



Over kans en kansrekening: beschouwingen en critiek

<https://hdl.handle.net/1874/275859>

1921

**OVER KANS EN
KANSREKENING
BESCHOUWINGEN EN CRITIEK**

PIETER TALMA

A. qu.
192

1

OVER KANS EN
KANSREKENING
BESCHOUWINGEN EN CRITIEK

*τάχ' ἂν τις εἰκὸς αὐτὸ τοῦτ' εἶναι λέγοι,
βροτοῖσι πολλὰ τυγχάνειν οὐκ εἰκότα*

Agathon

OVER KANS EN KANSREKENING BESCHOUWINGEN EN CRITIEK

PROEFSCHRIFT, TER VERKRIJGING VAN DEN
GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT
TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR
MAGNIFICUS DR. W. VOGELSANG, HOOGLEERAAR
IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJS-
BEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN
SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDEN-
KINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN
NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DONDER-
DAG 7 JULI 1921 DES NAMIDDAGS TE 2 UUR
DOOR **PIETER TALMA**, GEBOREN TE UTRECHT.



[Emmerik]

AAN MIJNE MOEDER

EN

AAN DE NAGEDACHTENIS
VAN MIJNEN VADER

Bij het verschijnen mijner dissertatie gevoel ik mij gedrongen in de eerste plaats een woord van dank te richten tot U, Hooggeleerde NIJLAND, Hooggeachte Promotor. Dit proefschrift is rechtstreeks uit de herinnering aan Uwe colleges voortgekomen. Het was steeds Uw streven Uwe studenten naast Uwe eigen opvattingen ook meeningen te doen kennen die van de Uwe afweken. Aldus ontstond in Uwe hoorders een beeld van de verschillende kansrekenkundige theorieën, waarvan Uwe leerlingen en oud-leerlingen ongetwijfeld vele trekken in mijne uiteenzetting zullen herkennen. Ook door de welwillendheid waarmede Gij ten behoeve van dit proefschrift Uwen tijd voor mij beschikbaar hebt gesteld, en door de talrijke wenken, raadgevingen, en opmerkingen die ik van U heb mogen ontvangen hebt Gij mij ten zeerste an U verplicht.

Groote verplichting gevel ik ook aan U, Hooggeleerde KAPTEYN, DE VRIES, en JULIUS, mijne Hooggeachte Leermeesters. Jeder van U deed steeds, op de wijze die Zijn bijzonder voorrecht en eigendom is, in Zijne lessen de zuivere lijnen van het schoone gebouw der exacte wetenschappen uitkomen. Dat ik tot de overtuiging gekomen ben dat dit slechts een gebouw is, door handen gemaakt, en geenszins het ware beeld der Schepping zelve, vermindert de groote erkentelijkheid, waarmede ik Uw onderricht te allen tijde zal blijven gedenken, in geenen deele.

Ik kan niet nalaten hier een woord van protest te doen hooren tegen de wijze waarop de Wet op het Hooger Onderwijs voortgaat de wijsbegeerte, als ware deze niet de Moeder doch slechts de Schoonmoeder der wetenschappen, te bejegenen. Terwijl ik, evenwel, de namen neerschrijf van den Hooggeleerden BOLLAND en van wijlen PAUL DEUSSEN, de twee Wijsgeeren wier persoonlijke invloed ik dankbaar gedenk, verschijnt aan mijnen geest het treurige beeld der verdeeldheid die op het gebied der wijsbegeerte sinds het verval der Middeneeuwsche Beschaving heerscht. Door hierover eenen wensch te uiten zoude ik mij echter op een terrein begeven, hetwelk ik mij voorgenomen heb in dit proefschrift angstvallig te mijden.

INHOUD.

	Blz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I.	
De theorie van von Kries (Eerste Helft)	13
HOOFDSTUK II.	
Het „Prinzip des mangelnden Grundes“. Het beginsel der evengroote mogelijkheden	24
HOOFDSTUK III.	
De theorie van von Kries (Tweede Helft). De kansrekenkundige relatie	52
HOOFDSTUK IV.	
Kans en Waarschijnlijkheid. Het theorema van Bernoulli. De fundamenteele theorema der Kansrekening	90
STELLINGEN ,	109

INLEIDING.

Aan de achttiende eeuw is het gelukt de kansrekening — tot dien tijd slechts eene verzameling der vernuftige oplossingen van een aantal vrijwel op zich zelf staande vraagstukken — te verheffen tot eene wetenschap die, wat strengheid en algemeenheid van toepassing betreft, voor geenen anderen tak der wiskunde onderdoet. En in de laatste vijftig jaar heeft men zich zelfs van haar, als van een belangrijk hulpmiddel, leeren bedienen in de wiskunstige natuurkunde, dat wil zeggen: in de wetenschap die uitsluitend aan de exacte formulceering van natuurwetten gewijd is. In het bestaan nu zulk eener exacte kansrekening, zulk eener wisse kunde van het ongewisse, ligt iets bevreemdends: hoe is het mogelijk, vraagt een buitenstaander zich af, om, met het begrip 'kans' of 'waarschijnlijkheid' — de uitdrukking van onzekerheid en subjectiviteit zelve — als uitgangspunt, tot uitkomsten te geraken waaraan de werkelijkheid zich als aan onfeilbare, objectieve, wetten der natuur heeft te houden?

Ik zeg: hierin ligt op het eerste gezicht voor eenen buitenstaander iets bevreemdends. Indien men nu echter meent dat deze verwondering over het bestaan der kansrekening slechts voortkomen kan uit onbekendheid met hare werkwijzen, en dat dus alleen een leek de vraag naar hare mogelijkheid kan stellen, dan vergist men zich. Om dat te bespeuren heeft men maar een der bekende leerboeken dezer wetenschap nateslaan. Juist de meest gezaghebbende beoefenaren der kansrekening, juist zij die hare beginselen met de grootste bekwaamheid toepassen: juist dezen zijn het die, waar de beteekenis zelve dier beginselen ter sprake komt, blijk geven

van eene volslagen verlegenheid. Het spreekt van zelf dat deze verlegenheid bij de verschillende schrijvers, naar gelang van hun temperament, en vooral naar gelang van hunnen volksaard, op verschillende wijze aan den dag treedt. Een Franschman is ook zelfs in de grootste verlegenheid niet verlegen. Wanneer dus Fransche schrijvers over kansrekening, in plaats van ons over het recht van bestaan hunner wetenschap eenig uitsluitsel te geven, zich aan eene skepsis te buiten gaan, die, indien zij slechts voor een klein gedeelte gerechtvaardigd ware, ons de geheele kansrekening voor dwaasheid zoude moeten doen houden, dan mogen wij ons door hunne welbespraaktheid laten innemen, maar wij moeten oppassen ons door hen niet te laten beetnemen: iets degelijks hebben zij blijkbaar niet te verkondigen. Een Duitscher gedraagt zich weer geheel anders: hij weet, wanneer hij eene zaak niet begrijpt, steeds eene andere zaak te vinden die hij ook niet begrijpt; deze twee zaken brengt hij dan door eene zwaarwichtige theorie met elkaar in verband. En deze theorie zet hij dan met zooveel ijver en geduld uiteen, dat wij na het lezen zijner beschouwingen niet minder wijs zijn dan hijzelf. Indien dat echter (gelijk ten aanzien der Duitsche theorieën over de beginselen der kansrekening inderdaad het geval is) niet wijzer is dan wij reeds te voren waren, dan zal niemand ons van verwaandheid mogen beschuldigen, wanneer wij beweren dat dat nog niet érg wijs is. Aangezien dit geschrift zich niet dan terloops met andere dan Fransche en Duitsche schrijvers zal bezighouden, kunnen wij met deze twee opmerkingen van ethnologieken aard volstaan.

Als nu hetgeen ik hier beweer (en wat ik in den loop van mijn betoog door tal van bewijzen hoop te staven) waar is; als nu inderdaad zelfs de voortreffelijkste beoefenaars der kansrekening zich van het recht van bestaan hunner wetenschap feitelijk geene rekenschap vermogen te geven; is dan niet mijne poging, om de reden van dat bestaan in dit proef-

schrift uiteen te zetten, al te vermetel? Ik geloof van niet; immers het gezag ook van den voortreffelijksten beoefenaar eener wetenschap strekt zich zoo ver uit als die wetenschap, doch niet verder; vragen wij, evenwel, naar het recht van bestaan eener wetenschap, dan bevinden wij ons niet meer op het gebied dier wetenschap zelve, doch op dat der wijsbegeerte. Deze nu is eene geheel afzonderlijke werkzaamheid van den menschelijken geest, en al is iemand de grootste aller geleerden op eenig wetenschappelijk gebied: indien zijn geest aan de eischen dier werkzaamheid niet voldoet, dan hebben zijne wijsgeerige inzichten, al betreffen zij zijne eigene wetenschap, niet meer gezag dan die van den eersten den besten timmerman.

Men heeft, hoop ik, uit deze weinige woorden niet slechts begrepen dat ik tegenover de beginselen der kansrekening een geheel ander standpunt inneem dan de meeste kansrekenaars zelve, doch tevens dat de vrijmodigheid, waarmede ik dat standpunt in dit geschrift wensch te verdedigen, geenszins voortkomt uit een gebrek aan eerbied voor de verdiensten dier kansrekenaars. Integendeel, ik wensch (om mij op de gebruikelijke wijze uit te drukken) in waardeering dier verdiensten voor niemand onder te doen. Mijne meening is slechts dat deze hunne wetenschappelijke verdiensten ons in het geheel niet het recht geven ook betreffende hunne wijsgeerige verdiensten eenige verwachting te koesteren. Om mij in de taal der wiskunde uit te drukken: wetenschappelijke en wijsgeerige bekwaamheid zijn twee onafhankelijke grootheden; iedere waarde van eene dier beide grootheden kan met iedere waarde der andere gepaard gaan; maar van eenig verband tusschen die twee waarden, dat men bij voorbaat zoude kunnen aangeven, van eene correlatie dier grootheden dus, is geen sprake. Er bestaan voorbeelden van mannen die voor alles eminente geleerden waren en die bovendien blijk gegeven hebben van een zeer sterk wijsgeerig inzicht (ik

behoef slechts den grooten Aristoteles te noemen); en zoo kunnen wij Kant noemen als voorbeeld van een groot wijsgeer die tevens op het gebied der wetenschap geschitterd heeft. Maar daartegenover staan weer andere even eens zeer groote wijsgeeren die van wetenschappelijken zin vrijwel verstoken waren (bij de Grieken, bijvoorbeeld, Parmenides, en, bij de modernen, Jacob Böhme). Zoude men dan ook van verdienstelijke geleerden niet mogen zeggen (als het de waarheid is) dat zij slechte wijsgeeren zijn?

De wetenschap en de wijsbegeerte komen in zoo verre overeen dat zij beide op een en hetzelfde voorwerp, de werkelijkheid, gericht zijn; maar ten aanzien van datgene, waarin voor haar het belang der werkelijkheid gelegen is, ten aanzien, dus, van hare strekking, verschillen zij te eenen male. Dit zal men misschien bestrijden, met de opmerking dat zij beiden toch niet anders beoogen dan eene stelselmatige samenvatting van de kennis die de menschheid zich in den loop der eeuwen van de werkelijkheid verworven heeft. Maar indien de tegenstelling van de wetenschappelijke en de wijsgeerige werkzaamheid op één punt bijzonder duidelijk is dan is het op het punt van de waarde die zij onderscheidenlijk aan de stelselmatigheid hechten. Stelselmatigheid beteekent van wetenschappelijk standpunt alles. Ontneem aan de wetenschap hare stelselmatigheid en gij ontnemt haar hare wetenschappelijkheid; eene volstrekt waardelooze veelweterij is alles dat overblijft. Brengt men hier tegen in dat de wetenschap haren ontzaglijken invloed op de huidige samenleving en hare groote nuttigheid toch juist aan de groote kennis der natuurverschijnselen dankt die zij gedurende de laatste eeuwen heeft veroverd, dan zal ik dat niet loochenen, doch, slechts, doen opmerken dat de maatschappelijke en philanthropieke waarde en de zuiver wetenschappelijke waarde van kennis twee geheel verschillende zaken zijn. Ook den geleerde zelve mogen het vaak eenige moeite kosten de maat-

schappelijke en de wetenschappelijke waardeering zijner eigen wetenschap streng uiteen te houden; het is echter eene moeite die men het recht heeft van hem te vergen. En dan vraag ik hem — van hoe groot belang hij, als lid der maatschappij, als man der praktijk, en als menschevriend, zijne kennis ook moege achten — of hem in zijne zuivere hoedanigheid van man der wetenschap toch niet alleen de methoden waardoor zijne kennis vergaard is geworden, en waardoor hij steeds voortgaat nieuwe kennis te vergaren, ter harte gaan. Niet de behoefte om reeds ontdekte feiten te weten, maar de zucht om de werkwijzen te kennen, toe te passen, en te verbeteren, waardoor men bij voortduring nieuwe feiten te weten kan komen drijft hem tot zijnen wetenschappelijken arbeid aan. Gelijk Lorentz het uitdrukt:¹⁾ „Dans cette région même, bien des problèmes, nous l'avons vu, nous révèlent encore des mystères ignorés. Doit on s'en plaindre? Non sans doute, car l'énigme encore inéclaircie n'est elle pas un élément essentiel du charme qu'a pour nous la Science?“ Hoe zoude het ook anders kunnen zijn? De moderne natuurkundige weet veel: hij begint zelfs ongeveer te weten hoe een atoom er uit ziet. Maar is er iemand die in ernst durft beweren dat, te weten hoe een atoom er uit ziet, op zich zelf, afgezien van den stelselmatigen arbeid waar die kennis uit voortkomt en waar zij op haar beurt toe leidt, — ook zelfs in de verste verte zoo belangrijk is als, bijvoorbeeld, te weten hoe eene koe er uit ziet?

De overeenkomst en de tegenstelling van wetenschap en wijsbegerte is hiermede, dunkt mij, reeds aangegeven. Al het nut dat de wetenschap sticht zoude, op zich zelf, haar nog niet boven de sfeer van het dagelijksch leven verheffen. Maar in dat nut moeten wij, in laatsten aanleg, niet de eigenlijke

¹⁾ Aan het einde zijner voordrachten over „Les théories statistiques en thermodynamique“ Leipzig 1916 blz. 79.

drijfveeren der wetenschap zoeken: deze zijn zuiverlijk ideeël; en in zoo verre kan men dan ook zeggen dat de mensch mede door de wetenschap in den waren zin des woords mensch is. Doch naast, en in vele opzichten tegenover, de wetenschap staat, onder meer, de wijsbegierie. Ook deze streeft naar kennis niet om het nut dat zij sticht, noch om den maatschappelijken invloed dien zij verleent; en toch is het geene wetenschappelijke kennis die zij zoekt. Want hovele beweegredenen, die in het dagelijksch leven den mensch aan kennis waarde doen hechten, voor den beoefenaar van strenge wetenschap ook zijn weggevallen, om haar zelfs wil vergaart hij zijne kennis toch niet. Daarom heeft wetenschappelijke kennis, op haar best, geen recht op een hooger praedicaat dan dat van juistheid. Immers, alleen doordat hij zich ten doel heeft gesteld al juister en juister kennis van eenige zaak te verwerven bezit de geleerde den prikkel, noodig om zijne eigenlijke bedoeling — de gestadige uitbreiding en verfijning zijner bijzondere methoden van stelselmatig onderzoek der werkelijkheid — met inspanning van alle zijne krachten te verwezenlijken. Juiste kennis echter is nog geene ware kennis. Want de waarheid is alleen begeerlijk om haar zelfs wil; en niemand die kennis zoekt om het stelsel waar zij in past, of om de werkwijzen die tot haar leiden, of om de gevolgtrekkingen waartoe zij aanleiding geeft, of, in het algemeen, om eenige zaak die niet onmiddellijk in haar is begrepen, mag zich eenen zoeker naar waarheid noemen. Indien het dan echter inderdaad zoo is dat de wetenschappelijke mensch niet anders wil dan gestadiglijk voortgaan met het stelselmatige onderzoek der werkelijkheid, om den wille van die stelselmatigheid zelve: gestadiglijk voortbreien dus aan het groote net waarin men sinds vier eeuwen hoopt de natuur te vangen — zoodat hij dus, op de oogenblikken dat hij denkt dat het hem om iets anders, bijvoorbeeld om waarheid, te doen is, zich bedriegt — dan is het oök duidelijk welke geheel afzonderlijke taak nog voor de wijs-

hegeerte is weggelegd. Want hoe zouden wij dan den mensch anders moeten noemen dan wijsgeerig (en niet: wetenschappelijk), die op de oogenblikken dat hij denkt dat het hem om de waarheid te doen is zich niet bedriegt?

Ik ben mij volkomen ervan bewust dat ik, indien ik, zonder nader betoog, de overtuiging uitspreek van de mogelijkheid eener zoodanige wijsgeerige kennis, niet meer doe dan eene persoonlijke meening te kennen te geven; zoodat ik niet het recht heb te vergen dat de lezer die overtuiging met mij zal deelen. Maar wel hoop ik dat hij de eenzijdigheid van het volgende, citaat van Laplace (Oeuvres, Tome septième p. VI) zal toegeven. Het ideaal der wetenschap wordt er met groote helderheid in aangeduid. Maar, met dezelfde helderheid (want Laplace bezat ook als schrijver ongewone heldanigheden) komt in den laatsten zin een standpunt tot uitdrukking, dat al buitengewoon onwijsgeerig, ja, barbaarsch moet heeten: „Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en mécanique et en géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, ¹⁾ les états passés et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales les phénomènes obser-

¹⁾ Dit is tijpeerend voor den geleerde: niet te begrijpen (in den zin van „verstaan“) is zijn doel, maar: in eene wiskunstige formule te begrijpen (in den zin van „sammenvatten“).

vés, et à prévoir ceux que des circonstances données doivent faire éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir; mais dont il restera toujours infiniment éloigné. Cette tendance propre à l'espèce humaine est ce qui la rend supérieure aux animaux; et ses progrès en ce genre distinguent les nations et les siècles, et font leur véritable gloire."

Iemand, met een brein als Laplace hier beschrijft gewapend, zoude, in wetenschappelijken zin, alwetend zijn. Hij zoude uit zijne ééne formule af kunnen leiden al hetgeen een wijsgeer als Plato, bijvoorbeeld, ooit heeft geschreven of, zelfs, gesproken. Maar wijsgeerig aangelegd zouden wij hem toch slechts mogen noemen indien hij, na aldus alle woorden en werken van Plato te hebben afgeleid, tevens blijk gaf daar inderdaad ook iets van te begrijpen.

Van meer wijsheid dan blijkbaar aan Laplace ten deel was gevallen getuigt daarom de volgende plaats van Schopenhauer (uit den tweeden Band van zijn hoofdwerk, Hoofdstuk 17: Ueber das metaphysische Bedürfnis des Menschen): „Mit dem Naturalismus, oder der rein physikalischen Betrachtungsart, wird man demnach nie ausreichen: sie gleicht einem Rechnungsexempel, welches nimmermehr aufgeht. End- und Anfangslose Kausalreihen, unerforschliche Grundkräfte, unendlicher Raum, anfangslose Zeit, endlose Teilbarkeit der Materie... machen das Labyrinth aus, in welchem sie uns unaufhörlich herumführt. Die Höhe, zu welcher in unsern Zeiten die Naturwissenschaften gestiegen sind, stellt in dieser Beziehung alle früheren Jahrhunderte in tiefen Schatten, und ist ein Gipfel, den die Menschheit zum ersten Mal erreicht. Allein, wie grosse Fortschritte auch die Physik (im weiten Sinn der Alten verstanden) je machen möge; so wird damit noch nicht der kleinste Schritt zur Metaphysik geschehen sein; so wenig, wie eine Fläche, durch noch so weit fortgesetzte Ausdehnung, je Kubikinhalt

gewinnt. Denn solche Fortschritte werden immer nur die Kenntnis der Erscheinung vervollständigen; während die Metaphysik über die Erscheinung selbst hinausstrebt, zum Erscheinenden. Und wenn sogar die gänzlich vollendete Erfahrung hinzukäme, so würde dadurch in der Hauptsache nichts gebessert sein. Ja, selbst wenn einer alle Planeten sämtlicher Fixsterne durchwanderte, so hätte er damit noch keinen Schritt in der Metaphysik getan.“

Van deze aanduiding van de strekking der wijsbegeerte uitgaande zoude ik nu nog vele opmerkingen over de tegenstelling van wetenschappelijke en wijsgeerige kennis kunnen maken. Mijn onderwerp vereischt dat echter niet, en laat het zelfs niet toe; misschien zal men deze inleiding toch reeds vrijwel overbodig achten. Ik ben echter van meening dat zij dat niet is. Mijn streven in dit geschrift zal niet anders zijn dan een aantal theorieën, van wetenschappelijke zijde over het recht van bestaan der kansrekening verkondigd, aan eene zoo scherp mogelijke kritiek te onderwerpen; indien er, daarna, van die theorieën nog iets overeind staat, zal ik in bekwaamheid, doch zekerlijk niet in ijver, te kort zijn gekomen. Door deze inleiding nu hoop ik mij gevrijwaard te hebben tegen het verwijt dat het mij te doen zoude zijn de wetenschappelijke verdiensten van eenige zeer ernstige en bekwame geleerden te verkleinen. Men zoude mijne bedoeling niet erger kunnen verdraaien. Ik beweër slechts dat wetenschappelijke en wijsgeerige bekwaamheid niets met elkander hebben uit te staan. Hoe hooger men dus de wetenschappelijkheid van hen, wier wijsgeerig onvermogen ik zal trachten aan te toonen, verheft, des te meer klein zal men aan mijn betoog verleen.

Maar, zal men zeggen, als ge nu gelijk hebt, en die geleerden inderdaad beter gedaan hadden zich aan geene wijsgeerige bespiegelingen te wagen; is dan de opzet om hen juist in deze hunne zwakste zijde aan te tasten niet onedelmoedig?

Dit verwijt zoude gegrond zijn indien het hier de persoonlijke liefhebberij van een paar stille kansrekenaars betrof. Maar de wijsgeerige aanmatiging der geleerden heden ten dage is een algemeen, en juist door de algemeenheid, hoogst bedenkelijk verschijnsel. Geleerden bezitten, door de ontoegankelijkheid zelve van het gebied hunner verdiensten, op leeken een gevaarlijk overwicht. Daarom behoorden zij het als hunnen eersten plicht te beschouwen van dat overwicht geen misbruik te maken door aan het groote publiek, als uitkomsten van hun wetenschappelijk onderzoek, wijsgeerige beschouwingen voor te dragen die inderdaad slechts de voortbrengselen zijn hunner toomellooze phantasie.

Door deze overweging, die aan mijn verweer ieder persoonlijk element ontnemt, zal ik mij ook wat den toon mijner critiek betreft laten leiden. Mocht de lezer mij na de lezing van dit proefschrift het bekende woord willen toevoegen: „Les gens que vous tuez se portent assez bien“, dan geef ik hem bij voorbaat de verzekering dat niemand zich over hunnen allerblakendsten welstand meer zal kunnen verheugen dan ik zelf. Tot de schrijvers, bijvoorbeeld, die ik zal critiseeren behoort Poincaré. Poincaré heeft een voortreffelijk leerboek der kansrekening geschreven. Aan dit boek heeft hij echter als aanhef en als besluit eenige beschouwingen van algemeenen aard toegevoegd die niet door den beugel kunnen. Is dit nu, op zich zelf beschouwd, zoo erg? Geenszins, evenmin als het, op zich zelf beschouwd, zoo erg is dat hij aan zijne vele hoogst verdienstelijke werken op wiskunstig gebied, eenige werkjes (bijvoorbeeld: „La Science et l'Hypothèse“) heeft toegevoegd, waarin hij, ook al weer op de scherpzinnigste wijze, datzelfde wijsgeerig onvermogen aan den dag legt. De zaak is echter dat al deze onwijsgeerige beschouwingen niet op zich zelf mógen worden beschouwd. Met werkjes als „La Science et l'Hypothèse“ heeft hij, en dat niet bij de groote menigte, maar bij de geleerden zelve, den grootsten roem verworven.

Hierdoor verkrijgt zijne onwijsgeerigheid de beteekenis van een algemeen verschijnsel: zij is de uitdrukking van iets dat erger is dan zijn persoonlijk wisgeerig onvermogen, namelijk: van de huide ten dage algemeene, onwijsgeerige gezindheid van den geleerden stand. Op deze gezindheid, nu, zijn mijne aanvallen gericht. En daarom zal ik mijne meening telkens wanneer het noodig is, met de grootste vrijmoedigheid uitspreken. Telkens wanneer wij in den gang van ons betoogd, stuiten op beschouwingen waarin een geleerde zich aan onwijsgeerigheid te buiten gaat, zal ik tot mij zelven zeggen, hetgeen Harpagon zegt tot den „commissaire“: „Chargez-le comme il faut, monsieur, et rendez les choses bien criminelles.“ De lezer vraagt misschien of mijne critiek dan wel ernstig gemeend is? Zeer ernstig zelfs, antwoord ik, maar op de personen die ik noem is zij slechts gericht in zoo verre zij kunnen dienen als voorbeelden eener algemeene gezindheid. Moge, na deze uiteenzetting mijner bedoeling, de lezer derhalve (naar de mate waarin algemeene verschijnselen hem ter harte gaan) wanneer mijn toon eenigszins scherp wordt niet tegen mij maar met mij in verzet komen.

Mijne critiek zal zich tot het gebied der kansrekening hebben te bepalen. Maar toch zal ik mijn doel alleen bereikt hebben indien het mij gelukt zal zijn bij den lezer eenig wantrouwen te wekken tegen het wetenschappelijk gefilosopheer in het algemeen. De wetenschap is voortgekomen uit eene behoefte die met de wijsgeerige behoefte geenszins eenzelvig is, en zij kan nimmer in staat zijn onze wijsgeerige behoefte waarlijk te bevredigen. Dat men daarom van den waan mocht terugkomen dat men zich, om in wijsgeerige aangelegenheden te worden ingelicht, tot de beoefenaars der wetenschap zoude moeten wenden, in plaats van tot de groote wijsgeeren zelven. De laatste twee eeuwen nu hebben twee groote wijsgeeren voortgebracht: Kant en Schopenhauer. Ik weet zeer wel dat juist de eerste natuurkundigen van onzen tijd, op

grond van eene wijziging door hen (op zeer goede gronden) in de fundamenteele differentiaalvergelijkingen der physica aangebracht, gemeend hebben tot het opgeven der „oude“ wereldbeschouwing, gelijk die in de werken van Kant en Schopenhauer hare klassieke uitdrukking gevonden heeft, te moeten adviseeren, en dat zij het groote publiek tot 'in de dagbladen toe (die letterkundige vuilnisbakken van den modernen tijd), op de hoogte stellen van beschouwingen over „gebogen ruimten“, „vierde dimensie“, en dergelijke voorstellingslooze voorstellingen meer, die, volgens hun zeggen, juist de grondslagen der wijsbegeerte van Kant gevoelig raken. In waarheid echter raken die beschouwingen kant nog wal.

HOOFDSTUK I.

DE THEORIE VAN VON KRIES. (EERSTE HELFT.)

In de inleiding heb ik gewezen op de groote tegenstelling van de wetenschappelijke en de wijsgeerige houding tegenover de werkelijkheid; die, zooals ik heb trachten duidelijk te maken, hierin bestaat dat de wetenschap de dingen en de verhoudingen der werkelijkheid alleen beschouwt om den wille van de proefnemingen, berekeningen, en gevolgtrekkingen waartoe die beschouwing aanleiding kan geven, terwijl de wijsbegeerte zich juist om die dingen en verhoudingen zelve bekommert. Daarom ligt het voor de hand dat ik, thans tot de behandeling der begrippen ,kans' en ,kansrekening' overgaande, mijne bespreking aldus indeel, dat ik eerst eenige der belangrijkste wetenschappelijke theorieën, die over ons onderwerp in omloop zijn, bespreek, en aantoon dat die tot ons ware begrip zelf van kans en kansrekening niet de geringste bijdrage leveren, en dat ik daarna eenige beschouwingen ten beste geef die althans in zooverre wijsgeerig mogen heeten dat zij inderdaad op dat ware begrip gericht zijn. Van die wetenschappelijke theorieën nu komt voor bespreking in de eerste plaats in aanmerking die van von Kries;¹⁾ alleen reeds wegens de uitvoerigheid waarmede hij haar te boek heeft gesteld. Laat ons dus onderzoeken welke andere hoedanigheden het werk van von Kries nog bezit. In de eerste plaats, dan, moeten wij de vraag stellen of wij aan zijne beschouwingen eene waarlijk wijsgeerige strekking mogen toekennen. De lectuur echter van slechts de eerste twee bladzijden van zijn boek

¹⁾ Die Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Eine logische Untersuchung von Johannes von Kries, Freiburg i. B. 1886.

volstaat om ons op dat punt alle hoop te benemen. Door éénen volzin wordt hier (blz. 2) het pleit te zijne nadeele be-slecht. Ik bedoel niet den volzin waarin hij zijne onbevredigdheid over de hem bekende theorieën der kansrekening uit: „Was gemeint sei, wenn wir die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel 4 zu werfen = $\frac{1}{6}$ setzen, dürfte in der Tat nicht ohne weiteres in einer ganz befriedigenden und erschöpfenden Weise anzugeben sein“; maar ik bedoel den volzin die daarop volgt. Wij weten wat hij had moeten doen volgen om van eenige wijsgeerige bedoeling blijk te geven; hij had moeten zeggen: „Zoolang daar echter twijfel over bestaat heeft al ons kans-gereken niet de minste wijsgeerige beteekenis.“ Maar er staat: „Solange aber hierüber Zweifel bestehen, kann auch selbst-verständlich über sonstige principiële Fragen, etwa über die Bedingungen, an welche die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeits-Rechnung geknüpft ist, nichts Bestimmtes ausgemacht werden.“ (ik spatieer) Dit is natuurlijk volkomen juist, maar toch blijkt er duidelijk uit dat het hem niet om de zaak zelve doch terstond om iets anders: om de toe-passing der zaak, te doen is: eene houding die typeerend is voor den geleerde, doch die ik reeds als volstrekt onwijsgeerig heb gekenschetst. Hiermede stemt volkomen overeen de aan-duiding die H. Bruns van de strekking van het boek van von Kries geeft, wanneer hij het noemt: „eine bisher viel zu wenig beachtete kritische Studie über die Prinzipien, auf denen die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhen.“ (H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmass-lehre. Leipzig, 1906. blz. 9; spatieering van mij; inplaats van „Anwendungen“ zal Bruns wel „Anwendbarkeit“ bedoelen).

Op blz. 36 van zijn boek geeft von Kries zelf de vol-gende samenvatting van zijn betoog: „Als Gesamt-Ergebnis der logischen Untersuchung erhalten wir somit den Satz, dass Annahmen in einem zahlenmässig angebbaren Wahrschein-lichkeits-Verhältnis stehen, wenn sie indifferente und ihrer

Grösse nach vergleichbare ursprüngliche Spielräume umfassen, und dass bestimmte Wahrscheinlichkeits-Werte sich daher da ergeben, wo die Gesamtheit aller Möglichkeiten durch eine Anzahl solcher Annahmen erschöpft werden kann.“ Hij bezigt hier vier uitdrukkingen: 1^o Spielräume, 2^o ihrer Grösse nach vergleichbare Spielräume, 3^o ursprüngliche Spielräume en 4^o indifferente Spielräume. Ik zal trachten van de beteekenis van deze uitdrukkingen, voor zoo verre zij, mijns inziens, voor de theorie der kansrekening eenige waarde bezitten, uitleg te geven.

In de eerste plaats dan: speelruimte en onderling vergelijkbare speelruimten.

Iedereen zal von Kries terstond toegeven dat onze verwachtingen betreffende de eene of andere gebeurtenis of omstandigheid, ten aanzien waarvan wij ons niet met zekerheid doch slechts met meerdere of mindere waarschijnlijkheid kunnen uitlaten, eene zekere speelruimte moet bezitten. Maar niet iedereen zal het er met hem ook terstond over eens zijn dat wij, wanneer wij aan die gebeurtenis of omstandigheid dan eene bepaalde numerieke waarschijnlijkheid (bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{100}$ of welke breuk ook) toekennen, — dat wij dan niet anders doen dan verschillende van zulke speelruimten vergelijken. Laat mij, om aan te toonen dat dit toch inderdaad zoo is, twee voorbeelden nemen; waarvan het eerste aan von Kries zelven (blz. 35) ontleend is.

Gesteld dat wij van de temperatuur der zon niets bepaalds afweten. Wij zullen dan toch wel twee zeer ruime grenzen aan kunnen geven binnen welke wij, redelijkerwijs, mogen aannemen dat die temperatuur gelegen is; laat die grenzen zijn 1000 graden en 1000.000 graden. Mogen wij dan, nu wij aldus eene zekere speelruimte aan onze verwachting hebben toegekend, terstond verder redeneeren, en die speelruimte, met behulp van het begrip kans, in kleinere speelruimten verdeelen, en bijvoorbeeld, zeggen: de kans dat de

temperatuur der zon tusschen 5000 en 6000 graden gelegen is bedraagt zóóveel; die dat zij tusschen 500.000 en 600.000 graden gelegen is zóóveel?

Het spreekt van zelf dat wij dat niet zeggen mogen. Want wat weten wij bij onze onbekendheid aangaande de oorzaken die, sinds het ontstaan van het zonnestelsel, de huidige temperatuur der zon hebben helpen bepalen, van de beteekenis eener temperatuur, voor de zon, van 5000 graden, of 500.000 graden, eigenlijk af? Is, voor eene ster, eene temperatuur van 5000 graden bijzonder laag? Of eene van 500.000 graden bijzonder hoog? Wij weten het niet. Wij kunnen dus de werkelijke grootte der speelruimte van onze verwachting eener temperatuur tusschen 5000 en 6000 graden, of eener temperatuur tusschen 500.000 en 600.000 graden, niet beoordeelen. Onze kennis levert ons dus in het geheel geen grond om aan eene der beide speelruimten eene grootere of kleinere waarschijnlijkheid toe te kennen dan aan de andere. Wij zien dus dat het, in dit geval, onzinnig zoude zijn voor die speelruimten eenige numerieke waarde der waarschijnlijkheid waarmede wij haar mogen verwachten aan te geven. En tevens zien wij dat de reden daarvan deze is: dat wij niet in staat zijn de speelruimten onzer verschillende verwachtingen onderling te vergelijken.

Als tweede voorbeeld zal ik het vraagstuk behandelen van het werpen met eenen dobbelsteen. Het verwondert mij zeer dat von Kries op dit eenvoudige probleem zijne eigen beginselen niet op juiste wijze toepast; want het zal blijken ons tot toelichting dier beginselen al bijzonder goede diensten te kunnen bewijzen. Maar hij tracht het dobbelspel te herleiden tot een door hem speciaal verzonnen „Stoss-Spiel“, waarmede het niets te maken heeft; eene uitvinding overigens (wat dat betreft kan zijn geweten volkomen gerust zijn) zoo volmaakt onpraktisch, dat geen speelbank haar ooit in toepassing brengen zal.

Gesteld dus dat wij eenen volmaakt afgewerkten en uit eene volmaakt homogene zelfstandigheid vervaardigten dobbelsteen (waarbij wij afzien van het feit dat de verschillende wijzen waarop de verschillende zijden gemerkt zijn steeds eene zekere onregelmatigheid moeten veroorzaken) op eene tafel werpen. Onze verwachting is in dit geval niet volkomen bepaald; maar toch ook niet volkomen onbepaald: Immers wij kunnen verwachten dat of de 1, of de 2, of de 3, of de 4, of de 5, of de 6, bovenkomt. (De mogelijkheid dat de dobbelsteen op eene zijner twaalf kanten of op eenen zijner acht hoeken blijft balanceeren laten wij buiten beschouwing). Nu zal iedereen terstond toegeven dat wij op dit geval het begrip kans inderdaad kunnen toepassen, en dat wel (in het ideale, d. w. z. nimmer geheel te realiseeren, geval) met volstrekte numerieke bepaaldheid: er bestaat eene kans $1/6$ dat de 1 bovenkomt, en kans $1/6$ dat de 2 bovenkomt, en zoo voorts. Indien nu echter de theorie van von Kries juist is, dan moeten wij kunnen zeggen, dat wij, het begrip kans op dit geval op deze wijze toepassende, niet anders doen dan de speelruimte, die aan onze meest algemeene verwachting beantwoordt, verdeelen in zes onderling gelijke kleinere speelruimten waarvan elke aan een der zes mogelijke uitkomsten van onzen worp beantwoordt. Op de volgende wijze kan men aantoonen dat dat inderdaad het geval is.

Gesteld dat bij onzen worp de 4 boven is komen te liggen. Deze uitkomst is dan het volstrekt noodzakelijk gevolg van de plaats, den stand, en de beweging, die de dobbelsteen gehad heeft op het oogenblik dat onze hand hem losliet. Dobbelden wij niet met de hand, doch met een instrument waarvan wij de bewegingen volkomen konden regelen, dan zouden wij, na den dobbelsteen weer op volkomen dezelfde wijze in het instrument geplaatst te hebben, de beweging slechts volkomen eender behoeven te herhalen om wéér de 4 boven te doen komen. Nu wij echter met de hand werpen, die wij

niet zoo volkomen in onze macht hebben, vermogen wij den worp niet te herhalen. Had onze hand zich op het oogenblik dat wij den dobbelsteen loslieten slechts iets hooger bevonden, of hadden wij één onzer vingers slechts iets sneller gestrekt; dan zoude niet de 4 boven zijn gekomen doch misschien de 2; nog iets sneller, dan misschien de 6, en zoo kunnen wij voort gaan. Kortom, de speelruimte, die onze bepaalde worp, met de 4 als uitkomst, aan de houding en de beweging onzer hand toelaat, is veel te gering dan dat wij aan haar eene bepaalde gewaarwording zouden kunnen verbinden. Maar hoe gering die speelruimte ook moge zijn, zij bestaat toch. Men zoude zich dus, in theorie, kunnen voorstellen dat wij eenen tweeden keer onze hand een weinig anders hielden en een weinig anders bewogen (hoe uiterst gering die afwijking ook zoude mogen zijn) zonder dat wij toch de grenzen van die uiterst geringe speelruimte te buiten gingen; zoodat wij dan eenen worp zouden doen, dien wij met den eersten worp identiek zouden mogen noemen: hoewel wij onze hand beide malen niet volkomen eender gehouden en bewogen hadden, zouden wij toch den zelfden worp hebben gedaan. Hieruit volgt, echter, dat het aantal worpen, die wij met onzen dobbelsteen kunnen doen, wel onnoemelijk, maar toch niet oneindig, groot is. Immers de geheele speelruimte, aan onze hand, bij het werpen met den dobbelsteen, geboden, is begrensd; het aantal uiterst kleine speelruimten, ieder aan eenen bepaalden worp beantwoordende, in welke wij die algemeene speelruimte kunnen verdeelen, is dus, noodzakerlijkerwijze, eindig.¹⁾

¹⁾ Hiervan kan men zich door de volgende, wiskunstige, redeneering nog nader rekenschap geven. Gesteld dat men de houding en de beweging en de spanning in de verschillende spieren der hand door 1000 onderling onafhankelijke coördinaten kon bepalen. Tusschen deze coördinaten zoude dan, in ons geval, een groot aantal betrekkingen moeten bestaan opdat een dobbelsteen juist in onze hand zoude passen. Stel dat er 900 onderling onafhankelijke coördinaten zouden overblijven. Door die 900 coördinaten

Beschouwen wij thans eene bepaalde van die onnoemelijk vele uiterst kleine speelruimten; bij voorbeeld eene die 4 tot uitkomst heeft, en veronderstellen wij dat de dobbelsteen, op het oogenblik dat wij hem loslaten, eenen zoodanigen stand heeft, dat de zijde, met de 4 gemerkt, naar links, naar voren, en naar boven gekeerd is. Wij kunnen ons dan ook eenen worp voorstellen, waarbij de houding en de beweging onzer hand geheel dezelfde ware, en de stand van den dobbelsteen bij het loslaten enkel in zoo verre verschillend, dat niet de zijde met de 4 gemerkt, maar juist de tegenoverliggende (dus die met de 3 gemerkt) naar links, naar voren, en naar boven gekeerd ware. De dobbelsteen zoude dan geheel dezelfde beweging verkrijgen, alleen zoude niet de zijde met de 4 gemerkt, maar de tegenoverliggende, de 3 dus, boven komen te liggen. Waren de zijden van den dobbelsteen, namelijk, niet gemerkt, dan zouden wij deze twee worpen in het geheel niet kunnen onderscheiden. En zoo kan men zich nog vier andere worpen voorstellen, daar men zich niet slechts de zijden met 4, of met 3, gemerkt, maar even goed iedere der vier nog overige zijden, als bij het loslaten naar links, naar voren, en naar boven gericht kan denken; en ieder dier vier worpen zoude dan eene der vier nog overige uitkomsten tengevolge hebben. Iedere uiterst kleine speelruimte die wij, indien de zijden van den dobbelsteen niet gemerkt waren, zouden moeten onderscheiden, blijken wij dus, nu de zijden wel gemerkt zijn, als zes verschillende speelruimten, met telkens eene der zes

zoude dan tevens de stand en de beweging van den dobbelsteen geheel bepaald zijn, en wel op zulk eene wijze dat bij ieder stel waarden der coördinaten 24 standen van den dobbelsteen mogelijk waren. Immers iedere stand van eenen cubus, waarvan de zijden niet gemerkt zijn vertegenwoordigt 24 standen van denzelfden cubus nadat men de zijden gemerkt heeft. Elke van die 900 coördinaten nu zoude waarden kunnen aannemen tusschen zekere grenzen gelegen. De geheele speelruimte, die aan onze hand bij het dobbelen geboden is, zoude dus voor te stellen zijn door en begrensd gebied in eene uitgebreidheid van 900 dimensies.

mogelijke uitkomsten, in rekening te moeten brengen. Maar als dit geldt voor iedere der onnoemelijk vele uiterst kleine speelruimten, dan kunnen wij al die speelruimten ook sommeeren, en zeggen: de geheele speelruimte, die aan onze hand geboden is, moet zes maal in rekening worden gebracht: eenmaal als de som van alle, onnoemelijk vele, uiterst kleine speelruimten die tot uitkomst hebben dat de 1 bovenkomt; eenmaal als de som van alle, onnoemelijk vele, uiterst kleine speelruimten die tot uitkomst hebben dat de 2 bovenkomt; en zoo voort. En thans eerst is het duidelijk waarom wij met stelligheid aan ieder dier uitkomsten de gelijke kans $1/6$ moeten toekennen; elke dier zes uitkomsten beantwoordt aan eene bepaalde speelruimte; die speelruimten zijn alle zes volkomen gelijk en gezamenlijk maken zij de geheele speelruimte onzer verwachting uit.

Men ziet: inderdaad eerst door toepassing der beginselen van von Kries, verkrijgt het fundamenteele begrip der kansrekening: de bepaalde kansbreuk, hare stellige beteekenis.

Von Kries zelf leidt, zooals ik al gezegd heb de kansbreuk die bij het werpen met eenen dobbelsteen optreedt op eene onjuiste wijze af. Hij vergelijkt het werpen met eenen dobbelsteen met het door hem verzonnene „Stoss-Spiel“. Het ongeluk wil echter dat het daarmede in het geheel niet te vergelijken is. Zijn (niet bepaald amuseante) stoospel namelijk komt hierop neer dat hij eenen biljartbal aan het eene einde eener horizontale volkomen rechte gleuf legt, die van een groot aantal, even breede, loodrecht op de lengterichting der gleuf aangebrachte, beurtelings wit en zwart gekleurde, strepen voorzien is. Het aantrekkelijke van het spel bestaat nu hierin, dat men den bal eenen stoot geeft en ziet op welk streepje hij liggen blijft. Nu zegt von Kries dat de kans, dat dit een wit streepje is, gelijk is aan die, dat het een zwart streepje is (dus $= 1/2$); en hij vraagt zich af hoe dat te verklaren is daar toch de kans, (die hij tot eene speelruimte herleidt) dat de bal

op, bijvoorbeeld, het 100-ste streepje komt te liggen, geenzins gelijk te stellen is aan de kans dat hij bijvoorbeeld op het 1000-ste streepje terecht komt. De beantwoording dezer vraag is dan volgens hem hierin gelegen (en niemand zal daar iets op hebben aan te merken) dat de kans voor verschillende streepjes, zoo zij slechts in elkaars buurt gelegen zijn (bijvoorbeeld voor de streepjes No. 990 tot No. 1010) toch wel uiterst weinig zal verschillen; zoodat, als men de kansen (of speelruimten) van alle witte en van alle zwarte streepjes optelt, men voor beide kleuren eene gelijke kans verkrijgt. Daartoe moeten de streepjes echter smal zijn: men moet dus liever zijnen bril opzetten en streepjes nemen van één millimeter breed, dan bijvoorbeeld van „tien meter breed“ (het staat er, blz. 66). Voor den stijl van von Kries is het kenschetsend dat zulk eene simpele opmerking hem (en den lezer) eene geheele bladzijde kost. Moge hij die zich een „Stoss-Spiel“ aan wil schaffen er zijn voordeel meedoen!

Dit alles is nu wel is waar een weinig onnoozel, maar toch volkomen juist. Niet juist echter is het deze beschouwing ook op het dobbelen toe te passen. Met welk recht immers mag men zeggen: „denn wie dort“ (bij het Stoss-Spiel) „die gleiche Breite der schwarzen und weissen Streifen, so wird hier“ (bij het werpen met eenen dobbelsteen) „die geometrische und physische Regelmässigkeit des Würfels es notwendig mit sich bringen, dass einem bestimmten zusammenhängenden Komplex von Bewegungs-Möglichkeiten, welcher etwa den Wurf 6 ergäbe, immer andere, in jeder Beziehung nur ganz wenig verschiedene und von sehr nahe gleichem Umfange sich an die Seite stellen lassen, welche die Würfe 1, 2, 3, 4, 5, bewirken“ (blz. 68).

Ik zou willen vragen of er iemand is die ook maar het geringste argument aan kan voeren voor de bewering dat de door mij gespatieerde gevolgtrekking uit de „mathematieke en physiske regelmatigheid van den dobbelsteen noodzakelijker-

wijze" zoude voortvloeien? Er bestaat tusschen het Stoss-Spiel en het werpen met eenen dobbelsteen in waarheid al bitter weinig overeenkomst. Men stelle zich de uiterst eenvoudige beweging voor van eenen biljartbal die door eene gleuf rolt (geeft men den bal geen effect dan zal dat niet veel van eene eenparig vertraagde beweging verschillen) en daarnaast het dansen en hobbelen van eenen hoekigen dobbelsteen over eene tafel. Ongetwijfeld kan men ook van den dobbelsteen zeggen dat hij eene baan beschrijft; beurtelings komen daarbij de verschillende zijden van den dobbelsteen, in snelle afwisseling, boven; maar hoe men de onregelmatigheid en de ingewikkeldheid van deze afwisseling met het zoo uiterst regelmatige passeeren, door den biljartbal, van, beurtelings even breede, witte en zwarte streepjes, tot hij eindelijk, op één daarvan, liggen blijft, zoude kunnen vergelijken is mij een raadsel. Men kan natuurlijk wel de baan die de dobbelsteen beschrijft op eene rechte lijn voorstellen; bijvoorbeeld door daar achtereen volgens stukken op af te zetten, waarvan de lengte evenredig is aan het arbeidsvermogen van 'beweging dat de dobbelsteen bij ieder zijner talrijke kantelingen verbruikt. Maar het komt mij voor dat men, aldus doende, eene hoogst onregelmatig verdeelde lijn zoude verkrijgen, en wel zoude de verdeeling het alleronregelmatigst zijn juist bij het einde der baan. (En dat einde der baan komt er juist op aan!)

Ook *Brun s* geeft (op bldz. 9 van het aangehaalde werk) eene uiteenzetting van von *Kries'* opvatting van het werpen met eenen dobbelsteen. In werkelijkheid heeft die uiteenzetting met de opvatting van von *Kries* echter niets te maken. Hij zegt: het aantal oogen dat ten slotte boven komt te liggen (*y*) moet voor de stellen zijn door eene functie van den de 12 parameters (*x*, *x'*...) die op een zeker oogenblik de plaats, den stand, en de beweging van den dobbelsteen bepalen. Nu zal die functie zeer gecompliceerd zijn; uiterst kleine wijzigingen in de waarde der parameters zullen sprongen in de waarde

van y ten gevolge hebben: „Die Funktion y ist also, wie wir kurz sagen wollen, äusserst rasch veränderlich. Damit wird dem Spieler die Möglichkeit genommen, das Ergebnis eines Wurfes vorherzusehen.... Die eigentliche Quelle des Zufalls ist also hier in der raschen Veränderlichkeit von y zu suchen.“ Jawel, maar dat wist men ook al voor van Kries; deze wilde echter juist die snelle veranderlijkheid van y nader onderzoeken. Bruns noemt het boek van von Kries „bisher viel zu wenig beachtet“. Wie dat boek in de eerste plaats beter had behooren te „beachten“ is Bruns zelf.

Al hetgeen men op de beschouwingen van von Kries over het werpen met eenen dobbelsteen kan aanmerken ^{neemt} niet weg dat de theorie van von Kries ons in staat gesteld heeft de toepassing van het begrip „numerieke kans“ beter te begrijpen. Thans zal ik, voor dat ik de theorie van von Kries verder behandel, twee andere theorieën die men van de kansrekening gegeven heeft in dat opzicht met haar vergelijken. Van von Kries neem ik dus, von één hoofdstuk, afscheid; niet twijfelende of hij zal zich in dien tusschentijd met zijn Stoss-Spiel wel weten te vermaken.

HOOFDSTUK II.

HET „PRINZIP DES MANGELNDEN GRUNDES“. HET BEGINSEL DER EVENGROOTE MOGELIJKHEDEN.

Men zal het misschien vreemd vinden dat ik, midden in mijne bespreking van de theorie van von Kries, mij zelven, met dit hoofdstuk, als het ware eensklaps in de rede val, maar ik doe dat alleen om niet den gang van mijn betoog te verstoren. Dit proefschrift houdt zich bezig met de verklaring der kansrekening. Nu is de werkzaamheid die men verklaren noemt van tweeërlei aard. De behoefte om eene zaak te verklaren ontstaat, namelijk, in twee gevallen: vooreerst *dán*, wanneer die zaak en hare verhouding tot andere zaken ons niet helder voor den geest staan; maar in de tweede plaats (hoe vreemd het ook moge klinken) ook *dán*, wanneer die zaak en hare verhouding tot andere zaken ons juist bijzonder helder voor den geest staan. Immers alleen in het tweede geval, alleen indien iets ons bijzonder helder voor den geest staat, vermag het die zoo merkwaardige en edele verwondering in ons te wekken die het begin en het beginsel is der wijsbegeerte.¹⁾ De verklaring die ons in het eerste geval bevrediging schenkt zal een wetenschappelijk karakter dragen; in het tweede geval zal het ons, indien wij niet, op de wijze van den kunstenaar, in onze verwondering wenschen te verwijlen, om eene wijsgeerige verklaring te doen zijn. Door deze beide gevallen, nu, niet behoorlijk te onderscheiden, kan men op tweeërlei wijze in verwarring geraken, en — indien men

¹⁾ Plato, Theaetetus 155 D.: *μάλα φιλοσόφον τοῦτο τὸ πάθος, τὸ θαυμάζειν· οὐ γὰρ ἄλλη ἀρχὴ φιλοσοφίας ἢ αὕτη*. Aristoteles, in het begin zijner *Metaphysica* verklaart hetzelfde.

bij zijne medemenschen eenig gezag heeft, — verwarring stichten. Ten eerste, namelijk, doordat men meent, dat het, om van eenige zaak wijsgeerig inzicht te bezitten, voldoende is dat die zaak ons slechts helder voor den geest sta. Dit is de fout die vooral zij begaan, die men „positivisten“ noemt; menschen, wier wijsgeerig besef door hunne scherpzinnigheid wordt overtroffen; zulk een positivist is, onder de moderne schrijvers, bijvoorbeeld Ernst Mach. En de tweede oorzaak van verwarring bestaat, omgekeerd, hierin, dat men meent groepen te zijn over eenige zaak wijsgeerige beschouwingen te gaan houden, juist omdat men van de zaak géén helder beeld bezit. Het is de fout, die zij begaan, wier scherpzinnigheid door hunnen ijver wordt overtroffen; en hun naam is Legio. Tot hen behooren ook de aanhangers van de beide beginselen der kansrekening die ik in dit hoofdstuk zal bespreken.

De bespreking, nu, dier beide beginselen, past op de volgende wijze in den gang van mijn betoog. Wij hebben één vraagstuk der kansrekening met behulp van het beginsel der speelruimten verklaard. Voor deze wijze van verklaring is het kenschetsend dat wij het begrip „kans“ niet door een ander begrip hebben vervangen. Integendeel, wij hebben niet anders gedaan dan hetgeen bij het werpen met eenen dobbelsteen plaats heeft op zulk eene wijze te beschrijven dat op de toepassing van het begrip „kans“ juist het volle licht viel. Toen wij, namelijk, de verschillende uitkomsten, bij het dobbelen mogelijk, tot onderling vergelijkbare speelruimten hadden herleid, kon ik, zonder meer, zeggen: „Men ziet, inderdaad eerst door toepassing der beginselen van von Kries verkrijgt het fundamenteele begrip der kansrekening, de bepaalde kansbreuk, zijne stellige beteekenis.“ Want toen kon ik er op rekenen dat de lezer het begrip „kans“ met mij, zonder eenig bezwaar te maken, onmiddellijk, zoude toepassen. En dit mocht ik als een bewijs beschouwen dat de beteekenis van het begrip „kans“ in dit ééne geval, door de invoering van het

begrip, speelruimten' ons volkomen helder was geworden; anders gezegd: het beginsel der speelruimten bleek de juiste wetenschappelijke verklaring van dit ééne vraagstuk der kansrekening te behelzen. Ons rest dus nog slechts dat beginsel ook op de andere vraagstukken der kansrekening toepasselijk te maken. Ten einde, nu, het belang van die uitbreiding van dat beginsel over de geheele kansrekening zoo scherp mogelijk te doen uitkomen doe ik haar voorafgaan door de bespreking van twee beginselen voortgekomen uit de neiging om de kansrekening te verklaren op eene wijze, die men als „de averechtsche“ kan betitelen; uit de neiging namelijk, om de strekking van dat begrip niet helder in het licht te stellen, doch te verdoezelen onder andere begrippen die, in waarheid, bij de juiste toepassing van het begrip 'kans' slechts zijdelings betrokken zijn. Bovendien zal de bespreking ons tevens de gelegenheid verschaffen om op de eischen die men, in het algemeen, aan beginselen der kansrekening moet stellen nader in te gaan. Ook hierdoor zal het voor onze verdere besprekingen nog eenig nut afwerpen.

In de eerste plaats dan het „Prinzip des mangelnden Grundes“. (Dit in goed Hollandsch te vertalen is, gelukkig, onmogelijk.) Volgens Czuber is dit één van de twee wijzen van verklaren waartoe de kansrekening aanleiding geeft. „Die beiden, einander entgegengesetzten Standpunkte, auf die man sich dabei stellen kann, sind durch die Prinzipien des mangelnden und des zwingenden Grundes gekennzeichnet. Nach dem ersten stützt sich die Konstatierung der Gleichmöglichkeit auf absolutes Nichtwissen über die Bedingungen des Daseins oder der Verwirklichung der einzelnen Fälle, also auf ihre blosse Unterscheidung; dem zweiten zufolge ist zu ihrer Feststellung ein sicheres objectives Wissen erforderlich, das jede andere Annahme ausschliesst.“ (Enz. der Math. Wiss. I, II blz. 736.) In zijne „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1903, blz. 9), verder, stelt hij het voor als of

reeds Bernoulli en Laplace dat beginsel aan de kansrekening ten grondslag zouden hebben gelegd.¹⁾ Dit nu is geenszins het geval. Immers wanneer Jac. Bernoulli (*Ars conjectandi* p. 224) zegt dat aan iedere der zes uitkomsten, bij het werpen met eenen dobbelsteen mogelijk, eene gelijke kans toekomt (deze zes gevallen, namelijk doen zich alle even gemakkelijk voor (*sunt aequae proclives*) „cum propter similitudinem hedrarum atque conforme tesserae pondus nulla sit ratio, cur una hedrarum promior esset ad cadendum quam altera, quemadmodum fieret, si hedrae dissimiles forent figurae, aut tessera una in parte ex ponderosiore materia constaret quam in altera“; dan doet hij niet anders dan het uit andere takken der wiskunde bekende „bewijs uit het ongerijmde“ op de kansrekening toepasselijk maken. Hij geeft n. l. stellige redenen aan (den regelmatigigen bouw van den dobbelsteen) waarom het ongerijmd zoude zijn aan te nemen dat die kansen niet gelijk waren. Verder op (blz. 57) zal ons blijken dat het bewijs uit het ongerijmde inderdaad voor de kansrekening van principiele beteekenis is; maar juist daarom is het zaak deze bewijsvoering niet met het „Prinzip des mangelnden Grundes“, dat, zooals wij zullen zien, volkomen zinloos is, te vereenzelvigen. Bernoulli mogen wij derhalve niet als eenen aanhanger van dat beginsel beschouwen.²⁾

Het „Prinzip des mangelnden Grundes“, nu kan men aldus formuleeren: „Gesteld dat men met zekerheid kan zeg-

¹⁾ Hij drukt zich eenigermate vaag uit. „Beide Erklärungen (n. l. die van Bernoulli en van Laplace, maar niet deze wiskunstenaars zelven) berufen sich auf das Prinzip des mangelnden Grundes.“ Eenige regels verder herroept hij deze bewering weer ten deele. De wijze waarop Bernoulli zich uitdrukt is trouwens zelve ook niet vrij van eene zekere halfslachtingheid. Op grond van de regelmatigheid en den homogenen bouw van den dobbelsteen hebben wij geen grond om de eene uitkomst van het dobbelen eerder te verwachten dan de andere. Hebben wij nu grond of geen grond?

²⁾ En Laplace evenmin. Zie over de opvatting van Laplace Blz. 42 van dit geschrift.

gen dat ééne (welke dan ook) van n mogelijkheden zich voor zal doen, terwijl men geene enkele reden heeft om ééne bepaalde dier mogelijkheden eerder te verwachten dan eene andere; dan moet men aan elke dier mogelijkheden eene gelijke waarschijnlijkheid toekennen, die dus $1/n$ „bedraagt“.¹⁾ Dit komt dus hierop neer dat men ook, wanneer iemand niet met een dobbelsteen werpt, maar met een voorwerp waarvan men niets weet dan dat het, hoe het er verder ook moge uitzien, zes zijden heeft op ééne waarvan het neer moet komen, voor de kans dat het op ééne bepaalde dier zijden neer komt de breuk $1/6$ zoude mogen neerschrijven. Nu zal iedereen, toch terstond inzien dat zulk eene kansbreuk slechts subjectieve waarde kan hebben integenstelling met de objectieve waarde van die zelfde kansbreuk wanneer men weet dat men met eenen zeer zuiver afgewerkten dobbelsteen te doen heeft. En van welk eene beteekenis dit verschil is wordt duidelijk wanneer men eerst het onbekende voorwerp en daarna den

¹⁾ Indien men niet gelooft dat zulk eene bewering door iemand in allen ernst opgesteld kan worden, dan leze men de verhandeling van Stumpf „Ueber den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit (Münchener Sitzungsberichte Phil. Kl. 1892), eene werkelijk scherpzinnige, verdediging van het „Prinzip des mangelnden Grundes.“ Hij definieert: (Blz 48) „Jede beliebige Urteilmaterie nennen wir $\frac{1}{N}$ wahrscheinlich, wenn wir sie auffassen können als eines von n Gliedern (günstigen Fällen) innerhalb einer Gesamtzahl von N Gliedern (möglichen Fällen), von denen wir wissen, dass eines und nur eines wahr ist, dagegen schlechterdings nicht wissen welches.“ Volgens hem zweefde deze opvatting der kansrekening ook reeds Laplace voor den geest. Daarom lat hij op zijne bepaling volgen: „Auf diese Weise sind gleichsam die Eierschalen (!) abgestreift, die dem Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit von seinen Ursprungsbeispielen her noch anhafteten.“ Een belangrijk deel van zijn betoog is aan eene critiek van von Kries gewijd: „Von Kries gründet den Angriff auf die ältere Lehre“ (jawel, maar dan zonder de eierschalen d. w. z. op het „Prinzip des mangelnden Grundes“) „vorzugsweise auf den Umstand, dass danach eine feste Berechnung der Wahrscheinlichkeit nicht möglich sei.“ Ik hoop in dit hoofdstuk aan te toonen (op meer principieele wijze dan von Kries dat doet) dat deze bewering van von Kries zeer gegrond is.

dobbelsteen een groot aantal malen, bijvoorbeeld 600 malen, opwerpt. In het tweede geval kan men dan met groote waarschijnlijkheid zeggen dat ieder der zes zijden een aantal malen dat niet veel van 100 verschilt boven zal komen, maar wat kan men in het eerste geval zeggen? Mij dunkt niets; want de waarschijnlijkheid $\frac{1}{6}$ had daar zelve slechts eene geringe waarschijnlijkheid.

Als eerste bezwaar tegen het „Prinzip des mangelnden Grundes“ hebben wij dus reeds gevonden, dat het strekt tot verdoezeling van het uiterst belangrijke verschil tusschen subjectieve en objectieve kans. Nu wil ook, bijvoorbeeld, Stumpf, in ieder geval, zooveel mogelijk weten. De waarde echter van die kennis speelt in zijne definitie van het begrip 'kans' geene rol. Dit alleen reeds zoude ons het recht geven om zijn beginsel te verwerpen. Ik zal echter trachten het ook nog van een meer algemeen standpunt te critiseeren; en wel zal ik aantoonen dat men, indien men het eens inderdaad aan de kansrekening ten grondslag legt, dusdoende in het geheel niet tot de kansrekening, maar slechts tot een complex van allerlei ongerijmdheden komt. Aan die critiek zal ik een zoo principieel mogelijk karakter geven, niet zoozeer ter eere van het „Prinzip des mangelnden Grundes“ als wel op dat wij aldus tevens de eischen leeren kennen waaraan een beginsel der kansrekening, wil het werkelijk als zoodanig beschouwd kunnen worden, moet voldoen.

De kansrekening dankt haar bestaan hieraan, dat het mogelijk is de waarschijnlijkheid van verschijnselen, of van welke andere zaken ook, onder zekere voorwaarden, uit te drukken door breuken. Ware, evenwel, dit uitdrukken van bepaalde kansen door bepaalde breuken alles dat de wiskunde op het gebied der waarschijnlijkheid vermocht; dan zoude de kansrekening, op haar best, slechts eene bijzondere toepassing der wiskunde, maar nog geenszins zelve eene afzonderlijke wiskunstige wetenschap zijn.

Vergelijken wij de kansrekening, in dit opzicht, met de rekenkunde. De rekenkunde dankt haar bestaan hieraan, dat wij ons van de telbaarheid der voorwerpen om ons heen rekenschap kunnen geven door getallen. Nu is tellen eene uiterst merkwaardige werkzaamheid van den menschelijken geest; immers het is (gelijk wij sinds Kant weten, of althans behooren te weten) niet minder dan het onmiddellijk ineen-denken van het in den tijd op elkaar volgende.¹⁾ Maar, hoe merkwaardig ook, tellen is nog geen rekenen. Rekenen gaat de mensch eerst dan, wanneer hij de uitkomsten zijner tellingen, de getallen dus, tot het voorwerp maakt eener tweede, eveneens uiterst merkwaardige, werkzaamheid van zijnen geest: ik bedoel de wetenschappelijke werkzaamheid. En gelijk in alle gevallen, zoo is de wetenschappelijke werkzaamheid ook dan, wanneer zij rekenkunst wordt, hierdoor gekenmerkt dat zij zich met de zaken, waar zij op gericht is (in dit geval dus de getallen) niet bezig houdt om die zaken zelve, doch om de betrekkingen die tusschen die zaken bestaan. Zoo is het dan ook voor de rekenkunst niet van belang (zooals dat, onder anderen, voor de Pythagoreeërs van belang was) te weten wat bijvoorbeeld het getal 4, op zich zelf beschouwd, wel beteekent; doch voor haar beteekent het getal 4 eerstond iets anders: namelijk 2×2 of $3 + 1$, of iedere andere uitdrukking die men (in rekenkunstigen zin) aan 4 gelijk mag stellen. Past men, derhalve, op eenig gebied de getallen toe, dan is op dat gebied alleen dan tevens de rekenkunst toepasselijk geworden, indien men daarbij, bijvoorbeeld, voor het getal 4 ook 2×2 mag schrijven, en iedere andere uitdrukking die, in reken-

¹⁾ Kant. Kritik der reinen Vernunft, 1^{ste} druk, blz 103: „Vergesse ich im Zählen, dass die Einheiten, die mir jetzt vor Sinnen schweben, nach und nach zu einander von mir hinzugehan worden sind, so würde ich nicht die Erzeugung der Menge, durch diese succesive Hinzuthuung von Einem zu Einem, mithin auch nicht die Zahl erkennen, denn dieser Begriff besteht lediglich in dem Bewusstsein dieser Einheit der Synthesis.“

kunstigen zin, aan 4 gelijk is. Is dat niet het geval, dan heeft men op dat gebied slechts eene nummering of eene schaalverdeeling, of wat ook, maar zeker niet de rekenkunde ingevoerd.

Tot geheel overeenkomstige beschouwingen geeft ook de kansrekening aanleiding. Deze dankt haar bestaan hier aan, dat men in vele gevallen kansen kan uitdrukken door breuken. Verleent dit echter alleen reeds aan de kansrekening den rang eener zelfstandige wiskunstige wetenschap? Geenszins; daarvoor wordt vereischt, dat men ook aan de verschillende rekenkunstige betrekkingen die tusschen breuken bestaan eene zelfstandige kansrekenkunstige beteekenis mag toekennen.

De invoering van breuken op enig gebied heeft alleen zin indien men daarmede tevens de rekenkunstige betrekkingen tusschen breuken op dat gebied invoert; zij heeft echter de waarde der invoering eener zelfstandige wetenschap eerst dan indien die betrekkingen daarbij tevens eene zelfstandige beteekenis verkrijgen.

De kansrekening levert daarvan een merkwaardig voorbeeld. En, wanneer iemand een beginsel der kansrekening opstelt, dan is het eerste dat men van hem eischen moet dit, dat zijn beginsel ons van de zelfstandige kansrekenkunstige beteekenis der rekenkunstige betrekkingen tusschen breuken rekenschap geve. Daarom lijkt het mij toe dat de volstrekte waardeloosheid van het „Prinzip des mangelnden Grundes“ uit niets beter blijkt, dan hieruit, dat dit beginsel het reeds tegenover de allereenvoudigste betrekkingen, die tusschen kansbreuken voorkomen, schromelijk aflegt.

De allereenvoudigste betrekking die in de theorie der breuken ter sprake komt is de gelijkheid van twee breuken waarvan men de eene uit de andere, door teller en noemer daarvan met eenzelfde getal te vermenigvuldigen, kan doen ontstaan. De rekenkunstige beteekenis dezer betrekking be-

staat hierin dat eene breuk niet de twee getallen zelve, waaruit zij is samengesteld, beduidt, doch slechts hunne verhouding. De kansrekenkunstige beteekenis, nu, dezer betrekking komt met hare rekenkunstige beteekenis geheel en al overeen (zoodat door haar alleen de kansrekening nog geene zelfstandige wetenschap wordt). In vraagstukken betreffende het dobbelspeel, bijvoorbeeld, treden kansbreuken op waarvan de noemer 6 is; daar, zooals men pleegt te zeggen, het aantal „mogelijke gevallen“ hier 6 bedraagt. Bij onze behandeling van zulk een vraagstuk hebben wij, nu, gezien dat de invoering van het begrip „speelruimte“ ons er toe brengt, zelfs een onnoemelijk aantal mogelijke gevallen te onderscheiden. Deze zoude men naar allerlei gezichtspunten in groepen kunnen verdeelen, en aldus zoude men voor het aantal mogelijke gevallen allerlei getallen vinden. Maar steeds zoude daarbij het aantal gunstige gevallen tot het aantal mogelijke gevallen in eene verhouding staan die tot eene breuk met noemer 6 kon worden vereenvoudigd. De beteekenis van kansbreuken als verhoudingen treedt bij het „beginsel der speelruimten“ dus al bijzonder duidelijk aan het licht.

Hoe staat het, echter, in dit opzicht met het „Prinzip des mangelnden Grundes“? Nemen wij het voorbeeld dat von Kries op blz. 10 van zijn boek bespreekt. Wij veronderstellen dat wij van den scheikundigen aard der sterren in het geheel niets weten. Vragen wij ons nu af welke de kans is dat er zich op eene bepaalde ster een bepaald element, bijvoorbeeld ijzer, bevindt. Er zijn twee mogelijkheden; of er komt op die ster ijzer voor, of niet. Eén dezer beide gevallen eerder te verwachten dan het andere zoude geheel ongegrond wezen; volgens het „Prinzip des mangelnden Grundes“ hebben zij dus beide de waarschijnlijkheid $\frac{1}{2}$. Ziedaar inderdaad eene breuk. Maar drukt die breuk nu ook eene verhouding uit? Det zal men toch al heel moeilijk kunnen beweren. Er zijn twee absoluut vage mogelijkheden gegeven, anders niets; van

eene verhouding van die mogelijkheden te spreken heeft geen zin. En ze dus wiskunstiglijk aan elkaar en aan $\frac{1}{2}$ gelijk te stellen is dwaasheid; die men zich alleen nog overtroffen zoude kunnen denken door de bewering dat men voor die breuk $\frac{1}{2}$ nu ook $\frac{2}{4}$ of $\frac{3}{6}$ zoude mogen schrijven. Want wat zouden die 4 en die 6 hier kunnen beteekenen? Men ziet: dit beginsel lijdt, op het oogenblik zelf dat men er mede in zee wil steken, schipbreuk.

Mij dunkt, wij zouden feitelijk thans reeds dit beginsel als afgedaan kunnen beschouwen. Maar omdat alle verkeerdheden, waaraan een beginsel der kansrekening maar lijden kan, er nu eenmaal in vereenigd zijn, zal ik het nog verder behandelen.

Onder de betrekkingen tusschen breuken die nu inderdaad eene zelfstandige kansrekenkundige beteekenis hebben valt in de eerste plaats te vermelden de betrekking die tusschen een aantal kansbreuken bestaat, waarvan ééne (in rekenkundigen zin) gelijk is aan de som der andere. Deze kansrekenkundige beteekenis wordt uitgedrukt door het „theorema der totale kans“ waarvan men de uiteenzetting in ieder leerboek der kansrekening kan aantreffen. Vraagt men, bijvoorbeeld, bij het dobbelen naar de kans op eenen oneven worp, die drie mogelijkheden omvat op iedere van welke de kans $\frac{1}{6}$ bedraagt; dan is die kans $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. De zelfstandige kansrekenkundige beteekenis van dit theorema bestaat, nu, hierin, dat men het slechts met eene zekere beperking, mag toepassen: de verschillende mogelijkheden, wier waarschijnlijkheid door de breuken die men wenscht op te tellen worden gerepresenteerd, moeten elkaar, namelijk, buitensluiten. Zoude men, bij eene onoordeelkundige toepassing van dit theorema, bijvoorbeeld zeggen dat de kans dat men, te gelijk met eenen dobbelsteen en een muntstuk werpende, hetzij een oneven aantal oogen met den steen, hetzij „kruis“ met het muntstuk wierp, gelijk ware aan $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; dan zoude dit

hierom verkeerd zijn, dat de beide genoemde mogelijkheden elkaar niet buitensluiten. Had men daarentegen eenen dobbelsteen op iedere zijde waarvan een muntstuk ware ingelegd, zoodanig dat op de zijden met een oneven aantal oogen „munt“ en op de zijden met een even aantal oogen „kruis“ naar buiten ware gekeerd, dan zoude de gevraagde kans inderdaad door die som $\frac{1}{1}$ van twee kansbreuken worden uitgedrukt.

Nu is het een feit dat de aanhangers van het „Prinzip des mangelnden Grundes“ het theorema der totale kans met alle vereischte voorzichtigheid toepassen. Maar hieruit blijkt alleen dat zij dit beginsel wel met de mond belijden maar het in waarheid in het geheel niet toepassen. Immers, dat theorema uit dit beginsel af te leiden is volstrekt onmogelijk; het biedt voor zulk eene afleiding geen enkel uitgangspunt. Zoo volstrekt onbruikbaar is het als beginsel der kansrekening!

Nemen wij echter voor een oogenblik aan dat het onmogelijke geschiedde en iemand er in slaagde het theorema der totale kans op ons beginsel te baseeren. Ook dan zoude men tot volslagen ongerijmdheden komen. Want vragen wij ons welke de kans is dat eene bepaalde ster geheel uit ijzer bestaat. Ons beginsel antwoordt wederom $\frac{1}{2}$ (een antwoord dat het ten slotte op alle vragen geven moet als men ze op eene bepaalde wijze inkleedt) zoo is ook de kans op de mogelijkheid dat de ster uit koper bestaat $\frac{1}{2}$, en ook de kans dat zij geheel uit goud bestaat. Deze drie mogelijkheden sluiten elkaar buiten. Dus de totale kans dat onze ster óf uit ijzer óf uit koper óf uit goud bestaat is $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, het welk onzinnig is. Hiermede hebben wij uit het ongerijmde bewezen dat het theorema der totale waarschijnlijkheid niet uit het „Prinzip des mangelnden Grundes“ kan worden afgeleid.

Moet ik nu ook nog de ongerijmdheden aantoonen waartoe men komt als men het „Prinzip des mangelnden Grundes“ als grondslag van het theorema der samengestelde kans wil opvatten? Men berekene dan slechts de kans die er

op bestaat dat geen onzer aardsche elementen op de bepaalde ster voorkomt. De kans dat één element er niet voorkomt is weer $\frac{1}{2}$. De kans dat er twee niet voorkomen dus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, en zoo voorts. Toen von Kries (die deze vraag doet en op de ongerijmdheid der uitkomst wijst, zonder de principieele beteekenis er van in te zien) zijn boek schreef waren er 68 elementen bekend. Men krijgt dus voor de gevraagde kans ($\frac{1}{2}$)⁶⁸, een uiterst kleine breuk. Stelt men echter de vraag onmiddellijk (zonder met één element te beginnen) dan zegt het Prinzip weer het eenige dat het zeggen kan, namelijk $\frac{1}{2}$. Het leidt dus tot de meest krasse tegenstrijdigheden. En toch is het theorema der samengestelde kans voor de kansrekening van fundamenteele beteekenis. Immers het geeft de kansrekenkundige beteekenis aan van het vermenigvuldigen van kansbreuken.

Wij zien dus dat het „Prinzip des mangelnden Grundes“, als men het op zijne bruikbaarheid als grondslag, ook zelfs van de meest algemeene betrekkingen der kansrekening, onderzoekt, dien toets niet doorstaat. En dit behoeft ons ook niet te verwonderen; immers beschouwen wij dat beginsel op zich zelf, dan blijkt het niet minder in te houden dan eene poging om tot stellige kennis (want ook kennis van waarschijnlijkheden is stellig) te geraken, juist op grond (!) van de afwezigheid van kennis. Waarlijk, te beweren dat dit mogelijk zoude zijn is zoo kras, dat Baron von Münchhausen (die slechts beweerde dat hij zich aan zijne haren uit een moeras getrokken had) er confuus van zou zijn geworden! Toch zoude het uit de leerboeken der kansrekening en uit alle andere leerboeken behooren te verdwijnen om alleen in eene nieuwe bewerking van de avonturen van den genoemden Baron eene plaats te verkrijgen. Van een zoo uitgelezen dwaasheid is het; niet omdat het ons er toe brengt op grond van onvoldoende kennis verkeerde gevolgtrekkingen te maken (want dat doen wij, bij de onvolkomenheid van ons intellect, helaas

dagelijks) maaar omdat het verlangt dat het ontbreken zelf van eene beweegreden om gevolgtrekkingen te maken ons tot eene beweegreden om gevolgtrekkingen te maken strekken zal. Zoo iets, nu, strijdt met den aard van ons intellekt zelven. Wij kunnen geene gevolgtrekking (ook geene verkeerde) maken, indien wij niet althans meenen (hoezeer ook misschien 'ten onrechte) daarvoor eenen positieven grond te hebben. Het maken van eene gevolgtrekking is eene handeling van onzen geest, deze handeling moet eene oorzaak hebben evenals ieder ander voorval of verschijnsel in de natuur. Ontbreekt zulk eene oorzaak (dat wil hier zeggen eene beweegreden) dan moet ook het gevolg (dat wil hier zeggen het maken eener gevolgtrekking) uitblijven. Het „Prinzip des mangelnden Grundes“ loochent dit. Wil men dus deze uitdrukking op de juiste wijze gebruiken dan komt men tot een beginsel dat geheel anders luidt; namelijk: dat wij bij ontstentenis van gegronde redenen ons van het maken van gevolgtrekkingen moeten onthouden, en dat wij, als wij geen grond hebben om iets te verwachten, niets moeten verwachten. Gelijk wij kunnen waarnemen aan de beide Polen uit Heine's gedicht „Zwei Ritter“, die het ware „Prinzip des mangelnden Grundes“ in toepassing brachten, wanneer het oogenblik aangebroken was dat zij hunne vertering moesten betalen:

Und da keiner wollte leiden,

Dass der and're für ihn zahle,

(had de waard slechts eene kans $\frac{1}{2}$ op betaling, denkt men? Neen, maar)

Zahlte keiner von den beiden.

Van deze beide Polen kunnen de kansrekenaars leeren hoe het in waarheid met het „Prinzip des mangelnden Grundes“ gesteld is.

„Maar“ zal men vragen „hoe is het dan mogelijk dat verdienstelijke geleerden hun hart aan dit beginsel hebben verpand?“ Men kan hierop, geloof ik, als volgt antwoorden.

Het begrip 'waarschijnlijkheid' speelde eene belangrijke rol in het dagelijksch leven, reeds lang voordat de kansrekening bekend was. En ook nu de kansrekening, als eene strenge wiskunstige wetenschap, bestaat, zijn hare uitspraken niet alleen voor den buitenstaander, maar veelal ook voor den kansrekenaar zelven, voornamelijk om de toepassing op het dagelijksch leven van belang. Men is onwillekeurig geneigd hare uitspraken (die in waarheid slechts de waarschijnlijkheid van gebeurtenissen betreffen) als voorspellingen of althans als verwachtingen van gebeurtenissen op te vatten. Zoolang iemand echter deze opvatting van de kansrekening koestert, miskent hij hare werkelijke bedoeling, en het gevolg zal zijn dat hij in haar niet zoo zeer de uitdrukking van kennis (wat zij toch ongetwijfeld is) als wel van een gebrek aan kennis ziet. En van dit standpunt tot het „Prinzip des mangelnden Grundes“ is maar ééne schrede. Vergeleken met de andere wiskunstige wetenschappen, verkeert de kansrekening inderdaad in eene eenigszins ongelukkige positie. Ook op het gebied dier andere wetenschappen kennen wij ten deele; maar daar behoeft, gemeenlijk, onze gebrekkige kennis door het geen er aan ontbreekt, in zekeren zin, nog slechts aangevuld te worden: het gedeelte der werkelijkheid dat wij kennen en het gedeelte dat wij niet kennen zijn er inderdaad twee gedeelten die, als het ware, rustiglijk buiten en naast elkander zijn gelegen. Ook de fijnste benadering van het getal π is, noodzakelijkerwijze, onvolkomen, maar ook de ruwste benadering behoeft om volkomen te worden nog slechts eene geringe toevoeging (al zullen wij die toevoeging ook nimmer volkomen kunnen aangeven). En hoe de achterzijde der maan er uitziet, dat zullen wij wel nimmer te weten komen; maar juist omdat zij de achterzijde is, behoeven wij niet te vreezen dat zij ons bij het bestudeeren der voorzijde ooit in den weg zal staan. Of men denke aan het relativiteitsbeginsel: in de wetenschappe-

lijke voorstelling van de natuur brengt dit eene algeheele wijziging; in de natuurkundige grondformules evenwel treedt het slechts als eene kleine, aanvullende correctie op. Bij dezen stand van zaken heeft de geleerde geene reden om zich over de onvolledigheid der menschelijke kennis te verontrusten: op zich zelve, in abstracto, beschouwd, doet de wereld zijner wetenschap, wat strengheid van bouw en begriipelijken samenhang aangaat, voor de wereld der werkelijkheid niet onder, en hare gelijkenis daar mede ziet hij geleidelijk en gestadiglijk toenemen.

Ik wil nu geenszins beweren dat dit alles ook niet op de kansrekening van toepassing is. In tegendeel, wanneer men de kans voor het bovenkomen van eene bepaalde zijde van eenen volmaakt afgewerkten, homogenen, dobbelsteen door $\frac{1}{6}$ voorstelt; dan heeft men het over eenen dobbelsteen die slechts in abstracto bestaat; en iets dergelijks geldt voor ieder vraagstuk der kansrekening. Terwijl dus de kansrekenaar weet dat zijne uitspraken om op de werkelijkheid toepasselijk te zijn steeds eene correctie moeten ondergaan (die hij vaak, wegens de gebrekkigheid zijner kennis, niet bij machte zal zijn aan te geven); behoeft hij zich over deze omstandigheid toch niet bezorgd te maken: in abstracto valt die gebrekkigheid zijner kennis geheel weg; en juist wanneer hij zijne problemen aldus in abstracto beschouwt bevindt de kansrekenaar zich in zijn element.¹⁾ Het onderscheid echter

¹⁾ Dit onderscheid tusschen 'kans in abstracto' en 'kans in concreto' ziet Poincaré geheel over het hoofd, war hij (*Calcul des Probabilités* blz 273) zegt: „Ouelle est la probabilité pour que des comètes, étrangères au système solaire, aient une orbite hyperbolique? On supposera bien que, à une certaine distance du soleil, les comètes sont uniformément réparties dans l'espace; mais sur quoi fonder cette hypothèse? en vertu de quelle cause?” Deze laatste vraag is, echter, in een boek over kansrekening niet op haar plaats. Toen Laplace zich had voorgenomen om de gevraagde kans uit te rekenen, zoude hij, in zijne hoedanigheid van kansrekenaar, even goed van iedere andere vooronderstelling kunnen hebben uitgaan, maar hij koos, natuurlijk, de vooronderstelling die hem, in zijne hoedanigheid van astro-

tusschen de kansrekening en de andere wetenschappen, waar ik op wilde wijzen, is hierin gelegen: dat het element waarin de kansrekening zich aldus, met volkomen zekerheid, beweegt, en waardoor zij alleen bestaat, met het begrip „wetenschap“, op het eerste gezicht, geheel in strijd schijnt te zijn; het is, namelijk, niet anders dan de (binnen de grenzen, door de mogelijkheden van ieder geval bepaald) volstrekte onzekerheid zelve. Nu spreekt het, dunkt mij, van zelf dat de kansrekening, behoorlijk opgevat, zich dan ook over datgene waarover wij ons in die volstrekte onzekerheid bevinden, niet zal uitlaten; met andere woorden, dat de kans op een zeker feit iets geheel anders moet zijn dan de verwachting van dat feit. Maar kansen en verwachtingen te verwarren is zeer verleidelijk; en maakt men zich aan de verwarring schuldig, dan verkrijgt de kansrekening te eenen male een paradoxaal karakter, en het „Prinzip des mangelnden Grundes“ is het eenige beginsel dat tot hare verklaring overblijft.

Wanneer wij dus bij Poincaré lezen (C. d. P. blz. 8): „Une question de probabilités ne se pose que par suite de notre ignorance;“ dan zullen wij niet beginnen te lachen en zeggen dat dat nog al van zelf spreekt, aangezien nu eenmaal alleen een gek naar den bekenden weg pleegt te vragen; maar wij zullen, integendeel toegeven dat onze onwetendheid in de kansrekening inderdaad op eene geheel bijzondere wijze aan het woord is. En wij zullen zelfs bereid zijn zelven over de wonderlijke situatie waarin de kansrekening, met de andere natuurwetenschappen vergeleken, tengevolge van dat feit verkeert, uit de weiden. Immers, op grond der kansrekening kennen wij aan de verwerkelijking van allerlei mogelijkheden be-

noom, alleen voorkwam juist te zijn. En indien de door hem berekende kans gebleken ware niet met de ervaring overeenstemmen, dan zoude hij die vooronderstelling hebben moeten wijzigen; hetgeen hij zich als astronoom misschien ten zeerste; maar als kansrekenaar in het geheel niet zoude hebben aangetrokken.

paalde „kansen“ door breuken uitgedrukt, toe. Letten wij nu echter op die verwerkelijking zelve, dan blijkt het dat die al of niet plaats heeft: óf ten volle óf in het geheel niet; van eene „breuk“ die men daarbij te pas zoude kunnen brengen valt niets meer te bespeuren. Vandaar dat, zoodra wij de uitspraken der kansrekening als verwachtingen opvatten, datgene dat wij, toen wij zulk eene verwachting uitspraken, meenden te weten, in datgene dat wij niet wisten (de verwerkelijking of het uitblijven van wat wij verwachtten) telkenmale geheel te niet schijnt te gaan, en er als het ware door schijnt te worden opgeslokt. Zoo heeft, bijvoorbeeld, een kansrekenaar die, voor eene roulette staande, betoogt dat de kans op het zesmaal achtereen uitkomen van de nul nog minder dan één tweeeënehalfmilliardste bedraagt, alle reden om bevreesd te zijn dat hij, indien daarop de nul nu toevalliglijk eens juist zes maal achtereen uitkomt, tegenover de omstanders een figuur slaat dat zeer veel op eene zevende nul gelijkt. En toch zal hij dan slechts het slachtoffer geworden zijn van de onjuiste meening dat de kansrekening ons verwachtingen aangaaande bepaalde gebeurtenissen aan de hand doet, en dus dient om ons gebrek aan kennis van de speciale oorzaken, die die gebeurtenissen bepalen, op te heffen. Zulk eene meening echter is verkeerd.

En daarom zullen wij niet met Poincaré mede gaan wanneer hij op den zoo juist aangehaalden zin laat volgen: „il n'y aurait place que pour la certitude si nous connaissions toutes les données du problème.“ Want deze uitspraak berust op eene verwarring van „wetenschappelijk vraagstuk“ in het algemeen en „kansrekenkundig vraagstuk“ in het bijzonder. Een kansrekenkundig vraagstuk is slechts oplosbaar indien wij alle kansrekenkundige gegevens ervan inderdaad kennen; deze kansrekenkundige gegevens echter, zijn „gegevens“ alleen van kansrekenkundig standpunt beschouwd; van ieder ander standpunt zijn het geene gegevens maar beteekenen zij

totale ,onzekerheid'. En zoo is het ook met de oplossing van kansrekenkundige vraagstukken. Zulk eene oplossing geeft ons evenzeer als de oplossing van ieder ander wetenschappelijk vraagstuk ,zekerheid', maar: ,kansrekenkundige' zekerheid, dat wil zeggen eene zekerheid die, van ieder ander dan kansrekenkundig standpunt beschouwd, de onzekerheid zelve is.

Ons resultaat is dus dat de kansrekening slechts dan een paradoxaal karakter vertoont, wanneer men haar van een niet-kansrekenkundig standpunt beschouwt. Van een kansrekenkundig standpunt beschouwd echter, is zij evenals ieder andere wiskundige wetenschap de exacte formuleering van positieve kennis. Deze positieve kennis is echter geene kennis van feiten of speciale oorzaken, maar van „speelruimten“. En hiermede zijn wij weer bij de theorie van von Kries aanbeland. Von Kries' verdienste bestaat, mijns inziens, hierin dat hij (in tegenstelling tot de aanhangers van het „Prinzip des mangelnden Grundes“) zich afgevraagd heeft: Welke is de kennis die wij moeten bezitten om tot kansrekenkundige uitspraken gerechtigd te zijn? Die kennis is van ieder ander standpunt beschouwd de onwetendheid zelve; maar hierdoor heeft von Kries zich niet laten afschrikken. En men heeft, dunkt mij, de keus om óf met von Kries (blz. 296 van zijn boek) te zeggen dat de kansrekening als wiskundige wetenschap slechts recht van bestaan heeft „wenn sie sich streng daran hält, dass sie reale Grössen von einfach angebarer objectiver Bedeutung zu berechnen hat. Um dies zu können, muss sie notwendig von dem Begriff der Spielräume ausgehen“ óf om aan de begrijpelijkheid van de kansrekening te vertwijfelen, zooals bijvoorbeeld Poincaré doet, die zegt (C. d. P. blz. 274) „Le calcul des probabilités offre une contradiction dans les termes mêmes qui servent à le désigner.“

Nu het „beginsel der evengroote mogelijkheden“. Eigenlijk zoude men beter doen slechts van „de uitdrukking evengroote mogelijkheden“ te spreken, waarmede tal van schrij-

vers het begrip „waarschijnlijkheid“ gemeend hebben te kunnen verklaren. Dat die uitdrukking hen zelven, evenwel, nimmer geheel heeft kunnen bevredigen, blijkt wel hieruit dat zij haar steeds weer, op haar beurt, door een ander begrip hebben trachten op te helderen. Zoo zegt bijvoorbeeld Jac. Bernoulli (*Ars Conjectandi* blz. 219) „Pono autem, omnes casus aequae possibiles esse, seu pari facilitate evenire posse“ en dit begrip „gemakkelijkheid“ beschouwt hij zelfs als iets waarvan men de grootte wiskunstiglijk uitdrukken kan, in het geval n. l. dat de gevallen niet „even mogelijk“ zijn: „pro quovis casu faciliori tot alii casus numerandi sunt, quoties is caeteris facilius evenit.“ Hij verklaart dus het begrip „evengroote mogelijkheid“, gelijk voor hem Huyghens reeds gedaan had (*Ars Conjectandi* blz. 7) met behulp van het begrip „gelijke gemakkelijkheid“. Het komt mij echter voor dat dit laatste begrip te eenen male van beteekenis ontbloot is. Immers, ik geloof niet dat iemand, bij eenig nadenken, zoude kunnen volhouden dat, bijvoorbeeld, indien men met twee dobbelsteen en werpt, de uitkomst van 7 oogen inderdaad gemakkelijker tot stand komt dan de uitkomst van 12 oogen (hoewel zij toch zesmaal waarschijnlijker is). In de werkelijkheid, dat wil zeggen de natuur, namelijk, geschiedt alles met volstrekte gemakkelijkheid. Zelfs indien een dobbelsteen (uiterst onwaarschijnlijk!) op één zijner twaalf kanten blijft balanceeren, dan geschiedt dat (in de zeldzame gevallen dat het geschiedt) met diezelfde volstrekte gemakkelijkheid; al mag het voor ons ook zeer moeilijk of zelfs onmogelijk zijn die uitkomst met opzet te bewerkstelligen.

Ook Laplace bezigt de uitdrukking „des cas également possibles“ maar ook hij voegt er eene nadere verklaring aan toe: „c'est à dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence.“ (*Oeuvres* VII p. IX) Wat men, echter, onder „également indécis“ moet verstaan, begrijp ik alweer niet. Want deze uitdrukking houdt den eisch in om eene volstrekte

onbepaaldheid quantitatief toch als bepaald te beschouwen; hetgeen ongerijmd is.

De moderne kansrekenaars zijn in hunne verklaring van het begrip „evengroote mogelijkheid“ al niet gelukkiger. Gemeenlijk brengen zij het in verband met het „Prinzip des mangelnden Grundes“ (Czuber Wahrscheinlichkeitsrechnung blz. 9 ziet zelfs hetzelfde steven ook in de zoo juist aangehaalde uitslatingen van Bernoulli en Laplace). Zeer duidelijk is op dit punt Markof (Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von H. Liebmann, Leipzig 1912, blz. 2) „Wir nennen zwei Ereignisse gleichmöglich, wenn gar keine Gründe vorliegen, eines von ihnen bestimmter als das andere zu erwarten.“ Het eenvoudigste geval nu is dat men een aantal „Ereignisse“ heeft die „allein möglich, unvereinbar und gleichmöglich sind. Dann wird Wahrscheinlichkeit eines jeden dieser Ereignisse der Bruch genannt, dessen Zähler der Einheit, dessen Nenner dagegen ihrer Anzahl gleich ist.“ Dit is de verklaring die Markof van het begrip „waarschijnlijkheid“ geeft; men zoude haar als „de gladverkeerde verklaring“ kunnen aanduiden. Immers, ook zonder nadere opheldering treedt het begrip „waarschijnlijkheid“ op als iets dat quantitatief volkomen bepaald is. Nu gaat hij dit begrip afleiden uit de vage notie van „evengroote mogelijkheid“. En deze uitdrukking krijgt dan op haar beurt tot basis het totaal ongerijmde „Prinzip des mangelnden Grundes“. Mij dunkt, op deze wijze geraakt men eerst van den wal in de modder, en vervolgens uit de modder in de sloot.

Dit schijnt ook von Kries gevoeld te hebben. Ondanks zijn beginsel der speelruimten heeft hij, namelijk, toch een zeker zwak voor het begrip „even groote mogelijkheden“. Zoodat hij op blz. 6 van zijn boek verklaart: „In der Aufstellung und Abzählung solcher gleich möglicher Fälle ist in der Tat das ganze Geschäft der Wahrscheinlichkeits-Rechnung zu erblicken.“ Daarop voelt hij groote neiging om dit begrip met behulp van het „Prinzip des mangelnden Grundes“ te verklaren.

Op het laatste oogenblik maakt hij echter, juist nog op tijd, rechtsomgekeert en — komt weer bij het begrip waarschijnlijkheid terecht. Hij had beter gedaan maar van meet af bij dat begrip te blijven! Omdat men misschien denken zal dat ik niet juist gelezen het zal ik hem letterlijk aanhalen (Op het keerpunt zijner gedachte plaats ik een gedachtenstreepje): „... so ergibt sich ohne Schwierigkeit die Erklärung, dass als gleich möglich zwei oder mehrere Fälle anzusehen sind, wenn in dem jeweiligen Stande unserer Kenntnisse sich kein Grund findet, unter ihnen einen für — wahrscheinlicher als irgend einen anderen zu halten.“

Van de schrijvers die ik geraadpleegd heb is Bruns de eenige die met het begrip 'evengroote mogelijkheden' eensklaps (blz. 11 van zijn boek) zonder nadere verklaring voor den dag komt. Hij zegt n. l. dat hij, wanneer hij spreekt van het 'blindelings' trekken van een balletje uit eene urn die zwarte en witte balletjes bevat, daaronder tweërlei wenscht te verstaan: ten eerste dat de persoon die trekt niet bij machte is opzettelijk eene bepaalde kleur te bevoordeelen; „und zweitens, dass für jede der Kugeln die gleiche Möglichkeit des Gezogenwerdens bestehe; so dass der Zug selber den Charakter eines zufälligen Ereignisses annimmt.“ Hij vat dus het begrip 'evengroote mogelijkheden' op als iets waarvan de beteekenis van zelf spreekt. Maar het beginsel waaruit hij de waarschijnlijkheidsrekening wil verklaren is toch weer iets anders; namelijk de „schijnbare toevalligheid“ van gebeurtenissen wier oorzaken wij niet tot in alle onderdeelen kunnen nagaan.

Na al deze aanhalingen zal men het met mij eens zijn, dat het zeer gewenscht is de uitdrukking „evengroote mogelijkheden“, onafhankelijk van hetgeen de schrijvers over kansrekening er met zulk een weinig bevredigend resultaat over te berde gebracht hebben, aan een nader onderzoek te onderwerpen. Dit onderzoek zal dan in de eerste plaats daarin moeten bestaan dat wij ons afvragen wat toch wel de eigenlijke be-

teekenis is van het woord „mogelijkheid“; daarna zal het ons niet moeilijk vallen uit te maken of wij het praedicaat „even-groot“ aan mogelijkheden mogen toekennen of niet.

Wat nu het begrip „mogelijkheid“ aangaat; eene voortreffelijke ontleding daarvan heeft Kant (die een meester is in het ontleden van begrippen) ons gegeven in de Kritik der reinen Vernunft (2de druk blz. 265 vvg. Die Postulate des empirischen Denkens überhaupt). Hij geeft aldaar, om te beginnen, de volgende bepaling: „Was mit den formalen Bedingungen der Erfahrung (der Anschauung und den Begriffen nach) übereinkommt, ist möglich.“ De woorden „der Anschauung und den Begriffen nach“ dienen, in deze bepaling, om datgene aan te geven, waar het, indien wij het over de mogelijkheid eener zaak hebben, op aankomt (in tegenstelling met datgene waar het op aan zoude komen indien wij het over de werkelijkheid dier zaak hadden). Lezen wij, bijvoorbeeld, in eenen roman, spelende op de planeet Mars, eene beschrijving van het een of andere, door den schrijver gefantaseerde, levende wezen, en vragen wij ons af of dat voortbrengsel zijner verbeelding ook mogelijk is; dan moet het antwoord luiden, dat dat, in laatsten aanleg, alleen afhangt van de aanschouwelijke elementen en van de begrippen, waaruit de voorstelling van dat levende wezen is opgebouwd: van de formeele gesteldheid dier voorstelling dus. Komt deze, namelijk, aldus „den Anschauungen und den Begriffen nach“ met de formeele voorwaarden, door den aard der dingen aan ervaarbare werkelijkheid gesteld, overeen, dan is zij de voorstelling van iets mogelijks; indien niet, dan van iets ónmogelijks. Of zij echter de voorstelling van iets werkelijks is, of van iets dat ooit werkelijk geweest is, dat hangt van iets geheel anders af: hiervan namelijk, of zulk een levend wezen inderdaad te eenigen tijd, te eeniger plaats, krachtens het causale verloop der natuur, vleesch en bloed geworden is; zoodat een mensch die zich op dien tijd óók op die plaats

hadde bevonden, het zoude hebben kunnen waarnemen. De vraag naar de werkelijkheid heeft dus (om ons in het gebruik der termen „vorm“ en „materie“ bij Kant aan te sluiten) betrekking op materieele voorwaarden. Vandaar dat Kant ook zegt: „Was mit den materialen Bedingungen der Erfahrung (der Empfindung) zusammenhängt, ist wirklich.“

Men zal deze definitie van „mogelijkheid“ misschien te speculatief vinden. Bij Kant echter behoeft men voor speculatieve neigingen niet bevreesd te zijn. Hij acht juist „den ausgebreiteten Nutzen und Einfluss dieses Postulats der Möglichkeit“ daarin te zijn gelegen dat het ons voor speculeeren behoedt. Immers de formeele voorwaarden door den aard der dingen aan ervaarbare werkelijkheid gesteld zijn ons niet bekend.¹⁾ En daarom moeten wij in de beoordeeling van wat mogelijk is, en wat niet, juist de uiterste voorzichtigheid betrachten: dat is de „invloed“ die het „postulaat der mogelijkheid“ op ons hebben moet. Omtrent de mogelijkheid of onmogelijkheid van eenige zaak, kan ons alleen de ervaring iets leeren;²⁾ ook al hangt die mogelijkheid of onmogelijk

¹⁾ Behelve dan de meest algemeene (volgens Kant, ruimte, tijd en de „kategorieën“). Diët behoort echter niet tot het onderwerp van dit geschrift.

²⁾ Kant komt vooral hier tegen op dat men meent de mogelijkheid eener zaak te kunnen bewijzen door aan te toonen dat het begrip dier zaak niet met zich zelf in strijd is. Dit is de fout van hen onder anderen, die, omdat men allerlei „meetkunden“ kan verzinnen die op de ons bekende ruimte niet toepasselijk zijn; meetkunden bijvoorbeeld waarin twee rechte of „rechtste“ lijnen eene vlakke figuur begrenzen kunnen, nu ook meenen eene ruimte, waarin zulk eene meetkunde „gelden“ zoude, voor mogelijk te moeten houden. Zulk eene uitspraak klinkt zeer bescheiden, en zoo zal ieder ook op het eerste gezicht de welwillendheid lofwaardig achten waarmede bijvoorbeeld Helmholtz, over Kant (die niet aan eene andere dan de van oudsbekende ruimte geloofde) sprekende, dit standpunt aldus verklaart dat Kant „durch den damaligen Entwicklungszustand der Mathematik beeinflusst gewesen“ zoude zijn (Vorträge und Reden 4^{te} Auflage II blz 230). Hooren wij nu echter Kant: „Dass in einem solchen Begriffe kein Widerspruch enthalten sein müsse, ist zwar eine nothwendige logische Bedingung; aber zur objektiven Realität des Begriffs, d. i. der Möglichkeit eines solchen Gegenstandes, als durch den Begriff gedacht wird, bei weitem nicht genug. So ist in dem Be-

heid, op zich zelve beschouwd, niet van ervaring af (maar veeleer omgekeerd de ervaring van de mogelijkheid). Langs iederen anderen weg „würde man in lauter Hirngespinnste geraten, deren Möglichkeit ganz und gar kein Kennzeichen für sich hat, weil man bei ihnen nicht Erfahrung zur Lehrerin annimmt.“

Wij kunnen dus betreffende het begrip „mogelijkheid“ het volgende vaststellen. Indien onze geest de dingen van hun eigenlijke wezen uit aanschouwde, dan zouden wij hunne mogelijkheid of onmogelijkheid, onafhankelijk van iedere ervaring, geheel a priori kunnen beoordeelen. Onze geest aanschouwt de dingen echter niet van hun eigenlijke wezen uit, maar wordt hen eerst nadat zij eenmaal werkelijk zijn geworden, als het ware van buiten af, gewaar. En daarom, nu, zijn wij, wat de beoordeeling hunner mogelijkheid of onmogelijkheid aangaat, geheel en al van onze ervaring afhankelijk. Intusschen blijft de mogelijkheid der dingen in waarheid toch van hun al of niet bestaan te eenen male onafhankelijk; en deze waarheid treedt voor ons hierin aan den dag, dat ook onze kennis van de mogelijkheid van eenige zaak of van eenig verschijnsel (ook al hebben wij enkel op grond van ervaring tot die kennis kunnen komen) wanneer wij die kennis eenmaal bezitten toch van alle verdere ervaring te eenenmale onafhankelijk is. Zoo behoeven wij slechts één

griffe einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Widerspruch, denn die Begriffe von zwei geraden Linien und deren Zusammenstossung enthalten keine Verneinung einer Figur; sondern die Unmöglichkeit beruht nicht auf dem Begriffe an sich selbst, sondern der Construction desselben im Raume“ enz (ik spatieer) welke „Construction im Raume“ nog geheel iets anders is dan het verzinnen van eene of andere „niet-Euclidische meetkunde“, gelijk men bij lezing der Kritik der reinen Vernunft zal bemerken! Waarlijk, dat Kant de verzimmers van onmogelijke meetkunden en Helmholtz niet gekend heeft, is jammer; niet echter voor Kant, maar voor die verzimmers en Helmholtz zelve. Hij had hun eenige inlichtingen kunnen verschaffen die zij wel zouden hebben kunnen gebruiken.

exemplaar, of zelfs slechts één onbetwistbaar onderdeel van een exemplaar van eenige voorwereldlijke diersoort opgegraven te hebben, opdat voor alle tijden de mogelijkheid (onder omstandigheden overigens die ons dan misschien nog onbekend zijn) van die diersoort onwankelbaar vast sta. En daarom moeten wij onze kennis van mogelijkheden beschouwen als eene kennis, die van onze kennis van werkelijkheden wel in zooverre verschilt dat zij van eene geheel andere orde is, maar niet in zooverre dat zij minder objectief zoude zijn. Hare objecten zijn niet werkelijk maar mogelijk; dit verschil in object beteekend echter geen verschil in objectiviteit.

En thans de toepassing dezer overweging op de kansrekening. Nemen wij als voorbeeld wederom het werpen met eenen dobbelsteen. De natuurwetten die hierbij in het spel zijn, zijn van zoo eenvoudigen aard dat reeds de meest algemeene ervaringen omtrent het vallen en de beweging van voorwerpen ons in staat stellen de verschillende mogelijkheden die zich in dit geval voordoen te beoordeelen. De dobbelsteen kan óf op ééne zijner zes zijden komen te liggen óf blijven balanceeren; en dit laatste kan weer op twee wijzen geschieden: óf op éénen zijner twaalf kanten óf op één zijner acht hoekpunten. De vraag is nu, of wij aan elke dezer verschillende mogelijkheden ook eenen bepaalden graad van mogelijkheid moeten toekennen. Welk antwoord wij hierop moeten geven, komt mij voor niet twijfelachtig te zijn. Indien wij die verschillende mogelijkheden zich eens achtereenvolgens zagen verwerkelijken, dan zouden wij toch aan die verschillende uitkomsten zekerlijk geenen graad van werkelijkheid toekennen. Nu is ons gebleken dat de mogelijkheid der dingen in geen enkel opzicht minder objectief te achten is dan hunne werkelijkheid. Met welk recht zouden wij dan aan mogelijkheden, enkel omdat hare verwezenlijking meer of minder waarschijnlijk (maar daarom wanneer zij zich voordoet geenszins meer of

minder werkelijk) is, eenen graad van mogelijkheid toe mogen kennen? Zoo iets zoude iederen zin ontberen; iets is óf mogelijk óf onmogelijk, van „meer of min“ kan men hierbij niet spreken, en daarom moeten wij de uitdrukking „even groote mogelijkheid“, zoowel op zich zelve beschouwd als gebezigd ter verklaring der kansrekening, te eenen male afwijzen en verwerpen.

Ook langs dezen weg zijn wij dus weder tot de slotsom gekomen, dat men er verkeerd aan doet het begrip ‚kans‘ of ‚waarschijnlijkheid‘ te willen verklaren door het door een ander begrip te vervangen. Kennis van waarschijnlijkheden is geene kennis van werkelijkheden, want voortdurend geschieden de onwaarschijnlijkste dingen.¹⁾ Maar zij is ook geen kennis van mogelijkheden, want de dingen zijn meer of minder waarschijnlijk, maar geenszins meer of minder mogelijk. Wat is kennis van waarschijnlijkheden dan echter wel? Zij is eene kennis gegrond op kennis van mogelijkheden en bruikbaar bij het onderzoek der werkelijkheid. Deze verklaring behoeft nog nadere opheldering, maar zij volstaat toch reeds om te doen inzien dat bij de zeer eigenaardige beteekenis van het begrip ‚kans‘ aan dit begrip ook een eigen naam toekomt. In plaats, dus, van het woord ‚kans‘ uit de theorie zelve der kansrekening te verdrijven moeten wij veeleer er over verheugd zijn dat dit bijzondere woord voor dat bijzondere begrip bestaat; ware dat niet het geval dan zouden wij genoodzaakt zijn zulk een woord uit te vinden.

Van bijzonder belang nu is het dat wij, door het theorema van Bernoulli, in staat zijn de bruikbaarheid van kennis van kansen tot het kennen van werkelijkheden aan te toonen, zonder de sfeer van het begrip ‚kans‘ te verlaten. Het stelt ons, namelijk, in staat om iedere kansbreuk in verband

¹⁾ γίγνεται γὰρ τὸ παρὰ τὸ εἶδος, ὥστε εἶδος καὶ τὸ παρὰ τὸ εἶδος.
(Aristoteles, Rhetorika B p. 1402 a).

te brengen met eene andere kansbreuk, die men onbepaald tot de éénheid kan doen naderen. Dit zal in het laatste hoofdstuk ter sprake komen. Maar hier is de opmerking op hare plaats dat het theorema van Bernoulli evenzeer dienen kan om de eigenaardige beteekenis van het begrip 'kans' in het licht te stellen, dáán waar die kans niet tot de eenheid maar tot nul nadert. Men zegt vaak dat 'eene kans nul' 'onmogelijkheid' beteekent. Dit is echter geenszins het geval. Om dat aan een voorbeeld te doen zien, behoef ik slechts te herinneren aan de behandeling van het werpen met eenen dobbelsteen, volgens het beginsel der speelruimten, in het vorige hoofdstuk. Daar hebben wij de mogelijkheid dat de dobbelsteen op één zijner kanten of hoekpunten blijft balanceeren buiten beschouwing gelaten. Aan deze uitkomst, namelijk, beantwoorden geene speelruimten, maar slechts de grensgebieden tusschen de onnoemelijk vele uiterst kleine speelruimten van n afmetingen, die wij hebben ingevoerd.¹⁾ Hebben wij echter eenen idealen dobbelsteen en werpen wij op eene volkomen gladde tafel, dan zullen die grensgebieden of gebieden van discontinuïteit $n-1$ afmetingen dus geen n -dimensionaal volumen hebben. Op de verwezenlijking der mogelijkheden die aan deze gebieden beantwoorden bestaat derhalve eene kans nul. Toch zijn deze uitkomsten niet onmogelijk. Paradoxaal is deze uitkomst alleen voor wie de begrippen 'mogelijkheid' en 'waarschijnlijkheid' niet uiteenhoudt. Houdt men deze begrippen daarentegen wel uiteen dan beteekent de kans nul die aan eene mogelijkheid toekomt het volgende. Gesteld

¹⁾ Aan ieden der zes in het vorige hoofdstuk beschouwde uitkomsten beantwoordde de geheele speelruimte aan onze hand geboden. De grensgebieden echter tusschen de onnoemelijk kleine speelruimte blijven toch hunne beteekenis behouden. Want bij den overgang van één zoo 'n speelruimtetje dat, bijvoorbeeld de 4 tot uitkomst heeft, naar een naburig speelruimtetje, moet men om wederom de 4 tot uitkomst te hebben, den dobbelsteen een anderen stand geven. Het grensgebied tusschen die twee speelruimtetjes heeft derhalve de beteekenis van een gebied van discontinuïteit.

dat men van de uitvinding van den dobbelsteen af tot nu toe onafgebroken gedobbeld had met ideale dobbelsteen en op volkomen gladde tafels; dan zoude het toch uiterst onwaarschijnlijk zijn dat daarbij ook slechts één maal één dier dobbelsteen op een zijner kanten of hoekpunten ware komen te balanceeren. Daarin ligt niets paradoxaals, dit zoude er slechts dan inliggen indien zij luidde dat het niet mogelijk zoude geweest zijn dat één dier dobbelsteen (of zelfs ook vele dier dobbelsteen) één maal (of zelfs ook vele malen) op een hoekpunt of kant waren komen te balanceeren.

Van zooveel belang is het om de twee onderling geheel verschillende begrippen ,kans' en ,mogelijkheid' ook als twee onderling geheel verschillende begrippen te behandelen. Ik hoop door deze kritiek op eenige pogingen om het begrip kans tot een ander begrip te herleiden de belangstelling voor het beginsel der speelruimten, dat juist de oorspronkelijke beteekenis van het begrip ,kans' in het licht stelt, eenigermate verhoogd te hebben en ga daarom, in het volgende hoofdstuk, wederom tot de bespreking van dat beginsel over.

HOOFDSTUK III.

DE THEORIE VAN VON KRIES. (TWEDE HELFT.)

DE KANSREKENKUNSTIGE RELATIE.

De beschouwingen van het vorige hoofdstuk kunnen ons leeren tot welke kwade gevolgen de even algemeen verbreide als verkcerde opvatting der wijsbegeerte leidt, volgens welke het wijsgeerige gebruik der woorden er in zoude bestaan hun gewone gebruik te verlaten; zoodat de volmaakte wijsbegeerte (gesteld dat de menschelijke geest bij machte ware deze tot uitdrukking te brengen) iets zoude zijn dat ons — in plaats van oneindig veel vertrouwder — oneindig veel vreemder moest voorkomen dan al hetgeen wij nog ooit hadden gehoord. Nu is het een bekend feit (dat te allen tijde aan den vooruitgang der wijsbegeerte in den weg staat) dat wij woorden en uitdrukkingen slechts een aantal malen achtereen behoeven te vernemen om de beteekenis, waarin zij oorspronkelijk werden gebezigd, eerst uit het oor, en vervolgens ook uit het oog te verliezen. En daarom ben ik bevreesd dat ook het woord „speelruimte“, enkel doordat ik het een aantal malen heb genoemd, voor den lezer eenen bijzonderen en vreemden klank heeft verkregen die de oorspronkelijke beteekenis, in de taal van het dagelijksch leven aan dat woord eigen, geheel overstemt.

In dit hoofdstuk, nu, zal ik trachten aan te toonen dat het juist die gewone en oorspronkelijke beteekenis is, waarin het begrip „speelruimte“ in de kansrekening behoort te worden gebezigd. En wel leent dit begrip zich tot dit kansrekenkunstig gebruik zoozeer van nature, dat men er zich over verbazen moet dat het zijne plaats in deze wetenschap niet van den beginne

heeft ingenomen. Maar in de achttiende eeuw koesterde men van de kansrekening (gelijk dat ten aanzien van eene wetenschap die in korten tijd tot zoo grooten bloei geraakte wel verklaarbaar is) zulke overdreven verwachtingen dat men hare eigenlijke, veel bescheidenere, strekking wel voorbij moest zien. Bernoulli vat haar op als eene wetenschap om de waarheid te gissen, en prijst haar aldus: „*Conjicere rem aliquam est metiri ejus probabilitatem: ideoque Ars Conjectandi sive Stochastice nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissime probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis et actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, satius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia et Politici prudentia versatur.*” (Ars conjectandi blz. 213.) En ook Laplace verheft haar hemelhoog en spreekt van hare applicatie „aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité”; en hij hoopt dat zijne beschouwingen „puissent mériter l'attention des philosophes, et la diriger vers un objet si digne de les occuper” (Aanhef zijner „Introduction”). Van deze achttiende-eeuwsche overschatting der kansrekening is de verwarring, die thans nog ten aanzien harer beginselen bestaat, afkomstig.

Het beste bewijs der onontbeerlijkheid van het begrip „speelruimte” in de kansrekening is hierin gelegen, dat men geene waarlijk bevredigende verklaring van één der fundamenteele vraagstukken der kansrekening kan opstellen (of bij eenigen schrijver zal aantreffen) waarbij dat begrip niet het uitgangspunt vormt. Het woord „speelruimte”, weliswaar, zal men niet vaak aantreffen; maar men zal het in iedere juiste kansrekenkundige verklaring, zonder deze te wijzigen, kunnen invoegen, en dan zal die verklaring blijken daardoor aan duidelijkheid, althans aan aanschouwelijkheid, nog iets te hebben gewonnen.

Waarin bestaat bijvoorbeeld de toepassing van de kansrekening op de theorie der moleculaire bewegingen, door Maxwell ingevoerd, anders dan hierin, dat men de coördinaten van plaats en beweging der moleculen van een gas beschouwt, niet naar de bepaalde waarde die zij voor ieder bepaald molecuul op ieder bepaald oogenblik bezitten, doch als grootheden waaraan eene zekere 'speelruimte' is gelaten? Hoe men, aldus, geraken kan tot eene speelruimte van zeer vele afmetingen, waarin iedere (door de coördinaten van ieder bepaald molecuul bepaalde) toestand eener gasmassa door een bepaald punt wordt vertegenwoordigd, behoef ik hier niet uiteen te zetten, daar men die uiteenzetting elders vinden kan, bijvoorbeeld in Lorentz': „Les Théories statistiques en Thermodynamique“ (§ 4). Lorentz noemt die speelruimte „l'extension en phase“. Had hij gesproken van „latitude“ (of, in het Nederlandsch, „speelruimte“) dan zoude hij zich nog iets juister uitgedrukt hebben. Want, aangezien, zooals Lorentz zegt, „le point représentatif décrira dans cet espace une certaine trajectoire“, hebben wij niet met eene werkelijke 'uitgebreidheid' te doen, maar juist met datgene, dat onder 'speelruimte' wordt verstaan.

Uit dit voorbeeld blijkt, (gelijk dat ook bij de behandeling van het werpen met eenen dobbelsteen in Hoofdstuk II gebleken is,) dat men, wil men het begrip 'speelruimte' op het gebied der kansrekening invoeren, tot één ding bereid moet zijn: namelijk, om in het woord 'speelruimte' aan 'ruimte' eene geheel overdrachtelijke beteekenis toe te kennen. Maar dat doet men ook reeds in de taal van het dagelijksch leven, wanneer men, bijvoorbeeld, op eene beschrijving van eenige zaak de aanmerking maakt dat zij „te veel speelruimte aan onze verbeelding laat“. Ja, men gaat in de kansrekening, in dit opzicht, niet eens zoover als in het dagelijksch leven; daar de kansrekening de toepassing van het begrip speelruimte beperken zal tot, in wiskunstigen zin, streng bepaalbare veranderlijke grootheden. Aan deze kunnen wij dan steeds (indien het

ons wenschelijk voorkomt) door ze als „afmetingen“ op te vatten, gemakkelijk eene quasi-ruimtelijke beteekenis verleenen.

Het volgende voorbeeld ontleen ik aan Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung 1903 blz. 3); het betreft het trekken van een balletje uit eene vaas, met balletjes van gelijke grootte, maar van verschillende kleuren, gevuld. Gewoonlijk vooronderstelt men dat hierbij de kans om getrokken te worden voor alle balletjes dezelfde is. Maar het spreekt van zelf dat deze vooronderstelling niet geheel juist is; immers er is toch alle reden om aan te nemen dat de kans om getrokken te worden voor twee balletjes, waarvan het eene zich op den bodem der vaas bevindt, terwijl het andere bovenop ligt, eenigszins, en in sommige gevallen zelfs zeer veel, zal verschillen. Czuber behandelt dit geval aldus:

Hij veronderstelt dat wij voor eene vaas staan die één wit, twee zwarte, en drie roode balletjes bevat. „Auch hier kann von einem Bereich der allgemeinen Bedingungen und von einer Scheidung desselben in Teilbereiche gesprochen werden..... Bei einer bestimmten Anordnung der Kugeln in der Urne führt jede der unendlich vielen Bewegungen welche..... die Hand..... machen kann, mit Notwendigkeit zu einer Kugel von bestimmter Farbe; das Gleiche gilt für jede der unendlich vielen denkbaren Lagerungen der Kugeln in der Urne..... Aber die Bewegungen, die zu dem einen oder andern Erfolge hinleiten zu charakterisieren, dafür gibt es keinen Anhalt..... Dagegen gestattet die dargelegte allgemeine Erkenntnis die quantitative Vergleichung der verschiedenen Bereiche von Bewegungen. Denkt man sich nämlich innerhalb einer jeder räumlichen Lagerung der sechs Kugeln alle möglichen Anordnungen der Farben ausgeführt, so wird ein bestimmter Platz zweimal so oft durch eine schwarze, und dreimal so oft durch eine rote besetzt sein als durch eine weisse: daher verhalten sich die Gesamtheiten der Bewe-

gungen, welke zu einer weissen, einer schwarzen, einer roten Kugel führen, quantitativ wie 1:2:3." (ik spatieer).

Mij dunkt, in eene Nederlandsche bewerking van het boek van Czuber, zoude men, zonder meer, op deze plaats, het woord „Bereich“ door „speelruimte“ mogen vertalen.

Uit deze voorbeelden, tezamen met die uit het eerste hoofdstuk van dit geschrijft, blijkt wel dat von Kries, het begrip „onderling vergelijkbare speelruimten“ op het gebied der kansrekening invoerende, eenen gelukkigen greep gedaan heeft. Had hij echter niet méér gedaan, dan zoude zijne verdienste nog niet bijzonder groot zijn. Went reeds vóór hem heeft A. Fick, in een werk dat ik bij von Kries aangehaald heb gevonden (Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten, Würzburg 1883), eene theorie der kansrekening ontwikkeld, waarin het, aan het begrip „speelruimte“ na verwante, begrip „Bereich“ of „Sphäre“ kennelijk eene groote rol speelt. Von Kries zegt (blz. 284 van zijn boek): „Jeder Wahrscheinlichkeits-Satz enthält nach Fick die Angabe einer Bedingung und einer Folge; die Bedingung ist in der Weise formuliert, dass sie einen gewissen ‚Bereich‘ umfasst.“ En dan haalt hij de volgende uitspraak van Fick aan: „Die Wahrscheinlichkeit eines unvollständig ausgedrückten hypothetischen Urteils ist der als echter Bruch dargestellte Teil des ganzen Bereichs der Bedingung, an dessen Verwirklichung der im Nachsatz ausgedrückte Erfolg notwendig verknüpft wird.“ Nu schijnt de theorie van Fick zeer onvolledig te zijn; althans von Kries zegt (blz. 286): „Zu einer befriedigenden Vervollständigung der Fick'schen Theorie würde zunächst die Frage aufzuwerfen sein, ob und wie der ‚Bereich‘ einer allgemein formulierten Bedingung in Teile von vergleichbarer Grösse zerlegt gedacht werden kann. Diese Frage berührt Fick gar nicht....“ (ik spatieer). Maar, indien von Kries niet meer had gedaan dan de theorie van Fick in dem door hem hier aangegeven zin te completeeren en daarbij het woord „Bereich“ door „Spielraum“

te vervangen, dan zoude zijne eigen beschouwingen den naam van eene zelfstandige theorie der kansrekening zekerlijk niet verdienen.

Wij hebben echter reeds gezien (blz. 15 van dit geschrift) dat von Kries van speelruimten, zullen deze tot grondslag mogen dienen van kansrekenkundige uitspraken, meer verlangt dan dat zij enkel onderling vergelijkbaar zijn: zij moeten tevens zijn hetgeen hij noemt: „oorspronkelijk“ en „indifferent“. In dit meerdere, dat hij verlangt, ligt de zelfstandige beteekenis zijner theorie. Voordat ik, nu, mijn oordeel over die theorie uitspreek, is het van belang dat wij weten welke toevoeging het beginsel der speelruimten, zooals wij het hebben leeren kennen, nog behoeft om volledig te zijn. Daarna zal het ons gemakkelijk vallen te beoordeelen of von Kries, met begrippen „oorspronkelijke“ en „indifferente speelruimten“, ons die toevoeging inderdaad levert.

Het beginsel der speelruimten, voorzoover ik het besproken heb, bestaat in de twee volgende overwegingen. Van waarschijnlijkheid of kans kan slechts sprake zijn in de gevallen, waarbij aan onze verwachting eene zekere speelruimte gelaten is. 2^o Eene streng wiskundig bepaalde uitdrukking van kansen is slechts mogelijk indien de speelruimten, die voor beschouwing in aanmerking komen, zelve voor eene streng wiskundige bepaling vatbaar, en dientengevolge onderling vergelijkbaar zijn. Eene kansbreuk geeft niet anders dan de verhouding van twee dergelijke onderling vergelijkbare speelruimten aan.

Dat dit beginsel, aldus geformuleerd, nog onvolledig is blijkt het duidelijkst hieruit, dat het niet in alle gevallen tot de ondubbelzinnige opstelling van kansbreuken leidt. Vooral op het gebied der „meetkundige waarschijnlijkheden“ blijkt dit. Nemen wij een vraagstuk dat Bertrand (*Calcul des Probabilités* 1889 blz. 6) behandelt, en waarvan hij beweert dat het niet voldoende bepaald is. Het zal ons blijken dat hij zich in

die bewering vergist, en tevens dat de reden zijner vergissing deze is, dat hij het beginsel der speelruimten (zonder dat hij dit als zoodanig kent) in zijnen onvolledigen staat, waarin ook wij het tot hier toe slechts kennen, toepast.¹⁾ „On fixe au hasard deux points sur la surface d'une sphère; quelle est la probabilité pour que leur distance soit inférieure à 10' ?“ Bertrand zegt nu vooreerst (en daar valt niets tegen te zeggen) „Le premier point peut être supposé connu, la position qu'il occupe, quelle qu'elle soit, ne change rien à la probabilité cherchée.“ Nu geeft hij echter van dit vraagstuk twee oplossingen die tot geheel verschillende uitkomsten leiden. Voeren wij den term „speelruimte“ in, dan kunnen wij zijne eerste oplossing aldus weergeven:

Het problem betreft, strikt genomen, niet de plaats van het tweede punt op het boloppervlak, doch slechts zijnen afstand tot het eerste punt. Wij hebben dus met ééne grootheid te doen, ten aanzien van welke aan onze verwachting eene speelruimte gelaten is: deze grootheid kan iedere waarde hebben tusschen 0^0 en $180^0 = 10800'$. Deze speelruimte die aan de gevraagde kans beantwoordt is met deze algemeene speelruimte terstond vergelijkbaar, zij bedraagt er, namelijk, het 1080ste gedeelte van; de gevraagde kans is dus $1/1080$.

Deze oplossing is onjuist. Van het standpunt, echter, van het beginsel der speelruimten in den vorm waarin wij dit tot nog toe hebben leeren kennen, valt er niets op aan te merken.²⁾ Volgt hieruit nu dat dit beginsel

¹⁾ Bertrand levert ons dus weer een voorbeeld van de onwillekeurige toepassing van het beginsel der speelruimten, waartoe ieder kansrekenkunsig probleem aanleiding geeft, ook bij kansrekenaars die van de theorie van von Kries geene kennis hebben genomen.

²⁾ Van ieder ander standpunt, echter, valt er alles op aan te merken. En daar Bertrand het beginsel der speelruimten niet bewust aanvaardt is zijne fout niet te verontschuldigen. Hij zegt, na de opmerking te hebben gemaakt dat men de plaats van het eerste punt bekend mag veronderstellen: „Le grand cercle qui réunit les deux points peut être également supposé connu.“ Zijne oplossing komt dan hierop neer, dat hij het boloppervlak be-

foutief is? Neen, want wij kunnen aan het vraagstuk van Bertrand gemakkelijk zulk eenen vorm geven dat de onjuiste oplossing juist wordt. Gesteld men heeft eenen catalogus waarin de plaatsen van alle sterren, tot eene zekere grootte, op 1080 bladen worden vermeld; terwijl elk blad de sterren bevat die tusschen twee parallelcirkels, wier afstand 10' bedraagt, zijn gelegen. Laat men nu eene ster in dezen catalogus geheel door het toeval aanwijzen, dat wil zeggen: slaat men een willekeurig blad van den catalogus op en kiest men op dat blad eene willekeurige ster, dan bedraagt de kans dat deze ster op eenen afstand kleiner dan 10' van de noordpool des hemels gelegen is inderdaad $1/1080$.

Men ziet, de eerste oplossing van Bertrand is niet de oplossing van het vraagstuk dat hij opgegeven heeft, doch men kan gemakkelijk een vraagstuk formuleeren waarvan zij inderdaad de juiste oplossing zoude zijn. Voor ons, nu, is het van belang op te merken dat wij ons op grond van het beginsel der speelruimten, gelijk wij het tot dusverre hebben geformuleerd, van het verschil dezer beide vraagstukken in het geheel geene rekenschap vermogen te geven. Beschouwen wij thans, om eene duidelijke voorstelling te verkrijgen van hetgeen aan onze formuleering van het beginsel der speelruimten nog ontbreekt, de juiste oplossing van het vraagstuk van Bertrand, die Bertrand zelf als „tweede oplossing“ van zijn vraagstuk geeft.

Volgens de gegevens van het vraagstuk moeten wij de plaats van het tweede punt geheel aan het toeval overlaten. Dit wil zeggen dat aan onze verwachting het geheele oppervlak

schouwt als te zijn samengesteld uit groote cirkels! Natuurlijk weet hij zelf zeer goed dat, als men zoo mocht redeneeren, er van de geheele differentiaal- en integraalrekening niets over zoude blijven. Zoodra echter, de lust om te critiseeren of eene paradox te verkondigen Bertrand te pakken krijgt is het met zijne bezinning gedaan; hij maakt de wildste sprongen en is niet meer te houden. In eenen criticus voorwaar eene zonderlinge eigenschap!

van den bol als algemeene speelruimte gelaten is. Gevraagd wordt nu naar de kans dat het tweede punt op minder dan 10' afstands van het eerste punt gelegen is. Aan dit bijzondere geval beantwoordt als speelruimte een klein gedeelte van het boloppervlak. De verhouding van deze kleine speelruimte tot de algemeene speelruimte is, door eene breuk uitgedrukt,

$$\frac{2 R \sin^2 5'}{2 R} = \sin^2 5' = \frac{1}{470.000}.$$

Dit is dus de gevraagde kans.

Ik heb dit vraagstuk van Bertrand behandeld (en zal voortgaan het te behandelen) niet om zijns zelfs wil, inaar opdat het ons een voorbeeld leveren zoude, waaraan wij kunnen zien in hoeverre onze formuleering van het beginsel der speelruimten nog onvolledig is. Zoolang wij, namelijk, niet in staat zijn op grond van het beginsel der speelruimten aan te geven, waarom alleen de tweede oplossing van Bertrand juist, en daarentegen de eerste geheel verkeerd is, zullen wij niet mogen beweren in het begrip 'speelruimte' het ware beginsel der kansrekening te hebben gevonden. Nu zal men, misschien, zeggen dat men om over de juistheid en de onjuistheid dier twee oplossingen (en van kansrekenkunstige oplossingen in het algemeen) te oordeelen het beginsel der speelruimten zeer goed missen kan. Maar deze opmerking (die trouwens, zooals wij zoo juist aan Bertrand's mislukte poging om de dubbelzinnigheid van een, in kansrekenkunstigen zin, volkomen bepaald vraagstuk aan te toonen, hebben gezien, niet eens opgaat) is, in dit verbaand, misplaatst. Want wij houden ons thans bezig met het beginsel der kansrekening; dat wil zeggen: wij vragen ons niet af of wij kansrekenkunstige vraagstukken wel op de juiste wijze kunnen oplossen, maar of wij ons van de juistheid dier oplossingen wel rekenschap kunnen geven. En dit zal ons alleen gelukken indien wij van het beginsel der speelruimten uitgaan en daarbij dit beginsel in zijne volledige gedaante, die wij tot nu toe nog niet hebben leeren kennen, opstellen.

Waarom is de eerste oplossing van Bertrand verkeerd? Deze vraag is niet moeilijk te beantwoorden. Immers de speelruimten, die als in kansrekenkunstigen zin aan elkaar gelijk worden beschouwd, stellen op den bol gordels voor van gelijke breedte; de gelijke breedte van zulke gordels zal echter geenszins met de gelijkheid hunner oppervlakte gepaard behoeven te gaan. Bij de tweede oplossing daarentegen gaan wij rechtstreeks van oppervlakten als speelruimten uit. De reden dat wij de eerste oplossing verwerpen, terwijl de tweede ons bevredigt, is dus deze, dat zich aan ons, zoodra wij het vraagstuk van Bertrand lezen, eene zeer bepaalde opvatting opdringt omtrent den aard van de speelruimten die wij, in kansrekenkunstigen zin, aan elkaar gelijk, dat wil zeggen: als even waarschijnlijk, moeten beschouwen. En dit geldt ten aanzien van ieder vraagstuk der kansrekening. Vandaar dat van de oneenigheid die onder de beoefenaars der kansrekening ten aanzien van de beginselen hunner wetenschap heerscht in de oplossingen, die zij van allerlei vraagstukken geven, zeer weinig te bemerken is. Want zoodra men een kansrekenkundig vraagstuk zuiver gesteld heeft, zal, haast altijd, ieder wiskunstenaar terstond aan kunnen geven tot welke „even-waarschijnlijke gevallen“ (of beter gezegd: „speelruimten“) het aanleiding geeft; en daarmede is de oplossing terstond gegeven.

Maar wanneer het ons juist, zooals thans, om de beginselen der kansrekening te doen is dan zijn wij door die schoone overeenstemming in de oplossing van allerlei vraagstukken zeer weinig gebaat. Want zoolang wij niet weten wat „waarschijnlijkheid“ is, kunnen wij kwalijk gebaat zijn door het herleiden van dit begrip tot de, in waarheid zelve eerst op het begrip waarschijnlijkheid berustende, notie van „even groote waarschijnlijkheid“. Konden wij, derhalve, niet op het beginsel der speelruimten nog onze hoop vestigen, dan zouden wij thans het zoeken naar eene bevredigende verklaring der kansreke-

ning wel kunnen staken. En in welke verlegenheid wij ons dan zouden bevinden, dat kunnen ons Bertrand en Poincaré leeren. Want deze twee zoo verdienstelijke wiskunstenaars zijn op dezelfde moeilijkheid gestuit, en zij hebben niet anders kunnen doen dan hunne vertwijfeling aan eene mogelijke verklaring der kansrekening uit te spreken. Om den wille der eerlijkheid waarmede zij dat gedaan hebben verdienen hunne woorden te worden aangehaald. Bertrand, dan, (*Calcul des Probabilités*, 1889) vangt de inhoudsopgave van zijn eerste hoofdstuk aldus aan: „Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition.“ En Poincaré zegt het zelfde nog iets duidelijker (*Calcul des Probabilités*, 1896). Hij begint zijn boek met de verklaring: „L'on ne peut guère donner une définition satisfaisante de la Probabilité. On dit ordinairement: La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles.“ en op blz. 3 geeft hij de aanvulling dezer definitie aldus aan: „A la définition de la probabilité, il faut donc ajouter: à condition que tous les cas sont également vraisemblables.“ En op blz. 5 schrijft hij: „La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe: comment reconnaître que tous les cas sont également probables? Une définition mathématique ici n'est pas possible; nous devons dans chaque application faire des conventions, dire que nous considérerons tel et tel cas comme également probables. Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elles seront admises.“¹⁾

¹⁾ Volgens deze plaats in het begin van het boek van Poincaré, berust de kansrekening dus op eene petitio principii; in het vorige hoofdstuk hebben wij een citaat, uit het einde van hetzelfde werk, leeren kennen dat de kansrekening deed berusten op eene contradictio in terminis. Men ziet, de kansrekening komt er bij Poincaré vrij kaal af; maar tevens blijken de beschouwingen aan het begin en aan het eind van zijn werk niet bepaald met elkaar overeen te stemmen. De „conventions qui échappent à l'esprit du

Misschien is de lezer van oordeel dat ik al te lang heb stilgestaan bij de groote moeilijkheid die zich bij de poging om de kansrekening te verklaren voordoet, en vindt hij dat ik beter gedaan zoude hebben terstond met het beginsel der speelruimten in zijne volledige gedaante voor den dag te komen. Maar met het volgende wijze woord van Plato (Phaedrus 237 C) hoop ik mij bij hem te kunnen verontschuldigen. „Voor hen die zich, over welke zaak ook, behoorlijk wenschen te beraaden is er één begin, namelijk: te weten waarover het beraad loopt, of de geheele opzet zal noodzakelijkerwijze falen. Aan de menigte ontgaat het dat zij niet het wezen van iedere zaak kent. En, als kenden zij het wel, zorgen zij niet daarover in het begin van hun onderzoek tot overeenstemming te geraken. Maar verder op krijgen zij de te verwachten straf: namelijk noch met zich zelve noch met elkander zijn zij het eens.“ Wij, nu, zijn tot overeenstemming geraakt over hetgeen wij van het beginsel der speelruimte in zijnen volledige staat, zal het werkelijk aan de kansrekening ten grondslag gelegd mogen worden, moeten eischen. Het moet ons namelijk, in ieder afzonderlijk geval, leeren welke speelruimten aan even groote kansen beantwoorden. Want als wij eenmaal het begrip ‚even groote kansen‘ of, algemeener gesproken, ‚onderling vergelijkbare kansen‘ op het begrip ‚speelruimte‘ hebben gebaseerd, dan is de kansrekening zelve daarmee óók op het begrip speelruimte gebaseerd, en het doel, dat wij ons hebben gesteld, bereikt.

Zij (om mij op de in de kansrekening gebruikelijke wijze uit te drukken A een zeker ‚verschijnsel‘¹⁾) dat door allerlei

mathematicien“, namelijk, waarin hij in het begin zijne toevlucht zoekt blijken hem ten slotte (en geen wonder!) toch niet erg te bevalen. Poincaré is uitstekend wiskundenaar, maar als hij meent te moeten gaan filosofeeren, dan komt daar gewoonlijk niets van terecht.

¹⁾ ‚Ereignis‘ ‚événement‘. Met wat voor object heeft men in de kansrekening eigenlijk te doen? De meeste kansrekenaars vergenoegen zich ook

omstandigheden (in de kansrekening pleegt men die alle door het woord „oorzaken“ samen te vatten) bepaald wordt, die wij slechts ten deele, ja, wat een aantal dier oorzaken betreft, misschien zelfs in het geheel niet kennen. Aan onze verwachting betreffende dat verschijnsel is dan eene zekere speelruimte gelaten. Laat het mogelijk zijn van deze speelruimte eene wiskunstige voorstelling te geven. (Mocht dat niet het geval zijn dan zijn de gegevens voor een kansrekenkundig vraagstuk feitelijk niet aanwezig.)

Het is, nu, duidelijk dat ons, in de keuze van de wijze waarop wij de speelruimte onzer verwachting willen voorstellen eene groote vrijheid is gelaten. Schat iemand bijvoorbeeld de hoogte van eenen toren op zekerlijk meer dan vijfzig en zekerlijk minder dan zeventig meter, dan kunnen wij zeggen dat de speelruimte zijner verwachting twintig meter bedraagt. Maar indien hij die hoogte met behulp van eenen theodoliet meten moet, en hij is gewoon met dat instrument te werken, dan zal hij allicht in staat zijn diezelfde schatting, van de plaats uit waar hij den theodoliet geplaatst heeft, onmiddellijk in graden te verrichten, zoodat de speelruimte dierzelfde verwachting in dat geval bijvoorbeeld vijf gra-

op dit punt met de meest vage aanduidingen. Zoo bijvoorbeeld Czuber (*Wahrscheinlichkeitsrechnung* 1903 blz 5) „Die Wahrscheinlichkeitstheorie bedient sich dafür allgemein des Ausdrucks Ereignisse wiewohl derselbe nicht immer zutreffend ist; häufig würde sich die Bezeichnung Tatbestände besser empfehlen.“ En daarbij verwijst hij dan naar de hierboven reeds genoemde verhandeling van Stumpf blz. 46. Tatbestände! Er zijn mensen, die gelukkig zijn, als zij maar een woord, waarbij men den mond vol heeft, uit kunnen spreken. Overigens moet ik verklaren, dat Czuber Stumpf verkeerd heeft gelezen. Stumpf namelijk zegt dat het niet alleen „Ereignisse“ en niet alleen „Tatbestände“ (twee verschillende begrippen) zijn waarmede de kansrekening te doen heeft; maar „ebenso können wir uns auch in Bezug auf jede beliebige Urteilmaterie (alweer een juweeltje uit den deutschen woordenschat) in einem analogen Stande des Wissens und Nichtwissens befinden“. En in de volgende paragraaf volgt dan zijne (hierboven blz 28) aangehaalde definitie van waarschijnlijkheid. Hij neemt dus een geheel ander standpunt in dan men uit de verwijzing van Czuber naar zijne verhandeling zoude opmaken.

den bedraagt. En besluit hij, als hij aan het meten toe is, zijn instrument toch maar te verplaatsen en dichter bij den toren op te stellen, dan zal de speelruimte, alweer van dezelfde verwachting, wederom eene andere grootte, thans bijvoorbeeld van twaalf graden hebben. Of, om het voorbeeld te nemen dat von Kries tot uitgangspunt dient zijner beschouwingen over indifferente speelruimten (welke beschouwingen, op haar beurt, ons dienen zullen om aan te toonen dat ook von Kries zelf over het beginsel der speelruimten toch nog niet tot volkomen klaarheid gekomen is), wanneer wij de verwachting dat het soortelijk gewicht eener stof tusschen 1 en 2 gelegen is vergelijken met die dat het tusschen 10 en 11 is gelegen, dan zijn de speelruimten dier twee verwachtingen, indien wij ze door de speelruimten van het soortelijk gewicht zelf uitdrukken, even groot. Kiezen wij echter voor de voorstelling van de speelruimten dierzelfde verwachtingen de speelruimten der soortelijke volumina dan strekken zij zich uit van 1 tot 0,5, respectievelijk van 0,1 tot 0,09, en de eerste speelruimte is vijftig maal zoo groot als de tweede. De eerste wijze van voorstelling is dus wel zeer verschillend van de tweede.

De beteekenis, nu, van het beginsel der speelruimten bestaat hierin dat het ons in staat stelt de voorstelling der speelruimten onzer verwachting steeds zoo te kiezen dat zij zich onmiddellijk leent tot kansrekenkunstig gebruik. Laat ons, om de wijze te vinden waarop deze keuze moet geschieden, eerst de wiskunstige uitdrukking van de meest algemeene voorstelling van speelruimten onzer verwachting opstellen. Het zal ons daarna niet moeilijk vallen die algemeene uitdrukking aldus nader te bepalen dat zij de voorstelling weergeeft van hetgeen wij „speelruimte in kansrekenkunstigen zin“ mogen noemen.

In het algemeen zal het verschijnsel A bepaald zijn door de waarden van ééne of meer onafhankelijke veranderlijken

$x, y, z, \dots$. En gewoonlijk zal er, ook afgezien van alle kansrekenkundige beschouwingen, ééne voorstelling van de speelruimte onzer verwachting zijn, die zich door hare aanschouwelijkheid terstond aan ons opdringt. De grootte van een oneindig klein element dezer speelruimte zal worden uitgedrukt door

$$f(x, y, z, \dots) dx dy dz$$

en de geheele speelruimte mitsdien door

$$\iiint \dots f(x, y, z, \dots) dx dy dz \dots$$

waarbij de functie f zoowel als het gebied der integratie zich uit de gegevens van het vraagstuk laten bepalen. Hebben wij, bijvoorbeeld, met eene cirkelvormige schietschijf met straal a te doen dan ligt het voor de hand om de speelruimte onzer verwachting aangaande de plaats waar een kogel deze schijf treft eenvoudig voor te stellen door de oppervlakte der schijf. Voeren wij polaire coördinaten, r in, dan wordt dus bij deze voorstelling de grootte van een oneindig klein element der speelruimte uitgedrukt door

$$r dr d\vartheta$$

en de geheele speelruimte door

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\vartheta = \pi a^2$$

Deze voorstelling bezit ontegenzeggelijk de schoone eigenschap van aanschouwelijk te zijn; maar kansrekenkundigen zin zoude zij slechts in het bijzondere geval bezitten dat wij bij het schieten in het geheel niet mikten. Dan zoude de kans dat een bepaald gedeelte der schijf door den kogel (gesteld dat deze bij toeval de schijf trof) getroffen werd inderdaad eenvoudig aan de oppervlakte van dat gedeelte evenredig moeten worden gesteld. Ongetwijfeld een zeer bijzonder geval!

Willen wij derhalve het begrip speelruimte dienstig maken tot kansrekenkundig gebruik dan moeten wij, om te beginnen, bereid zijn den eisch van aanschouwelijkheid onzer

voorstelling van speelruimten te laten vallen. Doen wij dit, dan wordt de eenvoudigste uitdrukking voor de voorstelling van een element der speelruimte gegeven door het product, zonder meer, van de oneindig kleine speelruimten der veranderlijken zelve, dus door

$$dx dy dz \dots;$$

en de geheele speelruimte wordt uitgedrukt door

$$\iiint \dots dx dy dz \dots$$

In het voorbeeld van de schietschijf zouden wij bij deze voorstelling voor de geheele speelruimte onzer verwachting dus de uitdrukking hebben:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} dr d\vartheta = 2\pi a$$

Ook deze wijze van voorstellen der speelruimte kan bij de oplossing van een vraagstuk aangewezen zijn, maar alleen in uiterst bijzondere gevallen. Gesteld bijvoorbeeld dat de schijf in haar eigen vlak om haar middelpunt met eene standvastige snelheid ronddraait, en dat wij haar van een, niet al te dicht bij de schijf gelegen, punt uit op een zeker oogenblik photographeeren. Laat zich nu op de aldus verkregen opname het beeld van eenen regendruppel, die blijkt juist volgens eene middellijn langs de schijf gevallen te zijn, afteekenen. Welke is dan de kans dat het beeld van dezen druppel zich in een van te voren aangegeven gedeelte van de schijf bevindt? Wij mogen aannemen dat ook de snelheid waarmee de druppel zich langs de schijf beweegt standvastig is. Stond de schijf stil, dan zoude de kans dat de druppel zich op een bepaald element dr van de middellijn afteekende eenvoudig evenredig zijn aan de lengte dr van dat element. Nu de schijf echter draait treedt in de plaats van dat lineaire element het ringvormige gedeelte van de schijf dat door twee cirkels met stralen r en $r+dr$ begrensd wordt. De kans dat het oppervlakteelement, door de voerstralen ϑ en $\vartheta+d\vartheta$ uit dat ringvormig gedeelte gesneden, zich juist op de midellijn, waarlangs de druppel valt, bevindt

is evenredig aan $d\vartheta$; de kans, dus, dat een bepaald oppervlakteëlement zich, op het oogenblik der opname juist daar bevindt waar de druppel zich afteekent, is evenredig aan $dr d\vartheta$. Dit is dus de grootte in kansrekenkunstigen zin van hetzelfde element, dat, als oppervlakte beschouwd, de grootte $r dr d\vartheta$ bezit. En voor de grootte in kansrekenkunstigen zin van het van te voren op de schijf aangegeven gebied vinden wij derhalve de uitdrukking

$$\iint dr d\vartheta,$$

waarbij de integratie zich over het van te voren aangegeven gebied uitstrekt.

Ik geef toe dat dit vraagstuk in hooge mate „gezocht“ is; maar mij dunkt dat het daardoor des te beter geschikt is om ons te doen inzien hoe iedere bepaalde voorstelling, die wij ons van de speelruimte van eenige verwachting kunnen maken, ook eene evenzeer bepaalde gesteldheid van de kansrekenkunstige vraagstukken, die wij met behulp dier voorstelling kunnen oplossen, beantwoordt. Hierin, nu, bestaat juist de groote waarde van het beginsel der speelruimten; geen ander beginsel geeft van het verband, dat toch in de kansrekening evenzeer als in iedere andere wiskunstige wetenschap, tusschen de gegevens van een vraagstuk en de grootheden die de oplossing van dat vraagstuk bepalen, moet bestaan, op eene eenigermate bevredigende wijze rekenschap. Om dat verband echter duidelijk in het algemeen te kunnen aangeven moeten wij eerst het onderzoek beëindigd hebben waarmede wij bezig zijn, het onderzoek namelijk naar de meest algemeene wijze waarop men speelruimten van verwachtingen kan voorstellen.

Dit onderzoek, nu, is reeds zoover gevorderd, dat wij de uitkomst ervan gemakkelijk neer kunnen schrijven. Wij hebben gezien dat de onvolledigheid van het beginsel der speelruimten in den vorm waarin wij het tot nog toe hebben

leeren kennen ten nauwste samenhangt met het feit, dat wij eene speelruimte op verschillende wijzen kunnen voorstellen. Twee gedeelten eener speelruimte die bij eene bepaalde wijze van voorstellen gelijk zijn, zullen, bij eene andere wijze van voorstellen, in het algemeen niet gelijk zijn. Op de verhouding van speelruimten, nu, komt het in de kansrekening aan. Alle verhoudingen, echter, die tusschen de verschillende gedeelten der speelruimte onzer verwachting, bij eene bepaalde wijze van voorstellen, bestaan, kan men tot de verhoudingen der overeenkomstige gedeelten der speelruimte bij eene andere wijze van voorstellen terugbrengen doordat men zich ieder element der speelruimte bij de eerste wijze van voorstellen met eenen bepaalden factor (die in het algemeen van element tot element zal varieeren) vermenigvuldigd denkt. Voeren wij weder de onafhankelijke veranderlijken $x, y, z, \dots$ in, dan kunnen wij derhalve uit de besproken wijze van voorstellen, waarbij de elementen der speelruimte onzer verwachting eenvoudig uitgedrukt worden door

$$dx dy dz \dots,$$

iedere andere wijze van voorstellen afleiden door dit product der oneindig kleine speelruimten der veranderlijken te vermenigvuldigen met den factor

$$\varphi(x, y, z, \dots)$$

waarbij de functie φ dan iedere functie kan aanduiden, die voor ieder stel waarden van $x, y, z, \dots$, binnen het gebied der algemeene speelruimte onzer verwachting gelegen, ééne bepaalde waarde bezit. Hieruit volgt dat de meest algemeene voorstelling eener speelruimte wordt uitgedrukt door:

$$\iiint \dots \varphi(x, y, z, \dots) dx dy dz \dots,$$

waarbij de integratie zich over de geheele speelruimte onzer verwachting, of ook over een bepaald gedeelte daarvan, uitstrekt.

Zoodat dus het algemeene vraagstuk der kansrekening, zoo beknopt mogelijk geformuleerd, aldus luidt:

De functie φ , zonder van het begrip 'evengroote waarschijnlijkheid' gebruik te maken, zoodanig te bepalen, dat de waarde der integraal

$$\iiint \dots \varphi(x, y, z \dots) dx dy dz \dots,$$

over een bepaald gedeelte der algemeene speelruimte onzer verwachting berekend, eene waarde oplevert die aan de kans dat het beschouwde verschijnsel binnen dat gedeelte valt, evenredig is.

Het behoeft geene nadere verklaring dat de functie φ niet anders is dan hetgeen men de kansfunctie pleegt te noemen.

Ten einde het gezegde door een voorbeeld toe te lichten, breng ik de eerste (en verkeerde) oplossing in herinnering, die Bertrand geeft van het op blz. 58 behandelde vraagstuk: de kans te bepalen, dat, indien men op het oppervlak van eenen bol een vast punt aangenomen heeft, de afstand van een tweede, geheel willekeurig op het oppervlak van den bol aangenomen, punt van het vaste punt minder dan 10' zal bedragen.

Bertrand stelt de speelruimte onzer verwachting in dit geval op deze wijze voor: de afstand van het tweede punt tot het eerste moet eene waarde hebben gelegen tusschen 0 en π radialen. Wij waren nu tot het besluit gekomen (al kunnen wij bij de onvolledigheid waarmede wij het beginsel der speelruimten tot nog toe geformuleerd hebben, nog niet zeggen waarom dat zoo is) dat de kans dat het tweede punt binnen een bepaald gedeelte van het oppervlak van den bol gelegen zal zijn, evenredig is aan de oppervlakte van dat gedeelte. Op grond hiervan kunnen wij de eerste oplossing van Bertrand aldus corrigeeren:

De oppervlakte van het gedeelte van het oppervlak van den bol dat tusschen de kleine cirkels, op afstanden a en $a+da$ van het eerste punt gelegen, is begrepen, is evenredig aan de projectie van den afstand da op de midellijn van het vaste punt, dat will zeggen: aan $\sin a da$.

De factor waarmede wij ieder element der speelruimte, voorgesteld op de wijze van Bertrand, moeten vermenigvuldigen om eene wijze van voorstellen der speelruimte onzer verwachting te verkrijgen die kansrekenkunstigen zin bezit is dus:

$$\varphi(a) = \sin a.$$

Hieruit volgt voor de gevraagde kans

$$p = \frac{\int_0^{10'} \sin a \, da}{\int_0^{\pi} \sin a \, da} = \frac{1 - \cos 10'}{2} = \sin^2 5' 3''.$$

en dit is de uitkomst die wij ook volgens de tweede (en juiste) oplossing verkregen hebben.

Wij zijn thans voldoende voorbereid om tot de opstelling van het beginsel der speelruimten, in zijne volledige gedaante, over te gaan.

In de eerste plaats, dan, is het van belang op te merken dat het bezwaar, hetwelk zich op blz. 59 voor deed het bezwaar, namelijk, dat wij niet konden aangeven van welke wijze van voorstellen der speelruimte onzer verwachting wij in een gegeven geval moesten uitgaan, formeel niet meer bestaat. Immers, door middel van de functie φ kunnen wij iedere wijze van voorstellen der speelruimte onzer verwachting tot iedere andere wijze van voorstellen herleiden. De voorstelling der speelruimte waar wij bij een kansrekenkundig vraagstuk van uitgaan, kunnen wij dus geheel naar eigen verkiezing bepalen; als wij maar zorgen dat wij ons tenslotte bij het doen van eene kansrekenkundige uitspraak op eene speelruimte die werkelijk kansrekenkunstigen zin bezit kunnen beroepen.

Onze taak, echter, hebben wij hiermede nog geenszins volbracht. Integendeel, wij kunnen zeggen dat thans eerst

duidelijk blijkt, waarin die taak eigenlijk wel bestaat. Wij hebben reeds een aantal kansrekenkunstige speelruimten leeren kennen, maar die traden op in voorbeelden, tot toelichting dieneinde van een betoog, welks uitkomst wij aldus kunnen weergeven dat tusschen het begrip „speelruimte onzer verwachting“, op zichzelf beschouwd, en het begrip „kans“ geen onmiddellijk verband bestaat. Die „kansrekenkunstige speelruimten“ moesten wij dan ook telkenmale uit het begrip „evengroote waarschijnlijkheid“ afleiden. Ons doel was echter juist het begrip „kansrekenkunstige speelruimte“ af te leiden zonder van het begrip „evengroote waarschijnlijkheid“ gebruik te maken. Bij het zoeken naar de wiskunstig uitgedrukte speelruimte eener verwachting hebben wij niet ééne zoodanige speelruimte, maar eene „groep“ van oneindig vele, verschillende speelruimten gevonden. De „kansrekenkunstige speelruimte“ is slechts een bepaald lid zulk eener groep. Wij moeten dus trachten te bepalen waardoor dat lid zich van de andere leden der groep onderscheidt, zonder dat wij daarbij van het begrip „evengroote waarschijnlijkheid“ uitgaan. Hiermede is hetgeen ons thans te doen staat aangegeven.

De eigenaardige gesteldheid der kennis die wij van een verschijnsel moeten bezitten om aanleiding te hebben tot het opstellen van een kansrekenkunstig vraagstuk heb ik in het vorige hoofdstuk besproken. Ik heb aldaar betoogd dat de andere geaardheid der gegevens van een kansrekenkunstig vraagstuk dan van de gegevens van, bijvoorbeeld, een meetkunstig vraagstuk, ons niet moet verleiden tot de meening dat de uitspraken der kansrekening minder stellig zijn dan die der meetkunde; zij zijn niet minder stellig doch slechts stellig op eene andere wijze. Kansrekenkunstige beschouwingen zullen wij alleen dan houden, wanneer wij, tengevolge van onze gebrekkige kennis, gedwongen zijn van een aantal der oorzaken die eenig verschijnsel bepalen af te zien;

van welke wij zeker niet zouden afzien indien onze kennis van het verschijnsel volledig ware. Maar iets dergelijks heeft ook (om weer dat voorbeeld te nemen) in de meetkunde plaats. Iedere cirkel heeft eenen bepaalden straal, een cirkel met eenen onbepaalden straal is eene volstrekte ondenkbaarheid. Toch berust de meetkunde van den cirkel juist hierop dat men van de bepaaldheid van den straal (en van andere afmetingen die bij den cirkel eene rol spelen) afziet, en geheel in het algemeen (dat wil zeggen: geheel in het onbepaalde), bijvoorbeeld, den omtrek gelijkstelt aan $2\pi R$. Hierdoor wordt aan de stelligheid van meetkundige uitspraken niet de minste afbreuk gedaan. En zoo is het ook niet de andere wetenschappen; de wetenschap, namelijk berust op het vermogen tot generalisatie, dat het wezen der menschelijke rede uitmaakt; dat wil zeggen: de objecten der wetenschap zijn geene individueele feiten of dingen, maar genera; en genera zijn onbepaaldheden die men niettemin toch als stelligheden heeft te aanvaarden. Ook de onbepaaldheid, nu, der kansrekenkundige vraagstukken, die aan de geheele kansrekening, op het eerste gezicht, zulk een paradoxaal voorkomen geeft, blijkt bij nadere beschouwing, indien die vraagstukken maar juist gesteld zijn, geene andere beteekenis te hebben dan die eener wetenschappelijke generalisatie. Slaag ik er in dat aannemelijk te maken, en toon ik tevens aan dat ik daarin alleen op eene bevredigende wijze kan slagen door gebruik te maken van het begrip 'speelruimten', dan zal men mij moeten toegeven dat alleen in dit begrip, op de juiste wijze verklaard, het ware beginsel der kansrekening is gelegen.

In de kansrekening hebben wij met verschijnselen te doen waarbij aan onze verwachting eene speelruimte is gelaten. Deze onbepaaldheid onzer verwachting beteekent geenszins dat het verschijnsel dat wij beschouwen zelf onbepaald is. Evenmin als een cirkel met eenen onbepaalden straal is ook een verschijnsel denkbaar, dat niet door volstrekt be-

paalde „oorzaken“ op volstrekt bepaalde wijze wordt teweeggebracht. Dat wil zeggen: stellen wij de onbepaaldheid onzer verwachting door eene wiskunstige speelruimte voor, dan zal het verschijnsel, dat wij wel niet met bepaaldheid kunnen verwachten, maar dat zich toch met alle bepaaldheid zal verwezenlijken, voorgesteld worden door een bepaald punt dier speelruimte. Het verschijnsel wordt dus bepaald dóór zijne oorzaken áls een punt der speelruimte onzer verwachting: zoodat tusschen de oorzaken van het verschijnsel, in hare bepaaldheid, en dat bepaalde punt der speelruimte eene strengere relatie bestaat. Deze relatie nu, is het die bij eene kansrekenkundige beschouwing van het verschijnsel op wetenschappelijke wijze wordt gegeneraliseerd.

Indien dit inderdaad het geval is, dan is dus het begrip dezer relatie voor de verklaring der kansrekening onmisbaar. En dan kunnen wij het gemeenschappelijk gebrek van alle verklaringen der kansrekening, die wij tot dusver hebben leeren kennen, aldus weergeven, en de kritiek, die wij er op hebben geleverd, aldus samenvatten: dat zij uitgaan van begrippen die niet voor eene wetenschappelijke generalisatie vatbaar zijn. Immers de aanhangers van het „Prinzip des mangelnden Grundes“ en van het „beginsel der evengroote mogelijkheden“ eenerzijds, en Bertrand en Poincaré anderzijds, verschillen in zeer vele opzichten, maar hierin komen zij overeen, dat zij allen de kansrekening trachten te verklaren uit datgene waaruit men ook de verschijnselen zelve, waarop de kansrekening betrekking heeft, moet verklaren, namelijk uit hunne „oorzaken“. Dat zij aldus te werk gaan is zeer begrijpelijk; maar het is toch eene methode die niet tot een resultaat kan leiden. Want terwijl iedere andere wetenschap eene theorie is van verschijnselen waarvan men veronderstelt dat men de oorzaken kent, is de kansrekening juist de theorie van verschijnselen waarvan men vooronderstelt dat men de oorzaken

niet kent. Anders gezegd: wanneer men in eene andere wetenschap eene oorzaak generaliseert (zooals voortdurend geschiedt, daar de wetenschap op ons vermogen om te generaliseeren berust), dan brengt dat eenvoudig mede dat men ook het verschijnsel in zijne overeenkomstige, uit die algemeenheid der oorzaak voortvloeiende algemeenheid beschouwt; waarin niets raadselachtigs gelegen is. Maar in de kansrekening is men gedwongen eene oorzaak in hare algemeenheid te beschouwen, terwijl men zich voor het verschijnsel, dat uit die oorzaak voortvloeit, juist in zijne bepaaldheid (of althans in eene minder algemeene onbepaaldheid) interesseert. De generalisatie van de oorzaak levert ons dus hier juist niet datgene dat wij omtrent het verschijnsel willen weten. Vandaar de onmogelijkheid om, enkel uitgaande van het begrip der kansrekenkundige oorzaken, de kansrekening te verklaren.

Onbevredigd door de pogingen om de verklaring der kansrekening enkel op het begrip der kansrekenkundige oorzaken te baseeren, hebben wij ons daarom, in aansluiting bij von Kries, gewend tot het begrip 'speelruimte'. Het wóórd 'speelruimte' is niet eene speciale uitvinding van von Kries, doch slechts de meest doeltreffende benaming voor hetgeen wij omschrijven kunnen als de objectieve uitdrukking van de onbepaaldheid, waarmede onze verwachting, bij onze gebrekkige kennis der kansrekenkundige oorzaken, noodzakelijkerwijze behept is. Terwijl wij, nu, het begrip der kansrekenkundige oorzaken ongeschikt hebben bevonden tot eene wetenschappelijke generalisatie omdat het te bepaald is (met welke bepaaldheid wij niets kunnen aanvangen omdat zij, krachtens de vooronderstelling zelve der kansrekening, aan onze kennis ontsnapt) is het begrip 'speelruimte' tot generalisatie ongeschikt omdat het, gelijk ons in dit hoofdstuk is gebleken, te onbepaald is. En dat ons dit moest blijken was wel te voorzien; immers de wetenschappelijke generalisatie eener oorzaak is iets anders dan de algeheele opheffing eener oorzaak; in

de speelruimte onzer verwachting, echter, gelijk wij die tot dusverre hebben leeren kennen, is de „oorzaak“ feitelijk te eenenmale opgeheven, slechts de grenzen onzer verwachting zijn overgebleven, en deze zijn dan ook de eenige bepaaldheid, die aan de speelruimten valt te bespeuren. Maar thans zal het ons blijken dat het begrip „speelruimte“ daarentegen uitermate geschikt is om van een ander begrip de bepaaldheid, die het, op zichzelf beschouwd, ontbeert, te ontvangen; en dáárin is de groote beteekenis van het begrip „speelruimte“ gelegen. Dit andere begrip nu (en derhalve het derde der voor de verklaring der kansrekening onmisbare begrippen) is het begrip der kansrekenkunstige relatie, zooals ik het zal noemen; dat wil zeggen: het begrip der strenge relatie die aan de „oorzaken“ in hare bepaaldheid ook een bepaald punt der speelruimte onzer verwachting (op welke wijze ook voorgesteld) verbindt. Laat ons thans deze kansrekenkunstige relatie nader beschouwen.

In de eerste plaats, dan, is het duidelijk dat de kansrekenkunstige relatie, indien zij bij het bepalen van kansen inderdaad eene rol speelt, daarbij steeds eene generalisatie zal hebben te ondergaan. Immers, in de kansrekening hebben wij niet met bepaalde punten, doch steeds met bepaalde gedeelten (zij het ook vaak met oneindig kleine gedeelten) der speelruimte onzer verwachting te doen. Nu geldt ten aanzien van zulke gedeelten der speelruimte onzer verwachting hetgeen (in onze kritiek op de pogingen om de kansrekening uit het begrip der „oorzaken“ in hare bepaaldheid te verklaren) ons gebleken is te gelden ten aanzien der speelruimte in haar geheel: van eene relatie van zulke gedeelten der speelruimte tot de kansrekenkunstige „oorzaken“ in hare bepaaldheid kan men niet spreken. Maar (en dat is voor ons doel genoeg) men kan wel iets van hunne relatie tot de „oorzaken“ in hare algemeenheid zeggen. Men kan namelijk twee van zulke gedeelten der speelruimte onzer

verwachting in hunne relatie tot de „oorzaken“ in hare algemeenheid vergelijken; en wel zal deze vergelijking de grootte betreffen die wij, van een kansrekenkunstig standpunt, aan die twee gedeelten moeten toekennen. Een eenvoudig voorbeeld zal mijne bedoeling duidelijk maken.

Gesteld een punt P verkeert in enkelvoudige trilling; dat wil dus zeggen: zijne plaats wordt, op ieder oogenblik, aangegeven door de projectie van een punt Q , dat zich met eenparige snelheid langs den omtrek van eenen cirkel beweegt, op eene middellijn van dien cirkel. Vraagt men nu naar de plaats van het punt P op een zeker tijdstip, dan is al hetgeen men zeggen kan dit: dat het zich ergens op de middellijn zal bevinden. De geheele middellijn, (indien men wil, eerst in de eene en vervolgens nog eens in de andere richting gemeten) vormt de speelruimte onzer verwachting. Met een vraagstuk van kansrekening, echter, heeft men te doen zoodra men zijne aandacht vestigt op een bepaald gedeelte van de middellijn, bijvoorbeeld op het stuk van de middellijn tusschen de punten x_1 en x_2 gelegen; waarbij x den afstand van een punt van de middellijn tot het middelpunt van den cirkel voorstelt. Immers, op de vraag, of het punt P zich op een zeker tijdstip in dit gedeelte der speelruimte bevindt, kan men méér antwoorden, dan dat het zeer wel mogelijk is: men kan, bovendien, de kans aangeven die voor de verwezenlijking dier mogelijkheid bestaat. Mijne bewering is nu, dat men, om tot zulk eene kansrekenkunstige uitspraak te geraken, eerst eene vergelijking tusschen verschillende gedeelten der speelruimte moet maken. Laat ons, om dit in te zien, twee gelijke gedeelten van den cirkelomtrek beschouwen. Dit zijn ongetwijfeld twee verschillende gedeelten. Maar het is duidelijk, dat men zich van dit verschil op grond van de „oorzaken“ in hare algemeenheid (als „oorzaak“, van de plaats van het punt P is, bij de gegevens van ons vraagstuk, de plaats van het punt Q te beschouwen) geen rekenschap kan geven. Immers, om ons

van dit onderscheid rekenschap te kunnen geven zouden wij de „oorzaken“ in hare bepaaldheid moeten kennen; deze kennis echter is het juist die aan het vraagstuk zijn kansrekenkundig karakter zoude ontnemen. Of ook, moeten wij, om ons van het onderscheid der twee gedeelten rekenschap te geven, ons op een ander dan kansrekenkundig standpunt, bijvoorbeeld op een meetkundig standpunt plaatsen. Plaatsen wij ons echter op het standpunt van de gegevens van het vraagstuk, dan blijkt dit een kansrekenkundig vraagstuk te zijn doordat wij tot de slotsom komen: dat de beide gedeelten niet zijn te onderscheiden. Hoe noemen wij nu echter twee dingen die, op zichzelf en in ieder ander opzicht misschien wel, maar in een zeker opzicht niet te onderscheiden zijn? Wij noemen die twee dingen in dat zekere opzicht: gelijk. Zoo noemen wij twee dingen, die in alle andere opzichten misschien te onderscheiden zijn, maar ten opzichte van hun gewicht niet: even zwaar. En zoo moeten wij ook twee gedeelten der speelruimte onzer verwachting, die misschien in alle andere opzichten te onderscheiden zijn, maar ten opzichte van hunne relatie tot de gegevens van een kansrekenkundig vraagstuk niet, even waarschijnlijk noemen.

Hadden wij nu twee gedeelten van de middellijn beschouwd, die de projectie waren van twee ongelijke gedeelten van den cirkelomtrek, dan zouden wij tot de slotsom gekomen zijn, dat deze gedeelten in hunne relatie tot de gegevens van het vraagstuk alleen in zóóverre verschilden dat het eene een bepaald aantal malen in het andere begrepen was. En zoo zouden wij tot het begrip gekomen zijn van twee gedeelten der speelruimten waaraan twee kansen beantwoorden waarvan de eene een bepaald aantal malen zoo groot is als de andere. En met dit begrip is tevens de geheele kansrekening gegeven.

Hiermede hebben wij dus de kansrekening inderdaad herleid tot een beginsel dat het begrip „kans“ niet stilzwijgend of uitgesproken vooronderstelt. Men zal thans misschien van mij verlangen dat ik dit beginsel aan een aantal vraagstukken der kansrekening ga toetsen; het komt mij echter voor meer naar den aard der zaak te zijn, dat wij niet het beginsel der kansrekening aan alle mogelijke kansrekenkundige vraagstukken, maar veeleer omgekeerd alle mogelijke kansrekenkundige vraagstukken aan het beginsel der kansrekening, toetsen. Een vraagstuk verdient eerst dan een vraagstuk van kansrekening te heeten indien het ons de gelegenheid biedt het beginsel der kansrekening volledig in toepassing te brengen. Daartoe nu is vereischt: vooreerst, dat het betrekking heeft op een verschijnsel welks „oorzaken“ óf ons, in hare bepaaldheid, niet bekend, óf althans, in hare gevolgen, niet volkomenlijk berekenbaar zijn. Ten tweede moeten de gegevens van het vraagstuk ons in staat stellen de grenzen van onze verwachting met zekerheid te bepalen; zoodat wij de speelruimte onzer verwachting op wiskundige wijze (zij het ook op oneindig vele wijzen) kunnen voorstellen. En in de derde plaats moeten de „oorzaken“ (al vallen zij in hare bepaaldheid ook geheel buiten onze kennis) in hare algemeenheid toch in zoverre bekend zijn, dat wij de kansrekenkundige verhouding van twee willekeurige gedeelten der speelruimte, geheel onafhankelijk van de verhouding die tusschen die gedeelten bij de wijze van voorstellen der speelruimte waarop onze keuze gevallen is, bestaat, kunnen bepalen. Deze laatste eisch behelst hetgeen wij in dit hoofdstuk aan de tot dusverre verkondigde theorieën der kansrekening hebben toegevoegd. Wij kunnen dezen eisch ook aldus inkleeden: dat wij in staat moeten zijn onder alle mogelijke wijzen van voorstelling der speelruimte onzer verwachting diegene te kiezen, waarbij de verhouding van twee verschillende gedeelten onmiddellijk gelijk te stellen is aan de kansen waaraan zij be-

antwoorden. Eene aldus voorgestelde speelruimte is het dan die den naam van kansrekenkunstige speelruimte in waarheid verdient.

Dezen laatsten eisch heeft men, zooals ik zoo juist heb gezegd, tot nog toe over het hoofd gezien. (Behalve dan von Kries, die er, zooals aan het eind van dit hoofdstuk zal blijken, over is gestruikeld.) Dit verzuim is zeer gemakkelijk te verklaren. Immers de kennis van de kansrekenkunstige oorzaken in hare algemeenheid, die wij tot het doen eener kansrekenkunstige uitspraak moeten bezitten, zal in de formuleering van een vraagstuk meestal niet uitdrukkelijk worden gestipuleerd, maar stilzwijgend zijn voorondersteld. Zoo, bijvoorbeeld, in het door Bertrand behandelde, in dit hoofdstuk besproken, vraagstuk, betreffende de kans dat een punt, willekeurig op het oppervlak van eenen bol aangenomen, binnen eenen bepaalden afstand van een vast punt van dat oppervlak zal zijn gelegen. Wij hebben gezien dat men hierbij over de kansrekenkunstige verhouding van verschillende gedeelten van het boloppervlak eene bepaalde vooronderstelling maakt: en wel de vooronderstelling dat gedeelten van gelijke oppervlakte ook aan eene gelijke kans beantwoorden. Maar feitelijk ligt deze vooronderstelling buiten de formuleering van het vraagstuk. En alleen de redelijke verwachting dat, indien deze vooronderstelling niet gemaakt moest worden, dit in het vraagstuk vermeld zou zijn, noopt ons het vraagstuk zóó op te vatten als wij gedaan hebben, en gaf ons daarom ook het recht de eerste oplossing van Bertrand, die met deze vooronderstelling geene rekening hield, als een onjuiste oplossing aan te merken. Wij hebben, overigens, gezien dat deze onjuiste oplossing juist zoude zijn geweest, indien wij eene zekere andere vooronderstelling hadden mogen maken (blz. 59). Ook hieruit blijkt, dat het de kansrekenkunstige relatie (dat wil zeggen de relatie van de verschillende gedeelten der speelruimte tot de „oor-

zaken" in hare algemeenheid) is, die de oplossing van een kansrekenkundig vraagstuk bepaalt.

Het loont de moeite om aan het feit, dat juist de kansrekenkundige relatie, die aan een vraagstuk zijne stelligheid, dat wil zeggen zijne kansrekenkundige bepaaldheid, verleent, gewoonlijk niet in het vraagstuk zelf vermeld staat, nog eenige aandacht te wijden. En in de eerste plaats dan is het van belang op te merken dat het vaststellen der kansrekenkundige relatie geen onderdeel vormt van de kansrekening zelve, maar aan de oplossing van elk vraagstuk met behulp van de methoden der kansrekening voorafgaat. Zoolang wij dus over de kansrekenkundige relatie in het onzekere zijn hebben wij niet met een vraagstuk van kansrekening te doen. En daarom moeten wij ons ten strengste er van onthouden te beweren, dat de onzekerheid, waarin wij in vele gevallen betreffende de kansrekenkundige relatie verkeerden, ook de kansrekening zelve in het onzekere brengt. In deze fout vervalt onder anderen Poincaré, wanneer hij, aan het einde van zijn boek, de kansrekening als eene contradictio in terminis tracht voor te stellen.¹⁾ En ook Bertrand blijkt op dit punt niet tot helderheid van begrip te zijn gekomen. Op blz. 4 en 5 n. l. van zijn boek bespreekt hij het volgende vraagstuk: „On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus grande que la côté du triangle équilatéral inscrit?" Hij noemt nu drie vooronderstellingen op die men omtrent de kansrekenkundige relatie, die aan 'dit vraagstuk zijne bepaaldheid verleent, maken kan. En na aangetoond te hebben dat deze drie vooronderstellingen, zooals te verwachten was, ook tot drie verschillende uitkomsten leiden, zegt hij: „Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée." De waarheid is, dat het vraagstuk, in den

¹⁾ Zie hierboven, blz 38 en 41.

vorm waarin men het opgegeven heeft, de samenvatting is van drie (en van nog vele andere) vraagstukken; iedere der drie oplossingen kan dus juist zijn, de twee andere zijn dan verkeerd; het vraagstuk is onvolledig gesteld. En zoo staat het met de meeste vraagstukken, die op „meetkundige waarschijnlijkheden“ betrekking hebben, geschapen. De exactheid der kansrekening zelve wordt hierdoor echter niet in het minst aangetast. Misschien wil ook Bertrand dit eigenlijk zeggen; maar hij zegt het niet.

In sommige gevallen is één vraagstuk van dien aard dat men omtrent de kansrekenkundige relatie in het geheel geene vooronderstelling maken kan. In zulk een geval heeft men, ook eigenlijk niet met een vraagstuk van kansrekening te doen. Aldus is het, bijvoorbeeld, gesteld met het volgende vraagstuk, dat in de kansrekening eene zekere vermaardheid geniet, hoewel het er feitelijk in het geheel niet thuis behoort.

Men heeft eene vaas voor zich staan, waarvan men niet anders weet dan dat zij witte en zwarte balletjes bevat. Men trekt uit deze vaas blindelings een balletje. Welke is de kans dat dit balletje wit zal zijn?

Zeer gelukkig gekozen is dit vraagstuk niet. Wij weten dat de vaas witte en zwarte balletjes bevat. Hoe is het te vermijden, dat deze kennis eenig vermoeden of eenige vooronderstelling bij ons doet opkomen omtrent de oorzaken die de aanwezigheid dier witte en zwarte balletjes verklaren? Eene vaas met balletjes, en dan nog wel juist met witte en zwarte balletjes, dit is een zoo bijzonder feit, dat het ons terstond aan het denken brengt. En iedere vooronderstelling omtrent de oorzaken, die tot dat feit aanleiding hebben gegeven, moet ook terstond tot de opstelling van, min of meer vage, kansrekenkundige verhoudingen leiden. Laat ons echter van de noodzakelijkheid van het maken van eenige vooronderstelling betreffende die oorzaken afzien. Ik beweer nu,

dat men dan ook van iedere kansrekenkunstige uitspraak over het trekken van een wit of een zwart balletje uit de vaas moet afzien. Is de lezer het hiermede niet eens, dan beproeve hij slechts eene kansrekenkunstige oplossing van het vraagstuk te geven die niet berust op eene zekere vooronderstelling aangaande de kansrekenkunstige oorzaken, die hij, zij het ook bijna (maar nimmer geheel) zonder het zelf te weten, maakt. Berust zijne uitspraak niet op zulk eene vooronderstelling dan berust zij op niets. En dit geldt ook ten aanzien van alle andere gelijksoortige vraagstukken. Een kansrekenkunstig vraagstuk, dat niet op eene vooronderstelling betreffende kansrekenkunstige oorzaken berust, berust op niets. Zulke vraagstukken behooren wij dus uit de kansrekening te weren.

Nog een punt, waarvan de behandeling zich bij de opmerking, dat de eigenlijke kansrekenkunstige vooronderstelling van een vraagstuk gewoonlijk niet in het vraagstuk zelf vermeld staat, zeer geschikt aansluit, is de beteekenis die, in de kansrekening, aan het bewijs uit het ongerijmde toekomt. Wij hebben op blz. 27 gezien dat Jac. Bernoulli de kansen die bij het dobbelspel optreden met behulp van een bewijs uit het ongerijmde afleidt. Of, beter gezegd, Bernoulli zelf drukt zich eenigszins onduidelijk uit, maar hetgeen hij bedoelt, is dit: „Indien de kans op ééne der zes, bij het werpen met eenen dobbelsteen mogelijke, uitkomsten van eene of **meer der vijf** andere mogelijke uitkomsten yerschilde, dan zoude dat enkel begrijpelijk en verklaarbaar zijn op grond eener onregelmatigheid in den vorm of in den bouw van den dobbelsteen. Nu nemen wij aan dat wij met eenen volkomen regelmatig en homogenen dobbelsteen werpen. De zes kansen verschillen dus niet.“ Dit bewijs is uit het ongerijmde. In het eerste hoofdstuk van dit proefschrift hebben wij gezien dat men de gelijkheid dier zes kansen ook zeer wel rechtstreeks kan bewijzen. Zulk een direct bewijs schenkt nu ontegenzeggelijk eene zekere bevrediging; maar toch zouden

wij, dunkt mij, te veel beweren indien wij zeiden dat men, zonder dat bewijs, van de gelijkheid der zes kansen niet overtuigd zoude zijn. En zoo staat het met de meeste vraagstukken der kansrekening. Bij het directe bewijs staat men eerst een oogenblik bij de kansrekenkundige oorzaken in hare bepaaldheid stil. Dit verleent aan het directe bewijs eene soliditeit, om den wille waarvan het, op het eerste gezicht, onze voorkeur schijnt te verdienen. Maar ten slotte moet men (zij het ook niet zoo maar, zonder meer, doch door eene streng-wetenschappelijke generalisatie) die bepaaldheid toch weder opheffen. Waarom zoude men dan niet terstond naar het bewijs uit het ongerijmde grijpen, dat, van meet af, enkel met de kansrekenkundige oorzaken in hare algemeenheid rekening houdt? Men moet bij zulk een bewijs natuurlijk zeer voorzichtig te werk gaan; maar voorzichtigheid is eene deugd, die men steeds gaarne moet betrachten. Ook kan er over de juistheid van zulk een bewijs uit het ongerijmde twijfel ontstaan. Dan moet men tot een direct bewijs zijne toevlucht nemen; en stemmen de uitkomsten van dit bewijs met de uitkomsten van het bewijs uit het ongerijmde overeen, dan wordt dit laatste daardoor nog gesteund.

Zoo heeft Maxwell (Sc. Pap. I blz. 380) een bewijs uit het ongerijmde gegeven voor zijne bekende wet betreffende de verdeeling der moleculaire snelheden in eene afgesloten ruimte, met een ideaal gas gevuld. Laat de kansfunctie $f(x) = f(y) = f(z)$ de verdeeling der componenten x, y, z , van de snelheden der moleculen aangeven. Hij zegt dan: „Now the existence of the velocity (x) does not in any way affect that of the velocities y or z , since these are all at right angles to each other and independent, so that the number of particles whose velocity lies between x and $x+dx$, and also between y and $y+dy$, and also between z and $z+dz$, is $Nf(x)f(y)f(z)dx dy dz$ “, waaruit dan de wet der snelheidsverdeeling valt af te leiden door $f(x)f(y)f(z) = \varphi(x^2 +$

$y^2 + z^2$) te stellen, enz. (N is het aantal moleculen). Dit bewijs uit het ongerijmde heeft twijfel gewekt. Mijns inziens ten onrechte. Maar hoe dit ook zij, door directe bewijzen heeft men zich uit de moeilijkheid geholpen, zoodat de twijfel zich zeer zeker niet tot de uitkomst, waartoe Maxwell geraakt was, mag uitstrekken.

Bertrand behoort ook tot de critici van Maxwell, en hij geeft zijne critiek op blz. 30 en 32 van zijn boek. Deze gelegenheid om weder eens door te slaan laat hij niet onbenut. Hij valt feitelijk de uitkomst van het bewijs van Maxwell aan, dus juist datgene dat boven allen twijfel vaststaat. Hetgeen hij daartegen in te brengen heeft, is echter, allervermakelijkst. Zien wij, met Bertrand even af van den derden coördinaat z . Hij zegt dan: „Le principe des probabilités composées n'a pas été correctement appliqué. Si la composante de la vitesse d'une molécule parallèlement à l'axe des X est x , la valeur de x supposée connue influe sur la probabilité pour que la vitesse composée parallèlement à l'axe des Y soit y .” Dit is onzin; of liever, de opmerking zelve is juist, maar haar aan te voeren als een argument tegen hetgeen Maxwell zegt is onzinnig. De waarschijnlijkheid dat een molecuul de snelheidscomponenten x , y heeft, wordt volgens Maxwell uitgedrukt door het product $f(x) f(y)$. Men kan vinden (ik vind het niet) dat Maxwell dit product iets te vlug heeft neergeschreven; maar één bezwaar is er dat men daartegen zekerlijk niet mag inbrengen, en dat is juist het bezwaar waarmede Bertrand komt aandragen. Van het feit dat Bertrand met Maxwell's beschouwing in strijd acht te zijn geeft Maxwell's beschouwing juist voortreffelijk rekenschap. De kans op eene bepaalde waarde van y zal bij twee verschillende waarden van x inderdaad verschillend zijn; dit ligt echter niet aan eene in beide gevallen verschillende waarde van $f(y)$ maar van $f(x)$. Bertrand ziet maar eventjes de elementaire eigenschap van een product over het hoofd, volgens welke

de waarde van een product van de waarde van al zijne factoren afhangt, en niet uitsluitend van die van den laatsten factor. Het is fraai!

Hetgeen volgt is echter, zoo mogelijk, nog fraaier. Indien er één ding is dat wij aan de door Maxwell afgeleide formule, bij den eersten oogopslag, kunnen opmerken, dan is het haar asymptotiek karakter: van eene maximum snelheid der moleculen kan geen sprake zijn. Maxwell zelf zegt dit, trouwens, uitdrukkelijk (blz. 382): „The velocities range from 0 to ∞ .“ Hooren wij nu, echter, Bertrand: „Si, par exemple, x est égal à la vitesse maxima, le mouvement est certainement dirigé parallèlement à l'axe des X , et la probabilité de y est nulle.“ Men ziet, Bertrand heeft van de beschouwingen van Maxwell niet eens behoorlijk kennis genomen. Toen ik hem dus eenen „criticus“ van Maxwell noemde, was mijn oordeel veel te gunstig. Hij geeft geene critiek, maar hij kletst.

Wij zullen dus zonder de waarde van directe bewijzen te ontkennen (waarvan men, om de kansrekening te kunnen begripen, de mogelijkheid en de strekking ten volle moet inzien) toch volhouden dat, in de kansrekening, bewijzen uit het ongerijmde wel buitengemeen op hunne plaats zijn.

Wenscht iemand nu, dat de beteekenis van het bewijs uit het ongerijmde voor de kansrekening in de formuleering van het beginsel der kansrekening reeds tot haar recht kome; dan kunnen wij aan dien wensch zeer wel voldoen. Kansrekenkunstige speelruimten zijn speelruimten waarvan gedeelten die in grootte aan elkander gelijk zijn, van het gezichtspunt der kansrekenkunstige relatie beschouwd, niet te onderscheiden zijn. Eene voorstelling der speelruimte onzer verwachting die aan dezen eisch voldoet kunnen wij gevoegelijk, in kansrekenkunstigen zin, homogeen noemen. In het algemeen nu zullen wij genoopt zijn eene speelruimte in kansrekenkunstigen zin homogeen te

noemen, indien iedere vooronderstelling waar-
bij zij **niet** homogeen zoude zijn, niet met de ge-
gevens van het vraagstuk in kwestie, doch
slechts met een vraagstuk met **gewijzigde** ge-
gevens (met een **ander** vraagstuk dus) vereenig-
baar is. Ter verduidelijking kan ik volstaan met te ver-
wijzen naar eene opmerking, op blz. 59 van dit proefschrift,
naar aanleiding van de onjuiste oplossing van een vraagstuk,
door Bertrand gegeven, gemaakt.

Alvorens dit hoofdstuk te eindigen, moeten wij nog een
oogenblik stilstaan bij de theorie van von Kries. Ik heb
het hem als eene verdienste aangerekend dat hij er zich van
bewust bleek te zijn dat het begrip 'speelruimte', om als grond-
slag der theorie der kansrekening te kunnen dienen, nog eene
nadere bepaling behoeft. Ik moet thans, tot mijn leedwezen,
verklaren, dat hij blijk geeft niet te weten, waarin die nadere
bepaling bestaat. Dit aan te toonen is de plicht waarvan ik
mij thans moet kwijten; daarmede zal ik mij dan tevens voor
het feit verantwoord hebben dat ik von Kries bij mijne aflei-
ding van het juiste beginsel der kansrekening in het geheel
niet heb genoemd.

If heb daarom, in de eerste plaats, aan te toonen dat het
begrip „indifferente speelruimte“, door von Kries ingevoerd,
met het begrip 'homogene speelruimte' slechts eene opper-
vlakkige overeenkomst vertoont.

Dat dit nu inderdaad het geval is blijkt reeds uit het
feit dat von Kries voor zijne theorie aan het begrip 'indiffe-
rente speelruimten' niet genoeg heeft. Hij eischt van speel-
ruimten bovendien dat zij „oorspronkelijk“ zijn; terwijl van
tijd tot tijd ook het begrip „onafhankelijke speelruimten“ eene
rol bij hem speelt. En tenslotte heeft hij nog eene bijzondere
voorkeur voor speelruimten die uit zeer vele, zeer kleine, ge-
deelten bestaan, doordat „gewisse Modi des Erfolges in be-
ständiger Wiederholung miteinander abwechseln“ (blz. 262 van

zijn boek). Tot welk eene ongelukkige verklaring der kansen bij het dobbelspeel deze voorkeur hem leidt hebben wij in het eerste hoofdstuk van dit geschrift gezien.

De zaak is dat wij, met de vraag die wij ons thans gesteld hebben, ons dáár bevinden, waar het inzicht van von Kries zich in allerlei vaagheden verliest. Al zijne vergeefsche pogingen, om tot eene bepaalde slotsom over het beginsel der kansrekening te komen, te volgen zoude eene nuttelooze moeite zijn. Hij bezit het inzicht dat speelruimten indifferent (homogeen) moeten zijn om in de kansrekening gebruikt te mogen worden. Maar hoe weinig begrip hij heeft van de kansrekenkundige relatie, waarop alleen de indifferentie (homogeniteit) van speelruimten kan berusten, dat blijkt wel uit de wijze waarop hij het begrip 'indifferentie' invoert (op blz. 25 van zijn boek). Hij bespreekt daar de vraag of men, indien men weet dat het soortelijk gewicht van eene zekere stof grooter dan 5 en kleiner dan 6 is, aan de verwachting dat het, meer bepaaldelijk, tusschen, bijvoorbeeld, 5, 35 en 5,36 gelegen is, de kans $1/100$ toekennen mag. Hij zegt dan: „Die eben versuchte Aufstellung darf nämlich jedenfalls nur dann als zulässig gelten, wenn unsere Kenntnis derart ist, dass sie zwar Werte unter 5 und über 6 positiv ausschliesst, aber durchaus keinen Grund enthält, innerhalb dieses Spielraumes von 5,0 bis 6,0 einen Wert für wahrscheinlicher als irgend einen andern zu halten.“ Dan, zegt hij hebben wij met eene „freie Erwartungsbildung“ te doen, „und es mögen Spielräume des Verhaltens, für welche in der eben charakterisierten Weise keinerlei logische Bevorzugung des einen vor dem andern besteht, indifferent genannt werden“. Ik heb in dit citaat tweemaal eene spatiëring aangebracht; om daardoor de aandacht er op te vestigen dat von Kries, ten eerste, ook op dit alleressentieelst punt van zijn betoog weder eens bezwijkt voor zijne heimelijke genegenheid voor het „Prinzip des mangelnden Grundes“ en, ten tweede, zijn heil ten slotte

tóch zoekt bij het beginsel der „evengroote waarschijnlijk-
den“ dat wil zeggen, gelijk wij bij de bespreking der theorie
van Poincaré en Bertrand gezien hebben, bij eene petitio
principii.

Indien wij, dus, besloten ons nog langer met de theorie
van von Kries bezig te houden, zouden wij niet anders kunnen
leveren dan afbrekende critiek. Daarom komt het mij voor
dat het juiste oogenblik gekomen is om van von Kries af-
scheid te nemen.

HOOFDSTUK IV.

KANS EN WAARSCHIJNLIJKHEID.

HET THEOREMA VAN BERNOULLI.

DE FUNDAMENTEEL THEOREMA'S DER KANSREKENING.

Hetgeen ik, in dit laatste hoofdstuk, om aan mijne beschouwingen eene zekere volledigheid te geven, nog moet doen, is de vraag te beantwoorden naar het verband tusschen de kansrekening en het begrip 'waarschijnlijkheid'.

Men zal zeggen dat het antwoord op die vraag nog al voor de hand ligt; immers, wat zoude de kansrekening anders kunnen zijn dan de leer van het begrip 'waarschijnlijkheid', voor zooverre dit zich leent tot wiskunstige behandeling? In werkelijkheid, echter, is de zaak minder eenvoudig. Sedert twee eeuwen heeft men, op alle wijzen, getracht de kansrekening uit het begrip 'waarschijnlijkheid' af te leiden; en men is daar niet in geslaagd. Daarom hebben wij in dit geschrift eenen anderen weg ingeslagen. De beteekenis van het begrip 'waarschijnlijkheid' zelf hebben wij vrijwel in het midden gelaten; slechts wanneer anderen dat begrip, ten behoeve der kansrekening, op eene verkeerde wijze wilden verklaren zijn wij daartegen in verzet gekomen. Maar onze aandacht hebben wij aan de verhoudingen, die bij kansrekenkundige vraagstukken in het spel zijn, geschonken. Het is ons gebleken dat dit verhoudingen zijn van volkomen objectieve grootheden, n. l. van, voor wiskunstige uitdrukking vatbare, speelruimten onzer verwachting. Daarmede hadden wij voor de kansrekening, als de theorie van dergelijke speelruimten, eene bevredigende verklaring gevonden zonder dat wij het begrip 'waarschijnlijkheid' zelf aan eene nadere beschouwing behoeften te onderwerpen.

Het oogenblik voor deze nadere beschouwing is, echter, thans gekomen. Die beschouwing zal aan duidelijkheid ten eerste winnen indien wij, in dit hoofdstuk, streng onderscheid maken tusschen ,kans' en ,waarschijnlijkheid'. Onder ,kans' zal ik eenvoudig de verhouding verstaan van twee speelruimten, op de wijze die wij in het vorige hoofdstuk hebben besproken, en die thans geene nadere toelichting meer behoeft. En het woord ,waarschijnlijkheid' zal ik bezigen in den zin waarin men het in het dagelijksch leven bezigt, en reeds bezigde lang voordat de kansrekening bestond; aan welke definitie ik met opzet niets toevoeg, omdat ik mij bij het gebruik van dat woord juist op niets anders dan op het spraakgebruik van het dagelijksch leven wensch te beroepen.

Mijne bewering dan, als eene verdediging waarvan men dit hoofdstuk zal kunnen beschouwen, is: dat het begrip ,kans' met het begrip ,waarschijnlijkheid' geenszins eenzelve is, en er ook niet door ontleding rechtstreeks uit kan worden afgeleid: maar dat wij het veeleer als eene uitbreiding er van hebben op te vatten: eene uitbreiding, die voorzeker niet willekeurig is, maar die toch op overeenkomst of afspraak berust; daar wel iedereen in haar zal toestemmen, maar niet dan nadat hij er eerst uitdrukkelijk toe is uitgenoodigd. Zulke uitbreidigen, die iedereen redelijkerwijze (maar, strikt genomen, niet noodzakelijkerwijze) zal aanvaarden, komen op het gebied der wiskunde veelvuldig voor: de invoering der ,positieven en negatieve gevallen' is er wel het meest bekende voorbeeld van. Daar zulke uitbreidingen op conventie berusten behoeven zij niet bewezen te worden; haar recht van bestaan ontleenen zij aan hare natuurlijkheid en bruikbaarheid. Daar zij, echter, geene geheel nieuwe begrippen, maar uitbreidingen van reeds bestaande begrippen zijn, moet men bij hare invoering zorgdragen dat zij inderdaad, in een bepaald gedeelte van het gebied harer geldigheid, met die reeds bestaande begrippen samenvallen. Aan te toonen dat aan dezen eisch vol-

daan is, is daarom de verplichting die bij het invoeren van zulke uitbreidingen in de plaats treedt van 'de verplichting tot bewijs.

En zoo zal ik dan ook, om mijne bewering, dat het begrip 'kans' de beteekenis heeft eener zoodanige uitbreiding van het begrip 'waarschijnlijkheid', waar te maken twee dingen hebben aan te toonen, namelijk: ten eerste dat de begrippen 'kans' en 'waarschijnlijkheid' twee verschillende begrippen zijn, en wel in dier voege verschillend dat het gebied van geldigheid van het begrip 'kans' zich verder uitstrekt dan het gebied van geldigheid van het begrip 'waarschijnlijkheid'; en ten tweede dat het begrip 'kans', in dat gedeelte van het gebied zijner geldigheid, waar ook het begrip 'waarschijnlijkheid' geldt, met het begrip 'waarschijnlijkheid' samenvalt. Hoe dit tweede gedeelte van ons onderzoek uit zal vallen is reeds bij voorbaat duidelijk: groote kansen (dat wil zeggen kansen die door breuken welke weinig van de eenheid verschillen worden uitgedrukt) geven tevens waarschijnlijkheden aan. Nu kunnen door het theorema van Bernoulli kansen van willekeurige grootte met zéér groote kansen in verband worden gebracht. Wij kunnen dus óók zeggen: dat wij in dit hoofdstuk twee zaken zullen moeten behandelen, namelijk: ten eerste het onderscheid der begrippen 'kans' en 'waarschijnlijkheid'; en ten tweede de beteekenis van het theorema van Bernoulli.

Het begrip 'waarschijnlijkheid'. Wij hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat iemand die zich, op goede gronden, uitlaat over de kans die op eenig verschijnsel bestaat, daarmee geenszins eene verwachting of een vermoeden over dat verschijnsel te kennen geeft. Immers in de kansrekening heeft men, evenals in iedere andere wiskunstige wetenschap, met volkomen objectieve grootheden (en wel met 'speelruimten') te doen. Zegt iemand, dus, dat de kans om met twee dobbelsteen en „dubbele zes“ te werpen $1/36$ bedraagt, dan

beweert hij daarmee niet anders dan dat eene zekere speelruimte het zesendertigste gedeelte van eene andere speelruimte beslaat; en zijne uitspraak staat derhalve, wat stelligheid en objectiviteit betreft, volkomen op ééne lijn met, bijvoorbeeld, de uitspraak dat een 'inch' het zesendertigste gedeelte van een 'yard' beslaat. In één opzicht, evenwel, verschillen kansrekenkundige uitspraken van andere wiskundige uitspraken ten eerste: al drukken kansrekenkundige uitspraken, namelijk op zich zelve beschouwd, geenszins verwachtingen uit, hun aard brengt mede dat zij, in zeer vele gevallen, verwachtingen opwekken. Immers, leert de kansrekening ons dat de kans op een zeker verschijnsel zeer groot is, dan zullen wij, noodzakelijkerwijze, dat verschijnsel waarschijnlijk achten; is de kans daarentegen zeer gering dan onwaarschijnlijk.¹⁾

Ziedaar het verband, dat tusschen de begrippen 'kans' en 'waarschijnlijkheid' bestaat. Van dit verband afgezien verschillen deze beide begrippen echter ten eerste. Gewoonlijk ziet men dit verschil over het hoofd, en men stelt het dan voor alsof het begrip 'kans' niet anders is dan het begrip 'waarschijnlijkheid', ietwat nader (namelijk door eene kansbreuk) bepaald. Dat deze voorstelling verkeerd is blijkt zoodra men bedenkt dat een begrip door eene nadere bepaling

¹⁾ Het spreekt van zelf dat 'grootte kansen' het gevoel van waarschijnlijkheid alleen opwekken indien men de veronderstellingen van welke men bij het berekenen dier kansen is uitgegaan aanvaardt. Ook dit heeft in de theorie der kansrekening verwarring gesticht (zie de opmerking, hierboven blz. over de beschouwingen van Poincaré gemaakt). In werkelijkheid is de zaak zeer eenvoudig. De kansrekening is eene hulpwetenschap, daarom zijn het geene axioma's waarvan men bij de opstelling van een kansrekenkundig vraagstuk uitgaat doch slechts vooronderstellingen. Het toepassen der kansrekening in het geval dat men het over het opstellen dier vooronderstellingen met zich zelve niet eens is is dus volstrekt doelloos; (tenzij men juist die vooronderstellingen aan de langs anderen weg gevonden waarschijnlijkheid of onwaarschijnlijkheid van de uit die vooronderstellingen afgeleide „grootte kansen“ wil toetsen.) Waar ik dus eene kansbreuk de uitdrukking noem van een objectieve verhouding neem ik stilzwijgend aan dat wij de vooronderstellingen waarop die kansbreuk gebaseerd is aanvaarden.

nimmer anderssoortig kan worden. De begrippen ,kans' en ,waarschijnlijkheid', nu, zijn ongelijksoortig. De behandeling van het begrip ,kans' behoort in de wiskunde, die van het begrip ,waarschijnlijkheid' in de zielkunde thuis.

De omstandigheid, dat men bij het gebruik der woorden ,kans' en ,waarschijnlijkheid' het verschil in beteekenis dezer twee begrippen gemeenlijk over het hoofd ziet, ontslaat ons derhalve niet van den plicht om ons, telkens wanneer wij in eenig geschrift een dier woorden lezen, af te vragen, wélk dier beide begrippen de schrijver eigenlijk bedoelt. Zoo geeft Kant bijvoorbeeld, waar hij zegt „Wahrscheinlichkeit ist Wahrheit, aber durch unzureichende Gründe erkannt, deren Erkenntnis also zwar mangelhaft, aber darum doch nicht trügerisch ist.“ (Kr. d. r. V 2de druk blz. 349) eene definitie, niet van ,kans' maar van ,waarschijnlijkheid'; terwijl daarentegen Laplace, waar hij zegt: „La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un des ces cas doit arriver plutôt que les autres“ (Oeuvres Tome VII blz. 195) niet ,waarschijnlijkheid' maar ,kans' op het oog heeft.

Niet zonder belang is het na te gaan hoe Jac. Bernoulli, de ontdekker van het theorema dat het verband tusschen ,kans, en ,waarschijnlijkheid' uitdrukt, over de onderlinge betrekking dezer beide begrippen denkt. In het vierde deel zijner *Ars Conjectandi*, „tradens usum ac applicationem praecedentis doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis“ gelijk hij zich, niet zonder zwier, uitdrukt, treffen wij eene menigte definities aan, die ons over zijne opvatting niet in het duister laten. Reeds aanstonds blijkt dat hij het onderscheid tusschen subjectieve (of zielkundige) en objectieve begrippen geheel veronachtzaamt. Immers, het begrip ,zekerheid' is toch ongetwijfeld een subjectief begrip. Maar volgens Bernoulli kan men de zekerheid van eenige zaak subjec-

tive zoowel als objective beschouwen. En dan zegt hij: „Omnia quae sub Sole sunt vel fiunt, praeterita, praesentia sive futura, in se et objective summam semper certitudinem habent.“ Hoe hij met deze zonderlinge opvatting zijne niet minder zonderlinge opvatting (die wij, in het tweede hoofdstuk, reeds besproken hebben) omtrent het „meer en minder gemakkelijk“ geschieden van meer en minder waarschijnlijke gevallen rijmt, weet ik niet; maar zeker is het dat zijne beschouwing over het begrip ‚zekerheid‘ ons van zijne behandeling van het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ niet veel goeds kan doen verwachten. De zaak is dan ook dat Bernoulli aan het begrip ‚zekerheid‘ eene objectieve beteekenis opdringt, alleen met de bedoeling om daarna het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ hetzelfde te doen weder-varen. En wat hij daarmede voor heeft is duidelijk. Zoolang men ‚zekerheid‘ en ‚waarschijnlijkheid‘ naar waarheid, als subjectieve begrippen opvat kan wel zeggen dat waarschijnlijkheid niet anders is dan een graad van zekerheid, daar het gevoel van waarschijnlijkheid zwakker en sterker kan zijn en, wanneer het zéér sterk is, tot het gevoel van zekerheid nadert; maar dien „graad“ objectief uit te drukken door eene breuk is niet doenlijk, — immers, daartoe zoude vereischt zijn dat ‚waarschijnlijkheid‘ tot ‚zekerheid‘ in de verhouding stond van een deel tot een geheel; — objectiveert men echter beide begrippen, dan wordt dat doenlijk. Niets, toch, belet ons dan het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ kalmweg met het begrip ‚kans‘ te vereenzelvigen. Om te bewijzen dat dit inderdaad de toeleg van Jac. Bernoulli is behoef ik slechts aan te halen hetgeen hij, voordat zijn betoog nog slechts één bladzijde gevorderd is, zegt (blz. 211): „Probabilitas enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars a toto.“

Overigens moet ik constateeren dat hij de onjuistheid van zijn opvatting zelf eigenlijk zeer wél voelt. Immers de zekerheid die hij aan alle gebeurtenissen „in se et objective“ toekent, is tenslotte toch slechts zekerheid voor een subject,

namelijk voor God: „nisi enim certo eveniant quaecumque futura sunt, non apparet, quo pacto summe Creatori omniscientiae et omnipotentiae laus illibata constare queat.“ (Men ziet, behalve in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis is zijne leer ook van toepassing in Theologicis!) En, wat de waarschijnlijkheid aangaat, hij weet zeer goed dat eene kans alleen dan het gevoel van waarschijnlijkheid opwekt wanneer zij zeer groot is of zooals hij het uitdrukt, de waarde $\frac{1}{2}$ aanmerkelijk te boven gaat. Maar zijne voorliefde voor het begrip ‚kans‘ is zoo groot (gelijk bij iemand die jegens de kansrekening zulke groote verdiensten heeft ook zeer goed te begrijpen is) dat hij het feit dat het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ niet volkomen aan het begrip ‚kans‘ beantwoordt slechts beschouwt als te berusten op eene „wijze van spreken“: „Illud igitur altero probabilius vocatur, quod majorem certitudinis partem habet; etsi in positivo probabile ex usu loquendi tantum dicatur id, cujus probabilitas semissem certitudinis notabiliter superat. Dico notabiliter; nam quod semissem certitudinis circiter aequat, dubium vel anceps vocatur. Ita probabilius est, quod $\frac{1}{5}$ certitudinis habet, quam quod $\frac{1}{10}$; etsi neutrum in positivo sit probabile.“ (blz. 211).

Ik zeide zoo juist dat de neiging om het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ tot het begrip ‚kans‘ te herleiden bij iemand als Bernoulli zeer goed te begrijpen is. Maar ook bij ieder ander is zij zeer goed te begrijpen. Immers het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ heeft iets raadselachtigs, het heeft iets van ‚zekerheid‘ en tegelijk iets van ‚onzekerheid‘ in zich, en berust toch niet op een mengsel van deze twee geheel tegengestelde gemoedstoestanden, maar heeft eene geheel afzonderlijke beteekenis. Wat kan dus verleidelijker zijn dan om, als men eenmaal met het zoo stellige en eenvoudige begrip ‚kans‘ kennis gemaakt heeft, met dit begrip als uitgangspunt te trachten het begrip ‚waarschijnlijkheid‘ te verklaren? En toch handelt men, aldus te werk gaande, verkeerd. Iemand die het begrip

„waarschijnlijkheid“ door het begrip „kans“ wil verklaren keert de verhouding dezer twee begrippen om. Het begrip „kans“ ontleent aan het begrip „waarschijnlijkheid“ eerst zijne beteekenis. Op zich zelve beschouwd is eene kans niet meer dan de verhouding van een bepaald gedeelte eener „speelruimte“ tot die geheele speelruimte; en als men zich niet speciaal voor de verhouding dier speelruimten interesseerde, dan zoude deze geene meerdere beteekenis hebben dan bijvoorbeeld het verschil, of de som, of wat ook, van die speelruimten. Waarom interesseert men zich, nu echter niet voor dat verschil of voor die som maar wel voor die verhouding? Enkel en alleen omdat die verhouding indien zij tot de eenheid nadert de uitdrukking wordt van eene waarschijnlijkheid (en als zij tot nul nadert van eene onwaarschijnlijkheid). Door het theorema van Bernoulli nu kan men iedere kans met eene waarschijnlijkheid in verband brengen; en daarom bezit ook het opstellen van eene willekeurige kans beteekenis: eene beteekenis die dus geheel aan de beteekenis van het begrip „waarschijnlijkheid“ ontleend is. ¹⁾

Het begrip „waarschijnlijkheid“ daarentegen speelt in ons dagelijksch leven voortdurend zijne belangrijke rol zonder daarbij in het minst van het begrip „kans“ afhankelijk te zijn. Wij zien ons, namelijk, voortdurend genoopt tot handelen, terwijl wij ons bij onze handelingen toch slechts in zeer weinige gevallen door zekerheid kunnen laten leiden. Daarom moe-

¹⁾ Misschien wint deze redeneering nog iets aan duidelijkheid indien men de „beteekenis“ en de „waarde“ der kansrekening onderscheidt. Dat de kans om met eenen dobbelsteen zes oogen te werpen $\frac{1}{6}$ bedraagt, beteekent dat de verhouding van een zeker gedeelte eener speelruimte tot die speelruimte $\frac{1}{6}$ bedraagt (dat uit een te zetten was het doel van de drie eerste hoofdstukken van dit geschrift). De waarde van die uitspraak bestaat daarentegen alleen hierin dat zij ons doet verwachten dat van de zes keeren dat men met den dobbelsteen werpt gemiddeld één maal de zes boven zal kommen. Deze verwachting nu is niet anders dan de intuitieve en vage uitdrukking van de waarheid die het theorema van Bernoulli streng wiskunstiglijk en scherp bepaald uitspreekt.

ten wij ons meestal vergenoegen met af te gaan op hetgeen wij min of meer waarschijnlijk achten. Maar ging men nu werkelijk in ernst enkel die zaken waarschijnlijk achten waarvoor wij kansen „aanmerkelijk grooter dan $1/2$ “ konden afleiden, dan zouden er zoo weinige gevallen van waarschijnlijkheid overblijven, dat ons dagelijksch leven terstond spaak zoude loopen. Door het begrip „waarschijnlijkheid“ op het begrip „kans“ te baseeren beperkt men derhalve het gebruik van dat begrip in eene hoogst onredelijke mate. In werkelijkheid is de zaak dan ook geheel anders. De kansrekening, namelijk, dankt hare beteekenis hieran dat zij het gebruik van het begrip „waarschijnlijkheid“ niet beperkt, doch er integendeel nog eenige uitbreiding aan geeft. Zij vormt niet den grondslag van dat gebruik maar breidt het nog uit over een aantal gevallen waarin men, voordat de kansrekening bestond, niet vermoeden kon dat men ooit tot bruikbare, weliswaar niet zekere, maar toch, wegens hare buitengewone waarschijnlijkheid, zoo goed als zekere, uitspraken zoude kunnen geraken. En dat in vele van die gevallen (bijvoorbeeld in de statistiek en in de moleculaire thermodynamica) de waarschijnlijkheid onzer uitspraken zóó groot is dat zij, practisch, met zekerheid gelijk staat, dat danken wij aan het theorema van Bernoulli.

Eene interessante poging om het gevoel van waarschijnlijkheid, in die weinige gevallen dat het door de overweging van kansen in ons opgewekt wordt, zielkundig te verklaren kan men aantreffen in de Section VI (Of Probability) van Hume's Enquiry.¹⁾ Hume stelt zich voor dat men werpt met eenen dobbelsteen met zeer vele zijden, alle op ééne na met hetzelfde aantal oogen gemerkt. De kansen op de twee verschillende uitkomsten bij het werpen met dezen dobbelsteen

¹⁾ Essays and Treatises on several Subjects by David Hume Esq. A new Edition, London 1768, Vol II.

zijn dan niet gelijk. „But finding a greater number of sides concur in the one event than in the other, the mind is carried more frequently to that event, and meets it oftener, in revolving the various possibilities or chances, on which the ultimate result depends. This concurrence of several views in one particular event begets immediately, by an inexplicable contrivance of nature, the sentiment of belief, and gives that event the advantage over its antagonist, which is supported by a smaller number of views, and recurs less frequently to the mind. If we allow that belief is nothing but a firmer and stronger conception of an object than what attends the mere fictions of the imagination, this operation may, perhaps, in some measure, be accounted for. The concurrence of these several views or glimpses imprints its idea more strongly on the imagination; gives it superior force and vigour; renders its influence on the passions and affections more sensible; and in a word, begets that reliance or security, which constitutes the nature of belief and opinion.“

Niets slechts in het geval dat wij ons door kansrekenkunstige overwegingen kunnen laten leiden, geldt, volgens Hume, deze redeneering, maar ook dan wanneer wij ons moeten behelpen met verwachtingen, gegrond op ons slechts onvolkomen bekende oorzaken. Wanneer wij een bepaald verschijnsel uit schijnbaar steeds volkomen eendere oorzaken zeer vele malen wel, en enkele malen niet, hebben zien volgen; waarom noemen wij het dan waarschijnlijk dat, als de oorzaak zich opnieuw voordoet, ook het verschijnsel zal volgen? „Though we give the preference to that which has been found most usual, and believe that this effect will exist, we must not overlook the other effects, but must give each of them a particular weight and authority, in proportion as we have found it to be more or less frequent. 'Tis more probable, in every place of Europe, that there will be frost sometime in January, than that the weather will continue open through-

out that whole month; though this probability varies according to the different climates, and approaches to a certainty in the more northern kingdoms. Here then it seems evident, that when we transfer the past into the future, in order to determine the effect, which will result from any cause, we transfer all the different events, in the same proportion as they have appeared in the past, and conceive one to have existed a hundred times, for instance, another ten times, and another once. As a great number of views do here concur in one event, they fortify and confirm it to the imagination, beget that sentiment which we call belief, and give it the preference above its antagonist, which is not supported by an equal number of experiments, and occurs not so frequently, to the thought in transferring the past to the future."

Om aan Hume's theorie der waarschijnlijkheid recht te doen wedervaren zouden wij haar in verband met de andere deelen zijner wijsbegeerte moeten beschouwen, hetgeen ons hier te ver zoude voeren. Ook houdt dit geschrift zich met het begrip ,waarschijnlijkheid' alleen in zooverre bezig als noodig is om uit te doen komen, dat dit begrip zich van het begrip ,kans' ten zeerste onderscheidt. Ik moet dus volstaan met te doen opmerken: ten eerste, dat Hume's verklaring slechts op een beperkt aantal van alle gevallen waarin het begrip ,waarschijnlijkheid' eene rol speelt betrekking heeft; en ten tweede, dat zij, ook in die gevallen, eigenlijk meer de noodzakelijke connectie in het licht stelt die er in onzen geest tusschen „groote kanser“, of ook „oorzaken van een zeer bepaald karakter“, en het gevoel van ,waarschijnlijkheid' bestaat, dan dat zij het begrip ,waarschijnlijkheid' uit het begrip ,kans' verklaart. Integendeel het onderscheid van het begrip ,kans' (als zijnde de uitdrukking van eene objectieve verhouding) en het begrip ,waarschijnlijkheid' (als zijnde de uitdrukking van eene subjectieve gesteldheid van onzen geest) komt in deze plaats van Hume juist

zeer duidelijk uit. En dat is dan ook de reden dat ik haar heb aangehaald.

Van den geheel verschillenden aard der twee begrippen ,kans' en ,waarschijnlijkheid' zal de lezer thans, naar ik hoop, genoegzaam overtuigd zijn. Ook de beteekenis van het theorema van Bernoulli hebben wij leeren kennen: zij bestaat hierin dat wij door middel van dat theorema, zonder daarbij door eene ontijdige zielkundige interpretatie het begrip ,kans' geweld aan te doen, willekeurige kansen met groote kansen, dat wil zeggen met waarschijnlijkheden in verband kunnen brengen. Het eenige dat ons nog te doen staat is het bewijs te leveren dat het theorema van Bernoulli zich inderdaad ook uit de in dit geschrift opgestelde definitie van het begrip ,kans' laat afleiden.

Nu berust het theorema van Bernoulli op eene vooronderstelling die, welbeschouwd, met kansrekening weinig te maken heeft, op de vooronderstelling namelijk, dat het van geen belang is om de verschillende gevallen, die zich bij eene ,veelvuldig herhaalde proefneming' kunnen voordoen, ook alle als werkelijk verschillende gevallen te onderscheiden. Onderscheidt men alle gevallen wel, geeft men, bijvoorbeeld, bij het honderd maal achtereen neerwerpen van een muntstuk, nauwlettend acht op de juiste volgorde waarin ,kruis' en ,munt' boven komen, dan kan er van eene toepassing van het theorema van Bernoulli geene sprake zijn: men is enkel op het theorema der samengestelde kans aangewezen. En de toepassing van dit theorema leidt, in plaats van tot ,waarschijnlijkheden', steeds tot kleinere kansen dan waarvan men uitgaat. Maar let men niet op de juiste volgorde waarin, doch enkel op het aantal malen dat, ,kruis' en ,munt' bovenkomen, dat wil zeggen: vat men de verschillende gevallen, in plaats van ze alle uiteen te houden, in een veel kleiner aantal van groepen te zamen, dan wordt ook het theorema der totale kans van

toepassing, en dit heeft eene aan den kans-verkleinenden invloed van het theorema der samengestelde kans tegengestelde, kans-vergrootende, strekking.

Voorts is er onder alle groepen steeds ééne die het grootste aantal gevallen vereenigt; in deze groep doet zich de invloed van het theorema der totale kans derhalve het sterkst gelden. Weliswaar weegt ook in deze „waarschijnlijkste groep“ de kans-vergrootende invloed van het theorema der totale kans nog steeds niet tegen den kans-verkleinenden invloed van het theorema der samengestelde kans op; maar het is de verdienste van Bernoulli aangetoond te hebben, dat dit anders wordt, indien men nu een aantal der groepen op hare beurt tot eene groep samenvat door niet alleen niet op de juiste volgorde waarin, maar ook zelfs niet op het juiste aantal malen dat, „kruis“ en „munt“ bovenkomen te letten, doch enkel te vragen naar de kans dat dit aantal malen niet meer dan een zeker percentage van het „waarschijnlijkste aantal malen“ afwijkt. Het theorema der totale kans verkrijgt dan op het theorema der samengestelde kans zoozeer de overhand, dat men de gevraagde kans, door de „proef“ maar vaak genoeg te herhalen, zoo dicht tot de eenheid kan doen naderen als men zelf verkiest.

Van een zuiver kansrekenkundig standpunt beschouwd houdt het theorema van Bernoulli dus niet meer in dan eene, op bijzondere wijze gekoppelde, toepassing van het theorema der totale en dat der samengestelde kans. Om het theorema van Bernoulli te bewijzen behoeven wij derhalve slechts die beide fundamenteele theorema's der kansrekening uit onze definitie van het begrip „kans“ af te leiden.

Indien het ons nu enkel te doen ware om de juistheid der beide fundamenteele theorema's aan te toonen, dan zoude onze taak al zeer gemakkelijk zijn. Immers aan de kansrekening, gelijk zij in de leerboeken behandeld wordt ontbreekt slechts één ding, namelijk de definitie van hetgeen men noemt

„even waarschijnlijke gevallen“. Dit begrip nu hebben wij door onze definitie van kans op eenen vasten grondslag gesteld. Hiermede zouden wij de quaestie als afgedaan kunnen beschouwen. Van een principieel standpunt echter beschouwd, zoude zulk eene wijze van doen ons kwalijk kunnen bevredigen. Daarom zal ik beide theorema's uit onze definitie van het begrip „kans“ afleiden.

Volgens onze definitie drukt eene kansbreuk niet anders uit dan de verhouding van een bepaald gedeelte eener speelruimte tot de geheele speelruimte. De beide fundamenteele theorema's hebben betrekking op het combineeren van kansen. Onze definitie, wijst ons terstond aan hoe wij zulke combinaties van kansen te behandelen hebben. Gesteld, aan een zeker „verschijnsel“ beantwoordt een bepaald gedeelte s der speelruimte S onzer verwachting. Wij kunnen dan dit verschijnsel aanduiden door (s, S) . Beschouwen wij nu het verschijnsel (s, S) in combinatie met een ander verschijnsel (σ, Σ) dan behoeven wij om de „gecombineerde kans“ te vinden ons slechts af te vragen: 1e) Wat is, na de combinatie, de geheele speelruimte onzer verwachting? en 2e) Op welk gedeelte dezer geheele speelruimte is bij de combinatie, meer bepaaldelijk onze aandacht gevestigd? Indien wij er dan bovendien zorg voor hebben gedragen dat de gecombineerde speelruimte aan die eischen, die men aan kansrekenkunstige speelruimten moet stellen, voldoet, dan kunnen wij de gevraagde kans terstond neerschrijven.

Het begrip „combineeren“ of „in verband beschouwen“ is zeer vaag. Slechts enkele van zulke combinaties zijn voor ons van belang. Het houvast echter, dat wij bij het bespreken dezer combinaties aan het begrip „speelruimten“ zullen hebben, zal volstaan om ons er van te overtuigen, dat wij ons, ook indien wij de leer der kansrekenkunstige combinaties meer uitvoeriglijk wilden behandelen, met gerustheid op dat begrip zouden kunnen verlaten.

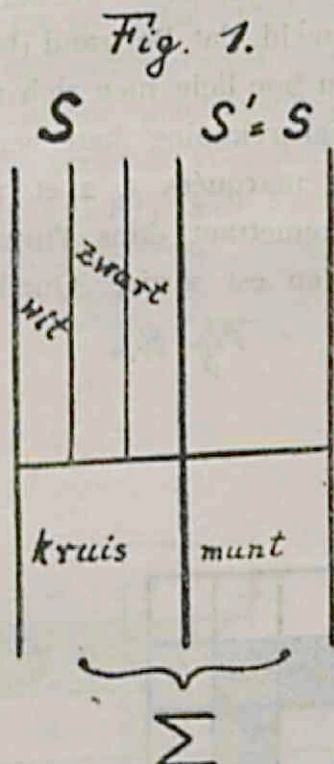
Het theorema der totale kansen wordt gewoonlijk afgeleid als een onmiddellijk gevolg van de definitie van het begrip kans, doordat men het geval stelt, dat men met twee verschillende gedeelten ééner speelruimte (of met twee verschillende groepen van „gunstige gevallen“ uit ééne groep „mogelijke gevallen“) te doen heeft. Het theorema komt dan hierop neer dat men het aantal gunstige gevallen (of een bepaald gedeelte der speelruimte onzer verwachting) mag splitsen zonder dat dit aan de kansbreuk iets af- of toedoet. Het komt mij voor dat dit niet een onmiddellijk gevolg maar veeleer eene noodzakelijke vooronderstelling van de definitie van het begrip „kans“ is, zonder welke deze definitie in het geheel niet tot ondubbelzinnige kansbreuken zoude leiden.¹⁾ Wij zullen dus terstond overgaan tot de combinaties van twee verschijnselen waarbij S en Σ verschillende speelruimten zijn.

De speelruimte onzer verwachting betreffende de combinatie van twee verschijnselen (s, S) en (σ, Σ) zal samengesteld zijn uit de speelruimten S en Σ . Hetgeen wij ons in de eerste plaats moeten afvragen is of de speelruimten S en Σ ongewijzigd in de combinatie opgenomen zullen worden of niet? Een voorbeeld zal duidelijk maken dat ik bij deze vraag het begrip der „kansrekenkunstige“ afhankelijkheid op het oog heb. Gesteld dat zich in eene vaas één wit en drie zwarte balletjes bevinden. De kans om uit deze vaas het witte balletje te trekken zal dan $\frac{1}{4}$ bedragen. Zoo wij echter het trekken van een balletje uit de vaas hiervan afhankelijk stellen dat wij te voren met een muntstuk „kruis“ hebben geworpen dan bedraagt de kans om het witte balletje te trekken slechts $\frac{1}{8}$. De mogelijkheid bestaat dan, namelijk, dat wij in het geheel

¹⁾ Zoo zegt Bertrand (blz 25 van zijn boek): „si l'on partage les cas favorables en plusieurs groupes, la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes. On ajoute en effet les fractions de même dénominateur en ajoutant les numérateurs“.

niet zullen trekken. Ook deze mogelijkheid moeten wij in onze speelruimte opnemen. En wel zal, in dit geval, deze speelruimte even groot zijn als de geheele speelruimte S die aan de mogelijkheid dat wij wel trekken zinnen toekomt. De speelruimte S , derhalve, ondergaat, omdat zij betrekking heeft op een geval van kansrekenkundige afhankelijkheid door de combinatie met het verschijnsel (σ, Σ) eene uitbreiding.

Wij kunnen het voorbeeld eenigszins anders formuleeren. Laat naast de vaas die de vier balletjes bevat eene andere, ledige vaas, die in uiterlijk geheel met de eerste vaas overeenkomt, geplaatst zijn. Weten wij niet welke der beide vazen de balletjes bevat, en worden wij uitgenoodigd een balletje uit eene der beide vazen te trekken dan is het terstond duidelijk dat de speelruimte die aan het trekken uit de ledige vaas beantwoordt gelijk is aan de speelruimte die aan het trekken uit de andere vaas beantwoordt.



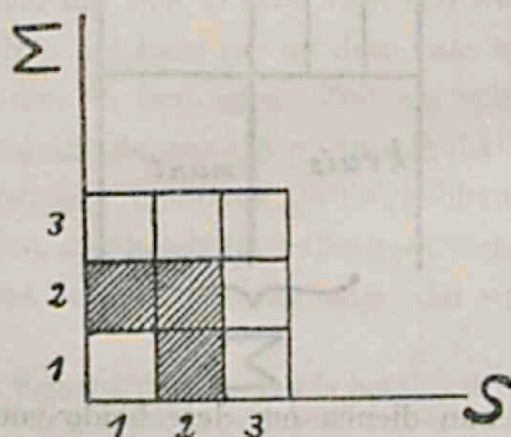
Figuur 1 kan dienen om deze beide voorbeeldenanschouwelijk weer te geven. In het geval der beide vazen valt de onderste helft der figuur weg.

Laat ons thans vooronderstellen dat de verschijnselen (s, S) en (σ, Σ) onafhankelijk van elkaar zijn. In dat geval kunnen wij ieder gedeelte van S met ieder gedeelte van Σ gecombineerd denken. Aan het gedeelte s van S beantwoordt dus een gedeelte $s \times \Sigma$ van de gecombineerde speelruimte onzer verwachting. De geheele gecombineerde speelruimte bedraagt derhalve $S \times \Sigma$. En de combinatie der bepaalde gedeeltelijke speelruimten s en σ bedraagt $s \times \sigma$. Hieruit volgt onmiddellijk het theorema der samengestelde kans voor twee onafhankelijke verschijnselen; immers

$$\frac{s \times \sigma}{s \times \Sigma} = \frac{s}{S} \times \frac{\sigma}{\Sigma}$$

Ook van dit geval kunnen wij eene aanschouwelijke voorstelling geven, indien de verdeeling van S en Σ , door het vraagstuk vereischt, zoo eenvoudig is dat wij haar door een in enkele kleine stukken verdeeld stuk eener rechte kunnen voorstellen. Nemen wij een voorbeeld, dat Bertrand (blz. 32 van zijn boek) geeft om te doen zien hoe licht men zich reeds bij eenvoudige vraagstukken van kansrekening kan vergissen: „Une urne contient trois boules, marquées 1, 2 et 3. On en tire deux successivement, en remettant dans l'urne après le premier tirage, la boule qui en est sortie. Quelle est la probabilité

Fig. 2.



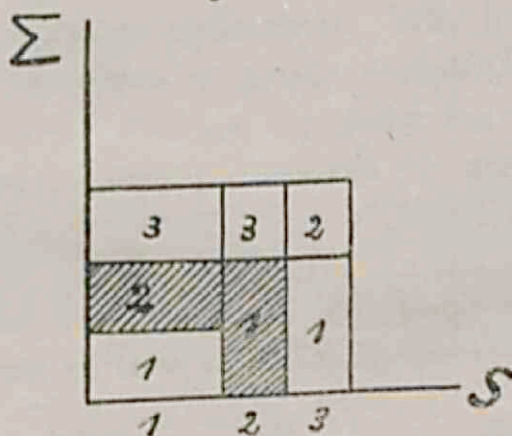
pour que le plus grand numéro sorti soit 2?" Figuur 2 brengt dit vraagstuk in beeld. Men ziet terstond dat het gearceerde

gedeelte der figuur aan de gevraagde kans beantwoordt, en dat deze kans derhalve $1/3$ bedraagt. Wij zien in de figuur tevens het theorema der totale kans, in eene meer algemeene gedaante optreden.

De wijze van voorstellen eener gecombineerde kans door de twee speelruimten S en Σ op twee onderling loodrechte assen af te zetten, laat zich overigens ook in gevallen van kansrekenkundige afhankelijkheid doorvoeren. Men moet dan slechts hiervoor zorg dragen dat men ieder gedeelte der speelruimte van S combineert met de speelruimten van Σ die bij dat gedeelte van S passen. De figuren die men dan verkrijgt leveren eene aanschouwelijke voorstelling van de toepassing in zulke gevallen van het theorema der samengestelde kans in combinatie met het theorema der totale kans.

Gelijk men weet, mag men het theorema der samengestelde kans ook in die gevallen toepassen. Men vindt namelijk voor de kans op een samengesteld verschijnsel het product van de kans van het eerste verschijnsel (σ , S) en de kans die aan het tweede (σ , Σ), toekomt voor het geval dat men weet dat het eerste verschijnsel zich heeft voorgedaan.

Fig. 3.



Figuur 3 toont ons hoe wij ons hiervan op grond van ons beginsel rekenschap kunnen geven. Gesteld men trekt

twee malen achtereen een balletje uit eene vaas die voor de eerste trekking twee balletjes gemerkt 1, één gemerkt 2, en één gemerkt 3 bevat. Het bij de eerste maal getrokken balletje legt men terzijde. Gevraagd wordt weer de kans dat het hoogste getrokken nummer 2 is. Langs de S-as zijn de speelruimten beantwoordende aan de mogelijke uitkomsten der eerste trekking uitgezet. Boven ieder dier, bij deze wijze van voorstellen lineaire, speelruimten zijn de planaire speelruimten geteekend die aan de daarin aangegeven uitkomsten der tweede trekking beantwoorden. Het geërcerde gedeelte beantwoordt aan de gevraagde kans, deze bedraagt dus $\frac{1}{3}$. Ook andere vragen betreffende bij dit voorbeeld optredende kansen, zijn uit de figuur gemakkelijk af te lezen.

Wij zouden onze beschouwingen over de combinatie van kansen nog sterk kunnen uitbreiden. Ik wilde echter slechts de juistheid en de bruikbaarheid van de in dit geschrift verdedigde opvatting der kansrekening aantonen, en ik meen dat het daartoe niet noodig is aan al hetgeen ik gezegd heb nog iets toe te voegen.



STELLINGEN.

I

De verwarring, ten aanzien van de verklaring der kansrekening heerschende, berust in laatsten aanleg op eene verwarring van het begrip 'kans' met het begrip 'waarschijnlijkheid'. Het begrip 'waarschijnlijkheid' kan niet wiskunstiglijk verklaard worden. Het begrip 'kans' laat zich enkel verklaren met behulp van het wiskunstige begrip 'kansrekenkunstige speelruimten'.

II

J. S. Mill (*A System of Logic*. New York 1860 blz. 320) heeft gelijk waar hij zegt: „To be able to pronounce two events equally probable it is not enough that we should know that one or the other must happen, and should have no ground for conjecturing which.“ Hij dwaalt echter waar hij daarop doet volgen: „Experience must have shown that the two events are of equally frequent concurrence. Why in tossing up a halfpenny do we reckon it equally probable that we shall throw cross or pile? Because experience has shown that in any great number of throws, cross and pile are thrown about equally often.“

III

G. Heymans' vertrouwen in de „Enquetemethode“ der psychologie berust op eene verkeerde opvatting van de theorie der fouten.

(G. Heymans. *Psychologie der Frauen*. Heidelberg 1910. blz. 29.)

IV

De bezwaren door Bertrand in het laatste gedeelte van het zevende hoofdstuk (*Probabilité des Causes*) van zijn boek geopperd worden opgeheven door de overweging dat men van eene „waarschijnlijkheid der oorzaken“ alleen spreken mag indien men te voren eene vooronderstelling omtrent den aard dier oorzaken gemaakt heeft.

V

Ten onrechte beweert Czuber (*Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1914, Erster Band blz. 15) dat de kansrekening noodzakelijkerwijze, onder meer, van den volgende vooronderstelling uitgaat: „Von der Kausalität des Geschehens wird abgesehen, somit die Hypothese eines absoluten oder reinen Zufalls gemacht.“

VI

De vraag „of er een toeval bestaat“ en de vraag „of alle verschijnselen door oorzaken bepaald zijn“ zijn vragen die niets, of athans zeer weinig met elkaar hebben uit te staan. Dit niet ingezien te hebben is de fout van H. Bruns (*Wahrscheinlichkeitslehre und Kollektivmasslehre*, Leipzig, 1906). Deze fout ontnemt aan zijne beschouwingen over de beginselen der kansrekening alle waarde.

VII

De critiek door Bertrand en Poincaré op Maxwell's afleiding van de wet der snelheidsverdeeling der moleculen van eene gasmassa uitgeoefend is ongerechtvaardigd.

VIII

De oplossing die Czuber (t. a. p. blz. 244) van het vierde zijner „Spielprobleme“ geeft is onjuist.

IX

Een bewijs te geven van het axioma der parallelle lijnen is onmogelijk; maar het is ook volstrekt onnoodig.

X

De rekenkunde bestaat in en door den tijd, evenzeer als de meetkunde in en door de ruimte bestaat, gelijk Kant heeft uiteen gezet.

XI

Helmholtz' bewijs voor het beginsel der virtueele verplaatsingen bij volkomen vaste verbindingen is overbodig en onjuist.

(Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. I, II.)

XII

Righi past in zijne beschouwingen over de proef van Michelson het beginsel van Huyghens op verkeerde wijze toe. (A. Righi. L'esperienza di Michelson e la sua interpretazione Memorie della R. Acad. di Bologna Serie VII Tomo VI.)

XIII

De vraag naar het ontstaan der soorten behoort tot het gebied der metaphysica en daarom niet tot dat der biologie.

XIV

Het relativiteitsbeginsel beteekent het bankroet der natuurwetenschap als natuurverklaring.

XV

De studie der klassieke oudheid behoort den grondslag te vormen van alle voorbereidend, en de studie der wijsbegeerte van alle hooger onderwijs.
