den diametraal- en den orthogonaalcirkel van eenzelfde cirkelnet door P_0 wordt middendoorgedeeld. Het snijpunt C_0 van die rechte met P_0 beeldt het gemeenschappelijke middelpunt van die beide cirkels af.

Beschouwt men den orthogonaalcirkel van dit net als diametraalcirkel van een ander net, dan is dat, zooals eerder bleek, het toegevoegde net. Het beeldvlak van dat net gaat dan door het punt C^1 en is evenwijdig aan het beeldvlak van het andere net, dat door het punt C_1 gaat.

De orthogonaalcirkel van het tweede net wordt nu weer gevonden door C^1 te spiegelen t. o. van C_0 . Voor het beeldpunt van dien orthogonaalcirkel wordt dan weer het punt C_1 gevonden.

Het raakvlak in C_0 aan P_0 heeft tot vergelijking:

$$2x_1x + 2y_1y - z = x_1^2 + y_1^2$$

Dit vlak is evenwijdig aan de beeldvlakken van de beide toegevoegde netten.

Vallen van een net orthogonaal- en diametraalcirkel samen dan vallen de beeldpunten C^1 en C_1 samen in C_0 en zijn die beide cirkels tot denzelfden puntcirkel samengekrompen.

Hieruit volgt:

Alle cirkels, die door eenzelfde punt van het vlak XOY gaan, vormen een net, dat wordt afgebeeld door het raakvlak aan P_0 in het beeldpunt van dat punt.

§ 6. Het eindresultaat is dus:

Voor twee *toegevoegde netten* geldt, dat hun beeldvlakken evenwijdig zijn, dat de orthogonaalcirkel (diametraalcirkel) van het eene net diametraalcirkel (orthogonaalcirkel) is van het andere net, dat de verbindingsrechte van de beeldpunten van hun orthogonaalcirkels (diametraalcirkels) loodrecht staat op het vlak XOY , dat die rechte door P_0 wordt middendoorgedeeld, dat het raakvlak

aan P_0 in dat snijpunt evenwijdig loopt aan de beide beeldvlakken en voor die vlakken het middelvlak is, dat dit raakvlak beeldvlak is voor het net van cirkels, die door het gemeenschappelijke middelpunt van de orthogonaal- en de diametraalcirkels gaan.

HOOFDSTUK IV.

Soorten van cirkels.

§ 1. De vergelijking van den cirkel is (hoofdstuk I § 1):

$$a(X^2 + Y^2) - 2bX - 2cY + d = 0,$$

waarbij voor de coördinaten x , y en z van het beeld-

punt geldt: $\frac{b}{a} = x$, $\frac{c}{a} = y$ en $\frac{d}{a} = z$ en waarbij

$$x^2 + y^2 = z + r^2 \text{ is.}$$

De volgende gevallen doen zich voor:

1°. x en y reëel, r reëel. Het beeldpunt ligt op een met P_0 congruente paraboloid met vergelijking:

$$x^2 + y^2 = z + r^2, \text{ buiten } P_0.$$

2°. x en y reëel, r imaginair. Het beeldpunt ligt op een met P_0 congruente paraboloid met vergelijking:

$$x^2 + y^2 = z + r^2, \text{ binnen } P_0.$$

3°. x en (of) y imaginair. Het beeldpunt is een imaginair punt van de ruimte.

Uit de beschouwing van 1°. en 2°. volgt, in verband met hoofdstuk III, dat wanneer bij een net de orthogonaal- en diametraalcirkel niet samenvallen, noodzakelijk een van beide een imaginair straal moet hebben.

Bijzondere gevallen:

1°. Voor $a = 0$ ontgaat de cirkel in een rechte.

Het beeldpunt $x|y|z$ van die rechte wordt het oneindig verre punt van de rechte:

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{d}$$

Uit hoofdstuk III, § 5, laatste alinea, volgt, dat het beeldpunt van die rechte ligt in alle raakvlakken aan P_0 in de beelden van de punten van die rechte, d. w. z. in alle raakvlakken aan P_0 in de punten van de parabool, welke het vlak door die rechte, loodrecht op het vlak $X O Y$, uit P_0 snijdt. Het beeldpunt van die rechte is dus het oneindig verre punt van de snijlijn van twee van die raakvlakken. Die raakvlakken omhullen een parabolischen raakcylinder aan P_0 , waarvan de bovengenoemde parabool de richtlijn is en waarvan de beschrijvende lijnen dus evenwijdig loopen aan de rechten, waarvoor het vlak door die parabool t.o. van P_0 het middenvlak is.

Daar ook de snijlijn van twee van die raakvlakken evenwijdig is aan de beschrijvende lijnen van dien cylinder volgt hieruit:

Het beeldpunt van een rechte r is het gemeenschappelijk snijpunt van het oneindig verre vlak met alle rechten, waarvoor het vlak door r loodrecht op het vlak $X O Y$ t.o. van P_0 het middenvlak is.

Hieruit volgt:

De rechten van een stralenbundel worden afgebeeld door de punten van de oneindig verre rechte gelegen in het raakvlak aan P_0 in het beeldpunt van den top van den stralenbundel.

2°. Voor a, b, c eindig en $d \infty$ groot, worden z en $r \infty$ groot en ontgaat de cirkel in de oneindig verre rechte in het vlak $X O Y$.

Het beeldpunt van de oneindig verre rechte is het gemeenschappelijke snijpunt van alle normalen op het vlak $X O Y$ met het oneindig verre vlak.

Het beeldpunt van de oneindig verre rechte is dus het punt, waarin P_0 aan het oneindig vlak raakt.

HOOFDSTUK V.

Soorten van cirkelnetten.

Een cirkelnet is bepaald door zijn orthogonaal- of zijn diametraalcirkel (hoofdstuk III).

De indeeling van de cirkelnetten valt dus samen met die van de cirkels.

De volgende gevallen doen zich voor:

1°. Het beeldpunt van den orthogonaalcirkel ligt buiten P_0 . Het beeldvlak van het net, het poolvlak van het beeldpunt t.o. van P_0 , snijdt P_0 . De diametraalcirkel heeft een imaginairen straal. Dit net, met reëlen orthogonaalcirkel, heet het *hyperbolische net*.

2°. Het beeldpunt van den orthogonaalcirkel ligt binnen P_0 . Het beeldvlak van het net snijdt P_0 niet.

De orthogonaalcirkel heeft een imaginairen straal. Dit net, met reëlen diametraalcirkel, heet het *elliptische net*.

3°. De beeldpunten van den orthogonaal- en den diametraalcirkel van het net zijn samengevallen in een punt van P_0 .

Het beeldvlak van het net raakt in dat punt aan P_0 . Dit net, waarbij de orthogonaal- en de diametraalcirkel tot eenzelfde punt zijn samengekrompen, heet het *parabolische net*.

4°. De beeldpunten van orthogonaal- en diametraalcirkel zijn imaginair.

Dit net, dat wordt afgebeeld door een imaginair vlak, is een imaginair net.

Bijzondere gevallen:

1°. Het beeldpunt van den orthogonaalcirkel ligt in het oneindig verre vlak.

De orthogonaalcirkel wordt tot een orthogonaalrechte. Alle cirkels van het net hebben hun middelpunt op die rechte.

Het beeldvlak van dit hyperbolische net gaat door de

orthogonaalrechte en staat loodrecht op het vlak XOY .

2°. De beeldpunten van orthogonaal- en diametraalcirkel van het net zijn samengevallen in het punt, waarin P_0 aan het oneindige verre vlak raakt.

De oneindig verre rechte in het vlak XOY moet worden beschouwd als een puntcirkel, die zoowel orthogonaal- als diametraalcirkel is van dit parabolische net.

Het net bestaat uit alle rechten van het vlak XOY . Het beeldvlak van dit net is het oneindig verre vlak.

HOOFDSTUK VI.

Structuur en eigenschappen van de cirkelnetten.

§ 1. Bij een hyperbolisch net is de orthogonaalcirkel de projectie op het vlak XOY van de doorsnede van het beeldvlak van dat net met P_0 (hoofdstuk III).

De punten van den orthogonaalcirkel zijn de puntcirkels van het net.

Het beeldvlak van het net en het raakvlak aan P_0 in het beeld van het middelpunt van den orthogonaalcirkel loopen evenwijdig (hoofdstuk III) en snijden uit het oneindig verre vlak een rechte, waarvan de punten den stralenbundel door het middelpunt van den orthogonaalcirkel afbeelden (hoofdstuk IV).

De rechten van het net vormen een stralenbundel, die tot top heeft het middelpunt van den orthogonaalcirkel. Zijn de coördinaten van het beeldpunt van den orthogonaalcirkel x_1, y_1, z_1 en is de straal r_1 , dan is, (hoofdstuk III) de vergelijking van het beeldvlak van het net: $2x x_1 + 2y y_1 = z + z_1$, waarbij $x_1^2 + y_1^2 = z_1 + r_1^2$. Doorsnijdt men de parabolöide, die tot vergelijking heeft: $x^2 + y^2 = z + r^2$, met dit beeldvlak, dan is de vergelijking van de projectie van de snijkromme op het vlak XOY :

$$x^2 + y^2 = 2x x_1 + 2y y_1 - z_1 + r^2$$

of

$$x^2 + y^2 - 2x_1 x - 2y_1 y + x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - z_1 + r^2 = r_1^2 + r^2.$$

De middelpunten van de cirkels uit een hyperbolisch net, die denzelfden straal r hebben, liggen op een cirkel, concentrisch met den orthogonaalcirkel, en met een straal $\sqrt{r_1^2 + r^2}$.

De vergelijking van een willekeurigen cirkel in het vlak $X O Y$ was (hoofdstuk I):

$$X^2 + Y^2 - 2x X - 2y Y + z = 0.$$

Voor de cirkels uit het net geldt:

$$2x x_1 + 2y y_1 = z + z_1$$

De vergelijking van een cirkel uit het net is nu:

$$X^2 + Y^2 - 2x X - 2y Y + 2x x_1 + 2y y_1 - z_1 = 0.$$

Iedere substitutie voor x en y bepaalt een cirkel uit het net.

De macht van een willekeurig punt van het vlak $X O Y$ t. o. van dien cirkel hangt af van x en y en is dus verschillend voor alle cirkels van het net.

Schrijft men de vergelijking van dien cirkel in den vorm:

$$X^2 + Y^2 - 2x(X - x_1) - 2y(Y - y_1) - z_1 = 0,$$

dan blijkt, dat alleen de substitutie $X = x_1$, $Y = y_1$, het linkerlid een waarde geeft, onafhankelijk van x en y .

Voor die substitutie wordt het linkerlid:

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1 \text{ d. i. } r_1^2.$$

Bij een hyperbolisch net bestaat er één punt, waarvan de macht t. o. van alle cirkels van dat net even groot is, het middelpunt van den orthogonaalcirkel. Die macht is positief en gelijk aan het kwadraat van den straal van den orthogonaalcirkel.

§ 2. De rechten uit het beeldvlak snijden of raken P_0 , of liggen er buiten.

De cirkelbundels van een hyperbolisch net hebben

twee reële, twee samenvallende of twee imaginaire puntcirkels.

§ 3. Voor het parabolische net wordt, op geheel dezelfde wijze als voor het hyperbolische net, afgeleid, dat de rechten van het net een stralenbundel vormen met het vaste punt tot top, dat de middelpunten van de cirkels met gelijken straal r op een cirkel liggen met straal r en met het vaste punt tot middelpunt, dat er één punt is, het vaste punt, waarvan de macht t. o. van alle cirkels van het net gelijk en wel nul is en dat de bundels van het net of twee samenvallende of twee imaginaire puntcirkels hebben.

Voor het elliptische net geldt, dat zijn rechten een stralenbundel vormen met het middelpunt van den diametraalcirkel tot top, dat de middelpunten van de cirkels met gelijken straal r op een cirkel liggen concentrisch met den diametraalcirkel, dat de straal van dien cirkel is $\sqrt{r^2 - r_1^2}$, waarbij r_1 is de straal van den diametraalcirkel, dat er één punt is waarvan de macht t. o. van alle cirkels van het net even groot is en wel $-r_1^2$, het middelpunt van den diametraalcirkel, en dat de bundels van het net elk twee imaginaire puntcirkels hebben.

§ 4. De beelden van den orthogonaalcirkel en den imaginair diametraalcirkel van een hyperbolisch net liggen op een rechte loodrecht op het vlak XOY , die middendoorgedeeld wordt door P_0 in het punt, dat het gemeenschappelijke middelpunt van de beide cirkels afbeeldt (hoofdstuk III). Het beeld van den imaginair diametraalcirkel is het middelpunt van de ellips door het beeldvlak van het net uit P_0 gesneden.

Zijn x_1, y_1, z_1 de coördinaten van het beeld van den orthogonaalcirkel met straal r_1 , dan zijn de coördinaten van de beelden van zijn middelpunt en den imaginair diametraalcirkel resp. (hoofdstuk III):

$$x_1 | y_1 | x_1^2 + y_1^2$$

en

$$x_1 | y_1 | 2 x_1^2 + 2 y_1^2 - z_1$$

Na invoering van de betrekking $x_1^2 + y_1^2 = z_1 + r_1^2$ zijn de coördinaten van het beeldpunt van den diametraalcirkel ook te schrijven als:

$$x_1 | y_1 | x_1^2 + y_1^2 + r_1^2.$$

Dit punt ligt op de paraboloid, die tot vergelijking heeft:

$$x^2 + y^2 = z - r_1^2.$$

Het raakvlak aan die paraboloid in dat punt heeft tot vergelijking:

$$x x_1 + y y_1 = \frac{z + x_1^2 + y_1^2 + r_1^2}{2} - r_1^2$$

of

$$2 x x_1 + 2 y y_1 = z + z_1$$

Het raakvlak is identiek met het beeldvlak van het net.

De beeldvlakken van de hyperbolische netten met orthogonaalcirkels met gelijken straal r_1 omhullen de met P_0 congruente paraboloid, die tot vergelijking heeft:

$$x^2 + y^2 = z - r_1^2$$

en raken die paraboloid aan in de beeldpunten van de imaginaire diametraalcirkels van die netten.

Op overeenkomstige wijze wordt gevonden, dat de beeldvlakken van de elliptische netten met diametraalcirkels met gelijken straal r_1 , de paraboloid omhullen, die tot vergelijking heeft:

$$x^2 + y^2 = z + r_1^2$$

en dat die beeldvlakken de paraboloid aanraken in de beeldpunten van de diametraalcirkels van die netten. Elke rechte in het beeldvlak van het elliptische net, die gaat door het beeldpunt van den diametraalcirkel, heeft met de paraboloid: $x^2 + y^2 = z + r_1^2$ twee samen vallende punten gemeen.

In elken cirkelbundel van het elliptische net, die den diametraalcirkel bevat, moet die cirkel als tweevoudig worden beschouwd.

HOOFDSTUK VII.

Toegevoegde cirkelbundels en machtlijnen.

§ 1. De cirkels door een punt in het vlak XOY worden afgebeeld door de punten van het raakvlak aan P_0 in het beeld van dat punt (hoofdstuk III).

De cirkels door twee vaste punten in het vlak XOY worden afgebeeld door de gemeenschappelijke rechte van de beide raakvlakken aan P_0 in de beelden van die punten.

Die cirkels vormen een bundel met twee imaginaire puntcirkels. (*Elliptische bundel*).

De verbindingsrechte van de beelden der beide vaste punten beeldt een cirkelbundel af, die de basispunten van den elliptischen bundel tot puntcirkels heeft. (*Hyperbolische bundel*).

Deze beide bundels zijn aan elkaar toe te voegen. Zijn de coördinaten van het beeldpunt van het eene vaste punt $x_1 | y_1 | z_1$ en die van het andere $x_2 | y_2 | z_2$, dan zijn de vergelijkingen van de beeldrechte van den elliptischen bundel:

$$x_1 x + y_1 y = \frac{z + z_1}{2}$$

en

$$x_2 x + y_2 y = \frac{z + z_2}{2}$$

De projectie van die beeldrechte op het vlak XOY , de centraal van den elliptischen bundel, heeft tot vergelijking:

$$(x_1 - x_2) x + (y_1 - y_2) y = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

Na invoering van de betrekkingen:

$$z_1 = x_1^2 + y_1^2 \text{ en } z_2 = x_2^2 + y_2^2$$

wordt dit:

$$(x_1 - x_2) x + (y_1 - y_2) y = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2}$$

De centraal van den hyperbolischen bundel heeft tot vergelijking:

$$(x_1 - x_2)(y - y_1) - (y_1 - y_2)(x - x_1) = 0.$$

De centralen van de beide toegevoegde bundels snijden elkaar loodrecht in een punt, dat tot coördinaten heeft $\frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2}$. Dit punt ligt in het midden tusschen de beide puntcirkels of de beide vaste punten.

§ 2. De beeldrechten van twee toegevoegde bundels zijn t. o. van P_0 toegevoegde poollijnen.

Hieruit volgt:

1°. Elke cirkel van den eenen bundel snijdt alle cirkels van den anderen bundel orthogonaal.

Het middelpunt van elken cirkel van den eenen bundel heeft dus (hoofdstuk VI) dezelfde macht t. o. van alle cirkels van den anderen.

Elk van de beide centralen van twee toegevoegde bundels is machtlijn voor den anderen bundel.

De machtlijn van een hyperbolischen bundel deelt de verbindingslijn van de puntcirkels van dien bundel loodrecht middendoor; de machtlijn van een elliptischen bundel gaat door zijn basispunten.

2°. De vlakken door elk van de beide beeldrechten van twee toegevoegde bundels, loodrecht op het vlak XOY , zijn middelvlakken t. o. van P_0 voor de koorden evenwijdig aan de andere beeldrechte.

De snijlijn van elk van de beide verticale vlakken met het vlak XOY wordt afgebeeld door het gemeenschappelijke snijpunt van het oneindig verre vlak met de rechten evenwijdig aan de beeldrechte van den bundel, in het andere verticale vlak gelegen (hoofdstuk IV), d. w. z. de machtlijn van een cirkelbundel wordt afgebeeld door het gemeenschappelijke snijpunt van het oneindig verre vlak met de rechten evenwijdig aan de beeldrechte van den bundel.

De machtlijn van een cirkelbundel is de eenige tot

dien bundel behoorende cirkel, die in een rechte is ontaard.

Alle cirkelbundels door evenwijdige rechten afgebeeld hebben een gemeenschappelijke machtlijn.

§ 3. Het snijpunt van de centralen der beide toegevoegde bundels, het punt met coördinaten $\frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2}$, is de projectie van de beelden van twee cirkels, die elk tot een van die bundels behooren.

Die beeldpunten worden door P_0 harmonisch gescheiden en bijgevolg wordt hun verbindingsrechte, een loodlijn op het vlak XOY , door P_0 middendoorgedeeld.

Beschouwt men die punten als beelden van orthogonaalcirkels van toegevoegde netten (hoofdstuk III), dan liggen de beeldrechten van die beide toegevoegde bundels elk in een beeldvlak van een van die beide netten en is het raakvlak aan P_0 evenwijdig aan die beide beeldrechten.

Voor twee toegevoegde netten is er slechts één cirkel met reëlen straal, die voor het eene net als orthogonaalcirkel en voor het andere als diametraalcirkel optreedt.

Aangezien er slechts één paar toegevoegde netten bestaat, waartoe die toegevoegde bundels behooren, volgt hieruit, dat er slechts één cirkel is met reëlen straal, die orthogonaalcirkel is voor een hyperbolischen en diametraalcirkel voor den toegevoegden elliptischen bundel.

Die cirkel, met middelpunt $\frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2}$, behoort tot den elliptischen bundel en gaat door de beide punten met coördinaten $x_1 \mid y_1$ en $x_2 \mid y_2$.

Het middelpunt van dien cirkel is in elk van beide bundels als het middelpunt van den bundel te beschouwen.

Aangezien iedere bundel tot één net behoort, waarvan de orthogonaalcirkel (diametraalcirkel) met zijn orthogonaalcirkel (diametraalcirkel) samenvalt, vormen zijn cirkels met gelijken straal paren, waarvan de middelpunten

symmetrisch liggen t. o. van zijn middelpunt (hoofdstuk VI). In den elliptischen bundel is die diametraalcirkel voor twee te tellen (hoofdstuk VI).

Een cirkelbundel is dus geheel bepaald door zijn beide basispunten of door zijn beide puntcirkels.

§ 4. Raakt de beeldrechte van een bundel aan P_0 , dan zal ook de beeldrechte van den toegevoegden bundel in hetzelfde punt aan P_0 raken.

In beide bundels zijn de beide vaste punten (puntcirkels) vereenigd. (Toegevoegde parabolische bundels).

Alle cirkels van den eenen bundel snijden alle cirkels van den toegevoegden bundel orthogonaal in de projectie op het vlak XOY van het gemeenschappelijke raakpunt van de beide beeldrechten.

Alle cirkels van een parabolischen bundel raken in hetzelfde punt aan dezelfde raaklijn.

Omgekeerd bepalen twee rakende cirkels een bundel, die wordt afgebeeld door een aan P_0 rakende rechte.

Hieruit volgt, dat de cirkels, die een gegeven cirkel aanraken, worden afgebeeld door de punten van den raakkegel aan P_0 , die het beeldpunt van den cirkel tot top heeft.

De snijkromme van dien raakkegel met het oneindig verre vlak beeldt het raaklijnenstelsel van den cirkel af. Ontaardt de cirkel in een puntcirkel, dan ontaardt de raakkegel in het raakvlak aan P_0 in het beeld van dat punt en ontaardt de cirkel in een rechte, dan ontaardt de raakkegel in den raakeylinder aan P_0 , waarvan de richtlijn de parabool is, welke P_0 gemeen heeft met het vlak door die rechte loodrecht op het vlak XOY en waarvan de beschrijvende lijn de richting heeft van de koorden, waarvoor dat vertikale vlak t. o. van P_0 het middelvlak is.

§ 5. Bijzondere toegevoegde bundels:

1°. Staat de beeldrechte van een bundel loodrecht

op het vlak XOY , dan valt een van zijn snijpunten met P_0 samen met het punt, waarin het oneindig verre vlak aan P_0 raakt. De beeldrechte van den toegevoegden bundel is dus de snijlijn van het raakvlak aan P_0 in het andere snijpunt met het oneindig verre vlak.

De eene bundel is een bundel concentrische cirkels, welke het snijpunt van de vertikale beeldrechte met het vlak XOY tot middelpunt heeft. Die bundel is hyperbolisch. De puntcirkels zijn het gemeenschappelijk middelpunt van de concentrische cirkels en de oneindig verre rechte in het vlak XOY .

De toegevoegde bundel is een stralenbundel met het middelpunt van de concentrische cirkels tot top.

Die bundel is elliptisch.

De basispunten zijn de top van den stralenbundel en de als een punt beschouwde oneindig verre rechte in het vlak XOY .

2°. Raakt de beeldrechte van een bundel aan P_0 in hetzelfde punt, waarin P_0 het oneindig verre vlak aanraakt, dan raakt ook de beeldrechte van den toegevoegden bundel aan P_0 in datzelfde punt.

Elk van de beide toegevoegde parabolische bundels bestaat uit een bundel evenwijdige rechten in het vlak XOY . De beide bundels snijden elkaar loodrecht. Voor elk van beide bundels is de oneindig verre rechte in het vlak XOY tweemaal als puntcirkel of tweemaal als vast punt te beschouwen.

§ 6. Beschouwt men een rechte als den drager van punten, die orthogonaalcirkels van netten afbeelden, dan hebben de beeldvlakken van die netten de poollijn van die rechte t. o. van P_0 gemeen. Die netten hebben dus den bundel gemeen toegevoegd aan den bundel van hun orthogonaalcirkels. Die netten vormen een netbundel. De gemeenschappelijke bundel van twee hyperbolische netten, gegeven door hun orthogonaalcirkels, is de bundel toegevoegd aan den bundel bepaald door die beide

orthogonaalcirkels. Snijden die orthogonaalcirkels elkaar, dan is de gemeenschappelijke bundel hyperbolisch, raken ze elkaar, parabolisch en liggen ze buiten elkaar, elliptisch.

HOOFDSTUK VIII.

De pooltetraeders van P_0 en de orthocentrische groep.

§ 1. De hoekpunten van elk der ∞^6 pooltetraeders van P_0 beelden vier elkaar orthogonaal snijdende cirkels af. Een van de hoekpunten ligt altijd binnen P_0 ; een van de vier cirkels heeft altijd een imaginair straal. Twee overstaande ribben van een pooltetraeder beelden toegevoegde bundels af; zij worden op het vlak XOY geprojecteerd als elkaar loodrecht snijdende rechten (hoofdstuk VII).

Hoekpunten en ribben van een pooltetraeder worden op het vlak XOY geprojecteerd als een volledige vierhoek met zijn zes zijden. Die zes zijden zijn te rangschikken in drie paar elkaar orthogonaal snijdende rechten.

Het middelpunt van elk van vier onderling orthogonaal snijdende cirkels is het hoogtepunt van den driehoek, die de middelpunten van de drie andere cirkels tot hoekpunten heeft.

De eigenschap, dat drie elkaar orthogonaal snijdende cirkels één cirkel bepalen, die die drie orthogonaal snijdt en dat die vier onderling orthogonaal snijdende cirkels gelijkwaardig zijn, omvat de eigenschap, dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan en dat in de orthocentrische groep, die ontstaat uit de drie hoekpunten en het hoogtepunt van den driehoek die vier punten gelijkwaardig zijn, m. a. w. dat elk van die vier punten het hoogtepunt is van den driehoek bepaald door de andere drie.

§ 2. Een hoekpunt van een pooltetraeder is pool van het overstaande zijvlak; de loodlijn op het vlak XOY door dat punt snijdt P_0 in een punt, dat in het midden ligt tusschen het hoekpunt en haar snijpunt met het zijvlak (hoofdstuk III). Het raakvlak aan P_0 in dat deelpunt loopt evenwijdig met het zijvlak (hoofdstuk III).

De raakvlakken aan P_0 in haar snijpunten met de rechten, loodrecht op het vlak XOY door de hoekpunten A_1, A_2, A_3, A_4 van een pooltetraeder getrokken, bepalen een tetraeder met hoekpunten B_1, B_2, B_3, B_4 , waarvan de zijvlakken evenwijdig zijn met die van den pooltetraeder.

Elk zijvlak van dien raaktetraeder is middelvlak voor een hoekpunt en het overstaande zijvlak van den pooltetraeder. Die raaktetraeder is, wat blijkt na een eenvoudige stereometrische beschouwing, symmetrisch met den pooltetraeder. Elke ribbe van den eenen tetraeder wordt door een ribbe van den anderen tetraeder midden-doorgedeeld.

Het hoekpunt B_1 van den raaktetraeder wordt uit den pooltetraeder gevonden door het midden van $A_1 A_4$ te spiegelen t. o. van het midden van de verbindingsrechte van de middens van $A_2 A_4$ en $A_3 A_4$.

Zijn de coördinaten van A_1 , resp. A_2 , enz., $x_1 | y_1 | z_1$, resp. $x_2 | y_2 | z_2$, enz., dan wordt voor den x -coördinaat van het punt B_1 gevonden:

$$\frac{x_2 + x_4}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2}$$

De coördinaten van het punt B_1 zijn dus:

$$\frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2} \quad \left| \quad \frac{y_2 + y_3 + y_4 - y_1}{2} \quad \left| \quad \frac{z_2 + z_3 + z_4 - z_1}{2} \right. \right.$$

Door kringverwisseling zijn nu dadelijk de coördinaten van de punten B_2, B_3 en B_4 op te schrijven.

De x -coördinaat van het zwaartepunt Z van den raaktetraeder is:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2} + \frac{x_3 + x_4 + x_1 - x_2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{x_4 + x_1 + x_2 - x_3}{2} + \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{2} \right) = \\ = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

De coördinaten van dat punt Z zijn dus:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad \left| \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \quad \left| \quad \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \right. \right.$$

Raak- en pooltetraeder hebben hetzelfde zwaartepunt. Het punt in het midden gelegen tusschen een punt A_1 en een punt B_1 heeft tot x -coördinaat:

$$\frac{x_1 + \frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

De coördinaten van dat punt zijn dezelfde als die van het punt Z. Voor elk van de beide tetraeders geldt, dat door spiegeling van zijn hoekpunten t. o. van zijn zwaartepunt de hoekpunten van den anderen tetraeder zijn te bepalen.

§ 3. De hoekpunten A van den pooltetraeder worden op het vlak XOY in de punten A^p van een orthocentrische groep geprojecteerd.

De ribben van de beide tetraeders loopen twee aan twee evenwijdig. De hoekpunten van den raaktetraeder worden dus eveneens in een orthocentrische groep geprojecteerd. Elk van de zes verbindingsrechten van twee van die punten B^p is evenwijdig aan een van de zes verbindingsrechten van twee van die punten A^p .

Uit de symmetrische ligging van de beide tetraeders volgt bovendien, dat die twee orthocentrische groepen congruent zijn.

Beide groepen hebben hetzelfde zwaartepunt met coördinaten $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) | \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

Elk punt van de eene groep wordt uit het toegevoegde

punt van de andere groep verkregen door dat punt t. o. van het zwaartepunt van zijn groep te spiegelen.

De ribben $A_1 A_2$ en $A_3 A_4$ zijn t. o. van P_0 toegevoegde poollijnen, de ribben $A_1 A_2$ en $B_3 B_4$ deelen elkaar middendoor, de ribben $A_3 A_4$ en $B_3 B_4$ loopen evenwijdig.

Toegevoegde poollijnen worden op het vlak XOY als loodrecht snijdende rechten geprojecteerd (hoofdstuk VII).

Hieruit volgt, dat $A_1^p A_2^p$ en $B_3^p B_4^p$ elkaar loodrecht middendoordeelen.

Elk van de zes zijden van den volledige vierhoek, bepaald door de punten van een orthocentrische groep, wordt door een zijde van den volledige vierhoek, bepaald door de toegevoegde orthocentrische groep, loodrecht middendoorgedeeld of m. a. w.:

Elk punt van een orthocentrische groep wordt door spiegeling t. o. van de drie verbindingsrechten van de niet aan dat punt toegevoegde punten van de toegevoegde orthocentrische groep in de drie andere punten van zijn groep omgezet.

§ 4. De punten van een orthocentrische groep fungeren als de projecties van de hoekpunten van slechts één pooltetraeder.

De punten A^p bepalen op ondubbelzinnige wijze één tetraeder met hoekpunten B , die aan P_0 raakt in de beeldpunten van die punten. Uit dien tetraeder wordt dan door spiegeling van de hoekpunten t. o. van het zwaartepunt de pooltetraeder A verkregen. De punten B worden geprojecteerd in de punten B^p , de toegevoegde orthocentrische groep van die van de punten A^p ; de punten A worden geprojecteerd in de punten A^p .

De orthocentrische groep van de punten A^p is onwrikbaar verbonden aan den raaktetraeder met hoekpunten B en den pooltetraeder met hoekpunten A .

Uit de gelijkwaardigheid van de beide orthocentrische groepen A^p en B^p volgt nu, dat bij de punten B^p een

raaktetraeder behoort met hoekpunten C en een pool-tetraeder met hoekpunten D. De punten C worden op het vlak XOY geprojecteerd in de punten A^p , de punten D in de punten B^p .

Beschouwt men nu de punten A, B, C en D als beeldpunten van cirkels, dan beelden de punten A resp. D, vier onderling orthogonaal snijdende cirkels af met hun middelpunten in de punten A^p , resp. B^p , en de punten B, resp. C, vier cirkels beschreven om telkens drie punten van de orthocentrische groep van de punten A^p , resp. B^p . Immers het punt B_1 is gelegen in drie vlakken, die aan P_0 raken in de beelden van de punten A_2^p , A_3^p , A_4^p en bijgevolg het beeldpunt van den cirkel door die drie punten (hoofdstuk III). Het punt B_1^p is het middelpunt van dien cirkel.

§ 5. De acht punten B en C beelden cirkels met gelijke stralen af.

Bewijs: De ribben $A_1 A_2$ en $A_3 A_4$ zijn toegevoegde poollijnen, $A_1^p A_2^p$ is dus de machtlijn van den bundel afgebeeld door $A_3 A_4$ (hoofdstuk VII). $B_3 B_4$ is evenwijdig met $A_3 A_4$. De bundel afgebeeld door $B_3 B_4$ heeft dus ook $A_1^p A_2^p$ tot machtlijn (hoofdstuk VII).

Eerder is reeds gebleken, dat $A_1^p A_2^p$ en $B_3^p B_4^p$ elkaar loodrecht middendoordeelen.

De middelpunten van de cirkels met beeldpunten B_3 en B_4 liggen dus symmetrisch t. o. van de machtlijn van den bundel, waartoe zij behooren. De cirkels met beeldpunten B_3 en B_4 hebben denzelfden straal. Bijgevolg ook de cirkels met beeldpunten B_1 en B_2 .

De cirkels met beeldpunten C hebben dan ook alle vier denzelfden straal.

Uit de congruentie van de beide orthocentrische groepen volgt dadelijk, dat de stralen van de cirkels met beeldpunten B gelijk zijn aan die van de cirkels met beeldpunten C.

§ 6. Twee cirkels met gelijke stralen worden door hun machtlijn in elkaar gespiegeld.

De cirkels met beeldpunten B_2 , B_3 en B_4 worden respectievelijk door de machtlijnen $A_3^p A_4^p$, $A_4^p A_2^p$, $A_2^p A_3^p$ in den cirkel met beeldpunt B_1 gespiegeld. De cirkels met beeldpunten B_2 , B_3 en B_4 hebben het punt A_1^p gemeen. Dit punt wordt dus door die machtlijnen gespiegeld op den omgeschreven cirkel van de punten A_2^p , A_3^p , A_4^p , den cirkel met middelpunt B_1^p .

§ 7. Het resultaat is dus:

De middelpunten van de cirkels om telkens drie punten van een orthocentrische groep beschreven vormen weer een orthocentrische groep. De middelpunten van de cirkels om telkens drie punten van die tweede groep beschreven vormen weer de eerste groep.

De stralen van die acht omgeschreven cirkels zijn even groot. De beide orthocentrische groepen zijn congruent.

Elke verbindingsrechte van twee punten van de eene groep is evenwijdig aan een verbindingsrechte van twee punten van de andere groep van dezelfde lengte.

De beide orthocentrische groepen hebben hetzelfde zwaartepunt. Elk punt van de eene groep wordt door dat zwaartepunt in het toegevoegde punt van de andere groep gespiegeld. Elk punt van een orthocentrische groep wordt door de verbindingsrechten van de drie niet aan dat punt toegevoegde punten van de andere groep in de drie overige punten van zijn groep gespiegeld.

Elk punt van een orthocentrische groep wordt door de verbindingsrechten van de overige drie punten van zijn groep gespiegeld in drie punten, op een cirkel gelegen, waarvan het toegevoegde punt van de andere groep het middelpunt is.

Voor den driehoek luidt deze laatste stelling:

Het hoogtepunt van den driehoek wordt door de zijden van den driehoek gespiegeld in drie punten van den omgeschreven cirkel van dien driehoek.

§ 8. Een orthocentrische groep van punten A^p bepaalt, zooals boven bleek, op één manier een raaktetraeder met hoekpunten B. Die raaktetraeder bepaalt weer op één manier een pooltetraeder met hoekpunten A, die in de punten A^p op het vlak XOY worden geprojecteerd.

Die orthocentrische groep bepaalt ook weer op één manier de orthocentrische groep van de punten B^p . Uit die groep wordt weer op één manier een raaktetraeder verkregen met hoekpunten C, die in de punten A^p op het vlak XOY worden geprojecteerd.

Hieruit volgt:

De punten van een orthocentrische groep zijn middelpunten van slechts één stel van vier elkaar orthogonaal snijdende cirkels en van slechts één stel van vier cirkels met gelijke stralen, beschreven om telkens drie punten van een andere orthocentrische groep.

Aangezien een orthocentrische groep reeds door drie van zijn punten is bepaald, volgt hieruit, dat de beide stellen cirkels door drie van hun middelpunten volkomen zijn bepaald.

Van vier elkaar orthogonaal snijdende cirkels is dus de straal van den vierden cirkel uit die van de drie andere cirkels af te leiden.

Die betrekking, hier niet afgeleid, is:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = 0.$$

Voor de cirkels van het tweede stel geldt, dat ze telkens met drieën een punt van een orthocentrische groep gemeen hebben. Zijn die vier cirkels nu door drie van hun middelpunten gegeven, dan is het gemeenschappelijke punt van de drie cirkels, welke die drie punten tot middelpunten hebben, het middelpunt van den cirkel beschreven om die drie punten.

Omgekeerd volgt hieruit, dat drie cirkels met gelijke stralen, die door een punt gaan, nog drie snijpunten hebben, die met dat punt een orthocentrische groep vormen.

§ 9. De beeldpunten van drie onderling orthogonaal snijdende cirkels bepalen het beeldpunt van den bijbehorenden vierden cirkel als de pool van het door die drie punten bepaalde vlak.

De beeldpunten van drie cirkels met gelijke stralen door één punt, die dus in één raakvlak aan P_0 liggen, bepalen het beeldpunt van den vierden bijbehorenden cirkel als het gemeenschappelijk snijpunt van de drie andere raakvlakken, telkens door twee van die punten aan P_0 aan te brengen.

§ 10. De straal R van de cirkels met beeldpunten B en C is te bepalen uit de oude betrekking tusschen coördinaten en straal van den cirkel door een van die punten afgebeeld.

Voor het punt B_1 b.v. geldt:

$$\left(\frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_3 + y_4 - y_1}{2}\right)^2 - \frac{z_2 + z_3 + z_4 - z_1}{2} = R^2.$$

Na invoering van de vier betrekkingen van den vorm:

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1 + r_1^2$$

en de zes betrekkingen van den vorm:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

vindt men:

$$R^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{4}.$$

Door gebruik te maken van de bovengenoemde betrekking tusschen de stralen r_1 , r_2 , r_3 en r_4 is dus nu de straal van een cirkel van het tweede stel in de stralen van drie cirkels van het eerste stel uit te drukken.

§ 11. De coördinaten van de punten C , die evenals de punten B , cirkels met straal R afbeelden, worden nu dadelijk gevonden als:

$$x_1 | y_1 | x_1^2 + y_1^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{4}$$

$$x_2 | y_2 | x_2^2 + y_2^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{4}$$

enz.

De coördinaten van het zwaartepunt van den tetraeder met hoekpunten C zijn dus:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \mid \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \mid \sum_1^4 \frac{x_1^2 + y_1^2}{4} - \sum_1^4 \frac{r_1^2}{4}$$

Na invoering weer van de vier betrekkingen van den vorm:

$$x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = z_1$$

vindt men:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \mid \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \mid \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$$

Dit zijn weer de coördinaten van het punt Z.

De vier tetraeders met hoekpunten A resp. B, C, D hebben hetzelfde zwaartepunt Z.

De straal ρ van den door het punt Z afgebeelden cirkel wordt weer op de gewone wijze gevonden als:

$$\rho^2 = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \right)^2 - \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$$

Na invoering weer van de vier betrekkingen van den vorm: $x_1^2 + y_1^2 = z_1 + r_1^2$ en de zes betrekkingen van

den vorm: $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ vindt men:

$$\rho^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{16} = \frac{R^2}{4}$$

$$\rho = \frac{R}{2}.$$

Z^p , de projectie van het punt Z, is het punt waardoor de punten van de beide orthocentrische groepen A^p en B^p in elkaar worden gespiegeld.

Elk van de punten A^p , resp. B^p , is nu het uitwendig

gelijkvormigheidspunt van den cirkel met straal R en het toegevoegde punt B^p , resp. A^p tot middelpunt en den cirkel met straal $\frac{1}{2} R$ en Z^p tot middelpunt.

De cirkel met middelpunt B_1^p gaat door de punten A_2^p, A_3^p, A_4^p . De cirkel met middelpunt Z^p bevat dus de middens van de rechten, die A_1^p met A_2^p , resp. A_3^p, A_4^p verbinden.

De middens van de zes verbindingsrechten der vier punten van de orthocentrische groep van de punten A^p liggen op den cirkel Z^p . Eveneens in diezelfde punten de zes middens van de verbindingsrechten van de punten B^p .

De cirkel beschreven om de punten A_2^p, A_3^p, A_4^p bevat ook de punten, waarin het punt A_1^p door de zijden $A_2^p A_3^p, A_3^p A_4^p, A_4^p A_2^p$ wordt gespiegeld.

De cirkel Z^p bevat dus de snijpunten van elk van de drie paar orthogonaal snijdende rechten, die gaan door de punten van de orthocentrische groep van de punten A^p . Eveneens bevat die cirkel Z^p de snijpunten van elk van de drie paar orthogonaal snijdende rechten van de punten B^p .

Die cirkel Z^p , de negenpunts-cirkel van den driehoek $A_2^p A_3^p A_4^p$ treedt hier op als de twaalfpunts-cirkel voor de beide toegevoegde orthocentrische groepen A^p en B^p .

§ 12. Het zwaartepunt Z_1 van den driehoek $A_2^p A_3^p A_4^p$ heeft tot coördinaten:

$$\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \mid \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$$

De coördinaten van het punt Z^p zijn:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \mid \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

en die van het punt B_1^p

$$\frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2} \mid \frac{y_2 + y_3 + y_4 - y_1}{2}$$

Het punt Z_1 ligt op de rechte $Z^p B_1^p$, wat dadelijk blijkt uit het vergelijken van die coördinaten.

Verder blijkt daaruit, dat $Z^p Z_1 = \frac{1}{3} Z^p B_1^p$.

De zwaartepunten van de vier driehoeken, die telkens drie punten van een orthocentrische groep tot hoekpunten hebben, worden verkregen door uit het middelpunt van den negenpuntscirkel de afstanden tot de middelpunten van de omgeschreven cirkels van die driehoeken tot op $\frac{1}{3}$ te verkleinen.

Die zwaartepunten vormen dus een orthocentrische groep, die, gespiegeld t. o. van het middelpunt van den negenpuntscirkel, weer een orthocentrische groep geeft.

De punten van die groep zijn de zwaartepunten van de driehoeken, die telkens drie punten van de orthocentrische groep B^p tot hoekpunten hebben.

Bij deze toegevoegde orthocentrische groepen behooren weer acht cirkels met straal $\frac{1}{3} R$.

Uit deze beschouwingen volgt nu de bekende stelling:

Voor den omgeschreven- en den negenpuntscirkel van een driehoek is het hoogtepunt het uitwendig-, het zwaartepunt het inwendig gelijkvormigheidspunt.

§ 13. Zijn in driehoek $A_2^p A_3^p A_4^p$ de punten V_2, V_3, V_4 de voetpunten van de hoogtelijnen op de zijden, dan is dadelijk in te zien, dat het punt A_1^p en de punten A_2^p, A_3^p, A_4^p de middelpunten zijn van den ingeschreven en de aangeschreven cirkels van den driehoek $V_2 V_3 V_4$.

De middelpunten van den in- en de aangeschreven cirkels van een driehoek of kortweg de middelpunten van de raakcirkels van een driehoek vormen een orthocentrische groep.

De punten V_2, V_3, V_4 liggen op den negenpuntscirkel van den driehoek $A_2^p A_3^p A_4^p$ met straal $\frac{1}{2} R$; de vier cirkels door telkens drie van de vier punten A^p hebben denzelfden straal R .

Hieruit volgt: De cirkels door telkens drie punten van de orthocentrische groep, gevormd door de middelpunten der raakcirkels van een driehoek, hebben een straal, die tweemaal zoo groot is als de straal van den omgeschreven cirkel van den driehoek.

De orthocentrische groep gevormd door de middelpunten van de raakcirkels van een driehoek heeft den omgeschreven cirkel van dien driehoek tot negenpunts-cirkel en zijn middelpunt tot zwaartepunt.

Hieruit volgt nu:

Voor den omgeschreven cirkel van een driehoek en den cirkel, bepaald door de middelpunten van drie der raakcirkels van dien driehoek, is het middelpunt van den vierden raakcirkel het uitwendig-, het zwaartepunt van den driehoek, die de middelpunten van die drie raakcirkels tot hoekpunten heeft, het inwendig gelijkvormigheidspunt.

§ 14. Is ρ de straal van den negenpunts-cirkel van een orthocentrische groep van punten A^p en is Z^p het middelpunt van dien cirkel, tevens zwaartepunt van die groep, dan zijn de stralen van de cirkels beschreven om de driehoeken, die hun hoekpunten in telkens drie punten van die groep hebben gelijk aan 2ρ .

De middelpunten van de raakcirkels van elk van die vier driehoeken vormen vier orthocentrische groepen. Voor elk van die orthocentrische groepen is de omgeschreven cirkel van den bijbehorenden driehoek de negenpunts-cirkel en het middelpunt van dien cirkel, een van de punten B^p , het zwaartepunt. Aangezien Z^p het zwaartepunt is van de punten B^p volgt hieruit, dat Z^p ook het zwaartepunt is van de zestien middelpunten van raakcirkels.

De zestien cirkels beschreven om telkens drie punten uit een van elk van die vier orthocentrische groepen hebben, wat dadelijk blijkt, een straal 4ρ . Aangezien de middelpunten van elk van die vier viertallen cirkels worden verkregen door spiegeling van de punten van elk van die vier orthocentrische groepen t. o. van het bij die groep behorende zwaartepunt B^p , volgt hieruit, dat Z^p ook het zwaartepunt is van de middelpunten van die 16 cirkels met straal 4ρ .

Uit elk van die vier orthocentrische groepen van middelpunten van raakcirkels zijn nu op dezelfde wijze, als boven is aangegeven, weer vier orthocentrische groepen van middelpunten van raakcirkels af te leiden, waarvan de zestien cirkels met straal 4ρ de negenpunts-cirkels zijn en hun middelpunten de zwaartepunten.

De 64 cirkels beschreven om telkens drie punten uit een van die zestien orthocentrische groepen hebben een straal 8ρ . Het zwaartepunt van die 64 middelpunten van raakcirkels zoowel als het zwaartepunt van de 64 cirkels met straal 8ρ is het punt Z^p .

Op dezelfde wijze voortgaande wordt het aantal middelpunten van raakcirkels en het aantal cirkels beschreven om telkens drie punten uit een van elk van die orthocentrische groepen iederen keer viermaal, de straal van die cirkels tweemaal zoo groot.

Uitgaande van een orthocentrische groep met zwaartepunt Z^p en negenpunts-cirkel met straal ρ zijn op deze wijze groepen te vormen van 4^n middelpunten van raakcirkels met den straal $2^n \cdot \rho$. Zoowel van de groep van de 4^n middelpunten van raakcirkels als de groep van de 4^n middelpunten van de cirkels met straal $2^n \cdot \rho$ is het punt Z^p het zwaartepunt.

§ 15. Alleen lettend op de vier driehoeken, waarvan de hoekpunten telkens drie punten zijn van een orthocentrische groep, zijn de boven verkregen resultaten samen te vatten in de navolgende stelling:

Voor de vier driehoeken, waarvan de hoekpunten telkens drie punten zijn van een orthocentrische groep is het zwaartepunt van die groep het zwaartepunt van de vier hoogtepunten, het zwaartepunt van de vier zwaartepunten, het zwaartepunt van de vier middelpunten van omgeschreven cirkels, het zwaartepunt van de zestien middelpunten van raakcirkels.

Ten slotte is nog op te merken, dat alle bijzondere punten, cirkels, punten- en cirkelgroepen behorende

bij de orthocentrische puntengroep A^p bij spiegeling t. o. van Z^p overgaan in de overeenkomstige punten, cirkels, punten- en cirkelgroepen, behoorende bij de orthocentrische puntengroep B^p .

HOOFDSTUK IX.

De cirkelbundel en de punteninvolutie op een rechte.

§ 1. Het vlak door de beeldrechte l van een hyperbolischen bundel loodrecht op het vlak XOY snijdt uit P_0 en twee raakkegels aan P_0 , die hun toppen hebben in de punten C_1 en C_2 van die beeldrechte, een parabool en twee paar raaklijnen s_1, s_2 en t_1, t_2 aan die parabool.

De beide snijpunten I_1 en I_2 van die rechte l met de parabool vormen een puntenpaar van elk der beide involuties door de stralenbundels met toppen C_1 en C_2 uit die parabool uitgesneden.

De punten S_1, S_2 zijn de dubbelpunten van de eene, de punten T_1, T_2 die van de andere involutie.

Een involutie op een kegelsnede wordt door een punt van die kegelsnede op een rechte weer als een involutie geprojecteerd.

Kiest men voor dat punt het raakpunt van P_0 aan het oneindig verre vlak, dan worden de beide involuties weer als involuties geprojecteerd op de rechte van de middelpunten van de cirkels van den bundel, waarvan l de beeldrechte is.

De punten I_1^p en I_2^p worden zoowel door het puntenpaar S_1^p, S_2^p als door het puntenpaar T_1^p, T_2^p harmonisch gescheiden, de punten I_1^p en I_2^p zijn dus de dubbelpunten van de punteninvolutie op die rechte bepaald door die beide puntenparen.

Die puntenparen zijn (hoofdstuk III) de snijpunten van

de beide cirkels, afgebeeld door C_1 en C_2 , met de rechte van de cirkelmiddelpunten van den bundel, afgebeeld door de rechte l .

Hieruit volgt: In een hyperbolischen cirkelbundel worden de beide puntcirkels harmonisch gescheiden door de snijpunten van elken cirkel van dien bundel met de verbindingsrechte van die puntcirkels.

Elk puntenpaar van de rechte l , dat twee orthogonaal snijdende cirkels afbeeldt, wordt harmonisch gescheiden door de beide punten I_1 en I_2 .

De punten I_1 en I_2 zijn dus de dubbelpunten van de punteninvolutie op de rechte l , bepaald door de beeldpunten van de paren orthogonaal snijdende cirkels uit den door l afgebeelden bundel.

Projecteert men die involutie op het vlak XOY , dan volgt daaruit, dat de puntcirkels van den bundel harmonisch worden gescheiden door de middelpunten van elk paar orthogonaal snijdende cirkels van dien bundel en dat de punteninvolutie van de middelpunten van de paren orthogonaal snijdende cirkels dezelfde is als de punteninvolutie uitgesneden op de rechte van de cirkelmiddelpunten door de cirkels van den bundel.

Een dergelijke eigenschap bestaat nu ook voor de parabolische, resp. de elliptische bundels. In die bundels zijn de puntcirkels evenwel samengevallen, resp. imaginair geworden.

De soorten van de punteninvoluties op een rechte bepalen nu ook de soorten van cirkelbundels.

De punteninvolutie met reële dubbelpunten komt overeen met den hyperbolischen bundel.

De punteninvolutie met reële dubbelpunten, waarbij een van de dubbelpunten ligt op de oneindig verre rechte, de symmetrische involutie, komt overeen met een bundel concentrische cirkels.

De verbindingsrechte van de beide puntcirkels van den bundel, d. i. elke rechte door het middelpunt van die concentrische cirkels wordt door elk van de cirkels

in twee punten gesneden, symmetrisch gelegen t. o. van dat middelpunt.

De aan elken cirkel toegevoegde orthogonaal snijdende cirkel van den bundel is imaginair. Het middelpunt van elk van die toegevoegde cirkels valt samen met het middelpunt van de concentrische cirkels.

De punteninvolutie met samengevallen dubbelpunten komt overeen met den parabolischen bundel.

De puntcirkel van den bundel staat loodrecht op alle cirkels van den bundel.

De punteninvolutie met reële dubbelpunten, samengevallen met het oneindig verre punt van den drager, komt overeen met een bundel evenwijdige rechten. De beide puntcirkels zijn samengevallen met de oneindig verre rechte in het vlak XOY , het middelpunt van de als cirkels beschouwde rechten met die beide puntcirkels.

De punteninvolutie met imaginaire dubbelpunten komt overeen met den elliptischen bundel.

De punteninvolutie met imaginaire dubbelpunten op de oneindig verre rechte komt overeen met den stralenbundel.

De oneindig verre rechte in het vlak XOY is de rechte van de middelpunten van de als cirkels beschouwde rechten van den stralenbundel.

De middelpunten van telkens twee als cirkels beschouwde orthogonaal snijdende rechten van dien stralenbundel bepalen op de oneindig verre rechte een involutie met imaginaire dubbelpunten. De dubbelstralen van die straleninvolutie zijn de beide imaginaire rechten; de beide imaginaire dubbelpunten de imaginaire cirkelpunten van het vlak XOY .

§ 2. Het vlak door de beeldrechte m van een elliptischen bundel loodrecht op het vlak XOY snijdt uit P_0 en twee raaktegels aan P_0 , die hun toppen hebben in de punten C_1 en C_2 van die beeldrechte, een parabool en twee paar raaklijnen aan die parabool.

Zijn s_1, s_2, t_1, t_2 de raaklijnen, S_1, S_2, T_1, T_2 de raakpunten en beelden C_1 en C_2 orthogonaal snijdende cirkels van dien bundel af, dan ligt C_1 op de rechte $T_1 T_2$, C_2 op de rechte $S_1 S_2$. Het puntenpaar T_1, T_2 , resp. S_1, S_2 , behoort tot de involutie op de parabool uitgesneden door den stralenbundel met top C_1 , resp. C_2 . Dubbelpunten van die involuties zijn het puntenpaar S_1, S_2 , resp. T_1, T_2 .

Projecteert men beide involuties op het vlak $X O Y$, dan zullen de puntenparen S_1^p, S_2^p en T_1^p, T_2^p , gelegen op de rechte van de cirkelmiddelpunten van den bundel, afgebeeld door m , elkaar harmonisch scheiden.

De punten bepaald door twee orthogonaal snijdende cirkels op de verbindingsrechte van hun middelpunten vormen een harmonisch viertal.

Ook deze eigenschap geldt voor de andere soorten bundels. Bij den parabolischen bundel zijn van elk viertal drie punten samengevallen in het vaste punt van den bundel, bij den hyperbolischen bundel zijn van elk viertal twee punten imaginair.

HOOFDSTUK X.

Onderlinge ligging van bundels en netten.

§ 1. Wanneer een net is gegeven door zijn orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel, een bundel uit dat net door de rechte van zijn cirkelmiddelpunten, zijn centraal, dan is op eenvoudige wijze (hoofdstukken III, VI en VII) de orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel van dien bundel te bepalen. Omgekeerd zijn daaruit de voorwaarden te vinden, waaraan de puntcirkels of vaste punten van een bundel moeten voldoen om dien bundel tot een aldus gegeven net te doen behooren.

In de voornaamste hierna volgende gevallen geschiedt het bepalen van den orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel van dien bundel als volgt:

1) Net gegeven door orthogonaalcirkel, bundel door een dien cirkel snijdende rechte. De orthogonaalcirkel van den bundel heeft de verbindingsrechte van de beide snijpunten tot middellijn.

2) Net gegeven door orthogonaalcirkel, bundel door een dien cirkel rakende rechte. Het raakpunt is de puntcirkel van den bundel.

3) Net gegeven door orthogonaalcirkel, bundel door een rechte, die dien cirkel niet snijdt of raakt. De loodlijn uit het middelpunt van den orthogonaalcirkel op die rechte is de machtlijn van den bundel, het snijpunt van loodlijn en rechte het middelpunt van den diametraalcirkel, de diametraalcirkel de den orthogonaalcirkel loodrecht snijdende cirkel. Orthogonaalcirkel net en diametraalcirkel bundel bepalen op die machtlijn twee puntenparen, die een harmonisch viertal vormen.

4) Net gegeven door puntcirkel, bundel door een rechte buiten dat punt. De loodlijn uit het punt op de rechte is de machtlijn, het snijpunt van loodlijn en rechte het middelpunt van den diametraalcirkel, de afstand van puntcirkel tot middelpunt de straal van den diametraalcirkel. De puntcirkel is het eene vaste punt; het andere punt wordt verkregen door dat punt te spiegelen t. o. van de rechte van de cirkelmiddelpunten.

5) Net gegeven door puntcirkel, bundel door een rechte door dat punt. De beide puntcirkels zijn in dat punt tot den puntcirkel van den bundel samengekrompen.

6) Net gegeven door diametraalcirkel, bundel door een willekeurige rechte. De loodlijn door het middelpunt van den diametraalcirkel op die rechte is machtlijn van den bundel en snijdt die rechte in het middelpunt van den diametraalcirkel van den bundel.

De diametraalcirkel van den bundel snijdt den diametraalcirkel van het net in twee punten gelegen op een

rechte door het middelpunt van dien cirkel, evenwijdig aan den centraal van den bundel. De snijpunten van den diametraalcirkel van den bundel met de machtlijn zijn de vaste punten.

Bijzonder geval:

Ontaardt de orthogonaalcirkel in een orthogonaalrechte, dan valt de centraal van den bundel behoorende tot het door die orthogonaalrechte bepaalde net met die orthogonaalrechte samen. De bundel is nu nader te bepalen door zijn puntecirkels of zijn vaste punten.

§ 2. De gemeenschappelijke bundel van twee netten, elk gegeven door zijn orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel is in verband met het vorenstaande volkomen bepaald, wanneer de centraal van dien bundel bekend is.

Die rechte wordt op de eenvoudigste manier gevonden door uit te gaan van twee cirkels Γ_1 en Γ_2 , die elk zoowel als orthogonaal- en diametraalcirkel van een net worden beschouwd en waarvan de middelpunten de puntecirkels zijn van parabolische netten. Elk van die beide drietallen netten wordt dan afgebeeld door drie evenwijdige vlakken. Het middelste der vlakken van elk drietal raakt aan P_0 in het beeldpunt A, resp. B, van het middelpunt van den cirkel Γ_1 , resp. Γ_2 (hoofdstuk III). Het vertikale vlak door de punten A en B snijdt P_0 en die vlakken volgens een parabool en twee drietallen evenwijdige rechten, l_1, l_2, l_3 en m_1, m_2, m_3 . Het beeldpunt C, resp. E, van den cirkel Γ_1 , resp. Γ_2 , ligt met A, resp. B, op een vertikale rechte, die l_1 , resp. m_1 , snijdt in het punt D, resp. F.

Hierbij heeft men $CA = AD$ en $EB = BF$ (hoofdstuk III).

De twee drietallen evenwijdige rechten snijden elkaar in negen punten G, H, J, K, L, M, N, O én P.

De beide drietallen beeldvlakken snijden elkaar volgens negen evenwijdige rechten, elk door een van die punten.

Die negen rechten beelden dus negen bundels met dezelfde machlijn af.

Elk van die bundels behoort tot twee van de zes netten, een uit elk drietal.

Een van de negen beeldrechten, de rechte l_g door het punt G, beeldt den gemeenschappelijken bundel af van de beide netten, die Γ_1 en Γ_2 tot orthogonaalcirkels hebben. Die bundel is toegevoegd aan den door Γ_1 en Γ_2 bepaalden bundel (hoofdstuk VII).

Zijn A^p en B^p de projecties op het vlak XOY van de punten A en B en is l_g^p de projectie van die rechte l_g , dan zijn de rechten $A^p B^p$ en l_g^p toegevoegde machlijnen van den bundel met beeldrechte l_g en den bundel van de cirkels Γ_1 en Γ_2 .

Die negen beeldrechten worden dus op het vlak XOY geprojecteerd in negen rechten loodrecht op de lijn $A^p B^p$.

Die negen projecties zijn de centralen van negen bundels.

De beeldrechte l_h door het punt H beeldt den gemeenschappelijken bundel af van de beide parabolische netten, waarvan A^p en B^p de vaste punten zijn; de centraal van dien bundel is de machlijn van de puncircels A^p en B^p (hoofdstuk VII).

De beeldrechte l_o door het punt O beeldt den gemeenschappelijken bundel af van het net, waarvan Γ_2 de orthogonaalcirkel is en het parabolische net, waarvan A^p het vaste punt is; de centraal van dien bundel is de machlijn van den cirkel Γ_2 en den puncirkel A^p .

De punten G, O en K liggen op een rechte. Eveneens de punten G, H en J.

Uit de gelijkheid van KO en OG volgt nu, dat l_k^p , de projectie van de beeldrechte l_k door het punt K, en l_g^p symmetrisch liggen t. o. van l_o^p en uit de gelijkheid van JH en HG , dat l_j^p , de projectie van de beeldrechte l_j door het punt J, en l_g^p symmetrisch liggen t. o. van l_h^p .

Het resultaat is dus:

Van twee cirkelnetten gegeven door hun orthogonaal-cirkels is de centraal van den gemeenschappelijken bundel van die netten de machtlijn van de beide orthogonaal-cirkels.

Voor twee cirkelnetten gegeven door een orthogonaal- en een diametraalcirkel wordt de centraal van den gemeenschappelijken bundel gevonden door de machtlijn van die beide cirkels te spiegelen t. o. van de machtlijn van den orthogonaalcirkel en het als een puntcirkel beschouwde middelpunt van den diametraalcirkel.

Voor twee cirkelnetten gegeven door hun diametraal-cirkels wordt de centraal van den gemeenschappelijken bundel gevonden door de machtlijn van de beide cirkels te spiegelen t. o. van de middelloodlijn van de verbindingsrechte van hun middelpunten.

§ 3. Voor een net gegeven door zijn orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel is boven afgeleid, hoe de paren puntcirkels of vaste punten van de ∞^2 bundels van dat net t. o. van dien orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel zijn gelegen.

Beschouwt men van die bundels de toegevoegde bundels, dan gaan hun beeldrechten door een punt, de pool van het beeldvlak van het net. Al die toegevoegde bundels, afgebeeld door al de rechten van de ruimte door dat punt hebben een cirkel gemeen, den orthogonaalcirkel van het net.

De puntcirkels, resp. vaste punten, van een bundel van het net worden voor den toegevoegden bundel de vaste punten, resp. de puntcirkels.

Hiermee is dan ook de ligging bepaald van de paren vaste punten, resp. de puntcirkels, van alle bundels, die een gegeven cirkel gemeen hebben.

§ 4. Worden de beeldpunten van de orthogonaal-cirkels van twee netten harmonisch gescheiden door P_0 , dan behoort elk van die beide cirkels tot het net, waarvan de andere de orthogonaalcirkel is.

HOOFDSTUK XI.

Pool en poollijn.

§ 1. De poollijn van een punt A^p t. o. van een cirkel Γ gaat door den anderen puntcirkel B^p van den bundel, bepaald door dien cirkel en het als een puntcirkel beschouwde punt A^p (hoofdstuk IX). Het verticale vlak door de beeldrechte α van dien bundel snijdt P_0 volgens een parabool. De beide snijpunten A en B van die beeldrechte α met de parabool beelden de beide puntcirkels van den bundel af.

Uit de wijze van afbeelding van een rechte (hoofdstuk IV) volgt nu, dat de poollijn tot beeldpunt heeft het gemeenschappelijke snijpunt van het oneindig verre vlak met de ∞^2 rechten evenwijdig aan de raaklijn aan de parabool in B. Hieruit volgt weer de eigenschap, dat de poollijnen van elk van de beide als punten beschouwde puntcirkels van een bundel samenvallen met de rechte door het andere punt loodrecht op de verbindingslijn van die beide punten getrokken.

De poollijnen van een punt A^p t. o. van de cirkels van een bundel (Γ) worden nu gevonden door in elken cirkelbundel, bepaald door het punt A^p en een van de cirkels Γ , den tweeden puntcirkel B^p te bepalen en op elke rechte $A^p B^p$ in B^p de loodlijn op te richten.

Het punt A^p en de bundel (Γ) bepalen tezamen een cirkelnet.

Die tweede puntcirkels vormen den orthogonaalcirkel van dat net, de poollijnen snijden elkaar in het punt van den orthogonaalcirkel, dat diametraal tegenover het punt A^p is gelegen.

Hieruit volgt:

1) De orthogonaalcirkel van een net is de meetkundige plaats van de punten P, die de eigenschap bezitten, dat hun poollijnen p t. o. van alle cirkels van dat net elkaar in één punt Q snijden. Steeds is ook dat punt Q op

den orthogonaalcirkel gelegen en wel diametraal tegenover het punt P.

2) De orthogonaalcirkel van een net snijdt de poollijn van elk van zijn punten t. o. van een willekeurigen cirkel van het net in een punt, dat in het midden ligt tusschen de snijpunten van die poollijn met dien willekeurigen cirkel. Twee orthogonaal snijdende cirkels bepalen op elke middellijn van een van die cirkels twee puntenparen, die elkaar harmonisch scheiden.

§ 2. De beeldpunten van de poollijnen van een willekeurig punt t. o. van de cirkels van een net worden gevonden door het beeld van dat punt achtereenvolgens met de beeldpunten van de cirkels van dat net te verbinden, door elk van die rechten een vertikaal vlak te brengen, in het andere snijpunt van elk van die rechten met P_0 de raaklijn aan de door het vertikale vlak uit P_0 uitgesneden parabool aan te brengen en het snijpunt daarvan met het oneindig verre vlak te bepalen.

Die ∞^2 raaklijnen vertegenwoordigen de ∞^2 richtingen in de ruimte. De poollijnen worden afgebeeld door de punten van het oneindig verre vlak. Zij vormen het net van de rechten in het vlak XOY .

§ 3. Is een rechte l^p afgebeeld door het gemeenschappelijke snijpunt van het oneindig verre vlak met de ∞^2 rechten, die als koorden van P_0 beschouwd het vertikale vlak door l^p tot middelvlak hebben en is een cirkel afgebeeld door een punt C, dan is het beeld van de pool van die rechte l^p van Γ als volgt te vinden:

Breng een vertikaal vlak door l^p , breng een vertikaal vlak door C, evenwijdig met het koordenstelsel, dus loodrecht op l^p , bepaal de snijlijn van die beide vlakken, bepaal het snijpunt B van die snijlijn met P_0 , verbind B met C en bepaal het andere snijpunt A van die verbindingsrechte r met P_0 .

De projectie van dat punt A op het vlak XOY is dan de pool van l^p t. o. van Γ .

Om nu de meetkundige plaats te vinden van de polen van een gegeven rechte t. o. van een cirkelbundel moet op de boven aangegeven wijze voor elken cirkel uit dien bundel de pool worden gevonden.

De punten C vormen nu de beeldrechte c van den bundel.

De verticale vlakken γ door de punten C loodrecht op l^p zijn evenwijdig.

De snijlijn van het verticale vlak λ door l^p met een vlak γ snijdt P_0 in een punt B van de parabool π , welke λ met P_0 gemeen heeft.

De meetkundige plaats der polen wordt dus blijkbaar bepaald als de projectie van de doorsnede van P_0 met een regelvlak. Van dit regelvlak, een conoïde, loopen alle rechten r evenwijdig aan een vast vlak γ_0 en snijden een rechte c en een parabool π . Het vlak λ van de parabool staat loodrecht op het vaste vlak γ_0 , de as van de parabool loopt er aan evenwijdig.

Door wenteling van het assenkruis om de Z as kan men het vlak, waarin de parabool ligt, evenwijdig kiezen aan het vlak XOZ en het vlak, waaraan alle rechten r evenwijdig zijn, evenwijdig aan het vlak YOZ .

Is de beeldrechte van den bundel gegeven door de vergelijkingen:

$$x - a = m(z - c)$$

$$y - b = n(z - c)$$

en de parabool door:

$$x^2 + y^2 = z \quad (1)$$

$$y = p \quad (2),$$

dan is elke rechte van het regelvlak gegeven door de vergelijkingen:

$$x - a - m(z - c) + \lambda \{ (y - b) - n(z - c) \} = 0 \quad (3)$$

$$x = \mu \quad (4)$$

De rechte (3) (4) moet (1) en (2) snijden.

Na eliminatie van x , y en z uit de vergelijkingen (1),

(2), (3) en (4) en na eliminatie van λ en μ uit de aldus verkregen betrekking en de vergelijkingen (3) en (4) wordt voor de vergelijking van dit regelvlak gevonden:

$$(x - a)(y - b) - n(x - a)z - c + \\ + \{n(x - a) - m(y - b)\}(x^2 + p^2 - c) - \\ - (x - a)(p - b) + m(z - c)(p - b) = 0$$

Het regelvlak is van den 3^{en} graad.

De eliminatie van z uit deze vergelijking en de vergelijking $x^2 + y^2 = z$ geeft de vergelijking van de projectie op het vlak XOY van de doorsnede van dit regelvlak met P_0 .

De vergelijking van die projectie is:

$$m(x^2 - c)(p - y) + (x - a)(y - p) - \\ - n(x - a)(y^2 - p^2) - mb(y^2 - p^2) + mpy(y - p) = 0$$

De projectie bestaat uit een rechte met vergelijking:

$$y - p = 0,$$

d. i. de vergelijking van de projectie van de parabool en een hyperbool met vergelijking:

$$-mx^2 - nxy + (1 - np)x + (na - mb + mp)y - \\ - a + nap + mc - mbp = 0$$

De meetkundige plaats van de polen van een rechte t. o. van de cirkels van een bundel is dus een hyperbool.

De beide asymptotische richtingen worden gevonden uit:

$$-mx^2 - nxy = 0, \text{ dus} \\ -mx - ny = 0 \text{ en } x = 0.$$

De eerste asymptoot staat loodrecht op de rechte van de cirkelmiddelpunten van den bundel, de tweede staat loodrecht op de vaste poollijn.

Het regelvlak bevat, wat dadelijk is in te zien, de beeldpunten van de beide puntcirkels van den bundel, d. z. de snijpunten van de beeldrechte met P_0 .

De hyperbool bevat dus ook die beide puntcirkels.

Hieruit volgt: De meetkundige plaats van de polen van een rechte t. o. van de cirkels van een bundel is een hyperbool, die door drie vaste punten gaat, waarvan er een op de oneindig verre rechte ligt.

Het net van de rechten van het vlak XOY , als een

net van poollijnen beschouwd, wordt vergezeld door een driepuntsnet van hyperbolen. Elk van die hyperbolen is de meetkundige plaats van de polen van een van die rechten t. o. van de cirkels van den bundel.

§ 4. Boven is afgeleid, dat de poollijnen van een punt t. o. van de cirkels van een bundel door een punt gaan.

Tusschen de punten van het vlak XOY en het gemeenschappelijk snijpunt van de poollijnen van elk van die punten t. o. van de cirkels van den bundel is een verwantschap één aan één te stichten. Deze verwantschap is een bijzonder geval van de algemeene verwantschap van STEINER bij den kegelsnedenbundel.

Uit een eenvoudige beschouwing volgt nu, dat de boven besproken hyperbool ook kan worden opgevat als een verzameling van de in die verwantschap aan de punten van die rechte toegevoegde punten.

Blijkbaar wordt bij deze wijze van toevoegen de graad van een figuur verdubbeld.

Bijzondere punten zijn in deze verwantschap de beide puntecirkels I_1 en I_2 van den bundel en het snijpunt S van de loodlijn op hun verbindingslijn met de oneindig verre rechte in het vlak XOY .

Aan het punt $I_1(I_2)$ is in deze verwantschap toegevoegd de loodlijn op de lijn $I_1 I_2$ door het punt $I_2(I_1)$, aan het punt S de centraal van den bundel.

HOOFDSTUK XII.

Harmonische cirkelviertallen, bundels en netten.

§ 1. Vier cirkels uit een bundel vormen een harmonisch viertal, wanneer zij worden afgebeeld door twee puntenparen, die elkaar harmonisch scheiden.

De machtlijnen van een willekeurigen cirkel Γ en elk van vier harmonische cirkels gaan door een punt.

Immers die machtlijnen gaan door het middelpunt van het net bepaald door dien cirkel in den bundel, waartoe die harmonische cirkels behooren.

De vier verbindingsrechten van het middelpunt van Γ met elk van de vier middelpunten van de harmonische cirkels vormen een harmonischen vierstraal.

Elk van de vier machtlijnen staat loodrecht op een van die vier verbindingsrechten.

Aan elk van de vier verbindingsrechten door het middelpunt van Γ is een machtlijn toegevoegd door het middelpunt van het net en omgekeerd. Die toegevoegde rechten zijn dus te beschouwen als toegevoegde stralen uit twee stralenbundels, waarbij tusschen de stralen een verwantschap een aan een bestaat. Een dergelijke verwantschap is bepaald door drie stralenparen.

Tusschen vier stralenparen bestaat dan een betrekking, die in dit geval beteekent, dat ook de vier machtlijnen een harmonischen vierstraal vormen.

De poollijnen van een willekeurig punt t. o. van de cirkels van een bundel gaan door een punt (hoofdstuk XI).

De poollijnen van een willekeurig punt t. o. van vier harmonische cirkels staan loodrecht op de verbindingslijnen van dat punt met de vier middelpunten van die cirkels en vormen dus ook een harmonischen vierstraal.

Stelling: De machtlijnen van een willekeurigen cirkel en elk van vier harmonische cirkels zoowel als de poollijnen van een willekeurig punt t. o. van elk van vier harmonische cirkels vormen harmonische vierstralen.

§ 2. De bundels bepaald door een willekeurigen cirkel Γ en elk van vier harmonische cirkels worden afgebeeld door een harmonischen vierstraal gelegen in het beeldvlak van het net bepaald door dien cirkel Γ en den bundel van de vier harmonische cirkels.

Die vier bundels zijn harmonische bundels.

Elke rechte in het beeldvlak van het net, dat zij bepalen, wordt door hun beeldrechten in een harmonisch puntenviertal gesneden.

Vier cirkelbundels hebben dus met elken cirkelbundel uit het net, dat zij bepalen, vier cirkels gemeen, die een harmonisch viertal vormen,

§ 3. Vier netten, die een harmonisch cirkelviertal tot orthogonaalcirkels hebben, worden afgebeeld door vier vlakken door de beeldrechte van den bundel toegevoegd aan den bundel bepaald door die orthogonaalcirkels.

Die vier vlakken vormen dus een harmonisch viertal; de vier netten, die tot denzelfden netbundel behooren, zijn harmonisch.

Vier harmonische netten hebben dus met een willekeurig net vier harmonische bundels en met een willekeurigen bundel vier harmonische cirkels gemeen.

HOOFDSTUK XIII.

De cirkels, die een gegeven cirkel onder eenzelfde hoek snijden.

§ 1. De cirkels, die een gegeven cirkel Γ met straal r in een punt A^p van zijn omtrek onder een hoek α snijden vormen twee parabolische cirkelbundels, die worden afgebeeld door twee rechten door het punt A , het beeldpunt van A^p , en gelegen zijn in het raakvlak aan P_0 in dat punt.

De centralen van die beide bundels gaan door het punt A^p en raken aan een cirkel Γ_1 met straal $r \sin \alpha$, die concentrisch is met Γ .

De beeldrechten van die beide cirkelbundels zijn nu te bepalen als de doorsnijding van het raakvlak aan P_0 in het punt A met de beide raakvlakken door dat punt aan een rechten cylinder, die den cirkel Γ_1 tot richtkromme heeft.

Op overeenkomstige wijze zijn nu ook de beeldrechten te bepalen van de beide bundels, waarvan de cirkels den cirkel Γ in een ander punt B^p van zijn omtrek onder een hoek α snijden.

De beide raakvlakken aan P_0 in de punten A en B zijn raakvlakken van den raakkegel aan P_0 met het beeldpunt C van Γ tot top en snijden elkaar volgens een rechte s , die op het vlak XOY wordt geprojecteerd in de rechte s^p , de middelloodlijn van de verbindingslijn van de punten A^p en B^p (hoofdstuk X).

Zijn l_1 en m_1 , resp. l_2 en m_2 de beeldrechten van de beide bundels door A, resp. door B, l_1^p en m_1^p , resp. l_2^p en m_2^p hun projecties op het vlak XOY , die gaan door het punt A^p , resp. door B^p , dan snijden l_1^p en m_2^p elkaar in een punt S_1^p , l_2^p en m_1^p elkaar in een punt S_2^p beide gelegen op de lijn s^p .

Het punt S_1^p is zoowel de projectie van het snijpunt van de rechten s en l_1 als van de rechten s en m_2 . De rechten l_1 en m_2 snijden elkaar in het punt S_1 , de rechten l_2 en m_1 in het punt S_2 . De rechten l_1 en m_1 en de rechten l_2 en m_2 snijden elkaar niet.

De afbeelding van alle cirkels, die Γ onder een gegeven hoek α snijden, bestaat dus uit tweetallen van rechten door de beeldpunten der punten van Γ ; elk van de beide rechten uit een tweetal snijdt van elk ander tweetal een rechte en kruist de andere.

De beelden der punten van Γ vormen een ellips.

Hieruit volgt:

Het stelsel van de cirkels, die een gegeven cirkel onder een gegeven hoek snijden, wordt afgebeeld door een eenbladige hyperboloïde, die P_0 aanraakt volgens

een ellips, waarvan de punten de beelden zijn van de punten van den cirkel.

Wordt die gegeven hoek $\alpha = 0$, dan gaat de hyperboloïde over in den raakkegel aan P_0 , die het beeldpunt van den cirkel tot top heeft en dus P_0 volgens dezelfde ellips aanraakt.

Wordt die gegeven hoek $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, dan ontgaat de hyperboloïde in de meetkundige plaats van de rechten in het poolvlak van het beeld van den cirkel, die dezelfde ellips omhullen. Elk van die rechten is daarbij dan tweemaal te tellen.

Minder juist, maar eenvoudiger, is het te zeggen, dat voor $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ de hyperboloïde ontgaat in twee samen vallende platte vlakken, die P_0 volgens dezelfde ellips snijden.

De verschillende hyperboloïden, die de cirkels afbeelden, welke een gegeven cirkel Γ onder een gegeven hoek α snijden, de raakkegel aan P_0 , het dubbelgetelde poolvlak van het beeldpunt van Γ en P_0 zelf behooren tot eenzelfde bundel van kwadratische oppervlakken, die tot basiskromme heeft de ellips, die de punten van Γ afbeeldt, als dubbelkromme beschouwd.

Aangezien het beeld van een punt van Γ tot alle oppervlakken van dien bundel behoort, volgt hieruit, dat elk punt van Γ kan worden beschouwd als een puntcirkel, die Γ onder alle mogelijke hoeken snijdt.

§ 2. Om de ligging te bepalen van de hyperboloïde α^2 , d. i. de hyperboloïde, die de cirkels afbeeldt, welke een gegeven cirkel Γ onder een gegeven hoek α snijden, beschouwt men een raaklijn u^p aan den cirkel Γ_1 met straal $r \sin \alpha$.

Zijn V^p en W^p de snijpunten van u^p met Γ , dan is u^p te beschouwen als de projectie van twee rechten van de hyperboloïde, een rechte v_1 door het punt V , het beeldpunt van V^p , en een rechte w_2 door het punt W , het beeldpunt van W^p . Die beide rechten, tot de

verschillende stelsels van de hyperboloïde behoorend, snijden elkaar in de snijlijn s van de raakvlakken aan P_0 in de punten V en W . Het snijpunt Z^p van de rechte s^p , de projectie van s , en de rechte u^p is dus de projectie van het snijpunt der rechten v_1 en w_2 ; s^p is de middelloodlijn van de verbindingsrechte van de punten V^p en W^p , u^p is een raaklijn aan den met Γ concentrischen cirkel Γ_1 , Z^p is dus een punt van Γ_1 .

De vertikaal door het punt Z^p ligt in een raakvlak aan de hyperboloïde en gaat door het snijpunt van de beide rechten der hyperboloïde, in dat raakvlak gelegen. De vertikaal door Z^p is dus een raaklijn aan de hyperboloïde. De hyperboloïde α^2 wordt dus aangeraakt door een rechten cylinder, die den cirkel Γ_1 tot richtkromme heeft. De loodlijn op het vlak XOY in het middelpunt C^p van de cirkels Γ en Γ_1 is dus t. o. van de hyperboloïde α^2 de middellijn voor een stelsel van evenwijdige vlakken, waartoe, wat dadelijk blijkt, ook het vlak der ellips behoort, die de punten van Γ afbeeldt.

Het middelpunt van de hyperboloïde en de hiermee samenvallende top van den asymptotenkegel van die hyperboloïde liggen op een loodlijn op het vlak XOY door het middelpunt van Γ .

§ 3. De snijpunten van de hyperboloïde α^2 met het oneindig verre vlak beelden de rechten af, die den cirkel Γ onder den hoek α snijden. Die rechten raken aan den met Γ concentrischen cirkel Γ_2 met straal $r \cos \alpha$. Die rechten worden dus ook afgebeeld door de snijpunten van het oneindig verre vlak met den raakkegel aan P_0 die het beeldpunt van Γ_2 tot top heeft. De beschrijvende lijnen van den asymptotenkegel van de hyperboloïde α^2 loopen dus evenwijdig aan de beschrijvende lijnen van den raakkegel aan P_0 , die het beeldpunt van Γ_2 tot top heeft.

De raakkegel aan de hyperboloïde α^2 met het beeldpunt van Γ tot top, valt samen met den raakkegel aan

P_0 met denzelfden top en raakt die hyperboloïde volgens de „beeldellips” van Γ .

De hyperboloïde α^2 is nu volkomen bepaald door de volgende gegevens:

1^o) Een ellips op die hyperboloïde gelegen, de beeldellips van Γ .

2^o) De raakkegel aan de hyperboloïde met top in het beeldpunt van Γ , d.i. de raakkegel aan P_0 met hetzelfde punt tot top. Die raakkegel raakt de hyperboloïde volgens de beeldellips.

3^o) Een kegel, evenwijdig aan den asymptotenkegel, de raakkegel aan P_0 , die tot top heeft heeft het beeldpunt van Γ_2 . Γ_2 is concentrisch met Γ en heeft tot straal $r \cos \alpha$. r is de straal van Γ .

De onder 1^o) en 2^o) genoemde gegevens gelden voor alle raakhyperboloïden uit den bovengenoemden bundel kwadratische oppervlakken, het onder 3^o) genoemde heeft betrekking op een bepaalden hoek α .

De verbindingslijn van het middelpunt van de ellips met den top van den onder 2^o) genoemden raakkegel aan de hyperboloïde komt hier op een andere wijze voor den dag als de middellijn voor de hyperboloïde voor een stelsel van vlakken evenwijdig met het vlak van die ellips.

§ 4. Een plat vlak gebracht door de loodlijn op het vlak XOY door het middelpunt van Γ snijdt α^2 volgens een hyperbool en den raakkegel aan α^2 die het beeldpunt C van Γ tot top heeft, volgens twee raaklijnen l_1 en l_2 aan die hyperbool.

De beide raakpunten P en Q zijn twee punten van de beeldellips van Γ ; de coördinaten van het snijpunt C van l_1 en l_2 zijn:

$$x|y| \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$$

Datzelfde platte vlak snijdt den raakkegel aan P_0 , die het beeldpunt C_2 van Γ_2 tot top heeft volgens twee rechten m_1 en m_2 , evenwijdig aan de asymptoten van

de hyperbool (§ 3); de coördinaten van het snijpunt C_2 van m_1 en m_2 zijn:

$$x|y|x^2 + y^2 - r^2 \cos^2 \alpha.$$

Zijn R en S de punten, waarin die beide rechten aan P_0 raken, dan is $RS \parallel PQ$.

Immers PQ ligt in het poolvlak van C , RS in het poolvlak van C_2 en de beide poolvlakten loopen evenwijdig, omdat CC_2 loodrecht staat op het vlak XOY .

De lijn CC_2 is tevens middellijn van de hyperbool voor het stelsel van koorden evenwijdig aan PQ (§ 2) en bevat dus het snijpunt van de beide asymptoten.

Van de hyperbool zijn nu gegeven:

1^o) De beide raaklijnen l_1 en l_2 met hun raakpunten P en Q .

2^o) De asymptotische richtingen.

Door gebruik te maken van de eigenschap, dat het punt P , resp. Q , in het midden ligt tusschen de snijpunten van de beide asymptoten met l_1 , resp. l_2 , worden nu langs planimetrischen weg de coördinaten van het middelpunt van de hyperbool en daarmee ook de coördinaten van den top van den asymptotenkegel gevonden.

Die coördinaten zijn:

$$x|y|x^2 + y^2 + r^2 \sin^2 \alpha - r^2 \cos^2 \alpha$$

Daar een eenbladige hyperboloïde volkomen bepaald is door haar asymptotenkegel en een punt, is het boven gevonden resultaat ook in den volgende vorm te brengen:

De eenbladige hyperboloïde, die de cirkels afbeeldt, welke een cirkel Γ met middelpunt $x|y$ en straal r onder een hoek α snijden, heeft tot middelpunt het punt $x|y|x^2 + y^2 + r^2 \sin^2 \alpha - r^2 \cos^2 \alpha$. De asymptotenkegel is evenwijdig aan den raakkegel aan P_0 , die tot top heeft het punt $x|y|x^2 + y^2 - r^2 \cos^2 \alpha$. Elk van de beeldpunten van de punten van den omtrek van Γ ligt op de hyperboloïde.

§ 5. Ontaardt de cirkel Γ in een rechte p , dan gaat de eenbladige hyperboloïde over in een hyperbolische

paraboloïde. Die rechte p kan altijd, na wenteling van het assenkruis om de Z as, evenwijdig loopen met de X as.

Is a de afstand van p tot de X as en zijn x en y de coördinaten van het middelpunt van een cirkel met straal r , die p onder een hoek α snijdt, dan is dadelijk in te zien, dat:

$$r \cos \alpha = y - a$$

of

$$r = \frac{y - a}{\cos \alpha}.$$

Substitueert men deze uitdrukking voor r in de betrekking tusschen de coördinaten van het beeldpunt en den straal van een cirkel (hoofdstuk I), dan gaat die betrekking over tot den vorm:

$$x^2 + y^2 = z + \left(\frac{y - a}{\cos \alpha} \right)^2$$

Na vereenvoudigen wordt dit:

$$x^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \left(y - \frac{a}{\sin^2 \alpha} \right)^2 = z - \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}.$$

De cirkels, die de rechte p onder een hoek α snijden worden afgebeeld door de punten van een hyperbolische paraboloïde, die tot top heeft het punt:

$$0 \left| \frac{a}{\sin^2 \alpha} \right| \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}$$

en waarvan de richtvlakken zijn gegeven door de vergelijking:

$$x^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \left(y - \frac{a}{\sin^2 \alpha} \right)^2 = 0.$$

Tot de paraboloïde behooren ook de punten, welke het vertikale vlak door p op P_0 bepaalt.

De hyperbolische paraboloïde is dus volkomen bepaald door haar top, haar beide richtvlakken en een willekeurig punt van de parabool door het vertikale vlak door p uit P_0 uitgesneden.

HOOFDSTUK XIV.

De inversie en de gelijkvormigheidsnetten.

§ 1. Een willekeurige rechte l_1 door een punt C_1 van de ruimte, buiten P_0 gelegen, snijdt P_0 in twee, involutorisch met elkaar verbonden, punten.

De vlakken van den vlakkenbundel met die rechte l_1 tot as snijden P_0 volgens ellipsen.

Die ellipsen worden op het vlak XOY geprojecteerd in de cirkels van een bundel, die de projectie l_1^p van l_1 tot machtlijn heeft.

De projectie C_1^p van C_1 heeft gelijke macht t. o. van alle cirkels van den bundel.

Een andere rechte l_2 door het punt C_1 bepaalt eveneens een cirkelbundel in het vlak XOY , waarvan de machtlijn door C_1^p gaat. Het vlak door de rechten l_1 en l_2 snijdt P_0 volgens een ellips, die op het vlak XOY wordt geprojecteerd in een cirkel, die tot die beide cirkelbundels behoort.

Het punt C_1^p heeft dus dezelfde gelijke macht t. o. van alle cirkels van die beide bundels.

Hieruit volgt voor elke rechte door het punt C_1 , dat het product van de afstanden der projecties van haar snijpunten met P_0 tot de projectie van C_1 constant is.

Voor de rechten van den raakkegel aan P_0 met C_1 tot top vallen die beide snijpunten samen.

Elk van die tweetallen samengevallen snijpunten wordt geprojecteerd in een punt van den door C_1 afgebeelden cirkel (hoofdstuk III).

Is r de straal van den door C_1 afgebeelden cirkel, dan volgt hieruit, dat voor een willekeurige rechte door C_1 het product van de afstanden van de projecties van zijn snijpunten met P_0 tot de projectie van C_1 gelijk is aan r^2 .

Door P_0 en het punt C_1 is nu in het vlak XOY een hyperbolische inversie bepaald.

Het punt C_1^p is het centrum van de inversie.

Voor een punt uit het vlak XOY en zijn inversie, gelegen op een rechte door C_1^p , is het product van hun afstanden tot C_1^p gelijk aan r^2 .

De inversie van een willekeurige figuur wordt gevonden door haar punten op P_0 af te beelden, die beeldpunten met C_1 te verbinden, de andere snijpunten van die verbindingsrechten met P_0 te bepalen en die punten op het vlak XOY te projecteeren.

De figuur van die projecties is dan de inversie der eerste figuur.

De ∞^2 vlakken door C_1 snijden P_0 volgens ellipsen, die op het vlak XOY als cirkels worden geprojecteerd.

De inversie van elk van die cirkels, op de boven aangegeven wijze bepaald, is de cirkel zelf.

Elk van die cirkels (hoofdstuk III) heeft tot beeld de pool van het vlak door C_1 , dat P_0 snijdt volgens de ellips, die op het vlak XOY in dien cirkel wordt geprojecteerd.

Van elk van die cirkels wordt dus het beeldpunt door P_0 harmonisch gescheiden van C_1 .

De beeldpunten van al die cirkels vormen het poolvlak van C_1 . De cirkels vormen een hyperbolisch net. Een hyperbolisch net is dus te beschouwen als de meetkundige plaats van de cirkels uit een hyperbolische inversie, hierdoor gekenmerkt, dat elk exemplaar, nadat aan elk van zijn punten een ander punt is toegevoegd, in zichzelf overgaat.

De eenige cirkel uit de hyperbolische inversie, waarvan elk punt aan zichzelf is toegevoegd, treedt op als de orthogonaalcirkel van dat hyperbolische net.

Kiest men een punt C_2 binnen P_0 , dan is op overeenkomstige wijze een elliptische inversie samen te stellen.

Een elliptisch net is nu te beschouwen als de meetkundige plaats van de cirkels uit een elliptische inversie, hierdoor gekenmerkt, dat elk exemplaar door die inversie in zichzelf overgaat.

Het punt O_2 beeldt weer den, nu imaginairen, orthogonaalcirkel van het net af.

Centrum van inversie en centrum van den diametraalcirkel vallen samen. Is het product van de afstanden van een punt en zijn inversie tot het inversie-centrum gelijk aan $-r^2$, dan heeft de diametraalcirkel een straal r .

§ 2. In de hyperbolische inversie gegeven door P_0 en een punt C_1 , dat dus buiten P_0 ligt, wordt aan den cirkel Λ_1 , met beeldpunt L_1 een andere cirkel Λ_2 met beeldpunt L_2 toegevoegd.

Dit blijkt aldus:

De punten van Λ_1 worden op P_0 afgebeeld door de punten van een ellips E_1 . Die punten worden verbonden met C_1 . De kwadratische kegel, die dan ontstaat, heeft met P_0 een doorsnede van den 4^{en} graad die uit E_1 en een andere ellips E_2 bestaat.

De ellips E_2 wordt dan op het vlak XOY geprojecteerd in een cirkel Λ_2 met beeldpunt L_2 .

Twee kwadratische krommen op een kwadratischen kegel zijn altijd te beschouwen als de doorsnede van dien kegel met een anderen kwadratischen kegel.

Voor de toppen van twee dergelijke kegels geldt de eigenschap, dat zij door de vlakken van die twee kwadratische krommen harmonisch worden gescheiden.

De beide ellipsen E_1 en E_2 liggen dus ook op een kwadratischen kegel met top C_2 ; de beide vlakken gebracht door elk van de punten C_1 en C_2 en de snijlijn van de vlakken, waarin die ellipsen zijn gelegen, vormen met die vlakken een harmonisch viertal.

Een rechte, die C_1 verbindt met een punt van E_1 , snijdt P_0 in een punt van E_2 . Het punt op die rechte, dat met C_1 die punten E_1 en E_2 harmonisch scheidt, is een punt van het poolvlak van C_1 t. o. van P_0 .

Hieruit volgt, dat het vlak door het punt C_2 en de snijlijn van de vlakken van de beide ellipsen het pool

vlak is van C_1 en na eenzelfde beschouwing voor het punt C_2 , dat het vlak door C_1 en die snijlijn het poolvlak is van C_2 .

De toppen C_1 en C_2 beelden dus elkaar orthogonaal snijdende cirkels af.

Uit de gelijkwaardigheid van de beide kegels volgt, dat de cirkels Λ_1 en Λ_2 ook nog in een andere inversie aan elkaar zijn toegevoegd.

Die tweede inversie, die bepaald wordt door P_0 en het punt C_2 is of hyperbolisch of elliptisch.

Beschouwt men dat harmonisch vlakkenviertal als de afbeelding van vier harmonische netten, dan beelden hun polen, de punten L_1 , L_2 , C_1 , C_2 een harmonisch cirkelviertal af.

Het resultaat is dus:

1) Twee cirkels zijn in twee verschillende inversies aan elkaar toegevoegd.

2) In elk van die beide inversies is een net, waarvan de cirkels aan zichzelf zijn toegevoegd.

De orthogonaalcirkels van die beide netten behooren tot den cirkelbundel bepaald door de beide cirkels; de beeldvlakken van die beide netten snijden elkaar dus volgens een rechte, die den bundel afbeeldt toegevoegd aan dien bundel.

3) De orthogonaalcirkels van die beide netten snijden elkaar orthogonaal.

4) De middelpunten van de beide cirkels en van de orthogonaalcirkels vormen een harmonisch viertal.

5) De beide inversies en de netten uit die inversies, waarvan de cirkels aan zichzelf zijn toegevoegd, zijn volkomen door die twee cirkels bepaald.

§ 3. Het punt C_1 , resp. C_2 , ligt in het poolvlak t. o. van P_0 van het punt C_2 , resp. C_1 .

In een door P_0 en het punt C_1 gegeven inversie is nu op eenvoudige wijze het beeldpunt L_2 te bepalen van den cirkel Λ_2 toegevoegd aan den door zijn beeld-

punt L_1 gegeven cirkel Λ_1 . Daartoe is C_1 met L_1 te verbinden, het snijpunt C_2 van die rechte met het poolvlak van C_1 te bepalen en het 4^e punt L_2 te vinden, dat met L_1 het puntenpaar C_1, C_2 harmonisch scheidt.

Beschouwt men een punt als een puntcirkel, dan omvat deze wijze, om van het beeldpunt van een cirkel in een inversie het beeldpunt van den toegevoegden cirkel te bepalen, de oorspronkelijke wijze om van een punt in een inversie het toegevoegde punt te vinden.

Dadelijk is nu in te zien, dat in een inversie aan een cirkelbundel weer een cirkelbundel is toegevoegd.

Immers de beeldrechte van een bundel wordt weer, door van elken cirkel uit dien bundel op de boven aangegeven wijze het beeldpunt van den toegevoegden cirkel te bepalen, in een rechte omgezet. Ook de soort van bundel blijft bij inversie dezelfde.

§ 4. De cirkels, die een gegeven cirkel Λ_1 onder een eenzelfden hoek snijden, vormen parabolische bundels, die afgebeeld worden door de rechten van een eenbladige hyperboloïde, welke P_0 raakt volgens een ellips E_1 , waarvan de punten de punten van Λ_1 afbeelden (hoofdstuk XIII).

In de door P_0 en het punt C_1 bepaalde inversie is aan den cirkel Λ_1 een cirkel Λ_2 toegevoegd, waarvan de punten worden afgebeeld door de punten van een ellips E_2 , op de boven aangegeven wijze uit E_1 verkregen.

Aan de parabolische bundels zijn weer parabolische bundels toegevoegd, waarvan de beeldrechten paarsgewijze gaan door de punten van E_2 .

Aan elken cirkel, waarvan het beeldpunt het snijpunt is van twee rechten van de eenbladige hyperboloïde, is in de inversie weer een cirkel toegevoegd, waarvan het beeldpunt het snijpunt is van twee rechten, die elk gaan door een punt van E_2 .

Hieruit volgt:

In een inversie is aan een cirkel Λ_1 en de cirkels,

die dien cirkel onder eenzelfden hoek snijden, weer een cirkel Λ_2 en een cirkelverzameling toegevoegd.

De cirkels van die cirkelverzameling worden afgebeeld door de punten van een eenbladige hyperboloïde, die P_0 raakt volgens een ellips, waarvan de punten de punten van Λ_2 afbeelden.

Die cirkels snijden dus Λ_2 onder eenzelfden hoek.

Om nu te bewijzen, dat die hoek dezelfde is als de hoek α , waaronder de toegevoegde cirkels den cirkel Λ_1 snijden, is het voldoende, wanneer voor ten minste een snijpunt van de beide raakhyperboloïden wordt aange-toond, dat het een cirkel of ontaarding afbeeldt, die de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 onder eenzelfden hoek snijdt.

Dit geschiedt als volgt:

In elke inversie wordt aan elk punt een ander punt toegevoegd, gelegen op de verbindingsrechte van dat punt met het inversie-centrum. Is C_1^p de projectie van C_1 , dan volgt hieruit, dat de beide raaklijnen uit C_1^p aan Λ_1 weer raaklijnen zijn voor den in die inversie aan Λ_2 toegevoegden cirkel.

De punten van de doorsnede van de eerste raakhyperboloïde met het oneindig verre vlak beelden de rechten af, die den cirkel Λ_1 onder een hoek α snijden, de punten van de snijlijn van het oneindig verre vlak met het raakvlak aan P_0 in het beeldpunt van C_1^p beelden de rechten door C_1^p af.

Er zijn dus twee rechten door C_1^p , die den cirkel Λ_1 onder een hoek α snijden, de beide raaklijnen uit C_1^p aan den cirkel met straal $r_1 \cos \alpha$, die concentrisch is met Λ_1 .

Bij inversie blijven die beide rechten onveranderd. Is r_2 de straal van Λ_2 , dan blijkt dadelijk, dat ze ook raken aan den cirkel met straal $r_2 \cos \alpha$, die concentrisch is met Λ_2 .

Die beide rechten, die worden afgebeeld door twee snijpunten van de beide raakhyperboloïden snijden dus de beide cirkels onder gelijke hoeken.

De inversie is dus een isogonale transformatie.

Boven is gebleken, dat in elk van de beide inversies, waarin de cirkels Λ_1 en Λ_2 aan elkaar zijn toegevoegd, een cirkelnet is, dat bij die inversie niet verandert.

Aangezien de inversie een isogonale transformatie is, volgt hieruit, dat die netten de meetkundige plaatsen zijn van de cirkels, die Λ_1 en Λ_2 onder denzelfden hoek snijden.

§ 5. Een vertikaal vlak door het punt C_1 snijdt de ellips E_1 in twee punten A_1 en B_1 .

De verbindingsrechten van C_1 met die beide punten snijden P_0 in de punten A_2 en B_2 .

Beide rechten worden op het vlak XOY in dezelfde rechte geprojecteerd.

Zijn A_1^p resp. B_1^p , A_2^p , B_2^p de projecties van A_1 , resp. B_1 , A_2 , B_2 , dan zijn de punten A_1^p en A_2^p evenals de punten B_1^p en B_2^p in die inversie aan elkaar toegevoegd.

Voor die punten geldt dus:

$$C_1^p A_1^p \cdot C_1^p A_2^p = r_1^2$$

en

$$C_1^p B_1^p \cdot C_1^p B_2^p = r_1^2.$$

Hieruit volgt: $C_1^p A_1^p : C_1^p B_2^p = C_1^p B_1^p : C_1^p A_2^p$.

De cirkel Λ_2 kan dus door gelijkvormige vergrooing ontstaan uit den cirkel Λ_1 . Het punt C_1^p is hierbij het gelijkvormigheidspunt. Uit de gelijkwaardigheid van de beide inversies volgt nu dadelijk, dat het punt C_2^p als het andere gelijkvormigheidspunt voor die beide cirkels optreedt.

In elk van de beide gevallen dat het vertikale vlak door het punt C_2 aan de ellips E_1 raakt, vallen de punten A_1^p en B_1^p en bijgevolg ook de punten A_2^p en B_2^p samen.

De beide raaklijnen uit C_1^p aan Λ_1 blijven, zooals reeds boven bleek, na inversie raaklijnen aan Λ_2 .

§ 6. Een cirkel Γ , gelegen in het cirkelnet, waarvan

het beeldvlak het punt C_1 tot pool heeft, snijdt Λ_1 in twee punten F_1^p en G_1^p . De aan die punten in de inversie toegevoegde punten zijn de beide andere snijpunten van Γ met de rechten $C_1^p F_1^p$ en $C_1^p G_1^p$.

Hieruit volgt, dat de vier snijpunten van een cirkel Γ , waarvan het beeldpunt gelegen is in een van de beide poolvlakken van de punten C_1 en C_2 , met de cirkels Λ_1 en Λ_2 op twee rechten liggen, die elkaar in een van die beide punten C_1 en C_2 snijden.

Die beide netten, die de gelijkvormigheidspunten van de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 tot centra van hun orthogonaalcirkels (diametraalcirkels) hebben, heeten de gelijkvormigheidsnetten voor die beide cirkels.

De beeldvlakken van de beide gelijkvormigheidsnetten snijden elkaar volgens een rechte, die de toegevoegde poollijn is voor de beeldrechte van den bundel bepaald door die cirkels Λ_1 en Λ_2 .

Die snijlijn is dus tegelijk de beeldrechte van den bundel, waarvan de cirkels Λ_1 en Λ_2 orthogonaal snijden.

§ 7. Wanneer de cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar snijden, dan hebben ook de ellipsen E_1 en E_2 twee punten gemeen en is de verbindingslijn van die twee punten de snijlijn van de beeldvlakken van de beide gelijkvormigheidsnetten van die cirkels. De bundel bepaald door Λ_1 en Λ_2 is elliptisch en wordt dus afgebeeld door een rechte buiten P_0 . De beide punten C_1 en C_2 , de beeldpunten van de orthogonaalcirkels van de beide gelijkvormigheidsnetten, liggen, zooals boven bleek, op die rechte. De orthogonaalcirkels zijn dus reëel, de gelijkvormigheidsnetten hyperbolisch.

De middelpunten van die beide orthogonaalcirkels, de gelijkvormigheidspunten C_1^p en C_2^p verdeelen den afstand tusschen de middelpunten van Λ_1 en Λ_2 uit- en inwendig in reden van de stralen van die cirkels. Die punten C_1^p en C_2^p zijn te vinden door in een van de beide snijpunten van Λ_1 en Λ_2 de stralen te teekenen,

in dat punt de hoeken tusschen die stralen middendoor te deelen en de snijpunten van die bissectrices met de verbindingslijn van de middelpunten van Λ_1 en Λ_2 te bepalen.

Die bissectrices deelen dus ook de hoeken tusschen de raaklijnen in dat snijpunt aan de cirkels Λ_1 en Λ_2 middendoor en raken in dat punt aan de orthogonaal-cirkels Γ_1 en Γ_2 .

Raken de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar, dan raken de ellipsen E_1 en E_2 elkaar ook. De snijlijn van de beeldvlakken van de beide gelijkvormigheidsnetten valt nu samen met de gemeenschappelijke raaklijn aan E_1 en E_2 in hun raakpunt. Een van de beide orthogonaal-cirkels wordt afgebeeld door dat raakpunt, de andere raakt aan Λ_1 en Λ_2 in datzelfde punt. Het eene gelijkvormigheidsnet is hyperbolisch, het andere parabolisch.

Liggen de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 geheel buiten elkaar, dan is de door die cirkels bepaalde bundel hyperbolisch. De ellipsen E_1 en E_2 snijden elkaar niet. De snijlijn van hun vlakken beeldt weer den gemeenschappelijken bundel van de gelijkvormigheidsnetten van die cirkels af. De punten C_1 en C_2 , die twee orthogonaal snijdende cirkels van den door Λ_1 en Λ_2 bepaalden bundel afbeelden, vormen met de puntcirkels van dien bundel een harmonisch viertal (hoofdstuk IX). Een van die beide puntcirkels ligt dus binnen P_0 . Het eene gelijkvormigheidsnet is hyperbolisch, het andere elliptisch.

De netten, waarvan de beeldvlakken gaan door de poollijn van de beeldrechte van den bundel, bepaald door Λ_1 en Λ_2 , en door elk van de beeldpunten van de vier cirkels Λ_1 , Λ_2 , Γ_1 en Γ_2 vormen een harmonisch viertal.

Bijzondere gevallen:

1) De cirkels Λ_1 en Λ_2 ontaarden in een cirkel Λ_1 en een rechte T_2 , die Λ_1 snijdt. De rechte van de middelpunten van de cirkels van den door Λ_1 en T_2

bepaalden bundel is de loodlijn uit het middelpunt van Λ_1 op T_2 neergelaten. De rechte T_2 , de ontaarding van den cirkel Λ_2 , is tegelijk ook als een raaklijn aan dien cirkel te beschouwen. Deelt men in een van de beide snijpunten van Λ_1 en T_2 de hoeken tusschen T_2 en de raaklijn aan Λ_1 in dat punt middendoor, dan zijn de snijpunten van die bissectrices met de rechte van de middelpunten van de cirkels van den door Λ_1 en T_2 bepaalden bundel, de middelpunten van de orthogonaalcirkels van de beide gelijkvormigheidsnetten. De orthogonaalcirkels, die tot den door Λ_1 en T_2 bepaalden bundel behooren, zijn dus volkomen bepaald.

2) Ontaarden de cirkels Λ_1 en Λ_2 in twee rechten T_1 en T_2 , dan wordt de bundel, toegevoegd aan den door T_1 en T_2 bepaalden bundel, afgebeeld door een rechte loodrecht op het vlak XOY door het snijpunt van T_1 en T_2 (hoofdstuk VII).

Het harmonisch netviertal, waarvan de beeldvlakken gaan door die rechte en elk van de beeldpunten van T_1, T_2, Γ_1 en Γ_2 wordt dus afgebeeld door vier vlakken loodrecht op het vlak XOY . De orthogonaalcirkels van de gelijkvormigheidsnetten Γ_1 en Γ_2 ontaarden dus in orthogonaalrechten door het snijpunt van T_1 en T_2 .

T_1 en T_2 zijn behalve als ontaarding van Λ_1 en Λ_2 ook te beschouwen als raaklijnen aan die cirkels. Evenzoo zijn de beide orthogonaalrechten de raaklijnen aan de orthogonaalcirkels, waarvan zij de ontaarding zijn.

De beide bissectrices van de door T_1 en T_2 gevormde hoeken zijn de orthogonaalrechten van de beide gelijkvormigheidsnetten.

3) Ontaarden de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 in een cirkel Λ_1 en een rechte T_2 , die Λ_1 niet snijdt, dan is de bundel, bepaald door Λ_1 en T_2 , hyperbolisch. De middelpunten van de beide orthogonaalcirkels vormen met de middelpunten van Λ_1 en T_2 een harmonisch viertal. Aangezien het middelpunt van T_2 ligt op de

oneindig verre rechte in het vlak XOY , zijn de middelpunten van die beide orthogonaalcirkels symmetrisch gelegen t. o. van het middelpunt van Λ_1 op de loodlijn uit dat middelpunt op T_2 neergelaten. Die middelpunten worden bovendien harmonisch gescheiden door de puntcirkels I_1^p en I_2^p van den door Λ_1 en T_2 bepaalden bundel (hoofdstuk IX).

Die punten C_1^p en C_2^p zijn de snijpunten van Λ_1 met de rechte van de cirkelmiddelpunten van den door Λ_1 en T_2 bepaalden bundel.

Is C_1^p het middelpunt van den orthogonaalcirkel met reëelen straal Γ_1 , dan is C_2^p het middelpunt van den diametraalcirkel van het elliptische gelijkvormigheidsnet. Aangezien Γ_1 in dat elliptische net is gelegen en het middelpunt van dat net, C_2^p , bekend is, is nu op eenvoudige wijze de diametraalcirkel van dat net te bepalen. Daartoe is C_2^p met het middelpunt van Γ_1 te verbinden en daarna in C_2^p de loodlijn op die verbindingslijn op te richten. De beide snijpunten van de loodlijn met Γ_1 bepalen op die loodlijn de uiteinden van een middellijn van den diametraalcirkel van het elliptische gelijkvormigheidsnet.

HOOFDSTUK XV.

De cirkels uit een bundel, die een gegeven cirkel raken of onder een gegeven hoek snijden.

§ 1. De cirkels, die een gegeven cirkel Γ aanraken, worden afgebeeld door de punten van den raakkegel aan P_0 , die het beeldpunt C van Γ tot top heeft.

Een cirkelbundel wordt afgebeeld door een rechte l .

De beide snijpunten van l met den kegel beelden de cirkels uit dien bundel af, die aan Γ raken.

Het vlak gebracht door C en de rechte l is het beeldvlak van het net, bepaald door Γ en den bundel. Dit

vlak zal den raakkegel snijden volgens twee rechten, aanraken of alleen den top er mee gemeen hebben.

In het eerste geval is het net, bepaald door Γ en den bundel, een hyperbolisch net. De beide rechten m en n , door het beeldvlak van dat net uit den kegel gesneden, hebben met l twee punten gemeen, die reële cirkels afbeelden.

In het tweede geval is dat net een parabolisch net. De beide rechten m en n zijn samengevallen, dus ook hun snijpunten met l . Het snijpunt beeldt een reëlen cirkel af, die voor twee moet worden geteld.

In het derde geval is het net elliptisch. Er zijn geen reële cirkels uit den bundel met beeldrechte l , die aan den cirkel Γ raken.

Hieruit volgt, dat in elken hyperbolischen cirkelbundel altijd twee gescheiden reële cirkels en in elken parabolischen cirkelbundel twee gescheiden of twee samenvallende reële cirkels zijn te vinden, die aan een gegeven willekeurigen cirkel raken. Voor een elliptischen bundel zijn twee gescheiden of twee samenvallende reële cirkels te vinden, naarmate het net, bepaald door den willekeurigen cirkel en dien bundel, hyperbolisch of parabolisch is.

In een elliptischen bundel, die met een gegeven cirkel een elliptisch net bepaalt, zijn geen reële cirkels, die aan den gegeven cirkel raken.

De ruimte-constructie, waarbij de snijpunten van de rechten m en n met de rechte l werden bepaald, geeft nu de aanwijzing voor de constructie in het platte vlak van de cirkels uit een bundel, die aan een gegeven cirkel raken.

Is Γ de gegeven cirkel met middelpunt C^p en zijn I_1^p en I_2^p de puntcirkels van den bundel, dan wordt eerst de orthogonaalcirkel van het net geconstrueerd door in den bundel bepaald door Γ en I_1^p den anderen puntcirkel te vinden. Die puntcirkel I_3^p is het midden van de als koorde van Γ beschouwde poollijn van I_1^p t. o. van Γ .

De cirkel door de punten I_1^p, I_2^p en I_3^p is dan de orthogonaalcirkel van het net. De snijpunten van dien orthogonaalcirkel met Γ , de punten S_1^p en S_2^p , geven verbonden met C^p de rechten m^p en n^p .

De snijpunten van die rechten m^p en n^p met de bindingsrechte l^p van de punten I_1^p en I_2^p , de punten M_1 en M_2 , zijn nu de middelpunten van de beide raakcirkels. De stralen van die beide raakcirkels zijn tegelijk gegeven door de afstanden $M_1 S_1^p$ en $M_2 S_2^p$.

De beide cirkels, die een gegeven cirkel Γ onder een gegeven hoek α snijden en tot een gegeven bundel behooren, worden afgebeeld door de snijpunten van een raakhyperboloïde aan P_0 en de beeldrechte van dien bundel.

Uit den onderlingen stand van P_0 , de raakhyperboloïde en de beeldrechte van den bundel, is op eenvoudige wijze stereometrisch aan te toonen, dat bij een hyperbolischen of elliptischen bundel die beide cirkels of reëel of imaginair zijn of tot één reëlen cirkel kunnen samenvallen, en dat bij een parabolischen bundel die beide cirkels of reëel zijn of tot één reëlen cirkel samenvallen.

Ook hier geeft de ruimte-constructie de aanwijzing voor het bepalen van de beide cirkels uit den bundel.

Een willekeurig vlak door de beeldrechte van den bundel snijdt de hyperboloïde volgens een kwadratische kromme. Beeldrechte en kwadratische kromme worden op het vlak XOY weer als een rechte en een kwadratische kromme geprojecteerd. De beide snijpunten van die rechte en de kwadratische kromme zijn de middelpunten van de beide cirkels.

De constructie wordt nu de volgende:

Bepaal den orthogonaal- of diametraalcirkel van het net, dat den cirkel Γ en den gegeven bundel bevat, bepaal daarna de middelpunten van vijf cirkels, die dat net gemeen heeft met vijf parabolische cirkelbundels, die den cirkel Γ onder een hoek α snijden.

De beide snijpunten van de rechte van de cirkelmiddelpunten van den gegeven bundel met de kegelsnede, bepaald door die vijf punten, zijn de middelpunten van de beide cirkels.

Die middelpunten zijn nu te vinden als het gemeenschappelijk puntenpaar van twee punteninvoluties op die rechte, ingesneden door de kegelsneden van twee verschillende bundels, die elk vier van die vijf punten tot basispunten hebben.

Een eenvoudiger constructie wordt evenwel verkregen met behulp van de inversie. Hierbij dient onderscheid te worden gemaakt tusschen een elliptischen en een hyperbolischen bundel.

Zijn V_1^p en V_2^p de beide basispunten van den elliptischen bundel en is Γ de gegeven cirkel met beeldpunt C , dan is als volgt een inversie in elkaar te zetten.

Bepaal het poolvlak van C , bepaal het snijpunt C_1 met dat poolvlak van den vertikaal op het vlak XOY door het punt V_1^p , bepaal het poolvlak van C_1 . In dat poolvlak ligt dan weer het punt C . Bij de inversie, bepaald door P_0 en het punt C_1 , blijft dus Γ onveranderd (hoofdstuk XIV).

De beide cirkels uit den bundel, bepaald door V_1^p en V_2^p , die Γ onder den gegeven hoek α snijden, zullen na inversie overgaan in twee cirkels uit den bundel, die na inversie uit den eersten ontstaat. Aangezien de inversie een isogonale transformatie is, zullen ook die beide cirkels Γ weer onder denzelfden hoek α snijden.

Het punt V_1^p wordt op P_0 afgebeeld door een punt V_1 . Dit punt V_1 ligt op den vertikaal door V_1^p halverwege tusschen het snijpunt van dien vertikaal met het poolvlak van C_1 en het punt C_1 zelf (hoofdstuk III).

In de inversie bepaald door P_0 en het punt C_1 wordt dus aan het punt V_1 het raakpunt toegevoegd van P_0 met het oneindig verre vlak. Aan het punt V_2 , dat op P_0 het punt V_2^p afbeeldt, wordt op de gewone manier een punt V_3 toegevoegd. De in die inversie aan den

oorspronkelijken bundel toegevoegde bundel wordt dus afgebeeld door de rechte volgens welke het oneindig verre vlak en het raakvlak aan P_0 in het punt V_3 elkaar snijden (hoofdstuk VII).

De cirkelbundel door de beide punten V_1^p en V_2^p gaat dus na inversie over in een stralenbundel door het punt V_3^p , het punt, waarin V_3 op het vlak XOY wordt geprojecteerd.

De beide raaklijnen uit dat punt V_3^p aan den met Γ concentrischen cirkel met straal $r \cos \alpha$ zijn in de door P_0 en het punt C_1 bepaalde inversie toegevoegd aan de beide cirkels uit den oorspronkelijken bundel, die Γ onder een gegeven hoek α snijden. Die beide cirkels zijn nu op eenvoudige wijze uit die raaklijnen af te leiden.

§ 2. Zijn I_1^p en I_2^p de beide puntcirkels van een hyperbolischen bundel en is Γ de gegeven cirkel met beeldpunt C , dan wordt op overeenkomstige wijze als met de punten V_1^p en V_2^p nu met behulp van de punten I_1^p en I_2^p een inversie in elkaar gezet. Zijn I_1 en I_2 de beeldpunten van die beide puntcirkels, dan wordt op P_0 aan I_1 het raakpunt van P_0 aan het oneindig verre vlak en aan I_2 een punt I_3 toegevoegd. De beeldrechte van den na inversie verkregen hyperbolischen bundel is dus een vertikaal op het vlak XOY door het punt I_3 . De cirkelbundel, bepaald door de beide puntcirkels I_1^p en I_2^p , gaat dus na inversie over in een bundel concentrische cirkels, die het punt I_3^p , de projectie op het vlak XOY van het punt I_3 , tot middelpunt hebben.

De beide cirkels uit dien concentrischen bundel, die Γ onder een hoek α snijden, worden nu als volgt gevonden. Trek aan den met Γ concentrischen cirkel met straal $r \sin \alpha$ een van de beide raaklijnen uit I_3^p , bepaal van die raaklijn de beide snijpunten A^p en B^p met Γ en beschrijf twee cirkels met middelpunt I_3^p en stralen $I_3^p A^p$ en $I_3^p B^p$. De beide cirkels uit den oorspronkelijken

bundel, die Γ onder een hoek α snijden, zijn nu op eenvoudige wijze uit deze cirkels af te leiden.

HOOFDSTUK XVI.

Het cirkelstelsel met index 2.

§ 1. De cirkels, die door eenzelfde punt van het vlak XOY gaan, worden afgebeeld door de punten van het raakvlak aan P_0 in het beeld van dat punt.

Voor een cirkelstelsel met index 2 in het vlak XOY geldt dus, dat in elk raakvlak aan P_0 twee punten zijn gelegen, die twee cirkels van dat stelsel afbeelden.

Hieruit volgt dadelijk, dat de cirkels van een cirkelstelsel met index 2 worden afgebeeld door de punten van een kwadratische kromme. Omgekeerd is iedere kwadratische kromme te beschouwen als de afbeelding van een cirkelstelsel met index 2.

Tegelijk blijkt hieruit, dat een cirkelstelsel met index n wordt afgebeeld door een kromme van den n^{den} graad.

Een cirkelstelsel met index 2 is dus bepaald door vijf cirkels, die tot hetzelfde net behooren.

Een eenvoudiger wijze om een dergelijk stelsel te doen ontstaan dan met vijf cirkels is analytisch te vinden.

De vergelijking van een stelsel met index 2 is de volgende:

$$(a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3)(X^2 + Y^2) - 2(b_1 + \lambda b_2 + \lambda^2 b_3)X - \\ - 2(c_1 + \lambda c_2 + \lambda^2 c_3)Y + d_1 + \lambda d_2 + \lambda^2 d_3 = 0$$

of

$$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \lambda^2 \Gamma_3 = 0.$$

Zijn $x_1 | y_1 | z_1$, resp. $x_2 | y_2 | z_2$, $x_3 | y_3 | z_3$ de coördinaten van de beeldpunten van Γ_1 resp. Γ_2, Γ_3 en $x | y | z$ de coördinaten van het beeldpunt van een willekeurigen

cirkel van het stelsel, dan is op overeenkomstige wijze als in hoofdstuk I in te zien, dat:

$$x = \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \lambda^2 a_3 x_3}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3}$$

$$y = \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2 + \lambda^2 a_3 y_3}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3}$$

$$z = \frac{a_1 z_1 + \lambda a_2 z_2 + \lambda^2 a_3 z_3}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3}$$

Die drie vergelijkingen bepalen een kwadratische kromme. Zij zijn ook uit de drie vergelijkingen voor het cirkelnet, zie hoofdstuk I, af te leiden, wanneer men daarin μ vervangt door λ^2 . De kwadratische kromme ligt dus in het beeldvlak van het net bepaald door die drie cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 .

Voor $\lambda = 0$ is $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ en
voor $\lambda = \infty$ is $x = x_3$, $y = y_3$, $z = z_3$

De beeldkromme van het stelsel gaat door de beeldpunten van de cirkels Γ_1 en Γ_3 .

De projectie van de beeldkromme op het vlak XOY , d.i. de kromme van de middelpunten van de cirkels van het stelsel, heeft tot vergelijkingen:

$$x = \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \lambda^2 a_3 x_3}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3}$$

$$y = \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2 + \lambda^2 a_3 y_3}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3}$$

De eliminatie van λ uit die beide vergelijkingen geeft de vergelijking van de kegelsnede in den vorm:

$$\begin{aligned} & a_1 a_3 \{ (y_3 - y_1) x - (x_3 - x_1) y + x_3 y_1 - x_1 y_3 \}^2 - \\ & - a_2^2 \{ (y_3 - y_2) x - (x_3 - x_2) y + x_3 y_2 - x_2 y_3 \} \times \\ & \times \{ (y_2 - y_1) x - (x_2 - x_1) y + x_2 y_1 - x_1 y_2 \} = 0 \end{aligned}$$

Deze vergelijking is ook te brengen tot den meer eenvoudigen vorm $a_1 a_3 L_{13}^2 - a_2^2 L_{23} L_{12} = 0$, waarbij $L_{13} = 0$ de vergelijking is van de verbindingslijn van de middelpunten van Γ_1 en Γ_3 , $L_{23} = 0$ die van Γ_2 en Γ_3 en $L_{12} = 0$ die van Γ_1 en Γ_2 .

De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels van een aldus bepaalde cirkelschaar is een kegelsnede, die door de middelpunten van twee van die cirkels Γ_1 en Γ_3 gaat en in die punten raakt aan de verbindingsrechten van die punten met het middelpunt van den cirkel Γ_2 .

Door de verhouding $\frac{a_2^2}{a_1 a_3}$ is die kegelsnede geheel bepaald.

Uit het feit, dat bij de bepaling van de cirkelschaar door de vergelijking: $\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \lambda^2 \Gamma_3 = 0$, ook de coëfficiënten a_1 , a_2 en a_3 , die eigenlijk met de cirkels niets te maken hebben, een rol spelen, volgt dat de drie cirkels niet één stelsel met index 2 bepalen, maar een enkelvoudig oneindig aantal stelsels. De beeldkrommen van die stelsels liggen in één plat vlak en vormen een kegelsnedenbundel, waarvan de vier basispunten twee aan twee zijn samengevallen in de beeldpunten van Γ_1 en Γ_3 op de rechten, die het beeldpunt van Γ_2 met die beide beeldpunten verbinden.

Een cirkelstelsel met index 2, een kwadratische cirkelschaar, wordt dus afgebeeld door de doorsnijding van een plat vlak en een kwadratischen cylinder, waarvan de beschrijvende rechten loodrecht op het vlak $X O Y$ staan.

Het platte vlak is het beeldvlak van het net, bepaald door de drie cirkels; de richtkromme van den cylinder in het vlak $X O Y$ is de kegelsnede van de middelpunten van de cirkels van het stelsel.

In het vlak $X O Y$ is een kwadratische cirkelschaar dus volkomen bepaald, wanneer gegeven zijn de kegelsnede K^p van de middelpunten van de cirkels van die schaar en de orthogonaal-, resp. punt- of diametraal-cirkel van het net, waartoe die cirkels behooren.

De kwadratische cirkelscharen zijn in vijf soorten in te deelen:

1^o) De cirkels van de schaar behooren tot een hyper-

bolisch net; de raaklijnen aan K^p snijden den orthogonaalcirkel niet. Tot deze schaar behooren geen puntcirkels.

2^o) De cirkels van de schaar behooren tot een hyperbolisch net; een deel van de raaklijnen aan K^p snijdt den orthogonaalcirkel. In de scharen van deze soort kunnen zoowel 0, 2 als 4 puntcirkels voorkomen, die ook nog weer twee aan twee kunnen samenvallen.

3^o) De cirkels van de schaar behooren tot een hyperbolisch net. Alle raaklijnen aan K^p snijden den orthogonaalcirkel. Is K^p een ellips, dan is die ellips binnen den orthogonaalcirkel gelegen, is K^p een hyperbool, dan bevat de schaar vier puntcirkels.

4^o) De cirkels van de schaar behooren tot een parabolisch net.

5^o) De cirkels van de schaar behooren tot een elliptisch net. Deze indeeling, aan de hand van de ruimtevoorstelling, houdt, zooals later zal blijken, verband met de soorten van omhullingsfiguren van de cirkels van een schaar.

§ 2. De constructie van de beide cirkels door een punt X^p van het vlak XOY , die behooren tot een kwadratische cirkelschaar, gegeven door een kegelsnede K^p en den orthogonaal-, resp. punt-, diametraalcirkel van het net, waartoe die schaar behoort, is uit de ruimtevoorstelling af te leiden.

De beide cirkels behooren tot het net, dat wordt afgebeeld door het raakvlak aan P_0 in het beeldpunt X van X^p .

De beide cirkels worden dus afgebeeld door twee punten van de rechte, volgens welke dat raakvlak en het beeldvlak van het net van de schaar elkaar snijden.

De beide snijpunten van die rechte met de beeldkromme K van de schaar zijn nu de beeldpunten van die beide cirkels.

De middelpunten van die beide cirkels zijn dus de

snijpunten van K^p met den centraal van den bundel, die het net waartoe de schaar behoort, en het parabolische net met het vaste punt X^p met elkaar gemeen hebben.

Is het net, waartoe die schaar behoort, gegeven door zijn orthogonaal-, punt- of diametraalcirkel, dan is (hoofdstuk X), die centraal dadelijk te bepalen.

Raakt die centraal aan K^p dan vallen de beide cirkels door X^p samen en is X^p een punt van de omhullingsfiguur van de cirkels van de schaar.

Omgekeerd is nu, weer aan de hand van de ruimtevoorstelling, uit de raaklijnen aan K^p en den orthogonaal-, punt-, of diametraalcirkel van het net, waartoe de schaar behoort, die omhullingsfiguur te construeeren en zijn de eigenschappen van die figuur te vinden.

Alvorens daartoe over te gaan, verdient het aanbeveling, om eerst langs analytischen weg iets van die omhullingsfiguur te weten te komen.

Is $\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \lambda^2 \Gamma_3 = 0$ weer de vergelijking van die schaar, dan is de vergelijking van de omhullingsfiguur:

$$4 \Gamma_1 \Gamma_3 - \Gamma_2^2 = 0$$

De omhullingsfiguur is een kromme van den vierden graad.

De bovenstaande vergelijking is ook te brengen tot den vorm:

$$a_1 (x^2 + y^2)^2 + a_2 (x^2 + y^2) + a_3 = 0.$$

Hierbij is: $a_1 = \text{const.}$

$$a_2 = b_1 x + b_2 y + b_3$$

$$a_3 = c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2 + c_4 x + c_5 y + c_6$$

De b 's en de c 's zijn constanten.

Hieruit volgt, dat de omhullingsfiguur van een kwadratische cirkelschaar ook te beschouwen is als de projectie op het vlak XOY van de doorsnijdingskromme van P_0 en een kwadratisch oppervlak.

Om nu op de boven reeds aangestipte wijze de om-

hullingsfiguur te construeeren zal, om de gedachte te bepalen, worden uitgegaan van een kwadratische cirkelschaar van de 1^e soort en zal voor K^p worden gekozen een ellips.

Een punt X^p van de omhullingskromme is hierdoor gekenmerkt, dat het raakvlak aan P_0 in zijn beeldpunt X het beeldvlak van het net van de schaar snijdt volgens een raaklijn aan de beeldkromme K van de schaar.

De punten X worden dus paarsgewijze gevonden als de raakpunten van de beide raakvlakken aan P_0 door elk van de raaklijnen t van die beeldkromme K .

De beide punten X , behoorende bij een gegeven raaklijn t , zijn dus de snijpunten van P_0 met de aan t t. o. van P_0 toegevoegde poollijn.

De raaklijnen t liggen in een plat vlak, het beeldvlak van het net van de schaar; de toegevoegde poollijnen gaan dus door een punt, het beeldpunt C van den orthogonaalcirkel van het net.

In verband met de boven afgeleide vergelijking van de omhullingskromme, is nu dadelijk in te zien, dat die poollijnen een kwadratischen kegel vormen.

Ook onafhankelijk van die vergelijking is dit aan te toonen. De poollijnen der raaklijnen van K t. o. van P_0 gaan allen door de pool van het vlak van K , het punt C .

Door elk punt Y van het vlak van K gaan twee raaklijnen aan K . De poollijnen van die beide raaklijnen liggen in het poolvlak van Y en gaan door het punt C . Elk plat vlak door het punt C bevat twee poollijnen van raaklijnen aan K . De poollijnenkegel is kwadratisch.

Hieruit volgt: De omhullingskromme van de cirkels van een stelsel met index 2 is de projectie op het vlak XOY van de doorsnijdingskromme van P_0 met een kegel, waarvan de beschrijvende lijnen de t. o. van P_0 toegevoegde poollijnen zijn van de raaklijnen van de beeldkromme van het stelsel.

Een raaklijn t aan K en de toegevoegde poollijn p

worden op het vlak XOY geprojecteerd in twee loodrecht snijdende rechten (hoofdstuk VII).

Die rechten zijn de raaklijn t^p aan K^p en de rechte p^p door het middelpunt C^p van den orthogonaalcirkel van het net, waartoe de schaar behoort.

De rechte p^p is de centraal van den door p afgebeelden bundel. De orthogonaalcirkel van het net behoort tot dien bundel, de rechte t^p is de machtslijn.

De puntcirkels van den aldus gegeven bundel zijn nu in het vlak XOY op eenvoudige wijze te construeeren.

Die puntcirkels zijn dan een puntenpaar van de omhullingskromme C_4 van de schaar.

De punten van C_4 zijn in involutorische paren te rangschikken, die symmetrisch liggen t. o. van de raaklijnen aan K^p .

§ 3. Op ongezochte wijze verschijnt bij de constructie van die C_4 nog een andere kromme, de kromme V_4 van de voetpunten van de loodlijnen uit het middelpunt van Γ op de raaklijnen van K^p neergelaten. De punten van die kromme liggen elk in het midden van de beide punten van een involutorisch puntenpaar. Elk punt van die kromme is de projectie van het midden van een beschrijvende rechte van den kegel van de poollijnen, als koorde van P_0 beschouwd.

Op vrij eenvoudige wijze is aan te toonen, dat de middens van alle koorden van P_0 , die door eenzelfde punt gaan, weer een omwentelingsparaboloïde vormen, waarvan de as evenwijdig is aan de as van P_0 .

Die voetpuntenkromme is dus de projectie van de doorsnijding van een omwentelingsparaboloïde en een kwadratischen kegel.

Die voetpuntenkromme is dus een 4^e graadskromme geheel van dezelfde soort als de kromme C_4 .

§ 4. De kegel van de poollijnen en P_0 bepalen een bundel kwadratische oppervlakken, waarvan de basis-

kromme op het vlak XOY in de kromme C_4 wordt geprojecteerd.

In dien bundel zijn behalve den kegel van de poollijnen nog drie kwadratische kegels. De toppen van de vier kegels uit den bundel zijn de hoekpunten van een pooltetraeder van P_0 .

De poollijnen van de beschrijvende rechten van elk van die vier kegels omhullen vier kegelsneden, elk gelegen in een zijvlak van dien pooltetraeder.

De vier kegelsneden zijn de beeldkrommen van vier cirkelscharen, die omhuld worden door dezelfde kromme C_4 .

De toppen van de vier kegels worden op het vlak XOY geprojecteerd in de orthocentrische groep van de punten C^p .

Door die vier punten C^p zijn, zie hoofdstuk VIII, de vier orthogonaalcirkels bepaald van de vier netten, waartoe die cirkelscharen behooren.

De vier orthogonaalcirkels liggen dus drie aan drie met een van de vier cirkelscharen in hetzelfde net.

§ 5. Omgekeerd zijn nu verschillende eigenschappen opgespoord voor de algebraïsche kromme, gegeven door de vergelijking:

$$a_1(x^2 + y^2)^2 + a_2(x^2 + y^2) + a_3 = 0,$$

waarbij $a_1 = \text{const.}$, $a_2 = b_1 x + b_2 y + b_3$, $a_3 = c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2 + c_4 x + c_5 y + c_6$ en waarbij de b 's en de c 's constanten zijn.

Voor die kromme C_4 geldt dus:

De punten ervan zijn op vier manieren in involutorische paren te rangschikken.

De verbindingsrechten van de puntenparen uit eenzelfde involutie snijden elkaar in een punt C^p .

Die vier punten C^p vormen een orthocentrische groep.

De middelloodlijnen van de verbindingsrechten van de puntenparen uit eenzelfde involutie omhullen een kegelsnede K^p .

De loodlijnen opgericht op C_4 in elk van de beide

punten van een paar uit dezelfde involutie, snijden elkaar op de middelloodlijn van de verbindingsrechte van die beide punten.

Hierin ligt tevens opgesloten, dat de beide loodlijnen elkaar snijden in het middelpunt van den cirkel, die in die beide punten C_4 raakt.

Het middelpunt van den cirkel is een punt van K^p .

De kromme C_4 omhult vier kwadratische cirkelscharen.

De vier kegelsneden K^p zijn de meetkundige plaatsen van de middelpunten van de cirkels van elk van de vier scharen.

De vier netten van cirkels, waartoe die vier cirkelscharen behooren hebben de punten van de orthocentrische groep C^p tot middelpunten van hun orthogonaal-cirkels.

De vier orthogonaalcirkels snijden elkaar twee aan twee orthogonaal en zijn dus volkomen bepaald door hun middelpunten (hoofdstuk VIII).

Een van de vier orthogonaalcirkels is altijd imaginair, een van de cirkelscharen is dus van de 4^e soort, de andere drie behooren tot de eerste, tweede of derde soort.

§ 5. De verschillen tusschen de kwadratische cirkelscharen van de verschillende soorten en hun bijzondere eigenschappen komen het best uit bij de constructie van hun omhullingskrommen.

De kwadratische cirkelschaar van de 1^e soort heeft zoowel in het geval, dat K^p een ellips is, als in het geval, dat K^p een hyperbool is, een omhullingskromme, die uit twee gesloten takken bestaat. Voor het geval, dat K^p een hyperbool is raken die beide takken aan elk van de beide loodlijnen uit het middelpunt van den orthogonaalcirkel op de asymptoten van de hyperbool neergelaten.

Is bij de kwadratische cirkelschaar van de 2^e soort K^p een ellips, die den orthogonaalcirkel in twee punten snijdt, dan snijdt de omhullingskromme den orthogonaal-

cirkel orthogonaal in de beide raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijnen van ellips en orthogonaal-cirkel.

De kwadratische cirkelschaar van de 3^e soort bestaat alleen uit imaginaire cirkels.

Bij de kwadratische cirkelschaar van de 4^e soort bezit de omhullingskromme een geïsoleerd punt, het vaste punt van het parabolische net.

Een zeer bijzonder geval van een dergelijke cirkelschaar wordt verkregen, wanneer men voor K^p een ellips kiest en voor het vaste punt een van de brandpunten van die ellips. De omhullingsfiguur gaat dan over in een cirkel, die het andere brandpunt tot middelpunt en de lange as tot straal heeft. Het eerste brandpunt is weer voor die omhullingsfiguur het geïsoleerde punt.

Voor de kwadratische cirkelschaar van de 5^e soort bestaat in het geval, dat K^p een ellips is en het middelpunt van den diametraalcirkel buiten die ellips is gelegen de omhullingskromme uit twee gesloten takken.

HOOFDSTUK XVII.

De cirkels, die aan twee gegeven cirkels raken.

§ 1. Twee cirkels met vergelijkingen $\Lambda_1 = 0$ en $\Lambda_2 = 0$ zijn te beschouwen als een algebraïsche kromme van den 4^{en} graad, die tot vergelijking heeft:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 0$$

De algebraïsche kromme is, wat dadelijk blijkt bij uitwerken van het linkerlid van de bovenstaande vergelijking een bijzonder geval van de kromme C_4 uit het vorige hoofdstuk.

Hieruit volgt dadelijk, dat die beide cirkels door de cirkels van een viertal kwadratische cirkelscharen worden aangeraakt.

Die kwadratische cirkelscharen worden afgebeeld door kwadratische krommen, gelegen in de vier zijvlakken van een pooltetraeder, die tot hoekpunten heeft de toppen van vier kegels uit een bundel kwadratische oppervlakken.

De basiskromme van dien bundel is de kromme op P_0 , die op het vlak XOY in de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 wordt geprojecteerd; de basiskromme bestaat dus uit twee ellipsen E_1 en E_2 .

Hieruit volgt dadelijk, dat er van de vier kegels uit den bundel maar twee eigenlijke kegels overblijven, want dat het vlakkenpaar, dat de ellipsen E_1 en E_2 bevat, tweemaal als een ontaarde kegel uit den bundel moet worden beschouwd.

Twee van de vier kegeltoppen en bijgevolg ook twee van de cirkelscharen zijn onbepaald.

De beide toppen van de eigenlijke kegels zijn nu, zie hoofdstuk XIV, de beide punten C_1 en C_2 , die met P_0 de beide inversies bepalen, waarin de cirkels Λ_1 en Λ_2 aan elkaar zijn toegevoegd.

Het resultaat is dus:

De cirkels, die aan twee gegeven cirkels raken, vormen twee kwadratische cirkelscharen.

Elk van de beide gelijkvormigheidsnetten van die twee gegeven cirkels bevat een van de beide cirkelscharen.

De middelpunten van de cirkels, die aan twee gegeven cirkels raken, liggen op twee kegelsneden.

§ 2. De cirkels, die aan twee gegeven cirkels Λ_1 en Λ_2 raken, worden afgebeeld door de punten van de snijkromme van de beide raakkegels aan P_0 , die tot toppen hebben de beeldpunten L_1 en L_2 van die beide cirkels.

Uit hetgeen boven is gevonden, volgt nu, dat die snijkromme bestaat uit twee kegelsneden.

Ook onafhankelijk daarvan is dit aan te toonen.

Elk vlak door de rechte $L_1 L_2$ snijdt P_0 en de beide raakkegels aan P_0 volgens een ellips en twee paar raaklijnen aan die ellips.

Die twee paar raaklijnen vormen een volledige vierzijde, waarvan de hoekpunten zijn de punten L_1 en L_2 en vier punten A, B, C en D.

Die punten A, B, C en D zijn nu vier punten van de snijkromme.

De drie nevenzijden van die volledige vierzijde snijden elkaar in twee punten Q en R, op de rechte $L_1 L_2$ gelegen, en in een punt P.

Voor een om een kegelsnede beschreven volledige vierzijde geldt de eigenschap, dat het snijpunt van twee nevenzijden pool is voor de derde.

Het punt P is dus de pool voor de rechte $L_1 L_2$ en bijgevolg een punt van de aan $L_1 L_2$ t. o. van P_0 toegevoegde poollijn.

Elk vlak door $L_1 L_2$ bepaalt dus een ander punt P op die poollijn.

De punten Q en R zijn voor alle vlakken door $L_1 L_2$ dezelfde.

Immers zij worden door de punten L_1 en L_2 harmonisch gescheiden en beelden bovendien twee elkaar orthogonaal snijdende cirkels van een cirkelbundel af. Die punten Q en R vormen een puntenpaar, dat twee op de rechte $L_1 L_2$ bepaalde involuties met elkaar gemeen hebben.

Het puntenpaar A, B ligt in het vlak bepaald door R en de toegevoegde poollijn van $L_1 L_2$, het puntenpaar C, D in het vlak bepaald door Q en die poollijn.

Die beide vlakken zijn weer de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten van Λ_1 en Λ_2 , de punten Q en R zijn weer de beeldpunten van de orthogonaalcirkels van die netten.

De beeldkrommen van de beide kwadratische cirkelscharen, waarvan de cirkels aan twee gegeven cirkels raken, zijn dus ook dadelijk te vinden door elk van de beide boven besproken raakkegels aan P_0 te doorsnijden met de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten van die beide cirkels.

§ 3. Wanneer de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar snijden, dan zullen de beide ellipsen E_1 en E_2 , welke de punten van Λ_1 en Λ_2 afbeelden, elkaar snijden volgens twee punten S_1 en S_2 . De rechte $S_1 S_2$ is de poollijn van $L_1 L_2$ t. o. van P_0 .

De beide raakvlakken door $L_1 L_2$ aan P_0 , die P_0 in de punten S_1 en S_2 aanraken, zijn tegelijk twee gemeenschappelijke raakvlakken aan de beide raakkegels aan P_0 met toppen L_1 en L_2 .

De punten S_1 en S_2 zijn ook de beide snijpunten van de twee kegelsneden, die de raakkegels met elkaar gemeen hebben.

Immers bepaalt men de snijkromme van die beide raakkegels door de snijpunten te bepalen van de beschrijvende rechten van den raakkegel met top L_1 met den raakkegel met top L_2 , dan blijkt, dat die beide snijpunten samenvallen op de rechten $L_1 S_1$ en $L_1 S_2$ in de punten S_1 , resp. S_2 .

Die punten S_1 en S_2 zijn dus dubbelpunten van de doorsnijdingskromme van die beide raakkegels en bijgevolg de snijpunten van de beide kegelsneden.

De kegelsneden van de doorsnijdingskromme liggen in de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten en gaan door de punten S_1 en S_2 .

De beeldvlakken snijden P_0 volgens twee ellipsen door de punten S_1 en S_2 , die op het vlak $X O Y$ worden geprojecteerd in de orthogonaal snijdende orthogonaalcirkels Γ_1 en Γ_2 van de gelijkvormigheidsnetten (hoofdstuk XIV).

Raakkegels en P_0 hebben in de punten S_1 en S_2 dezelfde raakvlakken.

De beide kegelsneden van de snijkromme worden dus op het vlak $X O Y$ geprojecteerd in twee kegelsneden, die elk een van de beide orthogonaalcirkels aanraken in de beide punten, die de orthogonaalcirkels met elkaar gemeen hebben.

De beide kegelsneden snijden elkaar tweemaal loodrecht.

Het resultaat is dus:

De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die aan twee snijdende cirkels raken, bestaat uit twee kwadratische krommen, die elkaar loodrecht snijden in de beide snijpunten van die twee cirkels en die in diezelfde punten raken aan de orthogonaalcirkels van de gelijkvormigheidsnetten van die cirkels.

§ 4. Wanneer de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar raken, dan raakt de rechte $L_1 L_2$ aan P_0 in een punt S.

Het beeldvlak van een van de beide gelijkvormigheidsnetten is het raakvlak aan P_0 in het punt S.

Dat beeldvlak raakt elk van de raakkegels aan P_0 met toppen L_1 en L_2 volgens de rechte $L_1 L_2$, de verbindingslijn van die toppen.

Een van de beide kegelsneden van de doorsnijdingskromme bestaat dus uit de dubbelgetelde rechte $L_1 L_2$.

Die rechte $L_1 L_2$ wordt op het vlak $X O Y$ geprojecteerd in de rechte $L_1^p L_2^p$, de verbindingslijn van de middelpunten van de cirkels Λ_1 en Λ_2 .

Het resultaat is dus:

De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die aan twee elkaar rakende cirkels raken, bestaat uit een kwadratische kromme, die die cirkels in hun gemeenschappelijk raakpunt aanraakt en uit de dubbel te tellen verbindingsrechte van de middelpunten van die cirkels.

§ 5. Wanneer de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar niet snijden, dan zijn de beide punten S_1 en S_2 imaginair geworden. De beide kwadratische krommen, die de meetkundige plaats vormen van de middelpunten van de cirkels, die aan die beide cirkels raken, snijden elkaar loodrecht in twee imaginaire punten.

HOOFDSTUK XVIII.

De cirkels, die twee gegeven cirkels onder eenzelfde gegeven hoek snijden.

§ 1. De cirkels, die twee gegeven cirkels Λ_1 en Λ_2 onder denzelfden hoek α snijden, worden afgebeeld door de snijkromme van twee eenbladige aan P_0 rakende hyperboloïden. Die beide hyperboloïden raken P_0 aan volgens ellipsen E_1 en E_2 , waarvan de punten de beeldpunten zijn van de punten van Λ_1 en Λ_2 (hoofdstuk XIII).

Die snijkromme bestaat weer uit twee kegelsneden. Immers die snijkromme is ook dadelijk te vinden door elk van de beide raakhyperboloïden te snijden met de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten van de cirkels Λ_1 en Λ_2 .

De cirkels, die twee gegeven cirkels onder eenzelfde gegeven hoek snijden, vormen twee cirkelscharen.

§ 2. De verschillende eenbladige raakhyperboloïden aan P_0 , waarvan bij elk de punten ervan de cirkels afbeelden, die Λ_1 onder denzelfden hoek snijden vormen met P_0 en den raakkegel aan P_0 , die het punt L_1 , het beeldpunt van Λ_1 , tot top heeft, een bundel kwadratische oppervlakken.

Doorsnijdt men de oppervlakken van dien bundel met de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten van de cirkels Λ_1 en Λ_2 , dan vormen de snijkrommen in elk van die beeldvlakken een kegelsnedenbundel.

Die beide kegelsnedenbundels worden op het vlak XOY weer in twee kegelsnedenbundels geprojecteerd.

Elk van die beide kegelsnedenbundels is bepaald door den orthogonaalcirkel van een gelijkvormigheidsnet en de kegelsnede van de middelpunten van de cirkels uit het andere net, die aan Λ_1 en Λ_2 raken.

Voor twee snijdende cirkels geldt nu:

De meetkundige plaats van de middelpunten van de

cirkels, die twee snijdende cirkels onder denzelfden hoek α snijden, bestaat uit twee kwadratische krommen, die elkaar loodrecht snijden in de beide snijpunten van die twee cirkels en die in diezelfde punten raken aan de orthogonaalcirkels van de gelijkvormigheidsnetten van die cirkels.

Elke hoek α bepaalt twee dergelijke kwadratische krommen. Al die kwadratische krommen zijn te rangschikken in twee kegelsnedenbundels.

In elk van de beide kegelsnedenbundels zijn de basispunten twee aan twee in dezelfde twee punten samen gevallen.

Elke kegelsnede van den eenen bundel snijdt alle kegelsneden van den anderen bundel loodrecht in die beide basispunten.

§ 3. Wanneer de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar raken, dan gaat het beeldvlak van een van de beide gelijkvormigheidsnetten over in het raakvlak aan P_0 in het gemeenschappelijke punt S van de beide ellipsen, waarvan de punten de punten van Λ_1 en Λ_2 afbeelden.

Ook de beide raakhyperboloiden α , die tot die beide cirkels behooren, raken aan P_0 in dat punt S .

Dat beeldvlak snijdt elk van de beide raakhyperboloiden in dezelfde twee rechten.

Die twee rechten worden op het vlak XOY geprojecteerd in twee rechten door het punt S^p , de projectie van S en het raakpunt van Λ_1 en Λ_2 .

Die beide rechten zijn symmetrisch t. o. van de rechte, die de middelpunten van Λ_1 en Λ_2 verbindt.

Immers die rechten zijn de rechten van de middelpunten van twee parabolische cirkelbundels, waarvoor het punt S^p het basispunt is.

Voor twee rakende cirkels geldt nu:

De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die twee rakende cirkels onder denzelfden hoek α snijden, bestaat uit een kwadratische kromme, die aan

die cirkels in hun gemeenschappelijk raakpunt raakt en uit twee rechten door dat raakpunt, die symmetrisch liggen t. o. van de rechte, die de middelpunten van de beide cirkels verbindt.

Elke hoek α bepaalt een kwadratische kromme en twee dergelijke rechten.

De kwadratische krommen bepalen een kegelsnedenbundel, waarvan de 4 basispunten in het punt S^p zijn samengevallen op de gemeenschappelijke raaklijn van de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 .

De paren rechten bepalen een stralenbundel.

Voor $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ ontgaat de kwadratische kromme in de dubbel te tellen raaklijn aan de beide cirkels in het punt S^p . Ook het rechtenpaar gaat in de dubbel te tellen raaklijn over.

De machlijn van de cirkels Λ_1 en Λ_2 , beschouwd als de meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die die cirkels onder den hoek $\frac{1}{2} \pi$ snijden, is voor vier te tellen.

Wanneer de cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar niet snijden of raken, dan vormen de middelpunten van de cirkels, die die beide cirkels onder denzelfden hoek α snijden, weer twee kegelsneden. De beide punten, waarin die kegelsneden elkaar loodrecht snijden, zijn imaginair geworden.

Ook hier vormen de kegelsneden voor de verschillende hoeken α weer twee kegelsnedenbundels.

§ 4. Ontaarden de beide cirkels Λ_1 en Λ_2 in twee elkaar snijdende rechten, dan worden de cirkels, die aan die beide rechten raken afgebeeld door de doorsnijdingskromme van twee cilindrs, die raken aan P_0 .

Elk van die beide cilindrs raakt P_0 volgens een parabool, waarvan de punten de punten van een van de beide rechten afbeelden.

De snijkromme van die beide parabolische cilindrs, die gelegen is in de beide beeldvlakken van de gelijk-

vormigheidsnetten van die twee rechten valt dus weer uiteen in twee kegelsneden.

De cirkels, die aan twee rechten raken vormen dus weer twee kwadratische cirkelscharen en zijn een stelsel met index 4.

De beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten zijn twee vlakken loodrecht op het vlak XOY door het snijpunt van de beide rechten, die de hoeken tusschen die beide rechten middendoordeelen.

Beide beeldvlakken snijden die beide parabolische cylinders volgens dezelfde twee parabolen, die op het vlak XOY in de bissectrices van de hoeken van die beide rechten worden geprojecteerd.

De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die aan twee elkaar snijdende rechten raken, bestaat uit de bissectrices van de hoeken tusschen die beide rechten.

§ 5. De cirkels, die twee gegeven rechten onder eenzelfde hoek α snijden, worden afgebeeld door de snijkromme van twee hyperbolische paraboloiden, die aan P_0 raken.

Elk van die beide paraboloiden raakt P_0 weer aan volgens een parabool, waarvan de punten de punten van een van de beide rechten afbeelden (hoofdstuk XIII).

De snijkromme van die beide paraboloiden bestaat weer uit twee parabolen, gelegen in de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten.

De cirkels, die twee rechten onder denzelfden hoek α snijden vormen weer twee kwadratische cirkelscharen en zijn een stelsel met index 4.

De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels van die beide scharen bestaat weer uit de beide bissectrices van de hoeken tusschen die beide rechten.

HOOFDSTUK XIX.

Het raakprobleem van APOLLONIUS.

§ 1. De cirkels, die de twee gegeven cirkels Γ_1 en Γ_2 onder gelijke hoeken snijden, worden afgebeeld door de punten van de beeldvlakken α en β van de beide gelijkvormigheidsnetten van die cirkels.

Die beide vlakken α en β snijden elkaar volgens de toegevoegde poollijn l van de rechte, die den door Γ_1 en Γ_2 bepaalden bundel afbeeldt.

De cirkels, die drie gegeven cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 onder gelijke hoeken snijden, worden dus afgebeeld door de punten van de vier rechten, die de beeldvlakken γ en δ van de beide gelijkvormigheidsnetten van Γ_2 en Γ_3 uit de vlakken α en β snijden.

De snijlijn m van de vlakken γ en δ , de toegevoegde poollijn van de rechte, die den door Γ_2 en Γ_3 bepaalden bundel afbeeldt, snijdt de snijlijn l van de vlakken α en β in een punt O , het beeldpunt van den orthogonaal-cirkel van het door Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 bepaalde net.

De cirkels, die drie gegeven cirkels onder gelijke hoeken snijden, worden dus afgebeeld door vier rechten door een punt, het beeldpunt van den orthogonaalcirkel van het door die drie cirkels bepaalde net.

De cirkels, die aan die drie gegeven cirkels raken, worden dus afgebeeld door de acht gemeenschappelijke snijpunten van die vier rechten met elk van de drie raakkegels aan P_0 , die de beeldpunten van die cirkels tot toppen hebben. Er zijn acht cirkels, die aan drie gegeven cirkels raken. De constructie van die acht cirkels bestaat dus uit het bepalen van de vier bundels en het daarna vinden van de beide cirkels uit elk van die bundels.

Aangezien de constructie van de beide cirkels uit een gegeven bundel, die aan een gegeven cirkel raken in

hoofdstuk XV gegeven is, blijft hier alleen over het bepalen van de vier bundels.

Het bepalen van die vier bundels geschiedt aan de hand van de ruimte-constructie.

De gemeenschappelijke bundel van twee netten heeft tot machtlijn de verbindingslijn van de middelpunten van de orthogonaalcirkels van die netten (hoofdstuk X).

De gelijkvormigheidspunten A_1 en A_2 van de beide cirkels Γ_1 en Γ_2 zijn de middelpunten van de orthogonaalcirkels van hun gelijkvormigheidsnetten.

Evenzoo de gelijkvormigheidspunten B_1 en B_2 van de beide cirkels Γ_2 en Γ_3 voor de gelijkvormigheidsnetten van die cirkels.

De vier rechten $A_1 B_1$, $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ en $A_2 B_2$ zijn dus de machtlijnen van de vier gezochte bundels. Aangezien die vier bundels elk den orthogonaalcirkel van het net bevatten, zijn zij dus geheel bepaald.

De constructie van die vier bundels geschiedt dus als volgt:

Bepaal den orthogonaalcirkel van de drie cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 . Bepaal de gelijkvormigheidspunten A_1 en A_2 van Γ_1 en Γ_2 en de gelijkvormigheidspunten B_1 en B_2 van Γ_2 en Γ_3 . Trek daarna de rechten $A_1 B_1$, $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ en $A_2 B_2$. Elk van die vier rechten is machtlijn van een bundel, waartoe de orthogonaalcirkel behoort. Het eigenlijke probleem is hiermee opgelost.

§ 2. De acht cirkels, die aan drie gegeven cirkels raken, worden, zooals bleek, afgebeeld door de snijpunten van vier rechten met een kwadratischen kegel. Hieruit volgt, dat telkens twee van die cirkels tot een cirkel kunnen samenvallen of imaginair kunnen worden.

Voor de hand zou nu liggen, dat van de acht cirkels, die aan drie gegeven cirkels raken, (bijzondere standen van die drie cirkels daargelaten), er 0, 2, 4, 6 of 8 reëel zijn.

Dit is niet het geval, zooals later zal blijken.

De ruimte-voorstelling levert nu weer het hulpmiddel om de realiteit van die cirkels te bestudeeren.

Twee van de voornaamste gevallen zullen worden beschouwd.

1^o) De drie cirkels bepalen een elliptisch net. De orthogonaalcirkel van dat net is imaginair en wordt afgebeeld door een punt binnen P_0 . De vier beeldrechten van de bundels snijden P_0 . De vier bundels zijn hyperbolisch. De acht raakcirkels zijn alle reëel (zie hoofdstuk XV).

2^o) De drie cirkels bepalen een hyperbolisch net.

De drie cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 met beeldpunten C_1 , resp. C_2 en C_3 zijn zoodanig gegeven, dat bij elk paar de afstand van hun middelpunten grooter is dan de som van hun stralen.

Vervolgens wordt Γ_2 in het vlak XOY verschoven, tot hij raakt aan Γ_1 . De afstand tusschen de middelpunten van Γ_2 en Γ_3 blijft grooter dan de som van hun stralen.

De beeldrechte $C_1 C_2$ raakt nu aan P_0 in een punt Q .

Een van de beide gelijkvormigheidsnetten van de cirkels Γ_1 en Γ_2 is nu een parabolisch net, dat wordt afgebeeld door het raakvlak aan P_0 in het punt Q .

Twee van de vier bundels worden nu afgebeeld door twee rechten in dat raakvlak ingesneden door de beeldvlakken van de beide gelijkvormigheidsnetten van L_2 en L_3 .

De raakkegel aan P_0 met top C_1 bevat de beschrijvende lijn $C_1 C_2$ en wordt aangeraakt door het raakvlak aan P_0 in het punt Q .

Die beide rechten in het raakvlak snijden den raakkegel aan P_0 dus elk in twee samenvallende punten.

In twee van de vier paar cirkels, die aan Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 raken, zijn de beide cirkels tot een cirkel samengegetrokken. Aangezien voor de raakcirkels geldt, dat ze paarsgewijs kunnen samenvallen of imaginair worden en het samenvallen van de beide cirkels van een paar

een overgangsgeval is van twee reële tot twee imaginaire cirkels, volgt hieruit, dat, wanneer de cirkels Γ_1 en Γ_2 , waarvoor de afstand van de middelpunten grooter was dan de som van hun stralen, elkaar nu gaan snijden, vier van de acht raakcirkels of reëel of imaginair worden.

Om nu in te zien, of bij die snijding vier cirkels reëel of imaginair worden, wordt Γ_2 geleidelijk verplaatst, totdat hij geheel binnen den cirkel Γ_1 is gelegen. Aangenomen is, dat de straal van Γ_2 kleiner is dan die van Γ_1 .

In dezen stand zijn alle acht de raakcirkels imaginair. Verplaatst men nu den cirkel Γ_2 weer naar zijn ouden stand terug, dan zullen onmiddellijk na het passeeren van het punt, waarin Γ_2 Γ_1 inwendig raakt, vier van de raakcirkels reëel en vier imaginair zijn.

Bij het passeeren van het punt, waarin Γ_2 Γ_1 uitwendig raakt, zullen dus de vier reële cirkels imaginair of de vier imaginaire cirkels reëel worden.

In den eersten stand, waarbij de afstand tusschen de middelpunten van elke twee van de drie cirkels grooter was dan de som van hun stralen zijn de raakcirkels dus of alle acht reëel of alle acht imaginair.

Dadelijk is in te zien, dat het eerste het geval is.

Hieruit volgt:

Voor drie cirkels, die een hyperbolisch net bepalen en elkaar niet aanraken geldt, dat van de acht cirkels, die die drie cirkels aanraken er 0, 4 of 8 imaginair zijn.

§ 3. Voor het geval, dat van de 3 cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 de cirkel Γ_1 tot een punt samenkrimpt, vallen de gelijkvormigheidsnetten van Γ_1 en Γ_2 samen tot één gelijkvormigheidsnet, dat wordt afgebeeld door het raakvlak aan P_0 in het beeldpunt van Γ_1 . De beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten van Γ_2 en Γ_3 snijden dat raakvlak volgens twee rechten.

Elk van die beide rechten snijdt de raakkegels aan P_0 , die de beeldpunten van de cirkels Γ_2 en Γ_3 tot

toppen hebben in twee punten, die tot die beide kegels behooren.

Er zijn vier dubbel te tellen raakcirkels.

Dat er vier raakcirkels zijn is ook dadelijk in te zien.

De cirkels, die raken aan de cirkels Γ_2 en Γ_3 worden afgebeeld door twee kwadratische krommen, de cirkels, die raken aan den puntcirkel Γ_1 door een plat vlak. Er zijn vier snijpunten van dat vlak met de beide kwadratische krommen.

Gaan de cirkels Γ_1 en Γ_2 in punten over, dan valt zoowel het paar gelijkvormigheidsnetten van Γ_1 en Γ_3 als het paar gelijkvormigheidsnetten van Γ_2 en Γ_3 elk tot één gelijkvormigheidsnet samen. De snijlijn van de beide raakvlakken aan P_0 in de beeldpunten van de puntcirkels van Γ_1 en Γ_2 is de beeldrechte van den eenigen bundel, waarvan de cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 onder denzelfden hoek snijden. De beide snijpunten van die rechte met den raakkegel aan P_0 , die het beeldpunt van Γ_3 tot top heeft, zijn de beeldpunten van de beide cirkels, die aan Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 raken.

Er zijn twee, elk voor vier te tellen, raakcirkels.

Gaan de cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 alle drie in punten over, dan gaat de raakkegel, die het beeldpunt van Γ_3 tot top heeft over in een raakvlak.

Er is een, voor acht te tellen, raakcirkel, de omgeschreven cirkel van den driehoek, waarvan de puntcirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 de hoekpunten zijn.

De omgeschreven cirkel van een driehoek is dus tevens de orthogonaalcirkel van een hyperbolisch net, dat bepaald wordt door de als puntcirkels beschouwde hoekpunten van den driehoek.

Voor het geval, dat van de drie cirkels er een of twee in rechten ontaarden, blijft het aantal raakcirkels acht. Alleen wanneer alle drie de cirkels in rechten ontaarden heeft men een bijzonder geval.

De gelijkvormigheidsnetten van twee als cirkels beschouwde rechten worden afgebeeld door twee vlakken,

vertikaal op het vlak XOY , die de hoeken tusschen die beide rechten middendoordeelen.

De vier boven besproken bundels worden dus afgebeeld door vier rechten loodrecht op het vlak XOY .

De cirkels, die aan een van die rechten raken, worden afgebeeld door een hyperbolische paraboloïde, waarvan in hoofdstuk XIII de stand t. o. van het assenkruis is aangegeven.

Elk van de vier rechten snijdt de paraboloïde in twee punten, waarvan telkens een punt samenvalt met het raakpunt van P_0 aan het oneindig verre vlak.

Er zijn vier, enkel te tellen cirkels, die raken aan de drie zijden van een driehoek.

Bovendien moet de oneindig verre rechte in het vlak XOY , opgevat als puntcirkel, als een voor vier te tellen raakcirkel van dien driehoek worden beschouwd.

§ 4. Alle andere raakproblemen, waarbij b.v. een cirkel in een punt, een ander in een rechte ontaardt, zijn nu op eenvoudige wijze, aan de hand van de ruimteconstructie op te lossen.

Aan het boven behandelde probleem is nu uit den aard der zaak het probleem verbonden van het construeeren van de cirkels, die drie gegeven cirkels onder denzelfden gegeven hoek snijden.

Die cirkels behooren weer tot de vier boven gevonden bundels. De cirkels uit elk van de vier bundels, die een van de drie gegeven cirkels en dus ook alle drie, onder denzelfden gegeven hoek snijden, zijn op de in hoofdstuk XV aangegeven wijze te construeeren.

HOOFDSTUK XX.

De cirkels, die een gegeven cirkel Λ_1 onder een gegeven hoek α_1 en een gegeven cirkel Λ_2 onder een gegeven hoek α_2 snijden.

De cirkels, die een gegeven cirkel Λ_1 onder een gegeven hoek α_1 en een anderen gegeven cirkel Λ_2 onder een gegeven hoek α_2 snijden, worden afgebeeld door de punten van de doorsnede van twee eenbladige hyperboloïden H_1 en H_2 , die P_0 aanraken.

De doorsnede van die beide raakhyperboloïden, een 4^e graadskromme, valt weer uiteen in twee vlakke krommen.

Het bewijs van deze stelling geeft tevens de oriëntatie van de beide vlakken, waarin die krommen zijn gelegen.

Bewijs:

Λ_1 en Λ_2 zijn twee snijdende cirkels met stralen r_1 en r_2 , middelpunten M_1 en M_2 , beeldpunten L_1 en L_2 .

Zijn E_1 en E_2 de ellipsen, waarvan de punten de punten van Λ_1 en Λ_2 afbeelden, dan zijn de snijpunten S_1 en S_2 van die beide ellipsen de beelden van de snijpunten S_1^p en S_2^p van Λ_1 en Λ_2 .

De beide hyperboloïden H_1 en H_2 raken P_0 aan volgens de ellipsen E_1 resp. E_2 .

De doorsnede van H_1 en H_2 wordt nu gevonden door van de rechten van b.v. H_1 de snijpunten met H_2 te bepalen.

In het raakvlak aan P_0 in het punt S_1 liggen zoowel twee rechten van H_1 als twee rechten van H_2 . Alle vier die rechten gaan door het punt S_1 . Hetzelfde geldt voor het punt S_2 . De punten S_1 en S_2 zijn dubbelpunten van de doorsnijdingskromme van H_1 en H_2 .

H_1 , resp. H_2 , snijdt het oneindig verre vlak volgens een kwadratische kromme, waarvan de punten de rechten afbeelden uit het vlak XOY , die den cirkel met middel-

punt M_1 resp. M_2 en straal $r_1 \cos \alpha_1$ resp. $r_2 \cos \alpha_2$ aanraken.

Die beide kwadratische krommen snijden elkaar in vier punten, die de vier gemeenschappelijke raaklijnen van de beide cirkels met middelpunten M_1 en M_2 en stralen $r_1 \cos \alpha_1$ en $r_2 \cos \alpha_2$ afbeelden.

Zijn L_3 en L_4 de beeldpunten van die beide cirkels Λ_3 en Λ_4 , dan zijn die vier punten ook de vier snijpunten van de beide kwadratische krommen, die de beide raakkegels aan P_0 met toppen L_3 en L_4 met het oneindig verre vlak gemeen hebben.

Die beide raakkegels met toppen L_3 en L_4 raken P_0 aan volgens ellipsen F_1 en F_2 .

Het vlak van de ellips F_1 is evenwijdig met dat van E_1 , het vlak van F_2 met dat van E_2 .

Immers uit hoofdstuk III is dadelijk af te leiden, dat elk vlak, waarin de beelden der punten van een cirkel zijn gelegen, evenwijdig loopt aan het raakvlak aan P_0 in het beeldpunt van het middelpunt van den cirkel.

Daar Λ_1 en Λ_3 hetzelfde middelpunt hebben, volgt hieruit, dat het vlak van F_1 evenwijdig is met dat van E_1 .

Evenzoo is het vlak van F_2 evenwijdig met dat van E_2 .

De rechte $S_1 S_2$ is evenwijdig aan de snijlijn p van de vlakken door F_1 en F_2 .

De vier punten in het oneindig verre vlak liggen in twee vlakken door de rechte p .

Immers die vier punten behooren tot de doorsnede van twee raakkegels aan P_0 , die, zooals in hoofdstuk XVII is gebleken, uiteenvalt in twee kegelsneden gelegen in twee vlakken, die elkaar snijden volgens de poollijn van de rechte, die de toppen van die beide kegels verbindt.

Uit het feit, dat $S_1 S_2$ evenwijdig is aan p , volgt, dat de vier snijpunten van H_1 en H_2 in het oneindig verre vlak gelegen, zijn onder te brengen in twee platte vlakken door $S_1 S_2$.

Die beide platte vlakken door $S_1 S_2$ loopen dus even-

wijdig aan de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten van de cirkels Λ_3 en Λ_4 .

De 4^e graadskromme, gemeenschappelijk aan de raakhyperboloïden, raakt aan elk van die beide platte vlakken in de punten S_1 en S_2 en snijdt elk van die beide vlakken in twee punten in het oneindig verre vlak gelegen.

De 4^e graadskromme ontgaat dus in twee takken, elk in een plat vlak gelegen.

Daar die 4^e graadskromme ook gelegen is op elk van de beide raakhyperboloïden, volgt daaruit, dat die kromme bestaat uit twee kwadratische krommen.

De vlakken van die beide kwadratische krommen gaan door de rechte $S_1 S_2$, de poollijn van de rechte, die den door Λ_1 en Λ_2 bepaalden bundel afbeeldt. Wat men die vlakken als beeldvlakken van netten op, dan behooren dus de orthogonaalcirkels van die netten tot den door Λ_1 en Λ_2 bepaalden bundel.

Uit hoofdstuk III is ook weer op eenvoudige wijze af te leiden, dat netten, door evenwijdige vlakken afgebeeld, orthogonaalcirkels hebben, die tot een concentrischen bundel behooren. Immers het raakvlak, in het beeldpunt van het middelpunt van den orthogonaalcirkel van een net aan P_0 aangebracht, loopt evenwijdig met het beeldvlak van het net. Voor een bundel van netten met evenwijdige beeldvlakken is er slechts één raakvlak aan P_0 , dat aan die voorwaarde voldoet, dus ook slechts één middelpunt voor de orthogonaalcirkels van die netten.

De beide vlakken door $S_1 S_2$, als beeldvlakken van netten beschouwd, hebben dus tot middelpunten van hun orthogonaalcirkels dezelfde punten als de beide vlakken door p .

Die beide vlakken door p zijn de beeldvlakken van de gelijkvormigheidsnetten der cirkels Λ_3 en Λ_4 ; die punten zijn dus de gelijkvormigheidspunten van Λ_3 en Λ_4 .

Wanneer de cirkels Λ_1 en Λ_2 elkaar niet snijden, dan worden de snijpunten S_1 en S_2 van de ellipsen E_1 en E_2 imaginaire punten van de rechte volgens welke

de vlakken, waarin die ellipsen zijn gelegen, elkaar snijden.

Het boven gegeven bewijs blijft ook in dit geval van kracht.

Het resultaat is dus:

De cirkels, die een gegeven cirkel Λ_1 met straal r_1 onder een hoek α_1 en een gegeven cirkel Λ_2 met straal r_2 onder een hoek α_2 snijden, vormen twee kwadratische cirkelscharen.

De orthogonaalcirkels van de netten, waartoe die beide scharen behooren, zijn cirkels van den cirkelbundel bepaald door Λ_1 en Λ_2 .

De middelpunten van die beide orthogonaalcirkels zijn de gelijkvormigheidspunten van twee cirkels Λ_3 en Λ_4 . Λ_3 is concentrisch met Λ_1 en heeft tot straal $r_1 \cos \alpha_1$, Λ_4 is concentrisch met Λ_2 en heeft tot straal $r_2 \cos \alpha_2$.

De beeldkrommen van de beide kwadratische cirkelscharen vormen de doorsnijdingskromme van twee eenbladige raakhyperboloïden α_1 en α_2 aan P_0 , behorende bij de cirkels Λ_1 en Λ_2 .

De vlakken van de beide beeldkrommen snijden elkaar volgens de toegevoegde poollijn van de rechte, die den door Λ_1 en Λ_2 bepaalden cirkelbundel afbeeldt.

HOOFDSTUK XXI.

Het probleem van STEINER.

De cirkels, die drie gegeven cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 respectievelijk onder de hoeken α_1 , α_2 en α_3 snijden, worden afgebeeld door de snijpunten van de beide beeldkrommen van de kwadratische cirkelscharen, waarvan de cirkels Γ_1 onder den hoek α_1 en Γ_2 onder den hoek α_2 snijden, met de raakhyperboloïde α_3 behorende bij Γ_3 .

Er zijn acht cirkels, die drie cirkels onder die hoeken snijden.

Zijn σ_1 en σ_2 de beide vlakken, waarin de beeldkrommen zijn gelegen van de kwadratische cirkelscharen, waarvan de cirkels de cirkels Γ_1 en Γ_2 respectievelijk onder hoeken α_1 en α_2 snijden en σ_2 en σ_3 die beide vlakken voor de cirkels Γ_2 en Γ_3 met de hoeken α_2 en α_3 , dan snijden die vier vlakken elkaar volgens vier rechten door een punt.

Die vier rechten zijn de beeldrechten van vier bundels, die elk twee van de acht bovengenoemde cirkels bevatten; dat punt is, wat dadelijk uit hoofdstuk XX volgt, het beeldpunt van den orthogonaalcirkel van het net bepaald door Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 .

Elk van de vier bundels is te bepalen als de gemeenschappelijke bundel van twee netten, waarvan de middelpunten van de orthogonaalcirkels zijn gegeven.

De machtlijnen van die vier bundels zijn dus bekend.

Alle vier de bundels bevatten den orthogonaalcirkel van het net. Die vier bundels zijn dus geheel bepaald.

In elk van de vier bundels zijn nu op de in hoofdstuk XV aangegeven wijze de beide cirkels te construeeren, die aan de boven gestelde voorwaarde voldoen.

De constructie van de vier bundels in het vlak XOY geschiedt nu als volgt:

Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 zijn gegeven met hun respectieve middelpunten M_1 , M_2 en M_3 en hun respectieve stralen r_1 , r_2 en r_3 .

Construeer den orthogonaalcirkel Ω van die drie cirkels.

Construeer drie cirkels Γ_1' , Γ_2' en Γ_3' met middelpunten respectievelijk M_1 , M_2 en M_3 en stralen $r_1 \cos \alpha_1$, $r_2 \cos \alpha_2$ en $r_3 \cos \alpha_3$.

Bepaal de gelijkvormigheidspunten A_1 en A_2 van Γ_1' en Γ_2' en de gelijkvormigheidspunten B_2 en B_3 van Γ_2' en Γ_3' .

De vier bundels zijn nu bepaald door hun gemeenschappelijken cirkel Ω en hun machtlijnen $A_1 B_2$, $A_1 B_3$, $A_2 B_2$ en $A_2 B_3$. Het probleem is hiermee opgelost.

HOOFDSTUK XXII.

De kwadratische cirkelcongruentie.

§ 1. Een kwadratische cirkelcongruentie voldoet aan den eisch, dat door elke twee punten van het vlak $X O Y$ twee cirkels moeten gaan, die tot die congruentie behooren.

Elke cirkelbundel heeft dus met de kwadratische cirkelcongruentie twee cirkels gemeen.

Elke cirkelbundel wordt afgebeeld door een rechte.

Elke kwadratische cirkelcongruentie moet dus worden afgebeeld door een kwadratisch oppervlak.

Een kwadratische cirkelcongruentie is dus bepaald door negen cirkels.

Analytisch is die congruentie op vrij eenvoudige wijze voor te stellen.

In de vergelijking van die congruentie moeten twee parameters λ en μ voorkomen.

De vergelijking van die congruentie moet zoodanig zijn, dat daaruit bij substitutie van de coördinaten van twee willekeurige punten uit het vlak $X O Y$ twee vergelijkingen in die parameters λ en μ ontstaan, die twee stel oplossingen voor die parameters bepalen.

De twee vergelijkingen in λ en μ , die na die substitutie ontstaan, hebben denzelfden vorm en kunnen alleen van den tweeden graad zijn.

Gebonden door de voorwaarde van slechts twee oplossingen, kunnen de beide vergelijkingen, die na die substitutie ontstaan, alleen den vorm hebben, zooals is aangegeven in de hiernavolgende drie gevallen:

$$1^0) \quad A_1 \lambda \mu + B_1 \lambda + C_1 \mu + D_1 = 0$$

$$A_2 \lambda \mu + B_2 \lambda + C_2 \mu + D_2 = 0$$

$$2^0) \quad A_3 \lambda^2 + B_3 \lambda \mu + C_3 \lambda + D_3 = 0$$

$$A_4 \lambda^2 + B_4 \lambda \mu + C_4 \lambda + D_4 = 0$$

$$3^0) \quad A_5 \lambda^2 + B_5 \lambda + C_5 \mu + D_5 = 0$$

$$A_6 \lambda^2 + B_6 \lambda + C_6 \mu + D_6 = 0$$

Beschouwt men in het stel vergelijkingen onder 2^o) $\lambda \mu$ als een parameter, dan blijkt dat dat stel van denzelfden vorm is als het stel vergelijkingen onder 3^o).

De kwadratische cirkelcongruentie zal dus ten slotte zijn voor te stellen door twee verschillende vergelijkingen, die blijkbaar twee hoofdgroepen van die congruentie vertegenwoordigen.

Een cirkelcongruentie van de eerste hoofdgroep heeft tot vergelijking:

$$(a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 + \lambda \mu a_4)(X^2 + Y^2) - 2(b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 + \lambda \mu b_4)X - 2(c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 + \lambda \mu c_4)Y + d_1 + \lambda d_2 + \mu d_3 + \lambda \mu d_4 = 0$$

of

$$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \mu \Gamma_3 + \lambda \mu \Gamma_4 = 0$$

Zijn $x_1 | y_1 | z_1$, $x_2 | y_2 | z_2$, $x_3 | y_3 | z_3$, $x_4 | y_4 | z_4$, de coördinaten van de beeldpunten van de cirkels Γ_1 , resp. Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 dan zijn weer op dezelfde wijze als in hoofdstuk I voor de coördinaten van het beeldpunt van een willekeurigen cirkel uit die congruentie de navolgende betrekkingen te vinden:

$$x = \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \mu a_3 x_3 + \lambda \mu a_4 x_4}{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 + \lambda \mu a_4}$$

$$y = \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2 + \mu a_3 y_3 + \lambda \mu a_4 y_4}{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 + \lambda \mu a_4}$$

$$z = \frac{a_1 z_1 + \lambda a_2 z_2 + \mu a_3 z_3 + \lambda \mu a_4 z_4}{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 + \lambda \mu a_4}$$

Voor $\lambda = 0$ worden deze betrekkingen:

$$x = \frac{a_1 x_1 + \mu a_3 x_3}{a_1 + \mu a_3}, \quad y = \frac{a_1 y_1 + \mu a_3 y_3}{a_1 + \mu a_3},$$

$$z = \frac{a_1 z_1 + \mu a_3 z_3}{a_1 + \mu a_3}$$

Voor $\lambda = \infty$ worden deze betrekkingen:

$$x = \frac{a_2 x_2 + \mu a_4 x_4}{a_2 + \mu a_4}, \quad y = \frac{a_2 y_2 + \mu a_4 y_4}{a_2 + \mu a_4},$$

$$z = \frac{a_2 z_2 + \mu a_4 z_4}{a_2 + \mu a_4}$$

Voor $\mu = 0$ en $\mu = \infty$ zijn dergelijke betrekkingen op te schrijven.

Zijn C_1, C_2, C_3 en C_4 de beeldpunten van Γ_1 , resp. Γ_2, Γ_3 en Γ_4 , dan drukken die vier laatste drietallen betrekkingen uit, dat op het kwadratisch oppervlak, waarvan de punten de cirkels van de kwadratische congruentie afbeelden, gelegen zijn de rechten $C_1 C_3, C_2 C_4, C_1 C_2$ en $C_3 C_4$.

Zijn C_1, C_2, C_3 en C_4 reële punten, dan wordt deze congruentie dus afgebeeld door een eenbladige hyperboloïde of een hyperbolische paraboloid.

De vergelijking van dat regelvlak wordt verkregen door uit de drie vergelijkingen van zijn punten de parameters $\frac{\lambda a_2}{a_1}$ en $\frac{\mu a_3}{a_1}$ te elimineeren.

De vergelijking van dat regelvlak is van den vorm:

$$\phi_2 + \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} \psi_2 = 0$$

Hierin stellen $\phi_2 = 0$ en $\psi_2 = 0$ kwadratische oppervlakken voor. De coëfficiënten van x, y en z in die beide vergelijkingen zijn opgebouwd uit de coördinaten van de beeldpunten van de vier cirkels $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ en Γ_4 .

Dat regelvlak is geheel bepaald door de vier cirkels en de verhouding $\frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}$.

De verhouding heeft eigenlijk niets met de vier cirkels te maken.

Vier cirkels door de parameters λ en μ verbonden in de betrekking $\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \mu \Gamma_3 + \lambda \mu \Gamma_4 = 0$, bepalen, wanneer de coëfficiënten van $X^2 + Y^2$ in hun vergelijkingen willekeurig zijn een enkelvoudig oneindig aantal kwadratische cirkelcongruenties.

§ 2. Zijn de punten C_1 en C_4 of de punten C_2 en C_3 imaginaire punten, dan worden de vier rechten, die elk een reël met een imaginair punt verbinden, imaginair.

Bij de beide boven behandelde regelvlakken waren

$C_1 C_3$ en $C_1 C_2$ de beide rechten, volgens welke het raakvlak in C_1 dat oppervlak sneed.

Zijn nu C_3 en C_2 imaginaire punten, dan zal bij het kwadratische oppervlak, voorgesteld door de drie vergelijkingen met parameters λ en μ , het raakvlak in het punt C_1 dat oppervlak snijden volgens twee imaginaire rechten.

Hetzelfde geldt voor het raakvlak in het punt C_4 . Zoowel voor het geval, dat Γ_1 en Γ_4 als voor het geval, dat Γ_2 en Γ_3 imaginaire beeldpunten hebben zal de kwadratische cirkelcongruentie met vergelijking:

$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \mu \Gamma_3 + \lambda \mu \Gamma_4 = 0$ worden afgebeeld door een kwadratisch oppervlak, dat door raakvlakken in twee van zijn punten wordt gesneden volgens twee tot dat oppervlak behorende imaginaire rechten.

In die gevallen wordt dus de kwadratische cirkelcongruentie afgebeeld door een ellipsoïde, een tweebbladige hyperboloïde of een elliptische paraboloid.

§ 3. Een cirkelcongruentie van de tweede hoofdgroep heeft tot vergelijking:

$$(a_1 + \lambda a_2 + \lambda \mu a_3 + \lambda^2 a_4)(X^2 + Y^2) - \\ - 2(b_1 + \lambda b_2 + \lambda \mu b_3 + \lambda^2 b_4)X - 2(c_1 + \lambda c_2 + \\ + \lambda \mu c_3 + \lambda^2 c_4)Y + d_1 + \lambda d_2 + \lambda \mu d_3 + \lambda^2 d_4 = 0$$

of

$$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \lambda \mu \Gamma_3 + \lambda^2 \Gamma_4 = 0$$

Voor de coördinaten van het beeldpunt van een willekeurigen cirkel uit de congruentie geldt, na vervanging van $\lambda \mu$ door den parameter ν :

$$x = \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \nu a_3 x_3 + \lambda^2 a_4 x_4}{a_1 + \lambda a_2 + \nu a_3 + \lambda^2 a_4} \\ y = \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2 + \nu a_3 y_3 + \lambda^2 a_4 y_4}{a_1 + \lambda a_2 + \nu a_3 + \lambda^2 a_4} \\ z = \frac{a_1 z_1 + \lambda a_2 z_2 + \nu a_3 z_3 + \lambda^2 a_4 z_4}{a_1 + \lambda a_2 + \nu a_3 + \lambda^2 a_4}$$

Voor $\nu = 0$ worden deze betrekkingen:

$$x = \frac{a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \lambda^2 a_4 x_4}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_4},$$

$$y = \frac{a_1 y_1 + \lambda a_2 y_2 + \lambda^2 a_4 y_4}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_4},$$

$$z = \frac{a_1 z_1 + \lambda a_2 z_2 + \lambda^2 a_4 z_4}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_4}$$

De laatste drie vergelijkingen stellen een kegelsnede voor, de beeldkromme van een stelsel met index 2 (hoofdstuk XVI).

Die kegelsnede is geheel bepaald door de cirkels Γ_1 , Γ_2 en Γ_4 en de verhouding $\frac{a_2^2}{a_1 a_4}$.

Iedere waarde van λ bepaalt een punt van de kegelsnede. Zijn voor een gegeven waarde van $\lambda = \lambda_1$ de coördinaten van een dergelijk punt $\xi_1 | \eta_1 | \zeta_1$, dan geldt, dat voor $\lambda = \lambda_1$

$$x = \frac{\xi_1 + \frac{\nu a_3}{a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_1^2 a_4} x_3}{1 + \frac{\nu a_3}{a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_1^2 a_4}}$$

$$y = \frac{\eta_1 + \frac{\nu a_3}{a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_1^2 a_4} y_3}{1 + \frac{\nu a_3}{a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_1^2 a_4}}$$

$$z = \frac{\zeta_1 + \frac{\nu a_3}{a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_1^2 a_4} z_3}{1 + \frac{\nu a_3}{a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_1^2 a_4}}$$

De drie laatste vergelijkingen zijn de vergelijkingen van een rechte, die het beeldpunt van Γ_3 verbindt met het punt $\xi_1 | \eta_1 | \zeta_1$ van de kegelsnede.

Hieruit volgt:

De drie vergelijkingen voor de coördinaten van het

beeldpunt van een willekeurigen cirkel uit de congruentie, gegeven door de vergelijking:

$$\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 + \lambda \mu \Gamma_3 + \lambda^2 \Gamma_4 = 0,$$

stellen voor een kwadratischen kegel met het beeldpunt van den cirkel Γ_3 tot top.

Die kegel is geheel bepaald door de beeldpunten van de vier cirkels en de verhouding $\frac{a_2^2}{a_1 a_4}$.

§ 4. Ontaardt de cirkel Γ_3 in een rechte, dan wordt het beeldpunt van dien cirkel een punt van het oneindig verre vlak en wordt de congruentie afgebeeld door een kwadratischen cylinder.

§ 5. De boven gegeven indeeling van de kwadratische cirkelcongruenties in twee hoofdgroepen berustte alleen op de analytische voorstelling van de congruentie, maar is geen essentieele indeeling.

De eigenlijke indeeling van die congruenties berust op den stand van hun beeldoppervlakken t. o. van P_0 .

Er zijn vijf hoofdgroepen te onderscheiden:

1^o) Het beeldoppervlak ligt buiten P_0 . Alle cirkels van de congruentie zijn reëel. Er zijn geen puntcirkels.

2^o. Het beeldoppervlak raakt P_0 . Alle cirkels zijn reëel. Er is een puntcirkel.

3^o) Het beeldoppervlak snijdt P_0 . Een deel van de cirkels heeft een reëel middelpunt en een imaginairen straal. De puntcirkels liggen op de 4^e graadskromme, in hoofdstuk XVI behandeld als de omhullingsfiguur van een kwadratische cirkelschaar.

4^o) Het beeldoppervlak ligt binnen P_0 . Alle cirkels hebben een reëel middelpunt en een imaginairen straal.

5^o) Het beeldoppervlak bestaat alleen uit imaginaire punten. Alle cirkels hebben een imaginair middelpunt.

De bestudeering van de kwadratische cirkelcongruentie loopt parallel met die van het kwadratisch oppervlak. Twee kwadratische oppervlakken snijden elkaar in het algemeen

volgens een ruimtekromme van den 4^{en} graad; twee kwadratische cirkelcongruenties hebben een cirkelstelsel met index 4 gemeen.

HOOFDSTUK XXIII.

De kromtecirkels van de parabool.

Een toepassing van hoofdstuk XXII wordt gevonden in het bepalen van het stelsel, waartoe de kromtecirkels van de parabool behooren.

Zijn ξ en η de loopende coördinaten van de punten van een parabool, die tot vergelijking heeft $\eta^2 = 2 p \xi$ (1) en x en y de loopende coördinaten van de punten van de ontwondene van die parabool, dan is op eenvoudige wijze af te leiden:

$$x = 3 \xi + p \quad (2)$$

$$y = -\frac{\eta^3}{p^2} \quad (3)$$

Voor den kromtestraal r is op de gewone wijze te vinden:

$$r^2 = \frac{(\eta^2 + p^2)^3}{p^4} \quad (4)$$

Tusschen de coördinaten van het beeldpunt en den straal van een willekeurigen cirkel bestaat de betrekking:

$$z = x^2 + y^2 - r^2 \quad (5)$$

Drukt men nu in (4) r^2 uit in de coördinaten van het middelpunt van den kromtecirkel met behulp van de vergelijkingen (1), (2) en (3) en substitueert men de aldus gevonden uitdrukking voor r^2 in (5), dan is:

$$z = -\frac{1}{3} (x - p)^2 \quad (6)$$

Elimineert men uit de vergelijkingen (1), (2) en (3) de ξ en η , dan is de vergelijking:

$$y^2 = \frac{8}{27 p} (x - p)^3 \quad (7)$$

de vergelijking van de ontwondene van de parabool. De beeldkromme van het stelsel van de kromtecirkels is nu bepaald door de vergelijkingen (6) en (7).

Door de substitutie $x = x_1 + p$ worden die beide vergelijkingen:

$$z = -\frac{1}{3} x_1^2 \quad (8)$$

$$y^2 = \frac{8}{27 p} x_1^3 \quad (9)$$

Die beide vergelijkingen (8) en (9) stellen een kwadratischen en een kubischen cylinder voor, die een 6^e graadskromme met elkaar gemeen hebben.

Maakt men die vergelijkingen homogeen, dan nemen zij den vorm aan:

$$zu = -\frac{1}{3} x_1^2 \quad (10)$$

$$y^2 u = \frac{8}{27 p} x_1^3 \quad (11)$$

De beide cylinders hebben de dubbel te tellen rechte gemeen, volgens welke het oneindig verre vlak door het vlak $x_1 = 0$ wordt gesneden.

De beeldkromme van het stelsel bevat dus een dubbelrechte, in het oneindig verre vlak gelegen.

Uit een nadere beschouwing van de vergelijkingen (8) en (9) volgt, dat de punten, waarvan de coördinaten voldoen aan de beide vergelijkingen:

$$x_1 z = -\frac{2}{3} p y^2. \quad (12)$$

$$z = -\frac{1}{3} x_1^2 \quad (13)$$

punten zijn van de beeldkromme van het stelsel.

De beeldkromme van het stelsel is van den 6^{en} graad en bestaat uit een dubbelrechte in het oneindig verre vlak en uit de doorsnede van een parabolischen cylinder en een kwadratischen kegel, die zijn top heeft op den cylinder.

Die doorsnede is dus van den vierden graad. Het stelsel van de kromtecirkels van een parabool bestaat uit de dubbel te tellen cirkels, die de parabool aanraken in haar raakpunt met de oneindig verre rechte in het vlak $X O Y$ en waarvan de middelpunten op rechten

liggen evenwijdig aan de as van de parabool en een stelsel met index 4.

Practisch gesproken, vormen de kromtecirkels van een parabool een stelsel met index 4, dat gemeenschappelijk is aan twee kwadratische congruenties, waarvan de vergelijkingen (12) en (13) de vergelijkingen van hun beeldoppervlakken zijn.

De beeldkromme van het stelsel met index 4 is ook, na invoering van een parameter, te brengen tot den vorm

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda^2 \\ y &= \frac{2}{3} \lambda^3 \sqrt{\frac{2}{3p}} \\ z &= -\frac{1}{3} \lambda^4 \end{aligned} \quad (14)$$

Die kromme snijdt het vlak XOY in het punt $x_1 = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Voor dat punt is in elk van de drie vergelijkingen $\lambda^2 = 0$. Het punt $x_1 = 0$, $y = 0$, $z = 0$ telt voor twee middelpunten van kromtecirkels.

Dat punt is het middelpunt van den kromtecirkel van den top van de parabool. Die kromtecirkel heeft, zooals dus uit de vergelijkingen (14) volgt met de parabool vier punten gemeen.

HOOFDSTUK XXIV.

Conclusie.

De resultaten van de cirkelafbeelding in dit proefschrift zijn uit vier verschillende oogpunten te bezien.

In de eerste plaats geeft de afbeelding aanleiding om cirkel, rechte en punt in zekeren zin als gelijkwaardig te gaan beschouwen. Het feit, dat cirkel, rechte en punt elk door een punt worden afgebeeld, maakt deze cirkelmeetkunde ook tot een meetkunde van rechten en punten, tot een meetkunde à triple usage. Een

voorbeeld, waarin dit uitkomt, is het probleem van APOLLONIUS met de bijzondere gevallen.

In de tweede plaats geeft deze afbeelding het hulpmiddel om bijzondere krommen van hooger en lager graad aan krommen van lager en hoger graad te bestudeeren. Een voorbeeld hiervan is te vinden bij de kromme C_4 , de omhullingskromme van een kwadratische cirkelschaar.

Ten derde zal, wanneer de cirkelafbeelding wordt toegepast op de kromtecirkels van een willekeurige kromme, een kromme worden verkregen, waarvan de punten niet alleen de punten, maar ook de kromtecirkels van de oorspronkelijke kromme in die punten bepalen.

Die kromme is intrinsiek t. o. van de oorspronkelijke kromme. Een voorbeeld hiervan is behandeld in hoofdstuk XXIII, waarbij dadelijk in de beeldkromme van het stelsel van kromtecirkels de top van een parabool, voor wat betreft zijn kromtecirkel, als een bijzonder punt wordt gekenmerkt.

Ten slotte is het allerbelangrijkst, dat de cirkelafbeelding aanleiding geeft om uit de puntenmeetkunde een cirkelmeetkunde op te bouwen, waarbij dan de eigenschappen van de puntenmeetkunde bijzondere gevallen worden van die van de cirkelmeetkunde.

De aanwijzingen daartoe zijn vele.

Naast de punten van een orthocentrische groep staan de vier onderling orthogonaal snijdende cirkels, naast het harmonisch puntenviertal het harmonisch cirkelviertal, naast de rechte de cirkelbundel, naast het platte vlak het cirkelnet, naast de kegelsnede de kwadratische cirkelschaar, naast het kwadratisch oppervlak de kwadratische congruentie, enz.

Het eerste in elk van de beide gevallen wordt uit het tweede verkregen door de stralen van de cirkels tot 0 te laten naderen.

Een proeve van een bekende eigenschap uit de puntenmeetkunde, die een bijzonder geval is van een eigenschap uit de cirkelmeetkunde is de navolgende:

Bij een kwadratisch oppervlak liggen de middens van een stelsel evenwijdige koorden in een plat vlak.

In de cirkelmeetkunde is die eigenschap:

Elke cirkelbundel heeft met een kwadratische cirkelcongruentie twee cirkels gemeen. In elken cirkelbundel is een cirkel, waarvan het middelpunt in het midden is gelegen tusschen de middelpunten van die twee cirkels.

Hebben de cirkelbundels dezelfde machtlijn, dan vormen die cirkels een net.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

1.

De wijze, waarop REYE de harmonische ligging van vier punten definiëert en de stelling afleidt, dat wanneer twee punten P en R harmonisch worden gescheiden door twee punten O en Q, die punten O en Q ook harmonisch worden gescheiden door P en R, is kunstmatig.

Dr. TH. REYE, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsteme § 4.

2.

Uit de volkomen gelijkwaardigheid van den in- en de aangeschreven cirkels van een driehoek volgt, dat die naam te vervangen zou zijn door dien van raakcirkels van een driehoek.

3.

Het bewijs, dat D'ADHÉMAR geeft als toepassing van de redeneering van n op $n + 1$ om aan te toonen dat de machten van een getal tusschen 0 en 1 afnemen en tot nul naderen, wanneer de exponent geheel is en voortdurend aangroeit, is onjuist.

Leçons sur les principes de l'analyse, 1912, Tome I, blz. 11.

4.

De oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking van de 1^e orde is op eenvoudiger wijze te vinden door te stellen $y = e^u \times v$ dan door te stellen $y = uv$.

Het bewijs van de stelling:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

is overbodig.

H. DE VRIES. Diff. en Integraalrekening. (NOORDHOFF).

6.

De zomertijd dient te worden afgeschaft.

7.

Bij galvanometers wordt te veel gelet op de gevoeligheid en te weinig op de betrouwbaarheid.

8.

Bij stolling is de temperatuur van het grensvlak van de vaste en de vloeibare phase lager dan het smeltpunt.

W. HERGESELL. Ann. der Phys. u. Chem. 15, 1882, p. 19.

G. TAMMANN. Kristallisieren und Schmelzen, 1903, p. 135.

9.

De theoretische resultaten omtrent intensiteiten van spectraallijnen behoeven nog een nadere experimenteele bevestiging.

H. A. KRAMERS, Intensities of spectral lines, Dissertatie 1919.

10.

Bij het planimetrie-onderwijs moet in plaats van op driehoek en hoogtepunt de nadruk worden gelegd op de orthocentrische groep.

11.

Het geregeld gebruik van ruimtemodellen of van ruimteteekeningen bij het onderwijs in de beschrijvende meetkunde is af te keuren.

De door Prof. Dr. G. MANNOURY voorgestelde inkrinping van het wiskunde-onderwijs voor de in die richting minder begaafden is een te radicale oplossing van de moeilijkheden bij dat onderwijs.

Weekblad voor gymnasiaal en middelbaar onderwijs, 8 September 1920.



