Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Over de reeks van Lambert

https://hdl.handle.net/1874/273821

A 192
1921.

OVER DE REEKS VAN LAMBERT

J. B. ROOS

24 Oct.

OVER DE REEKS VAN LAMBERT

A 192 (1921)

OVER DE REEKS VAN LAMBERT

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. J. A. C. VAN LEEUWEN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 25 OCTOBER DES NAMIDDAGS TE 4 UUR DOOR (1921)

JAN EVERT EDIE,

GEBOREN TE ROTTERDAM.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVE. IT
UTRECHT.

ELECTRISCHE DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE" J. VAN DRUTEN — UTRECHT.
MCMXXI.

AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJNEN VADER.

AAN MIJNE MOEDER.

Bij het voltooien van dit proefschrift is het mij eene behoefte U allen te bedanken, die tot mijne academische vorming hebben bijgedragen.

In 't bijzonder geldt mijn dank U, Hooggeleerde De Vries. Uwe welwillendheid Hooggeachte Promotor stel ik op grooten prijs.

Voor den aanmoedigenden steun bij het samenstellen van dit proefschrift ontvangen, ben ik U Hooggeleerde Kapteyn grooten dank verschuldigd.

Hooggeleerde Kluyver nog dagelijks ondervind ik de groote waarde van de lessen, die ik van U heb mogen ontvangen.

INHOUD.

		Bladz.
INLEIDING		1
HOOFDSTUK I.	't Kenmerk der priemgetallen . . .	4
HOOFDSTUK II.	Convergentie	11
HOOFDSTUK III.	Sommatie.	40
HOOFDSTUK IV.	Algebraische transformaties. . . .	61
	Transformaties in asymptotische ontwikkelingen	77
	Transformaties in bepaalde integralen	95
	Transformaties met Calcul Symbolique	102
HOOFDSTUK V.	Toepassingen.	108
STELLINGEN		126

ERRATA.

blz. 12 regel 2 v. o. staat $\left|\frac{1}{x^k}\right| > 1/2$ moet zijn $< 1/2$

„ 38 „ 9 v. o. „ $\frac{1}{(y+1)^{1/3}}$ „ „ $\frac{1}{(y+1)^{1/3}} \frac{3(y+1)}{2}$

„ 42 „ 1 v. b. „ $\frac{\log}{\log}$ „ „ $\log$

„ 43 „ 7 v. b. „ $\frac{x}{u_k}$ „ „ $\frac{x}{u_n}$

„ 55 „ 3 v. b. is weggelaten (30)

„ 56 „ 12 v. b. staat $\frac{h}{(2n)!}$ moet zijn $\frac{h^{2n}}{(2n)!}$

„ 71 „ 5 v. b. „ $\theta(d\,l)$ „ „ $\sum_{d=1}^{\infty} \theta(d\,l)$

„ 74 „ 3 v. o. „ $\frac{x^m}{(1-x^{2m})^2}$ moet zijn $\frac{x^m(1+x^{2m})}{(1-x^{2m})^2}$

„ 79 „ 7 v. o. „ Cd en $\partial \log 2$ moet zijn $C\,\partial$ en $\partial \log z$

„ 84 „ 3 v. b. „ $\frac{\sin 2\pi l t}{t}$ „ „ $\frac{\sin 2\pi l t}{l}$

„ 91 „ 7 v. b. „ $\sum_{h=1}^{n-1} \log$ „ „ $\sum_{h=1}^{n-1} h \log$

„ 91 „ 6 v. o. „ $\frac{n-1}{n}$ „ „ $\frac{n-1}{2}$

„ 91 „ 5 v. o. „ $-\frac{\pi i}{n} \sum_{h=1}^{n-1}$ „ „ $+\frac{\pi i}{n} \sum_{h=1}^{n-1} h$

„ 91 „ 4 v. o. „ $\frac{n-1}{2}$ „ „ $\frac{n-1}{n}$

„ 106 de B's op regel 9 en 10 v. o. moeten niet dik zijn.

INLEIDING.

§ 1. J. H. LAMBERT [1]) was de eerste, die de aandacht vestigde op de reeks $\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots\frac{x^k}{1-x^k}\cdots\cdots$ Hij merkte op, dat wanneer men de termen van deze reeks in reeksen naar opklimmende machten van x ontwikkelt en daarna de gelijke machten van x samenvoegt, de reeks: $x+2x^2+$ $+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+4x^8+3x^9+4x^{10}+\ldots$, verschijnt, waarin de coëfficiënten aangeven hoeveel deelers de exponenten hebben, de eenheid en het getal zelf meegerekend. Deze eigenschap is gemakkelijk te bewijzen, want ontwikkelt men $\frac{x^k}{1-x^k}=x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots.$ dan zal x^n slechts dan in die ontwikkeling voorkomen, wanneer k een deeler van n is. In de ontwikkeling van $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}$ zal x^n dus evenveel keeren voorkomen als er getallen k te vinden zijn, die deelers van n zijn. De coëfficiënt van x^n is dus gelijk aan het aantal deelers van n; is n een priemgetal, dan is de coëfficiënt 2.

§ 2. Om deze eigenschap, die het probleem van de priemgetallen verleidelijk dicht bij eene oplossing scheen te brengen, heeft de reeks van LAMBERT de aandacht van velen getrokken. CLAUSEN publiceerde in 1828 eene transformatie in eene sterk convergente reeks. SCHERK gaf in 1832 het bewijs van deze

[1]) Anlage zur Architectonic oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und Mathematischen Erkenntniss. Riga 1771. p. 507.

transformatie: Hij ontwikkelde iederen term in eene machtreeks en schreef deze onder elkander op:

$$\begin{array}{l} x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \\ x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots \\ x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots \\ x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

De m^e term uit de n^e rij is x^{mn}, maar dit is ook de n^e term in de m^e rij, dus de m^e term in de n^e kolom. De n^e rij en de n^e kolom bevatten dus dezelfde termen. Veronderstellen we $0 < x < 1$, dan zijn alle termen van de dubbelreeks positief en mogen wij ze dus in willekeurige groepeering sommeeren. Men neemt eerst de termen van de eerste rij en de eerste kolom bij elkaar. Deze zijn:

$$x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \ldots\ldots = x\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dan neemt men de overige termen van de tweede rij en de tweede kolom, daarna die van de derde rij en de derde kolom enz. Die van de k^e rij en de k^e kolom zijn:

$$x^{k^2} + 2x^{k(k+1)} + 2x^{k(k+2)} + \ldots = x^{k^2}(1 + 2x^k + 2x^{2k} + \ldots.) = x^{k^2}\left(\frac{1+x^k}{1-x^k}\right).$$

De getransformeerde reeks wordt dus:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2}\left(\frac{1+x^k}{1-x^k}\right) \text{ of } x\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + x^9\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right) + \ldots.$$

§ 3. Eisenstein (1844) onderzocht de convergentie.

$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = x$ dus convergentie voor $x < 1$. De convergentiecirkel heeft de eenheid als straal. Op dien cirkel liggen oneindig veel polen van $L(x)$, ieder punt $x = e^{2\pi i\gamma}$ is namelijk een pool mits γ eene rationeele breuk is. De convergentiecirkel is dus eene singuliere lijn.

§ 4. Burhenne (1852) trachtte met de reeks van Lambert een analytisch kenmerk voor de priemgetallen te vinden. Hij

wilde die reeks volgens MAC-LAURIN in eene machtreeks ontwikkelen. Deze ontwikkeling is dan identiek met die van LAMBERT zelf. Stelt men dus den coëfficiënt van x^n in de ontwikkeling naar MAC-LAURIN gelijk aan 2 dan heeft men eene vergelijking, waaraan slechts door n priem voldaan wordt. De resultaten waren niet zoo bevredigend als de eenvoud deed verwachten. Ook latere onderzoekers als ROGEL en CURTZE hebben er niets mee bereikt. Al stelde de reeks op dit gebied te leur, ze prikkelde tot onderzoek. SCHLÖMILCH, CESÀRO, KNOPP, LANDAU e. a. hebben belangrijke eigenschappen gevonden.

Doel van dit proefschrift is een geordend overzicht te geven van het voornaamste wat van deze reeks bekend is. Daartoe zullen we in het eerste hoofdstuk de pogingen om een kenmerk der priemgetallen af te leiden behandelen.

In hoofdstuk II wordt de convergentie en het gedrag in de omgeving van den convergentiecirkel besproken. In een volgend hoofdstuk de sommatie en die transformaties, die daarvoor noodig zijn. In het vierde hoofdstuk de overige transformaties terwijl in het laatste hoofdstuk eenige resultaten uit de getallentheorie met behulp van onze reeks zullen worden afgeleid.

HOOFDSTUK I.

§ 1. Om de reeks van L. volgens MAC-LAURIN te ontwikkelen behoeft men slechts $\left(D^n \frac{x^k}{1-x^k}\right)_{x=0} = \left(D^n(-1+\frac{1}{1-x^k})\right)_{x=0} = D^n\left(\frac{1}{1-x^k}\right)$ te bepalen. Hiertoe splitsen we $\frac{1}{1-x^k}$ in eenvoudige gebrokens en noemen $\frac{2\pi}{k} = \alpha$.

Voor *k even* stelt men: $\frac{1}{1-x_k} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{B_0}{x+1} + \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}k-1}\left(\frac{A_h}{x-e^{ih\alpha}} + \frac{B_h}{x-e^{-ih\alpha}}\right)$.

Substitutie van $x = 1+\delta$, $-1+\delta$, $e^{ih\alpha}+\delta$ en $e^{-ih\alpha}+\delta$ geeft A_0, B_0, A_h en B_h waardoor we vinden: $\frac{1}{1-x^k} = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}k-1}\frac{1}{k}\left(\frac{e^{ih\alpha}}{x-e^{ih\alpha}} + \frac{e^{-ih\alpha}}{x-e^{-ih\alpha}}\right)$

Differentieert men dit n maal dan geeft dit:

(1) $D^n\left(\frac{1}{1-x^k}\right) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{k}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right) + (-1)^{n+1}\frac{n!}{k}\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}k-1}\left(\frac{e^{ih\alpha}}{(x-e^{ih\alpha})^{n+1}} + \frac{e^{-ih\alpha}}{(x-e^{-ih\alpha})^{n+1}}\right)$

We schrijven nu $x - e^{-ih\alpha} = R_h e^{i\varphi_h}$ dan is $x - e^{+ih\alpha} = R_h e^{-i\varphi_h}$ terwijl:

$$R_h = (x^2 + 1 - 2x\cos h\alpha)^{1/2},\ \cos\phi_h = \frac{x-\cos h\alpha}{R_h} \text{ en}$$

$$\sin\phi_h = \frac{\sin h\alpha}{R_h}.$$

Substitueert men dit in (1) dan vindt men na eene korte herleiding:

$$D^n\left(\frac{1}{1-x^k}\right) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{k}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right) +$$

$$+ (-1)^{n+1} 2\frac{n!}{k}\sum_{h=1}^{1/2\,k-1}\frac{\cos(h\alpha + (n+1)\varphi_h)}{R_h{}^{n+1}}$$

Voor $x = 0$ is nu $\cos\varphi_h = -\cos h\alpha$, $\sin\varphi_h = +\sin h\alpha$ dus $\varphi_h = \pi - h\alpha$, terwijl $\cos(h\alpha + (n+1)\varphi_h) = \cos\{(n+1)\pi - n h\alpha\} = (-1)^{n+1}\cos n h\alpha$, waardoor we vinden voor *even* k:

$$(2)\quad \left(D^n\frac{1}{1-x^k}\right)_{x=0} = \frac{n!}{k}(1-(-1)^{n+1}) + 2\frac{n!}{k}\sum_{h=1}^{1/2\,k-1}\cos h n\alpha$$

Voor *oneven* k voert eene dergelijke redeneering tot het doel. We stellen nu:

$$\frac{1}{1-x^k} = \frac{A_0}{x-1} + \sum_{h=1}^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{A_h}{x - e^{ih\alpha}} + \frac{B_h}{x - e^{-ih\alpha}}\right)$$ en vinden:

voor *oneven* k

$$(3)\qquad \left(D^n\frac{1}{1-x^k}\right)_{x=0} = \frac{n!}{k} + 2\frac{n!}{k}\sum_{h=1}^{\frac{k-1}{2}}\cos h n\alpha.$$

Zooals we reeds in de inleiding verklaarden is het aantal deelers van n:

$$T_n = \frac{1}{n!}(D^n L(x))_{x=0} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\left(D^n\frac{x^k}{1-x^k}\right)_{x=0} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\left(D^n\frac{1}{1-x^k}\right)_{x=0}$$

en in verband met (2) en (3) vindt men zoo:

$$(4)\quad T_n = \sum_{p,q}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{p} + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\cos\frac{2nh\pi}{p} \\ \frac{1}{q}(1-(-1)^{n+1}) + \frac{2}{q}\sum_{h=1}^{1/2\,q-1}\cos\frac{2nh\pi}{q}\end{array}\right\}$$

waarbij voor p ieder oneven getal en voor q ieder even getal genomen moet worden.

Uit den regel van Leibniz volgt, dat $\left(D^n\frac{x^k}{1-x^k}\right)_{x=0}$ voor $k > n$ gelijk nul is, zoodat men in (4) de sommatie slechts behoeft uit te strekken over getallen p en $q \leqq n$.

§ 2. Met (4) vindt men nu $T_1 = \left\{ \begin{matrix} 1+0 \\ 0+0 \end{matrix} \right\} = 1$,

$$T_2 = \left\{ \begin{matrix} 1+0 \\ 1+0 \end{matrix} \right\} = 2, \quad T_3 = \left\{ \begin{matrix} {}^4/_3 + {}^2/_3 \\ 0+0 \end{matrix} \right\} = 2,$$

$$T_4 = \left\{ \begin{matrix} {}^4/_3 - {}^1/_3 \\ {}^3/_2 - {}^1/_2 \end{matrix} \right\} = 3, \quad T_5 = \left\{ \begin{matrix} {}^{23}/_{15} + {}^7/_{15} \\ 0+0 \end{matrix} \right\} = 2,$$

$$T_6 = \left\{ \begin{matrix} {}^{23}/_{15} + {}^7/_{15} \\ {}^{11}/_6 + {}^1/_6 \end{matrix} \right\} = 4.$$

Ten einde dieper in de vorming van deze getallen door te dringen, zullen we voor $n = 7$, 8 en 9 de substituties voor p en q afzonderlijk uitvoeren. Daartoe schrijven we $T_n = \sum \begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix}$ en vinden dan:

n	7	8	9
p = 1	$v + w = 1 + 0$	$v + w = 1 + 0$	$v + w = 1 + 0$
q = 2	$v_1 + w_1 = 0 + 0$	$v_1 + w_1 = 1 + 0$	$v_1 + w_1 = 0 + 0$
p = 3	$v + w = {}^1/_3 - {}^1/_3$	$v + w = {}^1/_3 - {}^1/_3$	$v + w = {}^1/_3 + {}^2/_3$
q = 4	$v_1 + w_1 = 0 + 0$	$v_1 + w_1 = {}^1/_2 + {}^1/_2$	$v_1 + w_1 = 0 + 0$
p = 5	$v + w = {}^1/_5 - {}^1/_5$	$v + w = {}^1/_5 - {}^1/_5$	$v + w = {}^1/_5 - {}^1/_5$
q = 6	$v_1 + w_1 = 0 + 0$	$v_1 + w_1 = {}^1/_3 - {}^1/_3$	$v_1 + w_1 = 0 + 0$
p = 7	$v + w = {}^1/_7 + {}^6/_7$	$v + w = {}^1/_7 - {}^1/_7$	$v + w = {}^1/_7 - {}^1/_7$
q = 8		$v_1 + w_1 = {}^1/_4 + {}^3/_4$	$v_1 + w_1 = 0 + 0$
p = 9			$v + w = {}^1/_9 + {}^8/_9$
	$\sum \begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix} = 2$	$\sum \begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix} = 4$	$\sum \begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix} = 3.$

We merken nu op dat, bij 7, $p = 1$ en $p = 7$ voor $v + w$ één opleveren en alle andere substituties nul, dat voor 8, de substituties voor $p = 1$ en $q = 2$, 4 en 8 één opleveren, de andere nul en bij 9 de substituties voor $p = 1$, 3 en 9 weer één, de andere weer nul geven en vermoeden dat alle substituties aan de eenvoudige wet onderworpen zijn: dat voor iederen deeler van n de bijbehoorende $v + w$ of $v_1 + w_1$ één oplevert en voor iederen niet-deeler van n de bijbehoorende som nul is.

§ 3. Zekerheid kunnen we krijgen door de reeksen in (4): $\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{2nh\pi}{p}$ en $\sum_{h=1}^{q/2-1} \cos \frac{2nh\pi}{q}$ te sommeeren. We gebruiken daartoe de identiteit

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots\ldots \cos ma =$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(2m+1)a - \sin \frac{1}{2}a}{2 \sin \frac{1}{2}a}.$$

Voor de eerste som stellen we $a = \frac{2n\pi}{p}$ en $m = \frac{p-1}{2}$ dan is:

$$\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{2nh\pi}{p} = \frac{\sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{p}}{2 \sin \frac{n\pi}{p}} = -\frac{1}{2},$$ wanneer n ten minste geen veelvoud van p is, in dat geval zou de breuk onbepaald worden en substitueert men liever direkt in de reeks, iedere term wordt 1 en dus $\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{2nh\pi}{p} = \frac{p-1}{2}$ indien p een deeler van n is, anders $-\frac{1}{2}$.

Voor de tweede som stellen we $a = \frac{2n\pi}{q}$ en $m = \frac{1}{2}q - 1$ en vinden:

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}q-1} \cos \frac{2nh\pi}{q} = \frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{q}\right) - \sin \frac{n\pi}{q}}{2 \sin \frac{n\pi}{q}} =$$

$$= \frac{-\cos n\pi \sin \frac{n\pi}{q} - \sin \frac{n\pi}{q}}{2 \sin \frac{n\pi}{q}} = -\frac{1}{2}(1 + \cos n\pi).$$

Is nu n ook even en geen veelvoud van q, dan is $\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}q-1} \cos \frac{2nh\pi}{q} = -1$, is n oneven dan is de som gelijk 0, maar is n even en een veelvoud van q, dan is de breuk

weer onbepaald, maar geeft directe substitutie in de reeks $\sum_{h=1}^{1/2\,q-1} \cos\frac{2\,n\,h\,\pi}{q} = 1/2\,q - 1.$

§ 4. Voor het bewijs van de wet van § 2 onderscheiden we nu 5 gevallen.

1°. p is een deeler van n dan is $\frac{1}{p} + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos\frac{2\,n\,h\,\pi}{p} =$
$= \frac{1}{p} + \frac{2}{p}\frac{p-1}{2} = 1.$

2°. p is geen deeler van n dan is $\frac{1}{p} + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos\frac{2\,n\,h\,\pi}{p} =$
$= \frac{1}{p} + \frac{2}{p} \times -1/2 = 0.$

3°. q is een deeler van n dan is n even en:

$$\frac{1}{q}(1-(-1)^{n+1}) + \frac{2}{q}\sum_{h=1}^{1/2\,q-1} \cos\frac{2\,n\,h\,\pi}{q} = \frac{1}{q}(1+1) + \frac{2}{q}(1/2\,q-1) = 1.$$

4°. q is geen deeler van n en n is oneven dan is:

$$\frac{1}{q}(1-(-1)^{n+1}) + \frac{2}{q}\sum_{h=1}^{1/2\,q-1} \cos\frac{2\,n\,h\,\pi}{q} = \frac{1}{q}(1-1) + \frac{2}{q}0 = 0$$

5°. q is geen deeler van n en n is even, dan is:

$$\frac{1}{q}(1-(-1)^{n+1}) + \frac{2}{q}\sum_{h=1}^{1/2\,q-1} \cos\frac{2\,n\,h\,\pi}{q} = \frac{1}{q}(1+1) + \frac{2}{q} \times -1 = 0.$$

Iedere substitutie voor p of q levert dus 1 of 0, naarmate p en q al of niet deelers van n zijn.

§ 5. Het opstellen van een kenmerk voor de priemgetallen is nu gemakkelijk. Behalve 2 zijn alle oneven, het is dus voldoende de substituties slechts voor oneven getallen uit te

voeren. Zoo vond BURHENNE dat alle priemgetallen > 2 voldoen aan: $\sum_p \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{2nh\pi}{p}\right) = 2.$

Tegelijk blijkt echter, dat deze vergelijking eene vanzelf sprekende identiteit is, die ook wel zonder de reeks van L. afgeleid had kunnen worden en dat het differentieeren van deze reeks vóór de sommatie geen ander resultaat heeft gehad, dan dat het op de gedachte gebracht heeft bij de reeks $\sum \cos \frac{2nh\pi}{r}$ naar iets karakteristieks voor de priemgetallen te zoeken. Bezien we de zaak van dezen kant dan kunnen we trachten uit de reeks $\sum \cos \frac{2nh\pi}{r}$ nog eenvoudiger functies af te leiden, die 1 of 0 opleveren naarmate r een deeler van n is of niet. Noemen we eene dergelijke functie $\chi\left(\frac{n}{r}\right)$ dan is voor *oneven r:*

$$(5)\ \chi\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{2nh\pi}{p} = \frac{1}{p}\left(1 + 2\,\frac{\sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{p}}{2 \sin \frac{n\pi}{p}}\right) = \frac{1}{p}\,\frac{\sin n\pi}{\sin \frac{n\pi}{p}}.$$

Is p geen deeler van n dan is de teller nul en de noemer niet, is p wel een deeler, dan is de breuk onbepaald, maar wordt feitelijk bedoeld:

$$\operatorname{Lim}_{x \to n\pi} \frac{1}{p}\,\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{p}} = 1.$$

Voor *even r* is verder $\chi\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{q}(1 - (-1)^{n+1}) +$

$$+ \frac{2}{q} \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}q-1} \cos \frac{2nh\pi}{q}.$$

Is n nu ook even dan is $\chi\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{2}{q}\left(1 + \frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{q}\right) - \sin \frac{n\pi}{q}}{2 \sin \frac{n\pi}{q}}\right) =$

$$(6) = \frac{1}{q}\,\frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{q}\right) + \sin\frac{n\pi}{q}}{2\sin\frac{n\pi}{q}} = \frac{1}{q}\,\frac{\sin n\pi\cos\frac{n\pi}{q} - \cos n\pi\sin\frac{n\pi}{q} + \sin\frac{n\pi}{q}}{2\sin\frac{n\pi}{q}}$$

$$\text{dus } \chi\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{q}\,\frac{\sin n\pi}{\sin\frac{n\pi}{q}}\cos\frac{n\pi}{q}$$

Gemakkelijk is te zien dat deze functie voor alle waarden van n goed is, want is q geen deeler n, dan is de teller nul en de noemer niet, is q wel een deeler dan is n even. Tevens blijkt waarom bij even r een factor $\cos\frac{n\pi}{q}$ noodzakelijk is, want $\lim_{x\to n\pi}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{q}} = \frac{q\cos n\pi}{\cos\frac{n\pi}{q}}$ en dit is $+q$ als n een even aantal malen q is en $-q$ als n een oneven aantal malen q is, de factor $\cos\frac{n\pi}{q}$ zorgt nu voor het goede teeken. Daar de grenswaarde van $\frac{\sin n\pi}{\sin\frac{n\pi}{p}}$ gelijk is aan $+p$, kan men in (5) zoo'n factor niet gebruiken.

De formule (6) is om te rekenen in eene andere, die voor even en oneven deelers beide geldt. De vorm $\frac{1}{r}\,\frac{\sin n\pi}{\sin\frac{n\pi}{r}}\cos\frac{n\pi}{r}$ is nul, wanneer r geen deeler van n is, is r wel een deeler dan is de waarde van den vorm $\cos n\pi$. Voor even n is dit $+1$, maar -1 als n oneven is. Hieraan is tegemoet te komen door nog een factor $\cos n\pi$ toe te voegen, die in het laatste geval voor het goede teeken zorgt en in het eerste niet schaadt. Zoo vindt men voor iedere n en r:

$$\chi\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\frac{\sin n\pi}{\sin\frac{n\pi}{r}}\cos\frac{n\pi}{r}\cos n\pi = \frac{\sin 2n\pi}{2}\,\frac{\cos\frac{n\pi}{r}}{r\sin\frac{n\pi}{r}}$$

$$\text{en } T_n = \frac{\sin 2n\pi}{2}\sum_{r=1}^{n}\frac{\cos\frac{n\pi}{r}}{r\sin\frac{n\pi}{r}}.$$

HOOFDSTUK II.

Convergentie.

§ 1. Definieert men eene reeks van LAMBERT als $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k}$ dan geldt voor hare convergentie de volgende wet:

Als $\sum b_k$ convergeert, dan convergeert de reeks voor iedere waarde van $|x|$ die van 1 verschilt. Is $\sum b_k$ niet convergent, dan is het convergentiegebied van de reeks het binnenstuk van den convergentiecirkel van de verwante machtreeks $\sum b_k x^k$. In ieder afgesloten geheel binnen een convergentiegebied gelegen deel, is de convergentie uniform.

Om dit te bewijzen gebruiken we het kenmerk van ABEL [1]): wanneer $\sum a_k$ convergeert en $\sum |v_k - v_{k+1}|$ is convergent, dan zal $\sum a_k v_k$ convergent zijn en deze convergentie is uniform in een gebied, waarvoor iedere waarde van x, $|v_1|$ en $U_1 = |v_1 - v_2| + |v_2 - v_3| +$ enz.... beneden vaste waarden blijven.

Veronderstel nu eerst $\sum b_k$ is *convergent* en neem $v_k = \frac{x^k}{1-x^k}$ dan is:

$$|v_k - v_{k+1}| = \left| \frac{x^k(1-x)}{(1-x^k)(1-x^{k+1})} \right| \text{ dus als } |x| < 1:$$

$$|v_k - v_{k+1}| < \frac{2|x^k|}{|1-x^k||1-x^{k+1}|}$$

Ook is er dan eene waarde m te vinden, zoodat voor alle $k \geqq m$, $|x^k|$ bijvoorbeeld kleiner dan $^1/_2$ zal zijn en dus $|1-x^k|$ en $|1-x^{k+1}| > {}^1/_2$, waaruit volgt:

[1]) BROMWICH: *Infinite Series* p. 205, 206.

$\sum_{k=m}^{\infty} | v_k - v_{k+1} | \leqq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{2 | x |^k}{1/2 \cdot 1/2} = 8 \sum_{k=m}^{\infty} | x |^k$ dus eindig.

De reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k}$ convergeert dus in dit geval. Om aan te toonen, dat zij uniform convergeert voor $x < \rho < 1$ merken we op, dat:

$| v_1 | = | \frac{x}{1-x} | < \frac{1}{1-\rho}$ en dat $U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} | v_k - v_{k+1} | < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 | x^k |}{| 1-x^k | | 1-x^{k+1} |}$

van eene zekere waarde $k = m$ af, zal $\rho^k < 1/2$ zijn en dus is:

$$U_1 < 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{| 1-\rho^k | | 1-\rho^{k+1} |} + 2 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\rho^k}{1/2 \cdot 1/2} =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{| 1-\rho^k | | 1-\rho^{k+1} |} + 8 \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k < C.$$

$| v_1 |$ en U_1 blijven dus beneden vaste waarden, waarmede de uniforme convergentie bewezen is.

Is $| x | > 1$. dan schrijven we $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k} =$

$= - \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{1-x^k}$ en behoeven slechts de uniforme convergentie van $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{1-x^k}$ aan te toonen. Voor v_k nemen we $\frac{1}{1-x^k}$

Nu is $| v_k - v_{k+1} | = \left| \frac{x^k (1-x)}{(1-x^k)(1-x^{k+1})} \right| =$

$$= \frac{\left| \frac{1}{x^k} \right| \left| \frac{1}{x} - 1 \right|}{\left| \frac{1}{x^k} - 1 \right| \left| \frac{1}{x^{k+1}} - 1 \right|} < \frac{2 \left| \frac{1}{x} \right|^k}{\left| 1 - \frac{1}{x^k} \right| \left| 1 - \frac{1}{x^{k+1}} \right|}.$$

Daar $| x | > 1$ is, is er eene waarde m te vinden, zoodat voor alle $k \geqq m$, $\left| \frac{1}{x^k} \right| > 1/2$ is, dan is $\left| 1 - \frac{1}{x^k} \right|$ en $\left| 1 - \frac{1}{x^{k+1}} \right| > 1/2$

en $\sum_{k=m}^{\infty} | v_k - v_{k+1} | < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{2 \cdot \left| \frac{1}{x} \right|^k}{1/2 \cdot 1/2} = 8 \sum_{k=m}^{\infty} \left| \frac{1}{x} \right|^k$ en dus ein-

dig, de Lambertsche reeks convergeert. Verder is weer voor

$$|x| > \rho > 1 \quad |v_1| = \left|\frac{1}{1-x}\right| < \left|\frac{1}{1-\rho}\right| \text{ en}$$

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left|\frac{1}{x}\right|^k}{\left|1-\frac{1}{x^k}\right| \left|1-\frac{1}{x^{k+1}}\right|}$$

en daar $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ is, blijft dit net als in 't vorige geval beneden eene vaste waarde de reeks convergeert dus uniform in het gebied $|x| > \rho > 1$.

Veronderstellen we nu dat $\sum b_k$ *divergeert*. Bepaal dan ρ zoodat $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ convergeert, dus $\rho \leqq 1$. Neem nu in $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k}$ als reeks der v's : $v_k = \frac{1}{1-x^k}$ dan zal de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ dus convergeeren. Blijft aan te toonen dat $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ convergeert. Nu is:

$$|v_k - v_{k+1}| = \left|\frac{x^k(1-x)}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}\right| < \frac{2|x|^k}{|1-x^k||1-x^{k+1}|}.$$

Evenals te voren toont men ook nu weer aan dat de reeks der $|v_k - v_{k+1}|$ convergeert en dat hare som beneden eene vaste waarde blijft. Er moet dan nog nagegaan worden of het gebruikte kenmerk der uniforme convergentie wel goed is, daar Bromwich (p 206) het afleidt voor het geval dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ niet de veranderlijke x bevat. Maar daar $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ uniform convergeert, voldoet deze reeks aan alle eischen, die bij de afleiding van het kenmerk door Bromwich aan $\sum a_k$ gesteld werden, waarmee dit bezwaar vervalt.

§ 2. Wanneer $\sum b_k$ convergeert en dus de Lambertsche reeks binnen en buiten den eenheidscirkel bestaat, is het niet noodig dat de waarden binnen $(F_i(x))$ en buiten den cirkel $(F_b(x))$ voortzettingen van elkaar zijn. Wel bestaat er een

verband tusschen $F_i(x)$ en $F_b\left(\frac{1}{x}\right)$, want is $|x| < 1$. dan is:

$$F_i(x) + F_b\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^k}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

§ 3. Om te bewijzen, dat de reeks van L. eene functie voorstelt, die niet over den eenheidscirkel voortgezet kan worden, is het slechts noodig, dat we aantoonen, dat overal op den omtrek eene dicht bijeenliggende menigte punten is, waar $L(x)$ oneindig wordt. Dit gebeurt nu in ieder rationaal randpunt, zelfs zal, als $x_0 = e^{2\pi i \frac{n'}{n}}$ en $x = \rho e^{2\pi i \frac{n'}{n}}$ (n en n' onderling ondeelbaar) $\lim_{\rho \to 1} \left|\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) L(x)\right| = \infty$ zijn.

Eene dergelijke nadering tot x_0, waarbij slechts de voerstraal verandert, het argument hetzelfde blijft, zullen we eene radiale nadering noemen. Voor de berekening der limiet splitsen we $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$ in twee deelen Σ_1 en Σ_2 naarmate $k \equiv 0$ of $k \not\equiv 0$ (mod. n) is. Nu is:

$$\Sigma_1 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^{vn}}{1-x^{vn}} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(x^n)^v}{1-(x^n)^v} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\rho^{vn}}{1-\rho^{vn}}.$$

Noemt men $\rho^n = y$ dan vindt men:

$$\lim_{\rho \to 1}(1-\rho)\Sigma_1 = \lim_{\rho \to 1} \frac{1-\rho}{1-\rho^n}(1-\rho^n)\Sigma_1 = \frac{1}{n}\lim_{\rho \to 1}(1-\rho^n)\Sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{n}\lim_{y \to 1}(1-y)\sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^v}{1-y^v}$$

waarmee de nadering tot het randpunt teruggebracht is tot de radiale nadering van het punt $+1$. Nu is voor $0 < y < 1$.

$$(1-y)\sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^v}{1-y^v} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^v}{1+y+y^2+\ldots.y^{v-1}} > \sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^v}{v} = \log\frac{1}{1-y}.$$

dus:

$$\lim_{\rho \to 1}(1-\rho)\Sigma_1 > \frac{1}{n}\lim_{y \to 1} \log \frac{1}{1-y} \text{ en dus } +\infty.$$

Kunnen we nu aantoonen, dat $\lim_{x \to x_0} \left| \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \Sigma_2 \right|$ beneden eene grens A blijft, dan is de stelling bewezen. Is $k \not\equiv 0$ (mod. n) dan ligt x_0^k in een van de $(n-1)$ andere hoekpunten van eenen regelmatigen n-hoek, waarvan het eerste hoekpunt in $+1$ ligt. Voor $0 \leqq \rho \leqq 1$ is er altijd eene positieve eindige grootheid h aan te wijzen, zoodat $|1 - x^k| \geqq h$ is. Voor $n = 2$, is $h = 1$, is $n > 2$ dan is h de lengte van de loodlijn uit het hoekpunt $+1$ op den straal naar het eerstvolgend hoekpunt neergelaten (ligt x^k niet op dien eersten straal dan geldt de ongelijkheid à fortiori.)

Dus $h = \sin \frac{2\pi}{n}$ en daar n eindig is, al kan n groot zijn, is h ook eindig.

Nu is echter $\lim_{x \to x_0} \left| \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \Sigma_2 \right| < \lim_{x \to x_0} (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{h} =$

$= \lim_{\rho \to 1} \frac{\rho}{h} = \frac{1}{h} = A$ (eindig), waarbij voor het gemakkelijk sommeeren in de reeks $\Sigma \frac{|x|^k}{h}$ nog eenige termen te veel opgeschreven zijn.

§ 4. Voor Lambertsche reeksen geldt de volgende eigenschap van Franel [1]) afkomstig, maar hier iets algemeener uitgesproken. [2]) Wanneer de coëfficienten b_k zoo gekozen zijn, dat voor een bepaald geheel getal n, alle n reeksen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{n\nu+l}}{n\nu+l}$ convergeeren $(l = 0.\ 1.\ 2.\ 3. \ldots\ldots n-1)$, dan is, wanneer n' en n onderling ondeelbaar zijn en men stelt $x_0 = e^{2\pi i \frac{n'}{n}}$, bij radiale nadering:

$$(1) \qquad \lim_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} \right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{n\nu}}{n\nu}.$$

Franel merkte zelf al op dat, wanneer $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu n}}{n\nu}$ van nul verschilt, x_0 een singulier punt van de Lambertsche reeks moet zijn, want de linkerkant van (1) moet dan den vorm $0 \times \infty$

[1]) Sur la théorie des séries Math. Ann. Bd 52 (1899) p. 529—549.

[2]) Knopp. Über Lambertsche Reihen Crelle. Bd. 142 (1913) p. 283.

aannemen. Is dit voor ∞ veel verschillende waarden van n waar dan heeft de reeks ook ∞ veel singuliere punten. Dit is zeker het geval als alle $b_k > 0$ zijn en $\sum \frac{b_k}{k}$ convergeert. De eenheidscirkel is dan singuliere lijn. Hij is ook convergentiecirkel; dit spreekt niet vanzelf, $\sum b_k$ zou kunnen divergeeren, de convergentiecirkel is dan dezelfde als van $\sum b_k x^k$. Maar als $\sum \frac{b_k}{k}$ convergeert is $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{b_k}{k} \leqq 1$, dus $\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k \frac{1}{k} \leqq 1$ en omdat $\sum b_k$ divergeert is $\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k \geqq 1$. Uit beide betrekkingen volgt $\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k = 1$. Nu convergeert $\sum b_k x_k$ voor waarden van x, die $\overline{\lim}_{k\to\infty} |b_k x_k| < 1$ maken of voor $|x| < \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k}$ dus $|x| < 1$.

Voor $b_k = 1$, is $\sum \frac{b_k}{k}$ niet convergent, daarom moest voor de reeks van L. een afzonderlijk bewijs gegeven worden. Dit is het eerst gedaan door C. Hansen, [1]) erg ingewikkeld; het eenvoudig bewijs van § 3 stamt in wezen van Landau.

Om de betrekking (1) te bewijzen, stellen we weer $x = \rho e^{2\pi i \frac{n'}{n}}$ en splitsen de reeks weer in twee stukken Σ_1 en Σ_2 naarmate k al of niet $\equiv 0 \pmod{n}$ is, terwijl we voor ρ^n y zullen schrijven. Eerst bepalen we:

$$\lim_{\rho\to 1}(1-\rho)\Sigma_1 = \lim_{\rho\to 1}(1-\rho)\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{n\nu}\frac{\rho^{n\nu}}{1-\rho^{n\nu}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 1}\frac{1-\varrho}{1-\rho^n}(1-\rho^n)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{n\nu}\rho^{n\nu}}{1-\rho^{n\nu}} =$$

$$\frac{1}{n}\lim_{y\to 1}(1-y)\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{n\nu}\frac{y_\nu}{1-y^\nu} = \lim_{y\to 1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{n\nu}}{n\nu}\frac{\nu y^\nu}{1+y+y^2\ldots\ldots y^{\nu-1}}$$

---

[1]) Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de la série de Lambert et des séries analogues.

Oversigt over det kongelige Danske Videnskabernes Selskab Forhandlunger (1907) p. 3—19.

Om deze limiet te bepalen, mogen we in de reeks rechts $y=1$ substitueeren indien deze reeks voor $0<y<1$ uniform convergent is en ook voor $y=1$ convergeert (ABEL). Het laatste is gegeven, voor het eerste schrijven we $\frac{b_{nv}}{nv} = \alpha_{nv} + i\,\beta_{nv}$.

Uit de convergentie van $\sum \frac{b_{nv}}{nv}$ volgt dan die van $\sum \alpha_{nv}$ en van $\sum \beta_{nv}$. Noem nu $t_v = \frac{v\,y^v}{1+y+y^2+\ldots\ldots y^{v-1}}$ dan moet vooreerst de convergentie van $\sum \alpha_{nv}\,t_v$ en van $\sum \beta_{nv}\,t_v$ aangetoond worden, dus slechts bewezen, dat t_v monotoon af neemt en dat t_1 kleiner is dan eene constante.[1]) Nu is:

$$t_v - t_{v+1} = \frac{v\,y^v - y^{v+1} - y^{v+2} \ldots\ldots\ldots y^{2v}}{(1+y+y^2 \ldots\ldots y^{v-1})\,(1+y+y^2+\ldots\ldots y^v)}.$$

Dit is zeker positief, want ieder der v termen $y^{v+1}, y^{v+2}, \ldots\ldots y^{2v}$ is kleiner dan y^v. De reeks t_v neemt dus steeds af en voor $v=1$ is $t_1 = \frac{y}{1}$ dus <1. De reeks $\sum \frac{b_{nv}}{nv}\,t_v$ convergeert dus, mits $0<y<1$. Daar in dit interval $t_v(y)$ steeds positief is, convergeeren de reeksen $\sum \alpha_{nv}\,t_v$ en $\sum \beta_{nv}\,t_v$ uniform[2]) en hieruit volgt hetzelfde voor de reeks $\sum \frac{b_{nv}}{nv}\,t_v$. want als voor:

$\lambda \geqq m$, $\left|\sum_{v=\lambda}^{\infty} \alpha_{nv}\,t_v\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ en voor $\lambda \geqq m_1$, $\left|\sum_{v=\lambda}^{\infty} \beta_{nv}\,t_v\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (waarbij ε eene willekeurig vooruitbepaalde kleine waarde heeft), dan is als $\lambda \geqq$ aan de grootste der waarden m en m_1:

$$\left|\sum_{v=\lambda}^{\infty} \alpha_{nv}\,t_v + i\sum_{v=\lambda}^{\infty} \beta_{nv}\,t_v\right| < \varepsilon.$$

De substitutie $y=1$ in de limiet is dus geoorloofd en geeft:

$$\lim_{\rho\to 1}(1-\rho)\,\Sigma_1 = \lim_{y\to 1} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{nv}}{n\,v}\,\frac{v\,y^v}{1+y+y^2+\ldots\ldots y^{v-1}} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{nv}}{n\,v}.$$

Om het bewijs te voltooien, is het voldoende aan te toonen,

---

[1]) BROMWICH «Infinite Series» p. 48. § 19.

[2]) BROMWICH «Infinite Series» p. 113. § 44. 2.

dat $\lim_{\rho \to 1} (1-\rho)\Sigma_2 = 0$, dus dat voor iedere waarde van $l = 1.2.3.\ldots n-1$ bij radiale nadering:

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{v=1}^{\infty} b_{nv} + l \frac{x^{nv+l}}{1-x^{nv+l}} \right\} = 0$$

Noem nu $\frac{b_{n\,v} + l}{nv + l} = d_v$ zoodat Σd_v convergeert, dan is te bewijzen

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{v=1}^{\infty} d_v \frac{(n\,v + l)\, x^{nv+l}\,(1-\rho)}{1 - x^{nv+l}} = 0$$

Voor $x = x_0$ dus $\rho = 1$, is de waarde der reeks nul; het is dus weer genoeg te bewijzen, dat zij in het interval $0 < \rho < 1$ uniform convergeert. Nu is:

$$\sum_{v=1}^{\infty} d_v \frac{(n\,v + l)\, y^v\, x_l\,(1-\rho^n)}{1 - x^l y^v} \frac{1-\rho}{1-\rho^n} =$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} d_v \frac{(n\,v + l)\, y^v}{1 + y + y^2 + \ldots y^{v-1}} \frac{1 - y^v}{1 - x^l y^v} \frac{(1-\rho)\, x^l}{1-\rho^n} =$$

$$= \frac{(1-\rho)\, x^l}{1-\rho^n} \sum_{v=1}^{\infty} d_v \frac{(n\,v + l)}{1 + y + y^2 + \ldots y^{v-1}} \frac{1 - y^v}{1 - x^l y^v}.$$

Ten einde de uniforme convergentie van deze reeks aan te toonen, bewijzen we die eerst voor de reeks

$\sum_{v=1}^{\infty} d_v \frac{(n\,v + l)\, y^v}{1 + y + y^2 + \ldots y^{v-1}}$ en daarna voor de bedoelde reeks, die ontstaat door iederen term met $\frac{1 - y^v}{1 - x^l y^v}$ te vermenigvuldigen. Het eerste kan gebeuren als bij de reeks $\Sigma \frac{b_{nv}}{n\,v} t_v$, voor het tweede is het kenmerk van Abel voor reeksen met complexe termen noodig, zooals we dat eenigszins uitgebreid hebben voor het bewijs in § 1.

We toonen dus eerst aan dat $\varphi_v(y) = \frac{(n\,v + l)\, y^v}{1 + y + y^2 + \ldots y^{v-1}}$ eene monotoon afnemende functie is. Nu is:

$$\varphi_v(y) - \varphi_{v+1}(y) = \frac{y^v \{(nv + l) - n(y + y^2 + y^3 + \ldots y^v)\}}{(1 + y + y^2 + \ldots y^{v-1})(1 + y + y^2 + \ldots . y^v)} =$$

$$= \frac{y^v \{n(v - y - y^2 - y^3 \ldots . y^v) + l\}}{(1 + y + y^2 + \ldots y^{v-1})(1 + y + y^2 + \ldots . y^v)}.$$

Voor $0 < y < 1$ is $\phi_v(y) - \phi_{v+1}(y)$ zeker positief, $\phi_v(y)$ neemt monotoon af, voor $v = 1$ is $\phi_1(y) = \frac{(n+l)\,y}{1} < 2(n+l)$ en daar $\sum_{v=1}^{\infty} d_v$ convergeert is aan alle voorwaarden voor de uniforme convergentie van $\sum_{v=1}^{\infty} d_v \phi_v(y)$ voldaan.

Voor de uniforme convergentie der reeks $\sum_{v=1}^{\infty} d_v \phi_v(y) \frac{1-y^v}{1-x^l y^v}$ is nu noodig dat $\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{1-y^v}{1-x^l y^v} - \frac{1-y^{v+1}}{1-x^l y^{v+1}} \right|$ convergeert en eene som heeft die kleiner is dan eene eindige van y onafhankelijke waarde. Ook moet $\left| \frac{1-y}{1-x^l y^v} \right|$ kleiner zijn dan eene dergelijke vaste waarde.

$$\left| \frac{1-y^v}{1-x^l y^v} - \frac{1-y^{v+1}}{1-x^l y^{v+1}} \right| = \left| \frac{y^v (1-y)(1-x^l)}{(1-x^l y^v)(1-x^l y^{v+1})} \right|$$

Alle punten x^l, $x^l y^v$, $x^l y^{v+1}$ liggen op de stralen van een regelmatigen n hoek, die een hoekpunt in $x = 1$ heeft; op den straal naar dit hoekpunt ligt geen der bedoelde punten. Evenals in § 3 kunnen we aantoonen, dat $|1 - x^l y^v|$ en $|1 - x^l y^{v+1}|$ altijd grooter zijn, dan eene waarde h $(h = \sin\frac{2\pi}{n}$ als $n > 2$, anders 1), terwijl $|1 - x^l| < 2$. Zoo vindt men:

$$\left| \frac{y^v (1-y)(1-x^l)}{(1-x^l y^v)(1-x^l y^{v+1})} \right| < \frac{2}{h^2} y^v (1-y) \text{ en dus}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{1-y^v}{1-x^l y^v} - \frac{1-y^{v+1}}{1-x^l y^{v+1}} \right| < \frac{2}{h^2} \sum_{v=1}^{\infty} (y^v - y^{v+1}) = \frac{2}{h^2} y < \frac{2}{h^2}$$

Daar ook $\left| \frac{1-y}{1-x^l y} \right| < \frac{1}{h}$ is hiermede de uniforme convergentie der bedoelde reeks aangetoond en tegelijk bewezen, dat $\lim_{\rho \to 1} (1-\rho)\,\Sigma_2 = 0$.

In verband met $\lim_{\rho \to 1} (1-\rho)\,\Sigma_1 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{nv}}{n\,v}$ volgt hieruit de juistheid van (1).

§ 5. Ook voor het geval, dat x niet radiaal tot x_0 nadert is de waarde van $\lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k}$ te bepalen. Daarvoor maken we gebruik van eene stelling, die door APPELL gevonden en door PRINGSHEIM voor complexe waarden uitgebreid is. APPELL [1]) bewees, dat wanneer $\sum a_k x^k$ en $\sum b_k x^k$ den eenheidscirkel als convergentiecirkel hebben en voor $x = 1$ divergeeren dat dan $\lim_{x \to 1} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$ mits deze laatste limiet bestaat.

APPELL stelde zich voor dat x langs de reeele as tot 1 nadert. PRINGSHEIM [2]) breidt dit uit voor het geval dat x door complexe waarden tot 1 nadert. Hij voert daartoe het begrip uniform divergent in, en noemt de reeks $\sum b_k x^k$ uniform divergent bij $x = +1$, wanneer het mogelijk is binnen het convergentiegebied bij $+1$ een gebied af te zonderen, b.v. een gelijkbeenigen driehoek Δ met eindigen tophoek, met den top in $+1$ en de beenen synnetrisch ten opzichte van de reëele as, zoodat ten minste binnen dit gebied

$$\frac{\left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right|}{\sum_{k=0}^{\infty} | b_k x^k |} \geqq \alpha > 0, \text{ waarbij } \alpha \text{ eindig is.}$$

Na deze afspraak bewijst PRINGSHEIM: Wanneer $\sum a_k x^k$ en $\sum b_k x^k$ den eenheidscirkel als convergentiecirkel hebben en beide voor $x = 1$ divergeeren, terwijl de tweede reeks positieve coëfficiënten heeft en uniform divergeert, dat dan als $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = g$ ook voor eene nadering van x tot 1 langs

---

[1]) CESÀRO: Démonstration d'un théorème de M. APPELL. Mathésis 1893. p. 241. Ook BROMWICH: Infinite series p. 131. § 52. Ex. 1 en 2.

[2]) PRINGSHEIM: Über den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen. Acta Math. Bd 28 p. 1—30 (1904).

complexe waarden, mits binnen Δ: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = g.$

De voorwaarde, dat $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_k}{b_k}$ bestaat, is nog iets algemeener te maken, want stellen we $a_0 = A_0$, $a_0 + a_1 = A_1$ enz. en eveneens $b_0 = B_0$, $b_0 + b_1 = B_1$ enz. dan is het al voldoende dat $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{A_k}{B_k}$ bestaat; is deze g, dan is ook $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = g.$

Dit is werkelijk eene uitbreiding, want uit $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_k}{b_k} = g$ volgt $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{A_k}{B_k} = g$ maar het omgekeerde is niet altijd waar.

§ 6. Met de stelling van PRINGSHEIM kunnen we nu aantoonen, dat wanneer $\sum \left| \dfrac{b_k}{k} \right|$ convergeert [1]) en wanneer $x_0 = e^{2\pi i \frac{n^1}{n}}$ (n^1 en n onderling ondeelbaar) dat dan bij willekeurige nadering, mits binnen Δ

$$(2) \qquad \lim_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} \right\} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{nv}}{nv}.$$

Stelt men $x = x_0 t$ dan is:

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} \right\} = \lim_{t \to 1} \left\{ (1 - t) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{{x_0}^k t^k}{1 - {x_0}^k t^k} \right\}$$

We ontwikkelen nu alle breuken in reeksen en vereenigen alle termen met gelijke machten van $x_0 t$, dan gaat de reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \dfrac{{x_0}^k t^k}{1 - {x_0}^k t^k}$ over in $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k {x_0}^k t^k$ waarbij $a_k = \sum\limits_{d \mid k}^{\infty} b_d$. Men vindt zoo

$$(3) \quad \lim_{t \to 1} \left\{ (1 - t) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k {x_0}^k) t^k \right\} = \lim_{t=1} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k {x_0}^k) t^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k}.$$

[1]) In tegenstelling met het geval van radiale nadering moet de reeks nu absoluut convergeeren.

Nu heeft de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} t_k$ positieve coefficienten en is voor $t = +1$ uniform divergent, want:

$$\frac{\left|\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right|}{\sum_{k=0}^{\infty} |t^k|} = \frac{\left|\frac{1}{1-t}\right|}{\frac{1}{1-|t|}} = \frac{1-|t|}{|1-t|}.$$

Teekent men nu in A $(+1)$ den bedoelden gelijkbeenigen driehoek ABC en neemt men binnen dien driehoek een punt P om t te bepalen, dan is $1-|t| = OA - OP$ en $|1-t| = PA$ dus $\frac{1-|t|}{|1-t|} = \frac{OA-OP}{PA}$. Men ziet direkt dat dit voor geen enkelpunt binnen den driehoek oneindig klein kan worden, dus steeds grooter is dan eene eindige grootheid α. Slechts als $\angle BAO = 90^0$ zou $\frac{OA-OP}{PA}$ tot nul kunnen naderen. De tophoek moet dus kleiner dan 180^0 zijn; naderen langs den convergentiecirkel is uitgesloten.

We mogen (3) dus met de stelling van Pringsheim berekenen en vinden:

$$(4)\ \operatorname{Lim}_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k} \right\} = \operatorname{Lim}_{k \to \infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k}{k}$$

We maken nu gebruik van de eigenschap $a_k = \sum_{d \mid k} b_d$ en vinden:

$$\begin{aligned}
&a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_k x_0^k = \\
&b_1 x_0 + b_1 x_0^2 + b_1 x_0^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_1 x_0^k + \\
&\qquad b_2 x_0^2 \qquad + b_2 x_0^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots b_2 (x_0^2) \left[\tfrac{k}{2}\right] \\
&\qquad b_3 x_0^3 + \quad b_3 x_0^6 + \quad b_3 x_0^9 + \ldots\ldots + b_3 (x_0^3) \left[\tfrac{k}{3}\right] + \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\times \quad + b_n x_0^n + b_n x_0^{2n} + b_n x_0^{3n} + \ldots\ldots\ldots b_n (x_0^n) \left[\tfrac{k}{n}\right] + \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\times + b_{vn} x_0^{vn} + b_{vn} x_0^{2vn} + b_{vn} x_0^{3vn} + \ldots\ldots b_{vn} (x_0^{vn}) \left[\tfrac{k}{vn}\right] + \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vestigen we de aandacht op de gemerkte rijen, dan zijn de factoren, waarmede de b's in die rijen vermenigvuldigd zijn, alle 1, de eerste van die rijen heeft $\left[\frac{k}{n}\right]$, termen, de tweede $\left[\frac{k}{2n}\right]$, in 't algemeen $\left[\frac{k}{vn}\right]$ zoodat we voor de som van alle gemerkte rijen vinden:

$$\sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \left[\frac{k}{vn}\right] b_{vn}.$$

en dus is:

$$(5) \quad \left\{ (a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k) - \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \left[\frac{k}{vn}\right] b_{vn} \right\} =$$

$$= b_1 \frac{1 - x_0^k}{1 - x_0} + b_2 \frac{1 - x_0^{\left[\frac{k}{2}\right]2}}{1 - x_0^2} + \ldots\ldots\ldots$$ waarbij in het tweede lid geen termen mogen voor komen, die sommen zijn van reeksen met x_0^{nv} als reden. De modulus van het eerste lid is kleiner dan de som der moduli van het tweede. De punten x_0^p liggen in de hoekpunten van een regelmatigen n hoek in den eenheidscirkel beschreven, maar het hoekpunt $x = 1$ komt niet voor, omdat de reeksen met reden x_0^{nv} overgeslagen zijn. $|1 - x_0^p|$ heeft dus als minimumwaarde de zijde van den regelmatigen n hoek $= 2 \sin \frac{\pi}{n}$. Nu is de omtrek van een regelmatigen veelhoek grooter dan de middellijn dus $2n \sin \frac{\pi}{n} > 2$ en daarom $|1 - x_0^p| > \frac{2}{n}$. Ieder der coefficiënten van de b's in het tweede lid van (5) heeft dus eene modulus $< \frac{|1 - x_0^m|}{\frac{2}{n}} < \frac{2}{\frac{2}{n}} = n.$

De som der moduli van het tweede lid is dus $< n \sum_{v=1}^{k} |b_v|$, waarbij de ongelijkheid nog versterkt is, door b_n, b_{2n} ..... $b_{\left[\frac{k}{n}\right]n}$, die er niet bij behooren er ook bij te tellen. Men vindt als resultaat:

$$(6)\quad \left|(a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \ldots\ldots a_k x_0^k) - \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \left[\frac{k}{vn}\right] b_{vn}\right| < n \sum_{v=1}^{k} |b_v| \text{ of:}$$

$$(7)\quad \left|\frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a^3 x_0^3 + \ldots\ldots a_k x_0^k}{k} - \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \left[\frac{k}{v\,n}\right] b_{vn}\right| < \frac{n}{k} \sum_{v=1}^{k} |b_v|.$$

Het tweede lid splitsen we in $\frac{n}{k} \sum_{v=1}^{\sqrt{k}} |b_v|$ en $\frac{n}{k} \sum_{v=\sqrt{k}}^{k} |b_v|$ en nu blijkt de limiet van beide stukken nul te zijn, van het eerste, omdat de reeks zoo weinig termen heeft, van het tweede, omdat de termen zoo klein zijn. Want is G een getal, dat voor iedere v grooter is dan $|b_v|$ dan is:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n}{k} \sum_{v=1}^{\sqrt{k}} |b_v| < \lim_{k\to\infty} \frac{n\sqrt{k}}{k} G = 0$$

Verder is $\lim_{k\to\infty} \frac{n}{k} \sum_{v=\sqrt{k}}^{k} |b_v| = \lim_{k\to\infty} n \sum_{v=\sqrt{k}}^{k} \left|\frac{b_v}{k}\right| <$ $\lim_{k\to\infty} n \sum_{v=\sqrt{k}}^{k} \left|\frac{b_v}{v}\right|$ en dit is nul omdat volgens de veronderstelling $\sum \left|\frac{b_v}{v}\right|$ convergeert.

Hierdoor vindt men uit (7):

$$(8)\ \lim_{k\to\infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \left[\frac{k}{v\,n}\right] b_{v\,n}.$$

Wanneer nu $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ dan is:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{vn} \left[\frac{k}{v\,n}\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{vn} \left(\frac{k}{v\,n} - \vartheta\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{v\,n} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{vn}\,\vartheta.$$

$$\text{Nu is } \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{\nu n}\,\theta\right| < \lim\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]}|b_{\nu n}| < \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]}|b_\nu| = 0$$

zooals juist bewezen is, waaruit volgt:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{\nu n}\left[\frac{k}{\nu n}\right] = \lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]}\frac{b_{\nu n}}{\nu n}.$$

zoodat (8) overgaat in:

$$(9)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k}{k} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{\nu n}}{\nu n}.$$

en we met behulp van (4) vinden:

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\frac{x^k}{1-x^k}\right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{\nu n}}{\nu n}.$$

§ 7. Met behulp van (6) is een iets algemeenere voorwaarde voor de niet-voortzetbaarheid van Lambertsche reeksen op te stellen:

Eene binnen den eenheidscirkel convergeerende Lambertsche reeks met positieve coëfficiënten stelt altijd eene niet over dien cirkel voort te zetten functie voor, wanneer voor oneindig veel waarden van n de betrekking geldt:

$$(10)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu}{k\sum_{n\nu\leq k}\frac{b_{\nu n}}{\nu n}} = 0$$

Omdat b_k positief is volgt uit (6):

$$\left|a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{\nu n}\left[\frac{k}{\nu n}\right]\right| < n\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \text{ of:}$$

$$\left|a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \ldots\ldots a_k x_0^k - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{\nu n}\frac{k}{\nu n} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]}\theta\, b_{\nu n}\right| < n\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \text{dus}$$

$$(11) \qquad \left| a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k - k \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{v\,n} \right| <$$

$$\sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} b_{vn} + n \sum_{v=1}^{k} b_v = (n+1) \sum_{v=1}^{k} b_v.$$

$$\text{of} \left| \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{k \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{v\,n}} - 1 \right| < (n+1) \frac{\sum_{v=1}^{k} b_v}{k \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{v\,n}}.$$

Laat men k oneindig worden dan geeft dit in verband met (10)

$$(12) \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{k \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{v\,n}} = 1.$$

Nu stellen we $k \sum_{v=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{v\,n} = D_k$, dan is $D_k > D_{k-1}$ en dus $D_k - D_{k-1} = d_k$ een positief getal. Nemen we bovendien $d_1 = D_1$ dan is $D_k = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots \ldots . d_k$ en zal $\lim_{k \to \infty} D_k = \infty$, want uit (10) volgt dat $k \sum \frac{b_{vn}}{v\,n}$ oneindig groot wordt. Men heeft nu:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k x_0^k)\, t^k}{\sum_{k=1}^{\infty} d_k\, t^k} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{D_k} = 1 \text{ (volgens 12).}$$

Nu is $\lim_{t \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, t^k = \lim_{t \to 1} d_1 t + d_2 t^2 + \ldots . . d_k t^k = \infty$ dus moet $\lim_{t \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k x_0^k)\, t^k$ ook oneindig worden. Maar $\lim_{t \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k x_0^k)\, t^k = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k}$ dus is x_0 een singulier

punt van de Lambertsche reeks, waarmee de niet-voortzetbaarheid aangetoond is. Niet-voortzetbaar is dus eene Lambertsche reeks wanneer: 1^0 $\sum \frac{b_k}{k}$ convergeert.

2^0. $b_k = 1$, want dan is $\underset{k\to\infty}{\text{Lim}} \frac{\sum b_k}{k \sum\limits_{nv \leqq k} \frac{b_{vn}}{vn}} = \underset{k\to\infty}{\text{Lim}} \frac{k}{k\frac{1}{n} \sum\limits_{nv \leqq k} \frac{1}{v}} = 0.$

een nieuw bewijs dat de reeks van L. zelf niet-voortzetbaar is.

3^0. $b_k = 0$ of 1, naarmate k een priemgetal is of niet, want dan is:

$$\underset{k\to\infty}{\text{Lim}} \frac{\sum b_v}{k \sum\limits_{nv \leqq k} \frac{b_{vn}}{vn}} = \underset{k\to\infty}{\text{Lim}} \frac{\frac{k}{\log k}}{k\frac{1}{n}} = 0, \text{ voor alle ondeelbare n.}$$

De reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{p_k}}{1 - x^{p_k}}$, waarin p_k het k^e priemgetal is, is dus niet-voortzetbaar.

Hetzelfde geldt voor de reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{c_k}}{1 - x^{c_k}}$, waarbij $c_1\, c_2 \ldots$ willekeurig aangroeiende getallen zijn, voldoende aan $\underset{m\to\infty}{\text{Lim}} \frac{c(m)}{m} = 0$ waarbij $c(m)$ het aantal der c_k beteekent, waarvoor $k \leqq m$ is.

§ 8. De waarde der $\underset{x\to x_0}{\text{Lim}} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} \right\}$

zullen we nu onderzoeken, wanneer $x_0 = \xi = e^{2\pi i \gamma}$ en γ irrationaal is. Eenig idee hierover kunnen we krijgen, door de coëfficiënten b_k zoo te kiezen, dat in (2) $\sum \frac{b_{vn}}{vn}$ te berekenen is en daarna n geleidelijk oneindig te laten worden.

Voor $b_k = \frac{1}{k^3}$ convergeert $\sum \frac{\frac{1}{k^3}}{k} = \sum \frac{1}{k^4}$ en vindt men met (2):

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{x^k}{1-x^k} \right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu n} \left(\frac{1}{\nu n}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{n^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} = \frac{1}{n^4} \zeta(4) = \frac{1}{n^4} \frac{\pi^4}{90}.$$

Dit nadert voor groote waarden van n tot nul, het vermoeden ligt voor de hand dat voor $\xi = e^{2\pi i \gamma}$ $\lim_{x \to \xi} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{x^k}{1-x^k} \right\} = 0.$

Knopp heeft aangetoond dat dit vermoeden juist is en dat de limiet zelfs nul is voor iedere waarde van b_k mits $\sum |b_k|$ convergeert en x radiaal tot ξ nadert. Hij breidde daartoe eerst de stelling van Appell en Pringsheim (§ 5) uit. Evenals in § 5 denken we ons weer een gelijkbeenigen driehoek met den top in + 1 en zoo dat ten minste binnen dezen driehoek $\frac{\sum |x^k|}{|\sum x^k|} \leqq \beta$ (β eindig).

Nemen we nu oneindig veel reeksen $\sum a_k^{(\lambda)} x^k$ ($\lambda = 1.2.3.....$), terwijl voor iedere λ bestaat: $\lim_{k \to \infty} \frac{a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} + ...a_k^{(\lambda)}}{k+1} = g_\lambda$ en er telkens een getal k_λ aan te geven is, zoodat:

$$\left| \frac{a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} + ... a_k^{(\lambda)}}{k+1} - g_\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{1+\beta^2}$$ voor alle $k \geqq k_\lambda$ terwijl $k_\lambda = \lambda m$ en ε eene willekeurig klein te kiezen grootheid is, en wanneer er bovendien eene constante H bestaat, zoodat voor alle K en λ

$$\left| \frac{a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} + ... a_k^{(\lambda)}}{k+1} - g_\lambda \right| = |\varepsilon_k^{(\lambda)}| < \frac{\lambda}{k+1} H$$

dan bewees Knopp[1]), dat er met den top in + 1 een driehoek Δ met basis 2c zoo aan te geven is, dat voor alle x in een driehoek Δ_λ met de basis $\frac{2c}{\lambda}$:

$$\left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(\lambda)} x^k - g_\lambda \right| < \varepsilon.$$

§ 9. Deze stelling van Knopp zullen we nu op de Lambertsche reeks toe passen. Daar $\sum |b_k|$ werd verondersteld

[1]) Über Lambertsche Reihen Crelle Bd 142 (1913) p. 283.

te convergeeren, doet het ook $\sum \left| \frac{b_k}{k} \right|$ en dus is ook voor complexe nadering tot $x_0 = e^{2\pi i \frac{n^1}{n}}$ volgens (2)

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} \right\} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{vn}.$$

We moeten nu nagaan hoe snel deze functie tot hare grenswaarde nadert, wanneer x_0 dus n telkens verandert. Door de substitutie $x = x_0 t$. wordt het naderen tot het randpunt x_0 overgebracht in het naderen tot $+ 1$, terwijl de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k}$ overgaat in $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k x_0^k) t^k$. Beschouw nu de oneindig vele reeksen, die voor alle onherleidbare $\frac{n^1}{n}$ ontstaan, gerangschikt naar de grootte der noemers, dan is (9):

$$1^0 \lim_{k \to \infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k}{k+1} = g_n = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{vn}.$$

Noemt men $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = B$ dan is volgens (11):

$$\left| (a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k) - k \sum_{v=1}^{v=\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{vn} \right|$$

$$< (n+1) \sum_{v=1}^{k} |b_v| < (n+1) B.$$

dus: $\left| (a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k) - (k+1) \sum_{v=1}^{v=\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{vn} \right|$

$$< (n+1) B + \left| \sum_{v=1}^{v=\left[\frac{k}{n}\right]} \frac{b_{vn}}{vn} \right| < (n+2) B.$$

of:

$$\left| \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots a_k x_0^k}{k+1} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{vn} \right|$$

$$< \frac{(n+2) B}{k+1} + \left| \sum_{v=\left[\frac{k}{n}\right]+1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{vn} \right|$$

Nu is:

$$\lim_{k=\infty}(k+1)\left|\sum_{v=\left[\frac{k}{n}\right]+1}^{\infty}\frac{b_{vn}}{v\,n}\right| \leqq \lim_{k\to\infty}(k+1)\sum_{v=\left[\frac{k}{n}\right]+1}^{\infty}\left|\frac{b_{vn}}{v\,n}\right|$$

$$\leqq \lim_{k\to\infty}(k+1)\sum_{v=\left[\frac{k}{n}\right]+1}^{\infty}\left|\frac{b_{vn}}{k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\sum_{v=\left[\frac{k}{n}\right]+1}^{\infty}|b_{vn}|$$

en dit is nul omdat $\sum |b_v|$ convergeert.

De vorm $\left|(k+1)\sum_{\left[\frac{k}{n}\right]+1}^{\infty}\frac{b_{vn}}{v\,n}\right|$ heeft dus eene grootste waarde M, zoodat:

$$\left|\frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{k+1} - g_n\right| < \frac{(n+2)B+M}{k+1} =$$

$$= \frac{n}{k+1}\,\frac{(n+2)B+M}{n} < \frac{n}{k+1}(3B+M)$$

Neemt men $3B+M=N$ dan is:

$$2^0.\quad \varepsilon_k^{(n)} = \left|\frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{k+1} - g_n\right| < \frac{n}{k+1}N.$$

Neemt men eindelijk een willekeurig klein getal $\varepsilon > 0$ dan kan men daarbij eene waarde van m kiezen, zoo groot, dat $\frac{N}{m} < \frac{\varepsilon}{1+\beta^2}$ en dan is voor alle n en $k \geqq k_n = m\,n$:

$$3^0.\quad \left|\frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_k x_0^k}{k+1} - g_n\right| < \frac{\varepsilon}{1+\beta^2}.$$

Aan de drie voorwaarden in de vorige paragraaf gesteld is dus voldaan en daarom bestaat er bij $+1$ een driehoek $\triangle$ met basis $2c$ zoodat bij iedere n

$$\left|(1-t)\sum_{k=1}^{\infty}(a_k x_0^k)\,t^k - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{vn}}{v\,n}\right| < \varepsilon$$

mits t in een bij $+1$ te plaatsen driehoek $\triangle_n$ met basis $\frac{2c}{n}$ ligt. Stelt men nu $t = \frac{x}{x_0}$ dan volgt hieruit, dat bij vooruit bepaalde kleine $\varepsilon > 0$ er altijd een driehoek $\triangle$ met basis $2c$ zoo aan te geven is, dat:

$$\left| \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu n}}{\nu n} \right| < \varepsilon.$$

wanneer x in een bij het randpunt $x_0 = e^{2\pi i \frac{n^1}{n}}$ geplaatsten driehoek $\triangle_n$ met basis $\frac{2c}{n}$ ligt.

§ 10. Hieruit is af te leiden, dat als $\xi = e^{2\pi i \gamma}$ (γ irrationaal) en als $\sum |b_k|$ convergeert dat dan bij radiale nadering $\lim_{x \to \xi} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x_k}{1 - x^k} \right\} = 0$. 't Is daartoe voldoende aan te toonen, dat bij eene bepaalde kleine $\varepsilon > 0$ de gezamelijke driehoeken Δ_n, hoe klein ook de basis 2c van Δ uitvalt, toch ieder stuk van den naar ξ voerenden straal in de buurt van ξ geheel en al, dus zonder één punt over te slaan, bedekken. Wegens de concaviteit van den cirkel is het al voldoende te laten zien, dat wanneer men op de lijn 0 ..... 1 in γ eene loodlijn opricht, dat dan in de buurt van γ alle punten van deze lijn liggen in een of meer der naar denzelfden kant in de punten $\frac{n^1}{n}$ geplaatste driehoeken Δ_n. Al deze driehoeken zijn gelijkvormig, hunne bases zijn evenwijdig 0 .... 1 en gelijk $\frac{2c^1}{n}$, hunne tophoeken zijn $2\Phi_0 \left(\Phi_0 < \frac{\pi}{2}\right)$. Daar de omtrek van den cirkel tot de lijn 0 .... 1 ingekort is, zijn alle afmetingen in de richting van die lijn in de zelfde verhouding te verkleinen, zijn de tophoeken kleiner dan in den cirkel, zijn de bases niet $\frac{c}{n}$ maar $\frac{c}{\pi n} = \frac{2c^1}{n}$. De grootte van ε bepaalt c en dus c^1.

We ontwikkelen nu γ in eene kettingbreuk, de benaderde breuken zijn: $\frac{n_1^1}{n_1}, \frac{n_2^1}{n_2}, \frac{n_3^1}{n_3} \ldots\ldots, \frac{n^1_\mu}{n_\mu} \ldots\ldots$, en beschouwen de, in de punten n_μ gezette driehoeken Δn_μ, kortweg Δ^μ. De opvolgende punten $\frac{n^1_\mu}{n_\mu}$ liggen telkens aan weerskanten

van γ, hun afstand tot γ is: $\left|\frac{n^1_\mu}{n_\mu} - \gamma\right| < \frac{1}{n_\mu\, n_\mu + 1}$. Is dit $< \frac{c^1}{n_\mu}$, dus dan de halve basis van den driehoek Δ^μ, dan reiken deze driehoeken telkens over de loodlijn heen. Dit gebeurt dus zoodra $n_\mu + 1 > \frac{1}{c^1}$, voor alle μ's grooter dan eene bepaalde is het dus zeker het geval. Onder aan de loodlijn laat ieder der driehoeken nog een stuk onbedekt. De grootte van dit stuk is gemakkelijk te berekenen. Men vindt $\frac{h\left|\frac{n^1_\mu}{n_\mu} - \gamma\right|}{c^1}$ waarin h. de hoogte van den oorspronkelijken driehoek met basis $2c^1$ is. Het onbedekte stuk is dus $< \frac{h}{c^1 n_\mu n_\mu + 1}$. Het zal dus zeker kleiner zijn dan de hoogte van den volgenden driehoek, wanneer $\frac{h}{c^1 n_\mu n_\mu + 1} < \frac{h}{n_\mu + 1}$ of $n_\mu < \frac{1}{c^1}$. Van eene bepaalde waarde van μ, dus vanaf een bepaald punt zullen de opvolgende driehoeken over de loodlijn in γ heenreiken en zal de hoogte van den volgenden driehoek grooter zijn dan het door den vorigen vrijgelaten stuk, daarom zal ieder punt der loodlijn, van eene bepaalde hoogte af, minstens in een der driehoeken liggen en is voor ieder punt der loodlijn $\left|\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{v\, n}\right| < \varepsilon$, waarin n de noemer n_μ behoorende bij den driehoek Δ^μ, waarin het punt ligt, is. Nu wordt n steeds grooter naarmate het punt lager komt, met het toenemen van n, neemt $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{vn}$ af, want $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{vn} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{v}$ en daar $\Sigma |b_v|$ convergeert is $\Sigma \frac{b_{vn}}{v}$ zeker eindig en nadert voor toenemende n tot nul, des te sterker $\frac{1}{n} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{vn}}{v}$, waaruit dus:

$$\lim_{x \to \xi} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} = 0.$$

§ 11. LANDAU [1]) heeft eene kortere afleiding van dit resultaat gegeven en daarbij de voorwaarde: $\sum |b_k|$ convergent, door eene algemeenere vervangen. Hij onderzocht eerst wanneer bij eene willekeurige reeks $\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k$ de limiet:

$\lim_{t \to 1} (1-t) \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k = 0$ is. Nu is deze limiet gelijk aan:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k}{\sum_{k=0}^{\infty} t^k} = \lim_{y \to \infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots\ldots c_y}{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots 1} = \lim_{y \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{y} c_k}{y + 1}.$$

Dit moet nul zijn, dus moet $C(y) = \sum_{k=1}^{y} c_k$ bij deeling door y tot nul naderen, wanneer y oneindig wordt, of volgens de notatie van LANDAU:

(13). $$C(y) = o(y).$$

Stelt men nu weer in de Lambertsche reeks $x = \xi t$ dan is:

$$\lim_{x \to \xi} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} = \lim_{t \to 1} (1 - t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k t^k.$$

In dit geval is dus $C(y) = \sum_{k=1}^{y} a_k \xi^k$ en moet men de betrekking (13) slechts aantoonen. Nu is $C(y) = \sum_{k=1}^{y} \xi^k \sum_{m \mid k} b_m$. Deze dubbele som is nu te bepalen, door eerst alle machten van ξ te sommeeren, die bij eene bepaalde b_m behooren en daarna de sommatie van $m = 1$ tot $m = y$ uit te voeren.

Men vindt: $$C(y) = \sum_{m=1}^{y} b_m \sum_{q=1}^{\left[\frac{y}{m}\right]} \xi^{mq}.$$

Nu is: $1^0.$ $\left| \sum_{q=1}^{\left[\frac{y}{m}\right]} \xi^{mq} \right| \leqq \left[\frac{y}{m}\right] \leqq \frac{y}{m}$ en

2^0 $\left| \sum_{q=1}^{\left[\frac{y}{m}\right]} \xi^{mq} \right| \leqq \left| \frac{\xi^m - \xi^m \left(\left[\frac{y}{m}\right] + 1\right)}{1 - \xi^m} \right| \leqq \frac{2}{|1 - \xi^m|}$

[1]) Sur les séries de LAMBERT. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 156. p. 1451 (1913).

Nemen we nu voor z een geheel getal $< y$, terwijl $y \geqq 2$, dan is:

$$(14) \qquad |C(y)| \leqq \sum_{m=1}^{z} \frac{2|b_m|}{|1-\xi^m|} + y \sum_{m=z+1}^{y} \frac{|b_m|}{m}$$

Over het getal z kan nu nog naar verkiezing beschikt worden. We nemen eerst voor z het grootste geheele getal $< y$, dat voldoet aan:

$$\sum_{m=1}^{z} \frac{2|b^m|}{|1-\xi^m|} < \frac{2|b_1|}{|1-\xi|} + \sqrt{y}.$$

Dit is altijd mogelijk, want voor $z = 1$ is de som links $\frac{2|b_1|}{|1-\xi|}$, deze som groeit steeds aan en het is mogelijk dat een bepaald aantal termen de constante waarde $\frac{2|b_1|}{|1-\xi|} + \sqrt{y}$ overtreft, anders is $z = y - 1$. Wordt y oneindig groot, dan is de vorm rechts oneindig groot en moet dus z ook oneindig genomen worden. Na z zoo bepaald te hebben vindt men uit (14):

$$C(y) < \frac{2|b_1|}{|1-\xi|} + \sqrt{y} + y \sum_{m=z+1}^{y} \frac{|b_m|}{m}.$$

De beide eerste termen zijn o (y), daar tegelijk met y ook z oneindig wordt is ook de laatste term o (y), wanneer $\sum \frac{|b_k|}{k}$ convergeert, waarmee tevens bewezen is, dat reeds in deze ruimere veronderstelling:

$$\lim_{x \to \xi} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k} = 0.$$

Bij de afleiding van (13) hebben we gebruik gemaakt van de stelling van Appell dat voor radiale nadering

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k}{\sum_{k=0}^{\infty} t^k} = \lim_{y \to \infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots c_y}{1+1+1+\ldots+1}.$$

Pringsheim heeft deze stelling uitgebreid voor nadering binnen een bepaalden hoek, maar daarmee is tegelijk aange-

toond, dat ook voor complexe nadering, mits $\sum \frac{|b_k|}{k}$ convergeert de juist berekende limietwaarde goed is.

§ 12. De weg ligt nu open om, na het maken van beperkende afspraken omtrent de coëfficiënten b_k of het irrationale getal γ, andere limieten te berekenen. Is bijvoorbeeld $\sum |b_k|$ convergent en zijn de partieele noemers van de kettingbreuk, waarin γ ontwikkeld kan worden eindig, dan kunnen we bewijzen dat: $\lim_{x \to \xi} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} = 0.$

We gaan daartoe eerst de voorwaarde na, waarvoor bij de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k$ de limiet: $\lim_{t \to 1} (1 - t)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k = 0$. Deze limiet is weer gelijk aan:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k}{(1 - t)^{1/2}} = \lim_{t \to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k} = \lim_{y = \infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots c_y}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_y}.$$

Nu is $(1 - t)^{1/2} = 1 + {}^1/_2\, t + {}^1/_2\, {}^3/_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots$

$$\frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2y - 1)}{2 . 2 . 2 \ldots\ldots 2} \frac{t^y}{y!} + \ldots.$$

Dus $a_0 + a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1!}$, $a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{2}{2!}$ door een bewijs van y op $y + 1$ kunnen we bewijzen dat:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{5}{2} \ldots\ldots \frac{2y + 1}{2} \frac{2}{y!}.$$

en dus $\lim_{y \to \infty} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_y =$

$$\frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2y - 1)}{2 . 2 . 2 \ldots\ldots 2} \frac{2y + 1}{y!} = \sqrt{2y + 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Deze limiet is dus $O(y^{1/2})$, dus $\lim_{t \to 1} (1 - t)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k = 0$

als $$C(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = o(y^{1/2}).$$

Bij de Lambertsche reeksen is $C(y) = \sum_{k=1}^{y} a_k \xi^k$, terwijl volgens (14)

$$|C(y)| \leqq \sum_{m=1}^{z} \frac{2|b_m|}{|1-\xi^m|} + y \sum_{m=z+1}^{y} \frac{|b_m|}{m}.$$

Evenals in § 3 is $|1-\xi^m|$ grooter dan de loodlijn uit $+1$ op den voerstraal van ξ^m neergelaten. Dus $|1-\xi^m| > \sin 2\pi m\gamma$. Zij g nu het geheele getal, dat zoo dicht mogelijk bij $m\gamma$ ligt, dan is dus

(15) $$|1-\xi^m| > |\sin 2\pi(m\gamma - g)|.$$

Ontwikkelt men γ in eene kettingbreuk $\gamma = \{q_1 q_2 q_3 \ldots q_s \ldots\}$ en noemt men $\gamma_s = \{q_{s+1} \cdot q_{s+2} \ldots\}$ dan is $\gamma = \{q_1 q_2 q_3 \ldots q_s \gamma_s\}$. Zijn $\frac{k's}{ks}$ en $\frac{k'_{s+1}}{k_{s+1}}$ de benaderende breuken van deze kettingbreuk, dan is $k_{s+1} = ks\,\gamma s + k_{s-1}$ en dus omdat $\frac{k'_{s+1}}{k_{s+1}} - \frac{k'_s}{k_s} = \frac{(-1)^{s+1}}{ks\,k_{s+1}}$ en $\gamma = \frac{k'_{s+1}}{k_{s+1}}$:

(16) $$\left|\gamma - \frac{k's}{ks}\right| = \frac{1}{k_s(k_s\gamma_s + k_{s-1})} > \frac{1}{k_s^2(\gamma_s+1)}.$$

Volgens de veronderstelling is er nu altijd een getal A, zoodat voor iedere s, $q_s < A$, maar dan is $\gamma_s = \{q_{s+1}, q_{s+2} \ldots\} < q_{s+1} + 1 < A + 1$, dus

$$\left|\gamma - \frac{k's}{ks}\right| > \frac{1}{k_s^2(A+2)} = \frac{B}{k_s^2}.$$

Is nu $\frac{g}{m}$ eene naderende breuk van γ, dan is $\left|\gamma - \frac{g}{m}\right| > \frac{B}{m^2}$ is $\frac{g}{m}$ geen naderende breuk, dan is volgens eene bekende eigenschap $\left|\gamma - \frac{g}{m}\right| > \frac{1}{2m^2}$ en dus in beide gevallen $\left|\gamma - \frac{g}{m}\right| > \frac{k}{m^2}$ waarbij k eindig is, of $|m\gamma - g| > \frac{k}{m}$, waardoor (15) geeft:

$|1-\xi^m| > \sin 2\pi \frac{k}{m}$ en omdat $\sin \alpha > \frac{2\alpha}{\pi}$ mits $\alpha < \frac{\pi}{2}$

$$|1-\xi^m| > 2\pi \frac{k}{m}\frac{2}{\pi} = \frac{4k}{m} = \frac{\lambda}{m}.$$

Hieruit volgt: $|C(y)| \leqq \frac{2}{\lambda} \sum_{m=1}^{z} |b_m| m + y \sum_{m=z+1}^{y} \frac{|b_m|}{m}$.

Stel nu $z = [\sqrt{y}]$ en splits ook de eerste reeks in twee stukken, dan vindt men:

$$|C(y)| \leqq \frac{2}{\lambda} \sum_{m=1}^{[\sqrt{z}]} |b_m| m + \frac{2}{\lambda} \sum_{m=[\sqrt{z}]+1}^{z} |b_m| m + y \sum_{m=z+1}^{y} \frac{|b_m|}{m}.$$

$$|C(y)| \leqq \frac{2}{\lambda} \sqrt{z} \sum_{m=1}^{[\sqrt{z}]} |b_m| + \frac{2}{\lambda} \sum_{m=[\sqrt{z}]+1}^{z} |b_m| + \frac{y}{z} \sum_{m=z+1}^{y} |b_m|.$$

Daar $\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$ convergeert en z en $\sqrt{z}$ tegelijk oneindig worden, is de reeks in den eersten term eindig, de beide andere naderen tot nul, waaruit:

$$|C(y)| = o(y^{1/2}).$$

§ 13. Eindelijk zullen we nog aantoonen dat $\lim_{x \to \xi} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^{2/3} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k} = 0$, wanneer $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ convergeert en de partieele noemers q_s van de kettingbreuk, waarin γ ontwikkeld kan worden vanaf eene zekere waarde voldoen aan $q_s < A\, k_{s-1}$ (A eindig).

Eerst bepalen we weer de voorwaarde, waarvoor bij $\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k$ de limiet: $\lim_{t \to 1} (1-t)^{2/3} \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k = 0$. Men vindt dan als in § 12 dat $\lim_{y \to \infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots c_y}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_y} = 0$ moet zijn, waarbij de a's de coefficienten van de ontwikkeling $(1-t)^{-2/3}$ zijn.

Nu is $(1-t)^{-2/3} = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\frac{5}{3}\frac{t^2}{2!} + \ldots\ldots \frac{2}{3}\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\ldots\frac{3y-1}{3} + \frac{t^y}{y!}\ldots$

$$a_0 + a_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\frac{1}{2!}\frac{6}{2}, \quad a_0 + a_1 + a_2 = \frac{2}{3}\frac{5}{3}\frac{8}{3}\frac{1}{3!}\frac{9}{2}$$

door een bewijs van y op y + 1 kunnen we bewijzen:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_y =$$

$$\frac{2\ 5\ 8}{3\ 3\ 3}\ldots\ldots\ldots\frac{3y+2}{3}\,\frac{1}{(y+1)!}\,\frac{3(y+1)}{2.}$$

Hiervoor kunnen we schrijven:

$$\frac{1-{}^1/_3}{1}\cdot\frac{2-{}^1/_3}{2}\cdot\frac{3-{}^1/_3}{3}\ldots\ldots\ldots\frac{(y+1)-{}^1/_3}{y+1}\,\frac{3(y+1)}{2} =$$

$$= \frac{3(y+1)}{2}\prod_{k=1}^{y+1}\left(1-\frac{1}{3k}\right)$$

Dit oneindig product zal divergeeren, omdat $\Sigma\frac{1}{3k}$ divergeert. Nemen we den logarithmus en ontwikkelen de logarithmen der termen dan komt er $-{}^1/_3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\frac{1}{y+1}\right)$. Voegt men hier ${}^1/_3\log(y+1)$ bij dan wordt dit eindig, daarom

$$\operatorname{Lim} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_y =$$

$$\operatorname*{Lim}_{y\to 1}\frac{3(y+1)}{2}\prod_{k=1}^{y+1}\left(1-\frac{1}{3k}\right)e^{{}^1/_3\log(y+1)}\,e^{-{}^1/_3\log(y+1)} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{y\to 1}\frac{1}{(y+1)^{1/3}}\prod_{k=1}^{y+1}\left(1-\frac{1}{3k}\right)e^{{}^1/_3\log(y+1)} \quad \text{dus } O\,(y^{2/3}).$$

zoodat:

$$\operatorname*{Lim}_{t\to 1}(1-t)^{2/3}\sum_{k=1}^{\infty}c_k t^k = 0 \text{ als } C(y) = o\,(y^{2/3}).$$

Om dit op de Lambertsche reeksen toe te passen volgen we de redeneering van de vorige paragraaf. Vanaf eene bepaalde waarde van s is nu $q_s < A\,k_{s-1}$ en dus

$$\gamma_s = |\,q_{s+1}\cdot q_{s+2}\ldots\,| < q_{s+1}+1 < A\,k_s + 1 = B\,k_s.$$

Met (16) vinden we nu:

$$\left|\gamma - \frac{k'_s}{k_s}\right| > \frac{1}{k_s^2(\gamma_s+1)} > \frac{1}{k_s^2(B\,k_s+1)} = \frac{1}{C\,k_s^3} = \frac{v}{k_s^3}\,(v \text{ eindig}).$$

Nu kan $\frac{g}{m}$ eene herleide breuk zijn of niet. In het eerste geval is $\left|\gamma - \frac{g}{m}\right| > \frac{v}{m^3}$, is $\frac{g}{m}$ geen herleide breuk dan is weer $\left|\gamma - \frac{g}{m}\right| > \frac{1}{2\,m^2}$ dus ook $> \frac{v}{m^3}$.

Zoo vindt men weer $|\,m\gamma - g\,| > \frac{v}{m^2}$

waaruit $$|\,1 - \xi^m\,| > \sin 2\pi \frac{v}{m^2} > \frac{\lambda}{m^2} \qquad (\lambda > 0)$$

Substitueert men dit in (14) dan komt er:

$$|\,C(y)\,| \leqq \frac{2}{\lambda} \sum_{m=1}^{z} |\,b_m\,|\, m^2 + y \sum_{m=z+1}^{y} \frac{|\,b_m\,|}{m}.$$

Neemt men nu $z = [y^{2/3}\,y]$ en splitst de eerste reeks in twee stukken, dan vindt men:

$$|\,C(y)\,| \leqq \frac{2}{\lambda}\, z \sum_{m=1}^{\sqrt{z}} |\,b_m\,| + \frac{2}{\lambda}\, z^2 \sum_{m=[\sqrt{z}]+1}^{z} |\,b_m\,| + \frac{y}{z} \sum_{m=z+1}^{y} |b_m|.$$

Nu is $\sum |\,b_m\,|$ convergent, dus de som in den eersten term is eindig en in de beide andere termen nul, omdat z tegelijk met y oneindig wordt. Dus:

$$|\,C(y)\,| = o(y^{2/3}).$$

HOOFDSTUK III.

Sommatie.

§ 1. Alleen bij reeksen met groote convergentiesnelheid zal men door het samentellen der opvolgende termen zonder veel moeite de som in eenige decimalen nauwkeurig kunnen verkrijgen. Een denkbeeld over de convergentiesnelheid kan men krijgen door de verhouding te berekenen van de rest $\alpha_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ en den n^{en} term u_n. Beschouwen we nu twee reeksen $U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots$ (Rest α_n) en $V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots$ (Rest β_n) en heeft de reeks u uitsluitend positieve termen dan is

$$(1.)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots\ldots}{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n}.$$

mits deze laatste limiet bestaat. Neem nu voor V de reeks: $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$ dus $v_{n+1} = u_{n+2}$, dan gaat (1) over in:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots\ldots}{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots\ldots} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Noem deze laatste limiet λ, dan is dus:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{u_{n+1}}{\alpha_n}\right) = \lambda \text{ of: } \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \lambda u_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda \alpha_n \text{ dus:}$$

$$(2).\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{u_n} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Bij eene convergente reeks kan λ varieeren van 0 tot 1; in het eerste geval is $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{u_n} = 0$, convergeert de reeks als

het ware oneindig snel, in het tweede is $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{u_n} = 1$ en convergeert de reeks oneindig langzaam.

Is x nu positief dan kan men dit op de reeks van Lambert toepassen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}(1-x^n)}{(1-x^{n+1})x^n} = x.$$

Daar de limiet niet nul is, zal voor de berekening der som in eenige decimalen nauwkeurig een vrij groot aantal termen noodig zijn.

§ 2. Grootere nauwkeurigheid is te bereiken door eene benaderde uitdrukking voor de rest op te stellen of door de reeks in eene sneller convergeerende te transformeeren. Trachten we dus eerst α_n te benaderen. We leiden daartoe eene algemeene betrekking af door in de reeks:

$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right]$, $(|x|<1)$ te substitueeren $x = \frac{1}{p}$:

$$\log \frac{p+1}{p-1} = 2\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \ldots\ldots\right] = \frac{2}{p} + 2v_p.$$

(3). of: $\frac{1}{2}\log \frac{p+1}{p-1} = \frac{1}{p} + v_p$ waarbij

$$v_p = \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} + \ldots\ldots < \frac{1}{3p^3}\left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \ldots\ldots\right) = \frac{1}{3p(p^2-1)}.$$

Nu is:

$$\frac{2}{p(p^2-1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p}$$

(4). en dus: $v_p < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p}\right)$.

Geeft men nu in (3) aan p achtereenvolgens de waarden u_1, $u_2, u_3 \ldots\ldots u_n$ en telt alles samen, daarbij $U_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots\ldots \frac{1}{u_n}$ en $V_n = v_{u_1} + v_{u_2} + \ldots\ldots v_{u_n}$ noemend, dan vindt men de betrekking:

$$(5) \qquad U_n + V_n = {}^1/_2 \frac{\log (u_1 + 1)(u_2 + 1) \ldots (u_n + 1)}{\log (u_1 - 1)(u_2 - 1) \ldots (u_n - 1)}.$$

§ 3. Om hieruit den restterm van de reeks van L. te vinden noemen we $u_k = \frac{1+x}{x^k} \frac{1-x^k}{1-x}$ dan is $\frac{u_{k-1}+1}{u_k - 1} = x$ en

$$(6) \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-x}{1+x} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1-x}{1+x} S_n.$$

(S_n is de som van n termen van de reeks van L.).

De reeks van L. convergeert voor $x < 1$, dan is $u_k = \frac{1+x}{1-x} \frac{1-x^k}{x^k} > 1$ en mag daarom voor p in (3) gesubstitueerd worden. Men vindt nu uit (5) en (6):

$$U_n + V_n = {}^1/_2 \log x^{n-1} \frac{u_n + 1}{u_1 - 1} = {}^1/_2 \log x^{n-1} \frac{\frac{1+x}{x^n} \frac{1-x^n}{1-x}}{\frac{1+x}{x} - 1} \text{ of:}$$

$$(7) \qquad U_n + V_n = {}^1/_2 \log \left(1 + 2x \frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

V_n moet nu benaderd worden. Dit kan gebeuren door het verschil tusschen $V = \lim_{m \to \infty} v_{u_1} + v_{u_2} + \ldots . v_{u_m}$ en V_n te benaderen. Bij deze berekening zal tegelijk blijken dat V eindig is. Uit (4) volgt:

$$(8) \qquad V - V_n < {}^1/_6 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_k - 1} + \frac{1}{u_k + 1} - \frac{2}{u_k}\right).$$

Nu is:

$$\frac{1}{u_k - 1} = \frac{(1-x)x^k}{1 + x - 2x^k}, \quad \frac{1}{u_k + 1} = \frac{(1-x)x^k}{1 + x - 2x^{k+1}} \text{ en}$$

$$\frac{1}{u_k} = \frac{(1-x)x^k}{(1+x)(1-x^k)}.$$

dus:

$$\frac{1}{u_k - 1} + \frac{1}{u_k + 1} - \frac{1}{u_k} = (1-x)x^k \left(\frac{1}{1 + x - 2x^k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 + x - 2x^{k+1}} - \frac{1}{1 + x - x^k - x^{k+1}}\right).$$

Nu is $2x^{k+1} < x^k + x^{k+1}$ en dus:

$$\frac{1}{1+x-2x^{k+1}} < \frac{1}{1+x-x^k-x^{k+1}}$$

en eveneens: $\frac{1}{1+x-2x^k} < \frac{1}{1+x-x^{k-1}-x^k}$ en dus:

$$\frac{1}{u_k-1} + \frac{1}{u_k+1} - \frac{1}{u_k} < (1-x)x^k \frac{1}{1+x-2x^k}$$

$$< \frac{(1-x)x^k}{1+x-x^{k-1}-x^k} = \frac{x}{u_{k-1}}.$$

waardoor (8) overgaat in:

$$(9)\quad V - V_n < \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{x}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k}\right) < \frac{1}{6}\left(\frac{x}{u_k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1-x}{u_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{x}{u_n} - (1-x)(U-U_n)\right)$$

wanneer we $U = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots\ldots \frac{1}{u_m}$ noemen. Nu is:

$$u_k = \frac{1+x}{1-x}\frac{1-x^k}{x^k} < \frac{1+x}{1-x}\frac{1}{x^k} \text{ en dus:}$$

$$U - U_n > \frac{1-x}{1+x} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{1-x^n}{1-x}\frac{1-x}{1+x}\frac{x^n}{1-x^n}x = \frac{1-x^n}{1-x}\frac{x}{u_n}.$$

Hierdoor vindt men uit (9)

$$V - V_n < \frac{1}{6}\left(\frac{x}{u_n} - (1-x^n)\frac{x}{u_n}\right) = \frac{x^{n+1}}{6u_n}.$$

De reeks der v's convergeert dus zeker, terwijl de gevonden betrekking ook kan dienen om de fout te benaderen, wanneer men bij den n^{en} term afbreekt. Men heeft dan

(10.) $V_n = V - \theta\frac{x^{n+1}}{6u_n}$ waarbij $0 < \theta < 1$. Intusschen moet V zelf ook nog gevonden. Dit kan ontgaan worden door (10) in (7) te substitueeren en op te merken dat V onafhankelijk van n is, eene bijzondere waarde van n voert dan tot het doel. Men vindt zoo

$$\frac{1-x}{1+x}S_n = \tfrac{1}{2}\log\left(1 + 2x\frac{1-x^n}{1-x}\right) + \theta\frac{x^{n-1}}{6u_n} - V \text{ of:}$$

$$(11).\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1}{2} + x\,\frac{1-x^n}{1-x}} + \vartheta \frac{x^{2n+1}}{6(1-x^n)} + \text{Const}$$

Deze constante $= -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1+x}{1-x} \log 2$ is onafhankelijk van n. Neemt men nu $n = \infty$ dan vindt men uit (11).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{{}^1/_2 \frac{1+x}{1-x}} + \text{const}$$

en hiervan (11) aftrekkend:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1+x}{1+x-2x^{n+1}}} - \frac{\vartheta}{6} \frac{x^{2n+1}}{1-x^n}.$$

Dus:

$$(12).\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1-x^k} + \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1+x}{1+x-2x^{n+1}}} - \frac{\vartheta}{6} \frac{x^{2n+1}}{1-x^n}.$$

§ 4. Uit deze formule van Cesàro is voor niet te groote x de waarde der reeks snel te bepalen. Nemen we $x = 0{,}1$ en wenschen we eene nauwkeurigheid van 7 decimalen dan moet $\frac{\vartheta x^{2n+1}}{6(1-x^n)} < 10^{-7}$. Hieraan is reeds voldaan door $n = 3$ te nemen. Men vindt dan:

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \frac{11}{12} \log \frac{5500}{5499} = 0,\ 11\ 11\ 11\ 1\ldots +$$
$$+ 0.\ 01\ 01\ 010. + 0.\ 001\ 001\ 0\ldots +$$
$$0.\ 000\ 1\ 1\ 1\ 1\ldots = 0.\ 1\ 2\ 2\ 3\ 2\ 4\ 2\ldots$$

De juistheid van deze uitkomst is gemakkelijk te controleeren, daar, volgens de fundamenteele eigenschap der reeks van L., voor $x = 0.1$ de som van deze reeks in de eerste 46 decimalen het aantal deelers van de eerste 46 getallen geeft. (48 heeft 10 deelers, dus is de 47e decimaal 3 en niet 2).

§ 5. De transformatie van CLAUSEN (inleiding § 2)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2}\left(\frac{1+x^k}{1-x^k}\right)$ is te beschouwen als eene geslaagde poging om de reeks in eene snel convergeerende om te rekenen, want volgens (2) is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n}\,\frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\,\frac{x^{n^2+2n+1}}{x^{n^2}} = 0$$

§ 6. De reeks van CLAUSEN heeft het nadeel, dat alle termen positief zijn. CESÀRO [1]) is er in geslaagd eene reeks met gestadig afnemende beurtelings positieve en negatieve termen te vinden. Men heeft dan direkt eene grens voor de fout. Uitgaande van eene formule van CAUCHY: [2])

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^k x}{1-q^k y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\; q^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots\ldots(1-q^k)} \cdot \frac{(x-y)(x-qy)\ldots\ldots(x-q^{k-1}y)}{(1-qy)(1-q^2y)\ldots\ldots(1-q^k y)}$$

waarbij rechts voor $k=0$ als eerste term 1 genomen moet worden, substitueert hij $x = y\,q^n$ en vindt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^{k+n}y}{1-q^k y} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)k\, q^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} \times \frac{(-1)^k y^k (-q^n+1)(-q^n+q)\ldots\ldots(-q^n+q^{k-1})}{(1-qy)(1-q^2y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-q^k y)} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}k(k+1)}\; q^{\frac{1}{2}k(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots\ldots(1-q^k)} \times y^k \frac{(1-q^n)(1-q^n-1)\ldots\ldots(1-q^n-k+1)}{(1-qy)(1-q^2y)\ldots\ldots\ldots(1-q^k y)}$$

---

[1]) Source d'identités Mathésis t. 6. p. 126—131 (1886). Eene elementaire afleiding vindt men in de Wiskundige Opgaven van het Wiskundig Genootschap «Onvermoeide Arbeid» t. 13. 2e stuk.

[2]) Comptes Rendus t. XVII p. 530.

zoodat:

$$(13)\qquad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^{k+n}x}{1-q^k x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots\ldots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots\ldots\ldots\ldots(1-q^k)} \times \frac{q^{k^2}x^k}{(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^k n)}$$

Deze formule geldt voor willekeurige n, men mag haar dus naar n differentieeren.

Nu is $\frac{d}{dn}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{k+n}x}{1-q^k x} =$

$$\sum_{p=1}^{\infty} -x\,q^{n+p}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{k+n}x}{(1-q^k x)(1-q^{n+p}x)}\log q \quad \text{dus:}$$

$$(14)\qquad \left(\frac{d}{dn}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{k+n}x}{1-q^k x}\right)_{n=0} = \log q \sum_{p=1}^{\infty} -\frac{x\,q^p}{1-q^p x}$$

Het differentiaalquotient naar n van den rechterkant van (13) is:

$$\log q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k^2}x^k \sum_{p=0}^{k-1} -q^{n-p}(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^k x)(1-q^{n-p})}.$$

Voor n is nul valt alles met den factor $(1-q^n)$ weg, blijven alleen die termen, welke bij $p=0$ behooren (in teller en noemer $(1-q^n)$) en vindt men:

$$\log q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-q^{k^2}x^k(1-q^{-1})(1-q^{-2})\ldots\ldots\ldots(1-q^{-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots\ldots(1-q^k)(1-qx)(1-q^2x)\ldots\ldots(1-q^k x)} =$$

$$(15)\qquad \log q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{\frac{1}{2}k(k+1)}x^k}{(1-q^k)(1-qx)(1-q^2x)\ldots\ldots(1-q^k x)}.$$

Uit (14) en (15) volgt:

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{xq^k}{1-q^k x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{q^{\frac{1}{2}k(k+1)}x^k}{(1-q^k)(1-qx)(1-q^2x)\ldots\ldots(1-q^k x)}.$$

Stelt men $x=1$ en $q=x$ dan vindt men de gezochte transformatie van de reeks van L.:

(17) $$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots\ldots=$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)^2}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^2}-\ldots$$

Door de termen der reeks van L. u_1, u_2, u_3 enz. te noemen krijgt (17) den vorm:

(18) $$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots=\frac{u_1}{1-x}-\frac{u_1u_2}{1-x^2}+\frac{u_1u_2u_3}{1-x^3}-\ldots.$$

De termen van deze reeks zijn afwisselend positief en negatief en nemen snel af; zelfs als ze alle positief waren, had men nog:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_1u_2u_3\ldots\ldots u_{n+1}}{1-x^{n+1}}\,\frac{1-x^n}{u_1u_2\ldots u_n}=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=0$$

§ 7. Daar de termen meestal direkt ($x\leqq 0.8$) en anders toch vrij spoedig gaan afnemen, zal de reeks van Gesàro met steeds kleiner amplitudines om de juiste waarde van $L(x)$ heenschommelen. Men kan deze amplitudines nog verkleinen. We merken daartoe op dat:

$\frac{1}{1-x^k}=\frac{1-x^k}{1-x^k}+\frac{x^k}{1-x^k}=1+u_k$. Hierdoor gaat (18) over in:

$u_1+u_2+u_3+\ldots.=u_1(1+u_1)-u_1u_2(1+u_2)+u_1u_2u_3(1+u_3)\ldots=$
$u_1+u_1^2-u_1u_2-u_1u_2^2+u_1u_2u_3+u_1u_2u_3^2-\ldots..$ dus:

(19) $u_1+u_2+u_3+\ldots..=u_1+u_1(u_1-u_2)-u_1u_2(u_2-u_3)+$
$+u_1u_2u_3(u_3-u_4)\ldots\ldots$ de getransformeerde reeks is dus uitsluitend uit termen der oorspronkelijke opgebouwd. Maar nu is:

$$u_{k-1}-u_k=\frac{x^{k-1}}{1-x^{k-1}}-\frac{x^k}{1-x^k}=\frac{x^{k-1}(1-x)}{(1-x^k)(1-x^{k-1})}=\frac{u_{k-1}u_k}{u_1x^{k-1}}$$

Substitueert men dit in (19) dan vindt men:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots.=u_1+\frac{u_1u_2}{x}-\frac{u_2^2u_3}{x^2}+\frac{u_2u_3^2u_4}{x^3}-\ldots.$$

De beide eerste termen zijn nog eenvoudig samen te voegen, want:

$$u_1 + \frac{u_1 u_2}{x} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} =$$

$$= \frac{x + x^2 - x^3}{1 - x - x^2 + x^3} = -1 + \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = -1 + \frac{u_1 u_2}{x^3}$$

dus:

$$(20)\quad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = -1 + \frac{u_1 u_2}{x^3} - \frac{u_2^2 u_3}{x^2} +$$

$$+ \frac{u_2 u_3^2 u_4}{x^3} - \frac{u_2 u_3 u_4^2 u_5}{x^4} + \ldots\ldots$$

Dat de amplitudines door dit proces werkelijk verkleind zijn, is gemakkelijk te zien. In de reeks (18) is de som van 2 termen $\frac{u_1}{1-x} - \frac{u_1 u_2}{1-x^2}$ te klein, in de reeks (20) is de som van 2 termen $\left(-1 + \frac{u_1 u_2}{x^3}\right) - \frac{u_2^2 u_3}{x^2}$ ook te klein, maar blijkens de afleiding $u_1 u_2 u_3$ grooter dan de overeenkomstige som van (18) dus dichter bij de juiste waarde.

§ 8. De waarde van deze reeksen kan men onderling vergelijken door voor ieder eene grens voor de fout op te stellen, die men maakt als men na n termen de berekening afbreekt. Voor de reeks van L. zelf moet dus bepaald worden

$$\alpha_n = \frac{x^{n+1}}{1 - x^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{1 - x^{n+2}} + \frac{x^{n+3}}{1 - x^{n+3}} + \ldots$$

Nu hebben we in (16) gevonden:

$$\frac{xq}{1-qx} + \frac{xq^2}{1-q^2x} + \frac{xq^3}{1-q^3x} + \ldots =$$

$$\frac{qx}{(1-qx)(1-q)} - \frac{q^3x^2}{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^2)} +$$

$$+ \frac{q^6x^3}{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)(1-q^3)} - \ldots.$$

Stelt men hierin $x = q^n$ en $q = x$ dan vindt men:

$$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^{n+2}}{1-x^{n+2}}+\frac{x^{n+3}}{1-x^{n+3}}+\ldots\ldots=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{(1-x^{n+1})(1-x)}-\frac{x^{2n+3}}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})(1-x^2)}+$$

$$+\frac{x^{3n+6}}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})(1-x^3)}$$

dus:

$$(21)\qquad \alpha_n=\frac{u_{n+1}}{1-x}-\frac{u_{n+1}u_{n+2}}{1-x^2}+\frac{u_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}}{1-x^3}-\ldots\ldots$$

De termen van deze reeks zullen in 't algemeen weer spoedig afnemen, voor $x \leqq 0.8$ direkt, en daar het teeken afwisselend positief en negatief is, heeft men dan $\alpha_n < \frac{u_{n+1}}{1-x}$.

§ 9. Voor de reeksontwikkeling van CLAUSEN moet een grens gevonden worden voor:

$$\beta_n=\frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2}+\frac{1+x^{n+2}}{1-x^{n+2}}x^{(n+2)^2}+$$

$$+\frac{1+x^{n+3}}{1-x^{n+3}}x^{(n+3)^2}+\ldots\ldots.$$

Hiervoor maken we gebruik van de identiteit $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=$

$\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}+\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}+a_{ji})]$ [1])

Stelt men hierin $a_{ij}=x^{ij}$ dan vindt men links:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x^{ij}=\sum_{i=1}^{n}(x^i+x^{2i}+\ldots\ldots x^{ni})=\sum_{i=1}^{n}x^i\frac{1-x^{ni}}{1-x^i}.$$

Rechts vindt men: $\sum_{i=1}^{n}(x^{i^2}+2(x^{i(i+1)}+x^{i(i+2)}+\ldots\ldots+x^{in}))=$

$$\sum_{i=1}^{n}(x^{i^2}+2x^{i^2}(x^i+x^{2i}+\ldots,x^{i(n-i)}))=\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x^i-2x^{ni-i^2+i}}{1-x^i}x^{i^2}$$

Linker- en rechterkant gelijkstellend:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1-x^{ni}}{1-x^i}x^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x^i-2x^{ni-i^2+i}}{1-x^i}x^{i^2}$$

---

[1]) Uit deze identiteit is trouwens ook de reeks van CLAUSEN af te leiden. E. CESÀRO: Sur les transformations de la série de LAMBERT. Nouvelles Annales série 3, t. 7, p. 374. (1888).

of: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1+x^i}{1-x^i} x^{i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{1-x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{ni+i}}{1-x^i}$ waaruit:

(23) $S - \beta_n - S + \alpha_n = \alpha_n - \beta_n = x^n u_1 + x^{2n} u_2 + \ldots . x^{n^2} u_n.$

Eene eenvoudige uitdrukking voor β_n krijgt men door α_n in een anderen vorm dan (21) te ontwikkelen. Nu verschijnt α_n, als we in $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k q}{1-x^k q}$ voor $q = x^n$ zetten. Maar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k q}{1-x^k q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k q^k}{1-x^k}$, hetgeen blijkt als men iederen term van de laatste reeks in eene reeks ontwikkelt, de reeksen onder elkaar schrijft en de kolommen sommeert. Substitueert men in deze gelijkheid $q = x^n$ dan vindt men:

$$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{1-x^{n+2}} + \frac{x^{n+3}}{1-x^{n+3}} + \ldots . =$$

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} + \frac{x^{3n+3}}{1-x^3} + \ldots \ldots .$$

(24) of: $\alpha_n = u_1 x^n + u_2 x^{2n} + u_3 x^{3n} + \ldots .$

Nu is (23) $\beta_n = \alpha_n - (u_1 x^n + u_2 x^{2n} + \ldots \ldots u_n x^{n^2})$ waaruit met (24) volgt:

(25) $\beta_n = u_{n+1} x^{n(n+1)} + u_{n+2} x^{n(n+2)} + u_{n+3} x^{n(n+3)} + \ldots$

Maar $u_{n+k} < x^n u_k$ en zoo gaat (25) over in:

$$\beta_n < x^{n(n+2)} u_1 + x^{n(n+3)} u_2 + x^{n(n+4)} u_3 + \ldots .$$

(26) of: $\beta_n < x^{n(n+1)} \alpha_n.$

§ 10. Voor de reeks van Cesàro (18) moet een grens gevonden worden voor:

$$\gamma_n = \frac{u_1 u_2 \ldots . u_{n+1}}{1-x^{n+1}} - \frac{u_1 u_2 \ldots . u_{n+2}}{1-x^{n+2}} - \frac{u_1 u_2 \ldots . u_{n+3}}{1-x^{n+3}} - \ldots .$$

We merkten reeds op dat voor $x \leqq 0.80$ de termen onmiddellijk zullen afnemen, zoodat men dan heeft:

(27) $$\gamma_n < \frac{u_1 u_2 u_3 \ldots . u_n + 1}{1-x^{n+1}} =$$

$$\frac{x \cdot x^2 x^3 \ldots . x^{n+1}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \ldots . (1-x^{n+1})(1-x^{n+1})} <$$

$$< \frac{x^{1/2}(n+1)(n+2)}{(1-x)^{n+2}}$$

want $1-x<1-x^2<1-x^3$ enz.

§ 11. In (20) vonden we de transformatie:

$$L(x)+1=\frac{u_1 u_2}{x^3}-\frac{u_2^2 u_3}{x^2}+\frac{u_2 u_3^2 u_4}{x^3}-\frac{u_2 u_3 u_4^2 u_5}{x^4}+\ldots\ldots$$

Voor de rest van deze reeks vindt men evenzoo:

$$(28) \qquad \delta_n < \frac{u_2 u_3 u_4 \ldots . u^2_{n+1} u_{n+2}}{x^{n+1}} =$$

$$= \frac{x^2 x^3 x^4 \ldots\ldots . x^{n+1} x^{n+2}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots . (1-x^{n+1})^2 (1-x^{n+2})} <$$

$$< \frac{x^{1/2}(n+1)(n+4)}{(1-x^2)^{n+2}}$$

§ 12. Voordat we nu de waarde der verschillende reeksen vergelijken, merken we op, dat ze niet voor alle waarden tusschen 0 en 1 geschikt zijn om L(x) te becijferen. De termen van de reeks van Cesàro kunnen b.v. aanvankelijk toenemen, want $t_1 > t_2$, wanneer $\frac{u_1}{1-x} > \frac{u_1 u_2}{1-x^2}$ of $f(x)=1+x-2x^2-x^3>0$.

Nu is $f(0.80)=+0.008$ en $f(0.81)=-0.033641$. De termen nemen dus direkt af als $x \leqq 0.80$. Voor $x>0.80$ zal de reeks vrij onbruikbaar zijn, maar zelfs als $x<0.80$ is de convergentie in de buurt van 0.80 nog traag. Dergelijke bezwaren heeft men ook bij de andere reeksen. Nu heeft Schlömilch de reeks van Lambert in een eene half convergente reeks ontwikkeld, welke het antwoord des te nauwkeuriger geeft, naarmate x dichter bij 1 ligt. Maar zelfs voor $x=0.4$ vindt men nog 9 decimalen nauwkeurig, wanneer men 4 termen van de reeks van Schlömilch sommeert, de reeks van Clausen geeft er dan ook 9. De gebieden van bruikbaarheid van beide reeksen ontmoeten elkaar hier. Voor waarden van $x>0.4$ zal men bij voorkeur de reeks van Schlömilch gebruiken, bij waarden van $x<0.4$ de andere reeksen, die wij nu in die veronderstelling zullen vergelijken.

§ 13. Nu is (21) $\alpha_n < \frac{u_{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{(1-x^{n+1})(1-x)} <$

$$< \frac{x^{n+1}}{x} = x^n$$

want: $(1-x^{n+1})(1-x) \geqq (1-x^2)(1-x) >$

$$(1-0.16)(1-0.4) > 0.4 > x.$$

Men zou kunnen denken, dat deze grensbepaling wat ruw was, maar

$$\alpha_n = \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{1-x^{n+2}} + \frac{x^{n+3}}{1-x^{n+3}} + \ldots\ldots$$

$$\text{dus } \alpha_n > \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} > x^{n+1}$$

waaruit $$x^n < \alpha_n < x^{n+1}.$$

Voor β_n vinden we nu uit (26) $\beta_n < x^{n(n+1)} \alpha_n < x^{n(n+2)}$. Ook hier is de benadering als macht van x zoo nauwkeurig mogelijk, want:

$$u_n = \frac{x^n}{1-x^n} > x^n \text{ en dus (25) } \beta_n = x^{n(n+1)} u_{n+1} +$$

$$+ x^{n(n+2)} u_{n+2} + x^{n(n+3)} u_{n+3} + \ldots\ldots\ldots >$$

$x^{(n+1)^2} + x^{(n+1)(n+2)} + x^{(n+1)(n+3)} + \ldots\ldots > x^{n^2+2n+1}$ dus:

$$x^{n(n+2)} > \beta_n > x^{n(n+2)+1}.$$

De waarde voor γ_n (27) is ook nog iets te vereenvoudigen, want sommeert men niet te veel termen, dan zal $(1-x)^{n+2} > x$ zijn. Dit is het geval als $(n+2) \log (1-x) > \log x$ dus $n+2 < \frac{\log x}{\log (1-x)}$. Men vindt dan:

$$\gamma_n < \frac{x^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}}{(1-x)^{n+2}} < x^{\frac{1}{2}(n^2+3n)}.$$

Ook δ_n (28) is zoo te behandelen. Weer moet $(1-x^2)^{n+2} > x$ zijn of $(n+2) \log (1-x^2) > \log x$ dus $n+2 < \frac{\log x}{\log (1-x^2)}$.

Men kan hier dus nog wat meer termen sommeeren dan bij γ_n en toch blijft

$$\delta_n < \frac{x^{1/2}(n+1)(n+4)}{(1-x^2)^{n+2}} < x^{1/2(n^2+5n+3)}.$$

§ 14. Volgens deze resultaten geeft voor $x = 0,1$ de sommatie van n termen van de reeks van L. n decimalen nauwkeurig, de transformatie (12) geeft er $2n+1$, de reeks van CLAUSEN $n(n+2)$, de reeks van CESÀRO $^1/_2\, n(n+3)$ mits $n+2 < \frac{\log 0.1}{\log 0.9} = 21.8$ dus $n < 20$. Is $n > 20$ dan kan men nagaan voor welke n, $(1-x)^{n+2} > x^2$ en vindt zoo dat slechts het laatste cijfer onnauwkeurig zal zijn, wanneer $19 < n < 42$ enz. De reeks (20) geeft $^1/_2\,(n^2+5n+3)$ decimalen, mits $n+2 < \frac{\log 0.1}{\log 0.99} = 299,\ldots$ dus $n < 228$. Om 35 nauwkeurige decimalen voor $x = 0.1$ te vinden, moet men 5 termen van de reeks van CLAUSEN sommeeren of 7 van de reeks van CESÀRO, maar 35 van de reeks van L. Gebruikte men echter 35 termen van de reeks van CLAUSEN dan vond men 1295 decimalen nauwkeurig, de reeks van CESÀRO gaf er dan 664 en de reeks (20) 701. De reeks van CLAUSEN verdient in het algemeen den voorkeur, de reeks (20) is echter beter om vlug een paar decimalen te vinden. Voor $x = 0.1$ geeft één term reeds het antwoord in 4 decimalen, twee termen geven er zelfs 8, bij meer termen wint de reeks van CLAUSEN het.

§ 15. Besluiten we dit hoofdstuk met eene afleiding van de asymptotische ontwikkeling van SCHLÖMILCH. Hij ging uit van de sommatieformule van EULER-MAC. LAURIN: [1]) (29)

$$h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots f(a+(q-1)h)] = \int_a^b f(u)\,du - {}^1/_2 h[f(b)-f(a)] + \frac{B_2 h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)] +$$

[1]) SCHLÖMILCH Compendium der Höhere Analyse Bd II p. 225.

$$+\frac{B_4 h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] + \ldots\ldots \frac{B_{2n-2} h^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$[f^{2n-3}(b) - f^{2n-3}(a)] - \frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 S_{2n}\,\phi(t.\,2n)\,dt. \quad ^{2})$$

waarin:

$$S_{2n} = f^{2n}(a+ht) + f^{2n}(a+h+ht) + \ldots\ldots$$
$$f^{2n}(a+(q-1)h+ht)$$

en $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ ..... $f^{2n}(u)$ van $u=a$ tot $u=b$ continu zijn en eindig blijven.

Hij nam $f(u) = \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} = \frac{B_2}{2!}u + \frac{B_4}{4!}u^3 +$

$$+\frac{B_6}{6!}u^5 + \ldots \text{(mits } |u| < 2\pi)$$

Substitueert men deze functie in (29), neemt $a=0$ dus $b = qh$ en bedenkt dat $f(0)=0$, $f'(0) = {}^1/_2 B_2$, $f'''(0) = {}^1/_4 B_4$ enz. ..... $f^{2n-1}(0) = \frac{1}{2n} B_{2n}$, dan vindt men:

$$h\left[\frac{1}{e^h-1} + \frac{1}{e^{2h}-1} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{e^{(q-1)h}-1}\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots \frac{1}{q-1}\right] + (q-1)\,{}^1/_2\,h = \log\frac{1-e^{-qh}}{qh} +$$

$$+ {}^1/_2\,qh - {}^1/_2\left[\frac{h}{e^{qh}-1} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}h\right] + \frac{B_2 h^2}{2!}[f'(qh) - {}^1/_2 B_2] +$$

$$+\frac{B_4 h^4}{4!}[f'''(qh) - {}^1/_4 B_4] + \ldots\ldots +$$

$$+\frac{B_{2n-2} h^{2n-2}}{(2n-2)!}\left[f^{2n-3}(qh) - \frac{1}{2n-2}B_{2n-2}\right] - \frac{h^{2n+1}}{(2n)!}I_{2n}.$$

---

[2]) Voor getallen van BERNOULLI zullen wij de notatie van CESÀRO gebruiken, die deze getallen definieerde door de symbolische vergelijking $(B+1)^p - B^p = p$. waarbij $B_0 = 1$ genomen wordt. Men vindt zoo:

$B_0 = 1$, $B_1 = {}^1/_2$, $B_2 = {}^1/_6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -{}^1/_{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = {}^1/_{42}$ enz.

Tusschen de notaties van SERRET, SCHLÖMILCH en CESÀRO bestaat de betrekking: $B_n^S = B_{2n-1}^{Schl} = (-1)^{n-1} B_{2n}^C$

waarbij $I_{2n} = \int_0^1 S_{2n}\, \Phi(t.\, 2n)\, dt.$

Deelend door h en rangschikkend vindt men:

$$\frac{1}{e^h - 1} + \frac{1}{e^{2h} - 1} + \cdots \frac{1}{e^{(q-1)h} - 1} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots . \frac{1}{q} - \log q\right)\frac{1}{h} - \frac{\log h}{h} + \frac{1}{4} +$$

$$+ \frac{1}{h}\log(1 + e^{-qh}) - \frac{1}{2qh} - \frac{1}{2(e^{qh} - 1)} +$$

$$+ \frac{B_2 h}{2!}[f'(qh) - {}^1/_2 B_2] + \frac{B_4 h^3}{4!}[f'''(qh) - \frac{1}{4} B_4] + \ldots .$$

$$\frac{B_{2n-2} h^{2n-3}}{(2n-2)!}\ [f^{2n-3}(qh) - \frac{1}{2n-2} B_{2n-2}] - \frac{h^{2n}}{(2n)!} I_{2n}.$$

Kunnen we nu de waarden van $f'(u)$, $f'''(u)$ enz. voor $u = \infty$ vinden dan kunnen we in (30) q oneindig groot laten worden, dus de reeks links tot in het oneindige voortzetten. Nu is:

$$D_u\left[\frac{1}{(e^u - 1)^m}\right] = \frac{-m e^u}{(e^u - 1)^{m+1}} = -m\left\{\frac{1}{(e^u - 1)^m} + \frac{1}{(e^u - 1)^{m+1}}\right\}.$$

Iedere vorm met eene macht van $(e^u - 1)$ in den noemer levert dus na differentiatie twee dergelijke vormen, één met dezelfde macht en één met een één hoogere macht van $(e^u - 1)$ in den noemer. Hieruit volgt direkt:

$$f^{2n-1}(u) = -\left\{\frac{A_1}{e^u - 1} + \frac{A_2}{(e^u - 1)^2} + \ldots\ldots \frac{A_{2n}}{(e^u - 1)^{2n}} - \frac{(2n-1)!}{u^{2n}}\right\}$$

waarin $A_1 . A_2 \ldots A_n$ eindige getallen zijn. $\lim_{u \to \infty} f^{2n-1}(u)$ is dus nul en uit (30) volgt voor $q \to \infty$:

(31). $$\frac{1}{e^h - 1} + \frac{1}{e^{2h} - 1} + \frac{1}{e^{3h} - 1} + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{C - \log h}{h} + \frac{1}{4} - \frac{B_2{}^2}{2!2} h - \frac{B_4{}^2}{4!4} h^3 - \ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{B^2{}_{2n-2}}{(2n-2)!\,(2n-2)}\,h^{2n-3}-\frac{h^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 S_{2n}\,\phi\,(t.\,2n)\,dt.$$

waarin $S_{2n}=f^{2n}(ht)+f^{2n}(h+ht)+f^{2n}(2h+ht)+\ldots\ldots$

Nu is $(-1)^n\ \phi\ (t.\,2n)$ van 0 tot 1 positief, kan men dus twee eindige van t onafhankelijke grootheden M en N vinden, zoodat $M<S_{2n}<N$ dan is;

$$(-1)^n\int_0^1 M.\,\phi\,(t.\,2n)\,dt<(-1)^n\int_0^1 S_{2n}\,\phi\,(t.\,2n)\,dt<(-1)^n\int_0^1 N\phi(t.\,2n)\,dt$$

of

$$(-1)^{n+1}\,M.\,B_{2n}<(-1)^n\int_0^1 S_{2n}\,\phi\ (t.\,2n)\ dt<(-1)^{n+1}\,N\,B_{2n}$$

want $$\int_0^1 \phi\,(t.\,2n)\ dt=-B_{2n}.$$

dus $$\int_0^1 S_{2n}\,\phi\,(t,2n)\,dt=-B_{2n}\,[M+\theta(N-M)]\ \text{voor}\ 0<\theta<1.$$

Hierdoor wordt de restterm van (31)

(32). $$+\frac{h}{(2n)!}\,B_{2n}\,[M+\theta\,(N-M)]$$

Het komt er nog slechts op aan M en N te bepalen. Nu geeft de betrekking $(-\pi\leqq x\leqq+\pi)$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}}=\frac{1}{2\lambda}-\frac{\lambda\cos x}{1^2+\lambda^2}+\frac{\lambda\cos 2x}{2^2+\lambda^2}-$$

$$-\frac{\lambda\cos 3x}{3^2+\lambda^2}+\ldots\ldots^{1})\ \text{voor}\ x=\pi$$

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{e^{2\lambda\pi}-1}\right)=\frac{1}{2\lambda}+\frac{\lambda}{1^2+\lambda^2}+\frac{\lambda}{2^2+\lambda^2}+\frac{\lambda}{3^2+\lambda^2}+\ldots$$

waaruit voor $2\lambda\pi=u$:

$$f(u)=2\left\{\frac{u}{2^2\pi^2+u^2}+\frac{u}{4^2\pi^2+u^2}+\frac{u}{6^2\pi^2+u^2}+\ldots\ldots\right\}$$

---

[1]) Schlömilch Compendium Bd. II p. 140.

wanneer we deze betrekking 2 n maal differentieeren en bedenken dat:

$$D^m \frac{u}{a^2+u^2} = (-1)^m m! \frac{\cos\left\{(m+1)\,bgtg\frac{a}{u}\right\}}{(a^2+u^2)^{\frac{m+1}{2}}}$$ [1])

dan vinden we:

$$f^{2n}(u) = 2.(2n)!\left\{\frac{\cos\left[(2n+1)\,bgtg\frac{2\pi}{u}\right]}{(2^2\pi^2+u^2)^{n+1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\left[(2n+1)\,bgtg\frac{4\pi}{u}\right]}{(4^2\pi^2+u^2)^{n+1/2}} + \ldots\ldots\right\} \text{ dus:}$$

$$|f^{2n}(u)| < 2(2n)!\left\{\frac{1}{(2^2\pi^2+u^2)^n} + \frac{1}{(4^2\pi^2+u^2)^n} + \ldots\ldots\right\}$$

$$< \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{1}{2^2\pi^2+u^2} + \frac{1}{2^{2n-2}(4^2\pi^2+u^2)} + \ldots\ldots\right\}$$

$$\text{want: } \frac{1}{(a^2+u^2)^n} < \frac{1}{a^{2n-2}(a^2+u^2)}$$

Vervangt men nu $4^2\pi^2$, $6^2\pi^2$ enz. overal door $2^2\pi^2$, dan vindt men:

$$|f^{2n}(u)| < \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n-2}}\left(\frac{1}{1^{2n-2}} + \frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{3^{2n-2}} + \ldots\ldots\right)\frac{1}{2^2\pi^2+u^2}$$

dus:

$$f^{2n}(u) = \frac{2(2n)!\,s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\,\frac{\varepsilon}{2^2\pi^2+u^2} \text{ waarbij } -1 < \varepsilon < +1.$$

$$\text{Nu wordt } S_{2n} = \frac{2(2n)!\,s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi^2+(ht)^2} + \right.$$

---

[1]) Men bewijst dit door: $\frac{u}{a^2+u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-ia} + \frac{1}{u+ia}\right)$, m × te differentieeren.

$$+\frac{\varepsilon_1}{4\pi^2+(h+ht)^2}+\frac{\varepsilon_2}{4\pi^2+(2h+ht)^2}+\ldots.\Big) \text{ dus}$$

$$|S_{2n}|<\frac{2(2n)!\,s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2+h^2}+\frac{1}{4\pi^2+(2h)^2}+\ldots\ldots\right\}$$

$$<\frac{2(2n)!\,s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.\right)\right\}=$$

$$=\frac{2(2n)!\,s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{1}{4\pi^2}+\frac{\pi^2}{6h^2}\right\}.$$

$$\text{dus } |S_{2n}|<(-1)^{n-1}\,2n(2n-1)\,B_{2n-2}\left\{\frac{1}{4\pi^2}+\frac{\pi^2}{6h^2}\right\}$$

$$\text{want } s_{2n-2}=(-1)^{n-1}\,2^{2n-3}\,\pi^{2n-2}\,\frac{B_{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

Men vindt dus dat $|S_{2n}|$ kleiner is dan een eindig getal N en dus is $M<S_{2n}<N$, waarbij $M=-N$, maar dan is $M+\theta(N-M)=-N+2\theta N=\rho_1 N$, waarbij $-1<\rho_1<+1$. De restterm wordt volgens (32):

$$\rho_1(-1)^{n-1}\frac{h^{2n}}{(2n)!}\,2n(2n-1)B_{2n-2}\left\{\frac{1}{4\pi^2}+\frac{\pi^2}{6h^2}\right\}B_{2n}$$

$$\text{of}\qquad R=\rho\frac{h^{2n-2}\,B_{2n-2}\,B_{2n}}{(2n-2)!}\left\{\frac{h^2}{4\pi^2}+\frac{\pi^2}{6}\right\}.$$

Uit (31) vindt men dan:

$$(33)\quad \frac{1}{e^h-1}+\frac{1}{e^{2h}-1}+\frac{1}{e^{3h}-1}+\ldots=\frac{C-\log h}{h}+$$

$$+\frac{1}{4}-\frac{B_2^2\,h}{2!\,2}-\frac{B_4^2\,h^3}{4!\,4}-\ldots.-\frac{B^2_{2n-2}\,h^{2n-3}}{(2n-2)!\,(2n-2)}+R.$$

Stelt men hierin $e^{-h}=x$, dan is $0<x<1$ omdat h positief is en strekt men de sommatie nog een term verder uit, dan gaat (33) over in:

$$(34)\quad \frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots.=\frac{C-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+$$

$$+\,{}^1/_4-\frac{B_2{}^2}{2!\,2}\log\frac{1}{x}-\frac{B_4{}^2}{4!\,4}\left(\log\frac{1}{x}\right)^3\ldots..-\frac{B^2{}_{2n}}{(2n)!\,2n}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2n-1}+R_{2n}$$

waarbij:

$$(35)\quad R_{2n}=\rho\frac{B_{2n}B_{2n+2}}{(2n)!}\left\{\frac{\pi^2}{6}+\frac{\log^2 x}{4\pi^2}\right\}\log^{2n}x$$

Wij noemen de coëfficiënten $\frac{B_2{}^2}{2!\,2}=C_2$ enz. en geven voor eene snelle becijfering de waarden van $C_2=\frac{1}{144}$, $C_4=\frac{1}{86400}$, $C_6=\frac{1}{7620480}$, $C_8=\frac{1}{290304000}$, $C_{10}=\frac{1}{6322821120}$, enz. Zoo vinden wij:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\frac{C-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+{}^1/_4-\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2k-1}+R_{2n}$$

§ 16. We merkten reeds op, dat de bruikbaarheid van de reeks toeneemt, wanneer x tot 1 nadert. Voor $x\geqq 0.9$ vindt men reeds 4 decimalen nauwkeurig met $L(x)=\frac{C-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}-\frac{1}{144}\log\frac{1}{x}$, terwijl men voor $x=0.9$ reeds 10 termen van de reeks van Clausen moet berekenen om eene dergelijke nauwkeurigheid te bereiken. Maar ook voor kleinere waarden is de reeks nog geschikt mits $\log\frac{1}{x}<1$ dus $x>\frac{1}{e}=0.36728\ldots$.

Voor $x=0.4$ vindt men met de reeks van Schlömilch:

$L(0.4)=0.7253562799+0.25-0.0063631301-0.0000089040$
$-0.0000000848-0.0000000019=0.9689841591.$

Ter controle berekenen we L (0.4) ook met de reeks van Clausen:

$L(0.4) = 0.9333333333 + 0.0353523810 + 0.0002979928 + 0.0000004521 = 0.9689841592.$

Nu is $\beta_n < x^{n(n+1)}\,\alpha_n$ en $\alpha_n < \frac{u_{n+1}}{1-x}$ dus bij de berekening met de reeks van CLAUSEN is de fout $< 0.4^{20}\,\frac{0.4^5}{(1-0.4^5)\,0.6}$ < 0.0000000002.

De eerste 9 decimalen zijn dus juist becijferd, de reeks van SCHLÖMILCH geeft precies dezelfde, ook daar zijn ze dus goed. De gebieden van bruikbaarheid van beide reeksen ontmoeten elkaar dus bij $x = 0.4$ (van beide zijn 4 termen becijferd). Wanneer men echter voor onze becijfering met de reeks van SCHLÖMILCH den restterm berekent vindt men $R_8 = \rho\,\frac{B_8\,B_{10}}{8!}\left\{\frac{\pi^2}{6} + \frac{\log^2 0.4}{4\pi^2}\right\}\log^8 0.4$ of $|R_8| < 0.00000005$, door controle met de reeks van CLAUSEN weten we $|R_8| < 0.0000000004$. De grens voor de fout is bij R_{2n} dus lang zoo nauw niet getrokken als voor α_n en β_n.

§ 17. Wij besluiten dit hoofdstuk met een tabelletje der waarden van $L(x)$ in vijf decimalen nauwkeurig.

$L(0) = 0.00000$. $L(0.3) = 0.56686$. $L(0.6) = 2.69140$. $L(0.9) = 27.08648$.
$L(0.1) = 0.12232$. $L(0.4) = 0.96898$. $L(0.7) = 4.75640$. $L(1) = \infty$
$L(0.2) = 0.30173$. $L(0.5) = 1.60669$. $L(0.8) = 9.55705$.

HOOFDSTUK IV.

(Transformaties).

a. Algebraische transformaties.

§ 1. We gebruikten reeds de transformatie van CLAUSEN (Inleiding § 2):
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} \left(\frac{1+x^k}{1-x^k}\right)$. Met behulp hiervan heeft EISENSTEIN de reeks van L. in eene kettingbreuk getransformeerd. CLAUSEN vond:

$$L(x) = x\frac{1+x}{1-x} + x^4\frac{1+x^2}{1-x^2} + \ldots\ldots x^{k^2}\frac{1+x^k}{1-x^k} + \ldots\ldots =$$

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^6}{1-x^2} + \ldots\ldots \frac{x^{k^2}}{1-x^k} + \frac{x^{k^2+k}}{1-x^k} + \ldots\ldots$$

Stelt men rechts $x = \frac{1}{t}$ dan gaat dit over in:

$$(1)\quad L(x) = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t(t-1)} + \frac{1}{t^2(t^2-1)} + \frac{1}{t^4(t^2-1)} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{t^{k^2-k}(t^k-1)} + \frac{1}{t^{k^2}(t^k-1)} + \ldots\ldots$$

De reeks is nu in eenen vorm geschikt om met de methode van EULER in eene kettingbreuk ontwikkeld te worden. Men heeft namelijk dat, wanneer $S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots\ldots$ eene convergente reeks is, dat dan:

$$S = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{u_1^2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_2^2}{u_2 + u_3 - \text{enz.}}}}$$

Past men dit op (1) toe dan heeft men:

$u_1 + u_2 = t^2 - 1$, $u_2 + u_3 = t(t^3-1)$, $u_3 + u_4 = t^2(t^4-1)$, $\ldots\ldots$

$u_{2k-1} + u_{2k} = t^{k^2-k}(t^{2k}-1)$, $u_{2k} + u_{2k+1} = t^{k^2}(t^{2k+1}-1)$

waaruit de ontwikkeling volgt:

$$L(x)=\cfrac{1}{t-1-\cfrac{(t-1)^2}{t^2-1-\cfrac{t^2(t-1)^2}{t(t^3-1)-\cfrac{t^4(t^2-1)^2}{t^2(t^4-1)-\cfrac{t^8(t^2-1)^2.}{t^4(t^5-1)-\cfrac{t^{12}(t^3-1)^2}{t^6(t^6-1)-\text{enz.}\ldots}}}}}}$$

of telkens teller en noemer door eene macht van t deelend:

mits $(x) < 1$ dus $|t| > 1$.

$$L(x)=\cfrac{1}{t-1-\cfrac{(t-1)^2}{t^2-1-\cfrac{t(t-1)^2}{t^3-1-\cfrac{t\ t^2-1)^2}{t^4-1-\cfrac{t^2(t^2-1)^2}{t^5-1-\text{enz.}}}}}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cfrac{t^{k-1}(t^k-1)^2}{t^{2k}-1-\cfrac{t^k(t^k-1)^2}{t^{2k+1}-1-\text{enz.}\ldots}}$$

§ 2. Curtze transformeerde de reeks van L. in eene bepaalde integraal, en leidde hieruit weer eene reeksontwikkeling af. Zoo vond hij:

(2) $2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\frac{x}{1-x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+x^k}{1-x^k}x^k$. Hoewel de integraal geen beteekenis had, kan men de juistheid der transformatie aantoonen. Ontwikkelt men iederen term der reeks van L. in eene reeks dan vindt men:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(2x^k+2x^{2k}+2x^{3k}+\ldots.)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}(x^k+2x^{2k}+2x^{3k}+\ldots\ldots)$$

$$=\frac{x}{1-x}+\sum_{k=1}^{\infty}(x^k+x^{2k})(1+x^k+x^{2k}+\ldots..)=$$

$$=\frac{x}{1-x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+x^k}{1-x^k}x^k.$$

Uit deze afleiding ziet men direkt, dat deze transformatie voor uitbreiding vatbaar is. Men vindt in 't algemeen:

$$n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(nx^k+nx^{2k}+nx^{3k}+\ldots..)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(n-1)x^k+\sum_{k=1}^{\infty}(n-2)x^{2k}+\ldots..\sum_{k=1}^{\infty}x^{(n-1)k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(x^k+2x^{2k}+\ldots\ldots(n-1)x^{(n-1)k}+nx^{nk}+nx^{(n+1)k}+\ldots)$$

$$= (n-1)\frac{x}{1-x} + (n-2)\frac{x^2}{1-x^2} + \ldots.$$

$$\frac{x^{n-1}}{1-x^{n-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x^k + x^{2k} + \ldots.. x^{nk})(1 + x^k + x^{2k} + \ldots..)$$

(3) waaruit: $n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k} = (n-1)\frac{x}{1-x} +$

$$(n-2)\frac{x}{1-x^2} + \ldots.. \frac{x^{n-1}}{1-x^{n-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k + x^{2k} + \ldots. x^{nk}}{1-x^k}$$

Men ziet dat (3) voor $n = 2$, (2) als bijzonder geval bevat.

§ 3. Eene dergelijke transformatie kan men afleiden door de opvolgende termen der reeks van L. in reeksen te ontwikkelen, en deze reeksen onder elkaar te schrijven. Op deze wijze ontstaat eene dubbelreeks, waarvan we eerst de diagonaal term sommeeren, dan de overblijvende termen van de eerste rij en de eerste kolom, daarna de dan nog overgebleven termen van de tweede rij en de tweede kolom enz. Men vindt zoo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x^{k(k+1)}}{1-x^k}.$$

Nu is: $\frac{2x^{k(k+1)}}{1-x^k} = x^{k^2}\frac{2x^k}{1-x^k} = x^{k^2}\left\{\frac{2x^k}{1+x^k} + \frac{4x^{2k}}{1-x^{2k}}\right\} =$

$$= x^{k^2}\left\{\frac{2x^k}{1+x^k} + \frac{4x^{2k}}{1+x^{2k}} + \frac{8x^{4k}}{1-x^{4k}}\right\} =$$

$$x^{k^2}\left\{\left(\frac{2x^k}{1+x^k} + \frac{4x^{2k}}{1+x^{2k}} + \ldots.. \frac{2^p x^{2^{p-1}k}}{1+x^{2^{p-1}k}}\right) + \frac{2^{p+1}x^{2^p k}}{1-x^{2^p k}}\right\}$$

Daar $|x| < 1$ nadert de laatste term met toenemende p tot nul en dus:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2}\left(\frac{2x^k}{1+x^k} + \frac{2^2 x^{2k}}{1+x^{2k}} + \frac{2^3 x^{4k}}{1+x^{4k}} + \ldots..\right)$$

Nemen we in de laatste dubbelreeks alle termen bij elkaar,

die $\frac{2x^q}{1+x^q}$ bevatten, dan vindt men vooreerst den term $x^{q^2}\frac{2x^q}{1+x^q}$, maar als q een tweevoud is komt $\frac{2x^q}{1+x^q}$ ook voor in de reeks, die met $x^{\left(\frac{q}{2}\right)^2}$ begint, is q een viervoud, dan ook nog in de reeks met $x^{\left(\frac{q}{4}\right)^2}$ enz., waaruit volgt, dat alle termen met den factor $\frac{2x^q}{1+x^q}$ zijn:

$$\frac{2x^q}{1+x^q}\left(x^{q^2}+2x^{\left(\frac{q}{2}\right)^2}+4x^{\left(\frac{q}{4}\right)^2}+\ldots.\right),$$ waarbij de reeks tusschen haakjes afgebroken moet worden bij den laatsten geheelen exponent.

Men vindt zoo de transformatie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}x^{k^2}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x^k}{1+x^k}\left(x^{k^2}+2x^{\left(\frac{k}{2}\right)^2}+4x^{\left(\frac{k}{4}\right)^2}+\ldots\right).$$

§ 4. Eene andere transformatie vindt men door te stellen: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k x^k}{1+x^k}$ en dan de coëfficiënten A_k onafhankelijk van x trachten te bepalen. Nu is

$$\frac{x^k}{1+x^k}=\frac{x^k-x^{2k}}{1-x^{2k}}=\frac{x^k}{1-x^k}-\frac{2x^{2k}}{1-x^{2k}}.$$

Er moet dus voldaan worden aan:

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k x^k}{1-x^k}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k x^{2k}}{1-x^{2k}}$$

Bij ontwikkeling in reeksen geeft de tweede term rechts slechts even machten van x. De oneven machten van x in de ontwikkelingen van $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{x^k}{1-x^k}$ en van $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}$

moeten dus gelijk zijn, hetgeen achtereenvolgens vereischt: $A_1 = 1$, $A_3 = 1$, $A_5 = 1$ enz. (4) gaat nu over in:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^{2l}}{1-x^{2l}} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} \frac{x^{2l}}{1-x^{2l}} - 2 \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{x^{2l}}{1-x^{2l}} \text{ dus moet:}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} (A_{2l} - 1) \frac{x^{2l}}{1-x^{2l}} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{x^{2l}}{1-x^{2l}}$$

waaraan voldaan wordt door $A_{2l} - 1 = 2 A_l$.

Nu is voor alle oneven l: $A_l = 1$ en heeft men dus $A_{2l} - 1 = 2$, $A_{2l} = 2 + 1 = 3$. Voor even l heeft men: $A_{4m} - 1 = 2 A_{2m}$, wat weer voor oneven m geeft:

$$A_{4m} = 2(2+1) + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7.$$

Men kan op deze manier doorgaan en ziet gemakkelijk in, dat als $k = 2^p n$ en n oneven dat dan:

$$A_k = 2^p + 2^{p-1} + 2^{p-2} + \ldots . 1 = \frac{2^{p+1} - 1}{2-1} = 2^{p+1} - 1$$

De reeksontwikkeling uitschrijvend:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{x}{1+x} + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{7x^4}{1+x^4} +$$

$$+ \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{3x^6}{1+x^6} + \frac{x^7}{1+x^7} + \frac{15x^8}{1+x^8} + \ldots .$$

§ 5. Trachten we de reeks van L. te vervangen door eene reeks met algemeenen term $A_k \frac{x^k + 2x^{2k} + \ldots . (q-1)x^{(q-1)k}}{1 + x^k + \ldots . x^{(q-1)k}}$ dan vinden wij eene uitbreiding der vorige transformatie, welke haar voor $q = 2$ als bijzonder geval bevat.

Nu is: $\frac{x^k + 2x^{2k} + \ldots (q-1)x^{(q-1)k}}{1 + x^k + \ldots . x^{(q-1)k}} = \frac{(1-x^k)(x^k + 2x^{2k} \ldots (q-1)x^{(q-1)k})}{1 - x^{qk}} =$

$$\frac{x^k + x^{2k} + \ldots . x^{(q-1)k} - (q-1)x^k}{1-x^{qk}} = \frac{x^k}{1-x^k} - q \frac{x^{qk}}{1-x^{qk}}.$$

Er moet dus voldaan worden aan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{x^k}{1-x^k} - q \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{x^{qk}}{1-x^{qk}}.$$

Bij ontwikkeling in reeksen geeft de tweede term rechts slechts machten van x^q, de andere machten van x in de

ontwikkelingen van $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$ en van $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{x^k}{1-x^k}$ moeten dus gelijk zijn. Dit vereischt dat $A_k = 1$ voor alle waarden van k, die niet deelbaar zijn door q, voor de andere A's heeft men:

$$\sum_{l=1}^{\infty} (A_{lq} - 1) \frac{x^{lq}}{1-x^{lq}} = q \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{x^{lq}}{1-x^{lq}} \text{ dus } A_{lq} - 1 = q A_l.$$

Is l geen q-voud dan is $A_l = 1$ dus $A_{lq} = q + 1$. Is l wel een q-voud, dan heeft men $A_{mq^2} - 1 = q A_{mq}$, dus als m geen q-voud is $A_{mq^2} = q(q+1) + 1 = q^2 + q + 1$. Op deze manier kan men doorgaan en men ziet gemakkelijk in dat als $k = q^p n$ en n geen q-voud dat dan:

$$A_k = q^p + q^{p-1} + q^{p-2} + \ldots\ldots\ldots + 1 = \frac{q^{p+1} - 1}{q - 1}.$$

§ 6. Bedenkt men, dat men alle getallen kan verkrijgen door alle oneven getallen achtereenvolgens met $1, 2, 2^2, 2^3$ enz. te vermenigvuldigen, dan ziet men in dat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_i \left(\frac{x^i}{1-x^i} + \frac{x^{2i}}{1-x^{2i}} + \frac{x^{4i}}{1-x^{4i}} + \ldots\ldots \right)$$

waarbij de sommatie over alle oneven getallen i uitgestrekt moet worden. Ontwikkelt men de reeks tusschen haakjes naar opklimmende machten van x, dan zal x^{ni} ($n = 2^\alpha p$ en p oneven) slechts in de ontwikkeling van die breuken voorkomen, die in den teller hebben: $x^i, x^{2i} \ldots\ldots\ldots x^{2^\alpha i}$, de coëfficiënt van x^{ni} is dus $\alpha + 1$.

Men vindt daarom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + 1) x^{ni}$.

Verandert men rechts de volgorde der sommatie, dan geeft dit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + 1)(x^n + x^{3n} + x^{7n} + \ldots\ldots\ldots) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + 1) \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

§ 7. Zonder de afleiding te geven heeft Eisenstein[1]) reeds vermeld, dat de reeks van L. getransformeerd kon worden in

[1]) Transformations remarquables de quelques séries. Crelles Journal t 27—28 p. 193—197. 1844.

het quotient van eene oneindige reeks en een oneindig product. We zullen daartoe eerst het oneindig product van EULER in eene reeks ontwikkelen en stellen:

$$P(x.t) = (1 - xt)\ (1 - x^2t)\ (1 - x^3t) \ldots\ldots = $$
$$= 1 + A_1t + A_2t^2 + \ldots\ldots \text{ mits } |x| < 1 \text{ en } |t| \leqq 1 .$$

Maar dan is

$$(1 - xt)\,P(x.xt) = (1 - xt).(1 - x^2t)(1 - x^3t) \ldots = P(x.t).$$

Substitueert men hierin de machtreeks in t, dan kan men uit de komende identiteit de coëfficiënten A bepalen. Men heeft zoo:

$$(1 - xt)(1 + A_1xt + A_2x^2t^2 + \ldots\ldots) = 1 + A_1t + A_2t^2 + \ldots\ldots$$

$$\text{dus } A_1x - x = A_1 \text{ of } A_1 = -\frac{x}{1 - x}$$

$$A_2x^2 - A_1x^2 = A_2 \text{ of } A_2 = -\frac{x^2}{1 - x^2}A_1 = +\frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

$$A_kx^k - A_{k-1}x^k = A_k \text{ of } A_k = -\frac{x^k}{1 - x^k}A_{k-1} \text{ dus}$$

$$A_k = (-1)^k \frac{x^{1 + 2 + \ldots\ldots k}}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots\ldots(1 - x^k)} =$$

$$= (-1)^k \frac{x^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1 - x)\ (1 - x^2)\ldots\ (1 - x^k)}.$$

$$\text{dus } (1 - xt)\ (1 - x^2t)\ (1 - x^3t)\ldots\ldots = 1 - \frac{x}{1 - x}t +$$

$$+ \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)}t^2 - \frac{x^6}{(1 - x)\ (1 - x^2)\ (1 - x^3)}t^3 + \ldots\ldots$$

en voor $t = 1$: $(1 - x)\ (1 - x^2)\ (1 - x^3)\ldots\ldots =$

$$= 1 - \frac{x}{1 - x} + \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)} - \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)} + \ldots$$

§ 8. Langs een dergelijken weg is de transformatie van EISENSTEIN te verkrijgen. Nu stellen we $f(x.t) = \left(\frac{x}{1 - xt} + \right.$

$$\left. + \frac{x^2}{1 - x^2t} + \frac{x^3}{1 - x^3t} + \ldots\ldots\right)(1 - xt)(1 - x^2t)(1 - x^3t)\ldots.$$

't komt er nu maar op aan $f(xt)$ in eene machtreeks naar t

te ontwikkelen en dan $t = 1$ te stellen. Stel $f(x.t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots\ldots$ dan is $x(1-xt) f(x.xt) =$

$$= \left(\frac{x^2}{1-x^2t} + \frac{x^3}{1-x^3t} + \frac{x^4}{1-x^4t} + \ldots\right)(1-xt)(1-x^2t)(1-x^3t)\ldots$$

dus $$x(1-xt) f(x.xt) = f(xt) - \frac{x}{1-xt} P(x.t).$$

Vermenigvuldigt men dit met $(1-xt)$ en substitueert de reeks voor $f(x.t)$ dan geeft dit:

$$x(1-xt)^2 (C_0 + C_1 xt + C_2 x^2 t^2 + \ldots\ldots) =$$
$$(1-xt)(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots\ldots) -$$
$$- x\left(1 - \frac{x}{1-x} t + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} t^2 - \ldots\ldots\right) \text{ of:}$$
$$C_0 + (C_1 x^2 - 2C_0 x^2) t + (C_2 x^3 - 2C_1 x^3 + C_0 x^3) t^2 + \ldots\ldots$$
$$(C_k x^{k+1} - 2C_{k-1} x^{k+1} + C_{k-2} x^{k+1}) t^k + \ldots\ldots =$$
$$C_0 + (C_1 - C_0 x) t + (C_2 - C_1 x) t^2 + \ldots\ldots (C_k - C_{k-1} x) t^k + \ldots\ldots$$
$$- x + \frac{x^2}{1-x} t - \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^{k+1} \frac{x^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^k)} t^k \ldots\ldots\ldots$$

zoodat $C_0 x = C_0 - x$ dus $C_0 = \frac{x}{1-x}$.

$$(C_1 - 2C_0) x^2 = C_1 - C_0 x + \frac{x^2}{1-x^2} \text{ of } C_1 = -\frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$(C_2 - 2C_1 + C_0) x^3 = C_2 - C_1 x - \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} \text{ of}$$

$$C_2 = \frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

Dit wekt het vermoeden dat:

$$C_k = (-1)^k \frac{(k+1) x^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots\ldots(1-x^{k+1})}.$$

Om dit te onderzoeken, merken we op dat de coëfficiënten C voldoen aan:

$$C_k x^{k+1} - 2C_{k-1} x^{k+1} + C_{k-2} x^{k+1} = C_k - C_{k-1} x +$$
$$+ (-1)^{k+1} \frac{x^{\frac{1}{2}k(k+1)+1}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}$$

of aan: $C_k(1-x^{k+1})+C_{k-1}(2x^{k+1}-x)-C_{k-2}x^{k+1}+$

$$+(-1)^{k+1}\frac{x^{1/2}k(k+1)+1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}=0.$$

Uit deze betrekking blijkt nu gemakkelijk, dat wanneer C_{k-2} en C_{k-1} den veronderstelden vorm hebben C_k hem ook heeft en omdat C_1 en C_2 van dien vorm zijn, zijn het dus alle coëfficiënten C. Men vindt:

$$\left(\frac{x}{1-xt}+\frac{x^2}{1-x^2t}+\ldots.\right)(1-xt)\,(1-x^2t)\ldots..=$$

$$\frac{x}{1-x}-\frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)}t+\frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}t^2-$$

$$-\frac{4x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}t^4+\ldots.$$

en $t=1$ stellend en door het product van Euler deelend:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots..=$$

$$=\frac{\frac{x}{1-x}-\frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}-\frac{4x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+..}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots....}$$

de transformatie van Eisenstein.

§ 9. Wij zullen nu formules afleiden, die het verband tusschen Lambertsche reeksen met verschillend argument aangeven. Zooals bekend is, is $L(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\emptyset(k)\,x^k$.

Substitueert men in deze gelijkheid achtereenvolgens $1\,x$, $\zeta' x$, $\zeta^2 x,\ldots..\zeta^{p-1}x$, waarbij 1, ζ', $\zeta^2\ldots.\zeta^{p-1}$ de wortels van $x^p-1=0$ zijn, dan vindt men na samentelling:

(5) $\quad L(x)+L(\zeta' x)+L(\zeta^2 x)+\ldots L(\zeta^{p-1}x)=$

$=p\sum_{h=1}^{\infty}\emptyset(hp)\,x^{hp}$; want $\sum x^n$, uitgestrekt over de wortels van $x^p-1=0$ is 0 of p naarmate n niet of wel een p-voud

is. Men kan nu altijd $\sum_{h=1}^{\infty} \theta(hp)\, x^{hp}$ in de som van een eindig aantal reeksen van L. uitdrukken, waarvan de argumenten machten van x zijn. We veronderstellen daartoe eerst dat $p = l^{\lambda}\, m^{\mu}$ waarbij l en m priemgetallen zijn. De getallen h verdeelen we dan in vier groepen. 1°. de getallen a. die noch door l noch door m te deelen zijn, 2°. de getallen van den vorm bl, b onderling ondeelbaar met m, 3°. de getallen van den vorm c m, c. o. o. met l, 4°. de getallen van den vorm d l m, waarbij d van 1 tot ∞ loopt. Nu heeft men:

$$(6)\qquad \sum_{h=1}^{\infty} \theta(h\,p)\, x^{hp} = \sum_{a} \theta(a\,p)\, x^{ap} + \sum_{b} \theta(b l p)\, x^{b l p} + \sum_{c} \theta(cmp)\, x^{cmp} + \sum_{d=1}^{\infty} \theta(d l mp)\, x^{d l mp}.$$

Ieder getal a is van den vorm $A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots\ldots$, waarbij A. B. C.... van elkaar en van m en l verschillende priemgetallen aangeven, dus $\theta(ap) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots\ldots (\mu+1)(\lambda+1)\ldots. = (\mu+1)(\lambda+1)\theta(a)$. Ieder getal b is van den vorm $A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots. l^{\rho} \ldots.$, waarbij ρ ook nul kan zijn en A, B, C.... l van elkaar en van m verschillende priemgetallen zijn. Dus, in aanmerking nemend, dat $\lambda+\rho+2 = (\lambda+1)(\rho+2) - \lambda(\rho+1)$, vindt men $\theta(bl p) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.(\lambda+\rho+2)(\mu+1)\ldots. = (\lambda+1)(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.(\rho+2)\ldots\ldots - \lambda(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots\ldots(\rho+1)\ldots\ldots = (\lambda+1)(\mu+1)\theta(bl) - \lambda(\mu+1)\theta(b)$.

Eveneens $\theta(cmp) = (\lambda+1)(\mu+1)\theta(cm) - \mu(\lambda+1)\theta(c)$.

Voor ieder getal d kan men zetten $A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots. l^{\rho} m^{\sigma} \ldots$ waarbij A. B. C.... l.m.... weer onderling verschillende priemgetallen zijn. Neemt men weer in aanmerking, dat men voor $\mu+\sigma+2$ een dergelijken vorm als voor $\lambda+\rho+2$ kan zetten, dan vindt men $\theta(dlmp) = (\lambda+1)(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\rho+2)(\sigma+2)\ldots - (\lambda+1)\mu(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\rho+2)(\sigma+1)\ldots - \lambda(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\rho+1)(\sigma+2)\ldots + \lambda\mu(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\rho+1)(\sigma+1)\ldots = (\lambda+1)(\mu+1)\theta(dlm) - (\lambda+1)\mu\theta(dl) - \lambda(\mu+1)\theta(dm) + \lambda\mu\theta(d)$

Substitueert men dit in (6) dan vindt men:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \theta(hp)\, x^{hp} = (\lambda+1)(\mu+1)\Big[\sum_{a} \theta(a)\, x^{ap} + \sum_{b} \theta(bl)\, x^{blp} +$$

$$+ \sum_{c} \theta(cm)\, x^{cmp} + \sum_{d=1}^{\infty} \theta(dlm)\, x^{dlmp}\Big] -$$

$$- \lambda(\mu+1)\Big[\sum_{b} \theta(b)\, x^{blp} + \sum_{d=1}^{\infty} \theta(dm)\, x^{dlmp}\Big] -$$

$$- (\lambda+1)\,\mu\Big[\sum_{c} \theta(c)\, x^{cmp} + \theta(dl)\, x^{dlmp}\Big] + \lambda\,\mu \sum_{d=1}^{\infty} \theta(d)\, x^{dlmp}.$$

Tusschen de eerste haken staat niets anders dan $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{kp}$, want de eerste term bevat alle termen der som, die behooren bij waarden van k, die met l en met m onderling ondeelbaar zijn, de tweede term alles wat behoort bij waarden van k die een deeler l maar geen deeler m hebben, de derde term zorgt voor de waarden van k, die wel een deeler m, maar geen deeler l hebben, terwijl de laatste term die waarden van k bevat, die door l en door m deelbaar zijn. Evenzoo staat tusschen de tweede haken $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{k.lp}$ en tusschen de derde $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{k.mp}$, waardoor men vindt: $\sum_{h=1}^{\infty} \theta(hp)\, x^{hp} =$

$$= (\lambda+1)(\mu+1) \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{kp} - \lambda(\mu+1) \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{k.lp}$$

$$- (\lambda+1)\,\mu \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{k.mp} + \lambda\,\mu \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^{k.lmp}$$ of met (5):

$$L(x) + L(\zeta' x) + L(\zeta^2 x) + \ldots\ldots L(\zeta^{p-1} x) =$$

$$7) \quad (\lambda+1)(\mu+1)\, p\, L(x^p) - \lambda(\mu+1)\, p\, L(x^{pl}) -$$

$$- (\lambda+1)\,\mu\, p\, L(x^{pm}) + \lambda\,\mu\, p\, L(x^{lmp})$$

Door analoge redeneeringen kan men het geval behandelen dat p een product van machten van meer priemfactoren is; de wet volgens welke het resultaat gevormd wordt is uit (7) voldoende te zien. Is p b.v. gelijk aan $l^{\lambda}\,\mu^{m}\,\nu^{n}$ dan vindt men:

(8) $L(x) + L(\zeta x) + L(\zeta^2 x) + \ldots . L(\zeta^{p-1} x) =$
$= (\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)\,p\,L(x^p) - \lambda(\mu+1)(\nu+1)\,pL(x^{p^l}) -$
$- (\lambda+1)\mu(\nu+1)\,p\,L(x^{pm}) - (\lambda+1)(\mu+1)\nu\,p\,L(x^{pn}) +$
$+ \lambda\mu(\nu+1)\,p\,L(x^{p^l m}) + (\lambda+1)\mu\nu\,p\,L(x^{pmn}) +$
$+ \lambda(\mu+1)\nu\,p\,L(x^{pn^l}) - \lambda\mu\nu\,p\,L(x^{p^l nm})$.

Bijzondere gevallen zijn:

$p = 2 \qquad L(x) + L(-x) = 4L(x^2) - 2L(x^4)$

eene formule, waarmee de waarde van de reeks van L. voor negatieve argumenten uit die voor positieve berekend kan worden.

$p = 3.\ L(x) + L(\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})x) + L(\tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})x) =$
$= 6L(x^3) - 3L(x^9)$.

$p = 4.\ L(x) + L(ix) + L(-x) + L(-ix) = 12L(x^4) -$
$- 8L(x^8)$ enz.

§ 10. Noemen we $L(x) + L(\zeta' x) + L(\zeta^2 x) \ldots\ldots\ldots +$
$+ L(\zeta^{p-1} x) = \psi(p.x)$ dan kunnen wij met (8) aantoonen, dat wanneer r een niet op p deelbaar priemgetal is, dat dan

(9) $\psi(p\,r^\rho.x) = r^\rho[(\rho+1)\psi(p.x^{r^\rho}) - \rho\psi(p.x^{r^{\rho+1}})]$.

Voorloopig nemen we weer aan dat p van den vorm $l^\lambda m^\mu$ is, dan is: $\psi(p\,r^\rho.x) = (\lambda+1)(\mu+1)(\rho+1)\,p\,r^\rho\,L(x^{l^\lambda m^\mu r^\rho})$
$- \lambda(\mu+1)(\rho+1)\,p\,r^\rho\,L(x^{l^{\lambda+1} m^\mu r^\rho}) -$
$- \mu(\lambda+1)(\rho+1)\,p\,r^\rho\,L(x^{l^\lambda m^{\mu+1} r^\rho}) - \rho(\lambda+1)(\mu+1)\,p\,r^\rho\,L(x^{l^\lambda m^\mu r^{\rho+1}})$
$+ \mu\rho(\lambda+1)\,p\,r^\rho\,L(x^{l^\lambda m^{\mu+1} r^{\rho+1}}) +$
$+ \mu\lambda(\rho+1)\,p\,r^\rho\,L(x^{l^{\lambda+1} m^{\mu+1} r^\rho}) + \lambda\rho(\mu+1)L(x^{l^{\lambda+1} m^\mu r^{\rho+1}}) -$
$- \lambda\mu\rho\,p\,r^\rho\,L(x^{l^{\lambda+1} m^{\mu+1} r^{\rho+1}}) = r^\rho(\rho+1)[(\mu+1)(\lambda+1)\,p\,L((x^{r^\rho})^{l^\lambda m^\mu}) -$
$- \lambda(\mu+1)\,p\,L((xr^\rho)^{l^{\lambda+1} m^\mu}) - \mu(\lambda+1)\,p\,L((x^{r^\rho})^{l^\lambda m^{\mu+1}}) +$
$+ \mu\lambda\,p\,L((x^{r^\rho})^{l^{\lambda+1} m^{\mu+1}})] - r^\rho\rho[(\mu+1)(\lambda+1)\,p\,L((x^{r^{\rho+1}})^{l^\lambda m^\mu})$
$- \lambda(\mu+1)\,p\,L((x^{r^{\rho+1}})^{l^{\lambda+1} m^\mu}) -$
$- \mu(\lambda+1)\,pL((x^{r^{\rho+1}})^{l^\lambda m^{\mu+1}}) + \mu\lambda\,p\,L((x^{r^{\rho+1}})^{l^{\lambda+1} m^{\mu+1}})]$
$= r^\rho[(\rho+1)\psi(p.x^{r^\rho}) - \rho\psi(p.x^{r^{\rho+1}})]$, waarmede de betrek-

king (9) aangetoond is, dat zij ook geldt, wanneer p een product van machten van meer priemgetallen is, wordt begrijpelijk als men bedenkt, dat iedere term met een factor $(\rho + 1)$ in den exponent heeft $r\rho$ en iedere term met een factor ρ in den exponent $r\rho+1$ heeft, terwijl de vorming der andere factoren en exponenten onafhankelijk van r en ρ is.

§ 11. Wanneer $1\, \eta\, \eta^2\, \eta^3 \ldots\ldots \eta^{2p-1}$ de wortels zijn van $x^{2p} - 1 = 0$, dan is:

$$L(x) + L(\eta x) + L(\eta^2 x) + L(\eta^3 x) + \ldots L(\eta^{2p-1} x) = \psi(2p\, x) \text{ of}$$

$$L(\eta x) + L(\eta^3 x) + \ldots\ldots L(\eta^{2p-1} x) = \psi(2p.x) - L(x) - L(\eta^2 x) \ldots - L(\eta^{2p-2} x).$$

Nu zijn $\eta, \eta^3, \eta^5 \ldots\ldots \eta^{2p-1}$ de wortels van $x^p + 1 = 0$, terwijl $1, \eta^2, \eta^4 \ldots\ldots \eta^{2p-2}$ de wortels zijn van $x^p - 1 = 0$. Hierdoor vindt men voor de wortels van $x^p + 1 = 0$:

$$\sum_w L(w\, x) = \psi(2p.\, x) - \psi(p.\, x).$$

§ 12. Wij zullen nu nog eenige transformaties van Lambertsche reeksen, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k}$, behandelen. Deze convergeeren absoluut binnen het convergentiegebied der reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$, mits dit den eenheidscirkel niet bevat. (Hfdst. II, § 1). Voor waarden van x binnen dit gebied mag men dus de termen in machtreeksen ontwikkelen en deze op willekeurige wijs samenvoegen. Schrijft men nu deze reeksontwikkelingen onder elkaar op en sommeert dan de kolommen, dan vindt men:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{3k} + \ldots\ldots\ldots$$

Daar de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k}$ absoluut convergeert zullen alle reeksen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{mk}$ convergeeren. Is nu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k = g(x)$ dan vindt men de transformatie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} g(x^m).$$

Door nu voor b_k verschillende waarden te nemen volgen hieruit bijzondere transformaties:

1°. $b_k = (-1)^{k-1}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} (x^m - x^{2m} + x^{3m} - x^{4m} + \ldots) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{1+x^m}.$$

of $\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} - \ldots = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \ldots$

Men had dit ook kunnen vinden door uit de reeks van § 4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1-x^{2k}}$ af te leiden en daarna beide kanten van de bedoelde reeks met $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1-x^{2k}}$ te verminderen.

2°. $b_k = k$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} (x^m + 2x^{2m} + 3x^{3m} + \ldots) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1-x^m)^2} \text{ dus:}$$

$$\frac{x}{1-x} + 2\frac{x^2}{1-x^2} + 3\frac{x^3}{1-x^3} + \ldots =$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \ldots$$

3°. $b_k = (-1)^{k-1} \cdot k$. Men vindt nu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1+x^m)^2} \text{ of:}$$

$$\frac{x}{1-x} - 2\frac{x^2}{1-x^2} + 3\frac{x^3}{1-x^3} - \ldots =$$

$$\frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \ldots$$

Telt men deze reeks bij de vorige op dan vindt men: $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1-x^{2m})^2}$. Aftrekking geeft niets nieuws, maar reeks n°. 2

4°. $b_k = \frac{1}{k}$. Nu is $\sum_{m=1}^{\infty} (x^m + {}^1/_2 x^{2m} + {}^1/_3 x^{3m} + \ldots) =$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} - \log(1 - x^m) \text{ dus:}$$

$$\frac{x}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3} + \ldots. =$$

$$= \log\frac{1}{1-x} + \log\frac{1}{1-x^2} + \log\frac{1}{1-x^3} + \ldots.$$

Op deze manier vindt men, dat het oneindig product van EULER met eene Lambertsche reeks in verband staat:

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1 - x^m) = e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{x^k}{1-x^k}}$$

5°. $b_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$. Nu is $\sum_{m=1}^{\infty}(x^m - {}^1/_2 x^{2m} + {}^1/_3 x^{3m} - \ldots) =$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\log(1 + x^m).$$

$$\text{dus } \frac{x}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3}\ldots\ldots. =$$

$$= \log(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots\ldots$$

Telt men deze en de vorige reeks samen dan vindt men:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}} = {}^1/_2 \log\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+x^m}{1-x^m}.$$

Aftrekking geeft niets nieuws

6°. $b_k = a^k \quad |ax| < 1.$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{m=1}^{\infty}(ax^m + a^2x^{2m} + a^3x^{3m} + \ldots) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{ax^m}{1-ax^m}, \text{ dus:}$$

$$\frac{ax}{1-x} + \frac{a^2x^2}{1-x^2} + \frac{a^3x^3}{1-x^3} + \ldots. =$$

$$\frac{ax}{1-ax} + \frac{ax^2}{1-ax^2} + \frac{ax^3}{1-ax^3} + \ldots.$$

de reeks, waaruit in Hfdst. III § 9 (24) is afgeleid.

§ 13. Door iederen term der Lambertsche reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k\frac{x^k}{1-x^k}$ te ontwikkelen en deze reeksen te sommeeren ontstaat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. De coëfficiënten a hangen natuurlijk met

de coëfficiënten b samen. Nu zal x^k slechts in die ontwikkelingen voorkomen. die met eene macht van x beginnen, waarvan de exponent op k deelbaar is. Alle termen van zoo'n ontwikkeling hebben als coëfficiënt b met een index gelijk aan die exponent, waaruit volgt:

(10) $$a_k = \sum_{d \mid k} b_d$$

Omgekeerd kunnen we ons voorstellen, dat de getallen a gegeven zijn en dat er gevraagd wordt de bijbehoorende getallen b te bepalen, dus de betrekking (10) om te keeren. Dit blijkt altijd en slechts op eene manier mogelijk.

(11) Het resultaat is $b_k = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) a_d$ waarbij $\mu(m)$ de functie van Möbius is, gedefinieerd [1]) door: $\mu(1) = 1$, $\mu(m) = 0$ voor een niet kwadraatvrij getal m, $\mu(m) = (-1)^p$ voor een kwadraatvrij getal m, dat uit p priemfactoren bestaat. Hieruit volgt dat niet alleen iedere Lambertsche reeks binnen haar convergentiegebied (mits $\rho \leqq 1$) altijd in eene machtreeks ontwikkeld kan worden, maar dat ook iedere machtreeks door eene Lambertsche reeks voor te stellen is, waarvan de coëfficiënten door (11) bepaald zijn. Als voorbeeld ontwikkelen we x in eene Lambertsche reeks. Dus $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, waarbij $a_1 = 1$ en alle andere a's $= 0$ zijn

$$b_k = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) a_d = \mu(k) \text{ dus } x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \frac{x^k}{1 - x^k} \text{ of:}$$

(12) $$x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^7}{1-x^7} + \frac{x^{10}}{1-x^{10}} \ldots\ldots$$

Eveneens kan men $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$ in eene Lambertsche reeks ontwikkelen. Hier is $a_k = k$ dus $b_k = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) d$. Men toont gemakkelijk aan dat dit gelijk is aan $\Phi(k)$, n.l. het aantal getallen $< k$, die met k onderling ondeelbaar zijn. Men stelt b.v. dat k de ondeelbare factoren

[1]) E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen II, p. 567.

a, b, c heeft, dan is $\phi(k) = \frac{a-1}{a}\,\frac{b-1}{b}\,\frac{c-1}{c} \times k$.
Ontwikkelt men dit product en onderscheidt dan nog het geval van enkele en dubbele priemfactoren dan komt men direct tot de gewenschte betrekking en vindt

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(k) \frac{x^k}{1-x^k} \text{ of:}$$

$$(13)\quad \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + 2\frac{x^3}{1-x^3} + 2\frac{x^4}{1-x^4} + 4\frac{x^5}{1-x^5} + \ldots\ldots$$

Deze reeks is een typisch voorbeeld van eene Lambertsche reeks met zelfs tot in het oneindige aangroeiende coefficienten, die toch over den convergentiecirkel kan worden voortgezet.

§ 14. We beschouwen nu nog de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1+x^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (x^k)^{2m+1} \right) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} b_k (x^{2m+1})^k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m g(x^{2m+1})$$

wanneer we $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k = g(x)$ noemen.

Stelt men in deze transformatie $b_k = 1$, dan vindt men:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (x^{2m+1} + x^{4m+2} + x^{6m+3} + \ldots) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1-x^{2m+1}}.$$

De eerste reeks is het historisch eerste voorbeeld, dat Weierstrass gaf van eene functie, die buiten een bepaald gebied niet voortgezet kan worden, de reeks achter het gelijkteeken is eene Lambertsche reeks, waarbij $b_{2k+1} = (-1)^k$ en $b_{2k} = 0$. Op deze manier blijkt dus dat het niet kunnen voortzetten der reeks van Weierstrass terug te brengen is tot het niet kunnen voortzetten van eene Lambertsche reeks.

Transformaties in asymptotische ontwikkelingen.

§ 15. De reeksontwikkeling van Schlömilch (Hfdst. III (34)), is door Wigert [1]) uitgebreid tot complexe waarden van x

[1]) Sur la série de Lambert et son application à la théorie des nombres. Acta mathematica t. 41. p. 197—218. 1918.

in de omgeving van $+1$, waarvoor $|x|<1$. Het resultaat van WIGERT is later eenvoudiger door LANDAU [1]) afgeleid. LANDAU's bewijs berust op de formule van MELLIN: [2])

$2\pi i e^{-y} = \int_c \Gamma(s) y^{-s} ds$, waarbij de integratieweg rechtlijnig van $c - \infty i$ naar $c + \infty i$ gaat, $c > 0$ en $R(y) > 0$ is, terwijl aan y^{-s} de beteekenis gehecht moet worden van $e^{-s \log y}$, waarin $|I \log y| < \frac{\pi}{2}$ is.

Stelt men nu $x = e^{-z}$ in $L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) x^k$ mits $|x|<1$, dan vindt men $\Lambda(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{kz}-1} =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) e^{-kz}$ waarbij $R(z) > 0$ is.

Hieruit volgt $2\pi i \Lambda(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) e^{-kz} =$

$$= \int_c \Gamma(s) \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) k^{-s} z^{-s} ds = \int_c \Gamma(s) z^{-s} \zeta^2(s) ds, \quad (14)$$

want bij ontwikkeling van $\zeta^2(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots\right)^2$ volgt direkt dat $\zeta^2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) k^{-s}$.

We denken ons nu een rechthoek, begrensd door twee lijnen in $s = c > 1$ en in $s = -2p$ (p geheel en >0) evenwijdig aan de imaginaire as en door twee lijnen op ∞ afstand aan weerskanten evenwijdig aan de reeele as. Langs de zijden van dezen rechthoek integreeren we $\Gamma(s) z^{-s} \zeta^2(s)$. De waarde van de integraal is dan $2\pi i$ keer de som van de residuen van de polen binnen den rechthoek.

De integralen langs lijnen evenwijdig aan de reeele as zullen nul opleveren, want als $s = \sigma + it$, dan is voor aangroeienden $|t|$

$$z^{-s} = r^{-s} e^{-\varphi i(\sigma + it)} = O(e^{\varphi |t|}),$$

[1]) Uber die Wigertsche asymptotische Functionalgleichung für die Lambertsche Reihe. Archiv der Mathematik und Physik Bd 27. p. 144-146. 1898.

[2]) Acta Societatis Fennicae. Bd 21. N°. 1. p. 76, 1896.

$\Gamma(s) = O(e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}|t|^n)$, n eindig en constant, terwijl ook $\zeta(s) = O(|t|^m)$, waarbij m eindig en constant is. Dus

$$z^{-s}\Gamma(s)\zeta^2(s) = O(e^{-(\frac{\pi}{2}-\varphi)|t|}|t|^{n+2m}) = o(1).$$

Voor de beide andere integralen dus voor $\int_c - \int_{-2p}$ vindt men dus $2\pi i$ keer de som van de residuen van de bedoelde polen. Nu heeft de ζ functie slechts éene pool $s = 1$. De polen der Γ functie liggen bij $0, -1, -2 \ldots -2p$, maar $-2, -4 \ldots -2p$ zijn nulpunten der ζ functie en daar $\zeta(1-s) = 2.(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$ volgt hieruit voor $s = -2k$ dat $\Gamma(-2k)\zeta(-2k) = (-1)^k\frac{\zeta(1+2k)}{2.(2\pi)^{2k}}$ dus eindig is, waaruit: $z^{-s}\Gamma(s)\zeta^2(s) = 0$ voor $s = -2k$. Wij hebben dus slechts de residuen der polen: $s = 1, 0, -1, -3 \ldots -(2p-1)$ te berekenen. Voor het residu in $s = 1$ heeft men:

$$\Gamma(s) = 1 - C(s-1) + \ldots\ldots; \quad z^{-s} = z^{-1}z^{-(s-1)} =$$
$$= z^{-1}e^{-(s-1)\log z} = z^{-1}\{1 - (s-1)\log z + \ldots\} =$$
$$z^{-1} - z^{-1}(s-1)\log z + \ldots\ldots,$$
$$\zeta^2(s) = \left(\frac{1}{s-1} + C + \ldots\ldots\right)^2 = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + \ldots\ldots$$

Voor $s = 1 + \delta$ volgt hieruit $z^{-s}\Gamma(s)\zeta^2(s) =$

$$= (1 - Cd + \ldots.)z^{-1}(1 - \delta\log 2 + \ldots)\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{2C}{\delta} + \ldots.\right)$$
$$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{C - \log z}{\delta} + \ldots.\right).$$ Het residu van deze pool is dus $\frac{C - \log z}{z}$.

Voor het residu in $s = 0$ vindt men $1/4$, want $\Gamma(\delta) = \frac{1}{\delta} + \ldots.$ en $\zeta(0) = -1/2$, dus $z^{-s}\Gamma(s)\zeta^2(s) = \frac{1}{4\delta} + \ldots\ldots$

Het residu in een der polen $-(2k-1)$ wordt berekend, door op te merken dat:

$$\Gamma(-(2k-1)+\delta) = (-1)^{2k-1}\frac{1}{(2k-1)!}\frac{1}{\delta} + \ldots\ldots \text{ en}$$

dus is dit residu:

$$-\frac{1}{(2k-1)!} z^{2k-1} \zeta^2\{-(2k-1)\} =$$

$$\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}\left\{\frac{2}{(2\pi)^{2k}}(-1)^k(2k-1)!\,\frac{B_{2k}}{2}\,\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}(-1)^{k-1}\right\}^2 =$$

$$-\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}\,\frac{B^2_{2k}}{(2k)^2} = -\frac{B^2_{2k}}{2k\,(2k)!}\,z^{2k-1}.$$

In verband met (14) vindt men nu:

$$(15)\qquad \Lambda(z) - \left(\frac{C-\log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{p}\frac{B^2_{2k}}{2k\,(2k)!}\,z^{2k-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-2p}\Gamma(s)\,z^{-s}\,\zeta^2(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{2p+1}\Gamma(1-s)\,z^{-(1-s)}\,\zeta^2(1-s)\,ds.$$

Maar nu is: $\Gamma(1-s)\,z^{-(1-s)}\,\zeta^2(1-s) =$

$$\Gamma(1-s)\,z^{s-1}\left(\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s)\right)^2 =$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,z^{s-1}\frac{4}{(4\pi^2)^s}\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta^2(s) =$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi s}\,z^{s-1}\frac{4}{(4\pi^2)^s}\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta^2(s) = \frac{2\pi}{z}\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\zeta^2(s)\cot g\frac{\pi s}{2}.$$

Men vindt zoo: $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{2p+1}\Gamma(1-s)\,z^{-(1-s)}\,\zeta^2(1-s)\,ds =$

$$-\frac{i}{z}\int_{2p+1}\Gamma(s)\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s}\zeta^2(s)\cot g\frac{\pi s}{2}\,ds =$$

$$-\frac{i}{z}\int_{2p+1}\Gamma(s)\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s}\zeta^2(s)\,i\,ds - \frac{i}{z}\int_{2p+1}\Gamma(s)\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s}\zeta^2(s)\left(\cot g\frac{\pi s}{2} - i\right)ds =$$

$$(16)\quad \text{volgens (14)}\ \frac{2\pi i}{z}\,\Lambda\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) - \frac{i}{z}\int_{2p+1}\Gamma(s)\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s}\zeta^2(s)\left(\cot g\frac{\pi s}{z} - i\right)ds.$$

Beperken we nu de waarden van ϕ tot $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, dan kunnen we bewijzen dat uniform in ϕ voor $r \to 0$:

$$\int_{2p+1}\Gamma(s)\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s}\zeta^2(s)\left(\cot g\frac{\pi s}{2} - i\right)ds = O(r^{2p+1}).$$

Is σ namelijk $= 2p + 1$ dan is $\cot g \frac{\pi s}{2} - i = \frac{2i}{e^{\pi s i} - i} =$

$\frac{2i}{e^{\pi i(2p+1+ti)} - 1} = -\frac{2i}{1 + e^{-\pi t}}$ dus $\left| \cot g \frac{\pi s}{2} - i \right| \leqq 2$ voor $t \geqq 0$

en $\left| \cot g \frac{\pi s}{2} - i \right| \leqq 2 e^{-\pi |t|}$ voor $t \leqq 0$.

Verder is $\left| \left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s} \right| < |z^s| = |(r e^{i\varphi})^{\sigma + it}| = r^{2p+1} e^{-\varphi t}$

dus $\left| \left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s} \right| \leqq r^{2p+1}$ voor $t > 0$ en $\leqq r^{2p+1} e^{\frac{\pi}{2}|t|}$ voor $t \leqq 0$.

Ook is $\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{2p+1/2}\right)$ en $\zeta^2(s) = O(1)$.

Hieruit volgt dus dat de modulus van den integrand kleiner is dan $r^{2p+1} P(t)$, waarbij $P(t)$ continu en onafhankelijk van z is. Wanneer $t \to \infty$ is $P(t) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{2p+1/2}\right)$ en wanneer $t \to -\infty$ is $P(t) = O(e^{-\pi|t|} |t|^{2p+1/2})$ zoodat $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt$ convergeert. Zoo vindt men dat $\left| \int_{2p+1} \Gamma(s) \left(\frac{4\pi^2}{z}\right)^{-s} \zeta^2(s) \left(\cot g \frac{\pi s}{2} - i\right) ds \right|$ $\leqq r^{2p+1} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt$. dus dat de integraal $= O(r^{2p+1})$.

Dit geeft in verband met (15) en (16):

(17). $\Lambda(z) = \frac{C - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k(2k)!} z^{2k-1} +$

$+ \frac{2\pi i}{z} \Lambda\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) + O(r^{2p})$ de asymptotische functionaal vergelijking van Wigert en Landau.

§ 16. Naast deze ontwikkeling van Landau voor complexe waarden in de omgeving van $+1$ ($|x| < 1$) heeft Kluyver [1]) eene asymptotische ontwikkeling gegeven voor het geval dat de veranderlijke langs eene straal van den eenheidscirkel tot een rationaal randpunt nadert.

Zijn n en n' weer geheele onderling ondeelbare getallen, zoodat $e^{2\pi i \frac{n'}{n}}$ een rationaal randpunt is, noemt men dan $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \theta$,

[1]) Over de reeks van Lambert. Verslagen Koninkl. Acad. van Wetensch. te Amsterdam. Deel XXVIII, p. 262—269. 1919.

dan zal $x\,\vartheta^{n'}$ dit randpunt naderen, wanneer x door reëele waarden van 0 tot 1 loopt. Voor de Lambertsche reeks $N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{z^k}{1-z^k}$ hebben we dan:

(18). $$N(x\,\vartheta^{n'}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn}}{1-x^{kn}} + \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn+h} \frac{x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}$$

We ontwikkelen nu achtereenvolgens in reeksen $\frac{x^{kn}}{1-x^{kn}}$, $\frac{x^{kn}\,\vartheta^{n'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{n'}}, \ldots \frac{x^{kn}\,\vartheta^{(n-1)n'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{(n-1)n'}}$ en schrijven de uitkomsten onder elkaar op. Sommeeren we nu de kolommen, dan zullen alleen de n^e, de $2\,n^e$ enz. kolommen eene andere uitkomst dan nul opleveren. Zoo vindt men:

$$\frac{x^{kn}}{1-x^{kn}} + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} = n\,x^{kn^2} + n\,x^{2kn^2} + n\,x^{3kn^2} + \ldots\ldots = n\,\frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}}$$

dus $$\sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn}}{1-x^{kn}} = n \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{n-1} b_{kn} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}.$$

Substitueert men dit in (18) dan komt er:

$$N(x\,\vartheta^{n'}) = n \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{n-1} b_{kn} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn+h} \frac{x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}} \text{ of:}$$

$$N(x\,\vartheta^{n'}) - n \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} =$$

$$\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_{kn+h} \frac{x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}} - b_{kn} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} \right) + \sum_{h=1}^{n-1} b_0 \frac{\vartheta^{hn'}}{1-\vartheta^{hn'}}.$$

Doorloopt h nu alle waarden van 1 tot $(n-1)$ dan liggen de bijbehoorende punten $\vartheta^{hn'}$ symmetrisch ten opzichte van de reeele as, tenzij n even is, in welk geval het punt -1 op zich zelf voorkomt. Voor twee symmetrische punten vindt men: $\frac{\vartheta^{hn'}}{1-\vartheta^{hn'}} + \frac{\vartheta^{-hn'}}{1-\vartheta^{-hn'}} = -1$. Voor even n is dus $\sum_{h=1}^{n-1} \frac{\vartheta^{hn'}}{1-\vartheta^{hn'}} = -\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2} \times -1 = -\frac{1}{2}(n-1)$, voor oneven n is de som $\frac{n-1}{2} \times -1 = -\frac{1}{2}(n-1)$.

Men vindt zoo: $N(x\,\vartheta^{n'}) - n \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} +$

(19) $+ {}^1/_2\, b_0 (n-1) = \sum_{h=1}^{n-1} U_h(x\,.\,n')$. waarbij

$$U_h(x\,.\,n') = \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_{kn+h} \frac{x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}} - b_{kn} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ b_{kn+h} \left(\frac{x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}} - \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} \right) + \right.$$

$$\left. + (b_{kn+h} - b_{kn}) \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} \right\} \text{ dus:}$$

(20) $$U_h(x\,.\,n') = -(1-x^h) \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn+h} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{(1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'})\,(1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'})} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (b_{kn+h} - b_{kn}) \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}$$

Voor de reeks van L. is $b_k = 1$ en $b_0 = 0$. Substitueert men echter $b_k = 1$ en $b_0 = 1$ in (19), dan schrijft men links te veel op ${}^1/_2 (n-1)$ en rechts $- \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\vartheta^{hn'}}{1-\vartheta^{hn'}}$, deze vormen zijn gelijk, de gelijkheid blijft intact. Men heeft:

$$L(x\,\vartheta^{n'}) - n\,L(x^{n^2}) + {}^1/_2 (n-1) = \sum_{h=1}^{n-1} T_h(x\,.\,n').$$

(21) waarbij $$T_h(x\,n') = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'}} - \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'}} \right) =$$

$$= -(1-x^h) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{(1-x^{kn+h}\,\vartheta^{hn'})(1-x^{kn}\,\vartheta^{hn'})}$$

§ 18. Stelt men in (21) $x = e^{-y}$, $\frac{2\pi n'}{n} = \beta$ dus $\vartheta^{n'} = e^{i\beta}$ en noemt men:

$$\phi(u) = \frac{1}{e^{u-hi\beta}-1} = -{}^1/_2 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u - hi\beta + 2\pi il}$$

dan vindt men:

$$T_h(x.\,n') = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x^{-kn-h}\vartheta^{-hn'}-1} - \frac{1}{x^{-kn}\vartheta^{-hn'}-1} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^{(kn+h)y-hi\beta}-1} - \frac{1}{e^{kny-hi\beta}-1} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \{ \phi(kny+hy) - \phi(kny) \}$$

Noemt men nu $g_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi lt}{t}$, dan is

$g_1(t) = t - 1/2 - [t]$, dus als we geheele waarden van t buitensluiten is $g'_1(t)$ constant, daarom is:

$$\int_0^{\infty} \left\{ g'_1\left(t - \frac{h}{n}\right) - g'_1(t) \right\} \phi(tny)\, dt = 0$$

wanneer we die waarden buiten het integratiegebied sluiten, waarvoor $t - \frac{h}{n}$ of t geheel zijn. De integraal loopt dus van ε tot $\frac{h}{n} - \varepsilon$, van $\frac{h}{n} + \varepsilon$ tot $1 - \varepsilon$, van $1 + \varepsilon$ tot $1 + \frac{h}{n} - \varepsilon$ enz.

Deze integraal zullen we 2m keer partieel integreeren. Het geeft gemak eene serie functies g(t) in te voeren, zoo gekozen, dat $g_l(t) = \frac{d\, g_{l+1}(t)}{dt}$ dus $g_2(t) = +\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi lt}{l^2}$ enz.

We vinden:

$$(22) \quad \int \left\{ g'_1\left(t - \frac{h}{n}\right) - g'_1(t) \right\} \phi(tny)\, dt = \left\{ g_1\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_1(t) \right\} \phi(tny) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2m-1} (-1)^l n^l y^l \left\{ g_{l+1}\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_{l+1}(t) \right\} \phi^l(tny) +$$

$$+ n^{2m} y^{2m} \int \left\{ g_{2m}\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_{2m}(t) \right\} \phi^{2m}(tny)\, dt.$$

Hierin moeten achtereenvolgens de grenzen ε, $\frac{h}{n} - \varepsilon$, $\frac{h}{n} + \varepsilon$, $1 - \varepsilon$ enz. gesubstitueerd worden. Men vindt zoo bij substitutie in $\left\{ g_1\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_1(t) \right\} \phi(tny)$:

$$- g_1\left(-\frac{h}{n}\right)\phi(0) + g_1(0)\,\phi(0) - 2\, g_1(\varepsilon)\,\phi(hy) + 2\, g_1(1+\varepsilon)\,\phi(ny) -$$

$$- 2\, g_1(1+\varepsilon)\,\phi(ny+hy) + 2\, g_1(2+\varepsilon)\,\phi(2ny) - \text{enz.}$$ Daar nu

$g_1(\varepsilon) = g_1(1+\varepsilon) = g_2(1+\varepsilon) = \ldots\ldots = -1/2$ gaat dit over in: $-g_1\left(-\frac{h}{n}\right)\phi(0) + \sum_{k=0}^{\infty}\{\phi(kny+hy) - \phi(kny)\} +$

$$+ 1/2\,\phi(0) = \left(\frac{h}{n} - 1/2\right)\phi(0) + 1/2\,\phi(0) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{\phi(kny+hy) - \phi(kny)\} = \frac{h}{n}\phi(0) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{\phi(kny+hy) - \phi(kny)\}$$

Omdat de functies g_2 . g_3 enz. continu zijn, geven de grenzen $\frac{h}{n} - \varepsilon, \frac{h}{n} + \varepsilon$, enz. telkens dezelfde waarden en behoeven we slechts rekening te houden met de grenzen $\varepsilon\,(=0)$ en ∞. Voor $t \to \infty$ naderen $\phi(tny)$ en $\phi'(tny)$ tot nul, het tweede stuk achter het gelijkteeken in (22) geeft bij substitutie der grenzen:

$$-\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^l n^l y^l \left\{ g_{l+1}\left(-\frac{h}{n}\right) - g_{l+1}(0) \right\} \phi^l(0) +$$

$$n^{2m} y^{2m} \int \left\{ g_{2m}\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_{2m}(t) \right\} \phi^{2m}(tny)\,dt$$

waaruit men vindt:

$$(23)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\{\phi(kny+hy) - \phi(kny)\} = -\frac{h}{n}\phi(0) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^l n^l y^l \left\{ g_{l+1}\left(-\frac{h}{n}\right) - g_{l+1}(0) \right\} \phi^l(0) + R.$$

De vorm $g_{l+1}\left(-\frac{h}{n}\right) - g_{l+1}(0)$ staat in verband met de functies van Bernoulli, want substitueert men

$$B_{2n} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{2n}} \text{ en } \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi lz}{l^{2n}} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(-1)^{n+1}} g_{2n}(z) \text{ in:}$$

$$\phi(z, 2n) = B_{2n} + (-1)^{n-1} 2 \frac{(2n)!}{\pi^{2n} 2^{2n}} \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi lz}{l^{2n}}\ ^{1})$$

dan vindt men $\phi(z.\,2n) = (2n)!\,\{g_{2n}(z) - g_{2n}(0)\}$.

[1]) Schlömilch, Compendium II blz. 217.

Noemt men $f_{n-1}(z) = \frac{\phi(z.n)}{n!}$ dan is dus $f_{2n-1}(z) = |g_{2n}(z) - g_{2n}(o)|$

Evenzoo heeft men $\phi(z.\,2n+1) = (-1)^{n+1} 2 \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\pi^{2n+1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi lz}{l^{2n+1}} =$

$(2n+1)!\; g_{2n+1}(z)$, dus $f_{2n}(z) = g_{2n+1}(z)$.

Samenvattend heeft men voor $l > 0$ dat $f_l(z) = |g_{l+1}(z) - g_{l+1}(o)|$

daar $g_{2n+1}(o) = o$ $(n > o)$. Nu is voor oneven l:

$$g_{l+1}\left(-\frac{h}{n}\right) = g_{l+1}\left(\frac{h}{n}\right) \text{ en voor even } l \text{ is}$$

$$g_{l+1}\left(\frac{h}{n}\right) = -\,g_{l+1}\left(\frac{h}{n}\right) \text{ en daarom is voor } l > o$$

$$(-1)^{l+1} f_l\left(\frac{h}{n}\right) = \left\{ g_{l+1}\left(-\frac{h}{n}\right) - g_{l+1}(o) \right\}.$$

Voor $l = o$ is echter $(-1)\, f_o\left(\frac{h}{n}\right) = -\frac{h}{n}$.

Hierdoor vindt men uit (23):

$$(24)\quad \sum_{k=o}^{\infty} |\phi(kny + hy) - \phi(kny)| = -\sum_{l=o}^{2m-1} n^l y^l f_l\left(\frac{h}{n}\right)\phi^l(o) + R.$$

$$\text{Nu is } \phi(u) = \frac{1}{e^{u-hi\beta}-1} = -\,{}^1/_2 + {}^1/_2 \frac{e^{u-hi\beta}+1}{e^{u-hi\beta}-1} =$$

$$-\,{}^1/_2 + {}^1/_2\, i \operatorname{cotg}\left({}^1/_2\, i\, u + \frac{\pi h n'}{n}\right)$$

$$\text{waaruit } \phi(o) = -\,{}^1/_2 + {}^1/_2\, i \operatorname{cotg} \frac{\pi h n'}{n} \text{ en}$$

$$\phi^l(o) = ({}^1/_2\, i)^{l+1} \left(D^l \operatorname{cotg} \nu\right)_{\nu = \frac{\pi h n'}{n}}$$

Substitueert men dit in (24) dan komt er:

$$T_h(x.\,n') = \sum_{k=o}^{\infty} |\phi(kny + hy) - \phi(kny)| = \frac{h}{2n} -$$

$$-\sum_{l=o}^{2m-1} ({}^1/_2\, i)^{l+1} n^l y^l f_l\left(\frac{h}{n}\right) \left(D^l \operatorname{cotg} \nu\right)_{\nu = \frac{\pi h n'}{n}} + R.$$

Om de rest $R = -n^{2m} y^m \int_o^{\infty} \left\{ g_{2m}\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_{2m}(t) \right\} \phi^{2m}(tny)\, dt$

te begrenzen merkt men op dat $|\phi^{2m}(tny)| =$

$$(2m)! \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(tny - hi\beta + 2\pi i l)^{2m+1}} \right| < (2m)! \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t^2 n^2 y^2 + (h\beta - 2\pi l)^2|^{m+1/2}}$$

$$< (2m)! \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 n^2 y^2 + (h\beta - 2\pi l)^2} \quad \frac{1}{(h\beta - 2\pi l)^{2m-1}}$$

dus $|R| < 2 |g_{2m}(0)| (2m)! n^{2m-1} y^{2m-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|h\beta - 2\pi l|^{2m}} \int_0^{\infty} \frac{\frac{n y dt}{|h\beta - 2\pi l|}}{1 + \left(\frac{t n y}{|h\beta - 2\pi l|}\right)^2}$

of $|R| < 2m\pi |g_{2m}(0)| n^{2m-1} y^{2m-1} |\phi^{2m-1}(0)|$ de modulus van de rest is dus kleiner dan een eindig veelvoud van de modulus van den voorafgaanden term in de som, daarom is

$$T_h(x.n') = \frac{h}{2n} - \sum_{l=0}^{2m-2} (1/2\, i)^{l+1} n^l \left(\log \frac{1}{x}\right)^l f_l\left(\frac{h}{n}\right) (D^l \operatorname{cotg} \nu)_{\nu = \frac{\pi h n'}{n}} +$$

$$+ K n^{2m-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{2m-1}$$ waarin K eindig en onafhankelijk van x is.

Stelt men nu $A_l = \sum_{h=1}^{n-1} f_l\left(\frac{h}{n}\right) (D^l \operatorname{cotg} \nu)_{\nu = \frac{\pi h n'}{n}}$ dan vindt men uit (21)

$$L(x\,\vartheta^{n'}) - n\,L(x^{n^2}) = -1/4\,(n-1) - \sum_{l=0}^{2m-2} A_l \left(\frac{i}{2}\right)^{l+1} n^l \left(\log \frac{1}{x}\right)^l +$$

$$+ K_1 n^{2m-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{2m-1}$$

waarin K_1 weer eindig en onafhankelijk van x is.

Men vindt hieruit $\lim_{x \to 1} \{ L(x\,\vartheta^{n'}) - n\,L(x^{n^2}) \} = -1/4\,(n-1) -$

$$- \frac{i}{2n} \sum_{h=1}^{n-1} h \operatorname{cotg} \frac{\pi h n'}{n}$$

dus dat $L(x\,\vartheta^{n'})$ op dezelfde manier oneindig wordt als $n\,L(x^{n^2})$, dus volgens (34) Hfdst. III als $\frac{C - \log \log \frac{1}{x} - 2 \log n}{n \log \frac{1}{x}} + 1/4\, n.$

't Bestaanbare deel van $L(x\,\vartheta^{n'})$ wordt dus oneindig op eene manier onafhankelijk van n', het imaginaire deel blijft eindig, dit sluit met § 3 Hfdst. II, de reeks van L. werd daar gesplitst in Σ_1 en Σ_2. De reeks Σ_1 had slechts reeele

termen, $\lim_{\rho \to 1} (1 - \rho) \Sigma_1$ was oneindig onafhankelijk van n'. De reeks Σ_2 had complexe termen $\lim_{\rho \to 1} (1 - \rho) \Sigma_2$ was echter eindig. A posteriori weten we nu dat het deel $- \dfrac{\log \log \frac{1}{x}}{n \log \frac{1}{x}}$ behoort bij de limiet van Σ_1, terwijl $\dfrac{C - 2 \log n}{n \log \frac{1}{x}}$ ook voor een gedeelte kan behooren bij de limiet van Σ_2.

§ 19. De methode van de vorige paragraaf kan voor geschikt gekozen b_k ook uitgebreid worden tot Lambertsche reeksen. Voor $b_k = -1/k$ is

$$M(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x^k}{1 - x^k} = \log \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k) \text{ (Hfdst. IV § 12 n°. 4)}$$

Nu is $\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \log (1 - x^{kn+h} \vartheta^{hn'}) = \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \log (1 - x^{kn+h} (\vartheta^{n'})^{kn+h}) =$

$$(25) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - (x \vartheta^{n'})^k) - \sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - (x \vartheta^{n'})^{nk}).$$

Verder is: $\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \log (1 - x^{kn} \vartheta^{hn'}) = \sum_{h=1}^{n-1} \log (1 - \vartheta^{hn'}) +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - x^{kn} \vartheta^p) (1 - x^{kn} \vartheta^{2p}) \ldots\ldots (1 - x^{kn} \vartheta^{(n-1)p})$$

$$= \log \lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \log x^{kn(n-1)} \frac{\left(\frac{1}{x^{kn}}\right)^n - 1}{\frac{1}{x^{kn}} - 1} = \log n + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1 - x^{kn^2}}{1 - x^{kn}} =$$

$$(26) \qquad \log n + \sum_{k=1}^{\infty} (\log (1 - x^{kn^2}) - \log (1 - x^{kn})).$$

Uit (25) en (26) volgt:

$$\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \log (1 - x^{kn+h} \vartheta^{hn'}) - \log (1 - x^{kn} \vartheta^{hn'}) \} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - (x\vartheta^{n'})^k) - \sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - x^{kn}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - x^{kn^2}) + \sum_{k=1}^{\infty} \log (1 - x^{kn}) - \log n =$$

$$M(x\vartheta^{n'}) - M(x^{n^2}) - \log n. \tag{27}$$

We integreeren weer dezelfde integraal als in § 18, 2m keer bij gedeelten, maar nemen nu $\phi(u) = \log(1 - e^{-u}\vartheta^{hn'})$ zoodat het diff. quot. van deze $\phi(u)$ de functie $\varphi(u)$ van § 18 oplevert. Er komt nu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\phi(kny + hy) - \phi(kny)) = \left\{ g_1\left(-\frac{h}{n}\right) - {}^1/_2 \right\} \phi(0) -$$

$$- \sum_{l=1}^{2m-1} n^l y^l f_l\left(\frac{h}{n}\right) \phi^l(0) + R.$$

$$\text{waarin } \phi(0) = \log \left| 2 \sin \frac{\pi n' h}{n} \right| - i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi n' h}{n} =$$

$$\log \left| 2 \sin \frac{\pi n' h}{n} \right| + \pi i \left(g\left(\frac{hn'}{n}\right) + \left[\frac{hn'}{n}\right] \right)$$

$$\phi'(0) = \frac{i}{2} \cot g \frac{\pi n' h}{n} - {}^1/_2 \text{ en } \phi^l(0) = \left(\frac{i}{2}\right)^l \left(D^{l-1} \cot g\, \nu \right)_{\nu = \frac{\pi hn'}{n}}.$$

$$\text{of } \sum_{k=0}^{\infty} \{ \log (1 - x^{kn+h}\vartheta^{hn'}) - \log (1 - x^{kn}\vartheta^{hn'}) \} = \tag{28}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\phi(kny + hy) - \phi(kny)) = -\frac{h}{n} \left\{ \log \left| 2 \sin \frac{\pi n' h}{n} \right| + \right.$$

$$\left. + \pi i \left(g\left(\frac{hn'}{n}\right) + \left[\frac{hn'}{n}\right] \right) \right\} - {}^1/_4\, y \left(h - \frac{h^2}{n}\right) -$$

$$- \sum_{l=1}^{2m-1} n^l y^l f_l\left(\frac{h}{n}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^l \left(D^{l-1} \cot g\, \nu \right)_{\nu = \frac{\pi hn'}{n}} + R$$

Hierin is $R = -n^{2m} y^{2m} \int_0^{\infty} \left\{ g_{2m}\left(t - \frac{h}{n}\right) - g_{2m}(t) \right\} \phi^{2m}(t\, ny)\, dt.$

Maar nu is:

$$|\phi^{2m}(t\, ny)| < (2m-1)! \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{t^2 n^2 y^2 + (h\beta - 2\pi l)^2\}^m} <$$

$$< (2m-1)! \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 n^2 y^2 + (h\beta - 2\pi l)^2} \frac{1}{(h\beta - 2\pi l)^{2m-2}}$$

dus

$$|R| < n^{2m-1} y^{2m-1} . 2 |g_{2m}(0)| (2m-1)! \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ny \frac{dt}{h\beta - 2\pi l}}{\left(\frac{tny}{h\beta - 2\pi l}\right)^2 + 1} \frac{1}{(h\beta - 2\pi l)^{2m-1}} .$$

$$|R| < n^{2m-1} y^{2m-1} 2 |g_{2m}(0)| (2m-1)! \frac{\pi}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(h\beta - 2\pi l)^{2m-1}}$$

$$= (2m-1)\pi |g_{2m}(0)| y^{2m-1} n^{2m-1} |\phi^{2m-1}(0)|$$

dus $R = K y^{2m-1}$ waarin K eindig en onafhankelijk van y is. Uit (27) en (28) volgt:

$$(29) \qquad M(x\vartheta^{n'}) - M(x^{n^2}) = \log n -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \left\{ h \log \left| 2 \sin \frac{\pi n' h}{n} \right| + \pi i h \left(g\left(\frac{hn'}{n}\right) + \left[\frac{hn'}{n}\right] \right) \right\} -$$

$$- \frac{1}{24} (n^2 - 1) \log \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{2m-1} \left(\sum_{h=1}^{n-1} f_l\left(\frac{h}{n}\right) (D^{l-1} \cot g\, \nu)_{\nu = \frac{\pi hn'}{n}} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^l n^l \left(\log \frac{1}{x} \right)^l +$$

$$+ K_1 \left(\log \frac{1}{x} \right)^{2m-1} \text{ waarin } K_1 \text{ eindig en onafhankelijk van x is.}$$

Daar nu bekend is hoe M(z), dus het oneindig product van EULER zich gedraagt als z langs de reeele as tot één nadert [1]) volgt uit (29) het gedrag van $M(x\vartheta^{n'})$ als x tot 1 nadert. Dan is:

$$\lim_{x \to 1} |M(x\vartheta^{n'}) - M(x^{n^2})| = \log n -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \left\{ h \log \left| 2 \sin \frac{\pi n' h}{n} \right| + \pi i h \left(g_1\left(\frac{hn'}{n}\right) + \left[\frac{hn'}{n}\right] \right) \right\} .$$

---

[1]) $M(z) = \frac{1}{24} \log \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \log z - \frac{\pi^2}{6 \log \frac{1}{z}} + M\left(e^{-\frac{4\pi^2}{\log \frac{1}{z}}} \right)$

$M(x\vartheta^{n'})$ wordt dus op dezelfde manier ∞ als $M(x^{n^2})$ dus als

$$\lim_{x\to 1} -\tfrac{1}{2}\log\log\frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{6n^2\log\frac{1}{x}}$$

Het reeele stuk van $M(x\vartheta^{n'})$ wordt dus slechts ∞ en weer onafhankelijk van n'.

Zelfs zal het reeele stuk van $\lim_{x\to 1}|(M(x\vartheta^{n'}) - M(x^{n^2})|$ onafhankelijk van n' zijn, want $\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n-1}\left\{h\log\left|2\sin\frac{\pi n'h}{n}\right|\right\} =$

$$= \frac{n-1}{2}\log 2 + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n-1}\log\left|\sin\frac{\pi n'h}{n}\right|.$$

Voegen we in deze reeks de termen, die evenver van de uiteinden staan, twee aan twee samen, dan zijn telkens de logarithmensinussen gelijk en de som van hunne coefficienten $(n-1)$. Daar $n_1 < n$ en onderling ondeelbaar met n, laten de getallen $n\,.\,2n', \ldots . (n-1)n'$ bij deeling door n de resten $1\,.\,2\,.\,3 \ldots . (n-1)$.

Hieruit volgt dat de som van onze reeks voor oneven n is $(n-1)\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\log\sin\frac{\pi h}{n}$; voor even n is zij $(n-1)\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}n-1}\log\sin\frac{\pi h}{n}$,

dus telkens onafhankelijk van n'. (29) wordt nu

$$\lim_{x\to 1}|M(x\vartheta^{n'}) - M(x^{n^2})| - \log n + \frac{n-1}{n}\log 2 +$$

$$-\frac{\pi i}{n}\sum_{h=1}^{n-1}\left(g_1\left(\frac{hn'}{n}\right) + \left[\frac{hn'}{n}\right]\right) = -\frac{n-1}{n}\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\log\sin\frac{\pi h}{n} \text{ voor oneven } n$$

$$\text{en} = -\frac{n-1}{2}\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}n-1}\log\sin\frac{\pi h}{n} \text{ voor even } n.$$

In Hfdst. II § 6 vonden we dat als $\sum\left|\frac{b_k}{k}\right|$ convergeert, dat dan:

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{k=1}^{\infty} b_k\frac{x^k}{1-x^k}\right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{n\nu}}{n\nu} \quad \text{waarbij } x_0 = e^{2\pi i\frac{n'}{n}}$$

Hier is $b_k = -\frac{1}{k}$ dus $\Sigma \left|\frac{b_k}{k}\right|$ convergeert, waaruit volgt

dat $\lim_{x \to x_0} \left\{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k}\right\}$ reeel en onafhankelijk

van n' is. Verder is $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{nv}}{nv} = -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 v^2} = -\frac{\pi^2}{6n^2}$.

Stelt men nu $x = (1-\delta)\, x_0$ dan vinden we zoo

$$\lim_{x \to 1} M(x\, \vartheta^{n'}) = \lim_{\delta = 0} \frac{1}{\delta} \times -\frac{\pi^2}{6n^2} = -\frac{\pi^2}{6n^2\delta}.$$

In deze paragraaf vonden we $\lim_{x \to 1} M(x\, \vartheta^{n'}) =$

$$\lim_{\delta=0} -\tfrac{1}{2} \log \log \frac{1}{1-\delta} - \frac{\pi^2}{6n^2 \log \frac{1}{1-\delta}} = -\tfrac{1}{2} \log \delta - \frac{\pi^2}{6n^2\delta} = -\frac{\pi^2}{6n^2\delta}$$

wat dus behoorlijk sluit.

Eene andere proef op de gevonden limiet kan men maken door $n' = 1$ en $n = 2$ te nemen dan is:

$$\lim_{x \to 1} |M(-x) - M(x^4)| = \log 2 - \tfrac{1}{2} \log 2 = \tfrac{1}{2} \log 2$$

of $\lim_{x \to 1} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n-1})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n})} = \sqrt{2}$, eene bekende uitkomst.

§ 20. Uit de transformatieformules van Kluijver kan men nog eenige voorwaarden voor de niet-voortzetbaarheid van Lambertsche reeksen afleiden. Zoo volgt uit (21), dat de reeks van L. zelf niet over den eenheidscirkel voortgezet kan worden. Evenals in Hfdst. II § 3 kunnen we aantoonen dat $|1 - x^{kn+h}\, \vartheta^{hn'}|$ en $|1 - x^{kn}\, \vartheta^{hn'}|$ voor $0 \leqq x \leqq 1$ grooter zijn dan een eindig getal,

dus zal $\lim_{x \to 1} |T_h(x, n')| =$

$$\lim_{x \to 1} \left| -(1-x^h) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kn}\, \vartheta^{hn'}}{(1 - x^{kn+h}\, \vartheta^{hn'})(1 - x^{kn}\, \vartheta^{hn'})} \right| < A \text{ (eindig).}$$

Dus is:

$$\lim_{x\to 1} | L(x\vartheta^{n'}) - n L(x^{n^2}) | = \lim_{x\to 1} | -\tfrac{1}{2}(n-1) + \sum_{h=1}^{n-1} T_h (x, n') |$$

dus eindig, waaruit volgt dat $\lim_{x\to 1} | L(x\vartheta^{n'}) | = \infty$, omdat $z = 1$ een singulier punt van $L(z)$ is en dus $\lim_{x\to 1} L(x^{n^2}) = \infty$.

Ieder rationaal randpunt van den eenheidscirkel is dus een singulier punt van $L(z)$; over dien cirkel is de reeks niet voort te zetten.

Verder kunnen we bewijzen, dat eene Lambertsche reeks niet voort te zetten is, wanneer $A > b_k > B > 0$ is. Berekenen we n.l. achtereenvolgens de verschillende stukken van $\lim_{x\to 1} N(x\vartheta^{n'})$, dan hebben we vooreerst:

$$\lim_{x\to 1} n A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} > \lim_{x\to 1} n \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} > \lim_{x\to 1} n B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}},$$

dus volgens § 18 en omdat $\lim_{x\to 1} \frac{-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} = \lim_{\delta\to 0} -\frac{\log\delta}{\delta} = \lim_{x\to 1} \frac{\log\frac{1}{1-x}}{1-x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{A}{n} \frac{\log\frac{1}{1-x}}{1-x} > \lim_{x\to 1} n \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{x^{kn^2}}{1-x^{kn^2}} > \lim_{x\to 1} \frac{B}{n} \frac{\log\frac{1}{1-x}}{1-x}$$

Verder is $\lim_{x=1} \left| (1-x^h) \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn+h} \frac{x^{kn}\,\vartheta^{hn'}}{(1-x^{kn+h}\vartheta^{hn'})(1-x^{kn}\vartheta^{hn'})} \right| \right.$

$$< \lim_{x\to 1} A(1-x^h) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{\alpha\beta} = \frac{A}{\alpha\beta}\frac{h}{n}$$ waarbij α en β eindig zijn.

Eindelijk is $\lim_{x\to 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} (b_{kn+h} - b_{kn}) \frac{x^{kn}\vartheta^{hn'}}{1-x^{kn}\vartheta^{hn'}} \right|$

$$< \lim_{x\to 1} \frac{A}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kn} = \lim_{x\to 1} \frac{A}{\beta} \frac{1}{1-x} \frac{1}{n}.$$

In de uitdrukking (19) voor $N(x\vartheta^{n'})$ zijn voor $\lim x \to 1$ de andere termen tegenover de eerste te verwaarloozen en dus is $\lim_{x\to 1} |N(x\vartheta^{n'})| > \lim_{x\to 1} \frac{B}{n} \frac{\log\frac{1}{1-x}}{1-x}$ waaruit volgt, dat eene Lambertsche reeks niet over den eenheidscirkel voortgezet kan

worden, wanneer de coëfficiënten eindige positieve getallen zijn. Bij dit bewijs is gebruik gemaakt van de veronderstelling, dat deze getallen eene bovenste grens hadden, anders is het niet zeker dat in (19) de eerste term den doorslag geeft. Kunnen de coëfficiënten ∞ worden dan is het heel goed mogelijk dat de reeks voortzetbaar is zooals uit het voorbeeld (13) van § 13 te zien is. 't Bewijs gaat evenmin door wanneer de coëfficiënten als onderste grens nul hebben, ook in dit geval kan de reeks voortzetbaar zijn, zooals uit het voorbeeld (12) van § 13 duidelijk wordt.

Is $\lim_{k \to \infty} b_k = A \neq 0$ dan is de reeks ook niet voort te zetten, want dan zal als A positief is, van eene zekere waarde van $k = m$ af: $A + \varepsilon > b_k > A - \varepsilon$, waarbij ε eindig is, feitelijk is hiermede het geval tot het vorige teruggebracht. Voor negatieve A bewijst men dat $-N(z)$ en dus ook $+N(z)$ niet voortzetbaar is.

Wanneer de coëfficiënten echter zoo ∞ worden, dat $\lim_{k \to \infty} b_k = A\,k^s$, waarbij $s > 0$, dan is men zeker dat de reeks niet-voortzetbaar is. In dit geval geeft de eerste term van (19) weer den doorslag. Van een zeker rangnummer m af zal b_k minder dan eene eindige kleine grootheid ε van Ak^s verschillen; met verwaarloozing van waarden van lager orde is dus:

$$\lim_{x \to 1} |N(x\,\vartheta^{n'})| = \lim_{x \to 1} n\,A \sum_{k=1}^{\infty} k^s n^s \frac{x^{kn^2}}{1 - x^{kn^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} n^{1+s} A \sum_{k=1}^{\infty} k^s (x^{kn^2} + x^{2kn^2} + x^{3kn^2} + \ldots\ldots\ldots) =$$

$$= \lim_{x \to 1} n^{1+s} A \sum_{k=1}^{\infty} (1^s x^{kn^2} + 2^s x^{2kn^2} + 3^s x^{3kn^2} + \ldots\ldots\ldots)$$

wanneer we in de dubbelreeks eerst de kolommen sommeeren. Hieruit volgt dus:

$$\lim_{x \to 1} (1 - x)^{1+s} N(x\,\vartheta^{n'}) =$$

$$A\,n^{1+s} \lim_{x \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - x)^{1+s} (1^s x^{kn^2} + 2^s x^{2kn^2} + 3^s x^{3kn^2} + \ldots\ldots\ldots).$$

Nu is $\lim_{x \to 1} (1-x)^{1+s}(1^s x + 2^s x^2 + 3^s x^3 + \ldots\ldots) = \Gamma(1+s)$ [1])

dus $\lim_{x \to 1} (1-x)^{1+s}(1^s x^{kn^2} + 2^s x^{2kn^2} + 3^s x^{3kn^2} + \ldots\ldots) =$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)^{1+s}}{(1-x^{kn^2})^{1+s}}(1-x^{kn^2})^{1+s}(1^s x^{kn^2} + 2^s x^{2kn^2} + 3^s x^{3kn^2} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{n^{2+2s}} \frac{1}{k^{1+s}} \Gamma(1+s)$$

en dus $\lim_{x \to 1} |(1-x)^{1+s} N(x\vartheta^{n'})| = A n^{1+s} \frac{1}{n^{2+2s}} \Gamma(1+s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+s}}$

$$= \frac{A}{n^{1+s}} \Gamma(1+s)\,\zeta(1+s).$$

Ieder rationaal randpunt is dus weer een singulier punt van $N(z)$.

We merken nog op, dat de coefficienten van de reeks (13) van § 13 wel oneindig worden, maar niet voldoen aan $\lim_{k \to \infty} b_k = A k^s \; (k > 0)$; de reeks was dan ook voort te zetten.

Voor het geval $\lim_{k \to \infty} b_k = 0$. verwijzen we naar § 7, Hfdst. II.

Transformaties in bepaalde integralen.

§ 21. Voor iedere positieve waarde van p heeft men:

$$\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}} - \frac{2}{p} = 4 \int_0^{\infty} \frac{\sin p\psi}{e^{2\pi\psi} - 1} \, d\psi$$ [2])

Stelt men $e^{-p} = x^k$ en vermenigvuldigt met x^k dan komt er:

$$-x^k + \frac{2x^k}{1-x^k} + \frac{2x^k}{k \log x} = -4 \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{e^{2\pi\psi} - 1} x^k \sin k(\psi \log x).$$

waaruit: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{2} \frac{x}{1-x} +$

---

[1]) Cesàro-Kowalewski p. 285.

[2]) Catalan: Mélanges mathématiques p. 188.

$$+\frac{1}{\log x}\left(-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\ldots\ldots\right)-2\int_0^\infty \frac{d\psi}{e^{2\pi\psi}-1}\sum_{k=1}^{\infty} x^k \sin k\,(\psi \log x).$$

De som tusschen haakjes is $\log(1-x)$ en $\sum_{k=1}^{\infty} x^k \sin k\,x$ is het imaginaire stuk van $\sum_{k=1}^{\infty} x^k\, e^{ik\alpha}$ dus gelijk aan: $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. Men vindt zoo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}-{}^1/_2\frac{x}{1-x}+\frac{\log(1-x)}{\log x}-$$

$$(30)\qquad -2x\int_0^\infty \frac{\sin(\psi\log x)}{1-2x\cos(\psi\log x)+x^2}\frac{d\psi}{e^{2\pi\psi}-1}.$$

Verandert men x in x^2 en trekt tweemaal het resultaat van den oorspronkelijken vorm af, dan komt er:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{1-x^k}={}^1/_2\frac{x}{1+x}-\frac{\log(1+x)}{\log x}-$$

$$-2\int_0^\infty\left[\frac{x\sin(\psi\log x)}{1-2x\cos(\psi\log x)+x^2}-\frac{2x^2\sin 2(\psi\log x)}{1-2x^2\cos 2(\psi\log x)+x^4}\right]\frac{d\psi}{e^{2\pi\psi}-1}$$

Nu is $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}-\frac{2x^2\sin 2\alpha}{1-2x^2\cos 2\alpha+x^4}=\frac{x\sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2}$

en dus met § 13 n°. 1.

$$(31)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{1-x^k}={}^1/_2\frac{x}{1+x}-\frac{\log(1+x)}{\log x}-$$

$$-2x\int_0^\infty\frac{\sin(\psi\log x)}{1+2x\cos(\psi\log x)+x^2}\frac{d\psi}{e^{2\pi\psi}-1}.$$

Ontwikkelt men $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^k}$ in eene machtreeks naar x, dan zal x^n slechts voorkomen in die ontwikkelingen van $\frac{x^k}{1+x^k}$, waarbij k deelbaar op n is; x^n is dan telkens $\frac{n^e}{k}$ term. Dus heeft deze term een plusteeken als $\frac{n}{k}$ oneven is, anders een minteeken. Nu is $\frac{n}{k}$ evengoed een deeler van n en daarom zal de coëfficiënt van x^n telkens het verschil van het aantal oneven en even deelers van n zijn. Door (30) en (31) zijn

de reeksen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$ en $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$ in eindigen vorm voorgesteld. Voor $x = 0$ zullen de n^e diff. quotienten van deze vormen $n!$ keer het aantal deelers van n en $n!$ keer het verschil van de aantallen oneven en even deelers van n aangeven, dus samen beide aantallen leeren kennen.

§ 22. De formule van Poisson [1])

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}} = 2\int_0^{\infty} \frac{e^{\theta\psi} + e^{-\theta\psi}}{e^{\pi\psi} - e^{-\pi\psi}} \sin p\psi \, d\psi$$

geeft voor $\theta = 0$:

$$\frac{e^{2p} - 1}{(e^p + 1)^2} = \frac{e^p - 1}{e^p + 1} = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin p\psi}{e^{\pi\psi} - e^{-\pi\psi}} d\psi.$$

Neemt men weer $e^{-p} = x^k$, vermenigvuldigt met x^k en sommeert van $k = 1$ tot ∞ dan vindt men:

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k} - \frac{x}{1-x} = -4\int_0^{\infty} \frac{d\psi}{e^{\pi\psi} - e^{-\pi\psi}} \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sin k(\psi \log x)$$

of na berekening der laatste som:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k} = {}^1/_2 \frac{x}{1-x} - 2x\int_0^{\infty} \frac{\sin k(\psi \log x)}{e^{\pi\psi} - e^{-\pi\psi}} \frac{d\psi}{1 - 2x\cos(\psi \log x) + x^2}$$

§ 23. De elliptische functies geven ook nog eenige transformaties in bepaalde integralen. De formule

$$\sin^2 \operatorname{am} \frac{Ku}{\pi} = \frac{K-E}{k^2 E} - \frac{2\pi^2}{k^2 K^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k q^k}{1 - q^{2k}} \cos ku$$ [2])

geeft bij vermenigvuldiging met $\log(1 - 2q\cos u + q^2)\,du$ en integratie tusschen o en π:

---

[1]) Journal de l'École Polytechnique XVIII Cahier pag. 297.

[2]) Schlömilch. Compendium II p. 414.

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2q\cos u + q^2) \sin^2 \operatorname{am} \frac{Ku}{\pi} du = \frac{K-E}{k^2 E} \int_0^{\pi} \log(1 - 2q\cos u + q^2)\, du -$$

$$- \frac{2\pi^2}{k^2 K^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k q^k}{1 - q^{2k}} \int_0^{\pi} \log(1 - 2q\cos u + q^2) \cos ku\, du.$$

Nu is $\int_0^{\pi} \log(1 - 2q\cos u + q^2)\, du = 0$ en

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2q\cos u + q^2) \cos ku\, du = -\frac{\pi q^k}{k}$$ [1])

waardoor we vinden:

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2q\cos u + q^2) \sin^2 \operatorname{am} \frac{Ku}{\pi} du = \frac{2\pi^3}{k^2 K^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}}.$$

Stelt men hierin $x = q^2 = e^{\frac{2\pi K'}{K}}$ dan vindt men:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = \frac{k^2 K^2}{2\pi^3} \int_0^{\pi} \log(1 - 2\sqrt{x}\cos u + x) \sin^2 \operatorname{am} \frac{Ku}{\pi} du.$$

§ 24. Ook de thetafuncties van JACOBI geven transformaties.

Men heeft
$$\left.\begin{aligned} \frac{\theta_1'(z)}{\theta_1(z)} - \operatorname{cotg} z &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \sin 2kz \\ \frac{\theta_2'(z)}{\theta_2(z)} + \operatorname{tg} z &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \sin 2kz \end{aligned}\right\}$$ [2])

Vermenigvuldigt men de eerste betrekking met $\operatorname{cotg} z$ en de tweede met $\operatorname{tg} z$ en integreert tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ dan verschijnen aan den rechterkant integralen van de gedaante:

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2kz \operatorname{cotg} z\, dz \text{ en } \int_0^{\pi/2} \sin 2kz \operatorname{tg} z\, dz.$$

Nu is $1 + 2(\cos 2z + \cos 4z + \cos 6z + \ldots \cos 2kz) = \frac{\sin(2k+1)z}{\sin z} = \sin 2kz \cot g z + \cos 2kz$ dus:

$$\sin 2kz \cot g z = 1 - \cos 2kz + 2(\cos 2z + \cos 4z + \ldots \cos 2kz).$$

---

[1]) Voor de eerste integraal FRENET „Calcul Infinitésimal" n°. 443. Differentieert men naar q dan vindt men de tweede met n°. 453.

[2]) STURM, Cours d'Analyse t. II p. 587.

waaruit (32):. $\int_0^{\pi/2} \sin 2k\,z \operatorname{cotg} z\,dz = \frac{\pi}{2}$

en z door $\frac{\pi}{2} - z$ vervangend (33) $\int_0^{\pi/2} \sin 2k\,z \operatorname{tg} z\,dz = (-1)^{k-1}\frac{\pi}{2}$.

Hiermede vindt men nu de transformaties:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} - \operatorname{cotg} z\right) \operatorname{cotg} z\,dz.$$

$$\text{en } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} + \operatorname{tg} z\right) \operatorname{tg} z\,dz.$$

waarbij weer $q = \sqrt{x}$ en dus:

$$\vartheta_1(z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\, x^{1/8(2k-1)^2} \sin(2k-1)z$$

$$\text{en } \vartheta_2(z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} x^{1/8(2k-1)^2} \cos(2k-1)z.$$

§ 25. Ook met de functies ϑ en ϑ_3 kan men de reeks transformeeren:

$$\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} \sin 2kz \text{ [1]}$$

Vermenigvuldigt men beide kanten met de gelijkheid:

$$\frac{q \sin 2z}{1 - q\cos 2z + q^2} = q\sin 2z + q^2 \sin 4z + q^3 \sin 6z + \ldots\ldots$$

en integreert dan tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ dan komt er:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} \frac{q\sin 2z}{1 - q\cos 2z + q^2}\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} \sin 2kz\,(q\sin 2z + q^2 \sin 4z + q^3 \sin 6z + \ldots)\,dz$$

Nu is $\int_0^{\pi/2} \sin 2kz \sin 2mz\,dz = 0$ maar

---

[1]) Sturm, Cours d'Analyse t. II p. 587.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2kz\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4kz)\, dz = \frac{\pi}{4}$$

en dus is $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \frac{q \sin 2z}{1-2q\cos 2z+q^2}\, dz$

en vervangt men hierin q door — q dan gaat dit over in:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\theta_3'(z)}{\theta_3(z)} \frac{q \sin 2z}{1+2q\cos 2z+q^2}\, dz$$

Stelt men weer $q = \sqrt{x}$ dan vindt men de twee transformaties:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \frac{x^{1/2} \sin 2z}{1-2x^{1/2}\cos 2z+x}\, dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\theta'_3(z)}{\theta_3(z)} \frac{x^{1/2} \sin 2z}{1+2x^{1/2}\cos 2z+x}\, dz$$

waarin $\theta(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{1/2\,k^2} \cos 2kz$ en

$$\theta_3(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} x^{1/2\,k^2} \cos 2kz.$$

§ 26. Eén nieuwe transformatie kan men nog afleiden uit de beide formules:

$$\frac{\theta'_1(z)}{\theta_1(z)} = \operatorname{cotg} z + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \sin 2kz \text{ en}$$

$$\frac{\theta'_3(z)}{\theta_3(z)} = 4\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{q^k}{1-q^{2k}} \sin 2kz.$$

Vermenigvuldigt men beide met tgz dz en integreert tusschen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ dan vindt men in verband met (33):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\theta'_1(z)}{\theta_1(z)} \operatorname{tg} z\, dz - \frac{1}{4}$$

$$\text{en} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/2\pi} \frac{\theta_3'(z)}{\theta_3(z)} \operatorname{tgz}\, dz.$$

Substitueert men in de eerste formule $q = \sqrt{x}$ en in de tweede $q = x$. dan gaan de linkerkanten over in:
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{1-x^k}$ en $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^{2k}}$ terwijl men de functie θ_1 moet nemen, die bij $q = \sqrt{x}$ past. Nu is:

$$\frac{x^k}{1-x^k} = \frac{2x^k}{1-x^{2k}} - \frac{x^k}{1+x^k}.$$

$$\text{Dus } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{1-x^k}$$

in verband met § 13, n°. 1 vindt men zoo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2\pi} \frac{\theta_3'(z)}{\theta_3(z)} \operatorname{tgz}\, dz - \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/2\pi} \frac{\theta_1'(z)}{\theta_1(z)} \operatorname{tgz}\, dz.$$

$$\text{waarin } \theta_1(z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{\frac{1}{8}(2k-1)^2} \sin(2k-1)z \text{ en}$$

$$\theta_3(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} \cos 2kz.$$

§ 27. De ζ functie van Weierstrass geeft ook eene transformatie.

Stelt men in: $\zeta(u) = \frac{1}{2\omega_1}\left(2\eta_1 u + \pi \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2\omega_1} + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \sin \frac{k\pi u}{\omega_1}\right)$ [1])

$\frac{\pi u}{2\omega_1} = z$, vermenigvuldigt aan weerskanten met $\operatorname{cotg} z\, dz$ en integreert tusschen 0 en $\frac{1}{2}\pi$, dan vindt men met (32):

$$\int_0^{\pi/2} \left[\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{2\omega_1 z}{\pi}\right) - \operatorname{cotg} z\right] \operatorname{cotg} z\, dz = \frac{4\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} z \operatorname{cotg} z\, dz + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}$$

Nu is $\int_0^{\pi/2} z \operatorname{cotg} z\, dz = z \log \sin z \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \log \sin z\, dz = \frac{1}{2}\pi \log 2$

waaruit voor $q = \sqrt{x}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = -\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2} \log 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{2\omega_1 z}{\pi}\right) - \operatorname{cotg} z\right] \operatorname{cotg} z\, dz.$$

[1]) Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique t. II. p. 454.

Deze betrekking wordt eenvoudiger, wanneer men de periode $2\omega_1$ der ζ functie gelijk π neemt. Men vindt dan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = -\frac{\eta_1}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\zeta(z) - \operatorname{cotg} z) \operatorname{cotg} z \, dz$$

en omdat:

$$\int_0^{\pi/2} (\zeta(z) - \operatorname{cotg} z) \operatorname{cotg} z \, dz = (\zeta(z) - \operatorname{cotg} z) \log \sin z \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left(\wp(z) - \frac{1}{\sin^2 z} \right) \log \sin z \, dz$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = -\tfrac{1}{2} \frac{\eta_1}{\pi} \log 2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\wp(z) - \frac{1}{\sin^2 z} \right) \log \sin z \, dz.$$

Afleiding van transformaties met Calcul Symbolique. [1])

§ 28. Met eene symbolische rekenwijze heeft Cesàro verschillende der vorige transformaties afgeleid en er eenige geheel nieuwe aan toegevoegd. De grondbeginselen van deze methode kan men vinden in Cesàro-Kowalewski, *Algebraische Analysis* p. 294—308. De Bernoulliaansche getallen worden daar gedefinieerd door de symbolische vergelijking: $(B+1)^p - B^p = p$, terwijl $B_0 = 1$ genomen wordt. Hieraan moet men de beteekenis hechten, dat deze symbolische vergelijking gewone vergelijkingen geeft, wanneer men $(B+1)^p$ ontwikkelt en daarna de exponenten der machten van B als indices beschouwt.

Neemt men voor p achtereenvolgens 1 . 2 . 3 enz. dan geeft dit met Bo voldoende betrekkingen om de getallen van Bernoulli te bepalen. Neemt men nu in de symbolische identiteit

$$f(a+(N+1)) - f(a+N) = \frac{(N+1)^0 - N^0}{1} f(a) + \frac{(N+1)^1 - N^1}{1} f'(a) + \frac{(N+1)^2 - N^2}{2!} f''(a) \text{ enz.}$$

voor de getallen N de getallen van Bernoulli dan vindt men zoo:

$$f(a+(B+1)) - f(a+B) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!} + \frac{f'''(a)}{2!} + \ldots\ldots = f'(a+1).$$

---

[1]) Cesàro: Principes du Calcul Symbolique Mathésis t. III p. 10. 1883.

en omdat $f(a+(B+1)) = f((a+B)+1)$ dus:

(34) $\quad f((a+B)+1) - f(a+B) = f'(a+1).$

Schrijft men dit op voor $a = 0, 1 . 2 . 3 \ldots\ldots (n-1)$ en sommeert, dan vindt men de sommatieformule van MAC. LAURIN

(35) $\quad f'(1)+f'(2)+f'(3)+\ldots\ldots f'(n) = f(n+B) - f(B).$

Het gebruiken van deze reeks geeft dikwijls aanleiding tot het ontstaan van divergente reeksen van het asymptotische type. Daar het bepalen van den restterm nog al eens bezwaren heeft, kunnen de volgende beschouwingen niet als volkomen streng gelden, al hebben ze het voordeel de reeds gevonden resultaten van eenen anderen kant te belichten.

§ 29. Voor $a = 0$ volgt uit (34) $f(B+1) - f(B) = f'(1)$. Dus als $f(z) = e^{zx}$ dan is:

$$e^{(B+1)x} - e^{Bx} = x e^x \text{ of}$$

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = e^{Bx} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k. \text{ waaruit:}$$

$$\frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^{k-1}$$

integreerend: $\log(e^x - 1) = \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{x^k}{k} + C.$

Voor $x = 0$ blijkt $C = 0$ dus beide kanten van $\log e^x = x$ aftrekkend:

(36) $\quad \log \frac{xe^x}{e^x - 1} = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{x^k}{k} = {}^1/_2 x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{x^{2k}}{2k}$

want $B_1 = {}^1/_2$ en $B_3 = B_5 = B_7 = \text{enz.} = 0.$

§ 30. Sommeeren we met (35) eene reeks met algemeenen term $f'(k) = \frac{1}{k} - \frac{x^k}{1-x^k} \log \frac{1}{x}$ terwijl $x < 1$. Wij vinden oogenblikkelijk:

(37) $\quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{x^k}{1-x^k} \log \frac{1}{x} \right) = \int_B^{n+B} \left(\frac{1}{t} - \frac{x^t}{1-x^t} \log \frac{1}{x} \right) dt =$

$$= \log \frac{n+B}{1-x^{n+B}} - \log \frac{B}{1-x^{B}}$$

Dit geeft voor $x = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log (n+B) - \log B = -\log B + \log n + \log \left(1 + \frac{B}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\log B + \log n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} \frac{1}{n^{2k}}$$

Laat men n oneindig worden, dan blijkt $-\log B$ de constante van Euler te zijn en dus:

$$(38) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \log n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Trekt men nu (37) van (38) af, dan vindt men:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{\log \frac{1}{x}} \left[C + \log n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} \frac{1}{n^{2k}} - \right.$$

$$\left. - \log \frac{n+B}{1-x^{n+B}} + \log \frac{B}{1-x^{B}} \right]$$

Stelt men rechts $x = e^{-t}$ dan is omdat $x < 1$, $t > 0$, laat men nu n oneindig worden, dan geeft dit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{t} \left[C + \log \frac{nB}{(n+B)(1-e^{-Bt})} \right] = \frac{1}{t} \left[C + \log \frac{Be^{Bt}}{e^{Bt}-1} \right]$$

dus met (36) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{C - \log t}{t} + \frac{1}{t} \log \frac{Bt\, e^{Bt}}{e^{Bt}-1} =$

$$\frac{C - \log t}{t} + \frac{1}{t} \left[\frac{B_1 t}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2k} t^{2k}}{2k} \right]$$ en bij invoering van x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{C - \log \log \frac{1}{x}}{\log \frac{1}{x}} + \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}^2}{(2k)!} \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{2k-1}}{2k}$$

de bekende formule van Schlömilch Hfdst III (34).

§ 31. Uit deze formule heeft Cesàro de transformatie afgeleid:

$$\Lambda(z) = \frac{C - \log z}{z} + \frac{1}{4} + \int_0^{\infty} \left(\operatorname{cotg} \frac{zu}{2} - \frac{2}{zu} \right) \frac{du}{e^{2\pi u} - 1}$$

Wigert [1]) merkte op, dat deze transformatie voor reeele z

[1]) Acta mathematica t. 41. p. 197. (1918).

geen beteekenis heeft, daar de integraal dan voor $u = \frac{2k\pi}{z}$ $(k = \pm 1, \pm 2 \ldots .)$ divergeert. Het blijft mogelijk, dat de betrekking voor complexe z goed is: na zeer ingewikkelde becijferingen bleek dit op één term na het geval te zijn. Eene eenvoudige afleiding is de volgende:

$$\int_0^\infty \left(\cot g \frac{z u}{2} - \frac{2}{z u}\right) \frac{d u}{e^{2\pi u} - 1} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 z u}{z^2 u^2 - 4\pi^2 n^2} \frac{d u}{e^{2\pi u} - 1} =$$

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{z u}{2\pi n} + \left(\frac{z u}{2\pi n}\right)^3 + \left(\frac{z u}{2\pi n}\right)^5 + \ldots .\right) \frac{d u}{e^{2\pi u} - 1} =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 z^{2k-1}}{(2\pi n)^{2k}} 2 \int_0^\infty \frac{u^{2k-1}}{e^{2\pi u} - 1} d u =$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 z^{2k-1}}{(2\pi)^{2k} n^{2k}} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 z^{2k-1}}{(2\pi)^{2k}} (-1)^k \frac{B_{2k}}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 z^{2k-1}}{(2\pi)^{2k}} (-1)^k \frac{B_{2k}}{2k} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}^2}{(2k)!} \frac{z^{2k-1}}{2k}$$

Nu is (17) $\Lambda(z) = \frac{C - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}^2}{2k\,(2k)!} z^{2k-1} +$

$$\frac{2\pi i}{z} \Lambda\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) + O(r^{2p}).$$

waaruit voor $p \to \infty$ en z in de buurt van $+1$:

$$\Lambda(z) = \frac{C - \log z}{z} + \frac{1}{4} + \frac{2\pi i}{z} \Lambda\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) + \int_0^\infty \left(\cot g \frac{z u}{2} - \frac{2}{z u}\right) \frac{d u}{e^{2\pi u} - 1}.$$

§ 32. De Ultra-Bernoulliaansche getallen, bepaald door de symbolische gelijkheid $(\mathbf{B} + 1)^p - a\mathbf{B}^p = p$ $(a \gtrless 1)$ [1]), geven nog eenige transformaties. 't Is gemakkelijk eene betrekking af te leiden, die overeenkomt met (34). Men vindt:
$f(x + \mathbf{B} + 1) - a f(x + \mathbf{B}) = f'(x + 1)$ dus voor $x = 0$
$f(\mathbf{B} + 1) - a f(\mathbf{B}) = f'(1)$. Neemt men $f(z) = e^{xz}$ dan heeft men zoo

---

[1]) Men vindt $\mathbf{B}_0 = 0, \mathbf{B}_1 = \frac{1}{1-a}, \mathbf{B}_2 = -\frac{2a}{(1-a)^2}$ enz. Voor $a = 1$, gaan ze niet in de Bernoulliaansche getallen over, omdat dan $(\mathbf{B} + 1)^0 - \mathbf{B}^0 = 0$ eene identiteit is en dus $\mathbf{B}_0$ pas bepaald wordt door de volgende vergelijking $(\mathbf{B} + 1)' - \mathbf{B}' = 1$.

(39) $e^{x(B+1)} - a\,e^{xB} = x\,e^{x}$ dus $\dfrac{x\,e^{x}}{e^{x}-a} = e^{Bx} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{B_k}{k!} x^k$.

Vervangt men x door i x en stelt de reëele stukken gelijk dan vindt men:

(40) $$\frac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

Deelt men (39) door x en integreert dan, dan vindt men:

$$\log (e^x - a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{x^k}{k} + C$$

Voor $x = 0$ blijkt $C = \log(1-a)$ en trekt men het gevonden resultaat af van $\log e^x = x$ dan krijgt men:

(41) $$\log \frac{e^x}{e^x - a} = x + \log \frac{1}{1-a} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{x^k}{k}.$$

§ 33. Nieuwe transformaties vindt men door (35) op te schrijven voor $f'(z) = \left(\log \frac{1}{x}\right) \frac{a x^z}{1 - a x^z}$ dan is $f(z) = \log(1 - a x^z)$ en er komt:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\log \frac{1}{x}\right) \frac{a x^k}{1 - a x^k} = \log (1 - a x^{n+B}) - \log (1 - a x^B).$$

waaruit voor $n = \infty$ en $x = e^{-t}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a x^k}{1 - a x^k} = \frac{1}{t} \log \frac{e^{Bt}}{e^{Bt} - a}$

Uit (41) zien we, welke beteekenis aan dezen vorm gehecht moet worden en vinden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a x^k}{1 - a x^k} = \frac{1}{t} \log \frac{1}{1-a} + B_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{B_k}{k} t^{k-1}.$$

of met Hfdst. IV § 13 n°. 6 de transformatie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a x^k}{1 - a x^k} =$$

(42) $$\frac{\log \frac{1}{1-a}}{\log \frac{1}{x}} - \frac{a}{2(1-a)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2k}}{2k} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{2k-1}.$$

mits $a \gtrless 1$, neemt men $a = -1$ dan vindt men voor de reeks (31):

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}+\ldots=\frac{\log 2}{\log\frac{1}{x}}-{}^1/_4+$$

$$+\frac{\log\frac{1}{x}}{48}+\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{5760}+\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^5}{120960}+\text{ enz.}\ldots\ldots$$

§ 34. Stelt men in (42) $a=x^n$ dan vindt men:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\frac{\log\frac{1}{1-x^n}}{\log\frac{1}{x}}-\frac{x^n}{2(1-x^n)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}\,B_{2k}}{(2k)!\,2k}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2k-1}\ ^{1})$$

terwijl uit (40) volgt $\int_0^{\infty}\frac{x^n\sin(\psi\log x)}{1-2x^n\cos(\psi\log x)+x^{2n}}\frac{d\psi}{e^{2\pi\psi}-1}=$

$$=\int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}(\psi\log x)^{2k-1}\frac{d\psi}{e^{2\pi\psi}-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}(\log x)^{2k-1}\int_0^{\infty}\frac{\psi^{2k-1}}{e^{2\pi\psi}-1}d\psi=$$

$$={}^1/_2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}(\log x)^{2k-1}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{2k}={}^1/_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{B_{2k}}{2k}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2k-1}$$

waardoor we vinden:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots\ldots\frac{x^{n-1}}{1-x^{n-1}}+\frac{1}{2}\frac{x^n}{1-x^n}+$$

$$+\frac{\log(1-x^n)}{\log x}-2\int_0^{\infty}\frac{x^n\sin(\psi\log x)}{1-2x^n\cos(\psi\log x)+x^{2n}}\frac{d\psi}{e^{2\psi\pi}-1}$$

welke transformatie voor $n=1$. (30) als bijzonder geval bevat.

---

[1]) De getallen **B** moeten hier natuurlijk zoo genomen worden, dat zij bij $a=x^n$ passen.

HOOFDSTUK V.

§ 1. We zullen nu nog eenige merkwaardige uitkomsten afleiden, die met de reeks van L. verkregen kunnen worden. Integreert men om het nulpunt heen $\frac{L(z)}{z^{p+1}}$ dan is het resultaat $2\pi i\, L^{(p)}(0)$ en dus zal volgens de fundamentale eigenschap der reeks van L. ieder priemgetal voldoen aan:

$$2 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{L(z)}{z^{p+1}}\,dz.$$

§ 2. Eene andere integraal met $L(x)$ achter het integratieteeken staat in verband met de ζ functie van Riemann. Substitueert men $z = ku$ $(k > 0)$ in de integraal van Euler:

$\int_0^\infty e^{-z} z^{s-1}\,dz = \Gamma(s)$ dan vindt men:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ku}\, u^{s-1}\, du = \frac{1}{k^s}\,.$$

Vermenigvuldigt men beide kanten met $\theta(k)$ en sommeert van 1 tot ∞ dan is:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta(k)}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ku}\, u^{s-1}\, du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta(k)}{k^s} = \zeta^2(s)$$

zooals blijkt uit het kwadrateeren van $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$.

Stelt men $e^{-u} = x$ dan vindt men:

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^k \left(\log\frac{1}{x}\right)^{s-1} \frac{dx}{x} \text{ dus:}$$

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 L(x) \left(\log\frac{1}{x}\right)^{s-1} \frac{dx}{x}.$$

§ 3. De reeks van L. hangt ook samen met de getallen van FIBONACCI. Deze zijn bepaald door de recurrente betrekking $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, waarbij $u_1 = 1$ en $u_2 = 1$. Hieruit volgt $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}$ dus $1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 2$. Om $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ te bepalen stellen we haar x, dan is $x = 1 + \frac{1}{x}$ dus $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ en daar $x > 1$ is, dus $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. De reeks van FIBONNACCI zal dus divergeeren, maar de reeks der omgekeerden van de getallen van FIBONNACCI convergeert. De getallen $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ spelen ook verder eene groote rol bij deze reeks, zoo is $u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$. Men ziet direkt dat dit juist is voor $n = 1$ en $n = 2$ door een bewijs van BERNOULLI kan men de algemeene geldigheid aantoonen.

Stel $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -a$ dan is $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{a}$ en dus:

$$\frac{1}{u_n} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{a^n} - (-1)^n a^n} = \frac{\sqrt{5}\, a^n}{1 - (-1)^n a^{2n}}.$$

Voor de som van de omgekeerden der even termen van de reeks van FIBONACCI vinden we:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2h}} = \sqrt{5} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a^{2h}}{1 - a^{4h}} = \sqrt{5} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a^{(4k+2)h} =$$

$$= \sqrt{5} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} a^{(4k+2)h} = \sqrt{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(4k+2)}}{1 - a^{(4k+2)}}$$

dus $\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2h}} = \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{a^6}{1-a^6} + \frac{a^{10}}{1-a^{10}} + \ldots =$

$$= \left(\frac{a^2}{1-a^2} + \frac{a^4}{1-a^4} + \frac{a^6}{1-a^6} + \ldots\right) - \left(\frac{a^4}{1-a^4} + \frac{a^8}{1-a^8} + \ldots\right)$$

of $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2h}} = \sqrt{5}\,[L(a^2) - L(a^4)] = \sqrt{5}\left[L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - L\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

De som der omgekeerden van de oneven termen voert niet tot de reeks van LAMBERT, maar tot eene reeks van JACOBI [1]).

§ 4. Met de stelling van APPELL (Hfdst. II. § 5)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k}.$$

kan men uit de reeks van L. nog eenige uitkomsten verkrijgen.

We moeten dan het gedrag der reeks in de buurt van $x=1$ kennen en gebruiken daartoe de ontwikkeling van SCHLÖMILCH (Hfdst. III. (34)).

Stelt men nu in het tweede lid $x = 1 - \delta$ dan komt er:

$$L(x) = \frac{C - \log(\delta + {}^1/_2\delta^2 + {}^1/_3\delta^3 + \ldots)}{\delta + {}^1/_2\delta^2 + {}^1/_3\delta^3 + \ldots\ldots} + {}^1/_4 \ldots =$$

$$= \frac{C - \log\delta - \log(1 + {}^1/_2\delta + {}^1/_3\delta^2 + \ldots)}{\delta\left(1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{3} + \ldots\ldots\right)} + {}^1/_4 \ldots =$$

$$\frac{C - \log\delta - {}^1/_2\delta \ldots}{\delta\left(1 + \frac{\delta}{2} + \ldots\right)} + {}^1/_4 = \frac{(C - \log\delta - {}^1/_2\delta)\left(1 - \frac{\delta}{2} + \ldots\right)}{\delta} + {}^1/_4 =$$

$$= -\frac{\log\delta}{\delta} + \frac{C}{\delta} + {}^1/_2\log\delta - {}^1/_2 C - {}^1/_2 + {}^1/_4 + \ldots$$

Zien we dus van positieve machten van δ af, dan is:

(1) $$L(x) = {}^1/_2\frac{2-\delta}{\delta}\left(\log\frac{1}{\delta} + C\right) - {}^1/_4 = {}^1/_2\frac{1+x}{1-x}\left(\log\frac{1}{1-x} + C\right) - {}^1/_4$$

mits x in de buurt van 1.

We vergelijken nu eerst L(x) met de reeks, die men krijgt, als men $\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}$ ontwikkelt. Nu is $\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} =$

---

[1]) E. LANDAU: Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci, Bulletin de la société Mathématique de France t 27, p 298 — 300 (1899).

$$= (1 + x + x^2 + \ldots)\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k x^k$$

waarbij $H_k = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + \ldots . {}^1/_k$. Uit (1) volgt nu:

$$\lim_{x \to 1} \frac{L(x)}{\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\, L(x)}{\log \frac{1}{1-x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{{}^1/_2 (1+x)\left(\log \frac{1}{1-x} + C\right) - {}^1/_4 (1-x)}{\log \frac{1}{1-x}} = 1.$$

Maar ook is $\lim_{x \to 1} \frac{L(x)}{\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^k}{\sum_{k=1}^{\infty} H_k x^k} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \ldots \theta(n)}{H_1 + H_2 + H_3 + \ldots H_n}$$

(2) waaruit $\lim_{n \to \infty} \frac{\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) \ldots . \theta(n)}{H_1 + H_2 + H_3 \ldots . H_n} = 1$. Schrijft men nu onder elkaar $H_1, H_2, H_3 \ldots . H_n$ uit en sommeert de kolommen, dan vindt men $\sum_{k=1}^{n} H_k = n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \ldots . \frac{1}{n} =$

(3) $$\left(\frac{n+1}{1} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{3} + \ldots \frac{n+1}{n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \ldots \frac{n}{n}\right) = (n+1) H_n - n.$$

Omdat H_n zelf asymptotisch tot $\log n$ nadert, heeft men:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H_1 + H_2 + H_3 + \ldots . H_n}{n \log n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) H_n - n}{n \log n} = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{\log n} = 1.$$

en dus in verband met (2)

(4) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) \ldots . \theta(n)}{n \log n} = 1.$$

§ 5. We kunnen zelfs het oneindig kleine verschil tusschen 1 en deze limiet berekenen door de functie:

$L(x) - \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} (\theta(k) - H_k)\, x^k$ te beschouwen.

Voor $x \to 1$ nadert deze functie tot:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}\left(\log\frac{1}{1-x}+C\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\frac{x-1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}+\frac{C(1+x)}{2(1-x)}-\frac{1}{4}=\lim_{x\to 1}\frac{C}{1-x}.$$

$$\text{Dus } \lim_{x\to 1}\frac{L(x)-\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}}{\frac{C}{1-x}}=1.$$

Maar deze limiet is ook gelijk aan $\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}(\theta(k)-H_k)\,x^k}{\sum_{k=0}^{\infty}C\,x^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}(\theta(k)-H_k)}{(n+1)\,C}$

(5) dus $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\theta(k)-H_k)=C$. Maar volgens (3) is:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}H_n-1\right)=\lim_{n\to\infty}(C+\log n-1)$ en dus gaat (5)

over in $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta(k)-C-\log n+1\right\}=C$

(6) of $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\ldots.\theta(n)}{n}-\log n\right)=2C-1$

een bekend resultaat uit de getallentheorie. [1])

Voor de gemiddelde waarde van $\lim_{n\to\infty}\theta(n)$ vinden we hieruit $\theta(n)=\log n+2C$. want trekt men van

$\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\ldots.\theta(n)=n\log n+(2C-1)n$

af $\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\ldots.\theta(n-1)=(n-1)\log(n-1)+(2C-1)(n-1)$

dan krijgt men $\theta(n)=\log\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}+2C-1=$

$$\log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}+\log n+2C-1=\log n+2C.$$ [2])

§ 6. Volgens (6) kunnen we nu stellen

$$\sum_{k=1}^{n}\theta(k)=n\log n+(2C-1)\,n+\alpha_n$$

en weer kan de reeks van LAMBERT ons helpen om

[1]) STIELTJES, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. XCVI p. 764—1029.

[2]) LEJEUNE DIRICHLET, Journal de Liouville p. 359. 1856.

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ te vinden. In verband met de berekening van § 5 gebruiken we nu de functie:

$F(x = L(x) - \frac{1}{1 - x}(\log \frac{1}{1-x} + C)$. We zien dan direkt dat:

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} -\tfrac{1}{2} \log \frac{1}{1-x} \text{ en dus:}$$

$$(7) \qquad \lim_{x\to 1} \frac{L(x) - \frac{1}{1-x}\left(\log \frac{1}{1-x} + C\right)}{\log \frac{1}{1-x}} = -\tfrac{1}{2}.$$

Om de stelling van APPELL te kunnen toepassen, moeten we teller en noemer in reeksen ontwikkelen. Nu is

$$L(x) - \frac{1}{1-x}\left(\log \frac{1}{1-x} + C\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k)\, x^k - \sum_{k=1}^{\infty} H_k\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} C x^k =$$

$$-C + \sum_{k=1}^{\infty} (\theta(k) - H_k - C)\, x^k.$$

Voor de limiet (7) vinden we dus ook:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n}\left(-C + \sum_{k=1}^{n} (\theta(k) - H_k - C)\right)$$

Deze limiet is dus gelijk $-\tfrac{1}{2}$ en daarom:

$$(8) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{H_n}\left(\frac{\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\ldots\theta(n)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H_k - C\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Nu is } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H_k = \frac{(n+1)H_n - n}{n} = \log n + C - 1 + \frac{H_n}{n}$$

en dus volgt uit (8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{H_n}\left(\frac{\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)\ldots\theta(n)}{n} - \log n - (2C-1)\right) - 1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{dus } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}\left(\frac{\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)\ldots\theta(n)}{n} - \log n - (2C-1)\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Deze uitkomst bevat (6) en geeft bovendien:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\log n} = \tfrac{1}{2}.$$

§ 7. De reeks van L. geeft na differentiatie $L'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\theta(k)\, x^{k-1}$.

In de buurt van $x = 1$ is $L(x) = \tfrac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}\left(\log \frac{1}{1-x} + C\right) - \tfrac{1}{4}$ dus

$$L'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x} + \frac{1+x+2C}{2(1-x)^2}.$$

We zien dus direkt dat $\lim_{x \to 1} \frac{L'(x)}{\frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x}} = 1.$

Om de stelling van APPELL te kunnen toepassen ontwikkelen we den noemer in eene reeks:

$$\frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}\right) =$$

$$(1+x+x^2+\ldots)(H_1 x + H_2 x^2 + H_3 x^3 + \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^{k} H_h\right) x^k \text{ zoodat:}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1\,\theta(1) + 2\,\theta(2) + 3\,\theta(3) + \ldots\ldots\ldots n\,\theta(n)}{H_1 + (H_1 + H_2) + (H_1 + H_2 + H_3) + \ldots (H_1 + H_2 + \ldots H_{n-1})} = 1.$$

Met (3) wordt de som in den noemer $\sum_{k=1}^{n-1} k H_k + \sum_{k=1}^{n-1} H_k - \sum_{k=1}^{n-1} k.$

Schrijven we $\sum_{k=1}^{n-1} k H_k$ term voor term onder elkaar uit en sommeeren de kolommen, dan vinden we:

$$1 \sum_{k=1}^{n-1} k + \left({}^1/_2 \sum_{k=1}^{n-1} k - {}^1/_2\right) + \left({}^1/_3 \sum_{k=1}^{n-1} k - {}^1/_3 (1+2)\right) + \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{1}{n-1}(1+2+3+\ldots n-2)\right) =$$

$$H_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k} = {}^1/_2 n(n-1) H_{n-1} - {}^1/_4 (n-1)(n-2).$$

De waarde van den geheelen noemer is dus:

$${}^1/_2 n(n-1) H_{n-1} - {}^1/_4 (n-1)(n-2) + n H_{n-1} - n + 1 - {}^1/_2 n(n-1)$$

$$= {}^1/_2 n(n+1) H_{n-1} - {}^1/_4 (n-1)(3n+2).$$

We hebben dus:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1\,\theta(1) + 2\,\theta(2) + 3\,\theta(3) + \ldots\ldots n\,\theta(n)}{{}^1/_2 n(n+1) H_{n-1} - {}^1/_4 (n-1)(3n+2)} = 1 \text{ en dus ook:}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1\,\theta(1) + 2\,\theta(2) + 3\,\theta(3) + \ldots\ldots n\,\theta(n)}{{}^1/_2 n^2 \log n} = 1$$

want $\lim_{n \to \infty} \frac{H_{n-1}}{\log n} = 1.$

§ 8. We kunnen nu weer het oneindig kleine verschil tusschen deze limiet en 1 berekenen door te beschouwen:

$$L'(x) - \frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k+1)\,\theta(k+1) - \sum_{h=1}^{k} H_h \right\} x^k.$$

Nu is: $\lim_{x \to 1} L'(x) - \frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{1 + x + 2C}{2(1-x)^2} =$

(9) $\lim_{x \to 1} \frac{1+C}{(1-x)^2}$ zoodat volgens de stelling van APPELL:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1\,\theta(1) + 2\,\theta(2) + 3\,\theta(3) + \ldots n\,\theta(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{k} H_h}{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots (n-1)} = 1 + C$$

Men heeft echter:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{k} H_h}{\frac{1}{2} n (n-1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2} n (n+1) H_{n-1} - \frac{1}{4} (n-1)(3n+2)}{\frac{1}{2} n (n-1)} =$$

$\lim_{n \to \infty} H_{n-1} - \frac{3}{2} = \lim_{n \to \infty} \log n + C - \frac{3}{2}$. Men vindt zoo:

$$(10) \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1\,\theta(1) + 2\,\theta(2) + 3\,\theta(3) \ldots\ldots\ldots n\,\theta(n)}{n^2} - \frac{1}{2} \log n \right\} = C - \frac{1}{4}\ ^{1})$$

§ 9. Volgens (10) kunnen we nu stellen:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\theta(k) = \frac{1}{2} n^2 \log n + (C - \frac{1}{4}) n^2 + n\,\beta_n.$$

$\lim_{n \to \infty} \beta_n$ is te vinden door de functie:

$L'(x) - \frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x} - \frac{1+C}{(1-x)^2}$ te beschouwen.

In de buurt van $x = 1$ gedraagt deze functie zich (9) als

$$\frac{-1+x}{2(1-x)^2} = -\frac{1}{2(1-x)}.$$

$$\text{Dus } \lim_{x \to 1} \frac{L'(x) - \frac{1}{(1-x)^2} \log \frac{1}{1-x} - \frac{1+C}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = -\frac{1}{2},$$

---

1) Rendiconti dei Lincei 1888, p. 45.

hieruit volgt weer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\theta(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{h=1}^{k} H_h - (1+C)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)}{n} = -\,{}^1/_2.$$

dus:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\theta(k) - {}^1/_2(n+1)H_{n-1} + {}^1/_4\,\frac{(n-1)(3n+2)}{n} - {}^1/_2(n+1)(1+C)\right\} = -\,{}^1/_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\theta(k) - {}^1/_2(n+1)\left(H_n - \frac{1}{n} + 1 + C\right) + \frac{1}{4n}(n-1)(3n+2)\right\} = -\,{}^1/_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\theta(k) - {}^1/_2 n\log n - {}^1/_2 n(2C+1) + {}^3/_4 n\right\} - {}^1/_2\log n - {}^1/_2(2C+1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right\} = -\,{}^1/_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\theta(k) - {}^1/_2 n\log n - {}^1/_2 n\left(2C - \frac{1}{2}\right)\right\} = {}^1/_2\log n + C - {}^1/_4.$$

en zoo is $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\theta(k) = {}^1/_2 n^2\log n + n^2\left(C - \frac{1}{4}\right) + n\left(\frac{1}{2}\log n + C - {}^1/_4\right)$

eene uitkomst, welke (10) bevat en tevens geeft:

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = {}^1/_2\log n + C - {}^1/_4.$$

§ 10. De reeks van L komt ook voor den dag, wanneer we willen onderzoeken niet slechts hoeveel deelers een getal in het systeem der natuurlijke getallen bezit, maar ook hoeveel deelers van dat getal in een willekeurig getallensysteem voorkomen. Daartoe beschouwen we eene functie f(x) zoodanig dat de reeksen: $f(1) + {}^1/_2 f(2) + {}^1/_3 f(3) + \ldots$ en $f(1)\log 1 + {}^1/_2 f(2)\log 2 + {}^1/_3 f(3)\log 3 + \ldots$ convergeeren, hunne sommen zijn s_1 en s_2. F(k) noemen we de som van alle waarden van f(x), wanneer men voor x achtereenvolgens alle deelers van k invult. Hieruit volgt:

$\sum_{k=1}^{\infty} F(k)\,x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{d\mid k} f(d)\right)x^k$. Let men in deze dubbele som op alle termen met f(d), dan ziet men dat f(d) telkens met een macht van x vermenigvuldigd wordt, waarvan de exponent een veelvoud van d is, de coëfficiënt van f(d) is dus $\sum_{k=1}^{\infty} x^{dk}$, waaruit: $\sum_{k=1}^{\infty} F(k)\,x^k = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{x^d}{1-x^d} f(d)$.

Men heeft dus: $\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} F(k)\,x^k = \lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}f(k) =$

$$\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k f(k)}{1+x+x^2+\ldots..x^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}f(k) = s_1$$

Maar ook is $\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\,x^k = \lim_{x\to 1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\,x^k}{\frac{1}{1-x}} =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(1)+F(2)+F(3)+\ldots.F(n)}{n}$$

(11) dus $\lim_{n\to\infty}\frac{F(1)+F(2)+F(3)+\ldots.F(n)}{n} = s_1.$

Evenals we uit f(k) de functie F(k) afgeleid hebben, leiden we uit F(k) de functie $\mathfrak{F}(k)$ af. Deze is dus $\sum_{d\mid k}F(k)$. Wij kunnen nu gemakkelijk aantoonen, dat:

(12) $$\sum_{k=1}^{\infty}x^k\,\mathfrak{F}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}L(x^k)\,f(k);$$

want ontwikkelt men beide sommen in reeksen, dan zal in beide de coëfficiënt van x^q bestaan uit de som der functies f(d) van de deelers van q ieder vermenigvuldigd met het aantal deelers van $^q/_d$.

Volgens (1) is $L(x^k) = {}^1/_2\frac{1+x^k}{1-x^k}\left(\log\frac{1}{1-x^k}+C\right) - {}^1/_4.$

Stelt men $x = 1-\delta$ en verwaarloost alles van lager orde dan $\frac{1}{\delta}$ dan vindt men voor x in de buurt van 1

$$L(x^k) = {}^1/_2\frac{2-k\delta}{k\delta}\left(\log\frac{1}{k\delta}+C\right) = \frac{1}{2k}\left(\frac{2}{\delta}(\log\frac{1}{\delta}-\log k+C)\right) =$$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}+C\right)-\frac{\log k}{\delta}\right) = \frac{1}{k}\left(L(x)-\frac{\log k}{1-x}\right).$$

Met (12) is dus in de buurt van $x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty}x^k\,\mathfrak{F}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}L(x^k)\,f(k) =$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(L(x)-\frac{\log k}{1-x}\right)f(k) = s_1\,L(x)-\frac{s_2}{1-x}$$

$$\text{en dus } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{s_1 x^k}{1-x^k} - x^k F(k)\right) = \frac{s_2}{1-x}$$

volgens de stelling van APPELL dus:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(s_1\,\theta(k) - F(k))\,x^k}{(1-x)^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(s_1\,\theta(k) - F(k))}{n+1} = s_2$$

In verband met (6) volgt hieruit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F(1)+F(2)+F(3)+\ldots F(n)}{n} - s_1 \log n\right) = (2C-1)s_1 - s_2.$$

Dit resultaat wordt eenvoudiger, wanneer we hieruit eene gemiddelde waarde van $\lim_{n\to\infty} F(n)$ afleiden. Men vindt:

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} F(k) - \sum_{k=1}^{n-1} F(k) = n s_1 \log n + (2C-1)s_1 n -$$

$$- s_2 n - (n-1)s_1 \log(n-1) - (2C-1)s_1(n-1) + s_2(n-1)$$

$$= s_1 \log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + s_1 \log n + (2C-1)s_1 - s_2 =$$

$$s_1 \log n + 2C s_1 - s_2.$$

(13) Men heeft dus gemiddeld $\lim_{n\to\infty} F(n) = s_1 \log n + 2C s_1 - s_2$.

§ 11. Als een bijzonder geval van deze algemeene formule zullen we eene bekende betrekking afleiden. We stellen dat $F(k)$ 1 of 0 is, naarmate k al of niet tot een gegeven systeem geheele getallen behoort, waarvan de frequentie van 0 verschilt. Volgens (11) is dus:

$\lim_{n\to\infty} \frac{F(1)+F(2)+F(3)+\ldots.F(n)}{n} = s_1$. Aan den linkerkant staat echter het n^e gedeelte van het aantal getallen in het systeem, die kleiner of gelijk n zijn, dus de frequentie ω, deze is dus gelijk s_1. Daar $F(k) = \sum_{d\mid k} F(k)$, is $F(k)$ dus gelijk aan het aantal deelers van k, die tot het systeem behooren. Het ligt voor de hand, dat dit aantal asymptotisch nadert tot het totale aantal deelers van k vermenigvuldigd met de frequentie ω. Dus $F(n)$ zal bij eerste benadering gelijk zijn aan (§ 5) $\omega\,\theta(n) = s_1(\log n + 2C)$. (13) geeft nu

eene nauwkeurige benadering, waarin de waarden van s_1 en s_2 van den aard van het systeem afhangen.

§ 12. Nemen we voor het getallensysteem alle getallen, welke behalve de eenheid geen kwadratische deelers hebben dan moeten we dus f(k) zoo bepalen, dat F(k) 1 of 0 is, naarmate k al of niet tot het systeem behoort. Hieraan voldoet eene functie f(k) zoodat $f(1) = 1$ en $f(k) = (-1)^r$, wanneer k gelijk is aan het product van de kwadraten van r ongelijke ondeelbare getallen, in elk ander geval is $f(k) = 0$. Heeft k geen kwadratische factoren, dan is $F(k) = f(1) = 1$. Heeft k de kwadratische factoren, a, b, c, d enz... dan is F(k) gelijk aan de som der functies f, die behooren bij de termen van de ontwikkeling van $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\ldots$.

Nu zijn deze functies $+1$ of -1, naarmate ze behooren bij termen van even of oneven graad. De som van al deze functies krijgt men door voor a, b, c, d.... in het product -1 te plaatsen, dit wordt dan nul. F(k) heeft dus altijd de gewenschte waarde, F(k) geeft dus het aantal deelers in het systeem. Dit is echter ook gelijk aan de bekende functie $\omega(k)$, die bepaalt op hoeveel verschillende manieren k in twee onderling ondeelbare factoren kan ontbonden worden. Heeft k geen kwadratische factoren, dan komen alle deelers van k in het systeem voor; twee aan twee is hun product k en ieder zoo'n stel geeft ook twee ontbindingen in factoren. Is $k = abc^p d^n \ldots\ldots$, heeft k dus wel kwadratische deelers, dan is het aantal ontbindingen in twee onderling ondeelbare factoren hetzelfde als van abcd... daar de factoren c en de factoren d enz. telkens toch bijeen moeten blijven. Het aantal deelers in het systeem is ook hetzelfde als van abcd... Beide aantallen zijn dus gelijk. [1])

Om nu $\omega(k)$ dus F(k) te vinden, moeten we s_1 en s_2 bepalen.

$$s_1 = f(1) + {}^1/_2 f(2) + \frac{1}{3} f(3) + \ldots = 1 + 0 + 0 - \frac{1}{2^2} +$$

[1]) $\omega(k) = 2^p$, waarbij p het aantal ondeelbare factoren van k is, want er zijn dan $1 + C^1_p + C^2_p + C^3_p + \ldots . C^p_p = 2^p$ ontbindingen in onderling ondeelbare factoren mogelijk.

$$+0+0+0+0-\frac{1}{3^2}\ldots\ldots-\frac{1}{5^2}\ldots\ldots+\frac{1}{6^2}\ldots-\frac{1}{7^2}\ldots+\frac{1}{10^2}\ldots\ldots$$

$$s_1=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots\ldots=\frac{6}{\pi^2}.$$ [1])

Dit is dus ook de kans, dat een geheel getal tot ons systeem zal behooren.

$s_2=f(1)\log(1)+\frac{1}{2}f(2)\log(2)+\frac{1}{3}f(3)\log 3+\ldots\ldots$ Om deze som te berekenen bepalen we den coëfficiënt van log p, waarbij p een ondeelbaar getal is. Nu zal log p slechts voorkomen in de termen met $\log p^2$, $\log(2p)^2$, $\log(3p)^2\ldots\ldots$ daar anders de bijbehoorende functie f gelijk nul is. Zoo vindt men:

$$\left(-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{4p^2}+\frac{2}{9p^2}+\frac{2}{25p^2}-\frac{2}{(6p)^2}\ldots\ldots\right)\log p.$$ In deze reeks komt echter niet voor $\frac{2}{(p.p)^2}\log p$, daar de bijbehoorende functie $f(p^4)=0$. Men vindt dus voor de coëfficiënt van log p

$$\frac{-\frac{2}{p^2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots\ldots}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}=-\frac{12}{\pi^2}\frac{1}{p^2-1}.$$

$$\text{dus: } s_2=-\frac{12}{\pi^2}\Sigma\frac{\log p}{p^2-1}$$

waarbij deze som over alle ondeelbare getallen moet worden uitgestrekt. Men kan dit nog iets vereenvoudigen. Beschouwen we $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^2}$ en trachten hierin den coëfficiënt van log p te bepalen, waarin p een willekeurig ondeelbaar getal is. Alle termen, waarin log p voorkomt, zijn:

$$\frac{\log p}{p^2}+\frac{\log 2p}{(2p)^2}+\frac{\log 3p}{(3p)^2}+\ldots\frac{\log p^2}{(p^2)^2}+\ldots\frac{\log p^3}{(p^3)^2}+\ldots\ldots$$

Men splitst log 2p in log 2 + log p, $\log p^2$ in log p + log p, $\log p^3$ in log p + log p + log p en zoo vindt men:

---

[1]) LANDAU, Primzahlen I p. 126.

$$\frac{\log p}{p^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.\right)+\frac{\log p}{p^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.\right)$$

$$+\frac{\log p}{p^6}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.\right)+\ldots.$$

$$=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\ldots.\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.\right)\log p$$

$$=\frac{\log p}{p^2-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\frac{\log p}{p^2-1}.$$

waaruit: $\frac{\pi^2}{6}\Sigma\frac{\log p}{p^2-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^2}=0.937548254=C_1$

dus $\Sigma\frac{\log p}{p^2-1}=\frac{6\,C_1}{\pi^2}$ en $s_2=-\frac{12}{\pi^2}\times\frac{6\,C_1}{\pi^2}=-\frac{72}{\pi^4}C_1$

waarna we voor het aantal deelers van k in ons systeem en dus ook voor $\omega(k)$ hebben:

$$\lim_{k\to\infty}\omega(k)=\frac{6}{\pi^2}\left(\log k+2\,C+\frac{12}{\pi^2}C_1\right)\ ^{1)}$$

---

[1]) Lejeune Dirichlet, Journal de Liouville 1856. p. 359.

LITERATUUR.

J. H. Lambert, Anlage zur Architectonic oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss. Riga, t. II, p. 507, 1771.

Th. Clausen, Beitrag zur Theorie der Reihen. Crelle t. 3, p. 92—95, 1828.

Scherk, Bemerkungen über die Lambertsche Reihe. Crelle t. 9—10, p. 162—168, 1832.

Eisenstein, Transformations remarquables de quelques séries. Crelle t. 27—28, p. 193—197, 1844.

Burhenne, Über das Gesetz der Primzahlen. Archiv Grünert t. 19, p. 442—449, 1852.

Dirichlet, Dirichletwerke t. 1, p. 354.

G. Zehfusz, Fussnote. Zeitschr. f. Math. u. Phys. t. 3, p. 248, 1858.

O. Schlömilch, Über die Lambertsche Reihe. Zeitschr. f. Math. u. Phys. t. 6, p. 407—415, 1861.

O. Schlömilch, Extrait d'une lettre adressée à. M. Liouville. Zeitschr. f. Math. u. Phys. t. 8, p. 99—100, 1863.

O. Schlömilch, Compendium der höheren Analyse. t. 2, p. 233—237.

Curtze, Notes diverses sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers.
Annali di matematica p. e. appl. 2 ser. t. 1, p. 285, 1867.

Catalan, Recherches sur quelques produits indéfinis. Mém. de l'acad. d. Brux. t. 40, p. 89, p. 120, 1873.

Catalan, Mélanges mathématiques. p. 137—138.

Catalan,	Nouvelle Correspondance. t. 5, p. 114—165, 1879.
Catalan,	Remarques sur une série. Nouvelle Correspondance t. 6, p. 253, 255, 1880.
Pincherle,	Mem. d. Accad. di Bologna. (4) t. 3, 1882.
O. Schlömilch,	Notiz über die Lambertsche Reihe. Zeitschr. f. Math. u. Phys. t. 29, p. 384, 1884.
E. Cesàro,	Sur quelques conséquences asymptotiques de la série de Lambert. Teixeira Jornal. de Scienc. Math. t. 6, p. 91—95, 1885.
E. Cesàro,	Sur la série de Lambert. Nouv. Ann. t. 5, p. 106, 1886.
E. Cesàro,	Sur les nombres de Bernoulli et d' Euler. Nouv. Ann. t. 5. p. 305, 1886.
E. Cesàro,	Sur l' évaluation approchée de certaines séries. Nouv. Ann. t. 5. p. 449, 1886.
E. Cesàro,	Source d' identités. Mathésis t. 6. p. 126—131, 1886.
E. Cesàro,	Sur les transformations de la série de Lambert. Nouv. Ann. t. 7, p. 374, 1888.
F. Rogel,	Dahrstellungen Zahlentheoretischer Functionen durch trigonometrische Reihen. Archiv. Grünert (2) t. 10, p. 62, 1891.
E. Cesàro,	Elementares Lehrbuch der Algebr. Analysis u. d. Infin. Rechn. p. 175, 176, 286.
E. Cesàro,	La serie di Lambert in Aritmetica assintotica. Rendiconto d. Accad. d. Sc. fis. e. mat. (Sez. d. società reale di Napoli) Ser. 2ª t 7. Anno XXXII p. 197—204, 1893.
T. Levi Civita,	Atti d. R. Accad. dei Lincei. ser. 5 t 4 p. 303—309. 1895.
De la Vallée Poussin,	Sur la série de Lambert. Ann. de la Soc. scient. de Brux. t 20 (I) p. 56—62. 1896.
E. Landau,	Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci. Bull. de la soc. Math. de France t 27. p. 298—300. 1899.

FRANEL, Sur la théorie des séries. Math. Ann. t. 52. p. 529—549. 1899.

C. HANSEN, Note sur la sommation de la série de Lambert. Math. Ann. t. 54. p. 604—607. 1901.

G. TORELLI, Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato.
Atti d. R. Accad. d. Sc. Fis. e. Mat. Napoli Ser. 2 t. 2. p. 180—191. 1902.

C. HANSEN, Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de la série de Lambert et des séries analogues. Oversigt o. d. kong. Danske. Vid. Selskab. Forh. p. 3—19. 1907.

KNOPP, Grenswerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation p. 28—29. Berlin 1907.

KNOPP, Über Lambertsche Reihen. Crelle t. 142. p. 283. 1913.

E. LANDAU, Sus les séries de Lambert. Compt. Rend. de l'Acad. des Sc. t. 156. p. 1451. 1913.

HARDY, Note on Lambert's series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) t. 13. p. 192. 1913.

WIGERT, Sur la série de Lambert et son application à la théorie des nombres. Acta Math. t. 41. p. 197. 1918.

E. LANDAU, Über die Wigertsche asymptotische Functional gleichung fur die Lambertsche Reihe. Archiv. der Math. u. Phys. t. 3. reeks 27. p. 141. 1918.
Wiskundige Opgaven van het Wiskundig Genootschap „Onvermoeide Arbeid" t. 13. 2e st. p. 92. p. 101.

J. C. KLUIJVER, Over de reeks van Lambert. Versl. Konink. Academie v. Wetensch. Amsterdam. t. 28 p. 262—269. 1919.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De afleiding door CESÀRO der betrekking:

$$B_p(-1) = (2^p - 1)\,B_p$$

kan met voordeel vervangen worden door eene andere, waarbij tg x op twee verschillende manieren in eene machtreeks ontwikkeld wordt.

E. CESÀRO: Sur les nombres de BERNOULLI et D'EULER.
Nouvelles Annales de Mathématiques. t 3. 1886. p. 305.

II.

't Verdient aanbeveling den samenhang tusschen het theorema van TAYLOR en de 1°. middelwaardestelling nader te onderzoeken.

III.

Schrijft men:

$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots \frac{h^n}{n!} f^n(a + \theta_n h)$, dan is:

1°. als f(x) een veelterm van den $(n+1)^{en}$ graad in x is:

$$\theta_n = \frac{1}{n+1}$$

2°. als $f(x), f'(x) \ldots\ldots f^{n+2}(x)$ in het vak $a \ldots\ldots a+h$ eindig en continu zijn en $f^{n+1}(a)$ is niet nul:

$$\lim_{h \to 0} \theta_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{en } \lim_{n \to \infty} \theta_n = 0.$$

IV.

De bewering van H. DE VRIES, dat men tusschen twee punten van een kegeloppervlak oneindig veel geodetische lijnen kan trekken, komt mij voor niet juist te zijn.

Dr. H. DE VRIES. Leerboek der beschrijvende Meetkunde. Deel II. blz. 38.

V.

Het gebruikelijke bewijs van de stelling van GAUSS is onvolledig.

ABRAHAM UND FÖPPL. Theorie der Elektrizität. Bd I. S. 54.

VI.

Het bewijs, dat M. PLANCK van den phasenregel van GIBBS geeft, is, van mathematisch standpunt beschouwd, onbevredigend.

M. PLANCK. Vorlesungen über Thermodynamik. 4e aufl. S. 183.

VII.

De afleiding door KIRCHHOFF van de vergelijking van POISSON is niet voldoende streng.

KIRCHHOFF. Vorlesungen über Mechanik. XVI Vorl. § 2.

VIII.

't Onderwijs in de astronomie aan onze scholen van Middelbaar en voorbereidend Hooger onderwijs moet gepaard gaan met observaties van den sterrenhemel.

IX.

Na de K. B. van 7 Juni 1919 en 1 Mei 1920, regelende het programma der Gymnasia, is eene Gymnasiale opleiding opleiding niet aan te raden voor iemand, die bij zijne verdere studie Wiskunde noodig heeft.