Inleiding tot een afbeeldingsmethode van de stralenruimte op de puntenparen van een puntenveld

https://hdl.handle.net/1874/278032

Inleiding tot een Afbeeldingsmethode van de Stralenruimte op de Puntenparen van een Puntenveld

P. J. VAN LOO

INLEIDING TOT EEN AFBEELDINGSMETHODE VAN DE STRALENRUIMTE OP DE PUNTENPAREN VAN EEN PUNTENVELD

Diss. Utrecht 1922

INLEIDING TOT EEN AFBEELDINGSMETHODE VAN DE STRALENRUIMTE OP DE PUNTENPAREN VAN EEN PUNTENVELD

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN **DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE** AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DOCTOR J. F. NIERMEIJER, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 23 OCTOBER '22, 'S NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR

PETRUS JACOBUS VAN LOO

GEBOREN TE UTRECHT

DRUKKERIJ ZUIDAM, UTRECHT

AAN MIJN VROUW
AAN MIJN VADER

VOORWOORD.

Bij het eindigen mijner academische studie dank ik U, HOOGLEERAREN in de faculteit der Wis en Natuurkunde voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen,

Hooggeleerde ORNSTEIN; de tijd, die ik in Uw laboratorium mocht doorbrengen, zal bij mij steeds in dankbare herinnering blijven, niet het minst door de wijze waarop gij U wist te interesseeren, ook voor het geringste werk door Uw leerlingen verricht.

Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor. U in het bijzonder dank ik voor de heldere wijze waarop ge mij door Uwe colleges en door het beantwoorden van vragen, waartoe ge steeds bereid waart, hebt ingeleid in de kennis van de methoden der Hoogere Meetkunde.

Tevens maak ik van de mij hier geboden gelegenheid gaarne gebruik U openlijk mijn dank te betuigen voor de belangstelling en raad, welke gij mij bij het vervaardigen van dit proefschrift zoo ruimschoots hebt toebedeeld.

INLEIDING.

1. De centrale projectie van een rechte wordt gekenmerkt door twee punten: doorgang (D) en vluchtpunt (V). Het puntenpaar (D, V) kan nu beschouwd worden als afbeelding van een rechte.

2. De stralenruimte is vierdimensionaal, het aantal puntenparen van een puntenveld is eveneens viervoudig oneindig; de stralenruimte kan dus afgebeeld worden in de puntenparen van een puntenveld.

3. *Enkelvoudig oneindige lijnenstelsels.*

Een meetkundige plaats van een enkelvoudig oneindig stelsel rechten noemen we in algemeenen zin een regelschaar. Het beeld van een regelschaar wordt gevormd door twee reeksen in (1, 1) verwantschap op, in het algemeen, kromme dragers.

Beschouwen we ter inleiding achtereenvolgens den waaier en den kegel.

4. *Waaier.*

Een waaier wordt in het algemeen afgebeeld in twee perspectieve puntenreeksen op evenwijdige dragers, n.l. doorgang en vluchtlijn van het waaiervlak. Ligt het projectiecentrum (C) in het waaiervlak, dan bestaat de afbeelding uit twee collocale gelijkvormige puntenreeksen. Deze hebben, zooals bekend is, twee dubbelpunten (coincidenties). Het eene (D_p, V_p) is het beeld van den waaierstraal door het centrum van projectie gaande, het andere (D_∞, V_∞) is het beeld van den waaierstraal welke evenwijdig loopt aan de snijlijn van tafereel en waaiervlak. In het bijzonder kunnen de dubbelpunten samenvallen in (D_∞, V_∞). Valt het centrum van projectie samen met het middelpunt van den waaier, dan is het beeld van den waaier vertegenwoordigd door twee identieke collocale puntenreeksen.

Een parallelwaaier wordt vertegenwoordigd door de puntenparen, die men krijgt door de punten D_k van een puntenreeks van de 1e orde te koppelen aan een vast punt V.

Worden de punten V_k van een puntenreeks van de 1e orde gekoppeld aan een vast punt D, dan vormen de aldus gevormde puntenparen het beeld van een waaier welks centrum in het tafereel gelegen is.

5. *Kegel.*

Het beeid van een kegel van de *n*e orde bestaat in het algemeen uit de homologe puntenparen van twee homothetische puntenreeksen van de *n*e orde. Het homothetisch middelpunt is het beeld van de verbindingslijn van projectiecentrum en kegeltop. We hebben hier dus een homologie met l_∞ als dubbellijn en het homothetisch middelpunt als centrum. Ligt het projectiecentrum op een straal des kegels, dan raken de dragers der puntenreeksen (V) en (D) elkaar in het dubbelpunt (D_k, V_k) dat het beeld is van eerstgenoemden straal.

Bijzondere ligging van tafereel en projectiecentrum geeft geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

Het beeld van een parallelstralenkegel (cylinder) wordt vertegenwoordigd door de puntenparen, die men krijgt door de punten D_k van een puntenreeks van de ne orde te koppelen aan een vast punt V.

HOOFDSTUK I.

De Kwadratische Regelschaar.

1. In het algemeen zal de afbeelding van een kwadratische regelschaar bestaan uit twee projectieve puntenreeksen van de 2e orde.

We definieeren de kwadratische regelschaar als het samenstel der ∞^1 verbindingsrechten van overeenkomstige punten van twee projectieve puntenreeksen op kruisende dragers: (a) en (b).

2. Kiezen we het projectiecentrum op een straal l der regelschaar en het tafereel $\tilde{\iota}$ door den straal a der toegevoegde regelschaar, zóó, dat de projectie der puntenreeks (b) perspectief is met de puntenreeks (a) in het tafereel.

De afbeelding der regelschaar wordt nu gevormd door de paren (D, V), zoodanig gelegen, dat hun verbindingslijnen concurrent zijn. Hun snijpunt zij S'.

Volgens het voorgaande is de meetkundige plaats (D) der punten D_k de rechte $a^{()}$, de meetkundige plaats (V) der punten V_k een kegelsnede. In het hier beschouwde geval (C op een straal l der regelschaar) is deze kegelsnede een hyperbool, waarvan $a^{()}$ een der beide asymptotische richtingen aangeeft.

Is $\overline{D}_b$ het doorgangspunt van b, dan zal het verdwijnpunt behoorende bij het doorgangspunt D_m, verkregen door $S'\overline{D}_b$ met (D) te snijden, naar het oneindige verhuizen. Door $S'\overline{D}_b$ wordt dus de tweede asymptotische richting der hyperbool (V) bepaald.

3. Klaarblijkelijk zullen nu twee stralen der regelschaar elkaar niet kunnen snijden, daar de waaier (S') uit de

hyperbool geen koorde evenwijdig aan een asymptotische richting kan snijden.

De straal *l* door het projectiecentrum wordt afgebeeld in de coincidentie (D_l, V_l) in het snijpunt van *a'* en *b'*.

4. Zoeken we nu de beelden van de stralen der toegevoegde regelschaar. Twee dezer stralen zijn reeds gekarakteriseerd door $(\overline{D}_b, \overline{V}_b)$ en $(\overline{D}_a, \overline{V}_a^{\infty})$ bij welke laatste $\overline{D}_a$ als willekeurig punt van *a'* is te beschouwen. Een derde is bepaald door de coincidentie $(\overline{D}\lambda, \overline{V}\lambda)$ in S'.

De coincidenties (D_l, V_l) en $(\overline{D}\lambda, \overline{V}\lambda)$ zijn dus de beelden van de beschrijvenden der hyperboloide (drager der regelscharen) welke door het projectiecentrum gaan.

De stralen der eerste schaar worden door die der toegevoegde in projectieve puntenreeksen gesneden, welke projectieve puntenreeksen op de projecties hunner dragers ingesneden worden door een waaier met de coincidentie (D_l, V_l) als middelpunt.

De doorgangspunten $\overline{D}_k$ der tweede schaar liggen op $S'\overline{D}_b$, terwijl de vluchtpunten $\overline{V}_k$ op de reeds beschouwde hyperbool liggen.

5. Wil men aantoonen dat de stralen der tweede regelschaar elken straal der eerste snijden, dan is het voldoende dit aan te toonen voor drie stralen.

Voor de hand ligt hiervoor te nemen:

(D_m, V_m^{∞}); (D_l, V_l) en een willekeurigen straal (D_k, V_k).

Verder volgt dat de algemeene kwadratische regelschaar geen straal in het oneindige heeft.

Dit is alleen mogelijk als de oneindig verre elementen der puntenreeksen a en b aan elkaar toegevoegd zijn (paraboloide).

6. *Opmerkingen.*

a. De richtkegel uit het centrum van projectie wordt afgebeeld in twee collocale identieke puntenreeksen van de 2e orde met (V) als drager.

b. De vorm der doorsnede van een vlak met het kwadratisch regelvlak kan onmiddellijk bepaald worden. Heeft de vluchtlijn van het vlak 2, 1 of 0 punten met de meetkundige plaats (V) gemeen, dan is de doorsnede een hyperbool, parabool of ellips.

c. Snijden *a* en *b* elkaar dan valt $\overline{D}_b$ samen met het snijpunt van *a'* en *b'*. We zien dan dat de afbeelding van een waaier gevormd wordt door twee perspectieve puntenreeksen op evenwijdige dragers.

d. Het tafereel is een raakvlak van de hyperboloide.

7. Beschouwen we nu nog eenige meer algemeene afbeeldingen van de kwadratische regelschaar.

Kiezen we het tafereel door een beschrijvende *a* der toegevoegde regelschaar en C willekeurig. Het is bij de meer algemeene keuze der gegevens voordeelig een regelschaar te definieeren als het samenstel der rechten welke op drie gegeven rechten *a*, *b* en *c* rusten.

De afbeelding bestaat nu uit twee projectieve puntenreeksen (D) en (V). (D) heeft *a'* tot drager, (V) is een kegelsnede en wel in het algemeen een hyperbool, waarvan *a'* een der asymptotische richtingen vertegenwoordigt. De andere asymptotische richting wordt gekarakteriseerd door $\overline{D}_b$ $\overline{D}_c$ welke tevens voorstelt de meetkundige plaats ($\overline{D}$) der toegevoegde regelschaar,

De meetkundige plaats (V) is het product van twee projectieve waaiers met toppen $\overline{V}_b$ en $\overline{V}_c$ welker overeenkomstige stralen evenwijdig loopen aan de homologe stralen der perspectieve waaiers $\overline{D}_b$ (D) en $\overline{D}_c$ (D).

8. Kiezen we het tafereel willekeurig en C op een straal *a* der toegevoegde regelschaar. Bij de afbeelding zullen we uitgaan van de punten K van den toegevoegden straal *c* en

hierdoor de transversalen over *a* en *b* trekken. De afbeelding der regelschaar zal nu bestaan uit twee puntenreeksen (D) en (V) van de 2e orde. De kegelsneden welke de dragers dezer puntenreeksen zijn, zullen in het algemeen hyperbolen worden met dezelfde asymptotische richtingen. Immers, letten we er op hoe de punten D_k en V_k geconstrueerd worden, dan volgt, als D^1_k het snijpunt is van $\overline{V}_b K$ met de lijn uit $\overline{D}_c // \overline{V}_b \overline{V}_c$ getrokken, dat D_k naar het oneindige verhuist als $\overline{D}_a K // D^1_k \overline{D}_b$, maar dan is ook $\overline{V}_b V_k // \overline{D}_a K$ dus verhuist V_k tegelijk met D_k naar het oneindige.

9. Hoe bepaalt men de asymptotische richtingen?

Hiertoe bepalen we de meetkundige plaats der punten D^1_k die zoodanig gelegen zijn dat $\overline{D}_a K // \overline{D}_b D^1_k$ en D^1_k op $\overline{V}_b K$.

Deze meetkundige plaats is een kegelsnede en wel een hyperbool, gaande door $\overline{D}_b$, $\overline{V}_b$ en het snijpunt van $\overline{D}_a \overline{D}_b$ met $\overline{D}_c \overline{V}_c$, en met $\overline{V}_b \overline{D}_a$ en c' als asymptotische richtingen.

Op de lijn door $\overline{D}_c // \overline{V}_c \overline{V}_b$ getrokken bepaalt deze in het algemeen twee punten D^1_k en D^1_l waardoor de gezochte asymptotische richtingen bepaald zijn.

We hebben dus:

De afbeelding der kwadratische regelschaar bestaat uit de puntenparen van twee projectieve kegelsneden met dezelfde reëele asymptotische richtingen.

10. Zien we nu nog hoe de projectiviteit tusschen de puntenreeksen (D) en (V) vastgelegd is. Klaarblijkelijk door een waaier met $\overline{D}_a \overline{V}_a$ als centrum.

De toegevoegde regelschaar wordt door projectieve puntenreeksen op dezelfde dragers bepaald, en wel wordt hier de projectiviteit vastgelegd door een waaier met het tweede snijpunt van (D) en (V) : (D_p, V_p) als centrum.

De puntenreeks (D) is het voortbrengsel van twee projectieve waaiers met $\overline{D}_b$ en $\overline{D}_a$ als centrum, die respectievelijk projecteerende waaiers zijn van de projectieve puntenreeksen op $\overline{D}_c \overline{V}_c$ en op de rechte door $\overline{D}_c // \overline{V}_c \overline{V}_b$ getrokken, (hun gemeenschappelijk element is aan zichzelf toegevoegd).

Evenzoo is de puntenreeks (V) het voortbrengsel van twee projectieve waaiers met $\overline{D}_a$ en $\overline{V}_b$ als centrum. De waaier $\overline{V}_b$ is congruent met den waaier $\overline{D}_b$ dien we zooeven beschouwden: hun overeenkomstige stralen loopen evenwijdig.

11. Beschouwen we tenslotte het geval dat C en $\bar{\iota}$ *geheel willekeurig* zijn.

Op dezelfde wijze als in 8 volgt dat ook hier de afbeelding der regelschaar bestaat uit de puntenparen van twee projectieve kegelsneden met dezelfde asymptotische richtingen.

Het bepalen der asymptotische richtingen geschiedt op analoge wijze: We bepalen de meetkundige plaats der punten P, die aldus gevonden worden:

Trek uit $\overline{D}_b$ en $\overline{D}_c$ evenwijdige lijnen die respectievelijk de assen *ab* (door $\overline{D}_a // \overline{V}_a \overline{V}_b$ getrokken) in Q en *ac* (door $\overline{D}_a // \overline{V}_a \overline{V}_c$ getrokken) in R snijden. Verbind deze snijpunten Q en R respectievelijk met $\overline{V}_b$ en $\overline{V}_c$ dan is het snijpunt dezer verbindingslijnen een punt P.

De meetkundige plaats blijkt een kegelsnede te zijn, immers (Q) $\barwedge$ (R) dus ($\overline{V}_b$ Q) $\barwedge$ ($\overline{V}_c$ R). De punten waar deze de lijn $\overline{V}_a \overline{D}_a$ snijdt zijn de snijpunten van de stralen der regelschaar welker kenmerkende punten D_k en V_k naar het oneindige verhuizen.

Snijdt $\overline{V}_a \overline{D}_a$ de kegelsnede in twee reeele punten dan zijn (D) en (V) hyperbolen. Raakt $\overline{V}_a \overline{D}_a$ de kegelsnede, dan zijn (D) en (V) parabolen. Hebben $\overline{V}_a \overline{D}_a$ en de kegelsnede geen reeele punten gemeen dan zijn (D) en (V) ellipsen.

12. *Opmerking.*

De kegelsneden (D) en (V) zijn gelijkstandig gelijkvormig.

De homologe punten dezer gelijkvormige kegelsneden zijn echter in het algemeen geen puntenparen (D_k, V_k).

HOOFDSTUK II.

1. De afbeelding van het enkelvoudig oneindig stelsel raaklijnen van een vlakke algebraische kromme c^n bestaat uit twee puntenreeksen van de 1e orde (D) en (V) op evenwijdige rechten. Beschouwen we de afbeelding van het raaklijnenstelsel van een c^n, gelegen in een vlak gaande door het projectiecentrum C, dan bestaat de afbeelding uit twee collocale puntenreeksen (D, V).

2. Uit een willekeurig punt kan men aan een algemeene kromme van den n^{en} graad $n\ (n-1)$ raaklijnen trekken. Verhuist dit willekeurige punt in een bepaalde richting naar het oneindige, dan volgt hieruit, door toepassing van de wet van het behoud van het aantal, dat aan een vlakke c^n in het algemeen $n\ (n-1)$ raaklijnen getrokken kunnen worden evenwijdig aan een bepaalde richting.

Bij elk punt D_k behooren dus $n\ (n-1)$ punten V_l, nl. de vluchtpunten der $n\ (n-1)$ raaklijnen uit D_k aan c^n te trekken.

Bij elk punt V_k behooren eveneens $n\ (n-1)$ punten D_l, nl. de doorgangspunten der $n\ (n-1)$ raaklijnen, welke evenwijdig aan de door V_k bepaalde richting loopen.

Op den drager der puntenreeksen (D, V) hebben we dus een verwantschap $\{n\ (n-1),\ n\ (n-1)\}$

Deze bezit in het algemeen $2\ n\ (n-1)$ coincidenties, welke hier aldus gegroepeerd zijn:

$n\ (n-1)$ voor de raaklijnen door C gaande en $n\ (n-1)$ voor de raaklijnen, welke evenwijdig aan het tafereel loopen.

3. *Opmerkingen.*

a. De afbeelding van het raaklijnenstelsel van een kegelsnede, gelegen in een vlak door het projectiecentrum gaande, zal dus zijn een verwantschap (2, 2) op den drager (D, V).

b. Ligt C op de kegelsnede, dan telt de coincidentie (D_k, V_k) welke het beeld is van de raaklijn in C aan de kegelsnede, dubbel.

c. Bezien we het raaklijnenstelsel van een kegelsnede rakend aan het tafereel, dan verdwijnt schijnbaar een coincidentie (D_∞, V_∞). Merken we op dat elk punt van de meetkundige plaats (D) beschouwd kan worden als doorgangspunt der in het tafereel gelegen raaklijn *d*, dus ook het punt D_∞ dezer rechte, dan blijken ook hier 4 coincidenties aanwezig te zijn.

d. Bij de parabool kan in een gegeven richting slechts één raaklijn getrokken worden. Daar de lijn l_∞ van het paraboolvlak echter met elke rechte van dat vlak elken willekeurigen hoek maakt is l_∞ te beschouwen als tweede raaklijn evenwijdig aan een gegeven richting.

De vier coincidenties zijn dan de beelden van de twee raaklijnen uit C, de raaklijn evenwijdig aan het tafereel en van de raaklijn l_∞.

e. Raakt de parabool aan het tafereel en laten we l_∞ en de in het tafereel gelegen raaklijn *d* buiten beschouwing, dan krijgen we als afbeelding twee collocale puntenreeksen (D, V) welke nu in projectief verband tot elkaar staan, en welke 2,1 of 0 dubbelpunten vertoonen, naarmate uit C 2,1 of 0 reëele raaklijnen aan de parabool getrokken kunnen worden.

4. Gaan we nu nog afbeelden het raaklijnenstelsel van een kegelsnede gelegen in een willekeurig vlak, dan blijkt de afbeelding te bestaan uit twee puntenreeksen van de 1e orde (D) en (V) gelegen op evenwijdige dragers.

Ook hier bestaat een verband (2, 2) tusschen de punten D_k en V_k.

Bij de afbeelding van het raaklijnenstelsel van een parabool, welke aan het tafereel raakt krijgen we twee projectieve puntenreeksen op evenwijdige dragers (D) en (V).

HOOFDSTUK III.

Het bepalen van het origineel van een gegeven beeld.

1. *Collocale puntenreeksen (D, V) van de 1e orde.*

Deze zijn het beeld van enkelvoudig oneindige lijnenstelsels, in één plat vlak gelegen, welk vlak door het projectiecentrum gaaat.

2. We hebben achtereenvolgens:

Gelijkvormige collocale puntenreeksen.

Daar de puntenreeksen (D) en (V) gelijkvormig zijn, is er in het algemeen in het vlak van het lijnenstelsel een waaier M (D) te bepalen die gelijkvormig is met den bepaalden waaier C (V). De puntenreeksen (D, V) zijn het beeld van den waaier M (D).

De in het algemeen aanwezige twee coincidenties (D_k, V_k) en (D_∞, V_∞) zijn de beelden van den waaierstraal door C gaande en van den waaierstraal welke evenwijdig aan het tafereel loopt.

3. Bijzondere gevallen:

α. Identieke collocale puntenreeksen (D, V.)

Deze zijn het beeld van een waaier met het projectiecentrum als middelpunt.

β. Direct congruente collocale puntenreeksen (D, V.)

Deze zijn het beeld van een waaier M, zoodanig gelegen, dat de waaierstraal door het projectiecentrum evenwijdig aan het tafereel loopt. Er is dus maar één dubbelpunt (D_∞, V_∞).

We kunnen dus de directe congruentie beschouwen als een parabolische projectiviteit met oneindig ver dubbelpunt.

γ. *Symmetrische collocale puntenreeksen (D, V).*

Deze zijn het beeld van een waaier M welke symmetrisch is met den waaier C (V) ten opzichte van een op den drager (D, V) gelegen symmetriecentrum O.

Er zijn 2 dubbelpunten: (D_0, V_0) in O, welke het beeld is van den straal door het projectiecentrum gaande; en een dubbelpunt (D_∞, V_∞), beeld van den straal evenwijdig aan het tafereel.

4. *Projectieve collocale puntenreeksen (D, V).*

Deze hebben in het algemeen twee dubbelpunten.

Daar de reeksen niet gelijkvormig zijn, komt met D_∞ overeen een bepaald eigenlijk punt V_k; evenzoo met V_∞ een bepaald eigenlijk punt D_l.

Door het projectiecentrum gaan dus twee stralen van het lijnenstelsel, dus omhullen ze een kegelsnede.

Het paar $(D_\infty, V_{D\infty})$ is het beeld van de lijn l_∞ van het vlak van het lijnenstelsel: de omhulde kegelsnede is dus een parabool.

De parabool raakt het tafereel, dus (D, V), in het punt $(D_{V\infty})$. Vallen de dubbelpunten der projectieve collocale puntenreeksen samen, dan ligt het projectiecentrum op de parabool.

Is de projectiviteit elliptisch, dan ligt het projectiecentrum binnen de parabool.

5. *Involutie.*

Een involutie is het beeld van een parabool.

Is de involutie elliptisch, dan ligt C binnen de parabool; is zij hyperbolisch, dan ligt C er buiten.

6. *Puntenreeksen (D) en (V) op evenwijdige dragers.*

Deze zijn het beeld van een stelsel lijnen, in één plat vlak gelegen.

We onderscheiden:

7. *Perspectieve puntenreeksen.*

Zij vormen het beeld van een waaier, gelegen in een vlak, niet door het projectiecentrum gaande.

Bijzonder geval: parallelwaaier.

8. *Projectieve puntenreeksen.*

Deze zijn het beeld van de raaklijnen van een kegelsnede in een vlak, niet door het projectiecentrum gaande. De lijnen D_k V_k omhullen de projectie der kegelsnede.

De kegelsnede raakt aan l_∞, is dus een parabool. Immers, het punt V_k behoorend bij D_∞ is een bepaald eigenlijk punt van (V). Verder raakt de parabool aan het tafereel want door D_k gaat slechts één raaklijn die niet in $\bar{l}$ ligt.

9. *Puntenreeksen (D) en (V) op elkaar snijdende dragers.*

Deze zijn het beeld van een enkelvoudig oneindig lijnenstelsel, welks exemplaren evenwijdig loopen aan een bepaald vlak, waarvan de richting bepaald wordt door den drager (V).

10. *Perspectieve puntenreeksen.*

Deze zijn het beeld van een regelschaar van een hyperbolische paraboloide door C gaande.

Immers: Alle lijnen van het beschouwde stelsel rusten op de in het tafereel gelegen rechte (D).

Daar de puntenreeksen perspectief zijn, gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige punten D_k, V_k door één punt, welk punt, opgevat als coincidentie $(\bar{D}\lambda, \bar{V}\lambda)$, te beschouwen is als beeld van een rechte, gaande door het centrum van projectie.

Deze rechte wordt, evenals (D), door alle lijnen van het beschouwde stelsel (D, V) gesneden. Verder loopen alle lijnen evenwijdig aan een vlak, welks stand door (V) bepaald wordt.

Het snijpunt der meetkundige plaatsen (D) en (V) is aan zichzelf toegevoegd: (D_l, V_l), is dus beeld van een straal der regelschaar door C gaande.

Eén exemplaar der regelschaar ligt in het oneindige, nl.: (D_∞, V_{D_∞}).

De exemplaren van de toegevoegde regelschaar loopen evenwijdig aan een vlak door C, welks stand bepaald wordt door de verbindingslijn $(\overline{V})$ van $\overline{V}\lambda$ met het oneindig ver gelegen vluchtpunt van (D).

$(\overline{V})$ loopt dus evenwijdig aan (D).

Evenzoo loopt $(\overline{D})$ door $\overline{D}\lambda$ evenwijdig aan (V). De verbindingslijnen $\overline{D}_p\ \overline{V}_p$ vormen een waaier met $D_l\ V_l$ als centrum.

Een willekeurige lijn $(\overline{D}_m, \overline{V}_m)$ snijdt nu elke lijn (D_k, V_k). Immers, noemen we het snijpunt van $\overline{V}_m\ V_k$ met (D): A en dat van $V_k\ D_l$ met $(\overline{V})$: B dan is:

$\overline{D}_m\ \overline{V}_m : \overline{V}_m\ D_l = \overline{D}\lambda\ \overline{V}_m : \overline{V}_m\ B = D_k\ A : AD_l$

Zoodat $\overline{D}_m\ D_k \parallel \overline{V}_m\ V_k$.

De toegevoegde regelschaar heeft ook een exemplaar in het oneindige, nl. de lijn die afgebeeld wordt in $(\overline{D}_\infty\ V_{\overline{D}_\infty})$.

11. *Opmerkingen.*

a) Verhuist $\overline{D}\lambda\ \overline{V}\lambda$ naar het oneindige, dan loopt de toegevoegde regelschaar evenwijdig aan het tafereel. $(\overline{D})$ zoowel als $(\overline{V})$ verdwijnen dan naar het oneindige.

b) Gelijkvormige- en projectieve-puntenreeksen zijn eveneens beelden van paraboloidische regelscharen. Zij geven geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

c) De algemeene afbeelding van een paraboloidische regelschaar bestaat uit twee projectieve puntenreeksen: (V) van de 1e orde, (D) van de 2e orde.

De puntenreeks (D) kan geen ellips zijn, daar (V) een asymptotische richting bepaalt en reëel is. De tweede asymptotische richting wordt gekarakteriseerd door de verbindingslijn der vluchtpunten van twee exemplaren der toegevoegde schaar. Deze lijn is tevens de meetkundige plaats ($\overline{V}$) der toegevoegde schaar.

HOOFDSTUK IV.

Twee projectieve puntenreeksen van de 1e en 2e orde.

1. *Twee projectieve puntenreeksen*: (*V*) *van de 1e orde,* (*D*) *van de 2e orde.*

Alle lijnen van het stelsel loopen evenwijdig aan het vlak C (V), of anders gezegd: alle lijnen snijden de oneigenlijke rechte u_∞ van dit vlak.

In het tafereel ligt een exemplaar *l* van het stelsel, n.l. dat welks beeld vertegenwoordigd wordt door het puntenpaar (D_l, V_∞). De doorsnede van het lijnenstelsel met het tafereel is dus van den 3en graad.

Kunnen twee lijnen van het stelsel elkander snijden?

Dit kan alleen als $D_k D_{k'}$ // (V).

We kunnen dus de lijnen rangschikken in paren elkaar snijdende lijnen. De punten V_k, $V_{k'}$ van de beelden van de paren elkaar snijdende lijnen vormen op den drager (V) een hyperbolische involutie, met dubbelpunten in de punten V_a en V_b, behoorende bij de punten D_a en D_b, welke de uiteinden zijn van de toegevoegde middellijn der richting (V).

Alle andere lijnen kruisen elkaar.

Evenwijdige lijnen komen niet voor, tenzij men de bestanddeelen der dubbellijnen, afgebeeld in (D_a, V_a) en (D_b, V_b) als zoodanig wil beschouwen.

2. Beschouwen we het vlak van een paar elkaar snijdende stralen *k* en *k'* en projecteeren we u_∞ uit het snijpunt $S_{kk'}$ door een waaier, en (D) door een kegel van de 2e orde,

dan zijn waaier en kegel projectief (door tusschenkomst van de projectiviteit op (V)). Verder hebben zij de twee stralen k en k' gemeen. Hun voortbrengsel is dus een vlakkenbundel welks as d door $S_{kk'}$ gaat. Deze as d bevat nu klaarblijkelijk alle snijpunten $S_{kk'}$.

In de afbeelding krijgen we nu het volgende:

De verbindingslijnen der homologe punten van (V) en (D) snijden elkaar op een as d', welke de projectie is van een rechte d, bepaald door D_d en V_d. Deze dubbele richtlijn snijdt alle lijnen (D_k, V_k) van het beschouwde stelsel en tevens de kegelsnede (D). Immers: zij l de straal van het stelsel, welke in het tafereel ligt (afgebeeld in D_l, V_∞), dan behoort hierbij een straal l' afgebeeld in ($D_{l'}$, $V_{l'}$). Hun snijpunt $S_{ll'}$ ligt in het tafereel en valt samen met $D_{l'}$ Door dit punt gaat de lijn d, dus D_d ligt op (D).

Het beschouwde stelsel (D, V) is dus de afbeelding van een stelsel rechten, die rusten op de kruisende lijnen u_∞ en d en op de kegelsnede (D).

Het is dus de afbeelding van een kubische regelschaar waarvan de enkelvoudige richtlijn naar het oneindige verhuisd is (conoïde met richtlijn d).

Tevens merken we op dat het tafereel raakvlak is.

3. *Opmerkingen.*

a) Een kubisch regelvlak is te beschouwen als een bikwadratisch regelvlak, waarvan een waaier afgesplitst is (nl. de waaier D_d (u_∞)).

Ontaardt nu de kegelsnede (D) in een lijnenpaar, dan wordt nog een waaier afgesplitst, namelijk de parallelwaaier, welke op d wordt ingesneden. In dit geval krijgen we dan het beeld van een paraboloidische regelschaar.

b) Het afsplitsen van een parallelwaaier geschiedt ook als (V) loopt in een asymptotische richting van de, nu niet ontaarde, kegelsnede (D).

In dit geval krijgen we, zooals we reeds op blz. 14 zagen de afbeelding van een paraboloidische regelschaar.

c) Een meer algemeene afbeelding van het kubisch regelvlak krijgen we door af te beelden het lijnenstelsel rustend, behalve op een in het tafereel gelegen kegelsnede, op twee kruisende lijnen *u* en *d*, welke laatste op de kegelsnede rust. De doorsnede van het regelvlak met het tafereel is van den 3en graad, ze bestaat n.l. uit de zooeven genoemde kegelsnede en de in het tafereel gelegen beschrijvende lijn D_d D_u. De meetkundige plaats (V) d.w.z. de doorsnede van een richtkegel met het tafereel levert een kubische kromme met dubbelpunt in V_d.

d. De lijnen afgebeeld in (D_a, V_a) en (D_b, V_b) zijn torsale rechten van het kubisch regelvlak. Immers: twee toegevoegde beschrijvenden vallen hier samen.

e. Tusschen (V) en *d* bestaat een verwantschap (1, 2). Evenzoo tusschen (D) en *d*.

f. Hebben (V) en (D) één dubbelpunt, dan ligt dit op *d'*. Immers het vlak bepaald door *d* en den door het dubbelpunt bepaalden straal gaat door C.

Hebben (V) en (D) twee dubbelpunten dan gaat *d* door het projectiecentrum.

4. *Twee projectieve puntenreeken; (D) van de 1e orde, (V) van de 2e orde.*

Ook deze vormen de afbeelding van een kubische regelschaar. De meetkundige plaats (D) is hier enkelvoudige richtlijn.

De dubbele richtlijn *d* heeft haar vluchtpunt V_d op de meetkundige plaats (V) immers: de beschrijvende lijnen der regelschaar kunnen gerangschikt worden in paren *m* en *m'*, zoodat deze elkaar op *d* snijden. Hiervoor is noodig, dat V_m $V_{m'}$ // (D).

Hiertoe behoort het paar (D_k^{∞}, V_k), ($D_{k'}$, $V_{k'}$).

De eerste van deze twee ligt in het oneindige. Hun snijpunt is dus het oneigenlijke punt van ($D_{k'}$, $V_{k'}$). Hierdoor gaat *d*, dus *k'* en *d* loopen evenwijdig: ze hebben hetzelfde vluchtpunt.

De lijnen rusten nog op ∞^2 kegelsneden k^2 welke *d* snijden. Een kegelsnede k^2 is voor den dag te brengen door de beschrijvende lijnen te snijden met een vlak, gelegd door een hunner.

5. *Opmerking.*

Ontaardt de kegelsnede k^2 in een lijnenpaar *m*, *n* (zoodat bijvoorbeeld *d* op m rust) dan wordt de waaier, gelegen in het vlad (*m d*) afgesplitst. De afbeelding vertoont dan een paraboloidische regelschaar.

Loopt (D) in een asymptotische richting van (V) dan hebben we de afbeelding van een hyperboloidische regelschaar.

HOOFDSTUK V.

Twee puntenreeksen (D) en (V) van de 2e orde.

1. Zooals bekend is hebben twee projectieve puntenreeksen van de 2e orde hoogstens drie dubbelpunten.

Bezien we dit geval, dan wordt de projectiviteit tusschen de puntenreeksen (D) en (V) teweeg gebracht door een waaier met het vierde snijpunt S der kegelsneden als centrum. Beide puntenreeksen zijn dus met dezen waaier in perspectieve ligging.

Het punt S kunnen we beschouwen als beeld (D_d, V_d) van een rechte *d* door het projectiecentrum C gaande. Klaarblijkelijk snijden nu alle rechten van het lijnenstelsel de lijn *d*.

Uit C vertrekken drie lijnen van het stelsel, afgebeeld in de dubbelpunten der projectieve puntenreeksen.

Beschouwen we nu een punt P op de lijn *d* en zien we hoeveel stralen door dit punt gaan. Het doorgangspunt D_t van een straal door P ligt op (D). Deze straal ligt dus op een kegel met P als top en (D) als richtlijn.

Het vluchtpunt V_t ligt op de kegelsnede (V). De straal C V_t loopt evenwijdig aan P D_t dus ligt deze straal op een kegel met C als top, gelijkvormig met den kegel P (D). Deze snijdt het tafereel in een kegelsnede, welke gelijkvormig is met (D), met S als gelijkvormigheidspunt.

Deze kegelsnede heeft dus met (V) behalve het punt S nog drie punten gemeen. Er zijn dus door een willekeurig punt P van *d* drie stralen van het lijnenstelsel te trekken. De lijn, afgebeeld in D_d V_d is dus een drievoudige richtlijn.

Trekken we door P een willekeurige rechte l en leggen we een vlak door d en l, dan ligt in dit vlak één rechte der regelschaar. Op l steunen dus vier lijnen van het stelsel: de regelschaar is er een van de 4e orde met een drievoudige richtlijn.

De doorsnede van het regelvlak met het tafereel moet van den 4en graad zijn. In het tafereel liggen dus twee stralen van de regelschaar, welke reëel zijn als (V) reëele asymptotische richtingen heeft.

2. *Opmerkingen.*

a. Denken we ons twee vlakke doorsneden, elk gebracht door een punt van de drievoudige richtlijn en twee der in zoo'n punt samenkomende beschrijvende lijnen, dan zal in zoo'n vlak de restdoorsnede bestaan uit een kegelsnede rustend op d. Het bikwadratische regelvlak met drievoudige richtlijn is dus te beschouwen als het samenstel der rechten, rustend op twee kegelsneden en een hen snijdende rechte.

3. *b*. Het regelvlak is in het bezit van vier torsale rechten, Immers, de doorsneden met het tafereel van de kegels met C als top welker beschrijvende lijnen evenwijdig loopen aan de overeenkomstige beschrijvenden der kegels P (D) waarvan de top P zich over d verplaatst, vormen een stelsel gelijkvormige kegelsneden met S als gelijkvormigheidspunt. In dit stelsel zijn vier exemplaren welke aan (D) raken. Het gebeurt dus vier maal dat twee beschrijvenden samenvallen tot een torsale rechte (anders: de torsale rechten worden geleverd door de dubbelpunten van een kubische involutie op (D)).

4. c. In een bijzonder geval kan de projectiviteit tusschen (D) en (V) aldus vastgelegd zijn: (D) en (V) raken elkaar in een punt. Behalve dit raakpunt beschouwen we de overige

twee snijpunten van (D) en (V) als dubbelpunten. Een waaier met het raakpunt als centrum zorgt voor vastlegging der projectiviteit.

In het raakpunt wordt nu ook de lijn *d* afgebeeld. Uit een punt P van *d* vertrekken nu twee stralen van het regelvlak. De derde valt samen met *d*. Dit geschiedt voor elk punt van *d*, dus worden er ∞^1 met *d* samenvallende stralen afgesplitst.

In een vlak door *d* ligt één straal.

We krijgen hier dus de afbeelding van een kubisch regelvlak met dubbelrechte *d*. De twee torsale rechten komen op dezelfde manier als bij het bikwadratisch regelvlak te voorschijn.

Uit een bepaald punt P vertrekken twee stralen naar D_a en D_b. Op (D) krijgen we dus een punteninvolutie, evenzoo op (V). $D_a D_b$ gaat dus door een vast punt D^*, zoo ook $V_a V_b$ door een punt V^*.

De enkelvoudige richtlijn (D^*, V^*) is dus de as van den vlakkenbundel welks exemplaren twee elkaar op *d* snijdende beschrijvenden van het regelvlak bevatten.

5. Hebben de projectieve puntenreeksen (D) en (V) twee dubbelpunten, dan kunnen we ons voorstellen dat een der drie dubbelpunten van het vorige geval is samengevallen met een ander dubbelpunt. (D) en (V) raken elkaar dan in een der dubbelpunten. De projectiviteit wordt nu vastgelegd door een waaier met het derde gemeenschappelijke punt S der kegelsneden als centrum. De paren (D. V) zijn ook nu de afbeelding van een bikwadratische regelschaar met *d* ($(D_d V_d) \equiv S$) als drievoudige richtlijn.

Door C gaan drie stralen, waarvan er twee samengevallen zijn.

6. *Opmerking*.

Het geval van twee dubbelpunten kan ook te voorschijn komen als de kegelsneden (D) en (V) elkaar in twee punten aanraken.

Een dezer raakpunten kiezen we als centrum van den waaier, die de projectiviteit tot stand brengt. Ook hier krijgen we de afbeelding van een kubisch regelvlak,

7. Is er één dubbelpunt aanwezig, dan kan dit zóó opgevat worden, dat de kegelsneden (D) en (V) behalve het punt S (centrum der met beide kegelsneden perspectieve waaier) nog één punt gemeen hebben: het dubbelpunt.

Ook hier hebben we in de afbeelding een bikwadratisch regelvlak te zien met drievoudige richtlijn afgebeeld in $D_{d}, V_{d}) \equiv S$.

Door C gaat één reeele straal, de twee andere zijn imaginair.

8. *Opmerking.*

a. Het geval van één dubbelpunt kan echter ook zoo zijn dat de kegelsneden (D) en (V) elkaar in een punt S raken en verder geen reeele snijpunten hebben. De coincidentie (D, V) valt dan samen met S. Door een willekeurig punt P van *d* gaan weer twee stralen, welke voor C met *d* samenvallen. We hebben hier weer de afbeelding van een kubisch regelvlak.

We zien dus dat, wanneer een dubbelpunt (D, V) met S in een raakpunt van (D) en (V) samenvalt een regelschaar van de derde orde te voorschijn komt.

b. Het kan voorkomen dat een (hoogstens twee) der dubbelpunten naar het oneindige verhuizen. Dit geeft aanleiding tot het afsplitsen van een waaier, gelegen in het raakvlak van dit dubbelpunt (beschouwd als snijpunt van twee kegelsneden, waarvan er één in het vlak Φ_{∞} ligt). Het is in verband met het voorgaande duidelijk dat de afbeelding dan te zien geeft een kwadratische regelschaar of een kwadratische kegel.

9. Beschouwen we tenslotte het geval dat de projectieve puntenreeksen (D) en (V) geen dubbelpunten hebben.

Ook hier wordt door de afbeelding een bikwadratische regelschaar vertegenwoordigd.

Immers: (V) is te beschouwen als de projectie uit C van een kegelsnede $(V^2)_\infty$ gelegen in het vlak Φ_∞.

De projectiviteit tusschen (D) en (V) bepaalt dus tevens een projectief verband tusschen (D) en $(V^2)_\infty$.

De lijnen van het beschouwde stelsel zijn dus de verbindingslijnen van homologe punten van twee projectieve kegelsneden, in verschillende vlakken gelegen.

De vlakkenbundel om een as *a* wordt door deze projectiviteit in een verwantschap (2, 2) gebracht, welker coincidenties vier rechten (D, V) leveren die op *a* rusten, waarmee aangetoond is dat de regelschaar van de 4e orde is.

In het tafereel heeft de regelschaar in het algemeen twee beschrijvenden, welke bepaald worden door (D_m, V_m^∞), en (D_n, V_n^∞).

Hun snijpunt S is een punt van de dubbelkromme van het vierdegraads regelvlak (drager van de regelschaar). Noemen we de tweede snijpunten van $S' D_m$ en $S' D_n$ met (D) resp. $D_{m'}$ en $D_{n'}$ dan blijkt dat deze punten ook op de dubbelkromme liggen. De dubbelkromme is dus een kubische ruimtekromme.

Collocale puntenreeksen (D) en (V) van de tweede orde.

10. *Identieke collocale puntenreeksen (D) en (V)* zijn het beeld van een kwadratische kegel met het projectiecentrum als top.

11. *Involutorische collocale puntenreeksen (D) en (V).*

Beschouwen we het geval van een hyperbolische involutie (D, V). We weten dat de homologe punten verbonden worden door een waaier. Zij het centrum van die waaier het punt S dan is dit punt te beschouwen als het beeld van een lijn *d* door het projectiecentrum C gaande ($S \equiv D_d, V_d$).

Klaarblijkelijk snijden nu alle lijnen van het beschouwde stelsel de rechte *d*. In elk vlak door *d* liggen twee stralen t_1 en t_2 die elkaar zullen snijden in een punt P, zoodanig gelegen dat zijn projectie P' in het midden van D_t, V_t, ligt; immers:

$$CV_{t_1} \; // \; t_1 \text{ en } CV_{t_2} \; // \; t_2 \text{ en } V_{t_2} \equiv D_{t_1}$$

De meetkundige plaats van P' is dus een kegelsnede gaande door het punt (D_d, V_d) en door de raakpunten der raaklijnen uit D_d aan (D, V) getrokken.

Daar CP = 2 CP' zal de meetkundige plaats van P uit die van P' ontstaan door vermenigvuldiging met 2, is dus een kegelsnede in een vlak evenwijdig aan het tafereel. Deze kegelsnede k^2, welke *d* snijdt is een dubbele richtkromme.

Het beschouwde lijnenstelsel bestaat dus uit de rechten, rustend op twee kegelsneden in verschillende vlakken gelegen, die dezelfde asymptotische richtingen hebben, en bovendien rustend op een rechte *d*, die k^2 snijdt.

12. Beschouwen we het aldus gevormde regelvlak nader.

Het doorgangspunt D_d ligt op de meetkundige plaats van P', dus de lijn *d* rust op de kegelsnede k^2.

Het regelvlak zou zijn van den graad 2.2.2. = 8.

De kegel welks top het snijpunt van *d* en k^2 en welks richtkromme (D, V) is, wordt nu afgesplitst, evenals de vlakken door *d* en de oneindig verre punten der twee kegelsneden.

Onze afbeelding stelt dus voor een regelvlak van den 4en graad.

We merkten reeds op dat k^2 een dubbele richtlijn is.

Noemen we het snijpunt van een beschrijvende lijn *t* met de richtlijn *d* : T, dan is *t* een beschrijvende lijn van de beide kegels die k^2 en (D, V) uit T projecteeren. Deze kegels hebben hier 2 stralen gemeen, dus uit een willekeurig punt van *d* vertrekken 2 lijnen *t*. De lijn *d* is dus op het regelvlak een dubbele richtlijn.

13. *Projectieve collocale puntenreeksen* (D) *en* (V).

Door gebruik te maken van de methode toegepast in Hoofdstuk V9 toont men aan dat we hier te doen hebben met een regelschaar van de 4e orde gelegen op een bikwadratisch regelvlak met dubbelkromme ϱ^3.

HOOFDSTUK VI.

De bilineaire congruentie.

1. Beschouwen we het geval van de hyperbolische bilineaire congruentie.

Deze is te definieeren als het samenstel der ∞^2 rechten, rustend op twee elkaar kruisende richtlijnen u en v. De punten en vlakken, welke met de richtlijnen incident zijn, zijn singulier.

Het nulpunt van een vlak door de eene richtlijn gaande, ligt op de andere richtlijn.

Het nulvlak van een punt der eene richtlijn gaat door de andere.

2. We kiezen het projectiecentrum C op de richtlijn u. In het tafereel τ krijgen we nu te beschouwen twee collocale puntenvelden [D] en [V], welke het beeld der congruentie vertegenwoordigen. Beschouwen we het puntenpaar (D_k, V_k) welke het beeld is van een willekeurige, niet door C gaande, congruentiestraal, dan blijkt dat zijn bestanddeelen collineair liggen met het beeld der richtlijn u.

3. Zien we nu naar de puntenreeks (V) behoorende bij een puntenreeks van de 1e orde (D).

We vinden een punt V_k, behoorend bij D_k door $V_v V_k$ evenwijdig aan $D_v D_k$ te trekken en met $D_u D_k$ te snijden.

De m.pl. der punten V_k blijkt nu een hyperbool te zijn; immers, het punt V_k verhuist twee keer naar het oneindige.

De asymptotische richtingen zijn reëel en worden bepaald door (D) en door de lijn $D_u D_v$.

We hebben dus:

De bij een puntenreeks van de 1e orde (D) behoorende puntenreeks (V) is een hyperbool, gaande door V_v, V_u en V_p^∞ (de hoofdpunten van de kwadratische transformatie). Bepalen we omgekeerd de m. pl. (D) behoorend bij een puntenreeks van de 1e orde (V) dan blijkt (D) een hyperbool te zijn, gaande door de hoofdpunten D_u, D_v en D_q^∞.

4. *De afbeelding der bilineaire congruentie wordt dus geleverd door een kwadratische transformatie in collocale puntenvelden* [D, V].

5. Bezien we de hoofdpunten nader:

Met het hoofdpunt V_u komt overeen een rechte $(D')_u$ gaande door D_v en D_q^∞.

We hebben hier te maken met een parallelwaaier welker stralen evenwijdig aan de richlijn *u* loopen, dus met de stralen der congruentie gelegen in het nulvlak van het punt P_∞ van de richtlijn *u*.

Met het hoofdpunt V_v komt overeen een rechte $(D')_v$ gaande door D_u en D_q^∞.

We zien hier voor ons het beeld van een parallelwaaier, welker stralen evenwijdig aan *v* loopen, dus met de congruentiestralen gelegen in het nulvlak van het punt Q_∞ van *v*.

Met het hoofdpunt V_p^∞ komt overeen een rechte $D_u\ D_v \equiv (D')_p$.

Hierin hebben we het beeld te zien van de in het tafereel gelegen congruentiestraal.

6. Met het hoofdpunt D_u komt overeen de rechte $(D)_u$ door V_v en V_p^∞ gaande.

We hebben hier het beeld van de singuliere waaier van het doorgangspunt van *u*.

Met het hoofdpunt D_v komt overeen de rechte $(D)_v \equiv V_u V_p^{\infty}$: beeld van de singuliere waaier van het doorgangspunt van v.

Met het hoofdpunt D_q^{∞} komt overeen de lijn $V_u V_v \equiv (D)_q$. Hierin zien we het beeld van de in het vlak Φ_{∞} gelegen congruentiestraal.

7. We zagen dat met een willekeurige rechte (D) een hyperbool (V^2) overeenkomt, gaande door de hoofdpunten V_u, V_v en V_p^{∞}.

Het samenstel dezer twee puntenreeksen (D) en (V^2) levert het beeld van een kwadratische regelschaar welke in de congruentie opgesloten is.

Evenzoo levert een willekeurige rechte (V) een puntenreeks (D^2) met welke zij het beeld vormt van een paraboloidische regelschaar.

8. Gaat (D) door een hoofdpunt, dan is aan (D) gekoppeld een rechte (V) gaande door het overeenkomstige hoofdpunt.

Gaat (D) door D_v dan is aan (D) toegevoegd een lijn (V) door V_v evenwijdig aan (D) getrokken.

De puntenparen (D,V) op (D) en (V) gelegen zijn perspectief; ze zijn het beeld van een singuliere waaier in een vlak door v gaande.

Gaat (D) door D_q^{∞} dan loopt de er aan toegevoegde lijn (V) door het snijpunt van (D) en v' naar V_p^{∞}. We krijgen het beeld van een paraboloidische regelschaar welke tot de congruentie behoort.

Gaat (D) door D_u dan krijgen we twee collocale gelijkvormige puntenreeksen (D,V) met twee dubbelpunten: één in het oneindige en één in het snijpunt van v' en (D,V).

De puntenreeksen zijn het beeld van een waaier gelegen in een vlak door u gaande.

9. Gaat (V) door V_v dan is hieraan een lijn (D) toegevoegd door D_v // (V).

We hebben hier het beeld van een singuliere waaier in een vlak door v.

Gaat (V) door V_p^∞ dan krijgen we als m. pl (D) een rechte door het snijpunt van (V) met v' naar D_q^∞ getrokken.

Ook hier hebben we het beeld van een tot de congruentie behoorende paraboloidische regelschaar. Gaat (V) door V_u dan krijgen we twee collocale gelijkvormige puntenreeksen (D,V) welke het beeld zijn van een waaier in een vlak door u gelegen.

10. Om niet te veel in bijzonderheden af te dalen beschouwen we nog de volgende gevallen:

a. Gaat een kegelsnede (D^2) door de hoofdpunten D_u en D_v dan wordt deze door de kwadratische transformatie omgezet in een gelijkstandig gelijkvormige kegelsnede (V^2) gaande door de overeenkomstige hoofdpunten V_u en V_v welke kegelsneden elkaar snijden in een punt (D_k, V_k) van v'.

Het stelsel rechten, door (D^2) en (V^2) afgebeeld is een regelschaar met (D^2), u en v als richtlijnen. De graad is $4 - 2 = 2$.

Opmerking.

Het stelsel kegelsneden (D^2) is drievoudig oneindig: de congruentie bevat ∞^3 kwadratische regelscharen welke elkaar in u en v snijden.

11. *b*, Gaat een kegelsnede (V^2) door het hoofdpunt V_v, dan behoort hierbij een kubische kromme (D^3) met dubbelpunt in D_v.

We zien hier te voorschijn komen de afbeelding van een kubisch regelvlak met (D^3) en u als enkelvoudige- en v als dubbele richtlijn.

12. c. Een kegelsnede (V^2), niet door een hoofdpunt gaande,

wordt omgezet in een bikwadratische kromme (D^4) met dubbelpunten in de hoofdpunten.

We krijgen hier de afbeelding van een bikwadratisch regelvlak.

13. *Opmerkingen.*

A. De stralen van de bilineaire congruentie die een kegelsnede snijden vormen een bikwadratisch regelvlak.

Immers, beschouwen we het vlak der kegelsnede als tafereel en de kegelsnede zelf als meetkundige plaats (D^2) dan volgt deze eigenschap direct uit het voorgaande.

B. Kiezen we C willekeurig, dan wordt de bilineaire congruentie ook afgebeeld door een kwadratische verwantschap tusschen collocale puntenvelden [D] en [V].

De hoofdpunten zijn hier wederom

$$D_u\,,\ D_v \text{ en } D_q^\infty \text{ (op } V_u\,V_v)$$
$$V_u\,,\ V_v \text{ en } V_p^\infty \text{ (op } D_u\,D_v)$$

In plaats van de m.pl. van coincidenties (D, V) krijgen we hier maar één coincidentie voor de straal door C gaande.

STELLINGEN

1. De resultaten van het laatste hoofdstuk kunnen worden uitgebreid voor de congruentie (m, n).

2. De opmerking, dat het platte vlak zich bij de inversie gedraagt alsof het slechts één oneindig ver punt had, is niet toelaatbaar.
H. WEBER und J. WELLSTEIN, Encyklopädie der Elementar mathematik II, 2e aufl. 1907, pg. 39 Satz 3.

3. De vraag naar de machtlijn van twee in rechten ontaarde cirkels wordt in de literatuur niet, of onvoldoende behandeld.

4. Een rechte, opgevat als bestanddeel van een ontaarden cirkel, heeft in het algemeen slechts één middelpunt.

5. Bij de invoering van het begrip „hoek" is het aan te bevelen uit te gaan van het begrip „waaier".

6. De opmerking van FORSYTH dat de singuliere integralen van de vergelijking $F(z, p, q) = 0$ op de gebruikelijke manier gevonden kunnen worden, kan achterwege blijven.
A. R. FORSYTH. A treatise on Differential Equations 4^{th} ed. pg. 411.

7. De wijze waarop het getalbegrip ingevoerd en uitgebreid wordt in het „Leerboek der elementaire

theoretische Rekenkunde" van Dr. F. SCHUH is voor het gestelde doel niet aan te bevelen.

8. De meeste onderzoekingen over de intensiteit van emissielijnen zijn van geen waarde.

9. Het is te betreuren dat de hoogere meetkunde-studie voor den aanstaanden physicus niet meer verplicht is.