Cirkelcongruenties in de ruimte

CIRKELCONGRUENTIES IN DE RUIMTE

J. B. H. 'T HART

Cirkelcongruenties in de ruimte.

Diss. Utrecht 1921

Cirkelcongruenties in de ruimte.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. W. VOGELSANG, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 19 APRIL DES NAMIDDAGS 4 UUR DOOR

JOHANNES BERNARDUS HERMANUS 'T HART,

GEBOREN TE 'S-GRAVENHAGE.

ELECTRISCHE DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE" J. VAN DRUTEN — UTRECHT.
MCMXXI.

AAN MIJN VROUW.
AAN MIJN OUDERS.

Bij het voleindigen van mijn studie denk ik met groote erkentelijkheid terug aan de lessen, die ik van U, hoogleeraren aan de Leidsche Universiteit genoten heb.

In 't bizonder houd ik Uw persoonlijkheid, hooggeleerde KLUYVER, steeds in aangename en levendige herinnering, terwijl ik met gevoelens van piëteit de nagedachtenis van wijlen Prof. ZEEMAN huldig.

Hooggeleerde DE VRIES, hooggeachte promotor, het is me een behoefte U mijn oprechten dank te betuigen.

Uw korte en bondige toezegging om de leiding van dit proefschrift op U te nemen, ofschoon ik Uw leerling niet was, en daarna de opmerkelijke nauwgezetheid en voortvarendheid, waarmee ge mij bij voortduring Uw steun verleende, hebben op mij grooten indruk gemaakt.

Ik acht mij gelukkig met Uw werkwijze en Uw behandeling van de meetkunde van naderbij te hebben kennis gemaakt.

INHOUD.

INLEIDING.

Een cirkel ($\odot$) in de ruimte is bepaald door zes voorwaarden. Zijn er vier voorwaarden gegeven, dan zullen daaraan ∞^2 $\odot$'s of een congruentie van $\odot$'s voldoen.

Het éénmaal snijden van een kromme geldt voor één voorwaarde, tweemaal snijden voor twee, driemaal voor drie en viermaal voor vier voorwaarden.

Zoo is in Hfdst. I de congruentie van $\odot$'s behandeld, die een $\odot$ m^2 tweemaal en twee rechten a en b éénmaal snijden.

In Hfdst. IV zijn de $\odot$'s behandeld, die een kromme β^4 viermaal snijden.

Het raken aan een vlak of ligging in een vlak, dat door een bepaald punt gaat, gelden beiden voor één voorwaarde.

In Hfdst. II zijn b.v. de $\odot$'s behandeld, die raken aan twee vlakken α en β en die een rechte m tweemaal snijden.

In Hfdst. III zijn behandeld de $\odot$'s, die een kubische ruimtekromme ρ^3 driemaal snijden en wier vlakken door een punt S gaan.

Het gaan door een punt geldt voor twee voorwaarden.

Een eenvoudige congruentie zou dus b.v. zijn, de congruentie der $\odot$'s, die door twee vaste punten gaan.

Bovengenoemde voorwaarden kan men op talrijke wijzen tot viertallen combineeren, zoodat ook talrijke congruenties zich voor een onderzoek leenen.

Veelal zullen dan echter bij dit onderzoek herhalingen en analoge afleidingen optreden.

Uit den aard der zaak neemt het oneindig verre vlak V_∞ bij het onderzoek der cirkelcongruenties een belangrijke plaats in, doordat alle ⊙'s den imaginairen bolcirkel ω_∞ in V_∞ tweemaal moeten snijden.

Vervangt men den imaginairen bolcirkel door een willekeurige kegelsnede dan blijken de cirkelcongruenties slechts een bizonder geval van congruenties van kegelsneden te zijn.

Op tweeërlei wijzen zijn in de onderzochte congruenties ontaardingen van ⊙'s opgetreden:

1°. als twee snijdende rechten, waarvan er één in V_∞ ligt;

2°. als twee elkaar snijdende isotrope rechten.

Stelt men den eisch, dat een ⊙ van een congruentie gaat door een willekeurig punt, dan heeft men zes voorwaarden. Het eindige aantal ⊙'s, die daaraan voldoen noemt men de *orde*.

Stelt men den eisch, dat een willekeurige rechte tweemaal gesneden moet worden dan voldoen daaraan eveneens een eindig aantal ⊙'s. Dit aantal noemt men de *klasse*.

Singuliere punten zijn punten waardoor oneindig veel ⊙'s gaan. Deze vormen een oppervlak, wanneer er ∞^1 doorgaan.

Singuliere koorden zijn rechten, die door oneindig veel ⊙'s tweemaal gesneden worden.

Ook deze ⊙'s liggen op een oppervlak als er ∞^1 zijn.

Voegt men aan de vier voorwaarden van de te onderzoeken congruentie nog een vijfde voorwaarde toe, dan zullen aan die vijf voorwaarden ∞^1 ⊙'s voldoen, die dus een oppervlak vormen.

In alle vier de congruentiegevallen hebben wij het oppervlak der ⊙'s gezocht, die een willekeurige rechte l éénmaal snijden, of die een willekeurig vlak ϕ raken.

De middelpunten der ⊙'s in de congruentie zullen in 't algemeen op een oppervlak liggen.

Congruenties van ⊙'s zijn nog weinig onderzocht. In het verslag van de Koninklijke Academie van Wetenschappen deel XXVIII N°. 7 blz. 666 van 8 Mei 1920 behandelt Prof. Dr. JAN DE VRIES een congruentie van kegelsneden, die een vaste kegelsnede β^2 tweemaal snijden en die drie kruisende rechten snijden in overeenkomstige punten van puntreeksen, waartusschen een trilineaire verwantschap bestaat.

Voorts beschouwt M. PIERI (Sopra alcune congruenze di coniche, Atti di Torino, t. XXVIII) een congruentie van kegelsneden, welke als bizonder geval de congruentie der ⊙'s omvat, die twee gegeven ⊙'s tweemaal snijden.

HOOFDSTUK I.

Congruentie van cirkels, die een cirkel m^2 twee keer snijden en die twee rechten a en b één keer snijden.

§ 1. *Algemeene afleiding.*

We noemen het vlak, waarin ⊙ m^2 ligt, μ.

De snijpunten van een willekeurigen ⊙ uit de congruentie met a en b noemen we A en B en die met m^2, C en D.

De verbindingsrechte A B snijdt μ in P en de snijpunten van a en b met μ noemen we A_μ en B_μ.

Er moet voldaan worden aan de betrekking:

$PA \times PB = PC \times PD$.

D. w. z. dat m^2, A en B op een bol liggen.

De meetk. plaats der punten A en B wordt dus gevonden als de verzameling der snijpunten van a en b met een bundel bollen door m^2.

Iedere bol uit den bundel levert twee snijpunten A en twee snijpunten B. Deze geven vier verbindingslijnen P A B.

De vlakkenbundel door een rechte P A B snijdt den bijbehoorenden bol volgens ⊙'s, die aan de vraag voldoen.

§ 2. *Ontaarde ⊙'s in de congruentie.*

a. Beschouw den vlakkenbundel door A_μ B_μ. De oneindig verre rechte in ieder vlak uit den bundel, gecombineerd met A_μ B_μ geeft een ontaarden ⊙.

Dit levert dus ∞^1 ontaarde ⊙'s.

b. Beschouw een rechte door A_μ // b en een vlakkenbundel door die rechte. De snijlijn van ieder vlak met μ, gecombineerd met de oneindig verre rechte in dat vlak levert eveneens een ontaarden ⊙. Op deze wijze weer ∞^1 ontaarde ⊙'s. Evenzoo worden door B_μ en a, ∞^1 ⊙'s bepaald.

c. Noemen we de oneindig verre punten van a en b resp. A_∞ en B_∞.

De vlakkenbundel door A_∞ B_∞ snijdt μ volgens evenwijdige rechten. Iedere rechte gecombineerd met A_∞ B_∞ is weer een ontaarde ⊙. Op deze wijze krijgen we weer een stelsel van ∞^1 ontaarde ⊙'s.

d. Imaginaire lijnenparen i, j der congruentie.

afleiding.

De rechten i, die a, m^2 en ω_∞ snijden vormen een oppervlak van den graad 8.

Hiervan splitsen zich twee waaiers af, die de imaginaire cirkelpunten van m^2 tot centrum hebben en op a rusten. Er blijft dus een oppervlak I_6 over.

Door een punt B op b gaan twee rechten j, die op m^2 en ω_∞ rusten en voorts de rechten, die B met de imaginaire cirkelpunten van m^2 verbinden.

Deze laatsten blijven buiten beschouwing.

De beide rechten j snijden I_6 in 12 punten C; snijden m. a. w. 12 rechten i, waardoor 12 ⊙'s van de congruentie bepaald worden, die ontaard zijn in het isotrope lijnenpaar i, j.

Laten we B de rechte b doorloopen, dan krijgen we een stelsel van ∞^1 isotrope lijnenparen i, j.

Van welken graad is de ruimtekromme c, die de meetk. plaats is der punten C?

De rechten i liggen op een I_6 en de rechten j liggen op een J_6. Hun doorsnede is een kromme van den graad 36, die bestaat uit:

1°. m^2 op beide oppervlakken dubbel; graad $4 \times 2 = 8$.

2°. ω_∞ „ „ „ „ ; „ $4 \times 2 = 8$.

3°. 6 rechten, die rusten op a, b, m^2 en ω_∞.

4°. de kromme c.

Deze laatste is dus van den graad:

$36 - (8 + 8 + 6) = 14.$

De kromme is dus een c_{14}.

We kunnen deze uitkomst verifieeren door de snijpunten te bepalen van c_{14} met een vlak α door a.

In α liggen 4 rechten i. Elke rechte i snijdt J_6 in 6 punten, waarvan 2 op m^2 en 2 op ω_∞. Blijven dus 2 punten C op elk dezer 4 rechten i. Dit geeft 8 snijpunten C in α. Op a zelf liggen 6 punten C, d. z. de snijpunten van a met J_6. Dus totaal 14 punten,

Opmerking.

De kromme c_{14} heeft a en b tot zesvoudige snijlijnen en de 6 rechten, die I_6 en J_6 gemeen hebben tot koorden. De steunpunten van die koorden zijn de snijpunten van c_{14} met a en b.

§ 3. *De orde der congruentie is 4.*

De ⊙'s door een willekeurig punt Q liggen op den bol door m^2 en Q. Deze snijdt de rechten a en b ieder in twee punten A en B, waardoor vier rechten AB bepaald worden. De vier vlakken Q A B snijden den bol volgens vier ⊙'s van de congruentie. De orde is dus 4.

§ 4. *De klasse der congruentie is 4.*

Door den bollenbundel wordt op a en op b een punteninvolutie bepaald. Projekteeren we deze punteninvoluties door vlakken, welke door een willekeurige rechte l gaan dan krijgen we twee projektieve kwadratische vlakkeninvoluties met 4 coïncidenties. Er zijn dus 4 rechten P A B, die l snijden. De vlakken door l en elke P A B snijden den bijbehoorenden bol volgens een ⊙ van de congruentie, die l twee keer snijdt. De klasse is dus 4.

§ 5. *Het regelvlak, gevormd door de rechten P A B is een O_4.*

Dit volgt rechtstreeks uit § 4, daar de rechte l door 4 rechten P A B gesneden werd. Nog op andere wijze kan de graad van dit regelvlak, en dus ook de klasse, worden afgeleid.

We zoeken het aantal snijpunten van m^2 met de meetk. plaats van P.

Zal P op m^2 liggen, dan moet P A B op een bol liggen van den bundel, dus ω_∞ snijden. Omgekeerd zullen alle rechten, die m^2, ω_∞, a en b snijden, een punt P op m^2 leveren.

Het aantal rechten, dat op m^2, ω_∞, a en b rust is gelijk aan den graad van het regelvlak, gevormd door de rechten, die op m^2, ω_∞ en a rusten.

Een vlak door a snijdt m^2 en ω_∞ elk in twee punten, die vier verbindingslijnen geven. Bovendien is a dubbelrechte, omdat door ieder punt van a twee beschrijvenden gaan. Het regelvlak is dus van den graad 6, zoodat het punt P 6 keer op m^2 komt. De snijkromme van het gevraagde regelvlak met μ is dus een kromme π_3. Ook de rechte A_μ B_μ ligt op het oppervlak, doordat het vlak μ met V_∞ een ontaarde bol uit den bundel vormt. Hieruit volgt, dat de graad van het regelvlak 4 is.

§ 6. *Singuliere punten.*

a. De punten van m^2.
b. De punten van a en b.
c. De punten van A_μ B_μ en A_∞ B_∞.

§ 7. *Oppervlak van cirkels door een singulier punt.*

a. Door een punt M op m^2 gaat een O_{11}.

Bepalen we de doorsnede van het gevraagde oppervlak met een bol van den bundel. Deze bol bepaalt vier rechten A B, dus vier $\odot$'s, die erop liggen en tot het oppervlak behooren. Hoeveelvoudig telt m^2 op den bol, m. a. w. hoeveel $\odot$'s gaan behalve door M nog door een punt N op m^2? Blijkbaar drievoudig, want het oppervlak der $\odot$'s door de punten M en N, die a in een punt snijden is van den graad 3 (in elk vlak door M N ligt één $\odot$ benevens de rechte M N).

De vlakken van de $\odot$'s, die door M gaan, omhullen een kegel van de vierde klasse, waarvan de doorsnede met V_∞ een kromme van de vierde klasse is.

Uit ieder punt van ω_∞ kan men dus vier raaklijnen trekken, waaruit volgt, dat ω_∞ op het gezochte oppervlak viervoudig is. Op den ból uit den bundel is dus de doorsnede van den graad; $4 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 2 = 22$.

Hieruit volgt, dat het gevraagde oppervlak een O_{11} is.

b. Door een punt A op *a* gaat een bol.

Door A gaat één bol van den bundel, die *b* in twee punten B snijdt, dus twee rechten A B levert.

Hieruit volgt, dat het gevraagde oppervlak de dubbeltellende bol uit den bundel is, die door A bepaald wordt. Analoog een dubbeltellende bol door een punt B op *b*.

§ 8. *Singuliere koorden.*

Iedere rechte P A B.

Want door elke P A B werd een vlakkenbundel gebracht, die den bijbehoorenden bol volgens ⊙'s van de congruentie sneed.

§ 9. *Het oppervlak van de ⊙'s, die een rechte* l *snijden is een* Λ_{30}.

1e afleiding,

De graad van het gevraagde oppervlak wordt bepaald door het aantal snijpunten met een willekeurige rechte *p*. D. w. z. door het aantal keeren, dat de snijpunten A, B, L, P van de gelijknamige rechten met een bol uit den bollenbundel in een plat vlak liggen. Breng een bol door m^2 en een willekeurig punt P op *p*.

Deze snijdt *a*, *b* en *l* ieder in twee punten, die acht verbindingsvlakken geven en dus acht snijpunten Π met *p*. Zoo dikwijls P met Π samenvalt, wanneer P de rechte *p* doorloopt, hebben we een ⊙ van het gevraagde oppervlak. We onderzoeken dus de verwantschap (P, Π).

Bij elk punt P behooren 8 punten Π.

Hoeveel punten P behooren bij één punt Π?

We nemen een willekeurig punt L_q op l aan en duiden de rechte $L_q\Pi$ door q aan.

De bol door L_q en m^2 snijdt a en b ieder in twee punten A en B, zoodat we vier vlakken krijgen door A, B en Π, die weer vier snijpunten L_r met l geven.

We duiden de rechte $L_r\Pi$ door r aan.

Doorloopt q een waaier, dan zien we, dat bij iedere q vier rechten r behooren.

Hoeveel rechten q behooren nu bij één rechte r?

Projekteeren we de puntenparen A en B vanuit r, dan krijgen we twee vlakkenbundels, die een (2, 2) correspondentie vormen met 4 coïncidenties.

Er zijn dus vier rechten AB, die een rechte r snijden.

Daarbij behooren vier bollen, die l in acht punten L_q snijden.

Bij één rechte r behooren dus 8 rechten q.

De waaiers q en r vormen dus een (4, 8) correspondentie met 12 coïncidenties, d. w. z. twaalf keeren zullen de punten L_q en L_r samenvallen.

Daarbij behooren twaalf bollen, die de rechten a, b en l zoo snijden, dat bij elken bol een drietal snijpunten A, B en L met Π in één plat vlak liggen. Deze twaalf bollen snijden de rechte p in 24 punten P.

Bij één punt Π behooren dus 24 punten P.

De verwantschap (P, Π) is dus een (8, 24).

Er zijn derhalve 32 coïncidenties, dus 32 bollen, dus 32 vlakken, die de snijpunten A, B, L en P op een ⊙ hebben liggen, die m^2 in twee punten snijdt. Komt P in P_∞ of in P_μ, dan is voor beide punten de bijbehoorende bol het vlakkenpaar μ, V_∞. Maar de vier snijpunten van deze vlakken met de rechten a, b, l en p liggen niet op een ⊙.

Van de 32 coïncidenties moeten er dus twee afgetrokken worden. Het gevraagde oppervlak is dus een Λ_{30}.

2e afleiding.

We bepalen de doorsnede van het gevraagde oppervlak met μ.

Hoeveel voudig ligt m^2 op Λ m. a. w. hoeveel $\odot$'s gaan door een punt M op m^2?

Wij vonden voor het oppervlak van $\odot$'s, die door M gaan een O_{11}. Dit blijkt nog op andere wijze door de doorsnede met μ te bepalen.

Het oppervlak der $\odot$'s, die m^2 in twee vaste punten M en N snijden en ook de rechte a snijden is van den graad 3. In laatstgenoemde doorsnede telt dus m^2 drievoudig. Verder liggen in μ de $\odot$ door de punten M, A_μ en B_μ, de rechten $M A_\mu$, $M B_\mu$ en de doorsnede met μ van een vlak door M // a en b.

De laatste drie rechten maken deel uit van ontaarde $\odot$'s die tot het oppervlak behooren.

Dat oppervlak is dus van den graad:

$3 \times 2 + 2 + (1 + 1 + 1) = 11.$

De rechte l snijdt O_{11} in elf punten, zoodat er 11 $\odot$'s zijn, die m^2 in M en nog een punt snijden en die a, b en l één keer snijden.

Op het oppervlak Λ en in de doorsnede met μ ligt derhalve m^2 elfvoudig. Verder liggen nog in μ de $\odot$ door A_μ, B_μ en L_μ, de rechten $A_\mu B_\mu$, $B_\mu L_\mu$, $A_\mu L_\mu$ en ten slotte de rechten, die de doorsnede vormen met μ van vlakken door A_μ // b en l door B_μ // a en l, door L_μ // a en b.

Al die rechten maken weer deel uit van ontaarde $\odot$'s.

De totaaldoorsnede met μ is dus van den graad:

$11 \times 2 + 2 + (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 30.$

We krijgen dus een Λ_{30}.

Hierop is l koorde van 4 $\odot$'s, die dubbelkrommen van Λ_{30} zijn. Wegens de symmetrie tusschen a, b en l zijn er dus op Λ_{30} twaalf dubbelcirkels.

§ 10. *Het oppervlak der cirkels, die aan een vlak Φ raken is een Φ_{36}.*

Brengen we een vlak λ door l, dan snijdt dit vlak Λ_{30} volgens een doorsnede, waartoe l viervoudig behoort, omdat de orde 4 is.

Blijft een restdoorsnede λ_{26}, die l in 26 punten snijdt.

Alle punten van λ_{26} zijn punten van $\odot$'s, die λ voor de tweede keer doorboren in een punt van l. Beschouwen we nu den $\odot$ door één der 26 snijpunten, dan kunnen zich twee gevallen voordoen.

1e Het snijpunt van den $\odot$ met l valt niet met het bedoelde snijpunt, dat ook op l ligt, samen.

2e Het snijpunt valt er wel mee samen.

Valt het er niet mee samen, dan hebben we te doen met een $\odot$, die l in twee punten snijdt. Dit gebeurt vier keer, omdat de klasse 4 is. Van de 26 punten blijven er dus 18 over, die raakpunten zijn van $\odot$'s op Λ_{30}, welke aan λ raken. De raakkromme van $\odot$'s in de congruentie, die aan een vlak ϕ raken is derhalve van den graad 18 en het oppervlak, dat deze $\odot$'s vormen is een Φ_{36}.

Op dit oppervlak liggen de rechten a en b viervoudig. Want breng door een punt A op a een bol uit den bundel. Deze snijdt b in twee punten B_1 en B_2 en het vlak ϕ volgens een $\odot$ ϕ^2. Trek raaklijnen aan ϕ^2 uit de snijpunten met ϕ van de rechten $A B_1$ en $A B_2$.

Ieder twee raaklijnen, waardoor vier vlakken bepaald worden, die den bol snijden volgens $\odot$'s, die aan ϕ raken.

Wat is de doorsnede van Φ_{36} met het vlak μ?

Vooreerst liggen in μ de beide $\odot$'s door A_μ en B_μ, die aan de doorsnede (μ, ϕ) raken.

Voorts de beide rechten door A_μ en B_μ $//$ (μ, ϕ) en ten slotte de $\odot$ m^2 die n voudig telt. Hieruit volgt:

$2 \times 2 + 1 + 1 + 2\,n = 36.$

Dus m^2 ligt 15 voudig op Φ_{36}.

HOOFDSTUK II.

Congruentie van cirkels, die twee vlakken α en β raken en een rechte m twee keer snijden.

§ 1. *Algemeene afleiding.*

De snijpunten van m met α en β noemen we resp. A en B, de doorsnede van α en β zij $(\alpha\beta)$, een vlak door m noemen we μ en het snijpunt daarvan met $(\alpha\beta)$ geven we met P aan.

Het oneindig verre punt van m zij M_∞. De ⊙'s van de congruentie liggen in de vlakken van den vlakkenbundel μ. In ieder vlak μ liggen ∞^1 ⊙'s, die aan P A en P B raken en die dus hun middelpunt hebben op de binnen- en buitenbissectrice van $\angle$ A P B.

§ 2. *Ontaardingen in de congruentie.*

a. Alle rechten in V_∞, die door het punt M_∞ gaan, opgevat als dubbelrechten.

b. De isotrope lijnenparen, die hun top hebben liggen op $(\alpha\beta)$ en die rusten op m.

c. De isotrope rechten als dubbelrechten opgevat, die liggen in de raakvlakken door m aan den imaginairen bolcirkel. Dit geeft twee stelsels van ∞^1 ontaardingen.

§ 3. *De orde van de congruentie is 4.*

Brengen we n.l. door een willekeurig punt X een vlak μ, dan zijn er 4 ⊙'s, die door X gaan en die P A en P B raken. Twee ervan zijn reëel, de andere twee imaginair.

Komt X op P A of P B te liggen, dan zijn er twee reëele dubbeltellende ⊙'s.

§ 4. *De klasse is nul.*

Door een willekeurige rechte l kan in 't algemeen geen vlak μ gebracht worden.

§ 5. *Singuliere koorden.*

a. Elke rechte, die m snijdt.

b. De rechte m is een hoofdkoorde.

c. Alle rechten in V_∞.

Deze laatsten snijden n.l. de ontaarde ⊙'s van § 2 a in twee samenvallende punten.

§ 6. *Singuliere punten.*

a. Alle punten van m.

b. De beide punten van den imaginairen bolcirkel bedoeld in § 2 c.

§ 7. *Oppervlak der ⊙'s door een punt M op m is een* O_{12}.

1e afleiding.

Door het punt M gaan, in ieder vlak μ, 4 ⊙'s van de congruentie. Laten we μ wentelen om m dan ontstaat een oppervlak. Hierop komt m viervoudig voor. Door inversie toe te passen, ziet men n.l. dat er 4 ⊙'s zijn, die bovendien door een willekeurig punt N op m gaan. De doorsnede van het opp. met een vlak μ is dus van den graad:

$4 \times 2 + 4 = 12.$

2e afleiding.

In een vlak μ liggen 4 ⊙'s, die door M gaan.

Om de veelvuldigheid van m te bepalen, vragen we naar het aantal ⊙'s, die behalve door M, nog door een willekeurig punt N gaan.

Het opp. der ⊙'s, die door M en N gaan, en die α raken, heeft in α een ⊙ ρ^2_α tot raakkromme, waarvan de straal r_α bepaald wordt door de betrekking:

$AN \times AM = r^2_\alpha$ ..... analoog in β een $\odot\, \rho^2_\beta$:
$BM \times BN = r^2_\beta$.

Het opp. der $\odot$'s, die α raken is nu van den graad 4 en snijdt dus β volgens een vierdegraadskromme, die met ρ^2_β acht snijpunten heeft.

Vier ervan zijn de dubbeltellende imaginaire cirkelpunten van α, omdat ω_∞ op het vierdegraadsopp. tweevoudig voorkomt.

Er zijn echter geen $\odot$'s mogelijk, die β in deze punten raken, die α raken en die door M en N gaan.

Blijven over 4 snijpunten op ρ^2_β, dus 4 $\odot$'s, die door M en N gaan en die α en β raken.

Op het gezochte opp. is dus m viervoudig en de doorsnede met μ van den graad:

$4 \times 2 + 4 = 12$. Het oppervlak is dus een O_{12}.

§ 8. *De $\odot$'s die α in A raken, hebben hun raakpunten in β op een c_3.*

In een vlak μ liggen twee $\odot$'s, die α in A en die β in twee punten C_1 en C_2 raken. De punten C_1 en C_2 liggen op P B zoodanig, dat:

$PC_1 = PC_2 = PA$.

Behalve C_1 en C_2 behoort op een rechte P B ook het punt B tot de gevraagde kromme. Want als μ zoodanig aangebracht wordt, dat $\triangle PAB$ gelijkbeenig is, valt C_1 met B samen.

De rechte P B snijdt de gevraagde kromme dus in 3 punten. Deze is daarom een c_3.

Het oppervlak door die $\odot$'s beschreven is nu van den graad 6. Hierop komt A voor als viervoudig punt, want in een vlak μ liggen twee $\odot$'s, die door A gaan, terwijl de rechte m op het oppervlak tweevoudig ligt. Er zijn n.l. twee $\odot$'s, die door een willekeurig punt M gaan en aan β raken. Hun raakpunt in β ligt op een cirkelomtrek, waarvan B het middelpunt is en waarvan de straal r volgt uit de betrekking: $r^2 = BM \times BA$.

We zien dus, dat in een willekeurig vlak μ twee $\odot$'s en de tweevoudige rechte m liggen. Hiermee is de graad 6 van het oppervlak gecontroleerd.

§ 9. *Wanneer het raakpunt in α een rechte* l *doorloopt, doorloopt het raakpunt in β een* c_5.

Een vlak μ snijdt l in een punt L.

In μ liggen twee ⊙'s, die α in L raken en β in twee punten C_1 en C_2 op P B gelegen en zoodanig, dat:

$P C_1 = P C_2 = P L$.

Het punt B kan zelf ook als raakpunt optreden en wel van ⊙'s, die hun raakpunt in α op l hebben liggen. Want volgens § 8 correspondeert met het raakpunt B in β een kromme c_3 in α, die l in 3 punten snijdt.

Op de rechte P B in μ liggen dus 5 punten van de gevraagde kromme w.o. het drievoudige punt B. Deze kromme is dus een c_5, die door het snijpunt van l met $(\alpha\,\beta)$ gaat.

Het door de rakende ⊙'s gevormde oppervlak is van den graad 10.

Een willekeurige rechte k in β snijdt c_5 in 5 punten.

Van de congruentie van ⊙'s, die een vlak α in de punten van een rechte l en een vlak β in de punten van een rechte k raken, zijn er dus 5, die een rechte m twee keer snijden. Van die congruentie is derhalve de klasse 5.

§ 10. *Het oppervlak der ⊙'s, die* m *raken is een* O_{10}.

In een vlak μ liggen vier ⊙'s, die aan de voorwaarde voldoen, n.l. de in- en aangeschreven ⊙'s van △ P A B. Bovendien ligt m tweevoudig op het oppervlak, waaruit de graad 10 volgt.

Dat m tweevoudig is, volgt uit de afleiding van het aantal ⊙'s, die in een punt M aan m raken.

1e afleiding.

Inverteer de figuur t.o. van M. De vlakken α en β gaan dan over in bollen door M. De gevraagde ⊙'s zullen overgaan in rechten $/\!/ m$, die de bollen moeten raken. De rechte m blijft een rechte m door M. We beschouwen het punt M_∞ op m. De rechten uit M_∞, die de bollen α en β raken liggen op twee cilinders, die α en β omhullen. Hun doorsnede bestaat uit twee eindige rechten en uit de twee raaklijnen, die men in V_∞ uit M_∞ aan ω_∞ kan trekken. De twee eindige rechten teruggeinverteerd gaan over in $\odot$'s, die m in M raken en die α en β raken.

2e afleiding.

De raakpunten A' van de gevraagde $\odot$'s met het vlak α moeten liggen op een cirkelomtrek, waarvan het middelpunt A is en waarvan de straal $A A' = A M$. Evenzoo een analoge $\odot$ in β met straal $B B' = B M$.

In het vlak μ, waarin een gevraagde $\odot$ ligt moet nu verder $P A' = P B'$ zijn. Slaan we de vlakken α en β om hun doorsnede $(\alpha\beta)$ neer in een plat vlak, dan kunnen we vragen naar de meetk. plaats der middelpunten van de $\odot$'s, die aan de $\odot$'s A' en B' raken. Deze meetk. plaats is een kegelsnede, welke door $(\alpha\beta)$ in twee punten gesneden wordt. Hierdoor worden twee vlakken μ bepaald, dus twee $\odot$'s, die m in M en die α en β raken.

§ 11. *Het oppervlak van de $\odot$'s, die een vlak φ raken, is een Φ_{32}.*

Het vlak φ snijdt m in een punt M.

Door M trekken we een rechte f in φ. Van de raakkromme in φ bepalen we het aantal snijpunten met f. Brengen we het vlak μ door f en m.

Door een willekeurig punt F op f gaan vier $\odot$'s van de congruentie, die dus in μ liggen. Zij bepalen op F vier snijpunten G. Omgekeerd bepaalt ieder punt G vier snijpunten F op f. De punten F, G vormen dus een (4,4) correspondentie met 8 coïncidenties.

Er zijn derhalve 8 $\odot$'s in μ, die aan f raken en die dus aan φ raken. [1])

---

[1]) Van de 8 coïncidenties op f worden er 4 geleverd door de in- en aangeschreven $\odot$'s van den $\triangle$, gevormd door de rechten PA, PB en f. De andere 4 vallen samen in het oneindig verre punt van f d. i. F_∞.

Denken we ons n.l. de $\odot$'s van de congruentie, die door F_∞ gaan, dan correspondeeren daarmee 4 punten G op f. De 4 $\odot$'s door F_∞ en telkens één der punten G moeten nu ook gaan door de beide imaginaire cirkelpunten

Dit levert 8 snijpunten van de raakkromme in Φ met f. Bovendien telt M als achtvoudig snijpunt mede.

We hebben n.l. in § 7 afgeleid, dat het oppervlak van de $\odot$'s, die tot de congruentie behooren en door een punt M gaan, een O_{12} is.

In μ liggen 4 $\odot$'s van dit oppervlak (orde is 4), die door de rechte f behalve in M in nog 4 punten gesneden worden. Het punt M is dus achtvoudig punt op O_{12}, dus 8 raaklijnen uit M aan de doorsnede van O_{12} met Φ, dus 8 $\odot$'s, die aan Φ raken.

We zien derhalve, dat het aantal snijpunten van de raakkromme in Φ met de rechte f zal bedragen: $8 + 8 = 16$.

Deze raakkromme is dus van den graad 16 en het oppervlak, dat door de rakende $\odot$'s gevormd wordt, is een Φ_{32}.

§ 12. *Het oppervlak der $\odot$'s, die een rechte l snijden is een Λ_{20}.*

We zoeken de doorsnede van het oppervlak Λ met een vlak μ, dat l in een punt L snijdt.

Er zijn 4 $\odot$'s, die door L gaan, omdat de orde 4 is.

In μ ligt nu ook nog de rechte m, die 12 voudig tot het oppervlak behoort. Want het oppervlak O_{12} van § 7, wordt in 12 punten door l gesneden.

In het vlak μ is dus de doorsnede van den graad:

$4 \times 2 + 12 = 20$.

Het gevraagde oppervlak is dus Λ_{20}.

Snijden we Λ_{20} met een vlak λ door l.

De doorsnede is nu van den graad 20, waartoe l viervoudig behoort, omdat de orde 4 is.

Blijft over een kromme van den graad 16, die l in 16 punten snijdt. Daar de klasse nul is, zal elk van de 16 snijpunten raakpunt zijn van een $\odot$, die aan λ raakt. De raak-

---

van μ, zoodat ze alle 4 moeten ontaarden in de dubbeltellende oneindig verre rechte van μ. De 4 punten G vallen dus met F_∞ samen.

Laten we μ den bundel doorloopen, dan wordt in V_∞ de waaier met M_∞ als middelpunt uitgesneden. Hieruit volgt, dat V_∞ 8 voudig tot Φ_{32} behoort.

kromme van de ⊙'s, die aan een vlak ϕ raken is derhalve van den graad 16 en het oppervlak door die ⊙'s beschreven is een Φ_{32} (zie § 11).

§ 12. *Het oppervlak der middelpunten van de ⊙'s in de congruentie is een regelvlak* M_4,

We bepalen weer de doorsnede met een vlak μ.

Daarin liggen de deellijnen d_1 en d_2 van $\angle$ A P B als meetk. plaats van middelpunten.

De rechte m telt in μ tweevoudig.

Noemen we n.l. de snijpunten vnn d_1 en d_2 met m resp. D_1 en D_2, dan bepaalt ieder vlak μ één puntenpaar D_1 en D_2, maar elk puntenpaar D_1 en D_2 bepaalt twee vlakken μ.

De bol met $D_1 D_2$ tot middellijn snijdt n.l. $(\alpha\beta)$ in twee punten P. Daarom is m tweevoudig en de doorsnede van het gevraagde oppervlak met μ van den graad: $1 + 1 + 2 = 4$.

Op dit oppervlak ligt $(\alpha\beta)$ dubbel, want door ieder punt P gaan twee beschrijvenden d_1 en d_2.

Brengen we het vlak $\mu \parallel (\alpha\beta)$ aan, dan is d_1 de rechte, die A B halveert en $\parallel (\alpha\beta)$ loopt, terwijl d_2 de oneindig-verre rechte in dat vlak is.

De restdoorsnede van het vierdegraadsoppervlak met V_∞ is een niet ontaarde derdegraadskromme. Dit blijkt b.v. door die kromme vanuit B te projekteeren. We krijgen dan een kegel, die het vlak α volgens een niet ontaarde c_3 snijdt.

In § 2a noemden we de rechten in V_∞ door M_∞ als ontaarde ⊙'s. Als middelpunt van zoo'n dubbeltellende rechte, kan ieder punt van de rechte zelf gelden. Zoo opgevat behoort ook V_∞ nog tot de meetk. plaats der middelpunten.

HOOFDSTUK III.

Congruentie van cirkels door de snijpunten van een kubische ruimtekromme ρ^3 met de vlakken van een vlakkenschoof S.

§ 1. *Algemeene afleiding.*

Een willekeurig vlak door het punt S snijdt ρ^3 in de punten A, B en C. De $\odot$ door die punten behoort tot de congruentie. De vlakken van de schoof S snijden op ρ^3 een I^2_3 uit en deze involutie heeft een neutraal puntenpaar N_1, N_2, d.z. de snijpunten van de bisekante door S met ρ^3.

§ 2. *Ontaardingen.*

a. Noemen we de drie snijpunten van ρ^3 met V_∞ resp. R_1, R_2, R_3.

Een vlak α door S en één dier punten snijdt ρ^3 in nog twee eindige punten. De bisekante, die ze verbindt vormt met de rechte (α, V_∞) een ontaarde $\odot$ van de congruentie. We krijgen aldus 3 stelsels van ∞^1 ontaardingen.

b. Beschouw de bisekanten, die rusten op ω_∞.

Een vlak door een bisekante en door S snijdt ρ^3 in nog een punt C. De bisekante aangevuld met de isotrope rechte door C in dit vlak vormt een ontaarding. Dit geeft ∞^2 ontaardingen.

§ 3. *De orde van de congruentie is 3.*

Denken we een punt P buiten ρ^3 en een $\odot$ door P, die tot de congruentie behoort. Deze $\odot$ bepaalt dan met ρ^3 een kwadratisch regelvlak.

Op elke hyperboloïde door P en ρ^3 liggen nu 6 $\odot$'s, die door P gaan. De hyperboloïde snijdt n.l. V_∞ volgens een kegelsnede, die door ω_∞ in 4 punten gesneden wordt.

Deze 4 punten geven 6 verbindingslijnen en de vlakken door elk daarvan en door P geven een cyclische doorsnede. Laten we de door P en ρ^3 bepaalde hyperboloïde een bundel doorloopen, dan omhullen de verbindingslijnen in V_∞ een kromme van de derde klasse γ^3.

Want door elk punt van ω_∞ gaan 3 van de genoemde verbindingslijnen.

Door het oneindig verre punt van S P trekken we de 3 raaklijnen aan γ^3, waardoor 3 hyperboloïden uit den bundel bepaald worden. De vlakken door S P en die raaklijnen snijden de bijbehoorende hyperboloïde volgens $\odot$'s. De orde is dus 3.

§ 4. *De klasse is één.*

In het vlak door S en een willekeurige rechte *l* ligt één $\odot$ van de congruentie.

§ 5. *Singuliere punten.*

a. Elk punt van ρ^3.
b. De punten van ω_∞.
c. Het punt S.

§ 6. *Singuliere koorden.*

Alle rechten door S.

§ 7. *Oppervlak van $\odot$'s door een singulier punt.*

a. De $\odot$'s door een punt P van ρ^3 liggen op een O_5.

In elk vlak door S P ligt één $\odot$. De rechte S P ligt drievoudig op het oppervlak, omdat de orde 3 is.

In zoo'n vlak is dus de doorsnede van den graad 5 en het gevraagde oppervlak is dus een O_5.

Hierop ligt ρ^3 enkelvoudig.

Ook ω_∞ ligt er enkelvoudig op, want door P, S en een punt Q op ω_∞ wordt één vlak, dus één $\odot$ bepaald.

De restdoorsnede van O_5 met V_∞ bestaat uit 3 rechten n.l. door het oneindig verre punt van S P en door resp. R_1, R_2 en R_3.

Een willekeurige rechte door P snijdt het oppervlak in nog een punt, zoodat P viervoudig punt is en O_5 dus een monoïde.

Daar de rechte SP drievoudig is, moeten op O_5 nog $5 \times 4 - 3^2 = 11$ rechten liggen, die door P gaan.

Daartoe behooren:

1°. De drie bisekanten door P in de vlakken door S P en resp. R_1, R_2, R_3.

2°. Vier isotrope rechten, verkregen door den imaginairen bolcirkel vanuit P te projekteeren. De kegel wordt door ρ^3 in nog 4 punten gesneden, wat 4 imaginaire bisekanten levert. Deze worden aangevuld met de isotrope rechte telkens in een vlak door S en één dezer bisekanten en gaande door het snijpunt van zoo'n vlak met ρ^3.

3°. Alle bisekanten, die S P snijden vormen een kwadratisch regelvlak, dat door ω_∞ in 4 punten gesneden wordt. Door die 4 snijpunten worden 4 bisekanten bepaald, die aangevuld kunnen worden met de isotrope rechten door P in de vlakken door S en resp. elk der 4 bisekanten.

b. De ⊙'s door een punt I op ω_∞ liggen op een I_5.

In elk vlak van den vlakkenbundel S I ligt één ⊙.

De rechte S I is drievoudig, omdat de orde 3 is. De doorsnede van het oppervlak met een vlak uit den bundel is dus van den graad 5, dus het oppervlak een I_5. Op I_5 ligt ω_∞ enkelvoudig evenals ρ^3.

De restdoorsnede met V_∞ zijn de rechten door I en resp. R_1, R_2, R_3.

Het punt I is viervoudig punt en dus het oppervlak een monoïde. Daar S I drievoudig is liggen weer: $5 \times 4 - 3^2 = 11$ rechten op I_5, die door I gaan. Deze zijn:

1°. Het bovengenoemde drietal.

2°. De bisekante van I.

Breng een vlak door S en de bisekante van I. Dit snijdt

ω_∞ en ρ^3 elk in nog een punt. De bisekante, aangevuld met de verbindingslijn van die twee punten geeft een ontaarden ⊙ van het oppervlak.

4⁰. De bisekanten, die S I snijden, vormen een regelvlak van den graad 4. Want S I ligt er enkelvoudig op en een vlak door S I snijdt ρ^3 in drie punten, wat drie bisekanten levert. Dit oppervlak wordt door ω_∞ in I en nog 7 punten gesneden, waardoor 7 bisekanten bepaald worden. In de vlakken door S en elk dier bisekanten, krijgen we als aanvulling de isotrope rechten door I en het snijpunt van zoo'n vlak met ρ^3. Dit geeft dus nog 7 rechten door I.

c. De ⊙'s door S liggen op een Σ_{12}.

1e afleiding.

Een ⊙ van de congruentie door S bepaalt met ρ^3 een hyperboloïde uit den bundel, die door ρ^3 en S bepaald wordt. Op iedere hyperboloïde liggen 6 ⊙'s, die door S gaan. Hoeveel snijpunten heeft nu een rechte l met het gevraagde oppervlak?

Een punt P op l bepaalt één hyperboloïde uit den bundel, waarop 6 cyclische doorsneden door S liggen. De vlakken daarvan snijden l in 6 punten Q. Door het oneindig verre punt van S Q kunnen we 3 raaklijnen aan de kromme γ^3 trekken, waardoor 3 hyperboloïden uit den bundel bepaald worden, die l in 6 punten P snijden. De correspondentie (P, Q) op l is dus (6,6) met 12 coïncidenties.

Vallen P en Q samen, dan hebben we een ⊙, die door S gaat en l snijdt. Er zijn dus 12 ⊙'s, die l snijden. Het oppervlak is dus een Σ_{12}.

2e afleiding.

We bepalen de doorsnede van het gevraagde oppervlak met een hyperboloïde uit den bundel.

Op de hyperboloïde liggen 6 cyclische doorsneden door S. De kromme ρ^3 ligt er drievoudig op. Want neem een punt P op ρ^3, dan kunnen we door het oneindig verre punt van S P drie raaklijnen aan γ^3 trekken.

Ook de bisekante S N_1 N_2 ligt er drievoudig op, want deze kan drievoudig als ontaarding beschouwd worden en moet daartoe telkens aangevuld worden met de rechten door het oneindig verre punt van $S N_1 N_2$ en resp. R_1, R_2, R_3. De doorsnede is dus van den graad: $6 \times 2 + 3 \times 3 + 3 = 24$.

Het oppervlak is dus een Σ_{12}.

Behalve ρ^3, en de bisekante door S ligt ook ω_∞ drievoudig op het oppervlak, omdat door een punt I op ω_∞ weer drie raaklijnen aan γ^3 te trekken zijn.

De restdoorsnede van het oppervlak met V_∞ bestaat uit de drie rechten in de tweede afleiding vermeld en uit de bisekanten van ρ^3 in V_∞. Deze laatsten aan te vullen met de rechten door S en het snijpunt met ρ^3 van elk der drie vlakken door S en één dezer drie bisekanten.

Door het oneindig verre punt van een willekeurige rechte l door S kunnen we weer drie raaklijnen aan γ^3 trekken, zoodat l door drie $\odot$'s van het oppervlak gesneden wordt. Dus S is 9 voudig punt op Σ_{12}.

§ 8. *Oppervlak van $\odot$'s door een singuliere koorde.*

a. Door de koorde $S N_1 N_2$ wordt een O_5 bepaald.

In een willekeurig vlak door $S N_1 N_2$ ligt een $\odot$. De koorde ligt zelf drievoudig op het oppervlak, omdat ze aangevuld kan worden met de rechten door haar oneindig verre punt en resp. R_1, R_2, R_3.

De doorsnede is dus van den graad 5.

Op O_5 liggen ρ^3 en ω_∞ enkelvoudig.

De punten N_1 en N_2 zijn viervoudig, zoodat het oppervlak een dimonoïde is. Door elk dezer punten moeten daarom $2(5-1) = 8$ rechten gaan.

Projekteer ω_∞ vanuit N_1. De kwadratische kegel wordt door ρ^3 in nog 4 punten gesneden, waardoor 4 beschrijvende imaginaire rechten bepaald worden.

In het vlak door S en elk dier rechten beschouwen we een tweede isotrope rechte door N_2.

Dit geeft dus twee viertallen resp. door N_1 en N_2.

Door ω_∞ ook vanuit N_2 te projekteeren krijgen we nog twee viertallen.

b. Door een rechte *l*, door S gaande, wordt een O_5 bepaald.

In elk vlak door *l* ligt één ⊙.

De rechte *l* is drievoudig, omdat de orde drie is.

Het oppervlak is dus van den graad 5.

Hierop liggen ρ^3 en ω_∞ enkelvoudig.

In V_∞ liggen als restdoorsnede de rechten door het oneindig verre punt van *l* en resp. R_1, R_2, R_3.

Als *l* ρ^3 snijdt, is O_5 een monoïde.

§ 9. *Het oppervlak der ⊙'s, die een rechte l snijden is een* Λ_{22}.

We bepalen de doorsnede met het vlak S *l*.

Daarin ligt een ⊙, die *l* twee keer snijdt en daarom dubbel is te tellen. De rechte *l* ligt er drievoudig in, omdat de orde drie is.

Voorts ligt er nog een restkromme in, waarvan we den graad bepalen door het aantal snijpunten met een rechte S P, waarbij P op *l* ligt. Door P gaan drie ⊙'s van de congruentie, die dus S P in drie punten snijden.

Het oppervlak van de ⊙'s, die door S gaan was een Σ_{12} (§ 7. c) dus S is een 12 voudig punt. De restkromme is daarom van den graad:

$12 + 3 = 15$ en de totaaldoorsnede in vlak S *l*:

$2 \times 2 + 3 + 15 = 22$.

Het gevraagde oppervlak is dus een Λ_{22}.

Op Λ_{22} ligt ρ^3 vijfvoudig, omdat het oppervlak der ⊙'s, die door een punt P van ρ^3 gaan een O_5 was (§ 7. a). De bisekante S N_1 N_2 snijdt het oppervlak in de punten S, N_1, N_2, die resp. 12 voudig, 5 voudig en 5 voudig zijn, waarmee de graad 22 van Λ_{22} nog gecontroleerd wordt.

Ook ω_∞ ligt vijfvoudig op Λ_{22} (§ 7. b).

De restkromme in V_∞ is van den graad 12 en bestaat uit:

1⁰. De drie rechten door L_∞ op *l* en door resp. R_1, R_2, R_3. Als ontaardingen zijn deze rechten aan te vullen met de bisekante in het vlak door S en door elk dier rechten.

2⁰. De drie bisekanten van ρ^3 in V_∞.

Aan te vullen met een rechte in de vlakken door S en resp. elk dier bisekanten. Zoo'n vlak snijdt ρ^3 en l; de verbindingslijn dier snijpunten is de aanvulling.

3°. Trekken we een rechte $S R_1$. De bisekanten, die deze rechte snijden vormen een hyperboloïde, die door l in twee punten gesneden wordt.

Daardoor zijn twee bisekanten bepaald, die aangevuld worden met de snijlijn van V_∞ met een vlak door S en zoo'n bisekante.

Dit geeft ons nog:

$3 \times 2 = 6$ rechten.

We hebben hiermede tevens de 5 rechten aangewezen door elk der punten R_1, R_2, R_3 in V_∞, want ρ^3 was vijfvoudig op Λ_{22}.

§ 10. *Het oppervlak der ⊙'s, die een vlak φ raken is een Φ_{34}.*

Brengen we door de rechte l van § 9 een vlak λ, dan wordt dit door Λ_{22} gesneden volgens een kromme van den graad 22. Hiertoe behoort l drievoudig, omdat de orde 3 is.

Blijft over een kromme van den graad 19, die l in 19 punten snijdt. Hiertoe behooren de twee snijpunten van een ⊙, die l snijdt, daar de klasse 1 is.

Dus nog 17 snijpunten op l, in welke punten het vlak λ door ⊙'s geraakt wordt. De aanrakingskromme van de ⊙'s, die aan een willekeurig vlak φ raken is dus van den graad 17 en het oppervlak gevormd door die ⊙'s is een Φ_{34}.

§ 11. *Het oppervlak van de middelpunten der ⊙'s in de congruentie is een M_{14}.*

We bepalen het aantal snijpunten van dit oppervlak met de rechte $S N_1 N_2$.

Het midden van $N_1 N_2$ is viervoudig punt. Want de bol, die $N_1 N_2$ tot middellijn heeft, snijdt ρ^3 in nog 4 punten.

Het oneindig verre punt van $S N_1 N_2$, dat drievoudig is te tellen, laten we voorloopig buiten beschouwing.

Het punt S is 10 voudig punt. Nemen we n.l. een willekeurig punt P op ρ^3 aan en brengen we een bol aan door P met S tot middelpunt, dan zal deze ρ^3 in nog 5 punten snijden. We kunnen $\frac{5.4}{2.1} = 10$ vlakken aanbrengen door P en twee dier snijpunten. Laten we P de kromme ρ^3 doorloopen, dan omhullen die vlakken een kromme van de 10de klasse.

Door het punt S gaan dus 10 van die vlakken, zoodat S tien keer als middelpunt optreedt. Het aantal snijpunten van het oppervlak met S N_1 N_2 is dus: $10 + 4 = 14$, waarmee de graad van M_{14} bepaald is.

V_∞ kan drievoudig opgevat worden als meetk. plaats van middelpunten van ontaarde $\odot$'s.

Brengen we n.l. een vlakkenbundel door S R_1, dan snijdt deze V_∞ volgens een waaier door R_1.

Iedere rechte daarvan kan aangevuld worden met de bisekante in het bijbehoorende vlak.

Hetzelfde geldt voor R_2 en R_3.

Het oppervlak M_{14} wordt overdekt door een stelsel van ∞^2 krommen c_5.

Denken we een rechte l door S en een vlak daardoor, dan liggen, behoudens het tienvoudige punt S nog 4 middelpunten van $\odot$'s op l.

In het vlak ligt nog één middelpunt, en wel van den $\odot$ in dat vlak, dus krijgen we behoudens S nog 5 middelpunten daarin.

Doorloopt het vlak een bundel om l, dan zullen die middelpunten een c_5 doorloopen. Het punt S telt niet mee als middelpunt, omdat er 10 $\odot$'s met S tot middelpunt zijn, wier vlakken in het algemeen niet tot den bundel behooren.

De middelpunten der $\odot$'s op het oppervlak O_5 van § 8. a liggen op een vlakke kromme c_5 op M_{14}. Want in ieder vlak door S N_1 N_2 ligt één middelpunt. Voorts is het midden van N_1 N_2 een viervoudig punt dus de middelpunten van O_5 liggen op een vlakke kromme c_5 in het middelloodvlak van N_1 N_2.

HOOFDSTUK IV.

Congruentie van ⊙'s, die een bikwadratische ruimtekromme van de eerste soort β^4 in vier punten snijden.

§ 1. *Algemeene afleiding.*

De kromme β^4 bepaalt een bundel kwadratische oppervlakken. Elke ⊙ op een kwadratisch oppervlak snijdt β^4 in vier punten. Omgekeerd zal een kwadr. oppervlak, dat een ⊙ in nog een punt buiten β^4 snijdt, dien ⊙ geheel bevatten. Hieruit volgt, dat de ⊙'s van de congruentie de cyclische doorsneden zijn van den bundel hyperboloïden door β^4.

§ 2. *Ontaardingen.*

a. Elk van de 6 bisekanten in V_∞, aangevuld met een bisekante, die daarop rust.

Deze laatsten vormen een paraboloïde.

Dit geeft 6 stelsels van ∞^1 ontaarde ⊙'s, die op de drie paraboloïden van den bundel liggen.

b. Op elke hyperboloïde H^2 liggen 12 ontaarde ⊙'s van isotrope lijnenparen. Want door elk van de 4 snijpunten met ω_∞ gaan twee isotrope rechten op de hyperboloïde gelegen en behoorende tot de twee stelsels rechten op H^2.

Een isotrope rechte van een stelsel kan men combineeren met de drie isotrope rechten van het andere stelsel door de andere drie snijpunten. De middelpunten van deze isotrope lijnenparen zijn de navelpunten van H^2.

Bovengenoemde ontaardingen vormen een oppervlak van den graad 16.

Gaan we n.l. de doorsnede met V_∞ na, dan ligt ω_∞ er dubbel op, omdat door elk punt twee isotrope rechten gaan, terwijl de zes bisekanten in V_∞ ook dubbel tellen, daar ze ω_∞ twee keer snijden.

De umbilikaalpunten vormen hierop een kromme n_{36}. De snijpunten, met V_∞ zijn n.l.:

1e De snijpunten, waarin elke bisekante in V_∞ door ω_∞ gesneden wordt, elk dubbelgeteld, omdat de twee raakvlakken door zoo'n bisekante aan het bijbehoorend kwadratisch oppervlak samenvallen.

2e De 6 punten, waarin ω_∞ door een kegelsnede van den bundel in V_∞ aangeraakt wordt, elk dubbelgeteld.

Er zijn 6 van die kegelsneden, omdat γ^3 de kromme ω_∞ 6 keer raakt (zie Hfdst. III § 3).

Deze 6 punten zijn de dubbelpunten van een I_4.

3e De raakpunten met V_∞ van de drie paraboloïden, viervoudig geteld. We kunnen n.l. de umbilikaalpunten van elk oppervlak opvatten als de raakpunten van raakvlakken, die twee aan twee door elk der 6 rechten in V_∞ gaan. Bij een paraboloïde is nu V_∞ zelf raakvlak en het raakpunt ligt in het snijpunt van het bijbehoorende lijnenpaar in V_∞. Door elk van de 4 andere rechten in V_∞ gaat nu één raakvlak door dat snijpunt en dit is dus V_∞ zelf. Daarom is dat punt viervoudig als umbikaalpunt te tellen; zoo zijn er drie. Het totale aantal umbilikaalpunten in V_∞ is dus:

$6 \times 2 + 6 \times 2 + 3 \times 4 = 36.$

Uit den graad van n_{36} volgt. dat er op elke H^2 dus 72 navelpunten liggen. Twaalf ervan zijn specifiek voor het oppervlak; de andere 60 moeten dus op β^4 liggen.

§ 3. *De orde van de congruentie is 6.*

Door een punt P is één hyperboloïde bepaald en deze heeft 6 cyclische doorsneden, die door P gaan (zie Hfdst. III § 3). De orde is dus 6.

§ 4. *De klasse van de congruentie is 3.*

De vlakken, die de $\odot$'s van de congruentie bevatten, raken γ^3.

Door een raaklijn aan γ^3 kan men n.l. een vlakkenbundel brengen, die de bijbehoorende H^2 volgens evenwijdige cyclische doorsneden snijdt.

Door een willekeurige rechte l gaan nu drie raakvlakken aan γ^3, waardoor drie $\odot$'s van de congruentie bepaald worden als snijkrommen met de hyperboloïden, die bepaald worden door de raaklijnen aan γ^3 in V_∞ en in die vlakken.

De klasse is dus drie.

§ 5. *Singuliere punten in de congruentie.*

a. De punten van β^4.
b. De punten van ω_∞.

§ 6. *Singuliere koorden.*

De raaklijnen van γ^3.

§ 7. *Oppervlak van $\odot$'s door een singulier punt.*

a. Door een punt P van β^4 gaat een B_{12}.

We bepalen de doorsnede van dit oppervlak met een H^2 uit den bundel. Deze bestaat uit 6 $\odot$'s door P op H^2 en uit β^4, die drievoudig is te tellen.

Want als Q een willekeurig punt op β^4 is, dan is P Q koorde van 3 $\odot$'s (klasse is 3). De doorsnede is dus van den graad:

$6 \times 2 + 3 \times 4 = 24$ en dus het oppervlak van den graad 12.

Behalve β^4 ligt ook ω_∞ er drievoudig op, wat eveneens uit de klasse volgt.

Het punt P ligt als negenvoudig punt op B_{12}, omdat iedere rechte door P nog slechts drie punten van het oppervlak bevat (klasse). De restdoorsnede met V_∞ bestaat uit de 6 rechten in V_∞ en dezen worden als ontaardingen van $\odot$'s aangevuld met de bisekante in het vlak door P en elk dier rechten.

Er gaan dus 6 rechten door P op het oppervlak.

b. Door een punt I van ω_∞ gaat een Ω_2.

Door het punt I is n.l. een H^2 uit den bundel bepaald en hierdoor gaan drie stelsels van ∞^1 cyclische doorsneden, die elk H^2 overdekken.

Het oppervlak Ω_2 is dus een H^2 uit den bundel.

§ 8. *Het oppervlak der* $\odot$*'s door een singuliere koorde is een* $\dot{K}_2$.

Een raaklijn aan γ^3 bepaalt een H^2.

De vlakkenbundel door die raaklijn snijdt H^2 volgens cyclische doorsneden.

Ook het oppervlak $\dot{K}_2$ is dus een H^2 uit den bundel.

§ 9. *Het oppervlak van* $\odot$*'s, die een rechte* l *snijden is een* Λ_{36}.

Trekken we door een punt L op l een bisekante b van β^4. Deze snijdt het gevraagde oppervlak in de punten A en B als snijpunten met β^4, verder in het punt L en in nog een aantal punten P.

Op het oppervlak ligt β^4 twaalfvoudig (zie § 7a) en l zesvoudig (orde is 6).

Stel nu, dat door een punt P op b ook een $\odot$ gaat.

De hyperboloïde H^2, die door β^4 en deze $\odot$ bepaald wordt, bevat dan ook b.

Stel verder, dat H^2 de rechte l in nog een punt Q snijdt, dan gaan er 6 $\odot$'s door Q op H^2, die dus b in 6 punten P snijden.

Het totale aantal snijpunten op b is nu:

$2 \times 12 + 6 + 6 = 36.$

Het oppervlak is dus een Λ_{36}.

Uit de afleiding blijkt, dat β^4 er twaalfvoudig en l er zesvoudig op ligt.

Ook ω_∞ ligt er zesvoudig op (zie § 7*b*).

De restdoorsnede met V_∞ bestaat uit:

1e De 6 bisekanten in V_∞, die dubbel tellen, omdat de aanvulling van elk daarvan bestaat uit de bisekanten op een paraboloïde, die l twee keer snijdt.

2e Door een punt P is een H^2 bepaald en daarop 6 cyclische doorsneden door P. Analoog daarmee is door het oneindig verre punt L_∞, van l ook een H^2 bepaald en daardoor gaan eveneens 6 cyclische doorsneden. De vlakken daarvan vallen samen met V_∞, omdat ze door elk der 6 verbindingslijnen van de vier snijpunten op ω_∞ met dat kwadratisch oppervlak gaan en door L_∞.

De 6 cyclische doorsneden zijn nu niets anders dan de oneindig verre kegelsnede van het kwadratisch oppervlak 6 keer geteld.

De totaal doorsnede van Λ_{36} met V_∞ is dus van den graad: $6 \times 2 \times 2 + 6 \times 2 = 36$.

§ 10. *Het oppervlak der* $\odot$*'s, die een vlak* ϕ *raken is een* Φ_{48}.

1e afleiding.

Een vlak λ door l snijdt Λ_{36} volgens een kromme, waartoe l zesvoudig behoort en die dus l in 30 punten snijdt. Van die snijpunten zijn er 6, die tot de 3 $\odot$'s behooren, die l snijden (klasse is 3).

Er treden dus 24 punten van l op als raakpunten van $\odot$'s, die aan λ raken. De raakkromme van het oppervlak der $\odot$'s, die aan een vlak ϕ raken is dus van den graad 24 en het oppervlak is een Φ_{48}.

2e afleiding.

We kunnen het oppervlak Φ ook onafhankelijk van Λ_{36} vinden.

Een vlak ϕ snijdt de oppervlakken H^2 volgens kegelsneden, die een bundel vormen. Op elke kegelsnede liggen:

$6 \times 2 = 12$ punten, waarin een $\odot$ op de bijbehoorende hyperboloïde het vlak Φ raakt.

De cyclische doorsneden liggen n.l. in zes vlakkenbundels in elk waarvan twee vlakken aan de kegelsnede raken. De andere snijpunten van de raakkromme in ϕ kunnen alleen liggen in de basispunten.

Uit § 7a volgt, dat er in elk basispunt 9 $\odot$'s zijn, die aan ϕ raken, zoodat het totale aantal raakpunten op een willekeurige kegelsnede is:

$6 \times 2 + 4 \times 9 = 48$.

De raakkromme is dus van den graad 24, dus het oppervlak is een Φ_{48}.

Uit deze laatste afleiding blijkt tevens, dat β_4 er negenvoudig op ligt.

ω_∞ telt zesvoudig. Want alle $\odot$'s door een punt I van ω_∞ zijn de doorsneden van een kwadratisch oppervlak met drie stel evenwijdige vlakken.

Elk stel heeft twee vlakken, die raken aan de doorsnede van dat kwadratisch oppervlak met Φ.

De restdoorsnede met V_∞ bestaat uit:

1e De twee kegelsneden, die aan de oneindig verre rechte van Φ raken en die zesvoudig tellen, omdat de 4 snijpunten met ω_∞ op 6 manieren twee aan twee gecombineerd kunnen worden.

2e De zes bisekanten in V_∞ snijden de oneindig verre rechte van Φ in een punt door elk waarvan nog een bisekante van β^4 gaat.

Deze moeten dubbel geteld worden, want door een willekeurige rechte in Φ gaan steeds twee raakvlakken aan elk der $\odot$'s op Φ_{48}. Voor elk dezer 6 ontaarde $\odot$'s vallen de twee raakvlakken samen met Φ. Dus het lijnenpaar moet als rakende $\odot$ tweevoudig geteld worden.

§ 10. *Het oppervlak van de middelpunten der $\odot$'s in de congruentie is een M_{15}.*

De cyclische doorsneden van een H^2 uit den bundel liggen in 6 stel evenwijdige vlakken, zoodat de middelpunten liggen op 6 rechten. Het gevraagde oppervlak is dus een regelvlak. Nu zijn de richtingen van de middellijnen harmonisch toegevoegd aan de vlakken van de bijbehoorende cyclische doorsneden.

Het oneindig verre punt van een middellijn is dus pool van de oneindig verre rechte dier vlakken t.o. van de kegelsnede in V_∞ van de beschouwde H^2.

Van die oneindig verre rechten zijn er voor iedere H^2 zes.

We krijgen dus het volgende planimetrische vraagstuk.

Als in een vlak de kegelsneden h^2 een bundel doorloopen, vraagt men de meetk. plaats van de polen t.o. van h^2 der zestallen rechten, die door de 4 snijpunten van h^2 en een kegelsnede ω bepaald worden.

Om den graad van deze kromme te leeren kennen, vragen we naar het aantal snijpunten met de oneindig verre rechte in het vlak.

M. a. w. we vragen naar het aantal keeren, dat de beschouwde rechten middellijn worden van de bijbehoorende h^2.

Nu is de meetk. plaats der middelpunten van den bundel kegelsneden h^2 een kegelsnede μ^2 en we hebben dus te onderzoeken hoe vaak het middelpunt M van een kegelsnede h^2 samenvalt met één der snijpunten van de bijbehoorende 6 rechten met μ^2.

Bij één punt M worden door die 6 rechten op μ^2 12 snijpunten N bepaald. Bij elk punt N behooren drie van de verzameling rechten, dus drie kegelsneden h^2, dus drie punten M. (De rechten omhullen n.l. γ^3). De correspondentie op μ^2 tusschen de punten M en N is dus (3, 12). Deze geeft 15 coïncidenties.

Hiertoe behooren echter de drie middelpunten van het drietal lijnenparen in den bundel h^2, dubbel geteld. Blijven over 9 gevallen, waarbij de beschouwde verbindingslijnen middellijnen worden.

De bedoelde kromme is dus van den graad 9.

De meetk. plaats der snijpunten met V_∞ van de middellijnen der cyclische doorsneden in den bundel hyperboloïden is dus ook een kromme van den graad 9.

Hierbij moeten nog opgeteld worden de drie paren rechten, die de 4 basispunten in V_∞ verbinden (snijpunten van β^4 met V_∞).

Want alle vlakken door zoo'n rechte aangebracht zullen de bijbehoorende paraboloïde volgens ontaarde ⊙'s snijden. Deze 6 verbindingsrechten zijn echter op te vatten als meetk. plaats van middelpunten.

De totaalkromme in V_∞ is dus van den graad 15 en het gevraagde regelvlak is dus een M_{15}.

Op dit oppervlak liggen 60 snijpunten met β^4.

Dit moeten de umbilikaalpunten zijn, waarvan in § 2. c reeds melding gemaakt is.

De kromme n_{36} ligt natuurlijk op M_{15}.

Het middelpunt van een kwadratisch oppervlak H^2 van den bundel is middelpunt voor 6 ⊙'s van de congruentie. Dus de kubische ruimtekromme, die meetk. plaats is van de middelpunten der oppervlakken H^2 ligt zesvoudig op M_{15}.

Stellingen.

1.

De afbeeldingsmethode van Dr. K. W. Walstra (Verslag Kon. Akademie van Wetenschappen Deel XXV. 2 blz. 960) is nauw verwant met de bekende methode van stereografische projektie.

2.

Scheefhoekige coördinatenstelsels hebben weinig praktisch en theoretisch nut. De wijze, waarop ze door Dr. G. Schouten in zijn leerboek van de analytische meetkunde op den voorgrond geplaatst zijn, verdient daarom geen aanbeveling.

3.

De uitkomsten van ρ^3 in Hfdst. III kunnen uitgebreid worden op een kromme ρ^n waarop drie puntreeksen, die een (α, β, γ) correspondentie vormen.

4.

Een rechte lijn opgevat als cirkel heeft oneindig veel middelpunten.

5.

De uitkomsten door Zeuthen vermeld in zijn „Lehrbuch der Abzahlenden Geometrie" § 80 kunnen gecontroleerd worden met behulp van inversie.

6.

De invoering van het teeken O van Landau is zeer belangrijk voor de analytische getallentheorie.

7.

De door VIGGO BRUN verkregen resultaten (Bulletin des Sciences Mathématiques, deuxième série, Tome XLIII, 1e partie 1919, pg. 100—104 en pg. 124—128) zijn uit te breiden.

8.

In § 54 van het leerboek van ABRAHAM FÖPPL „Theorie der Elektrizität I" blijkt uit de definitie $-\mathfrak{B}_n = c\frac{Re}{f}$ niet de vectoreigenschap van $\mathfrak{B}$.

9.

Het verdient geen aanbeveling om, zooals KOSTER in zijn dissertatie (Utrecht 1921) op blz. 57 doet, een dieppliggende stelling te citeeren, waar hij slechts een resultaat noodig heeft, dat in enkele regels aan te toonen is.

10.

De redeneering, waardoor Dr. N. HERZ (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ausgleichungsrechnung blz. 10) tot de grondformule van de waarschijnlijkheidsrekening komt, mist alle bewijskracht.

11.

De afleiding, die CZUBER (Wahrscheinlichkeitsrechnung I, blz. 24) geeft van de formule van STIRLING is onbruikbaar.

12.

De oprichting van tijdschriften, gewijd aan een bepaald onderdeel der Wiskunde, verdient aanbeveling.