Ludolf van Keulen's mathematische voorstellen, bekend onder den tytel van Kunstige vraagen zonder ontbindingen, opgelost en verrykt met aanmerkingen en uitbreidingen

L. VAN KEULEN'S

WISKUNDIGE

VOORSTELLEN

OPGELOST.

8cc

LUDOLF VAN KEULEN'S MATHEMATISCHE VOORSTELLEN,

BEKEND ONDER DEN TYTEL VAN

KUNSTIGE VRAAGEN

ZONDER

ONTBINDINGEN,

OPGELOST

EN VERRYKT MET

AANMERKINGEN EN UITBREIDINGEN,

DOOR

LAURENS PRAALDER,

LEERAAR IN DE WISKUNDE TE UTRECHT.

MET PLAATEN.

Te *AMSTERDAM*, by

J. W. SMIT,

MDCCXC.

PLAAT I.

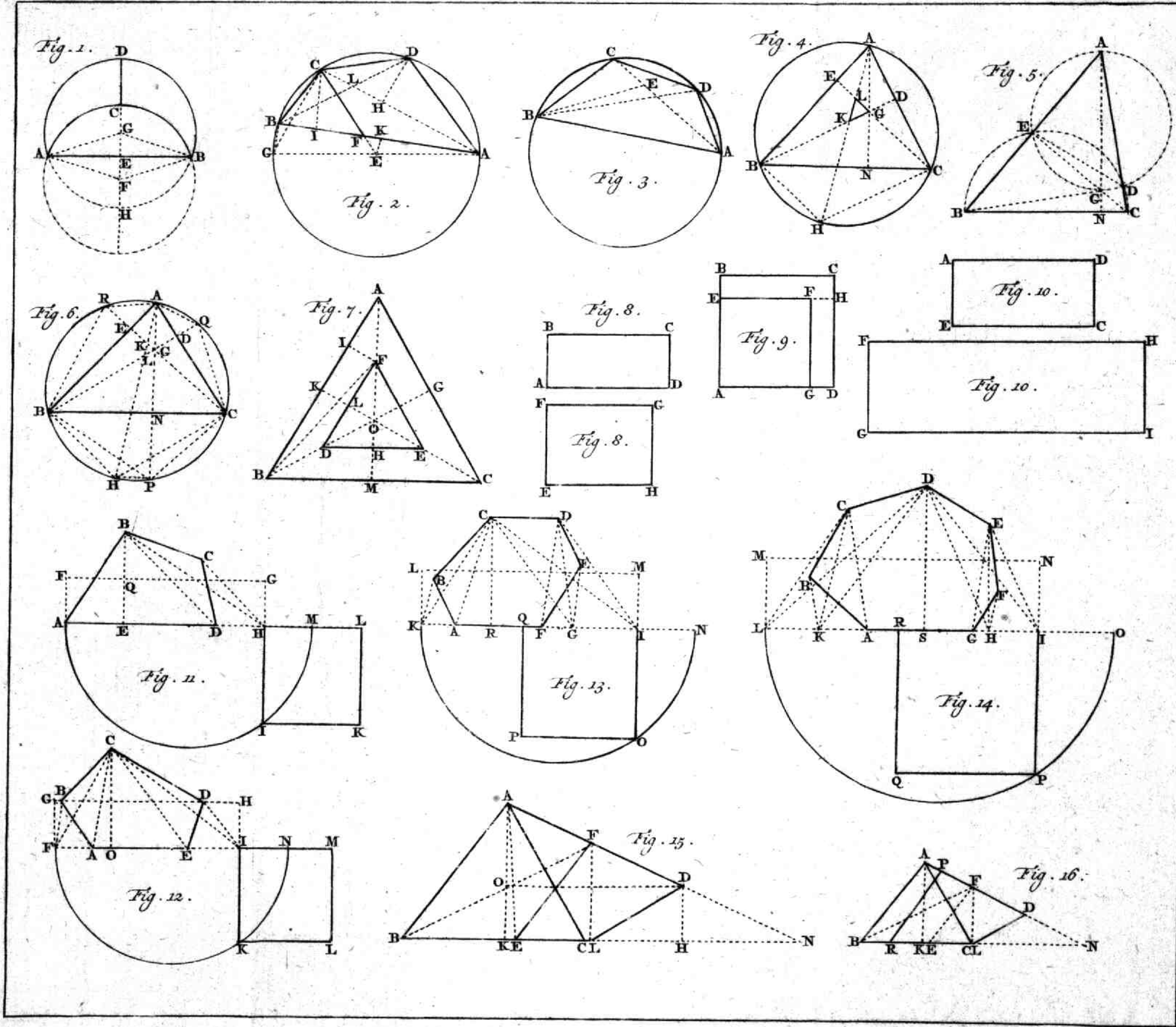
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

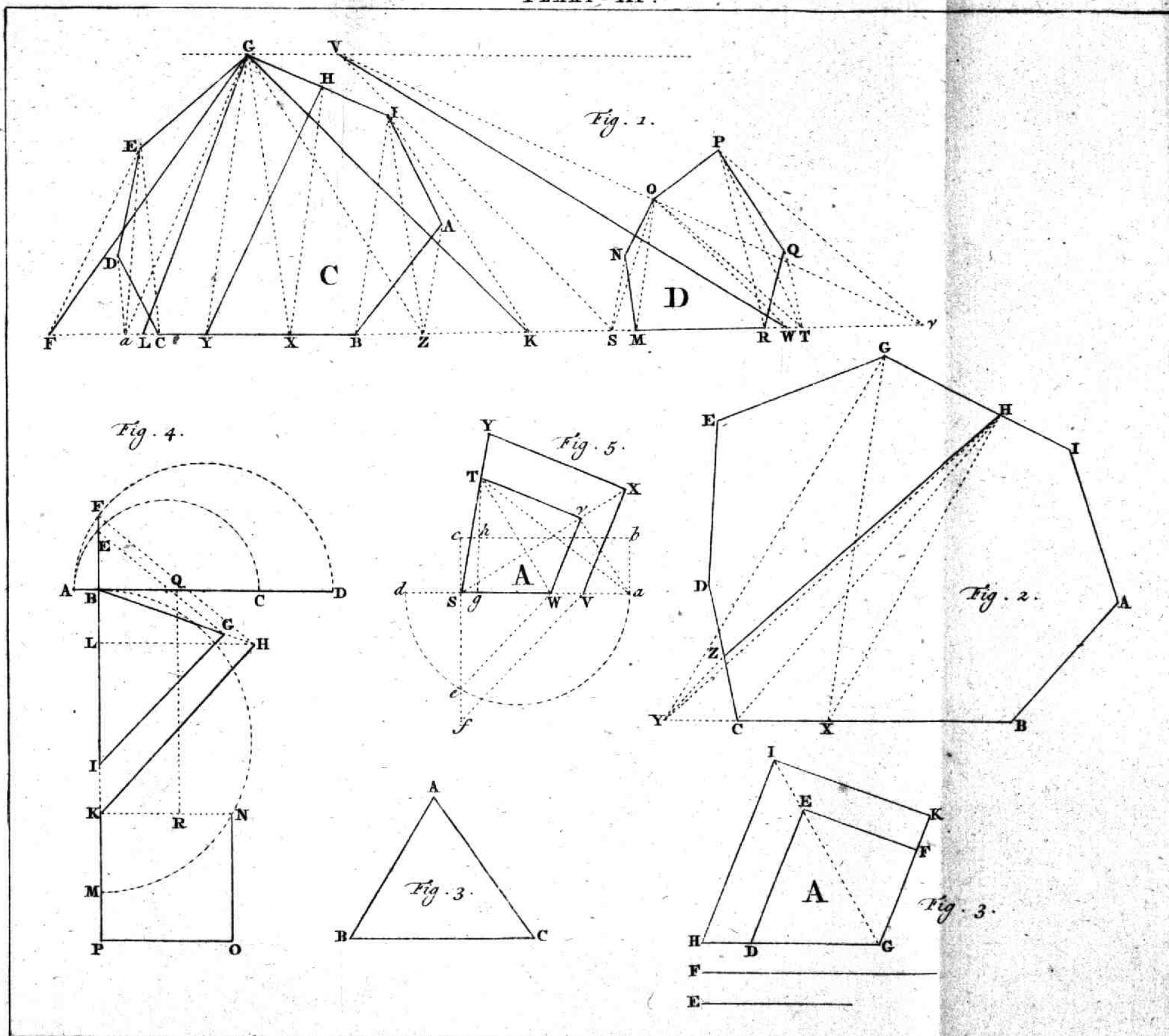
Fig. 1.
C
D
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
A
Fig. 3.
A

OPLOSSINGEN
DER
HONDERD KONSTIGE VRAAGEN
VAN
LUDOLF VAN KEULEN.

I. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 1.

IN deeze Maan, geteekend met ADBC, is de Boog ACB=4228, en de Pees AB=3624, ook is de Maan in haare breedste middel-breedte 906 Roeden. Vraage, hoe lang is de buitenste Boog ADB, en hoe groot is de Maan?

OPLOSSING.

1. Aangezien de lengte van den Boog ACB=4228, en de Pees AB=3624 gegeeven is, zo is derhalven

De Boog AC=2114, en AE=1812

302

Dat is in reden als 7 tegen 6.

Dewyl nu F het *Centrum* van den Boog ACB is, zyn AF, FC, FB alle straalen van deezen Cirkel, en dus is de Boog AC gelyk den hoek AFC, als mede de lyn AE deszelfs *Sinus*. Derhalven moeten wy een Boog AC vinden, zodanig; dat deszelfs lengte in reden is tot deszelfs *Sinus*, als 7 tot 6.

2. Om dit op de bekwaamste wyze te doen, zullen wy de lengte van de straal AF, gelyk die der *Sinus*-Tafel, op 100000000 stellen, en derhalven ook de lengte van deezen Boog AC in zodanige gelyke deelen moeten neemen, om daar mede de lengte van den geheelen Cirkel, en gevolgelyk ook de lengte van den Boog AC, tegen deszelven *Sinus* te vergelyken. Indien wy dan de straal zodanig neemen, zo is de geheele middel-lyn 200000000. Derhalven:

Diam.	Omtr.	Diam.
100000000	314159265	200000000

628318530 voor den geheelen Omtrek.

3. Om nu te bepaalen, hoe veel Graaden de Boog AC moet bevatten, op dat deszelfs lengte tot zynen *Sinus* in reden zy, als 7 tot 6; zo is het klaar, dat, indien de lengte van den Boog AC door 7, en die van den *Sinus* AE door 6 gedeeld wordt, de *Quotienten* gelyk zullen zyn.

(A) *Ten eerſten*, ſtellende den Boog AC = 60 Graaden, zo is:

360° : 628318530 : : 60° : 104719755 den Boog AC.

7 ———

De *ſinus* van 60° is 8660254   14959965

6 ———   14433757

———

+ 526208

Ten tweeden. Stellende den Boog AC = 50 Grad., zo is:

360° : 628318530 : : 50° : 87266462 den Boog AC

7 ———

12466640

De *ſinus* van 50° is 7660445

6 ———   12767408

———

− 300744

Derh. 60° . . . + 526208 | 826952

50° . . . − 300744 |

———

26310400

18044640

———

44355040

826952 ———

54 Graaden.

(B) *Ten eerſten*; ſtellende den Boog AC = 54 Graaden, zo is:

360° : 628318530 : : 54° : 9424778 de lengte van (den Boog.

7 ———

1346395

De *Sinus* van 54° is 8090170

6 ———   1348362

———

− 1977

Ten

Ten tweeden. Stellende den Boog A C = 55 Grad., zo is:
360° : 628318530 : : 55° : 95993II de lengte van den
7 — ——— (Boog
1371330

De *finus* van 55° is 8191520
6 ——— ——
1365253
——— ———
+ 6077

Derhalven 54° . . . — 1977 || 8054
55° . . . + 6077 ||
——— ——— ———
108735
328158
——— ———
436893
8054 ——— ———
54° 14′

(C) *Ten eerften.* Stellende den Boog A C = 54° 14′, zo is:
360° : 628318530 : : 54° 14′ : 9465502
7 ——— ——
1352216

De *finus* van 54° 14′ is 8114040
6 ——— ——
1352340
——— ———
— 124

Ten tweeden. Stellende den Boog A C = 54° 15′, zo is:
360° : 628318530 : : 54° 15′ : 9468411
7 ——— ——
1352630

De *finus* van 54° 15′ is 8115740
6 ——— ——
1352623
——— ———
+ 7

Derh. 54° 14′ of 3254 Min. . . — 124 || 131
54° 15′ of 3255 Min. . . . + 7 ||
——— ——— ——— ———

403620
22778
———
426398

131 ——— $3254'56\frac{8}{9}''$, dus de Boog AC $= 54°14'56\frac{8}{9}''$.

4. Hier door hebben wy dan den Boog AC, en gevolgelyk den hoek AFC, gevonden, naamelyk $54°14'56\frac{8}{9}''$, zodanig, dat de lengte van den Boog AC, in reden is tot deszelven *Sinus* (AE), als 7 tot 6. Nu is noodig, dat wy alvoorens deezen *Sinus*, en dien van zyn *Complement* ($35°45'3\frac{1}{9}''$) voor den hoek EAF vinden, om daar door de lengte EF en FC te bepaalen.

Ten eerſten. *Sinus* $54°14' = 8114040$
$54°15' = 8115740$
———
$60''$ — 1700 — $56\frac{8}{9}''$
———
1612
8114040
———
8115652 *ſin.* ∠EFA

Ten tweeden. *Sinus* $35°45' = 5842497$
$35°46' = 5844858$
———
$60''$ — 2361 — $3\frac{1}{9}$
———
$122\frac{1}{2}$
5842497
———
$5842619\frac{1}{2}$ *ſin.* ∠EAF

5. Zeg dan *Sin.* E : AF :: *Sin.* A : EF
10000000 — 10000000 — $5842619\frac{1}{2}$
———
$5842619\frac{1}{2}$ EF
10000000 FC
———
$4157380\frac{1}{2}$ EC.

6. Wy kunnen dan nu de waare lengten van EF en EC
in

in Roeden bereekenen, en by gevolg ook van FC, den ſtraal des Cirkels, want, de *Sinuſſen* der hoeken EFA, AEF, en EAF zyn bekend, als mede de waare lengte van AE, die gegeeven is; derhalven

AE (*ſin.* EFA) : AE :: *ſin.* EF : EF
811565 2 — 1812 — 5842619 ,, 1304.494886 EF
:: EC : EC
4157380½ ,, 928.227758 EC

2232.722644 FC

Wederom 928.227758 EC
906 DC

1834.227758 DE

7. Dewyl nu DBH een halven Cirkel is, heeft men

$\square$ DE.EH $=\overline{EB}^2$ (*Meetk.* III. 11.)

By gevolg DE : EB :: EB : EH (*Meetk.* IV. 9.).
1834.227758 — 1812 — 1812 ,, 1790.041605 EH
1834.227758 DE

De *Diam.* van den buitenſten Boog 3624.269363 DH
2

1812.1346815 DG
1834.227758 DE

22.0930765 GE

8. Nu kunnen wy wederom deeze GE in deelen bereekenen, waar door wy den hoek GAE bekomen, om dat AG de ſtraal is.

Diam. — *Diam.* = GE — GE
3624.269363 — 20000000 — 22.0930765

komt 121917⅔ *ſinus* van den hoek GAE.

Om deezen *Sinus* in Graaden te bepaalen, zo valt die tuſſchen 0°41′ en 0°42′.

0° 41′ „ 119262 — 119262
0° 42′ „ 122171 — $121917\frac{2}{7}$

2909 — 60″ — $2655\frac{2}{7}$

komt na genoeg $54\frac{5}{6}$″
0° 41′ 00″

0° 41′ $54\frac{5}{6}$″ ∠ GAE
90°

90° 41′ $54\frac{5}{6}$″ ∠ DGA

9. Hier door wordt nu vervolgens de lengte van den buitensten Boog ADB bepaald, door eerst den geheelen Inhoud te vinden, op deeze wyze

1000000000 — 3141592653 — 3624.269363 *Diam.* DH.

11385.978003293790039 Omtrek.

90° 41′ $54\frac{5}{6}$″
Zeg dan — 2
360° — 11385.978003293790039 — 181° 23′ $49\frac{2}{3}$″

komt 5737.1770217322 de Boog ADB
2

2863.5885108661 de halve Boog ADB
1812.1346815 de halve *Diameter* DH
verm.

5198268.7274929 Inhoud ADBGA

10. Wederom de
Boog BC = 2114 dat is, ½ Boog BCA
2232.722644 halve *Diam.* AF
verm.

4719975.669416 Inh. ACBFA.

11. Nu moet nog alleen gevonden worden, de grootheid van het binnenste stuk AGBFA. Aldus:

GE =

GE = 22.0930765
EF = 1304.494886
——————————— verg.
GF = 1326.5879625
Perp. BE = 1812
——————————— verm.
komt 2403777.3880500 AGBFA
4719975.669416 ACBFA *Art.* 10.
———————————
2316198.281366 AGBCA
5198268.7274929 ADBGA *Art.* 9.
———————————
2882070.4461269 ACBDA

Voor den Inhoud van het Maan-ſtuk, en wel zo naauwkeurig, dat zulks geen $\frac{1}{10000800}$ Roede meer of min van de waare Grootheid verſchilt.

II. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 2.

In een halven Cirkel is een ongelykzydige Vierhoek ABCD beſchreeven, waar van alle de zyden gegeeven zyn, als AB = 24, BC = 11, CD = 8, en AD = 14. Indien nu uit het *Centrum* E, tot den hoek C, een regte lyn CE getrokken wordt, welke den Vierhoek in twee deelen brengt, vraagt men, hoe groot elk deel in 't byzonder is?

AANMERKING.

1. Om dit Voorſtel klaar, duidelyk, en uit den grond op te loſſen, zonder eenige Eigenſchappen te onderſtellen, of uit andere Schryvers over te neemen, zullen wy die, welke tot de Oploſſing noodig zyn, voor af bewyzen. Daar toe is ons dienſtig het volgende

LEMMA.

De Regthoek van de beide Diagonaalen *eens Vierhoeks, in een Cirkel beſchreeven, is gelyk aan de Som der beide Regthoeken, onder de overſtaande zyden begreepen.* (*)

Om

(*) Dit *Theorema* is ook te vinden in de *Gronden der Meetkunſt* Boek III. *Theor.* XVII., en aldaar op een andere wyze betoogd.

Om dit te bewyzen, zo laat ABCD de voorgeſtelde Vierhoek in den Cirkel zyn, en AC, BD de *Diagonaalen.* Zie *Plaat* I. *Fig.* 3.

Bereiding en *Bewys.*

Trek BE, zodanig, dat de hoek CBE $=\angle$ABD is; Dan zyn de Driehoeken ABE, CBD gelykvormig.

Want, $\angle$CBE $=\angle$ABD *Bereid.*
$\angle$EBD $=\angle$EBD
verg.
Dus $\angle$CBD $=\angle$ABE *Ax.* 4. *Meetk.*
$\angle$BDC $=\angle$BAE *Meetk.* III. 5.
$\angle$BCD $=\angle$BEA *Ibid.* I. 10.

Derhalven AB:AE::BD:DC *Ibid.* IV. 11.

$\square$AB.DC $=\square$AE.BD *Ibid.* IV. 9.

Wederom zyn de Driehoeken BCE, en DAB gelykvormig, want:

$\angle$CBE $=\angle$ABD *Bereid.*
$\angle$BCE $=\angle$ADB *Meetk.* III. 5.
$\angle$BEC $=\angle$BAD *Ibid.* I. 10.

Derhalven BC:CE::BD:AD *Ibid.* IV. 11.

$\square$AD.BC $=\square$CE.BD *Ibid.* IV. 9.
$\square$AB.DC $=\square$AE.BD *bov. bew.*
verg.
$\square$AD.BC $+\square$AB.DC $=\square$AC.BD *Ax.* 4. *Meetk.*

2. Deeze Eigenſchap, van den Vierhoek in den Cirkel, beweezen zynde, kunnen wy daar door de lengte van deeze *Diagonaalen* bereekenen; en dewyl dezelve, tot de oploſſinge van dit Voorſtel, volſtrekt moeten gevonden worden, zullen wy dit op eenige verſchillende wyzen doen.

EERSTE WYZE.

Plaat I. *Fig.* 2.

Aangezien de Driehoeken ABL, CDL, als mede BCL,

BCL, ADL, twee aan twee, gelykvormig zyn, zo zyn de zyden evenredig.

Hier door kan men de *Proportie* van deeze *Diagonaalen* vinden. Neemende CL = 1.

1. CD : AB :: CL : BL
 8 — 24 — 1 „ BL = 3.
 BC : AD :: CL : DL
 11 — 14 — 1 „ DL = $1\frac{3}{11}$.

 BD = $4\frac{3}{11}$

2. BC : AD :: BL : AL
 11 — 14 — 3 „ AL = $3\frac{9}{11}$
 CL = 1

 AC = $4\frac{9}{11}$

3. Derhalven BD : AC :: $4\frac{3}{11}$: $4\frac{9}{11}$
 11
 Dat is, als 47 tot 53
 Dienvolgens 53 BD = 47 AC.

Vervolgens worden deeze *Diagonaalen* door het voorgaande *Lemma* bepaald.

AB = 24	AD = 14
CD = 8	BC = 11
verm.	verm.
192	154
	192
	verg.

$\square$AB.CD + $\square$AD.BC = 346

1. Nu is 53 BD = 47 AC

 BD = $\frac{47}{53}$ AC
 AC

$\square$AC.BD = $\frac{47}{53}\overline{AC}^2$ = 346 // $\overline{AC}^2 = \frac{346 \times 53}{47}$

$\sqrt{}$

AC = $\sqrt{390\frac{8}{47}}$.

2. We-

2. Wederom $47\,AC = 53\,BD$

$$AC = \tfrac{53}{47}\,BD$$

——————————— BD

$$\square AC.BD = \tfrac{53}{47}\,\overline{BD}^2 = 346$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{346 \times 47}{53}$$

$\surd$ ———————————

$$BD = \surd\, 306\tfrac{44}{53}$$

TWEEDE WYZE.

Door de *Algebra* kan dit mede verricht worden, want

Stellende $\left.\begin{array}{l|l} BC = 11 = a & AL = x \\ CD = \ \,8 = b & CL = y \\ AD = 14 = c & BL = z \\ AB = 24 = d & DL = s \end{array}\right\}$ heeft men

1. Door de gelykvormige Driehoeken BCL, en ADL.

$$BL : CL :: AL : DL$$
$$z : y :: x : s$$

$$xy = zs. \quad \text{Dus } y = \frac{zs}{x} = CL.$$

$$BC : BL :: AD : AL$$
$$a : z :: c : x$$

$$cz = ax. \quad \text{Dus } z = \frac{ax}{c} = BL.$$

2. Door de gelykvormige Driehoeken ABL en CDL heeft men

$$AL : AB :: DL : DC$$
$$x : d :: s : b$$

$$ds = bx. \quad \text{Dus } s = \frac{bx}{d} = DL \; \therefore \; s = \frac{bx}{d} = DL.$$

Dit, voor s, in $y = \frac{zs}{x}$ gesteld, zo is $y = \dfrac{abx}{dc} = CL.$

$$z = \frac{ax}{c} = BL.$$

3. Komt

3. Komt alzo $BD = \frac{adx + bcx}{cd}$

$$AC = \frac{abx + cdx}{cd}$$

Neemende $\frac{ad + bc}{cd} = f$, zo is $BD = fx$.

$$\frac{ab + cd}{cd} = g, \ldots AC = gx.$$

4. Nu is volgens het *Lemma*, *Art* 1.

$$\square BD . AC = \square CD . AB + \square BC . AD$$

Derhalven $fgxx = bd + ac$

$$xx = \frac{bd + ac}{fg}$$

Maar $a = 11$, $b = 8$, $c = 14$, $d = 24$, en $f = \frac{ad + bc}{cd}$

$$g = \frac{ab + cd}{cd}$$

Hier door is $f = \frac{11 \times 24 + 8 \times 14}{14 \times 24} = \frac{264 + 112}{336} = \frac{376}{336} = \frac{47}{42}$.

$$g = \frac{11 \times 8 + 14 \times 24}{14 \times 24} = \frac{88 + 336}{336} = \frac{424}{336} = \frac{53}{42}.$$

By gevolg $xx = \frac{8 \times 24 + 11 \times 14}{\frac{47 \times 53}{42 \times 42}} = \frac{192 + 154}{\frac{47 \times 53}{42 \times 42}} = \frac{346}{\frac{47 \times 53}{42 \times 42}}$,

$$\left(\frac{346 \times \overline{42}^{2}}{47 \times 53} = \frac{346 \times 1764}{2491} \right.$$

$$ffxx = \frac{346 \times \overline{42}^{2} \times 47 \times 47}{47 \times 53 \times 42 \times 42} = \frac{346 \times 47}{53} = \frac{16262}{53} = 306\tfrac{44}{53}$$

$$BD = \sqrt{306\tfrac{44}{53}}$$

gg xx =

$$gg\,xx = \frac{346 \times \overline{42}^2 \times 53 \times 53}{47 \times 53 \times 42 \times 42} = \frac{346 \times 53}{47} = \frac{18338}{47} = 390\tfrac{8}{47}$$

$$AC = \sqrt{390\tfrac{8}{47}}.$$

DERDE WYZE.

1. Indien wy nu deeze genomene waarden in de gevonden Vergelykingen brengen, zullen wy een eigentlyk *Theorema* vinden, waar door de *Diagonaalen* altoos *direct* kunnen bepaald worden, als de vier zyden van een Vierhoek, in den Cirkel, bekend gegeeven zyn. Want

$$xx = \frac{bd+ac}{fg},\ \text{dus}\ ff\,xx = \frac{\overline{bd+ac}.f}{g},$$

$$\left(= \frac{\overline{bd+ac} \times \frac{ad+bc}{cd}}{\frac{ab+cd}{cd}} = \frac{\overline{bd+ac}.\overline{ad+bc}}{ab+cd}.\right.$$

$$xx = \frac{bd+ac}{fg},\ \text{dus}\ gg\,xx = \frac{\overline{bd+ac}.g}{f},$$

$$\left(= \frac{\overline{bd+ac} \times \frac{ab+cd}{cd}}{\frac{ad+bc}{cd}} = \frac{\overline{bd+ac}.\overline{ab+cd}}{ad+bc}.\right.$$

Dat is $ab+cd : ad+bc :: bd+ac : \overline{BD}^2$

$ad+bc : ab+cd :: bd+ac : \overline{AC}^2$

2. Derh. $11 \times 8 + 24 \times 14$,, $24 \times 11 + 8 \times 14$,, $8 \times 24 + 11 \times 14$

of $88 + 336$,, $264 + 112$,, $192 + 154$

424 ,, 376 ,, 346

komt $\overline{BD}^2 = \frac{346 \times 47}{53}$.

En

En $14\times8+24\times11$ „ $14\times24+8\times11$ „ $8\times24+11\times14$
of $112+264$ „ $336+88$ „ $192+154$
376 „ 424 „ 346

komt $\overline{AC}^2 = \frac{346\times53}{47}$.

3. Hebbende dan in dit 2de *Art.* de *Diagonaalen* A C en B D gevonden, kan men nu den Inhoud van ieder Driehoek A B C, A C D, en vervolgens die van den geheelen Vierhoek bekomen, het geen wy op twee byzondere wyzen zullen verrichten.

— Om den Inhoud van ieder Driehoek te vinden, zo trek de *Perpend.* C I, en D H, dan is

In den Driehoek A B C bekend,

$$AC = \sqrt{390\tfrac{8}{47}}\ ,\ AB = 24\ ,\ BC = 11$$

$$\overline{AC}^2 = 390\tfrac{8}{47}\ ,\ \overline{AB}^2 = 576\ ,\ \overline{BC}^2 = 121 \qquad \sqrt{}$$

$$\overline{BC}^2 = 121$$

verg.

$$697$$

$$\overline{AC}^2 = 390\tfrac{8}{47}$$

afget.

$$2\square AB.BI = 306\tfrac{39}{47}$$

$$2AB = 48$$

$$BI = \frac{14421}{47\times48} \text{ of } \frac{4807}{47\times16}$$

$\sqrt{}$

$$\overline{BI}^2 = \frac{23107249}{565504}$$

$$\overline{BC}^2 = \frac{68425984}{565504} = 121$$

$$\overline{CI}^2 = \frac{45318735}{565504}$$

of

$$\sqrt{\text{of } \frac{1089 \times 41615}{752 \times 752}}$$

$$CI = \frac{33\sqrt{41615}}{752}$$

$$\tfrac{1}{2} AB = 12$$

verm.

$$\text{Inh. } ABC = \frac{33 \times 12\sqrt{41615}}{752}$$

$$= \frac{33 \times 3\sqrt{41615}}{188}$$

$$= \tfrac{99}{188}\sqrt{41615}.$$

In de Driehoek ACD is bekend,

$$AC = \sqrt{390\tfrac{8}{47}},\ CD = 8\ ,\ AD = 14$$

$\sqrt{}$

$$\overline{AC}^2 = 390\tfrac{8}{47},\ \overline{CD}^2 = 64,\ \overline{AD}^2 = 196$$

$$\overline{CD}^2 = 64$$

verg.

$$454\tfrac{8}{47}$$

$$\overline{AD}^2 = 196$$

afget.

$$2\square AC.CH = 258\tfrac{8}{47}$$

$$2AC = 2\sqrt{390\tfrac{8}{47}}$$

$$CH = \frac{129\tfrac{4}{47}}{\sqrt{390\tfrac{8}{47}}} = \frac{\frac{6067}{47}}{\sqrt{\frac{18338}{47}}}$$

Daarom $\sqrt{\frac{18338}{47}}$ gedeeld in $\frac{6067}{47}$

$$\sqrt{\frac{18338 \times 47}{47 \times 47}}$$

$\frac{\sqrt{18338 \times 47}}{47}$ gedeeld in $\frac{6047}{47}$

komt $CH = \frac{6067}{\sqrt{18338 \times 47}} = \frac{6067}{\sqrt{861886}}$

$\sqrt{}$

$$\overline{CH}^2 =$$

$$\overline{CH}^2 = \frac{36808489}{861886}$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{55160704}{861886} \text{ of } 64$$

$$\overline{DH}^2 = \frac{18352215}{861886} \text{ of } \frac{441 \times 41615}{861886}$$

$\sqrt{}$ ———————————————

$$DH = \frac{21\sqrt{41615}}{\sqrt{861886}}$$

$$\tfrac{1}{2} \textit{ Basis } AC = \frac{\sqrt{861886}}{94}$$

——————————————— verm.

Inhoud $ACD = \frac{41}{94}\sqrt{41615}$
Inhoud $ABC = \frac{59}{188}\sqrt{41615}$

——————————————— verg.

Inh. $ABCD = \frac{3}{4}\sqrt{41615}$.

= Men kan den Inhoud van den Vierhoek wel *direct* vinden, volgens het *Theorema* van *Ptolomëus*, dat men beweezen vindt by A. DE GRAAF *Inleiding tot de Wiskunst* pag. 295. Aldus:

24
11
8
14
—— verg.
57 Som der zyden
2 ——
$28\tfrac{1}{2}$ halve Som, $28\tfrac{1}{2}$, $28\tfrac{1}{2}$, $28\tfrac{1}{2}$
24, 11, 8, 14
——————————— afget.
$4\tfrac{1}{2}$, $17\tfrac{1}{2}$, $20\tfrac{1}{2}$, $14\tfrac{1}{2}$
———————————
$\frac{9}{2}$, $\frac{35}{2}$, $\frac{41}{2}$, $\frac{29}{2}$

Deeze vermenigv., komt $\frac{9}{16}\times 35\times 41\times 29$

of $\frac{9}{16}\times 41615$

Inhoud ABCD $= \sqrt{}$ $\frac{3}{4}\sqrt{41615}$.

4. Vermits de Deel-lyn, uit het *Centrum* E van den Cirkel tot den hoek C getrokken, deezen Vierhoek in twee deelen snydt, zo is nu noodig, de *Diameter* des Cirkels te vinden.

Hier toe zy getrokken de *Diameter* AEG, en laat vervolgens de Figuur op deeze wyze bereid worden, naamelyk:

Trek GC, GB, en CE, welke AB in F doorsnydt, als mede EK *perpendiculair* op AB; dan is ACG een regthoekige Driehoek (*Meetk.* III. 7.), zo wel als BIC, hebbende, behalven den regten hoek, den hoek AGC = ABC (*Meetk.* III. 5.). Derhalven zyn deeze Driehoeken ACG, BIC gelykvormig, en dus

CI : BC :: AC : AG

$$\frac{33\sqrt{41615}}{752} — 11 — \frac{\sqrt{861886}}{47}$$

$$\text{of } 11\,\frac{33\sqrt{41615} - 11\times 752}{3\sqrt{41615} - 752} — \frac{\sqrt{861886}}{47}$$

$$47\,\frac{3\times 47\sqrt{41615} - 752 - \sqrt{861886}}{3\sqrt{41615} - 16 - \sqrt{861886}}$$

$$\sqrt{9\times 41615} \qquad \sqrt{256\times 861886}$$

$$\sqrt{374535} \qquad \sqrt{220642816}$$

komt AG $= \sqrt{589\frac{41701}{374535}}$

$$\overline{AG}^2 = 589\tfrac{41701}{374535}$$

$$\overline{AB}^2 = 576$$

afget.

$\overline{BG}^2$

$$\sqrt{\overline{BG}^2 = 13\tfrac{41701}{374535}}$$

$$BG = \sqrt{13\tfrac{41701}{374535}}$$

Dewyl nu de *Perpend.* EK in het midden van AB valt (*Meetk.* III. 2.), zo is

$$AB : BG :: AK : KE$$

$$24 - \sqrt{13\tfrac{41701}{374535}} - 12$$

$$KE = \sqrt{3\tfrac{104059}{374535}}, \text{ of } \sqrt{\tfrac{1227664}{374535}}$$

$$= \sqrt{\frac{1227664 \times 374535}{374535 \times 374535}}$$

$$= \frac{1108\sqrt{374535}}{374535}$$

$$= \frac{1108\sqrt{9 \times 41615}}{374535}$$

$$BI = 6\tfrac{291}{772} \qquad = \frac{1108 \times 3\sqrt{41615}}{374535}$$

$$BK = 12$$

$$IK = 5\tfrac{457}{772} \qquad = \frac{3324}{374535}\sqrt{41615} = KE$$

5. Nu zyn ook de regthoekige Driehoeken ICF, KEF gelykvormig, om dat zy beiden een gelyken hoek F hebben, derhalven:

CI : IF :: EK : FK *Meetk.* IV. 11.

CI : EK :: IF : FK

$$CI + EK : IC :: \underbrace{IF + FK}_{IK} : IF$$

CI + EK : IC :: IK : IF

$CI = \tfrac{33}{752}\sqrt{41615}$ *Art.* 3.

$EK = \tfrac{3324}{374535}\sqrt{41615}$ *Art.* 4.

verg.

$$\frac{14859303}{374535 \times 752} \sqrt{41615} - \tfrac{33}{752} \sqrt{41615} - 5\tfrac{417}{752}$$

$$\frac{14859303}{374535} \qquad\qquad 33 \qquad\qquad \frac{4217}{752}$$

$$752 \times 14859303 - 33 \times 374535 - 4217$$

komt $IF = \dfrac{52120665135}{752 \times 14859303}$ of $\dfrac{17373555045}{752 \times 4953101}$

Art. 3. is gevonden $BI = 6\tfrac{295}{752}$ - - - of $\dfrac{23809556507}{752 \times 4953101}$

verg.

$$BF = \frac{41183111552}{752 \times 4953101} = \frac{54764776}{4953101}$$

$$\tfrac{1}{2} CI = \tfrac{33}{1504} \sqrt{41615}$$

verm.

$$\text{Inh. } BCF = \frac{27382388 \times 33}{752 \times 4953101} \sqrt{41615}$$

$$= \frac{145611 \times 33}{4 \times 4953101} \sqrt{41615}$$

$$= \frac{145611 \times 33}{4953101} \times \tfrac{1}{4} \sqrt{41615}$$

$$= \frac{4806483}{4953101} \times \tfrac{1}{4} \sqrt{41615}.$$

Nu hebben wy door
Art. 3. laatste lid Inh. $ABCD = 3 \times \tfrac{1}{4} \sqrt{41615}$

Door *Art.* 5. Inh. $BCF = \dfrac{4806483}{4953101} \times \tfrac{1}{4} \sqrt{41615}$

afg.

het deel $ADCF = \dfrac{10052820}{4953101} \times \sqrt{41615}$

6. Dewyl nu gemeenelyk zulke antwoorden in zuivere *Sur-*

Surdische Waarden worden uitgedrukt, zullen wy deeze nog zodanig herleiden.

De Inhoud van

$$\text{BCF was } \frac{145611 \times 33}{4953101} \times \tfrac{1}{4}\sqrt{41615}. \quad \textit{Art. 5.}$$

$$\text{Dat is } \frac{4806483}{4953101 \times 4}\sqrt{41615} = \frac{4806483}{19812404}\sqrt{41615}$$

$$= \sqrt{\frac{4806483 \times 4806483 \times 41615}{19812404 \times 19812404}}$$

$$= \sqrt{\frac{231022788929289 \times 41615}{392531352259216}}$$

$$= \sqrt{\frac{961401333480861735}{392531352259216}}$$

$$\text{Inhoud BCF} = \sqrt{2449\frac{92051798041751}{392531352259216}}.$$

De Inhoud van

$$\text{ADCF was } \frac{10052820}{4953101} \times \tfrac{1}{4}\sqrt{41615}. \quad \textit{Art. 5.}$$

$$= \frac{2513205}{4953101}\sqrt{41615}$$

$$= \sqrt{\frac{2513205 \times 2513205 \times 41615}{4953101 \times 4953101}}$$

$$= \sqrt{\frac{262848636866820375}{24533209516201}}$$

$$\text{Inhoud ADCF} = \sqrt{10713\frac{24363319759062}{24533209516201}}.$$

III. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 4.

Van een Driehoek ABC, in een Cirkel beschreeven, zyn de drie zyden bekend, als AB $=$ 40, BC $=$ 32, en AC $=$ 28. Nu heeft men uit de hoeken B, en C, op hunne overstaande zyden, twee *Perpendiculairs* BD, CE, en uit den hoek A den *Diameter* AH getrokken, wel-

welke deeze beide *Perpendiculairs* in K en L doorſnydt, en daar door een anderen Driehoek LKG, binnen den eerſten maakt. Men vraagt, na de lengte der zyden (GL, GK, KL) van den binnenſten Driehoek?

OPLOSSING.

1. Dewyl de drie zyden AB, AC, BC, ieder byzonder, bekend zyn, kunnen wy ligt de *Perpendiculair* op iedere *Baſis* vinden.

$$AB = 40,\ BC = 32,\ AC = 28$$

$$\overline{AB}^2 = 1600,\ \overline{BC}^2 = 1024,\ \overline{AC}^2 = 784$$

$$\overline{BC}^2 = 1024 \quad \text{verg.}$$

$$2624$$

$$\overline{AC}^2 = 784 \quad \text{afget.}$$

$$2\square BC.BN = 1840$$

$$2BC = 64 \qquad BN = 28\tfrac{3}{4} \text{ of } \frac{115}{4}, \text{ dus } \overline{BN}^2 = \frac{13225}{16}$$

$$BC = 32 \qquad 1600 = \overline{AB}^2 = \frac{25600}{16}$$

$$NC = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\overline{AN}^2 = \frac{12375}{16} = \left(\frac{225 \times 55}{16}\right)$$

$$AN = \frac{15}{4}\sqrt{55}.$$

Op de zelfde wyze kunnen de *Perpendiculairs*, die op de twee andere zyden vallen, gevonden worden; doch wy zullen ons liefſt, om de verandering, van de evenredigheden bedienen, die uit de gelykvormige Driehoeken afgeleid worden.

De

De regthoekige Driehoeken ABN, CBE hebben een gemeenen hoek B, en zyn dus gelykvormig. Derhalven

AB : AN :: BC : EC
$40 - \frac{15}{4}\sqrt{55} - 32$

komt $3\sqrt{55}$ = *Perp.* EC, of, dat het zelfde is, EC. $(= 165\sqrt{\frac{1}{55}}$

AB : BN :: BC : BE
$40 - \frac{115}{4} - 32$ „ $23 = BE$
$40 = AB$

$17 = AE.$

Wederom zyn de regthoekige Driehoeken BDC, ANC gelykvormig, om dat zy een gemeenen hoek C hebben. Daarom

AC : AN :: BC : BD
$28 - \frac{15}{4}\sqrt{55} - 32$

komt $\frac{30}{7}\sqrt{55}$ = *Perp.* BD, of, dat het zelve is, $(BD = 235\frac{5}{7}\sqrt{\frac{1}{55}}$

AC : NC :: BC : DC
$28 - 3\frac{1}{4} - 32$ „ $3\frac{5}{7} = DC$
$28 = AC$

$24\frac{2}{7} = AD$

2. Dewyl nu in de Driehoeken NBA, CHA, de hoeken N en C regt, en $\angle CHA = \angle CBA$ zyn (*Meetk.* III. 5.), zo zyn dezelve gelykvormig, en dus kunnen wy de *Diameter* AH daar door bepaalen.

Want NA : AB :: AC : AH
$\frac{15}{4}\sqrt{55} - 40 - 28$ „ $298\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{55}} = AH$

$1621\frac{421}{495} = \overline{AH}^2$
$1600 = \overline{AB}^2$
afget.

$21\frac{421}{495} = \overline{BH}^2$

$34\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{55}} = BH$

3. Nu kunnen wy de deelen van de *Perpendiculairs*, en by gevolg de tusschen-deelen, of de zyden van den Driehoek LKG, vinden.

De regthoekige Driehoeken EBC, NCG zyn gelykvormig.

EC : CB :: NC : GC

$165\sqrt{\tfrac{1}{55}} - 32 - 3\tfrac{1}{4}$,, $34\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}}$ GC

De regthoekige Driehoeken ABH, AEL zyn gelykvormig.

AB : BH :: AE : EL

$40 - 34\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}} - 17$,, $14\tfrac{11}{15}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = EL$

$165\sqrt{\tfrac{1}{55}} = EC$

$150\tfrac{4}{15}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = CL$

$34\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = CG$ afget.

$115\tfrac{3}{5}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = LG$

4. Op diergelyke wyze worden nu de beide overige deelen ook gevonden.

Om GK *te vinden*; zo is

$\overline{AH}^2 = 1621\tfrac{421}{495}$

$\overline{AC}^2 = 784$ afget.

$\overline{HC}^2 = 837\tfrac{421}{495}$, dus is $HC = 214\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}}$.

Nu zyn de regthoekige Driehoeken ANC, ADG gelykvormig.

Dus AN : NC :: AD : DG

$\tfrac{25}{4}\sqrt{55} - 3\tfrac{1}{4} - 24\tfrac{2}{7}$ // $21\tfrac{1}{21}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = DG$.

Wederom zyn de regthoekige Driehoeken ACH, ADK gelykvormig.

Dus AC : CH :: AD : DK

$28 - 214\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}} - 24\tfrac{2}{7}$ // $186\tfrac{4}{21}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = DK$

$21\tfrac{1}{21}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = DG$ afget.

$165\tfrac{1}{7}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = GK$

Om

Om de zyde KL *te vinden.*

De regthoekige Driehoeken ACH, ADK zyn gelykvormig.

Dus AC : AH : : AD : AK

$28 — 298\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}} — 24\tfrac{2}{7} \;//\; 259\tfrac{1}{21}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = \text{AK}.$

De regthoekige Driehoeken ABH, AEL zyn gelykvormig.

Dus AB : AH : : AE : AL

$40 — 298\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{55}} — 17 \;//\; 126\tfrac{14}{15}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = \text{AL}$

$259\tfrac{1}{21}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = \text{AK}$

$132\tfrac{4}{35}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = \text{LK}$

AANMERKING.

Het zal een veel fraaijer bewerking voorſtellen, en teffens veel korter zyn, indien wy vooraf de leiding der gelykvormige lynen nagaan; waarom wy die nog eens, door de zelfde gelykvormige Driehoeken, zullen bepaalen; en om dat wy gemakkelyk kunnen begrypen, dat die zyde (KL), welke in den *Diameter* ſtaat, een byzonder voorregt heeft, zullen wy deeze maar alleen vinden, en de overigen, na dat wy deeze Figuur een weinig nader zullen ingezien hebben. Want het hoofdzaakelyke van deeze Figuur behelſt, dat 'er een Driehoek ABC in een Cirkel geſteld zy, en uit twee van de hoeken, als B en C, *Perpendiculairs* BD en CE, als ook uit den derden hoek A een *Diameter*, getrokken worden. Dewyl dit nu eene regelmaatige verkiezing is, zal ook blyken, dat de Eigenſchappen mede regelmaatig zullen zyn, waarom wy deeze twee volgende *Theoremata* zullen ſtellen.

THEOREMA I.

Plaat I. *Fig.* 4.

5. *Indien een Driehoek* ABC *in een Cirkel geplaatſt is, en uit twee van de hoeken, als* B *en* C, Perpendiculairs *getrokken worden, als mede, dat de* Diameter *uit den derden hoek* A *getrokken zy, zal de afgeſneedene Driehoek* GKL *gelykvormig zyn aan den geſtelden Driehoek* ABC.

B E W Y S.

1°. Om dat AEGD een Vierhoek is, waar van de twee hoeken E en D regte hoeken zyn;

daarom ∠EAD+EGD=2 Regte. *Meetk.* I. 11. (*Cor.* 2.

∠BGE+EGD=2 Regte. *Ibid.* I. 1.

Dus ∠EAD+EGD=∠EGD+BGE
EGD=∠EGD afget.

Derhalven ∠EAD=∠BGE

2°. Om dat de hoek ABH=regt (*Meetk.* III. 7.), en dus =∠AEL is, en deeze Driehoeken een gemeenen hoek A hebben, daarom

∠AHB=∠ALE. *Meetk.* I. 10. *Cor.* 1.

∠ACB=∠AHB ∠ALE=∠GLK. *Meetk.* (III. 5. en I. 3.

Daarom ∠ACB=∠GLK

Dienvolgens ∠ABC=∠LKG. *Meetk.* I. 10. *Cor.* 1.

THEOREMA II.

Plaat I. *Fig.* 4.

6. *Indien een Driehoek in een Cirkel geplaatst is, en uit twee van de hoeken, als* B *en* C, Perpendiculairs (BD, CE) *getrokken worden, als mede, dat de* Diameter (AH) *uit den derden hoek* (A) *getrokken zy; dan is het verschil der Regthoeken van de zyden, en ieder ander afgesneeden deel, gelyk aan den Regthoek, begreepen van die zyde, welke in den* Diameter *is, en de* Perpendiculair, *die uit den derden hoek* (A) *getrokken is.* Dat is □AB.AD−□AC.AE=□KL.AN.

B E W Y S.

AN:AB::AC:AH//□AH.AN=□AB.AC } *Meetk.*
AB:AH::AE:AL//□AB.AL=□AH.AE } IV. 9.

AB.

$$AB.AH.AN.AL = AB.AH.AC.AE$$

AB.AH ————————————

$$\square AN.AL = \square AC.AE$$

$$AC:AH :: AD:AK // \square AH.AD = \square AC.AK$$

$$\square AC.AB = \square AH.AN$$ *bov. bew.*

————————————

$$AH.AC.AD.AB = AH.AC.AN.AK$$

AH.AC ————————————

$$\square AD.AB = \square AN.AK$$

$$\square AC.AE = \square AN.AL$$ *bov. bew.*

———————————— afget.

$$\square AD.AB - \square AC.AE = \square AN.LK$$

Dat te bewyzen was.

COROLLARIUM.

7. Het volgt dan, dat het Voorſtel, met behulp van deeze twee *Theoremata*, op een veel fraaijer wyze, als wy het hier voor gedaan hebben, kan opgeloſt worden.

Want

$AB = 40$, $BC = 32$, $AC = 28$

———————————— $\surd$

$\overline{AB}^2 = 1600$, $\overline{BC}^2 = 1024$, $\overline{AC}^2 = 784$

$\overline{AC}^2 = 784$ $\qquad$ $\overline{AB}^2 = 1600$

————————

1808 $\qquad$ 2384

$\overline{AB}^2 = 1600$ $\qquad$ $\overline{BC}^2 = 1024$

————————

$2\square BC.NC = 208$, $\quad 2\square AB.AE = 1360$

$2BC = 64$ ———— $\quad 2AB = 80$ ————

$NC = 3\tfrac{1}{4}$ $\qquad$ $AE = 17$

———— $\surd$ $\qquad$ $AC = 28$

————

$\overline{NC}^2 = 10\tfrac{9}{16}$ $\qquad$ $\square AE.AC = 476$

$\overline{AC}^2 = 784$

————

$\overline{AN}^2$

$$\overline{AN}^2 = 773\tfrac{7}{16}$$
$$= \frac{12375}{16} = \frac{225}{16} \times 55$$
$$\sqrt{}$$
$$AN = \frac{15}{4}\sqrt{55}$$

$$2\square AC.AD = 1360$$
$$2AC = 56 \quad \overline{}$$
$$AD = \frac{170}{7}$$
$$AB = 40$$

$$\square AD.AB = 971\tfrac{3}{7}$$
$$\square AE.AC = 476$$
$$\overline{} \text{ afget.}$$
$$2\ \textit{Theor.}\ \ldots\ \square AN.LK = 495\tfrac{3}{7}$$
$$AN = \tfrac{15}{4}\sqrt{55} \quad \overline{}$$
$$LK = 132\tfrac{4}{35}\sqrt{\tfrac{1}{55}}.$$

Nu is, door *Theorema* I.

$BC : AC :: KL : LG$

$32 - 28 - 132\tfrac{4}{35}\sqrt{\tfrac{1}{55}} \,//\, 115\tfrac{3}{5}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = LG$

$BC : AB :: KL : KG$

$32 - 40 - 132\tfrac{4}{35}\sqrt{\tfrac{1}{55}} \,//\, 165\tfrac{1}{7}\sqrt{\tfrac{1}{55}} = KG$

SCHOLIUM I.

8. Dewyl wy gezien hebben, dat de gegeeven Driehoek ABC, en de Driehoek GKL, op deeze wyze afgesneeden, gelykhoekig, en dus altoos gelykvormig zyn, zo kan dit Voorstel ook omgekeerd worden, zulks, dat, indien de zyden van den Driehoek GKL bekend gegeeven zyn, wederom de zyden van den Driehoek ABC kunnen gevonden worden. By voorbeeld:

„ Indien een Driehoek ABC in een Cirkel gesteld
„ is, en uit twee hoeken, als B en C, *Perpendiculairs* BD, CE getrokken zyn, en zo mede, uit den derden hoek A, een *Diameter* AH,
„ ontstaat daar door de Driehoek GKL. Zo

„ nu

„ nu de drie zyden van deezen Driehoek be-
„ kend gegeeven zyn, als $KL = 132\frac{4}{35}\sqrt{\frac{1}{35}}$,
„ $LG = 115\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{35}}$, en $GK = 165\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{35}}$, vraagt
„ men na de drie zyden van den Driehoek ABC?

OPLOSSING.

$$KL = 132\tfrac{4}{35}\sqrt{\tfrac{1}{35}},\quad LG = 115\tfrac{3}{5}\sqrt{\tfrac{1}{35}},\quad GK = 165\tfrac{1}{7}\sqrt{\tfrac{1}{35}}$$

$$132\tfrac{4}{35} \qquad 115\tfrac{3}{5} \qquad 165\tfrac{1}{7} \qquad 35$$

$$4624 \qquad 4046 \qquad 5780$$

$$578$$

In *Prop.* $KL = 8$ tot $LG = 7$ tot $GK = 10$

Nu zyn de Driehoeken KGL, en ABC gelykhoekig; en daarom, stellende $BC = 8x$,

$$KL : LG :: BC : AC$$
$$8 - 7 - 8x \,//\, 7x = AC$$
$$8x = BC$$

$$KL : GK :: BC : AB$$
$$8 - 10 - 8x \,//\, 10x = AB.$$

Dewyl nu de drie zyden, by stelling, bekend zyn, zo kan men wederom de zyde KL vinden, volgens *Theorema* II.

$$BC = 8x,\quad AC = 7x,\quad AB = 10x \qquad \surd$$

$$\overline{BC}^2 = 64xx,\quad \overline{AC}^2 = 49xx,\quad \overline{AB}^2 = 100xx$$
$$\overline{AC}^2 = 49xx$$
$$149xx$$
$$\overline{BC}^2 = 64xx$$
$$2\,\square AB.AE = 85xx$$
$$2AB = 20x$$
$$AE = 4\tfrac{1}{4}x$$
$$AC = 7x$$
$$\text{verm.}$$
$$\square AC.AE = \frac{119}{4}xx$$

AC.

AC : AE :: AB : AD

$$7x — 4\tfrac{1}{4}x — 10x \,//\, \frac{170x}{28} = AD$$

$$10x = AB$$

verm.

$$\frac{1700xx}{28} = \square AD.AB$$

$$\frac{119xx}{4} = \square AC.AE$$

afget.

$$\square AN.KL = \frac{867xx}{28} = \square AB.AD - \square AC.AE$$

$$\overline{BC}^2 = 64xx$$

$$\overline{AC}^2 = 49xx$$

$$113xx$$

$$\overline{AB}^2 = 100xx$$

$$2BC = 16x \quad 2\square BC.NC = 13xx$$

$$NC = \frac{13}{16}x$$

$$\surd$$

$$\overline{NC}^2 = \frac{169}{256}xx$$

$$49xx = \overline{AC}^2 = \frac{12544}{256}xx$$

$$\overline{AN}^2 = \frac{12375}{256}xx$$

$$\surd$$

$$AN = \tfrac{1}{16}x\surd 12375$$

□AN.

$$\square AN.KL = \frac{867}{28}xx$$

$$AN = \tfrac{1}{16}x\sqrt{12375}$$

$$KL = \frac{16 \times 867}{28\sqrt{12375}}x$$

$$= 132\tfrac{4}{55}\sqrt{\tfrac{1}{55}}$$

$$16 \times 867x = 132\tfrac{4}{55} \times 28\sqrt{\tfrac{1}{55} \times 12375}$$

$$16 \times 867x = 132\tfrac{4}{55} \times 28\sqrt{225}$$

$$16 \times 867x = 132\tfrac{4}{55} \times 28 \times 15$$

$$x = 4$$

By gevolg $BC = 8x = 32$

$AG = 7x = 28$

$AB = 10x = 40$ enz.

SCHOLIUM II.

9. De menigvuldige Eigenschappen, welke in deeze Figuur te vinden zyn, verschaffen een ruim veld van fraaije en nuttige bespiegelingen. Het zal derhalven niet ongevoegelyk zyn, een korte aanleiding hier toe te geeven, en deeze Eigenschappen by wyze van *Theoremata* te vervolgen.

THEOREMA III.

Plaat I. *Fig* 5.

10. *Als, in een Drieboek* ABC, *uit twee van de hoeken, als* B *en* C, Perpendiculairs BD *en* CE *getrokken zyn, zal de lyn, uit den derden hoek* A, *door dit snypunt* G *getrokken, mede* Perpendiculair *op de derde zyde* BC *zyn.*

B E W Y S.

Beschryf op AG en BC, als *Diameters*, de Cirkels BEDC, en ADGE; deeze zullen beide door de punten E en D gaan, om dat die hoeken regt zyn (*Meetk.* III. 7.).

Nu

Nu is $\angle GAD = \begin{cases} \angle GED \\ \angle GBN = \angle GED \end{cases}$ *Meetk.* III. 5.

Dus $\angle GAD = \angle GBN$

$\angle DGA = \angle NGB$ *Meetk.* I. 3.

Derh. $\angle ADG = \angle BNG$ *Ibid.* I. 10. *Cor.* 1.

$\angle ADG =$ Regt. *Gegeeven*

Dus $\angle BNG =$ Regt.

By gevolg snyden de drie *Perpendiculairs* malkanderen in 't zelve punt G.

THEOREMA IV.

Plaat I. *Fig.* 6.

11. *Als een Drieboek* ABC *in een Cirkel staat, en uit de drie boeken* Perpendiculairs *op hunne overstaande zyden getrokken, en verder tot aan den Omtrek des Cirkels verlengd zyn, dan zullen* GP, GQ, *en* GR, *door de zyden des Drieboeks, in twee gelyke deelen gedeeld worden.*

BEWYS.

Om dat de regthoekige Driehoeken DCB, ACN behalven den regten hoek, eenen hoek C gemeen hebben, daarom

$\angle NAC = \angle DBC$ *Meetk.* I. 10. *Cor.* 1.

$\angle NAC = \angle NBP$ *Ibid.* III. 5.

$\angle DBC$ of $GBN = \angle NBP$

N = N = Regt

BN = BN gemeen

Derhalven GN = NP *Meetk.* I. 15.

Zo ook GD = DQ

GE = ER

COROLLARIA.

12. Hier uit volgt

I. Dat altoos de drie lynen, uit iederen hoek getrokken,

ken, aan malkanderen gelyk zullen zyn, dat is BP = BG = BR; PC = GC = QC; AQ = AG = AR.

II. En om dat □ AN.NP = □ BN.NC (*Meetk.* III. 11.), en NP = NG is, zo blykt, dat □ AN.NG = □ BN.NC is; en zo is wederom □ BD.DG = □ CD.DA, als mede □ CE.EG = □ AE.EB, enz.

THEOREMA V.

Plaat I. *Fig.* 6.

13. *Indien een Driehoek* ABC *in een Cirkel staat, en uit twee hoeken* B *en* C Perpendiculairs BD *en* CE *getrokken worden, dan zal, trekkende uit den derden hoek* A *een* Diameter AH, *de Figuur* BHCG *altoos een* Parallelogram *zyn.*

BEWYS.

Dewyl ∠ABH = een regte hoek (*Meetk.* III. 7.) = ∠CEB is (*Stell.*), zo is ook BH *parallel* aan CE (*Meetk.* I. 7.).

Wederom ∠ACH = een regte hoek (*Meetk.* III. 7.) = ∠BDC (*Stell.*); daarom HC *parallel* aan BD (*Meetk.* I. 7.).

Dienvolgens is de Figuur BHCG een *Parallelogram.*

Dus HC = BG, en BH = GC (*Meetk.* I. 21.).

Om dat de hoeken P en N regt zyn, zo is HP *parallel* aan BC, de Boogen, en de lynen PC = BH, en by gevolg ∠BAH = ∠PAC (*Meetk.* III. 5.). Vervolgens zyn de Driehoeken ABH, CAP gelykhoekig, en gelykvormig.

COROLLARIUM.

14. Uit de evenwydige lynen BH en EC is de hoek BHL = LKG (*Meetk.* I. 7.), en HBL = KGL; dienvolgens zyn de Driehoeken BHL, GKL gelykvormig; en ieder gelykvormig met den geheelen Driehoek ABC, volgens *Theorema* I.

SCHOLIUM III.

15. Indien wy deeze Figuur nog een weinig nader beschouwen, zien wy, dat daar in ABHC, ABPC Vierhoeken zyn.

Dat de Vierhoek ABHC in een Cirkel staat, en één van zyne *Diagonaalen*, als AH, de *Diameter* des Cirkels is.

Dat de Vierhoek ABPC ook een zodanige Vierhoek is, die in een Cirkel staat, zulks dat de *Diagonaalen* malkanderen regthoekig snyden.

IV. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 7.

In een gelykzydigen Driehoek, waar van iedere zyde 29 doet, is uit elken hoek een Cirkel beschreeven, waar van de *Diameter* is 52. Indien nu de punten D, E, F daar deeze boogen malkanderen snyden, door lynen saamengevoegd worden, ontstaat daar uit de binnenste Driehoek DEF. Men vraagt na de lengte deezer zyden, en na het vermogen des Driehoeks?

OPLOSSING.

1. Dewyl deeze Driehoeken ABC, DEF gelykzydig zyn, zo is het klaar, dat ieder *Perpendiculair* op het midden van iedere zyde valt. Hierom, stellende iedere zyde van den Driehoek $ABC = 2a$, is $AK = BM = a$. Neemende nu nog den straal der Boogen $BF = b$, dan is:

2. In den regthoekigen Driehoek ABM, de zyde $AB = 2a$, dus $\overline{AB}^2 = 4aa$; hier af $\overline{BM}^2 = aa$, zo is $\overline{AM}^2 = 3aa$, en by gevolg . . $AM = a\sqrt{3}$.

3. Wederom is in den regthoekigen Driehoek FBM, $\overline{BF}^2 = bb$, hier van $\overline{BM}^2 = aa$, blyft $\overline{FM}^2 = bb - aa$, en by gevolg . . . . $FM = \sqrt{bb - aa}$.

Deeze FM dan van AM getrokken, is het overblyfsel $AF = a\sqrt{3} - \sqrt{bb - aa}$.

4. Ver-

4. Vervolgens zyn, in den Driehoek ABF, de drie zyden AB, BF, AF, ieder byzonder, bekend, waar door de lengte AI kan gevonden worden. volgens de *Gronden der Meetkunst* II. 8.

$$AB = 2a\,,\ BF = b\,,\ AF = a\sqrt{3} - \sqrt{bb - aa}$$

$$\overline{AB}^2 = 4aa,\ \overline{BF}^2 = bb,\ \overline{AF}^2 = 2aa + bb - 2a\sqrt{3bb - 3aa}$$

$$\overline{AB}^2 = 4aa$$

verg.

$$\overline{\quad}^2\ 6aa + bb - 2a\sqrt{3bb - 3aa}$$

$$\overline{BF}^2 = \ldots\ bb$$

afg.

$$2\square AB.AI = 6aa - 2a\sqrt{3bb - 3aa}$$

$$2AB = 4a$$

$$AI = 1\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{3bb - 3aa}$$

$$AK = a$$

$$FL = IK = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{3bb - 3aa}$$

2

$$FD = -a + \sqrt{3bb - 3aa}$$

5. Indien wy nu deeze uitdrukking in getallen overbrengen, zo is hier mede de zyde van den gelykzydigen Driehoek DEF gevonden. Want, $a = 14\tfrac{1}{2}$, en $b = 26$ gegeeven zynde, zo is

$$FD = -14\tfrac{1}{2} + \sqrt{3 \times \overline{26}^2 - \overline{14\tfrac{1}{2}}^2}$$
$$= -14\tfrac{1}{2} + \sqrt{3 \times 676 - 210\tfrac{1}{4}}$$
$$= -14\tfrac{1}{2} + \sqrt{3 \times 465\tfrac{3}{4}}$$
$$= -14\tfrac{1}{2} + \sqrt{1397\tfrac{1}{4}}$$
$$= -14\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{81}{4} \times 69}$$
$$= -14\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{2}\sqrt{69}$$
$$= -14\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\sqrt{69}$$

6. Nu kan het vermogen, of de Inhoud des gelykzydigen Driehoeks DEF gemakkelyk gevonden worden; want zoekende de *Perpendiculair* LE, vermenigvuldigd men die met de halve *Basis*, om het be-

geerde te verkrygen; of men kan de bewerking, op eene gemakkelyker wyze, dus inrichten.

Vermenigvuldigende $AM = a\sqrt{3}$ met de halve *Basis* $BC = a$, komt de Inhoud des Driehoeks ABC $= aa\sqrt{3}$, en om dat $a = 14\frac{1}{2}$ is, daarom $aa = 210\frac{1}{4}$, en dus de Inhoud $ABC = 210\frac{1}{4}\sqrt{3}$; dat is, in eene algemeene *Surdische* waarde, $= \sqrt{210\frac{1}{4} \times 210\frac{1}{4} \times 3} = \sqrt{132615\frac{3}{16}}$.

7. Dewyl nu de Driehoeken ABC, DEF gelykvormig zyn, staan hunne Inhouden tot malkanderen in reden, als de vierkanten der zyden (*Meetk.* IV. 23.).

Nu is de zyde $AB = 29$, dus $\overline{AB}^2 = 841$; wederom, de zyde $DE = -14\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\sqrt{69}$, dus $\overline{DE}^2 = \dfrac{6430 - 522\sqrt{69}}{4}$.

$$\text{Derhalven } \overline{AB}^2 : \triangle ABC :: \overline{DE}^2 : \triangle DEF$$

$$4aa \;,,\; aa\sqrt{3} \;,,\; \frac{6430 - 522\sqrt{69}}{4}$$

$$\text{of } 4 \;,,\; \sqrt{3} \;,,\; \frac{6430 - 522\sqrt{69}}{4}$$

$$16 \;,,\; \sqrt{3} \;,,\; 6430 - 522\sqrt{69}$$

$$8 \;,,\; \sqrt{3} \;,,\; 3215 - 261\sqrt{69}$$

$$\text{komt } \frac{3215\sqrt{3} - 261\sqrt{69 \times 3}}{8} \text{ Inh. DEF}$$

Om deeze uitdrukking in algemeene *Surdische Termen* te vinden, zo is:

$$\sqrt{\frac{3215 \times 3215 \times 3}{64}} - \sqrt{\frac{261 \times 261 \times 207}{64}}$$

$$= \sqrt{\frac{10336225 \times 3}{64}} - \sqrt{\frac{68121 \times 207}{64}}$$

$= \sqrt{}$

$$=\sqrt{\frac{31008675}{64}}-\sqrt{\frac{14101047}{64}}.$$

Dat is, de Inhoud DEF $=484510\frac{35}{64}-\sqrt{220328\frac{55}{64}}$.

AANMERKING.

By deeze vierde *Vraag* tekent LUDOLF aan, en zegt;

„ De eerſte Vraage van deeze vier, hebbe ik (*Gode zy* „ *alleen de Eer*) geſolveerd, door de Tafel *Sinuum*; de „ andere drie opgeloſt, en het begeerde gevonden in „ *irrationaale* getallen ". Gelyk wy nu ook gedaan hebben; en alhoewel LUDOLF op deeze Vraagen geene antwoorden geeft, zal het nogthans zeker genoeg zyn, dat wy het waare doel-wit derzelve getroffen hebben. Men kan uit deeze aanteekening gevoegelyk beſluiten, dat deeze vier Voorſtellen, in dien tyd, voor zwaare, of kunſtige, Voorſtellen zullen gehouden zyn, daar dezelve, myns bedunkens, echter niet zwaarwigtig zyn, en volgens de eerſte gronden der Meetkunſt, met behulp van de *Theorie* der *Surdiſche* grootheden, gemakkelyk opgeloſt kunnen worden.

V. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 8.

Daar zyn twee ſtukken Lands, hebbende elk de gedaante van een Regthoek (*Rectangulum*). Als men van de grootheid des kleinſten, het getal der lengte des grootſten aftrekt, is het overblyfſel 460. Van het kleinſte Stuk ſtaat de breedte in reden tot de lengte; als 2 tot 5; en als men de breedte van hetzelve van de breedte des grootſten Lands aftrekt, blyft 'er $\frac{4}{7}$ van de lengte des grootſten.

Indien nu deeze beide Stukken, te ſaamen 3600 □ Roeden inhouden, vraagt men na de lengte en breedte van elk ſtuk Lands?

OPLOSSING.

Stel de breedte AB $=2x$
zo is de lengte AD $=5x$
——————— verm.
Inhoud ABCD $=10xx$
EH $=z$
——————— afget.

$$10xx - z = 460$$

$$\text{of } z = 10xx - 460$$

$$zz = 100x^4 - 9200xx + 211600$$

$$7xz = 70x^3 - 3220x$$

Stel de breedte $EF = y$
de lengte $EH = z$
verm.
Inhoud $EFGH = yz$
Inhoud $ABCD = 10xx$
verg.

$$10xx + yz = 3600$$

$$\text{komt } y = \frac{3600 - 10x}{z}$$

2 x afg.

$$\frac{3600 - 10xx - 2xz}{z} = \tfrac{2}{7}z$$

$$25200 - 70xx - 14xz = 2zz$$

$$zz = 12600 - 35xx - 7xz.$$

De bovengevonden waarden van zz, en $7xz$ nu in deeze Vergelykinge gebragt, bekomt men eene Vergelyking, waar in maar ééne onbekende gevonden wordt.

Men heeft derhalven

$$100x^4 - 9200xx + 211600 = 12600 - 35xx - 70x^3 + 3220x$$

$$\text{of } 100x^4 + 70x^3 - 9165xx - 3220x + 199000 = 0$$

5

$$20x^4 + 14x^3 - 1833xx - 644x + 39800 = 0$$

$$20x^4 + 14x^3 + 39800 = 1833xx + 644x$$

AANMERKING.

Deeze Vergelyking is de zelfde met die, welke LUDOLF op dit Voorstel aanteekent. Dewyl nu dit Voorstel

ſtel van weinig belang is, en niet veel moeite vereiſcht, om tot eene Vergelykinge te komen, ziet men ligt, dat de geheele hoofdzaak van hetzelve, en zo ook van eenige volgende Voorſtellen, voornaamelyk behelſt, den Wortel, uit deeze en diergelyke hooge Vergelykingen, door nadering te vinden. Het ſchynt, dat LUDOLF, en miſſchien meer andere Schryvers van dien tyd, hier toe eene algemeene Leerwyze gehad hebben; maar hoe, en op wat wyze, die geweeſt zy, is my onbekend. Indien men nu geene moeite in het Rekenen ontziet, gelyk LUDOLF dit veelvuldig, en voornaamelyk in dit Boek *over den Cirkel*, getoond heeft, is het niet veel kunſt, om deezen Wortel door nadering te vinden: echter is het noodzaakelyk, dat 'er een weg gebaand worde, langs welken men den wortel, door nadering, uit de hoogere Vergelykingen kan vinden, also zo men, zonder denzelven, deeze Voorſtellen wel tot eene Vergelyking kan brengen, doch geenzins de antwoorden vinden. Ik zal derhalven eenige wegen voorſtellen, langs welke men tot de ontdekking der begeerde Wortelen kan komen.

SCHOLIUM I.

Om dan deeze hoogere Vergelyking, door nadering, te bepaalen, kan men zulks op de volgende wyze doen.

1. Zoek altoos eerſt tuſſchen welke bepaaling de waarde van x begreepen is. En na een weinig overweeging, bevindt men, dat $x = 8$ te groot, en $x = 7$ te klein is. Want

Neemende $x = 8$, zo is $xx = 64$, $x^3 = 512$, en $x^4 = 4096$.

Derh. $20x^4 =$	81920	$1833xx =$	117312
$14x^3 =$	7168	$644x =$	5152
	39800		122464 dus x te (groot.
	128888		

Neemende $x = 7$, zo is $xx = 49$, $x^3 = 343$, $x^4 = 2401$.

$$\begin{array}{rl|rl}
20x^4 = & 48020 & 1833xx = & 89817 \\
14x^3 = & 4802 & 644x = & 4508 \\
 & 39800 & & \overline{} \\
 & \overline{92622} & & 94325
\end{array}$$

dus x te klein.

2. Neemende $x = 7.5$, zo is $xx = 56.25$, $x^3 = 421.875$, $x^4 = 3164.0625$.

$$\begin{array}{rl|rl}
20x^4 = & 63284.25 & 1833xx = & 103106.25 \\
14x^3 = & 5906.25 & 644x = & 4830 \\
 & 39800 & & \overline{} \\
 & \overline{108990.50} & & 107936.25
\end{array}$$

dus x te groot.

3. Neemende $x = 7.4$, zo is $xx = 54.76$, $x^3 = 405.224$, $x^4 = 2998.6576$.

$$\begin{array}{rl|rl}
20x^4 = & 59973.152 & 1833xx = & 100375.08 \\
14x^3 = & 5673.136 & 644x = & 4765.6 \\
 & 39800 & & \overline{} \\
 & \overline{105446.288} & & 105140.68
\end{array}$$

dus x te groot.

4. Neemende $x = 7.3$, zo is $xx = 53.29$, $x^3 = 389.017$, $x^4 = 2839.8241$.

$$\begin{array}{rl|rl}
20x^4 = & 56796.482 & 1833xx = & 97680.57 \\
14x^3 = & 5446.238 & 644x = & 4701.2 \\
 & 39800 & & \overline{} \\
 & \overline{102042.72} & & 102381.77
\end{array}$$

dus x te klein.

5. Neemende $x = 7.35$, zo is $xx = 54.0225$, $x^3 = 397.065375$, $x^4 = 2918.43050625$.

$$\begin{array}{rl|rl}
20x^4 = & 58368.610125 & 1833xx = & 99023.2425 \\
14x^3 = & 5558.91525 & 644x = & 4733.40 \\
 & 39800 & & \overline{} \\
 & \overline{103727.525375} & & 103756.6425
\end{array}$$

dus x te klein.

6. Nee-

6. Neemende $x = 7.36$, zo is $xx = 54.1696$, $x^3 = 398.688256$, $x^4 = 2934.34556416$.

$20x^4 = 58686.9112832$	$1833xx = 99292.8768$
$14x^3 = 5581.635584$	$644x = 4739.84$
39800	
	104032.7168 dus
104068.5468672	(x te groot.

7. Neemende $x = 7.355$, zo is $xx = 54.096025$, $x^3 = 397.876263875$, $x^4 = 2926.637920800625$.

$20x^4 = 58527.5984160125$	$1833xx = 99158.013825$
$14x^3 = 5570.26769425$	$644x = 4736.62$
39800	
	103894.633825
103897.8661102625	(dus x te groot.

8. Neemende $x = 7.354$, zo is $xx = 54.081316$, $x^3 = 397.713997864$, $x^4 = 2924.788740291856$.

$20x^4 = 58495.77480583712$	$1833xx = 99131.052228$
$14x^3 = 5567.995970096$	$644x = 4735.976$
39800	
	103867.028228
103863.77077593312	(dus x te klein.

Dit dan op deeze wyze vervolgende, zal men eindelyk de Waarde van x zo *na* kunnen vinden, als noodig is.

SCHOLIUM II.

Indien men dit, volgens de getoonde wyze, moet verrichten, zou 'er nog eene ongemeene moeite vereifcht worden, om den wortel zo na te vinden, als LUDOLF dien opgeeft. Want men vordert daar mede telkens maar ééne letter, indien men het ten beften aantreft, of men doet wel eens alle moeite te vergeefs; zelfs is het byna ondoenelyk, als de getallen zeer groot worden, ten ware men hier eenige Weeken aan wilde arbeiden. Hierom zullen wy eenen anderen weg aanwyzen, om, ware het mogelyk, telkens eenige letteren meer in den wortel te vorderen. Deeze gefchied volgens den Regel *Falcis*, door het bemiddelen van de verschillen; en indien men zich bepaalt, dat door de eene stelling x te groot bevonden zynde, door de andere wederom x te klein komt, zal deeze bemiddeling veel sterker aantrekken; dus zullen wy met de zelfde moeite, die reeds in het eerste *Scholium* gedaan is, wel zo veel vorderen, dat de waarde van x na genoeg bepaald zal worden.

De Vergelyking was $20x^4 + 14x^3 + 39800 = 1833xx + 644x$.

1. Neemende $x = 8$, zo is $xx = 64$, $x^3 = 512$, $x^4 = 4096$.

$20x^4 =$	81920	$1833xx =$	117312
$14x^3 =$	7168	$644x =$	5152
	39800		
	128888		122464
			128888
			$+ 6424$

Neemende $x = 7$, zo is $xx = 49$, $x^3 = 343$, $x^4 = 2401$.

$20x^4 =$	48020	$1833xx =$	89817
$14x^3 =$	4802	$644x =$	4508
	39800		
	92622		94325
			92622

$x = 7 \ldots - 1703$
$x = 8 \ldots + 6424$ || 8127

44968
13624

58592
8127 ———
komt $x = 7.3$

2. Neemende $x = 7.3$, zo is $xx = 53.29$, $x^3 = 389.017$, $x^4 = 2839.8241$.

$$\begin{array}{ll} 20x^4 = 56796.482 & 1833xx = 97680.57 \\ 14x^3 = 5446.238 & 644x = 4701.2 \\ 39800 & \overline{102381.77} \\ \overline{102042.72} & 102042.72 \\ & \overline{-339.05} \end{array}$$

Neemende $x = 7.4$, zo is $xx = 54.76$, $x^3 = 405.224$, $x^4 = 2998.6576$.

$$\begin{array}{ll} 20x^4 = 59973.152 & 1833xx = 100375.08 \\ 14x^3 = 5673.136 & 644x = 4765.6 \\ 39800 & \overline{105140.68} \\ \overline{105446.288} & 105446.288 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{\begin{array}{ll} 7.4 \ldots + 305.608 \\ 7.3 \ldots - 339.05 \end{array}} \Bigg\| 644.658 \\ 2230.9384 \\ \overline{2508.970} \\ 4739.9084 \\ 644.658 \overline{} \\ \text{komt } x = 7.35. \end{array}$$

3. Neemende $x = 7.35$, zo is $xx = 54.0225$, $x^3 = 397.065375$, $x^4 = 2918.43050625$.

$$\begin{array}{ll} 20x^4 = 58368.610125 & 1833xx = 99023.2425 \\ 14x^3 = 5558.91525 & 644x = 4733.4 \\ 39800 & \overline{103756.6425} \\ \overline{103727.525375} & 103727.525375 \\ & \overline{-29.117125} \end{array}$$

Neemende $x = 7.36$, zo is $xx = 54.1696$, $x^3 = 398.688256$, $x^4 = 2934.34556416$.

$20x^4$,

$20x^4 = 58686.9112832$
$14x^3 = 5581.635584$
39800

104068.5468672

$1833xx = 99292.8768$
$644x = 4739.84$

104032.7168
104068.5468672

$7.36 \; - - - + 35.8300672$
$7.35 \; - - - - 29.117125 \;\|\; 64.9471922$

214.30204
263.35099392

477.65303392
64.9471922
komt $x = 7.35449$

4. Neemende $x = 7.3545$, zo is $xx = 54.08867025$, $x^3 = 397.795125353625$, $x^4 = 2925.5842494132350625$.

$20x^4 = 58511.68498826470125$
$14x^3 = 5569.13175495075$
39800

103880.81674321545125

$1833xx = 99144.53256825$
$644x = 4736.298$

103880.83056825
103880.81674321545125

$- 0.013825034548 75$

Neemende $x = 7.35451$, zo is $xx = 54.0888173401$, $x^3 = 397.7967480159388 51$, $x^4 = 2925.600161250702$ (43906801.

$20x^4$

$$\begin{array}{rl}
20x^4 = & 58512.0032250140487813602 \\
14x^3 = & 5569.154472223143914 \\
 & 39800 \\
\hline
 & 103881.1576972371926953602
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
1833xx = & 99144.8021844033 \\
644x = & 4736.30444 \\
\hline
 & 103881.1066244033
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
103881.1576972371926953602 \\
103881.1066244033 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
x = 7.35451 \ldots + \ldots & 0.0510728238926953602 \\
= 7.\ 3545 \ldots - \ldots & 0.013825034548 75 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3756150833188280265909 \\
1016763548492273625 \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{4772914381680553890909}{6489785844144}$$

komt $x = 7.35450213043$

Dus hebben wy dan het antwoord gevonden, gelyk Ludolf ſtelt, naamelyk, dat $x = 7.35450213$ te min, en $x = 7.35450214$ te veel zy, waar uit men ziet, dat deeze nadering, door den Regel *Falcis*, veel gemak aanbrengt, en den arbeid niet weinig verkort, voornaamelyk, als 'er veele deelen zyn, en dat dus de verſchillen klein worden.

SCHOLIUM III.

Algemeene Wyze, *om de Wortels, door nadering, te vinden, uit eene Vergelykinge van eene willekeurige Magt.*

Niet tegenſtaande de voorgaande Leerwyze zeer dienſtig is, om de Wortels der hooge Vergelykingen, door nadering te vinden, is nogthans de bewerking eenigzins laſtig, om dat de getallen, die ſomtyds al vry groot zyn, tot zulke hooge vermogens moeten vermenigvuldigd worden. Wy zullen derhalven nog eene an-

andere Leerwyze voordragen, die, behalven dat dezelve sterker aantrekt, in de bewerking veel gemakkelyker is. Wy zullen dus onze gevondene Vergelyking nog eens neemen, en derzelver Wortelen, volgens deeze Leerwyze bepaalen.

De Vergelyking is $20x^4 + 14x^3 - 1833xx - 644x + 39800 = 0$.

By het eerste onderzoek, vindt men $x = 8$ te groot, en $x = 7$ te klein; daarom, neemende $x = 7 + y$, zo is;

$$\begin{array}{rcl}
20x^4 & = & 48020 + 27440y + 5880yy + 560y^3 + 20y^4 \\
14x^3 & = & 4802 + 2058y + 294yy + 14y^3 \\
-1833xx & = & -89817 - 25662y - 1833yy \\
-644x & = & -4508 - 644y \\
 & & 39800 \\
\hline
 & & -1703 + 3192y + 4341yy + 574y^3 + 20y^4 = 0
\end{array}$$

of $4341yy + 3192y = 1703 - 574y^3 - 20y^4 = 0$

Neem $4341yy + 3192y = 1703$, zo is $y = 0.36$;

dus $x = 7.36$ te groot.

Want $4341yy + 3192y = 1703 \quad \dfrac{-574y^3 - 20y^4}{4341}$

$$\overline{4341}^2 yy + 4341 \times 3192y = 7392723$$

$$\overline{\frac{3192}{2}}\Big|^2 = 2547216$$

$$\overline{4341}^2 yy + 4341 \times 3192y + \overline{\frac{3192}{2}}\Big|^2 = 9939939$$

$$\sqrt{}$$

$$4341y + 1596 = 3152$$

$$4341 \overline{\smash{)}\, 4341\, y = 1556}$$

$y = 0.36$ te groot, dewyl van dit *Surdische* $\sqrt{9939939}$ de overige *Termen* $574y^3 - 20y^4$ behoorden afgetrokken te zyn geweest.

Stel nu wederom $x = 7.35 + y$, zo is:

$$\begin{array}{rcl}
20x^4 & = & 58368.610125 + 31765.23\ y + 6482.7\,yy\ (+ 588y^3 + 20y^4 \\
14x^3 & = & 5558.915250 + 2268.945\,y + 308.7\,yy\ (+ 14y^3 \\
-1833\,xx & = & -99023.2425 - 26945.1\ \ y - 1833\ \ yy \\
-644\,x & = & -\ 4733.4 \quad -\quad 644\quad y \\
 & & +39800 \\
\hline
 & & -29.117125 + 6445.075\,y + 4958.4\ yy + 602\,y^3 + 20\,y^4 = 0
\end{array}$$

Neemende $4958.4\,yy + 6449.075\,y = 29.117125\ (- 602y^3 - 20y^4$

$$2 \overline{\smash{)}\, 6449.075}$$

$$\overline{3222.5375}\ \sqrt{}$$

$$10384747.93890625$$

$$\underline{144374.3526000} = 29.117125 \times 4958.4$$

$$\sqrt{\overline{10529122.29150625}}$$

$$3244.8609048$$

$$\underline{3222.5375}$$

$$4958.4 \overline{\smash{)}\, 22.3234048}$$

komt $y = 0.004502137$

$$\underline{7.35}$$

$x = 7.354502137$ te groot.

Want van de *Surdische* waarde $\sqrt{10529122.29150625}$ behoorde nog $602\,y^3 + 20\,y^4$ afgetrokken geweest te zyn. Doch om dat y nu zeer klein is, daarom yy nog veel kleinder; wederom y^3 nog veel kleinder, en y^4 nog ongegemeen veel kleinder, en derhalven is dit kleine verschil van zeer weinig belang; dat nog nader blykt, door dat wy hier mede reeds het begeerde antwoord van LUDOLF gevonden hebben, naamelyk, x meer als 7.35450213, en minder als 7.35450214.

AANMERKING.

Wy kunnen nu, met weinig moeite, de waarde van y nog veel naauwkeuriger bepaalen. Want, indien wy aanmerken, dat de Ruimte $\overline{ABCD}$ (*Plaat* I. *Fig.* 9.) het *Surdische Quadraat* ($\sqrt{105291229150625 - 602y^3 - 20y^4}$) verbeelt, zo is BC na genoeg $= 3244.8609048$. Stellende dan den Haak ECG $= 602y^3 + 20y^4$, zo is de Regthoek EBCH na genoeg $= 301y^3 + 10y^4$; neemende hier in $y = 0.004502137$, zo is $301y^3 + 10y^4 = 27469320676269440160$ (24), deeze gedeeld door BC $= 3244.8609048$,

$$\begin{array}{rl}
\text{komt na genoeg HC} = & \text{- - - - - -}\ 8465485 \\
\text{BC of DC} = & 0.004502137 \\
\hline
\text{Blyft } y = & 0.0045021362534515 \\
& 7.35 \\
\hline
x = & 7.3545021361534515
\end{array}$$

VI. VRAAG.

Daar zyn twee andere stukken Lands, hebbende elk vier regte hoeken, waar van de breedte des kleinsten in reden is tot zyne lengte, als 2 tot 5. Als men tot de grootheid van beide, het getal der beide lengtens vergaart, komt 'er 750; en vergaarende den Inhoud van het kleinste tot de lengte van het grootste, is de Som 200. Men vraagt na de lengte en breedte van ieder stuk Lands?

OPLOSSING. *Plaat* I. *Fig.* 10.

$$\begin{array}{rl}
\text{Laat zyn, de Inhoud AC} = & 10xx \\
\text{de Inhoud FI} = & 3yy \\
\text{AD} = & 5x \\
\text{FH} = & 3y \\
\hline
& \text{verg.}
\end{array}$$

10xx

$$\begin{array}{rl} 10xx + 3yy + 5x + 3y = 750 & \\ 10xx \qquad\qquad + 3y = 200 & \\ \hline 3yy + 5x = 550 & \text{afget.} \end{array}$$

$$10xx + 3y = 200$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{of } 3y = 200 - 10xx \\ 3 \\ y = \dfrac{200 - 10xx}{3} \end{array}\right\} \text{verm.}$$

$$3yy = \frac{40000 - 4000xx + 100x^4}{3}$$

$$5x = 5x$$

verg.

$$3yy + 5x = 5x + \frac{40000 - 4000xx + 100x^4}{3} = 550$$

3

$$15x + 40000 - 4000xx + 100x^4 = 1650$$

$$100x^4 - 4000xx + 15x + 38350 = 0$$

100

$$x^4 - 40xx + 0.15x + 383.5 = 0$$

$$\text{of } x^4 + 0.15x + 383.5 = 40xx$$

De waarde van x wordt door nadering, volgens den Regel *Falcis* gevonden. Men bespeurt aanstonds, door een naauwkeurig onderzoek, dat $x = 4$ een weinig te klein is. Want

1. Neemende $x = 4$, zo is $xx = 16$, en $x^4 = 256$.

$$\begin{array}{rl} x^4 = 256 & , \quad 40xx = 640 \\ 0.15x = 0.60 & \\ 383.5 & \\ \hline 640.1 & \\ 640 & \\ \hline 0.1 & \text{te klein.} \end{array}$$

2\. Neemende $x = 4.001$, zo is $xx = 16.008001$,

$$x^4 = 256.256096016001$$
$$0.15\,x = 0.60015$$
$$383.5$$
$$640.356246016001$$
$$40\,xx = 640.320040$$

te klein 0.036206016001

3\. Neemende $x = 4.002$, zo is $xx = 16.016004$,

$$x^4 = 256.512384128016$$
$$0.15\,x = 0.60030$$
$$383.5$$
$$640.612684128016$$
$$40\,xx = 640.640160$$

4.002 . . . + 0.027475871984
4.001 . . . − 0.036206016001

144896476036002
109930963807984

254827439843986
63681887985 ————————
$x = 4.0015683$

Derh. $x = 4.00156$ te klein, en $x = 4.00157$ te groot.

Is nu gevonden $x = 4.00157$,
zo is $2x = 8.00314$
$5x = 20.00785$
————— verm.

Inhoud van 't grootste $10\,xx = 160.125624649$
van 200
—————
$3y = 39.874375351$
$y = 13.291458450$
————— verm.

In-

Inhoud van 't kleinste $3yy = 529.9886032$
$10xx = 160.1256246$
$5x = 20.00785$
$3y = 39.8743753$

749.9964531
moest zyn 750

Het geen nog geen $\frac{4}{1000}$ van een Roede verschilt, en derhalven is het antwoord na genoeg gevonden.

AANMERKING.

1. LUDOLF tekent by dit Voorstel aan, dat *het ligter is, als het voorgaande*, het geen ook waar is, alzo de Vergelyking, wegens de getallen, zodanig is; dat men de waarde des Wortels, met weinig moeite, door nadering kan vinden; doch voor het overige is die van de zelfde natuur, als de voorgaande.

2. Hier op volgen nu vier byzondere regtlynige Figuuren, te weeten; een Vierhoek, Vyfhoek, Zeshoek, en Zevenhoek, welke begeerd worden, in een *Quadraat* te veranderen. Deeze hebben geen N°., en schynen van het getal der Voorstellen uitgesloten te zyn; het is nogthans niet waarschynelyk, dat dezelve als een aanhangsel der voorgaande zyn opgegeeven, alzo zy van een gantsch andere Natuur zyn. Wy zullen de wyze aantoonen, hoedanig dit geschied, het geen iemand klaar genoeg zal voorkomen, die zich de 37ste *Prop.* I. Boek, en 14 *Prop.* II. Boek van *Euclides* herinnert.

1. *Om een Vierhoek in een* Quadraat, *of gelykzydig regthoekig Vierkant, te veranderen.*

OPLOSSING.

Plaat I. *Fig.* 11.

Laat ABCD de gegeeven Vierhoek zyn.

1. Trek BD, en uit C, daar aan evenwydig, de regte CH, ontmoetende AD, of deszelfs verlengde, in H.

2. Trek uit B op AD de *Perpendiculair* BE; deel de zelve in twee gelyke deelen in Q, en trek door Q de onbepaalde lyn FG, *parallel* aan AH; vervolgens stel AF en HG *perpendiculair* in de punten A en H.
3. Verleng AH, maak HM=HG, en beschryf op AM een halven Cirkel.
4. Verleng dan GH tot deezen Omtrek in I, en maak op HI een *Quadraat*, dan zal het begeerde verricht zyn.

B E W Y S.

△BCD=BDH *Meetk.* II. 2. *Cor.* 1.
△ABD=ABD
——— verg.
ABCD=△ABH
△ABH=AFGH *Meetk.* II. 2. *Cor.* 1, 2.
AFGH=□HI *Meetk.* IV. 16.
———
Dienvolgens ABCD . . . =□HI. *Dat te bewyzen was.*

2. *Om een Vyfhoek in een* Quadraat *te veranderen.*

OPLOSSING.

Plaat I. *Fig.* 12.

Laat ABCDE de Vyfhoek zyn.

1. Trek de *Diagonaalen* AC, CE, en uit B en D, evenwydig aan dezelve, de lynen BF en DI, tot dat die AE, of deszelfs verlengde, in F en I ontmoeten.
2. Zo is dan de Driehoek FCI gelyk aan den Vyfhoek ABCDE; maak derhalven, als vooren, het *Quadraat* IKLM gelyk aan dien Driehoek, dan is het begeerde verricht.

3. *Om een Zeshoek in een* Quadraat *te veranderen.*

OPLOSSING.

Plaat I. *Fig.* 13.

Laat ABCDEF de Zeshoek zyn.

1. Trek de *Diagonaal* DF, en uit E, evenwydig aan de-

dezelve, de lyn EG; trek ook DG, zo is de Vyfhoek ABCDG gelyk aan den gegeeven Zeshoek ABCDEF.

2. Verander deezen Vyfhoek ABCDG in een Driehoek CIK; den Driehoek CIK in een Regthoek KLMI, en deezen in het *Quadraat* IOPQ; zo is de Zeshoek ABCDEF gelyk aan het *Quadraat* IOPQ.

4. *Om een Zevenhoek in een* Quadraat *te veranderen.*

OPLOSSING.

Plaat I. *Fig.* 14.

Laat ABCDEFG de Zevenhoek zyn.

1. Trek de *Diagonaal* EG, en daar aan evenwydig FH, vervolgens trek EH.
2. Wederom trek DH, en daar aan evenwydig EI; vervolgens voeg de punten D, I te ſaamen.

   Dan is de Figuur ABCDI een Vyfhoek van gelyke grootte.
3. Aan de andere zyde op gelyke wyze gedaan, zo is LDI een Driehoek van de zelfde grootte.
4. Deezen Driehoek LDI dan veranderd zynde in een Regthoek AMNI, en deeze in het *Quadraat* IPQR, zo is het begeerde verricht, gelyk uit de Figuur klaar genoeg te zien is.

VII. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 15.

In den Vierhoek ABCD is de *Diagonaal* AC getrokken, maakende met de zyde CD een regten hoek ACD, en uit den hoek A, op de zyde BC, de lyn AE; indien nu AB = 14, AC = 13, BE = CD = 9, en EC = 6 gegeeven zyn, en dat uit het punt E de lyn EF evenwydig aan AB getrokken wordt, vraagt men, hoe lang AF, FD, BF, en EF zullen zyn?

OPLOSSING.

1. In den regthoekigen Driehoek ACD, is AC = 13, CD = 9; dus AD = $5\sqrt{10}$.
2. In den Driehoek ABC, is AC = 13, AB = 14,

en BC $=$ 15, dus vindt men, volgens het 14de Voorstel Boek IX. van de *Gronden der Meetkunst*, BK $= 8\frac{2}{5}$, CK $= 6\frac{3}{5}$, en AK $= 11\frac{1}{5}$.

3. Dewyl nu AK en DH *Perpendiculairs* zyn, en de hoek ACD regt is, zo zyn de Driehoeken AKC, CHD gelykhoekig (*Meetk.* I. 9.), en dus ook gelykvormig.

Derhalven AC : KC :: CD : DH

$$13 - 6\tfrac{3}{5} - 9 \;//\; 4\tfrac{37}{65} = DH = OK$$

$$11\tfrac{1}{5} \;\ldots\; = AK$$

$$\overline{\quad 6\tfrac{41}{65} \;\ldots\; = AO \quad}$$

AC : AK :: CD : CH

$$13 - 11\tfrac{1}{5} - 9 \;//\; 7\tfrac{49}{65} = CH$$

$$6\tfrac{3}{5} = CK$$

$$\overline{\quad 14\tfrac{23}{65} = KH. \quad}$$

4. Aangezien nu ook de regthoekige Driehoeken AOD, AKN gelykvormig zyn, zo is:

AO : AD :: AK : AN

$$6\tfrac{41}{65} - 5\sqrt{10} - 11\tfrac{1}{5} \;//\; 8\tfrac{192}{431}\sqrt{10}.$$

AO : OD :: AK : KN

$$6\tfrac{41}{65} - 14\tfrac{23}{65} - 11\tfrac{1}{5} \;//\; 24\tfrac{528}{2155} = KN$$

$$8\tfrac{2}{5} = BK$$

$$\overline{\qquad\qquad} \text{ verg.}$$

$$32\tfrac{278}{431} = BN$$

$$9 = BE$$

$$\overline{\qquad\qquad} \text{ afget.}$$

$$23\tfrac{278}{431} = NE$$

5. Dewyl nu EF *parallel* aan AB is, zyn de Driehoeken ABN, EFN gelykvormig (*Meetk.* IV. 10.), waar door dan de deelen AF, DF, als mede de lyn EF, gevonden worden. Want

BN : BE :: AN : AF

$$32\tfrac{278}{431} - 9 - 8\tfrac{192}{431}\sqrt{10} \;//\; 2\tfrac{22}{67}\sqrt{10} = AF$$

$$5\sqrt{10} = AD$$

$$\overline{\quad 2\tfrac{45}{67}\sqrt{10} = DF \quad}$$

AF $=$

$AF = 2\frac{22}{67} \sqrt{10}$

$AN = 8\frac{192}{431} \sqrt{10}$

$FN = 6\frac{3382}{28877} \sqrt{10}.$

$BN : AB :: NE : EF$

$32\frac{278}{431} - 14 - 23\frac{278}{431} // 10\frac{47}{335} = EF.$

6. Om nu eindelyk de lyn BF te vinden; zulks kan gemakkelyk, door middel van den regthoekigen Driehoek BLF, geschieden, door eerst de regthoekszyden BL, FL van dien Driehoek te bepaalen.

Dewyl de Driehoeken AKN, FLN gelykvormig zyn, zo is

$AN : AK :: FN : FL$

$8\frac{192}{431} \sqrt{10} - 11\frac{1}{5} - 6\frac{3382}{28877} \sqrt{10} // FL = 8\frac{188}{1675}$

$\overline{FL}^2 = \frac{184633744}{2805625}$

$AN : NK :: FA : KL$

$8\frac{192}{431} \sqrt{10} - 24\frac{528}{2155} - 2\frac{22}{67} \sqrt{10} // KL = 6\frac{1146}{1675}$

$BK = 8\frac{2}{5}$

verg.

$BL = 15\frac{141}{1675}$

$\overline{BL}^2 = \frac{638370756}{2805625}$

$\overline{FL}^2 = \frac{184633744}{2805625}$

verg.

$\overline{BF}^2 = \frac{823004500}{2805625}$

Dat is $\overline{BF}^2 = 293\frac{7651}{22445}$

$BF = \sqrt{293\frac{7651}{22445}}$

VIII. VRAAG. *Plaat* I. *Fig.* 16.

Indien men, in den voorgaanden Vierhoek, uit een punt in de zyde BC tot AD, een lyn *parallel* aan AB trok, zodanig; dat daar door van den Vierhoek een ſtuk afgeſneeden worde, dat even zo groot zy, als de Driehoek ABF; vraagt men na de lengte van deeze lyn?

OPLOSSING.

In de voorgaande *Zevende Vraage* zyn alle de byzonzondere deelen van deeze Figuur gevonden, waarom wy dezelven hier ſlegts zullen overneemen.

1. $NB = 32\frac{178}{431}$, dus $\frac{1}{2}NB = 16\frac{139}{431}$

$$\begin{array}{rl} \textit{Perpend. } FL = & 8\frac{188}{1075} \\ \hline & \text{verm.} \\ \text{Inh. } BFN = & \frac{95591580}{721925} = PRN. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}NB = & 16\frac{139}{431} \\ AK = & 11\frac{1}{5} \\ \hline & \text{verm.} \\ \text{Inhoud } ABN = & \frac{393960}{2155}. \end{array}$$

2. Nu zyn de Driehoeken ABN, PRN gelykvormig, daarom:

$$\text{Inh. } ABN : \text{Inh. } PRN :: \overline{AB}^2 : \overline{PR}^2 \quad \textit{Meetk. } \text{IV. } 23.$$

$$\frac{393960}{2155} \text{ — } \frac{95591580}{721925} \text{ — } 196 \,//\, 141\frac{323}{355} = \overline{PR}^2$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{141\frac{323}{355}} = PR \text{ de begeerde lyn.}$$

AANMERKING.

Indien dit Voorſtel in getallen wordt opgeloſt, zo als Ludolf zulks begeert, is hetzelve van weinig belang, gelyk uit de voorgaande Oploſſing blykt; en al wierdt dit Meetkunſtig geëiſcht, is de Vraag nogthans niet zwaar, dewyl dezelve dan voornaamelyk hier op uit komt; „ Om den Driehoek PRN zo groot als den „ Driehoek BFN, en gelykvormig aan den Driehoek „ ABN te maaken."

CON-

CONSTRUCTIE.

Plaat II. *Fig.* 1.

1. Trek uit A en F, *parallel* aan BN, de lynen AT en FS, en ſtel uit W, het midden van BN, en uit N, de *Perpendiculairs* WZ, NT; zo is de Regthoek NWZT gelyk aan den Driehoek ABN; en de Regthoek NWVS gelyk den Driehoek BFN, om dat die Regthoeken van de halve *Baſis* BN, en ieder *Perpendiculair* AK en FL gemaakt zyn.

2. Maak dan NQ = NW, en beſchryf op QT, en op QS halve ronden, deeze doorſnyden NB in X en Y, waar door dan QXT, en QYS regthoekige Driehoeken zyn (*Meetk.* III. 7.), hebbende de zyden evenredig.

$$\left.\begin{matrix} NQ : NX :: NX : NT \\ NQ : NY :: NY : NS \end{matrix}\right\} \textit{Meetk. IV. 16.}$$

$$\text{Derh.} \left.\begin{matrix} \overline{NX}^2 = \square NQ.NT \\ \overline{NY}^2 = \square NQ.NS \end{matrix}\right\} \textit{Meetk. IV. 9.} \left\{\begin{matrix} = \triangle ABN \\ = \triangle FBN \end{matrix}\right.$$

3. Trek dan de lyn AX, en uit Y, evenwydig aan dezelve, de lyn YP, ſnydende AN in P; vervolgens uit P de lyn PR, evenwydig aan AB; zo is deeze (PR) de begeerde deel-lyn; want, de Driehoeken ANX, PNY zyn gelykvormig.

Dus AN:PN::NX:NY *Meetk.* IV. 10.

Fig. ABN:Fig. PRN :: $\overline{NX}^2$: $\overline{NY}^2$ *Meetk.* IV. 23.

Maar Drieh. ABN = $\overline{NX}^2$ door het Werk, *Art.* 2.

Dienvolgens $\triangle$PRN = $\overline{NY}^2$ = FBN *Art.* 2.

$\triangle$ABN - . . . = ABN gemeen.

afget.

ABRP . . . . = $\triangle$ABF.

IX. VRAAG. *Plaat* II. *Fig.* 2.

In de voorgaande Figuur, waar in de zelfde bekendheden onderſteld worden, begeert men een lyn RP, *parallel* aan de zyde DC, te trekken, zodanig, dat het ongeſchikt Vierkant APRB aan den Driehoek ABF gelyk zy. Men vraagt na de lengte van RP?

OPLOSSING.

In de voorgaande *Zevende Vraage* zyn alle de byzondere deelen, van deeze Figuur, gevonden, waarom wy die in dit Geval zullen overneemen.

$$
\begin{array}{rl}
1.\ BN = & 32\tfrac{278}{411} \\
BC = & 15 \\
\hline
CN = & 17\tfrac{278}{411} \\
\tfrac{1}{2}DH = & 2\tfrac{37}{130} \\
\hline
\end{array}
$$

afget. — , om dat $DH = 4\tfrac{37}{65}$ gevonden is. — verm.

Inhoud $CDN = \tfrac{2258685}{56030}$

Nu moet de Inhoud $PRN = NFB$ zyn, die aldaar $= \tfrac{285348}{2155}$ gevonden is.

2. En, om dat de Driehoeken NCD, NRP gelykvormig zyn, zo is;

$$\text{Inh. } NCD : \text{Inh. } NRP :: \overline{CD}^2 : \overline{PR}^2$$

$$\tfrac{2258685}{56030} \text{ —— } \tfrac{285348}{2155} \text{ —— } 81 \ // \ 266\tfrac{42}{715} = \overline{PR}^2$$

$$\sqrt{266\tfrac{42}{715}} = PR$$

AANMERKING.

Dit Voorſtel kan mede, op de zelfde wyze, als het voorgaande, meetkunſtig opgeloſt worden, want, de geheele zaak is wederom; „ om een Driehoek NRP „ zo groot te maaken, als een gegeeven Driehoek „ NBF, zodanig dat dezelve gelykvormig zy, aan den „ Driehoek NCD."

CONSTRUCTIE.

Plaat II. *Fig.* 3.

1. Trek uit F en D, *parallel* aan BN, de lynen FS, en DT, en maak $NV = \tfrac{1}{2}NB$, als mede $Nv = \tfrac{1}{2}NC$, zo

zo is $\square NV.NS = \frac{1}{2}\square NB.CF = \triangle BFN$; $\square Nv.NT = \frac{1}{2}\square NC.DH = \triangle CDN$.

2. Beſchryf op SV, en op Tv halve ronden; deeze doorſnyden de lyn NB in X en Y; waar door dan TXv, en SYV regthoekige Driehoeken zyn (*Meetk.* III. 7.), en dus $\overline{NY}^2 = \square NV.NS = \triangle BFN$, als mede $\overline{NX}^2 = \square Nv.NT = \triangle CDN$.

3. Trek dan de lyn DX, en uit Y, *parallel* aan deeze DX, de lyn YP; deeze zal AD in P ontmoeten. Trek dan eindelyk uit P de lyn PR, evenwydig aan DC, dan zal deeze de begeerde lyn zyn. Want, de Driehoeken NDX, en NPY zyn gelykvormig.

Dus ND : NP :: XN : NY *Meetk.* IV. 11.

Fig. NDC : Fig. NPR :: $\overline{NX}^2 : \overline{NY}^2$ *Meetk.* IV. 23.

Fig. $NDC = \overline{NX}^2$ door 't Werk *Art.* 2.

Derh. $NPR = \overline{NY}^2 = \triangle NBF$ *Art.* 2.

NAB . . . . $= \triangle NAB$

Dienv. ABRP . . . $= \triangle ABF$.

X. VRAAG. *Plaat* II. *Fig.* 4.

Men vraagt, op wat wyze men, in den bygevoegden Zeshoek, meetkunſtig een lyn, die evenwydig aan DC is, kan trekken, deelende denzelven in twee deelen; zodanig, dat het deel naar de regterhand gelyk zy aan een gegeeven Figuur GHIK?

OPLOSSING.

Ten eerſten, in de Figuur GHIK.

1. Verander de gegeeven Figuur GHIK, in een Driehoek GKL; dat is, trek KH, en uit I de lyn IL *Parallel* aan KH; vervolgens trek KL, zo is de Driehoek GKL gelyk aan den gegeeven Vierhoek GHIK.

2. Breng dan deezen Driehoek GKL onder de hoogte

van

van het punt B; dat is, trek uit B, evenwydig aan GL, de lyn BM, ontmoetende het verlengde van LK in M. Dan trek GM, en uit K de lyn KN *Parallel* aan MG, vervolgens trek MN; zo is den Driehoek MNL gelyk aan de Figuur GHIK, en onder de hoogte van B.

Ten tweeden, in de Figuur ABCDEF.

3. Trek BF, en uit A de lyn AO *Parallel* aan BF; indien dan BO getrokken wordt, zo is de Vyfhoek OBCDEO van gelyke grootte als de Zeshoek ABCDEFA. Neem nu OR = NL, zo is de Driehoek OBR = den Driehoek LMN, en dus ook = de Figuur GHIK. Dienvolgens blyft 'er het stuk RBCDER nog overig.

4. Verleng dan BA tot Q, en trek BP *Parallel* aan de zyde DC, waar tegen de begeerde Deel-lyn evenwydig moet getrokken worden. Daar blyft dus alleen nog overig, om den Driehoek QXY gelyk aan den Driehoek QRB, en gelykvormig aan den Driehoek QPB te maaken, het geen wy, als op de voorgaande wyze, zullen verrichten.

5. Trek door Q, de *Perpendiculair* QS, om daar door de lengte der *Perpendiculairs*, tot de Driehoeken QBR, QBP te verbeelden; neem daarom QT = $\frac{1}{2}$ *Basis* QR, en Qv = $\frac{1}{2}$ *Basis* QP. zo is daar uit □ SQ.QT = den Inhoud QBR, en □ SQ.Qv = den Inhoud QBP.

6. Beschryf dan op ST, en Sv, halve Cirkelen; deeze doorsnyden QP in V en W; en dienvolgens is

$\overline{QW}^2$ = □ SQ.Qv = Inhoud QBP, en zo wederom, op de zelve wyze, $\overline{QV}^2$ = □ SQ.QT = Inhoud QBR.

7. Eindelyk, trek BW, en uit V de lyn XV *parallel* aan BR; deeze zal AB in X ontmoeten: derhalven, trek XY, *parallel* aan BP, welke de begeerde Deellyn is.

Want, de Driehoeken QBW, en QXV zyn gelykvormig, en daarom:

QB

$QB : QX :: QW : QV$ *Meetk.* IV. 11.

Fig. QBP : Fig. $QXY :: \overline{QW}^2 : \overline{QV}^2$ *Ibid.* IV. 23.

Fig. $QBP = \overline{QW}^2$ door 't Werk *Art.* 6.

Dus $XQY = \overline{QV}^2$

$\overline{QV}^2 =$ Drieh. QBR door 't Werk (*Art.* 6.

By gevolg $QXY \ldots = $ Drieh. QBR

$QAF \ldots = \ldots QAF$ gegeeven

Dus $AXYF \ldots = ABRF$

Maar $ABRF = OBR =$ Fig. $GHIK$.

Derhalven $AXYF =$ Fig. $GHIK$ dat begeerd was.

I. AANMERKING.

Hier mede is dan aan de *Vraage* voldaan, naamelyk; dat het afgesneeden stuk AXYF gelyk is aan de gegeeven Figuur GHIK, en dat de Deel-lyn XY *parallel* is met een der zyden DC; doch hier in is de gegeeven Figuur GHIK kleinder genomen, als het afgesneeden deel ABPF, waar door het dan zodanig uitkomt, dat de Deel-lyn XY in de Figuur zelve bepaald is. Dewyl nu de Driehoek QXY gelyk moet zyn aan de Figuur QBR, en tevens gelykvormig aan den Driehoek QBP, zal het gebeuren, dat, naar maate de gegeeven Figuur GHIK grooter wordt, derzelver gelyke Driehoek en afgesneeden Figuur AXYF ook grooter zullen worden.

Zo nu deeze Figuur

1. Gelyk wordt aan de Figuur ABPF, zal BP de begeerde Deel-lyn weezen, in gevalle de lyn BP, dat is het punt P, in de *Basis* EF valt, gelyk zulks hier zo genomen is: maar indien P in de verlengde EF viel, zou men genoodzaakt zyn, deeze Deel-lyn BP te verleggen, zodanig, dat dezelve binnen de Figuur het bepaalde deel afsneedt.
2. Indien nu de gegeeven Figuur GHIK grooter gegeeven ware, als het deel ABPF, zal het punt X ze-

zekerlyk in de verlengde A B, en mogelyk het punt Y ook in de verlengde E F komen, waar door men in eene dubbele zwaarigheid zal vervallen; dewyl, in dit geval, de punten X en Y in de lynen B C, E D moeten bepaald worden, om daar mede het gegeeven deel af te snyden.

II. AANMERKING.

Plaat II. *Fig.* 5.

1. Om deeze zwaarigheden weg te neemen, zo laat de Figuur G H I K zo groot genomen worden, dat, wanneer men dezelve in een Driehoek, als G K L, verandert, en deeze wederom onder de hoogte van het punt B brengt, de Driehoek N M L = G K L = G H I K zy; zodanig, dat als O R = N L genomen, en dus de Driehoek O B R gelyk aan de Figuur G H I K zy, dat ook het punt R in de verlengde E F is, deeze B R moet verlegd worden. Hier toe trek E B, en uit R, evenwydig aan deeze E B, trek R S, ontmoetende E D in S, en trek B S, dan zal O E S B O gelyk aan den Driehoek O B R, en by gevolg ook gelyk G H I K zyn; dus is B S D C het overblyvende.
2. Dewyl nu de Deel-lyn Y X geheel aan den anderen kant valt, en evenwydig aan D C moet getrokken worden, zo kan nu, over den anderen kant, B C en E D verlengd worden tot Q, en derhalven moet men maar alleen een Driehoek Q Y X maaken, gelyk aan Q S B, en gelykvormig aan den Driehoek Q D C, het geen niet noodig is te herhaalen, dewyl zulks hier boven reeds getoond is.

XI. VRAAG. *Plaat* III. *Fig.* 1.

Men begeert in de Figuur C, uit een punt H, in de zyde G I, een regte lyn te trekken, welke den Zevenhoek in twee deelen snydt, zodanig, dat het eene deel gelyk zy, aan den Inhoud van den gegeeven Zeshoek (Figuur D), met nog het vyfde gedeelte van de Figuur C.

OPLOSSING.

1. Laat A B C D E G I A de gegeeven Zevenhoek C zyn,

zyn, en verander dien in een Driehoek FGK van de zelfde grootte, op deeze wyze. Trek IB, en daar aan evenwydig AZ; trek IZ: wederom GZ, en uit I de lyn IK *parallel* aan GZ, trek GK, dan zyn 'er, over deezen kant, twee hoeken afgesneeden; laat nu over den anderen kant op gelyke wyze gedaan worden; trek EC, en uit D de lyn D*a* *parallel* aan EC, trek E*a*, G*a*, en uit E de lyn EF *parallel* aan G*a*; vervolgens trek GF zo is de Zevenhoek in een Driehoek FGK verandert.

2. Laat MNOPQR de gegeeven Zeshoek D zyn; en insgelyks in een Driehoek veranderd worden. Trek PR, en uit Q de evenwydige QT, dan PT. Wederom, trek OT, en uit P de evenwydige P*v*, trek O*v*, zo zyn 'er ook aan deezen kant twee hoeken afgesneeden. Doet insgelyks aan den anderen kant; trek OM, en uit N de evenwydige NS, dan OS; zo is deeze Zeshoek D in een Driehoek SO*v*, van de zelfde grootte, veranderd. Breng dan deezen Driehoek SO*v* onder de zelfde hoogte, als den Driehoek FGK, met door G een lyn (GV), *parallel* aan S*v* te trekken; verleng dan één der zyden, als *v*O, tot V, vervolgens trek VS; uit O, daar aan evenwydig, OW, en eindelyk VW, zo is de Driehoek VW*v* van de zelfde grootte als de Figuur D, en onder de hoogte van den Driehoek FGK.

3. Deel dan den Driehoek FGK, of wel, de *Basis* FK, in vyf gelyke deelen, zo dat FC het $\frac{1}{5}$ van FK zy, zo is de Driehoek GFL het $\frac{1}{5}$ deel van den Driehoek FGK, en gevolgelyk het $\frac{1}{5}$ van de Figuur C. Neem nu LX $=$ W*v*, zo is nog GLX $=$ VW*v* $=$ de Figuur D, en dienvolgens GXBAIG het overblyfsel. Dus is alleen nog overig, om deeze Deel-lyn GX te verleggen, zodanig, dat die uit H komt; hier om trek XH, en uit G de lyn GY *parallel* aan deeze XH, vervolgens HY, deeze zal de begeerde Deel-lyn zyn.

$$\begin{array}{rl} \text{Want } \triangle HGX & = HYX \\ XBAIH & = XBAIH \\ \hline \text{komt } GXBAIG & = HYBAIH. \end{array}$$

En

En derhalven ſnydt deeze HY het gelyke overblyfſel af, door een Deel-lyn, welke uit een gegeeven punt H, in de zyde GI, getrokken is, naar den eiſch der Vraage.

AANMERKING.

De eenigſte bedenking, die men by deeze Ontbinding kan hebben, is; dat het zou kunnen gebeuren, dat de Deel lynen GX, HY, het zy een van beide, of beide te ſaamen, met hunne buitenſte punten X of Y, buiten de *Baſis* BC, of een zyde van de gegeeven Figuur C, vielen; doch deeze zwaarigheid is van weinig belang, dewyl deeze dan ſlegts behooren verplaatſt te worden, zodanig; dat derzelver inhoud binnen de Ruimte der Figuur afgeſneeden worde. Nu is het

1. Dat het punt X nooit in aanmerking komt, het zy hetzelve in de lyn BC, of in derzelver verlengde valt; want dit heeft alleen plaats met opzigt tot het punt Y, als het zelve in de verlengde BC valt.

2. Laaten wy hier toe een voorbeeld uitdenken; zodanig, dat de Figuur D, of ook het punt H, zodanig gegeeven worde, dat, door de *Conſtructie*, het punt Y buiten de *Baſis* BC valt, als in *Plaat* III. *Fig.* 2.; dus moet dan, zo als gezegd is, de lyn HY ſlegts verplaatſt worden. Trek, tot dat einde HC, en uit Y de lyn YZ *parallel* aan HC, ontmoetende DC in Z; vervolgens trek de begeerde Deel-lyn HZ, zo zal deeze, binnen de Figuur, wederom het begeerde deel afſnyden.

Want $\triangle HCY = \triangle HCZ$

Derhalven $HYBAIH = HZCBAIH$

Maar HYBAIH was het begeerde overblyfſel.

Dienvolgens HZCBAIH mede het begeerde overblyfſel.

XII. VRAAG. *Plaat* III. *Fig.* 3.

Zoek een vlakke Figuur, gelykvormig aan de Figuur A, welke in reden is tot den Driehoek BAC, als de lyn E tot de lyn F, of als 11 tot 16. Indien nu de zyden des Driehoeks, zo als die in de Figuur geteekend ſtaan, gegeeven zyn, en dat het begeerde Meetkunſtig voldaan is, vraagt men, hoe lang iedere zyde van de Figuur A moet zyn?

OPLOSSING.

I. *Telkunſtig.*

1. Om dit Voorſtel door Rekening, of Telkunſtig, te beantwoorden, is van weinig belang. Want, aangezien de drie zyden van den Driehoek ABC bekend zyn, vindt men gemakkelyk den Inhoud ABC $= 84$.

2. Nu is de *Proportie* van den Inhoud ABC tot den Inhoud van de Figuur GHIK, als $11 : 16 :: 84 : 122\frac{2}{11}$ voor den Inhoud GHIK.

3. Wederom kan de Inhoud van den Vierhoek DEFG ook met weinig moeite gevonden worden. Want de drie zyden van den Driehoek DEG zyn $8\frac{4}{5}$, $9\frac{1}{5}$, 10; en de drie zyden van den Driehoek EFG zyn 8, 6, 10; waar door de Inhoud van ieder Driehoek, en gevolgelyk van den geheelen Vierhoek DEFG gevonden zal worden te zyn $61\frac{1}{5}$.

4. Dewyl nu begeerd wordt, dat deeze Figuuren GHIK, en DEFG malkanderen gelykvormig moeten zyn, en men bekend heeft, den Inhoud van deeze beide Figuuren, als mede alle de byzondere deelen van den Vierhoek DEFG, kunnen alle de byzondere deelen van den Vierhoek DEFG ook gemakkelyk gevonden worden, na het 23ſte *Theorema* des vierden Boeks van de *Gronden der Meetkunſt.*

Inh. Inh.
DEFG — GHIK
$61\frac{1}{3}$ —— $122\frac{2}{11}$ ——
——— 33
$8\ \frac{2024 \text{ —— } 4032}{253 \text{ —— } 504}$

$\overline{DE}^2 = 87\frac{1}{9} // \overline{HI}^2 = \frac{\overline{56}|^2 \times 14}{253}$

$\overline{EF}^2 = 64 // \overline{IK}^2 = \frac{2304 \times 14}{253}$

$\overline{FG}^2 = 36 // \overline{GK}^2 = \frac{1296 \times 14}{253}$

$\overline{GD}^2 = 75\frac{1}{9} // \overline{GH}^2 = \frac{2704 \times 14}{253}$

$\overline{GE}^2 = 100 // \overline{GI}^2 = \frac{3600 \times 14}{253}$

Derhalven $HI = 56\sqrt{\frac{14}{253}}$
$IK = 48\sqrt{\frac{14}{253}}$
$GK = 36\sqrt{\frac{14}{253}}$
$GH = 52\sqrt{\frac{14}{253}}$
$GI = 60\sqrt{\frac{14}{253}}$
de byzondere deelen van den Vierhoek GHIK.

II. *Meetkunstig.*

Indien men dit Voorstel Meetkunstig begeert op te lossen, komen 'er twee zaaken in aanmerking.

1. Dewyl de reden van den Inhoud ABC tot die van GHIK, als 11 tot 16 gegeeven is, moet men een Driehoek vinden, tot welken de gegeeven Driehoek ABC in reden is, als de gegeevene *Proportie*, dan zal men de grootheid van de begeerde Figuur, onder de gedaante van eenen Driehoek, kunnen bepaalen.
2. Dan wordt 'er nog begeerd, om deeze gevondene Figuur in een andere, van de zelfde grootte te veranderen, zodanig, dat dezelve gelykvormig zy, aan de gegeeven Figuur DEFG.

Om dit in een geschikte orde te doen, heeft men de volgende *Constructie* met aandagt in te zien.

Plaat III. *Fig.* 4.

1. Maak $AB = 1$, $BC = 11$, en $BD = 16$ gelyke deelen

len; beschryf op AC en AD halve Cirkelen, en stel BF *perpendiculair* op AD, dan zyn de Vierkanten BE en BF tot malkanderen in reden, als 11 tot 16.

Want, AB : BE :: BE : BC
$1 \text{ —— : —— : —— } 11 \;//\; \overline{BE}^2 = 11.$

AB : BF :: BF : BD
$1 \text{ —— : —— : —— } 16 \;//\; \overline{BF}^2 = 16.$

2. Maak BGI gelyk den gegeeven Driehoek (13, 14, 15), en trek EG, als mede FH *parallel* aan dezelve, ontmoetende BG in H; dan HK *parallel* aan GI, zo is BHK de grootheid van de begeerde Figuur.

Want BE : BF :: BG : BH

$\overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: \overline{BG}^2 : \overline{BH}^2$ *Meetk.* IV. 4.

$\triangle GBI : \triangle HBK :: \overline{BG}^2 : \overline{BH}^2$ *Ibid.* IV. 23.

$\triangle GBI : \triangle HBK :: \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2$ *Ibid.* IV. 5. *Cor.* 2.
$:: 11 : 16.$

3. Verander den Driehoek HBK in een *Quadraat*; dat is, trek de *Perpendiculair* HL, en regthoekig door het midden derzelve de lyn QR; dan is $\square$ BQRK $= \triangle$ HBK.

Neem MK = KR, beschryf op BM een halven Cirkel, en trek uit K de *Perpendiculair* KN, zo is het *Quadraat* KNOP = BQRK = BHK.

4. Verander ook de gegeeven Figuur A in een *Quadraat* (*Plaat* III. *Fig.* 5.); dat is; trek *va parallel* aan TW, ontmoetende de verlengde SW in *a*. Trek T*a*, zo is de Driehoek ST*a* gelyk aan de Figuur A; dan door het midden van de *Perpendiculair* T*g* de lyn *bc* getrokken, evenwydig aan S*a*, zo is de Regthoek S*abc* $= \triangle$ ST*a* = Fig. A. Maak dan S*d* = S*c*, en beschryf op *da* een halven Cirkel, zo is $\overline{Sc}^2$ = Fig. A. Neem dan S*f* = KN, zo is $\overline{Sf}^2 = \triangle$ BHK.

5. Vervolgens trek eW, en uit f de lyn fV *parallel* aan eW. Maak dan op SV de Figuur SVXY gelykvormig aan $SWvT$, zo is het begeerde verricht.

Want $Se : Sf :: SW : SV$. *Meetk.* IV. 11.

$$\overline{Se}^2 : \overline{Sf}^2 :: \text{Fig. A} : \text{Fig. SVXY}.$$

$$\overline{Se}^2 = \text{Fig. A, dus } \overline{Sf}^2 = \text{Fig. SVXY}.$$

By gevolg $\overline{Sf}^2 = \text{Fig. BHK} = \text{Fig. SVXY}.$

XIII. VRAAG.

Zoek een getal, dat, vermenigvuldigd zynde met $52\frac{1}{4}$, het *Product* $41\frac{1}{4}$ minder zy, als 11 maal de *Cubic* van dat zelve getal.

OPLOSSING.

Stel het Getal $= x$

$$\underline{\quad 52\tfrac{1}{4}}$$
$$52\tfrac{1}{4}x$$
De *Cubic* x^3 $\qquad 41\frac{1}{4}$ verg.

$$\underline{11}$$
$$11x^3 = 52\tfrac{1}{4}x + 41\tfrac{1}{4}$$
$$11 \;\underline{}$$
$$x^3 = 4\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{3}{4}$$
$$xx = xx$$
$$\underline{} \text{ verg.}$$
$$x^3 + xx = xx + 4\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{3}{4}$$
$$x+1 \;\underline{}$$
$$\text{Komt } xx = x + 3\tfrac{3}{4}$$
$$\underline{}$$
$$xx - x = 3\tfrac{3}{4}$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$\underline{} \text{ verg.}$$
$$xx - x + \tfrac{1}{4} = 4$$
$$\surd \;\underline{}$$
$$x - \tfrac{1}{2} = 2$$
$$\underline{}$$
$$x = 2\tfrac{1}{2}.$$

XIV.

XIV. VRAAG.

Zoek een Getal, welks *Cubic* 192 minder zy, dan 16 maal deszelfs *Quadraat*.

OPLOSSING.

Stel het Getal $= x$

zo is $x^3 = 16xx - 192$

$64 = \; . \; . \; . \; . \; 64$

afget.

$x^3 - 64 = 16xx - 256$

$x - 4$

$xx + 4x + 16 = 16x + 64$

$xx - 12x = 48$

$36 = 36$

verg.

$xx - 12x + 36 = 84$

$\surd$

$x - 6 = \surd 84$, komt alzo

$(x = 6 + \surd 84.$

XV. VRAAG.

Daar is een getal; als men tot deszelfs *Cubic* driemaal deszelfs *Quadraat* vergaart, is de ſom 18 meer, als 7 maal het zelve Getal. Vraage na het getal?

OPLOSSING.

Stel het Getal $= x$

zo is $x^3 + 3xx = 7x + 18$

$4 = \; . \; . \; . \; . \; 4$

afget.

$x^3 + 3xx - 4 = 7x + 14$

$x + 2$

$xx + x - 2 = 7$

$2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

verg.

$xx + x + \frac{1}{4} = 9\frac{1}{4}$

$\surd$

$x + \frac{1}{2} = \surd 9\frac{1}{4}$

$x = -\frac{1}{2} + \surd 9\frac{1}{4}.$

XVI. VRAAG.

Zoek een getal, zodanig, dat zo men tot deszelfs *Cubic* tweemaal deszelfs *Quadraat* vergaart, de Som 15 meer zy, dan 8 maal het zelve getal.

OPLOSSING.

Stel het Getal $= x$.

$$\text{zo is } x^3 + 2xx = 8x + 15$$
$$9 = \dots 9$$
$$\overline{}\ \text{verg.}$$
$$x^3 + 2xx + 9 = 8x + 24$$
$$x+3 \ \overline{}$$
$$xx - x + 3 = 8$$
$$2\tfrac{1}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$
$$\overline{}\ \text{afget.}$$
$$xx - x + \tfrac{1}{4} = 5\tfrac{1}{4}$$
$$\surd\ \overline{}$$
$$x - \tfrac{1}{2} = \surd\, 5\tfrac{1}{4}$$
$$\overline{}$$
$$x = \tfrac{1}{2} + \surd\, 5\tfrac{1}{4}$$

XVII. VRAAG.

Vindt twee getallen, zodanig, dat, als men de Som hunner *Cuben* deelt door de ſom der getallen, het *Quotient* 400 zy; en dat 'er 600 kome, als men het verſchil dier *Cuben* door het verſchil der getallen deelt. Welke zyn die getallen?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x + y$ en $x - y$ $\Big\}$ dan zyn de *Cuben* $\Big\{ \begin{array}{l} x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3 \\ x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3 \end{array}$

Som $2x$ — Som $2x^3 \ \dots + 6xyy$

Verſchil $2y$ — Verſchil $6xxy + 2y^3$

De Som der *Cuben* gedeeld door de Som der getallen, komt $xx + 3yy = 400$

Het verſchil der *Cuben* gedeeld door 't verſchil der getallen, komt $3xx + yy = 600$

Derh.

Derh. $3xx + yy \times 3 = 600 \times 3$ | $xx + 3yy = 400$
$= 9xx + 3yy = 1800$ | $xx \ldots = 175$
$xx + 3yy = 400$ | ——— afg.
——— afget. | $3yy = 225$
$8xx \ldots = 1400$ | 3 ———
8 ——— | $yy = 75$
$xx \ldots = 175$ | $\surd$ ———
$\surd$ ——— | $y = \surd 75$
$x \ldots = \surd 175$

Dus $x = \surd 175$ of $5\surd 7$
$y = \surd 75$ of $5\surd 3$

$x + y = \surd 175 + \surd 75$, dat is $5\surd 7 + 5\surd 3$.
$x - y = \surd 175 - \surd 75$, dat is $5\surd 7 - 5\surd 3$.

XVIII. VRAAG.

Deel 6 in twee deelen, zodanig, dat, als men het vierkant des grootsten deels met het kleinste deel vermenigvuldigt, het *Product* 7 zy. Welke zyn de deelen?

OPLOSSING.

Stel het grootste deel $= x$, zo is het kleinste $= 6 - x$.

x
——— $\surd$
xx
$6 - x$
——— verm.
$6xx - x^3 = 7$
———
$x^3 = 6xx - 7$
$1 = \ldots 1$
——— verg.
$x^3 + 1 = 6xx - 6$
$x + 1$ ———
$xx - x + 1 = 6x - 6$
———
$xx - 7x = -7$
$12\frac{1}{4} = 12\frac{1}{4}$
——— verg.

 $xx -$

$$\sqrt{\overline{xx - 7x + 12\tfrac{1}{4} = 5\tfrac{1}{4}}}$$

$$x - 3\tfrac{1}{2} = \sqrt{5\tfrac{1}{4}}$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\tfrac{1}{2} + \sqrt{5\tfrac{1}{4}} \text{ het grootste} \\ 6 - x = 2\tfrac{1}{2} - \sqrt{5\tfrac{1}{4}} \text{ het kleinste} \end{array}\right\} \text{deel.}$$

XIX. VRAAG.

Vindt twee Getallen, als men het *Quadraat* van hunne Som, met hun verschil vermenigvuldigt, komt 'er 100; en als men hun verschil met het *Quadraat* des kleinsten getals vermenigvuldigt, komt 'er 10. Men vraagt na de Getallen?

OPLOSSING.

Stel het grootste getal $= x$, en het kleinste $= y$.

Zo is de Som $= x + y$ . . $\square$ . . $xx + 2xy + yy$

het verschil $= x - y$ . . . . . $x - y$ verm.

$$\left.\begin{array}{r} \overline{xx + 2xy + yy} \, . \, \overline{x - y} = 100 \\ yy \, . \, \overline{x - y} = 10 \end{array}\right\} \text{gedeeld.}$$

$$\frac{xx + 2xy + yy}{yy} = 10$$

$$\sqrt{}$$

$$\frac{x + y}{y} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } x = -y + y\sqrt{10}$$

$$\text{gedeeld}\left\{\begin{array}{l} x - y = -2y + y\sqrt{10} \\ yy \, . \, \overline{x - y} = 10 \end{array}\right.$$

$$yy = \frac{10}{-2y + y\sqrt{10}}$$

$$\overline{}\, y$$

$$y^3 = \frac{10}{-2 + \sqrt{10}}$$

Om

Om y^3 te vinden.

Deel $-2+\sqrt{10}$ . . . in . . . 10

$2+\sqrt{10}$ $\qquad$ $2+\sqrt{10}$

$-4+10$ $\qquad$ $20+10\sqrt{10}$

$= 6$ ged.

$$y^3 = 3\tfrac{1}{3} + 1\tfrac{2}{3}\sqrt{10}$$
$$= 3\tfrac{1}{3} + \sqrt{27\tfrac{7}{9}}$$

Dus $y = \sqrt[3]{3\tfrac{1}{3} + \sqrt{27\tfrac{7}{9}}}$.

Om x^3 te vinden.

Wy hebben gevonden $x = -y + y\sqrt{10}$

Dus $x = y . \overline{-1+\sqrt{10}}$ $\sqrt[3]{\ }$

$$x^3 = y^3 . \overline{-31 + 13\sqrt{10}}$$

$$y^3 = \frac{10 + 5\sqrt{10}}{3} \text{ verm.}$$

$-310 - 155\sqrt{10}$
$+130\sqrt{10} + 650$

$$x^3 = \frac{340 - 25\sqrt{10}}{3}$$

$$x^3 = 113\tfrac{1}{3} - 8\tfrac{1}{3}\sqrt{10}, \text{ of } 113\tfrac{1}{3} - \sqrt{694\tfrac{4}{9}}$$

$x = \sqrt[3]{113\tfrac{1}{3} - \sqrt{694\tfrac{4}{9}}}$ het grootste $\}$ getal.
$y = \sqrt[3]{3\tfrac{1}{3} + \sqrt{27\tfrac{7}{9}}}$ het kleinste

Om de Som $x+y$ te vinden.

Daar is gevonden $x+y = y\sqrt{10}$

$$\overline{x+y}|^3 = y^3 . 10\sqrt{10}$$

$$y^3 = \frac{10 + 5\sqrt{10}}{3}$$

$$\overline{x+y}|^3 = \frac{500 + 100\sqrt{10}}{3} \text{ of } 166\tfrac{2}{3} + 33\tfrac{1}{3}\sqrt{10}$$

$$x + y = \sqrt[3]{166\tfrac{2}{3} + \sqrt{11111\tfrac{1}{9}}}$$

Om het verschil $x - y$ te vinden.

Daar is gevonden $x - y = y . \overline{-2 + \sqrt{10}}$

$$\overline{x-y}|^3 = y^3 . \overline{-68 + 22\sqrt{10}}$$

$$y^3 = \frac{10 + 5\sqrt{10}}{3}$$

$$\overline{x-y}|^3 = 140 - \sqrt{16000}$$

Dus $x - y = \sqrt[3]{140 - \sqrt{16000}}$

XX. VRAAG.

Zoek twee Getallen zodanig, dat, als men den Vierkants-wortel uit de Som der getallen met het grootste getal vermenigvuldigd, het *product* 10 zy; en dat 'er 20 kome, als men het *Quadraat* des grootsten getals met het kleinste getal vermenigvuldigt. Vraage na de getallen?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x$ en y, zo is de som $= x + y$

Derh. $\sqrt{x+y} \times x = 10$ gr. get. x // *Quadr.* xx

$\sqrt{}$ kleinste . . . . y

$xx . \overline{x+y} = 100$ verm. $xxy = 20$

$xx . \quad y = 20$

afget.

$x^3 = 80$, dus $x = \sqrt[3]{80}$.

We-

Wederom, dewyl $xxy = 20$ is

$$\text{zo is } x^6 y^3 = 8000$$
$$x^3 = 80 \text{ zynde, is } x^6 = 6400 \quad \text{gedeeld}$$

$$y^3 = 1\tfrac{1}{4}$$
$$\sqrt[3]{}$$
$$y = \sqrt[3]{1\tfrac{1}{4}}.$$

XXI. VRAAG.

Daar zyn twee Getallen, als men het *product* derzelven nog met 5 vermenigvuldigt, komt 'er 80 min het *Quadraat* van de Som der getallen; en als men de Som der *Cuben* van deeze getallen, door de Som der getallen deelt, is het *Quotient* 16. Men vraagt naar de getallen?

OPLOSSING.

Stel voor de get. $\begin{cases} x+y \\ x-y \end{cases}$ dan zyn de *Cuben* $\begin{cases} x^3+3xxy+3xyy+y^3 \\ x^3-3xxy+3xyy-y^3 \end{cases}$

$$\textit{Product } xx-yy \qquad \text{Som } 2x^3 \;.\;.\; +6xyy$$
$$5 \qquad\qquad 2x$$
$$5xx-5yy \qquad\qquad xx \;.\;.\; +3yy=16$$
$$4xx \qquad\qquad\qquad 9$$
$$9xx+27yy=144$$
$$9xx-5yy=80 \;.\;.\; 9xx-5yy=80$$
$$\text{afgetr.}$$
$$32yy=64$$
$$5yy=10 \qquad 32$$
$$\text{verg.} \qquad yy=2 \,//\, y=\sqrt{2}$$
$$9xx \;.\;.\;.\; =90 \;.\;.\;.\;.\;.\; xx=10 \,//\, x=\sqrt{10}$$

$$\text{Derhalven } x+y=\sqrt{10}+\sqrt{2}$$
$$x-y=\sqrt{10}-\sqrt{2}$$

XXII. VRAAG.

Deel 8 in twee deelen, zodanig, dat, als men het *Quadraat* des grootsten deels met het kleinste vermenigvuldigt, het *Product* 40 zy.

OP-

OPLOSSING.

Stel het eene deel $= x$, zo is het andere $= 8 - x$.

$$\begin{array}{l} \text{Derhalven } 8 - x \text{ verm.} \\ \text{met } xx \\ \hline \text{Komt } 8xx - x^3 = 40 \\ \hline \text{of } x^3 = 8xx - 40 \\ \quad 8 = \ldots\ldots 8 \\ \hline x^3 + 8 = 8xx - 32 \end{array}$$

$$x + 2 \;\; \overline{\quad xx - 2x + 4 = 8x - 16 \quad}$$

$$\begin{array}{c} xx - 10x = -20 \\ 25 = \ldots 25 \\ \hline xx - 10x + 25 = 5 \end{array}$$

$$\sqrt{} \;\; \overline{\quad x - 5 = \sqrt{5} \quad}$$

Derhalven $x = 5 + \sqrt{5}$ het eene $\}$ getal.
$8 - x = 3 - \sqrt{5}$ het andere $\}$

XXIII. VRAAG.

Als men 3 *quadrateert*, en het komende *product*, dat 9 is, met 7 vermenigvuldigt, komt 'er 63. Men vraagt, of het getal 10 niet in twee andere deelen kan gedeeld worden, zodanig, dat als men het *Quadraat* des kleinsten deels met het grootste vermenigvuldigt, het *product* mede 63 zy?

OPLOSSING.

Stel voor $\}$ $3 - x \ldots \square \ldots 9 - 6x + xx$
de deelen $\}$ $7 + x \ldots\ldots 7 + x$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \text{ verm.}$$

$$63 - 33x + xx + x^3 = 63$$

$$\overline{\quad -33x + xx + x^3 = 0 \quad}$$

$$x \;\; \overline{\qquad\qquad}$$

$$-33 + x + xx = 0$$

$$xx + x = 33$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$
verg.
$$xx + x + \tfrac{1}{4} = 33\tfrac{1}{4}$$
$\surd$
$$x + \tfrac{1}{2} = \surd\, 33\tfrac{1}{4}$$

$$x = -\tfrac{1}{2} + \surd\, 33\tfrac{1}{4}$$

Derhalven $3 - x = 3\tfrac{1}{2} - \surd\, 33\tfrac{1}{4}$

$7 + x = 6\tfrac{1}{2} + \surd\, 33\tfrac{1}{4}$.

AANMERKING.

1. Deeze *Vraag* is van de zelfde natuur, als *Vraagstuk* 70, 71, 72, 73 van *de eerste honderd konstige Vraagen* van MARTEN WILKENS, naamelyk:

—In *Vraagstuk* 70 en 71 wordt begeerd; *een gegeeven getal zodanig te deelen, dat het* Quadraat *des kleinsten deels, met het grootste vermenigvuldigd zynde, een bekende Som uitmaakt.*

=In *Vraagstuk* 72 en 73 wordt begeerd; *een gegeegen Getal zodanig te deelen, dat het* Quadraat *des grootsten deels, met het kleinste vermenigvuldigd zynde, een bekende Som uitmaakt.*

2. En dewyl de Ontbinding, zo als die hier gedaan is, ons beter als die van MARTEN WILKENS voorkomt; zullen wy de Vraag hier nog eens, doch in *generaale Termen*, oplossen; stellende, dat 'er twee getallen gegeeven zyn.

Stel voor de deelen $\left\{\begin{matrix} a - x \\ b + x \end{matrix}\right\}$ dus $\left\{\begin{matrix} aa - 2ax + xx \\ b + x \end{matrix}\right.$

verm.

$$aab + \overline{aa - 2ab}\,.\,x + \overline{b - 2a}\,.\,xx + x^3 = aab$$

$$\overline{aa - 2ab}\,.\,x + \overline{b - 2a}\,.\,xx + x^3 = 0$$
x
$$\overline{aa - 2ab} + \overline{b - 2a}\,.\,x + xx = 0$$

xx,

$$xx + \overline{b - 2a}\,.\,x = 2ab - aa$$

$$\overline{\tfrac{1}{2}b - a}|^2 = \tfrac{1}{4}bb - ab + aa$$

verg.

$$xx + \overline{b - 2a}\,.\,x + \overline{\tfrac{1}{2}b - a}|^2 = \tfrac{1}{4}bb + ab$$

$\surd$

$$x + \tfrac{1}{2}b - a = \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + ab}$$

Waar door wy hebben $x = a - \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{b\,.\,\overline{\tfrac{1}{4}b + a}}$

Derh. zyn de deelen $a - x = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{b\,.\,\overline{\tfrac{1}{4}b + a}}$

$$b + x = a + \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{b\,.\,\overline{\tfrac{1}{4}b + a}}$$

Laat nu in dit Voorstel van Ludolf bekend zyn, $a = 3$, $b = 7$; zo is $a - x = 3\tfrac{1}{2} - \sqrt{33\tfrac{1}{4}}$

$$b + x = 6\tfrac{1}{2} + \sqrt{33\tfrac{1}{4}}.$$

COROLLARIUM.

Nu zyn hier door de aangehaalde 70ste en 71ste Vraagstukken van Marten Wilkens mede ontbonden, om dat daar in het eene paar getallen gegeeven is.

Want, in N°. 70. is $a = 3$, $b = 8$;

dienvolgens $a - x = 4 - \sqrt{40}$.

$b + x = 7 + \sqrt{40}$.

In N°. 71. is $a = 2$, $b = 5$; derh. $a - x = 2\tfrac{1}{2} - \sqrt{16\tfrac{1}{4}}$.

$b + x = 4\tfrac{1}{2} + \sqrt{16\tfrac{1}{4}}$.

XXIV. VRAAG.

Zoek twee Getallen, welke 3 verschillen, van zodanige eigenschap, dat, als men by het vermenigvuldigde deszelven het grootste getal vergaart, de Som een *rationaal Quadraat* zy.

OPLOSSING.

Stel de Getallen $= x$, en $x + a$

Dan moet $xx + ax + x + a$ een *rationaal Quadraat* zyn.

Stel den wortel $= x - b$,

zo is $xx+ax+x+a=xx-2bx+bb$

$$2bx+ax+x=bb-a$$

$$x=\frac{bb-a}{2b+a+1}$$

Nu is $a=3$ gegeeven, en laat $b=2$ genomen worden, zo is $x=\frac{1}{8}$.

Dienvolgens $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{8} \\ x+a=3\frac{1}{8} \end{array}\right\}$ de getallen.

XXV. VRAAG.

Zoek twee getallen, zodanig, dat, als men het kleinste van het grootste trekt, de rest een *rationaal Quadraat* zy; en als men by het *Quadraat* des grootsten het kleinste getal vergaart, en by het *Quadraat* des kleinsten het grootste getal vergaard, elk der komende Sommen byzonder een *rationaal Quadraat* zy.

OPLOSSING.

$\left.\begin{array}{l} \text{Stel het eene getal } = x+2yy \\ \text{en het andere } = x-2yy \end{array}\right\}$ zo moet nog zyn

$\left.\begin{array}{l} \overline{x+2yy}|^2+x-2yy \\ \overline{x-2yy}|^2+x+2yy \end{array}\right\}$ dat is,

$\left\{\begin{array}{l} 4xx+4xyy+4y^4+x-2yy \\ 4xx-4xyy+4y^4+x+2yy \end{array}\right\}$ *rationaale Quadraaten.*

Verschil $8xyy \quad . \quad . \quad -4yy$

De Deelers zyn $2x-1$, en $4yy$, waar van de halve Som is $x-\frac{1}{2}+2yy$

$$4xx+4xyy+4y^4+x-2yy=xx+\tfrac{1}{4}+4y^4-x+4xyy-2yy$$

Komt $2x=\frac{1}{4}$, dus $x=\frac{1}{8}$.

Nu mag men y naar welgevallen neemen, om dat die door de herleiding verdweenen is.

Neemende $y=\frac{1}{8}$, zo zyn de getallen $\frac{5}{32}$ en $\frac{3}{32}$.

AN-

A N D E R S.

Indien men de getallen $= x$ en y stelt, zo moeten $xx + y$, $yy + x$, $x + y$ *rationaale Quadraaten* zyn.

De twee eerste zyn $xx + y$
$yy + x$

Verschil $xx - yy - x + y$

Deelers $x - y$, en $x + y - 1$

Hier van is de halve Som $x - \frac{1}{2}$

$$xx + y = xx - x + \frac{1}{4}$$

$$x + y = \frac{1}{4}.$$

Waar uit blykt, dat x en y naar welgevallen kunnen genomen worden, en dat alle de getallen zullen voldoen; indien hunne Som $= \frac{1}{4}$ is.

XXVI. V R A A G.

Daar zyn twee Getallen, waar van het eene driemaal zo veel is als het andere; en zo men het kleinste getal tot de derde magt verheft, en van het komende het *Quadraat* des grootsten aftrekt, is de rest een *rationaale Cubic.* Vraage na de getallen?

O P L O S S I N G.

Stel de getallen $= x$ en $3x$, zo moet $x^3 - 9xx$ een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $= ax$

zo is $x^3 - 9xx = a^3 x^3$

xx

$$x - 9 = a^3 x$$

of $x - a^3 x = 9$

$1 - a^3$

$$x = \frac{9}{1 - a^3}$$

Neemende $a = \frac{1}{2}$, zo is $x = 10\frac{2}{7}$ het eene $\}$ getal,
$3x = 30\frac{6}{7}$ het andere $\}$ enz.

XXVII.

XXVII. VRAAG.

Zoek twee Getallen, zodanig, dat, als men tot de *Cubic* des grootsten het *Quadraat* des kleinsten vergaart, de Som een *rationaale Cubic* zy.

OPLOSSING.

Stel de Getallen $= ax$, en bx, zo moet $a^3x^3 + bbxx$ een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $= cx$ $\quad \sqrt[3]{}$

$$a^3x^3 + bbxx = c^3x^3$$

$$xx \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$a^3x + bb = c^3x$$

$$c^3x - a^3x = bb$$

$$c^3 - a^3 \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$x = \frac{bb}{c^3 - a^3}$$

Derhalven $ax = \dfrac{abb}{c^3 - a^3}$

$$bx = \frac{b^3}{c^3 - a^3}$$

Nu moet, volgens het Voorstel, a grooter genomen worden als b, om aan de Conditien te voldoen; en volgens de Vergelyking moet wederom c grooter zyn als a, om *negative* getallen te vermyden.

Neemende $a = 2$, $b = 1$, en $c = 3$, zo zyn de getallen $\frac{2}{19}$, $\frac{1}{19}$.

Neemende $a = 2$, $b = 1$, en $c = 4$, zo zyn de getallen $\frac{2}{56}$, $\frac{1}{56}$.

XXVIII. VRAAG.

Zoek twee Getallen, waar van het eene tweemaal grooter is als het andere, zodanig, dat zo men hunne *Quadraaten* te saamen vermenigvuldigt, en tot het *product* het *Quadraat* van 't grootste getal vergaart, dat 'er kome een *rationaal Quadraat*.

OPLOSSING.

Stel de Getallen $= x$ en $2x$, zo zyn de *Quadraaten* xx en $4xx$; deeze vermenigvuldigd, komt $4x^4$; hier by het *Quadraat* des grootsten getals vergaard, heeft men $4x^4 + 4xx$, dat een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Laat de Wortel $= 2ax$ zyn;

$$\text{Dan is } 4x^4 + 4xx = 4aaxx$$

$$4xx \quad \overline{\qquad\qquad}$$

$$xx + 1 = aa$$

$$xx = aa - 1$$

; dit moet nog een *rationaal* (*Quadraat* zyn.

Stel den Wortel $= a - b$

$$aa - 1 = aa - 2ab + bb$$

$$2ab = bb + 1$$

$$2b \quad \overline{\qquad\qquad}$$

$$a = \frac{bb+1}{2b}.$$

Neemende $b = 2$, zo is $a = 1\frac{1}{4}$, en $\left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} \\ 2x = 1\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ de getallen.

XXIX. VRAAG.

Men vraagt naar twee Getallen, welker verschil is een *rationaal Quadraat*, en, als men tot ieder byzonder de eenheid vergaart, dat 'er kome een *rationaale Cubic*.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen $\left\{\begin{array}{l} a^3x^3 - 1 \\ b^3x^3 - 1 \end{array}\right\}$ dan heeft men *rationaale Cuben*, wanneer de eenheid tot elk der (getallen vergaard wordt.

Het verschil is $a^3x^3 - b^3x^3$ stel $= ccxx$ een *rat. Quad.*

$$xx \quad \overline{\qquad\qquad}$$

$$a^3x - b^3x = cc$$

$$x = \frac{cc}{a^3 - b^3}.$$

Nee-

Neemende $a=2$, $b=1$, $c=7$; zo is $x=7$; dus $(ax=14; bx=7;$

Derhalven $a^3x^3=2744$, en $a^3x^3-1=2743$ $\Big\{$ de Ge-
$b^3x^3=343$, $b^3x^3-1=342$ $\Big\}$ tallen.

XXX. VRAAG.

Vind twee getallen, zodanig; als men tot de *Cubic* des kleinsten het *Quadraat* des grootsten vergaart, dat de Som een *rationaale Cubic* zy.

OPLOSSING.

Stel ax en bx voor de getallen, zo moet a^3x^3+bbxx een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $=cx$

$$\text{zo is } a^3x^3+bbxx=c^3x^3$$

$$xx \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$a^3x+bb=c^3x$$

$$c^3x-a^3x=bb$$

$$x=\frac{bb}{c^3-a^3}$$

$$\text{Derhalven } ax=\frac{abb}{c^3-a^3}$$

$$bx=\frac{b^3}{c^3-a^3}$$

Nu moet a kleinder genomen worden als b, om aan de *Conditie* van 't Voorstel te voldoen, en wederom a kleinder als c, volgens de Vergelyking.

Neemende $a=1$, $b=7$, $c=2$, zo zyn de get. 7 en 49.

AANMERKING.

De zes laatste Voorstellen, als mede het volgende 32ste, worden ook gevonden by MARTEN WILKENS in de *eerste honderd konstige Vraagen*, naamelyk:

N°. 24 van LUDOLF is by M. WILKENS	. . . . .	N°. 1.
25	. . . .	5.
26	. . . .	6.
27	. . . .	4.
28	. . . .	7.
30	. . . .	8.
32	. . . .	10.

XXXI. VRAAG.

Vind twee *rationaale* getallen, welker Som is een *rationaal Quadraat*, en zo men de eenheid by ieder getal vergaart, dat 'er *rationaale Cuben* komen.

OPLOSSING.

Stel de get. $= a^3 - 3aax + 3axx - x^3 - 1$ }
en $b^3 + 3bbx + 3bxx + x^3 - 1$ } dan heeft men *rat. Cuben*, als de eenheid by elk der getall. vergaard wordt.

De Som is $a^3 + b^3 + 3bbx - 3aax + 3axx + 3bxx - 2$, (welke een *ration. Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $= cx - d$

zo is $a^3 + b^3 + 3bbx - 3aax + 3axx + 3bxx - 2 = ccxx - 2cdx + dd$

Neemende $3axx + 3bxx = ccxx$
zo vindt men hier door $3a + 3b = cc$

En dan is
nog $a^3 + b^3 + 3bbx - 3aax - 2 = -2cdx + dd$

$2cdx + 3bbx - 3aax = dd + 2 - a^3 - b^3$

$$x = \frac{dd + 2 - a^3 - b^3}{2cd + 3bb - 3aa}$$

Nu moet maar alleen in agt
genomen worden $3a + 3b = cc$

Want, daar door is $a = \dfrac{cc - 3b}{3}$

Neemende $c = 3$, $b = 1$; zo is $a = 2$; en $d = 4$
nee-

neemende; zo is $x = \frac{3}{5}$; dus $a - x = 1\frac{2}{5}$; en $b + x = 1\frac{3}{5}$; welkers *Cuben* zyn $\frac{343}{125}$, en $\frac{512}{125}$, hier van de eenheid getrokken, zyn de overblyffelen $\frac{218}{125}$, en $\frac{387}{125}$, welker Som is $\frac{605}{125}$, of $\frac{121}{25}$ een *rationaal Quadraat*, zo als begeerd was.

XXXII. VRAAG.

Vind twee getallen, zodanig; als men tot de *Cubic* des grootften het kleinfte getal vergaart, dat 'er even veel kome, als of men tot de *Cubic* des kleinften het grootfte getal vergaart.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen x en y, dan is door het Voorftel

$$x^3 + y = y^3 + x$$

$$x^3 - y^3 = x - y$$

$x - y$

$$xx + xy + yy = 1$$

$$xx + xy = 1 - yy$$

$$\tfrac{1}{4}yy = \tfrac{1}{4}yy$$

verg.

$xx + xy + \frac{1}{4}yy = 1 - \frac{3}{4}yy$ dat een *ration. Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $= 1 - ay$

$\surd$

zo is $1 - \frac{3}{4}yy = 1 - 2ay + aayy$

$$aayy + \tfrac{3}{4}yy = 2ay$$

y

$$aay + \tfrac{3}{4}y = 2a$$

$$y = \frac{2a}{aa + \frac{3}{4}}$$

Neemende $a = 2\frac{1}{2}$, komt $y = \frac{5}{7}$, en $x = \frac{3}{7}$ voor de begeerde getallen.

XXXIII. VRAAG.

Van drie getallen is het eerfte 4 minder als het twee-

 de

de. Zo men hunne Som met het eerste vermenigvuldigt, komt 600; en dezelve Som met de Som van het eerste en derde getal vermenigvuldigd zynde, is het *product* 2400. Men vraagt naar deeze drie getallen?

OPLOSSING.

Stel de Getallen $= x,\ x+4$, en y.

De Som is $2x+4+y$, met x verm., kt. $\overline{2x+4+y}.x=600$

$2x+4+y$ met $x+4+y$ vermen., is $\overline{2x+4+y}.$

$(\overline{x+4+y}=2400.$

Deeze Vergelykingen, de kleinste in de grootste gedeeld zynde,

$$\text{Komt } \frac{\overline{2x+4+y}.\overline{x+4+y}}{\overline{2x+4+y}.x}=\frac{2400}{600}$$

$$\text{Dus } \frac{x+4+y}{x}=4$$

x

$$x+4+y=4x$$

$$4+y=3x$$

$$y=3x-4$$

x

$$xy=3xx-4x.$$

$$\text{Wederom } \overline{2x+4+y}.x=600$$

$$2xx+4x+xy=600$$

$$xy=3xx-4x$$

$$5xx=600$$

5

$$xx=120$$

$\surd$

$$x=\sqrt{120}$$

$$x+4=4+\sqrt{120}$$

$$y=3x-4=-4+3\sqrt{120}.$$

XXXIV.

XXXIV. VRAAG.

Vind drie getallen, waar van de Som des eerften en tweeden, vermenigvuldigd met het derde, doet 264; de Som des tweeden en derden, vermenigvuldigd met het eerfte doet 102; en de Som des eerften en derden, vermenigvuldigd met het tweede, doet 234. Welke zyn de getallen?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x, y, z$

Dan is $\overline{x+y}.z$, of $zx+yz = 264$

$\overline{y+z}.x$, of $yx+zx = 102$

$\overline{x+z}.y$, of $xy+yz = 234$ verg.

$2xy+2xz+2yz = 600$

2

$$\left.\begin{array}{rl} xy+xz+yz &= 300 \\ xz+yz &= 264 \\ xy+xz \;.\;. &= 102 \\ xy \;.\;.+yz &= 234 \end{array}\right\}$$ de drie laatfte Vergel. ieder byzonder van de 1fte afgetrokken.

$$\text{Komt } \left.\begin{array}{rl} xy &= 36 \\ yz &= 198 \\ xz &= 66 \end{array}\right\}$$ verm.

$xxyyzz = 470448$

$\sqrt{}$

$$\left.\begin{array}{rl} xyz &= 396\sqrt{3} \\ yz &= 198 \\ xz &= 66 \\ xy &= 36 \end{array}\right\}$$ gedeeld

$x = 2\sqrt{3}$

$y = 6\sqrt{3}$

$z = 11\sqrt{3}$.

XXXV. VRAAG.

Zoek drie getallen, waar van het eerfte zo veel minder

der is dan het tweede, als het derde meer is dan het tweede; en zodanig, dat, als men het eerste met het derde vermenigvuldigt, het *product* zy 30, en dat het *product* 20 zy, als men het tweede met het eerste vermenigvuldigt.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen $x - y$, x, en $x + y$.

Zo is, door het Voorstel

$$xx - yy = 30$$

$$xx - xy = 20\text{, of } \overline{x-y}\,.\,x = 20$$

Dus $xy - yy = 10$, of $\overline{x-y}\,.\,y = 10$

ged.

$$\frac{x}{y} = 2$$

y

$$x = 2y$$

$\surd$

$$xx = 4yy$$

$$yy = yy$$

afget.

$$xx - yy = 3yy = 30$$

3

$$yy = 10$$

$\surd$

$$y = \surd 10$$

$$x = 2\surd 10.$$

Derhalven zyn de getallen $x - y = \surd 10$

$$x \ldots = 2\surd 10$$

$$x + y = 3\surd 10.$$

XXXVI. VRAAG.

Welke zyn de getallen, waar van het eerste en derde te saamen zo veel doen, dan tweemaal het tweede; en dat het vermenigvuldigde des eersten en tweeden zy 20; als mede, zo men het derde met het eerste vermenigvuldigt, en tot het *product* het *Quadraat* des tweeden getals vergaart, dat de Som zy $56\frac{2}{3}$?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x - y$, x, en $x + y$.

Zo is $xx - xy = 20$, en $2xx - yy = 56\frac{2}{3}$

$$\text{of } xy = xx - 20 \qquad yy = 2xx - 56\tfrac{2}{3}$$

$$\sqrt{} \qquad\qquad xx$$

$$xxyy = x^4 - 40xx + 400 \qquad xxyy = 2x^4 - 56\tfrac{2}{3}xx$$

Derhalven $2x^4 - 56\frac{2}{3}xx = x^4 - 40xx + 400$

$$x^4 - 16\tfrac{2}{3}xx = 400$$

$$\overline{8\tfrac{1}{3}}|^2 = \tfrac{625}{9}$$

$$\text{verg.}$$

$$x^4 - 16\tfrac{2}{3}xx + \overline{8\tfrac{1}{3}}|^2 = \tfrac{4225}{9}$$

$$\sqrt{}$$

$$xx - \tfrac{25}{3} = \tfrac{65}{3}$$

$$xx = \tfrac{90}{3} = 30, \text{ dus } x = \sqrt{30}$$

$$2$$

$$2xx \ldots = 60$$

Derh. $2xx - 56\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3} = yy$, dus $y = \sqrt{3\frac{1}{3}}$.

Nu is $xx = 30$

$$yy = 3\tfrac{1}{3}$$

$$\text{verm.}$$

$$xxyy = 100, \text{ dus } xy = 10, \text{ en } 2xy = 20$$

$$xx + yy = 33\tfrac{1}{3}$$

$$\text{verg. en afg.}$$

$$xx + 2xy + yy = 53\tfrac{1}{3}$$

$$xx - 2xy + yy = 13\tfrac{1}{3}$$

Dienvolgens

$$\left.\begin{array}{l} x + y = \sqrt{53\tfrac{1}{3}} \\ x \ldots = \sqrt{3\tfrac{1}{3}} \\ x - y = \sqrt{13\tfrac{1}{3}} \end{array}\right\} \text{de getallen.}$$

AANMERKING.

Alle deeze, behalven de eerste twaalf, Voorstellen, tot hier toe voorgedragen, zyn van weinig belang, en vereischen niet veel kundigheid, zo wegens de Oplossingen der Vraagen, als de hoedanigheid en eigenschappen der getallen, welken maar slegt en eenvouwdig zyn. Wy hebben daarom op deezen ook niets in aanmerking kunnen bybrengen, en de Ontbindingen derzelven ook slegts na de eenvouwdige wyze verkozen, zonder het een of ander 'er by te voegen.

Alleenlyk zegt Ludolf, dat de vier volgenden hem van een Meester gezonden zyn, dat ze mede weinig behelzen, behalven dat de getallen vreemd vallen.

Zie zyne aanteekening by de 38ste Vraag.

XXXVII. VRAAG.

Daar zyn drie getallen, *continue Proportionales*; het eerste is $\sqrt{5}$, en het derde $\sqrt{8}$ meer als het tweede. Men vraagt naar de Getallen?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x + \sqrt{5}$, x, en $x + \sqrt{8}$.

Dan is, door de eigenschap, in het Voorstel bepaald, het *Quadraat* van het middelste gelyk aan het *Product* van de uitersten. Dat is;

$$\begin{array}{l} x + \sqrt{5} \\ x + \sqrt{8} \\ \hline xx + x\sqrt{5} \\ \quad + x\sqrt{8} + \sqrt{40} \\ \hline xx + x\sqrt{5} + x\sqrt{8} + \sqrt{40} = xx \\ \hline x\sqrt{5} + x\sqrt{8} = -\sqrt{40} \\ \hline x = \dfrac{-\sqrt{40}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x \\ -\sqrt{} \end{array}$$

Derhalven $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ gedeeld in $-\sqrt{40}$

$$\begin{array}{l} -\sqrt{5} + \sqrt{8} \\ \hline -5 + 8 \\ = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -\sqrt{5} + \sqrt{8} \\ \hline +5\sqrt{8} - 8\sqrt{5} \\ \hline \end{array}$$

$x = \frac{5}{3}\sqrt{8} - \frac{8}{3}\sqrt{5}$ het middelste.

$x =$

$$x = \tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5}, \quad x = \tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5}$$
$$\sqrt{5} = \ldots\ \tfrac{3}{3}\sqrt{5}, \quad \sqrt{8} = \tfrac{3}{3}\sqrt{8}$$

$$x + \sqrt{5} = \tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{5}{3}\sqrt{5} \quad x + \sqrt{8} = \tfrac{8}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5}$$

Dat is

$$\left.\begin{array}{l} x + \sqrt{5} = \sqrt{\tfrac{25}{9} \times 8} - \sqrt{\tfrac{25}{9} \times 5} = \sqrt{22\tfrac{2}{9}} - \sqrt{13\tfrac{8}{9}} \\ x \ldots = \sqrt{\tfrac{25}{9} \times 8} - \sqrt{\tfrac{64}{9} \times 5} = \sqrt{22\tfrac{2}{9}} - \sqrt{35\tfrac{5}{9}} \\ x + \sqrt{8} = \sqrt{\tfrac{64}{9} \times 8} - \sqrt{\tfrac{64}{9} \times 5} = \sqrt{56\tfrac{8}{9}} - \sqrt{35\tfrac{5}{9}} \end{array}\right\} \text{de getallen.}$$

XXXVIII. VRAAG.

Men vraagt na drie getallen als in de voorgaande, zodanig; dat het tweede $\sqrt{5}$ meer zy als het eerste, en $\sqrt{8}$ meer als het derde?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x - \sqrt{5}$, x, en $x - \sqrt{8}$

Dan is $x - \sqrt{5}$
$x - \sqrt{8}$ verm. $\qquad x$ middelste $- \sqrt{}$

$$xx - x\sqrt{5} - x\sqrt{8} + \sqrt{40} = xx$$

$$x\sqrt{5} + x\sqrt{8} = \sqrt{40}$$

$$x = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5} + \sqrt{8}}$$

Derhalven $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ gedeeld in $\sqrt{40}$
$-\sqrt{5} + \sqrt{8} \qquad -\sqrt{5} + \sqrt{8}$

$$-5 + 8 = 3 \qquad \frac{-5\sqrt{8} + 8\sqrt{5}}{3}$$

$$x = -\tfrac{5}{3}\sqrt{8} + \tfrac{8}{3}\sqrt{5}$$
$$x = -\sqrt{\tfrac{25}{9}\,8} + \sqrt{\tfrac{64}{9}\,5}$$
$$x = -\sqrt{\tfrac{200}{9}} + \sqrt{\tfrac{320}{9}}$$

Nu is $x = -\tfrac{5}{3}\sqrt{8} + \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \ldots x = -\tfrac{5}{3}\sqrt{8} + \tfrac{8}{3}\sqrt{5}$
$$\sqrt{5} = \ldots\ldots\ \tfrac{3}{3}\sqrt{5} \quad \sqrt{8} = \tfrac{3}{3}\sqrt{8}$$

$$x - \sqrt{5} = \tfrac{5}{3}\sqrt{5} - \tfrac{5}{3}\sqrt{8} \quad x - \sqrt{8} = \tfrac{8}{3}\sqrt{5} - \tfrac{8}{3}\sqrt{8}$$

Der-

Derh. $x - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{25}{9}.3} - \sqrt{\frac{25}{9}.8} = \sqrt{13\frac{8}{9}} - \sqrt{22\frac{2}{9}}$

$x \ldots = -\sqrt{\frac{200}{9}} + \sqrt{\frac{320}{9}} = \sqrt{35\frac{5}{9}} - \sqrt{22\frac{2}{9}}$

$$x - \sqrt{8} = \sqrt{\frac{64.5}{9}} - \sqrt{\frac{64}{9}.8} = \sqrt{35\frac{5}{9}} - \sqrt{56\frac{8}{9}}.$$

XXXIX. VRAAG.

Nog vraagt men na drie getallen, van de zelfde eigenschap als vooren, zodanig, dat het eerste $\sqrt{5}$ meer zy als het derde, en het derde $\sqrt{8}$ minder zy dan het tweede?

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x + \sqrt{5},\ x + \sqrt{8},\ x.$

Dan is $x + \sqrt{5}$ $x + \sqrt{8}$

x $x + \sqrt{8}$

verm.

$$xx + x\sqrt{5} = xx + 2x\sqrt{8} + 8$$

$$x\sqrt{5} - 2x\sqrt{8} = 8$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{5} - 2\sqrt{8}}$$

of $x = -\frac{8}{27}\sqrt{5} - \frac{16}{27}\sqrt{8}$

Dienvolgens $x + \sqrt{5} = \sqrt{2\frac{347}{729}} - \sqrt{2\frac{590}{729}}$

$x + \sqrt{8} = \sqrt{1\frac{239}{729}} - \sqrt{\frac{320}{729}}$

$x \ldots = -\sqrt{\frac{320}{729}} - \sqrt{2\frac{590}{729}}$

XL. VRAAG.

Zoek drie getallen, in *Proportie* als vooren, zodanig; dat het eerste $\sqrt{8}$, en het tweede $\sqrt{5}$ minder zy als het derde.

OPLOSSING.

Stel de getallen $= x - \sqrt{8},\ x - \sqrt{5},\ x$

Dan is $x - \sqrt{8}$ $x - \sqrt{5}$

x $x - \sqrt{5}$

verm.   verm.

$xx -$

$$xx - x\sqrt{8} = xx - 2x\sqrt{5} + 5$$

$$x = \frac{5}{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}$$

$$\text{of } x = \tfrac{5}{6}\sqrt{5} + \tfrac{5}{12}\sqrt{8}$$

$$\text{Derhalven } x - \sqrt{8} = \sqrt{3\tfrac{17}{36}} - \sqrt{2\tfrac{26}{36}}$$

$$x - \sqrt{5} = \sqrt{1\tfrac{14}{36}} - \sqrt{\tfrac{5}{36}}$$

$$x \;\ldots = \sqrt{3\tfrac{17}{36}} + \sqrt{1\tfrac{14}{36}}.$$

AANMERKING.

1. Hier mede zyn dan deeze vier Vraagen beantwoord, en de zelve getallen gevonden, welken door LUDOLF worden opgegeeven; alleenlyk zegt hy; *deeze laatste is de geschiktste van allen*; mogelyk, om dat de antwoorden derzelven *Positive Surden* zyn; daar in tegendeel, onder de antwoorden der anderen; altoos eene *Negative Surdische* grootheid gevonden wordt; want anders zyn deeze vier Vraagen even geschikt, en genoegzaam de zelfde.

2. Hier kunnen wy ook aanmerken, dat deeze vier Voorstellen mede gevonden worden by MARTEN WILKENS in de *eerste honderd konstige Vraagen*, alleenlyk dat aldaar andere getallen zyn genomen; naamelyk $\sqrt{7}$ en $\sqrt{11}$, in plaats dat deeze by LUDOLF zyn $\sqrt{5}$ en $\sqrt{8}$; zo is dan

VRAAG	37	gelykluidende	met MARTEN WILKENS	94
	38	- - - -	met - - - - - - -	92
	39	- - - -	met - - - - - - -	91
	40	- - - -	met - - - - - - -	93

Van welken in de Ontbindingen van die van MARTEN WILKENS de zelfde stelling, en dienvolgens ook de zelfde bewerking gevolgd is.

SCHOLIUM.

Nu zullen wy ieder van deeze vier Voorstellen, op eene algemeene wyze beschouwen, waar door die van LUDOLF, als mede die van MARTEN WILKENS, te gelyk ontbonden zyn.

1. Stel, in N°. 37, voor de geduurige Evenredigen $x + \sqrt{a}$, x, $x + \sqrt{b}$

Dan

Dan is $x + \sqrt{a}$

$\quad\quad\; x + \sqrt{b}$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}\ \text{verm.}$$

$$xx + x\sqrt{a} + x\sqrt{b} + \sqrt{ab} = xx$$

$$x\sqrt{a} + x\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$$

$$x = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

of $x = \dfrac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{b-a}$ het middelste getal.

$x + \sqrt{a} = \dfrac{a\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b-a}$ het eerste getal.

$x + \sqrt{b} = \dfrac{b\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{b-a}$ het derde getal.

— Neemende de getallen van LUDOLF in deeze 37ste VRAAG; zo is $a = 5$, $b = 8$, en dus zyn de Evenredigen;

$\sqrt{22\frac{2}{9}} - \sqrt{13\frac{8}{9}}$, $\sqrt{22\frac{2}{9}} - \sqrt{35\frac{5}{9}}$, $\sqrt{56\frac{8}{9}} - \sqrt{35\frac{5}{9}}$.

= Neemende de getallen van MARTEN WILKENS 94ste VRAAG; zo is $a = 7$, $b = 11$, en dus de Evenredigen.

$\sqrt{33\frac{11}{16}} - \sqrt{21\frac{7}{16}}$, $\sqrt{33\frac{11}{16}} - \sqrt{52\frac{15}{16}}$, $\sqrt{83\frac{3}{16}} - \sqrt{52\frac{15}{16}}$

Zynde de zelfde antwoorden, die by M. WILKENS gevonden worden.

2. Stel, in N°. 38, voor de geduurige Evenredigen $x - \sqrt{a}$, x, $x - \sqrt{b}$

Dan is $x - \sqrt{a}$

$\quad\quad\; x - \sqrt{b}$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}\ \text{verm.}$$

$$xx - x\sqrt{a} - x\sqrt{b} + \sqrt{ab} = xx$$

$$x\sqrt{a} + x\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$x = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

of

of $x = \dfrac{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}}{b-a}$ het middelfte getal.

$x - \sqrt{a} = \dfrac{a\sqrt{a} - a\sqrt{b}}{b-a}$ het eerfte getal.

$x - \sqrt{b} = \dfrac{b\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{b-a}$ het derde getal.

— Neemende de getallen van LUDOLF in deeze 38^fte^ VRAAG $a = 5$, $b = 8$; dan zyn de getallen

$\sqrt{13\frac{8}{9}} - \sqrt{22\frac{5}{9}}$, $\sqrt{35\frac{5}{9}} - \sqrt{22\frac{2}{9}}$, $\sqrt{35\frac{5}{9}} - \sqrt{56\frac{8}{9}}$.

= Neemende de getallen van M. WILKENS N°. 92, $a = 7$, $b = 11$; dan zyn de Evenredigen

$\sqrt{21\frac{7}{16}} - \sqrt{33\frac{11}{16}}$, $\sqrt{52\frac{15}{16}} - \sqrt{33\frac{11}{16}}$, $\sqrt{52\frac{15}{16}} - \sqrt{83\frac{3}{16}}$.

3. Stel, in N°. 39, voor de geduurige Evenredigen $x + \sqrt{a}$, $x + \sqrt{b}$, x;

Dan is $x + \sqrt{a}$ $x + \sqrt{b}$

x $x + \sqrt{b}$

verm.   verm.

$$xx + x\sqrt{a} = xx + 2x\sqrt{b} + b$$

$$x\sqrt{a} - 2x\sqrt{b} = b$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$$

of $x = \dfrac{-b\sqrt{a} - 2b\sqrt{b}}{4b-a}$ het derde getal.

$x + \sqrt{a} = \dfrac{\overline{3b-a}\sqrt{a} - 2b\sqrt{b}}{4b-a}$ het eerfte getal.

$x + \sqrt{b} = \dfrac{\overline{2b-a}\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{4b-a}$ het tweede getal.

— Neemende de getallen van LUDOLF N°. 39, $a = 5$, $b = 8$; dan zyn de getallen;

$\sqrt{2\frac{347}{729}} - \sqrt{2\frac{590}{729}}$, $\sqrt{1\frac{239}{729}} - \sqrt{\frac{320}{729}}$, $-\sqrt{\frac{320}{729}} - \sqrt{2\frac{590}{729}}$.

= Nee.

$=$ Neemende de getallen van M. WILKENS N°. 91; $a=7$, $b=11$; dan zyn de Evenredigen;

$$\sqrt{3\tfrac{625}{1369}}-\sqrt{3\tfrac{1217}{1369}},\ \sqrt{1\tfrac{1106}{1369}}-\sqrt{\tfrac{847}{1369}},\ -\sqrt{\tfrac{847}{1369}}-\sqrt{3\tfrac{1217}{1369}}.$$

Zynde de zelfde getallen, die by M. WILKENS gevonden worden.

4. Stel, in N°. 40, voor de geduurige Evenredigen $x-\sqrt{a}$, $x-\sqrt{b}$, x;

$$\begin{array}{llll} \text{Dan is } & x-\sqrt{a} & & x-\sqrt{b} \\ & x & & x-\sqrt{b} \\ \hline & & \text{verm.} & \text{verm.} \\ & xx-x\sqrt{a} & = & xx-2x\sqrt{b}+b \end{array}$$

$$2x\sqrt{b}-x\sqrt{a}=b$$

$$x=\frac{b}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$\text{of } x=\frac{2b\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{4b-a} \text{ het derde getal.}$$

$$x-\sqrt{a}=\frac{2b\sqrt{b}+\overline{a-3b}\sqrt{a}}{4b-a} \text{ het eerste getal.}$$

$$x-\sqrt{b}=\frac{b\sqrt{a}+\overline{a-2b}\sqrt{b}}{4b-a} \text{ het tweede getal.}$$

— Neemende de getallen van LUDOLF, $a=8$, $b=5$, dan zyn de getallen;

$$\sqrt{3\tfrac{17}{36}}-\sqrt{2\tfrac{26}{36}},\ \sqrt{1\tfrac{14}{36}}-\sqrt{5\tfrac{5}{36}},\ \sqrt{3\tfrac{17}{36}}+\sqrt{1\tfrac{14}{36}}.$$

$=$ Neemende de getallen van M. WILKENS N°. 93; $a=11$, $b=7$; dan zyn de getallen;

$$\sqrt{4\tfrac{216}{289}}-\sqrt{3\tfrac{233}{299}},\ \sqrt{1\tfrac{250}{289}}-\sqrt{\tfrac{63}{289}},\ \sqrt{4\tfrac{216}{289}}+\sqrt{1\tfrac{250}{289}}.$$

Zynde de zelfde antwoorden, die M. WILKENS opgeeft.

AL-

ALGEMEEN SCHOLIUM.

In de vier voorgaande Voorstellen zyn altoos de Tekens van gelyke soort genomen, alleenlyk, dat de ledige *Term* eens in het midden, en eens op één der einden gesteld is. Nu zouden wy deezen ook van ongelyke soorten, dat is; den eenen +, en den anderen —, kunnen stellen, en daar na de vier Voorstellen, kunnen bepaalen; doch alzo zulks meer uitgebreidheid aan het Voorstel zou geeven, en dat de wyze van rekening genoegzaam uit de voorgaande bewerking openbaar is, zal het beter zyn, dat wy hier een algemeen Voorbeeld opgeeven, dat op zich zelfs, ten aanzien van het *reduceeren* der *Surdische Termen*, veel kunstiger, en tevens zo algemeen is, dat de voorgaande vier Vraagen, benevens alle de verandering der Tekens, het zy die van gelyke soorten zyn, zo als LUDOLF en WILKENS die opgeeven, of dat zy van ongelyke soorten zyn, daar uit als *Corollaria* kunnen genomen worden.

VOORBEELD.

Men begeert een getal (x) *te vinden; zodanig, dat, als men hetzelve tot drie byzondere gegeeven* Surdische *Grootheden vergaart, de drie sommen geduurig evenredig zyn.*

OPLOSSING.

Het getal x zynde, zo is volgens het Voorstel

$$x+p\sqrt{a} : x+q\sqrt{b} :: x+q\sqrt{b} : x+r\sqrt{c}$$

$$xx+px\sqrt{a}+rx\sqrt{c}+pr\sqrt{ac}=xx+2qx\sqrt{b}+qqb$$

$$px\sqrt{a}+rx\sqrt{c}-2qx\sqrt{b}=qqb-pr\sqrt{ac}$$

$$x=\frac{qqb-pr\sqrt{ac}}{p\sqrt{a}+r\sqrt{c}-2q\sqrt{b}}$$

Dit is nu wel het begeerde getal; doch om de drie Evenredigen te vinden, moet iedere, byzonder gegeevene, waarde daar toe vergaard worden, en dus heeft men

$$x+p\sqrt{a}=\frac{app+bqq-2pq\sqrt{ab}}{p\sqrt{a}+r\sqrt{c}-2q\sqrt{b}}$$

$$x+q\sqrt{b}=\frac{-qqb+pq\sqrt{ab}+qr\sqrt{bc}-pr\sqrt{ac}}{p\sqrt{a}+r\sqrt{c}-2q\sqrt{b}}$$

$$x+r\sqrt{c}=\frac{qqb+rrc-2rq\sqrt{bc}}{p\sqrt{a}+r\sqrt{c}-2q\sqrt{b}}.$$

Nu zouden wy ieder van deeze Getallen door hunne drie-ledige *Surdische* Noemers kunnen deelen, door dezelven met hunne *Residui* te vermenigvuldigen, waar door de Noemers in *rationaale* waarden zouden bepaald worden; maar alzo een zodanige bewerking, door de groote Getallen, buiten gemeen lastig wordt, zullen wy deeze uitdrukkingen liever onverandert laaten, om, daar het noodig is, in getallen te bewerken.

I. COROLLARIUM.

Hier mede hebben wy dan deeze vier Voorstellen algemeen opgelost, zonder eenig onderscheid te maaken, hoedanig de gegeevene Grootheden zyn, dat is $+$ of $-$, of die van gelyke soorten zyn, of niet, en by welke van deeze de begeerde verschillen gegeeven zyn, gelyk wy dit nu met de volgende Voorbeelden uit Ludolf zullen verklaaren.

1. In N°. 37. is dan $p=1$, $q=0$, $r=1$; dus zyn de Evenredigen

$$\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

Gegeeven zynde $a=5$, $b=8$, zo zyn de getallen

$$\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{8}},\ \frac{-\sqrt{8\times5}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}},\ \frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}.$$

Deeze wederom eigentlyk gedeeld, zo zyn dezelve

$\sqrt{22\tfrac{2}{9}}-\sqrt{13\tfrac{8}{9}}$, $\sqrt{22\tfrac{2}{9}}-\sqrt{35\tfrac{5}{9}}$, $\sqrt{56\tfrac{8}{9}}-\sqrt{35\tfrac{5}{9}}$.

2. In N°. 38. is dan $p=-1$, $q=0$, $r=-1$; en de Evenredigen zyn

$$\frac{-a}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

Ge-

Gegeeven zynde $a=5$, $c=8$, zo zyn de getallen

$$\frac{-5}{\sqrt{5}+\sqrt{8}},\ \frac{\sqrt{8\times5}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}},\ \frac{-8}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}.$$

Deeze wederom eigentlyk gedivideerd, dan zyn dezelve

$$\sqrt{13\tfrac{8}{9}}-\sqrt{22\tfrac{2}{9}},\ \sqrt{35\tfrac{5}{9}}-\sqrt{22\tfrac{2}{9}},\ \sqrt{35\tfrac{5}{9}}-\sqrt{56\tfrac{8}{9}}.$$

3. In N°. 39. is dan $p=1$, $q=1$, $r=0$, en de getallen $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}},\ \frac{-b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}},\ \frac{b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}.$

Gegeeven zynde $a=5$, $b=8$, zo zyn de Evenredigen $\frac{13-2\sqrt{8\times5}}{\sqrt{5}-2\sqrt{8}},\ \frac{-8+\sqrt{8\times5}}{\sqrt{5}-2\sqrt{8}},\ \frac{8}{\sqrt{5}-2\sqrt{8}}.$

Deeze wederom gedeeld, zo hebbenwe voor dezelven $\sqrt{2\tfrac{347}{729}}-\sqrt{2\tfrac{590}{729}},\ \sqrt{1\tfrac{239}{729}}-\sqrt{\tfrac{320}{729}},\ -\sqrt{\tfrac{320}{729}}-\sqrt{2\tfrac{590}{729}}.$

4. In N°. 40. is dan $p=-1$, $q=-1$, $r=0$, en de getallen zyn

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}+2\sqrt{b}},\ \frac{-b+\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}+2\sqrt{b}},\ \frac{b}{-\sqrt{a}+2\sqrt{b}}.$$

Gegeeven zynde $a=8$, $b=5$, dan zyn de Evenredigen $\frac{13-2\sqrt{8\times5}}{-\sqrt{8}+2\sqrt{5}},\ \frac{-5+\sqrt{8\times5}}{-\sqrt{8}+2\sqrt{5}},\ \frac{5}{-\sqrt{8}+2\sqrt{5}}.$

Deeze in orde gedeeld, zullen wy voor de getallen verkrygen $\sqrt{3\tfrac{17}{36}}-\sqrt{2\tfrac{26}{36}},\ \sqrt{1\tfrac{14}{36}}-\sqrt{\tfrac{5}{36}},\ \sqrt{3\tfrac{17}{36}}+\sqrt{1\tfrac{14}{36}}.$

II. COROLLARIUM.

In deeze vier opgegeeven Voorſtellen zyn altoos de Tekens van de zelfde ſoort gegeeven, alleenlyk is hier in agt genomen, dat één van deeze Grootheden p, q, r gelyk *nul* geſteld zynde, daar door het ledige getal x, dan eens in 't midden komt, en dan eens voor één der uiterſten genomen is. Dus blykt, dat wy op dezelve wyze wederom vier andere Voorſtellen kunnen formeeren, zodanig, dat de ledige *Term* x mede, dan eens in 't midden, en dan eens één der uiterſten zy, met de

Tekens der twee overige leden van verschillende soorten te stellen, naamelyk het eene $+$, en het andere $-$, en die dan ook op dezelve wyze als de voorgaande kunnen opgelost worden; waarom wy dezelve op de navolgende wyze zullen voordragen.

I. VOORSTEL. *Zoek drie geduurige evenredige Getallen, zodanig; dat het eerste* $\sqrt{a}$ *meer zy als het tweede, en het tweede* $\sqrt{c}$ *minder als het derde.*

Dat $x+\sqrt{a}$, x, $x-\sqrt{c}$ de geduurige Evenredigen zyn; zo is, volgens dit *Scholium*, in dit geval $p=1$, $q=0$, $r=1$; waar door de geduurige Evenredigen zyn $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$, $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$, $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$.

Gegeeven zynde $a=8$, $c=5$, zo zyn de getallen $\frac{8}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{8\times5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$, $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$.

Deeze wederom naar behooren gedeeld, zo komt 'er $\sqrt{56\tfrac{8}{9}}+\sqrt{35\tfrac{5}{9}}$, $\sqrt{35\tfrac{5}{9}}+\sqrt{22\tfrac{2}{9}}$, $\sqrt{22\tfrac{2}{9}}+\sqrt{13\tfrac{8}{9}}$.

II. VOORSTEL. *Zoek drie geduurige evenredige getallen, zodanig; dat het tweede* $\sqrt{a}$ *meer zy als het eerste, en het derde* $\sqrt{c}$ *meer als het tweede.*

Dat $x-\sqrt{a}$, x, $x+\sqrt{c}$ de Evenredigen zyn; dan is $p=-1$, $q=0$, $r=+1$, en men heeft $\frac{+a}{-\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{\sqrt{ac}}{-\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{c}{-\sqrt{a}+\sqrt{c}}$.

Laat gegeeven zyn $a=5$, $c=8$; dan zyn de getallen $\frac{5}{-\sqrt{5}+\sqrt{8}}$, $\frac{\sqrt{5\times8}}{-\sqrt{5}+\sqrt{8}}$, $\frac{8}{-\sqrt{5}+\sqrt{8}}$.

Deeze wederom behoorlyk gedeeld zynde, zal men verkrygen $\sqrt{13\tfrac{8}{9}}+\sqrt{22\tfrac{2}{9}}$, $\sqrt{35\tfrac{5}{9}}+\sqrt{22\tfrac{2}{9}}$, $\sqrt{35\tfrac{5}{9}}+\sqrt{56\tfrac{8}{9}}$.

III. VOORSTEL. *Zoek drie geduurige evenredige getallen, zodanig; dat het eerste* $\sqrt{a}$ *meer zy als het derde, en het tweede* $\sqrt{b}$ *minder als het derde.*

Dat

Dat $x+\sqrt{a}$, $x-\sqrt{b}$, x de Evenredigen zyn; dan is $p=+1$, $q=-1$, $r=0$, en men heeft

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}},\ \frac{-b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}},\ \frac{b}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}.$$

Laat wederom $a=5$, $b=8$ genomen worden, zo zyn de getallen

$$\frac{13+2\sqrt{8\times5}}{\sqrt{5}+2\sqrt{8}},\ \frac{-8-\sqrt{8\times5}}{\sqrt{5}+2\sqrt{8}},\ \frac{8}{\sqrt{5}+2\sqrt{8}}.$$

Deeze naar behooren gedeeld zynde, zal men verkrygen $\sqrt{2\tfrac{347}{729}}+\sqrt{2\tfrac{590}{729}}$, $-\sqrt{\tfrac{320}{729}}-\sqrt{1\tfrac{239}{729}}$, $-\sqrt{\tfrac{329}{729}}+\sqrt{2\tfrac{590}{729}}$.

IV. VOORSTEL. *Zoek drie geduurige evenredige getallen, zodanig; dat het eerste* $\sqrt{a}$ *minder, en het tweede* $\sqrt{b}$ *meer zy, als het derde.*

Laat $x-\sqrt{a}$, $x+\sqrt{b}$, x de geduurige Evenredigen zyn; dan is $p=-1$, $q=+1$, $r=0$, en daarom de getall. $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}-2\sqrt{b}},\ \frac{-b-\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}-2\sqrt{b}},\ \frac{b}{-\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$.

Laat gegeeven zyn $a=5$, $b=8$, dan zyn de begeerde getallen

$$\frac{13+2\sqrt{8\times5}}{-\sqrt{5}-2\sqrt{8}},\ \frac{-8-\sqrt{8\times5}}{-\sqrt{5}-2\sqrt{8}},\ \frac{8}{-\sqrt{5}-2\sqrt{8}}.$$

Deeze naar behooren gedeeld zynde, zal men verkrygen

$$\sqrt{2\tfrac{347}{729}}-\sqrt{2\tfrac{590}{729}},\ \sqrt{\tfrac{320}{729}}+\sqrt{1\tfrac{239}{729}},\ \sqrt{\tfrac{320}{729}}-\sqrt{2\tfrac{590}{729}}.$$

III. COROLLARIUM.

Hier mede hebben wy dan alle de gevallen aangeweezen, welken hier omtrent plaats kunnen hebben, als men één der gegeevene *Surdische* Waarden weg laat, of gelyk nul stelt. Nu zullen wy het zelfde Voorstel hier nog eens byvoegen, met de Tekenen + en − te neemen, waar toe de volgende Voorbeelden dienen kunnen.

I. VOORBEELD. *Men vraagt naar een getal, zodanig; dat, als men hetzelve tot drie gegeevene* Surdische *Waarden, als* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, *en* $\sqrt{5}$, *vergaart, de drie uitkomsten geduurige evenredigen zyn.*

Hier is dan $p = +1$, $q = +1$, $r = +1$, en derhalven de Waarde van $x = \frac{b - \sqrt{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c} - 2\sqrt{b}}$, en vervolgens de Evenredigen; $\frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{c} - 2\sqrt{b}}$, ...

$$\frac{-b + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} - \sqrt{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c} - 2\sqrt{b}}, \quad \frac{b + c - 2\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{c} - 2\sqrt{b}}.$$

Nu is gegeeven $a = 2$, $b = 3$, en $c = 5$; derhalven zyn de Evenredigen $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}$,

$$\frac{-3 + \sqrt{6} + \sqrt{15} - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}, \quad \frac{8 - 2\sqrt{15}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

Deswegens moet men de Noemers zodanig vermenigvuldigen, dat 'er *rationaale* Waarden komen, die eigentlyk gedeeld kunnen worden.

Om dit nu duidelyk voor te stellen, zullen wy eerst den Noemer $\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ *rationaal* vermenigvuldigen, om te weeten, waar mede de Grootheden, zo Noemer als Teller, moeten vermenigvuldigd worden, om den Noemer *rationaal* te hebben, of wel, dat men daar mede kan deelen.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5} & \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5} & \textit{Residuum.} \\ \hline & \text{verm.} \\ -5 + 2\sqrt{10} & \text{eene tweenaamige Waarde.} \\ +5 + 2\sqrt{10} & \\ \hline & \text{verm.} \\ \text{komt } +15 & \text{eene } \textit{rationaale} \text{ Waarde.} \end{array}$$

Hier uit blykt dan, dat men, de beide *Residua* te saamen vermenigvuldigende, eene waarde verkrygt, waar mede de Noemer *rationaal* zal worden.

$\sqrt{2}$ +

$\surd 2 + 2\surd 3 + \surd 5$
$5 + 2\surd 10$

———————————————————— verm.

komt $15\surd 2 + 10\surd 3 + 9\surd 5 + 4\surd 30$ de gemeene vermenigvuldiger, waar mede de Noemer *rationaal* wordt, en bepaaldelyk 15 zal zyn.

Hier door worden dan de getallen zelve gemakkelyk gevonden; want, om het getal x zelve te vinden, zo moet $\surd 2 - 2\surd 3 + \surd 5$ gedeeld worden in $3 - \surd 10$, en wy vinden, volgens deeze aanleiding,

$$x = -\surd 1\tfrac{1}{3} - \surd \tfrac{1}{5} + \surd \tfrac{8}{15}.$$

Om nu vervolgens de evenredige getallen te vinden, zullen wy de gegeevene *Surdische* Waarden by die van x moeten vergaaren.

Want $x = -\frac{2}{3}\surd 3 - \frac{1}{5}\surd 5 + \frac{2}{15}\surd 30.$

Hier by vergaard $\surd 2$, $\surd 3$, en $\surd 5$, komt

Het eerste getal $= \surd 2 - \frac{2}{3}\surd 3 - \frac{1}{5}\surd 5 + \frac{2}{15}\surd 30.$

Het tweede getal $= \ldots \frac{1}{3}\surd 3 - \frac{1}{5}\surd 5 + \frac{2}{15}\surd 30.$

Het derde getal $= \ldots \frac{2}{3}\surd 3 + \frac{4}{5}\surd 5 + \frac{2}{15}\surd 30.$

Voor de begeerde evenredige getallen, die als vooren in algemeene *Surdische Termen* kunnen gesteld worden.

II. VOORBEELD. *Men vraagt naar een getal, zodanig; dat, als men van hetzelve aftrekt drie gegeevene* Surdische *waarden,* $\surd 2$, $\surd 3$, $\surd 5$, *de overblyfselen drie geduurige evenredigen zyn.*

Hier is dan $p = -1$, $q = -1$, $r = -1$, en derhalven de waarde van $x = \dfrac{b - \surd ac}{-\surd a - \surd c + 2\surd b}$.

Nu is gegeeven $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$. Derhalven is het begeerde getal $x = \dfrac{3 - \surd 10}{-\surd 2 - \surd 5 + 2\surd 3}$. Dewyl dit nu wederom eigentlyk gedeeld moet worden, zullen wy voor af deezen Noemer *rationaal* vermenigvuldigen.

$$\begin{array}{l} -\sqrt{2}-\sqrt{5}+2\sqrt{3} \\ +\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{3} \;\; \textit{Residuum} \\ \hline \qquad\qquad\qquad \text{verm.} \\ \quad +5-2\sqrt{10} \\ \quad -5-2\sqrt{10} \;\; \textit{Residuum.} \\ \hline \qquad\qquad\qquad \text{verm.} \end{array}$$

komt $-25+40=+15$ eene *rationaale* Waarde.

Deswegens moeten deeze *Residua* te saamen vermenigvuldigd worden.

$$\begin{array}{l} +\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{3} \\ \quad -5-2\sqrt{10} \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad \text{verm.} \\ -15\sqrt{2}-9\sqrt{5}-10\sqrt{3}-4\sqrt{30} \;\; \text{het gemeen } \textit{Residuum.} \end{array}$$

Hier mede dan de getallen van Noemer en Teller vermenigvuldigd, zal men eene *rationaale* waarde hebben, voor het Deel-tal.

Indien men nu, volgens deeze aanleiding, $3-\sqrt{10}$ door $-\sqrt{2}-\sqrt{5}+2\sqrt{3}$ deelt, komt $x=\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{8}{15}}$.

Om nu vervolgens de Evenredigen te vinden, moet men de gegeevene getallen van deeze waarde van x aftrekken.

Want, $x=\frac{1}{5}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{15}\sqrt{30}$ zynde, moet men 'er $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ van aftrekken, dan zyn de evenredige getallen:

Het eerste getal $=-\sqrt{2}+\frac{1}{5}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{15}\sqrt{30}$.
Het tweede getal $= \ldots\ldots +\frac{1}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{15}\sqrt{30}$.
Het derde getal $= \ldots\ldots -\frac{4}{5}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{15}\sqrt{30}$.

Voor de begeerde evenredige getallen, die dan, als vooren, in algemeene *Surdische* waarden kunnen uitgedrukt worden.

III. VOORBEELD. *Men begeert een getal te vinden, zodanig; dat, indien men hetzelve van drie gegeevene* Surdische *waarden aftrekt, de overblyfselen drie geduurige evenredigen zyn.*

Hier toe moet men x onder een *negative* waarde vinden,

den, welke by de gegeevene *Surdische* waarden vergaard zynde, de zelfde uitkomsten zal voortbrengen, als of die afgetrokken wierden.

Want, $x = \dfrac{b - \sqrt{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c} - 2\sqrt{b}}$ zynde, als $p = +1$, $q = +1$, en $r = +1$ genomen is; derhalven

$$-x = \frac{\sqrt{ac} - b}{2\sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{c}}.$$

Wederom $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ gegeeven zynde, zo is het begeerde getal $x = \dfrac{-3 + \sqrt{10}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

Deswegens moeten wy wederom een gemeen *Residuum* vinden, om daar mede den Noemer en Teller te vermenigvuldigen, zodanig, dat 'er een *rationaal* getal voor den Deeler kome.

$$\begin{array}{ll}
2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5} & \\
2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} & \textit{Residuum} \\
\hline
& \text{verm.} \\
5 - 2\sqrt{10} & \\
-5 - 2\sqrt{10} & \textit{Residuum} \\
\hline
& \text{verm.}
\end{array}$$

komt $-25 + 40 = 15$

Derhalven moeten wy wederom deeze beide *Residua* te saamen vermenigvuldigen, om het gemeene *Residuum* te hebben.

$$\begin{array}{ll}
2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} & \\
-5 - 2\sqrt{10} & \\
\hline
& \text{verm.}
\end{array}$$

$-15\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 9\sqrt{5} - 4\sqrt{30}$ het gemeene *Residuum*.

Hier mede worden nu de beide waarden vermenigvuldigt, om door een *rationaal* getal te kunnen deelen; en dus vindt men $x = -\sqrt{1\tfrac{1}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{5}} + \sqrt{\tfrac{8}{15}}$.

Om nu vervolgens de evenredige getallen te vinden, zo moet deeze waarde van x, van ieder der gegeevene, afgetrokken worden, dat is; van $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; dan zyn dezelven

Het eerste $= \sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{30}$.
Het tweede $= \ldots 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{30}$.
Het derde $= \ldots \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{30}$.
Voor de begeerde Evenredige getallen, enz.

AANMERKING.

Eer wy van dit Voorstel afscheiden, zal het niet ondienstig zyn te melden, dat hetzelve zodanig herleid is, dat wy daar mede een *simpele* Vergelykinge verkreegen hebben, gelyk het in der daad zodanig is; doch als men een zodanige *simpele* Vergelyking heeft, die met *Surdische* Grootheden is aangedaan, kan dezelve ook tot eene Vierkants-Vergelyking gebragt worden; dewyl nu alle Vierkants-Vergelykingen twee Wortelen hebben, zo zou het schynen, als of hier toe nog één antwoord konde gevonden worden. Om deeze zwaarigheid op te lossen, zullen wy de voorgaande 37ste VRAAG tot een voorbeeld neemen, en de Vergelyking zodanig herleiden, dat dezelve tot een Vierkants-Vergelyking gebragt wordt.

Om dan drie geduurige evenredige Getallen te vinden, waar van het eerste $\sqrt{5}$, en het derde $\sqrt{8}$ meer als het tweede is;

Zo stel de Getallen $= x + \sqrt{5},\ x,$ en $x + \sqrt{8}$.

Indien wy dan de uiterste en middelste byzonder met malkanderen vermenigvuldigen, zo hebben wy

$$xx + x\sqrt{5} + x\sqrt{8} + \sqrt{40} = xx$$

$$x\sqrt{5} + x\sqrt{8} + \sqrt{40} = 0$$

$$\text{of } x\sqrt{5} = -x\sqrt{8} - \sqrt{40}$$

$\sqrt{}$

$$5xx = 8xx + 2x\sqrt{320} + 40$$

$$3xx + 2x\sqrt{320} = -40$$

3

$$9xx + 6x\sqrt{320} = -120$$

$$320 = 320$$

verg.

9 *xx*.

$$\sqrt{}\ \overline{9xx + 6x\sqrt{320} + 320 = 200}$$
$$3x + \sqrt{320} = \pm\sqrt{200}$$
$$\overline{\text{of } 3x = \pm 5\sqrt{8} - 8\sqrt{5}}$$
$$3\ \overline{}$$
$$x = \pm 5\sqrt{8} - 8\sqrt{5}.$$

Hier mede kunnen wy dan de begeerde evenredige getallen vinden, door by dit middelſte x de gegeevene verſchillen te vergaaren.

Dus vinden wy dan, in het eerſte geval, voor dezelve

$$\left.\begin{array}{ll} x + \sqrt{5} = \sqrt{22\tfrac{2}{9}} - \sqrt{13\tfrac{8}{9}} & \text{het eerſte} \\ x \ldots = \sqrt{22\tfrac{2}{9}} - \sqrt{35\tfrac{5}{9}} & \text{het tweede} \\ x + \sqrt{8} = \sqrt{56\tfrac{8}{9}} - \sqrt{35\tfrac{5}{9}} & \text{het derde} \end{array}\right\} \text{getal.}$$

In het tweede geval zyn dezelve

$$\left.\begin{array}{ll} x + \sqrt{5} = -\sqrt{22\tfrac{2}{9}} - \sqrt{13\tfrac{8}{9}} & \text{het eerſte} \\ x \ldots = -\sqrt{22\tfrac{2}{9}} - \sqrt{35\tfrac{5}{9}} & \text{het tweede} \\ x + \sqrt{8} = -\sqrt{3\tfrac{5}{9}} - \sqrt{35\tfrac{5}{9}} & \text{het derde} \end{array}\right\} \text{getal.}$$

I. COROLLARIUM.

Nu hebben wy hier mede twee Antwoorden gevonden; dus ſtaat nog te onderzoeken, of die beide goed zyn, en proef kunnen houden.

In het eerſte geval worden de zelfde antwoorden gevonden, die LUDOLF ſtelt, en kunnen ook aan de Proef voldoen, weshalven wy zullen onderzoeken, of dezelve geduurig evenredig zyn.

$$\text{De uiterſten} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{5}{3}\sqrt{5} \\ \tfrac{8}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \\ \hline \end{array}\right. \text{verm.} \qquad \begin{array}{l} \tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \\ \tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \\ \hline \end{array} \text{verm.} \left\}\text{de middelſten.}\right.$$

komt $\frac{520}{9} - \frac{80}{9}\sqrt{40} = \frac{520}{9} - \frac{80}{9}\sqrt{40}$, en derhalven voldoen deeze aan de geſtelde *Conditie*.

In het tweede geval, alwaar de andere *negative* wortelen genomen zyn, heeft men

$$\begin{array}{l} -\tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{5}{3}\sqrt{5} \\ -\tfrac{8}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \\ \hline \end{array} \text{verm.} \qquad \begin{array}{l} -\tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \\ -\tfrac{5}{3}\sqrt{8} - \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \\ \hline \end{array} \text{verm.}$$

komt $\frac{520}{9} + \frac{80}{9}\sqrt{40} = \frac{520}{9} + \frac{80}{9}\sqrt{40}.$

II. CO-

II. COROLLARIUM:

Hier uit blykt, dat dit laatſte antwoord in geenen deele voldoet, en derhalven moet men zich niet verbeelden, dat hier meer als één antwoord plaats kan hebben, waar van wy nu de reden zullen naſpeuren.

In de eerſte plaats is het zeker, dat de beide gevondene Waarden, $x = \frac{5\sqrt{8} - 8\sqrt{5}}{3}$, en $x = \frac{-5\sqrt{8} - 8\sqrt{5}}{3}$, voldoen zullen aan de gevondene Vergelyking $3xx + 2x\sqrt{320} = -40$, of aan $5xx = 8xx + 2x\sqrt{320} + 40$.

Want $x = \frac{-5\sqrt{8} - 8\sqrt{5}}{3}$ zynde,

$$\overline{}$$

zo is $xx = \frac{520 + 80\sqrt{40}}{9}$

$$\overline{}\ 3$$

$$3xx = \frac{520 + 80\sqrt{40}}{3}.$$

Wederom $x = \frac{-5\sqrt{8} - 8\sqrt{5}}{3}$

$$\overline{}\ 2$$

$$2x = \frac{-10\sqrt{8} - 16\sqrt{5}}{3}$$

$$\sqrt{320} = \sqrt{320}$$

$$\overline{}\ \text{verm.}$$

$$2x\sqrt{320} = \frac{-80\sqrt{40} - 16 \times 40}{3}$$

$$\sqrt{320} = \sqrt{320}$$

$$3xx = \frac{+80\sqrt{40} + 520}{3}$$

$$\overline{}\ \text{verg.}$$

$3xx + 2x\sqrt{320} = -\frac{120}{3} = -40$ zo als de (Vergelyking was.

Nu hebben wy gevonden $5xx = 8xx + 2x\sqrt{320} + 40$;

$+40$, dat beide *Quadraaten* zyn, van $x\sqrt{5}$, en $-x\sqrt{8}-\sqrt{40}$; en schoon het wel waar is, dat, de *Quadraaten* van twee Grootheden gelyk zynde, hunne wortels ook gezegd worden gelyk te zyn, moet dit echter zodanig verstaan worden, dat die wortelen van één soort moeten zyn, naamelyk; beide *positif*, of beide *negatif*, dewyl men anders zou kunnen zeggen, dat de *Quadraaten* gelyk, en de wortels ongelyk zyn. Neem eens de *Quadraaten* 4 en 4 zyn gelyk, en ook hunne wortels $+2=+2$, en $-2=-2$, om dat het anders tegen de reden zou zyn, dat de *positive* wortel uit 4, dat is $+2$, gelyk zou zyn, aan de *negative* wortel uit 4, die -2 is. Nu zyn de wortels $x\sqrt{5}$, en $x\sqrt{8}-\sqrt{40}$, de eene *positif*, en de andere *negatif*; waar uit blykt, dat wel hunne *Quadraaten* $5xx$, $=8xx+2x\sqrt{320}+40$ aan malkanderen gelyk kunnen zyn, met $x=\frac{-5\sqrt{8}-8\sqrt{5}}{3}$ te stellen; maar dat de gelykstelling van hunne wortels $x\sqrt{5}=-\sqrt{8}-\sqrt{40}$ onmogelyk is. Dienvolgens kunnen de begeerde evenredige getallen ook niet voldoen, gelyk door proefneeming is aangetoond.

S C H O L I U M.

Het geen wy op deeze 37ste *Vraag* hebben aangemerkt, kan insgelyks op de drie volgende toegepast worden, waar in, op de zelfde wyze, de tweede wortel uit de Vierkants-Vergelykinge niet voldoen zal; en dus is het klaarblykelyk, dat de antwoorden, welken wy door middel van de *simpele* Vergelykinge gevonden hebben, de waare antwoorden zyn, en dat 'er geene andere, die voldoende zyn, op deeze Voorstellen kunnen gegeeven worden.

XLI. V R A A G.

Vind drie getallen, van natuur als de voorgaande, welker Som doet 24, en de som van haare *Quadraaten* 346.

O P L O S S I N G.

Stel voor de Evenredigen x, xy, xyy; zo is

$x+y$.

$$x+xy+xyy=a,$$

derh. $xx+xxyy+xxy^4+2xxy+2xxyy+2xxy^3=aa$

en $xx+xxyy+xxy^4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . =b$ afg.

$$2xxy+2xxyy+2xxy^3=aa-b$$

$x+xy+xyy=a$

$$2xy=\frac{aa-b}{a}$$

2

$$\left.\begin{array}{r} xy=\dfrac{aa-b}{2a} \\ x+xy+xyy=a \end{array}\right\}\text{gedeeld.}$$

$$\frac{1+y+yy}{y}=\frac{2aa}{aa-b}$$

herl.

$$aa+aay+aayy-b-by-byy=2aay$$

$$aa-aay+aayy-b-by-byy=0$$

$$aayy-byy-aay-by=b-aa$$

$aa-b$

$$yy-\frac{aa+b}{aa-b}y=-1$$

$$\overline{\frac{aa+b}{2.\overline{aa-b}}}\Big|^2=\frac{a^4+2aab+bb}{4a^4-8aab+4bb}$$

verg.

$$yy-\frac{aa+b}{aa-b}y+\overline{\frac{aa+b}{2.\overline{aa-b}}}\Big|^2=\frac{-3a^4+10aab-3bb}{4a^4-8aab+4bb}$$

$\surd$

$$y-\frac{aa+b}{2.\overline{aa-b}}=\frac{\sqrt{-3a^4+10aab-3bb}}{2.\overline{aa-b}}$$

$y=$

$$y = \frac{aa + b + \sqrt{-3a^4 + 10aab - 3bb}}{2 . \overline{aa - b}}$$

$$xy = \frac{aa - b}{2a}$$

verm.

$$xyy = \frac{aa + b + \sqrt{-3a^4 + 10aab - bb}}{4a}$$

$$= \frac{aa + b}{4a} + \sqrt{\frac{-3a^4 + 10aab - 3bb}{16aa}}$$

Om nu het eerste getal te vinden, zo kan men y in xy deelen, waar door dan alles openbaar is. Daarom $y = \frac{aa + b + \sqrt{-3a^4 + 10aab - 3bb}}{2 . \overline{aa - bb}}$ gedeeld in $xy =$ $\frac{aa - b}{2a}$; komt $\frac{xy}{y} = x =$ . . . . .

$$\left(\frac{aa + b - \sqrt{-3a^4 + 10aab - 3bb}}{4a} \right.$$

Nu is gegeeven $a = 24$, $aa = 576$, $a^4 = 331776$
$b = 346$, $b = 346$, $bb = 119716$

$aab = 199296$, $a^4 + bb = 451492$

3

$3a^4 + 3bb = 1354476$ } afgetr.
$10aab = 1992960$

$-3a^4 + 10aab - 3bb = 638484$

$16aa = 9216$

$$\frac{-3a^4 + 10aab - 3bb}{16aa} = 69\tfrac{215}{768}$$

$\sqrt{}$

$$\sqrt{\frac{-3a^4 + aab - 3bb}{16aa}} = \sqrt{69\tfrac{215}{768}}.$$

We-

Wederom $aa = 576$

$$
\begin{array}{rl}
& aa = 576 \\
& b = 346 \\
\hline
& aa + b = 922 \quad \text{verg.} \\
4a = 96 & \overline{}
\end{array}
$$

$$\frac{aa+b}{4a} = 9\tfrac{29}{48}, \text{ en dus } 9\tfrac{29}{48} - \sqrt{69\tfrac{215}{768}} \text{ het eerste getal.}$$

Eindelyk $aa = 576$

$$
\begin{array}{rl}
& aa = 576 \\
& b = 346 \\
\hline
& aa - b = 230 \quad \text{afget.} \\
2a = 48 & \overline{}
\end{array}
$$

$$\frac{aa-b}{2a} = 4\tfrac{19}{24} = xy \text{ het tweede getal.}$$

$$\text{En } \frac{aa+b}{4a} + \sqrt{\frac{-3a^4 + 10aab - 3bb}{16aa}} = 9\tfrac{29}{48} + 69\tfrac{215}{768}$$

(het derde getal.

S C H O L I U M.

Indien gegeeven was $a = 32$, $b = 678$; zo is het de 96ste der *eerste Honderd konstige Vraagen* van MARTEN WILKENS; en dan zyn de getallen, het eerste $13\tfrac{19}{64} - \sqrt{147\tfrac{2373}{4096}}$, het tweede $5\tfrac{13}{32}$, en het derde $13\tfrac{19}{64} + \sqrt{147\tfrac{2373}{4096}}$.

XLII. V R A A G.

Zoek drie getallen, als boven; zo men 40 deelt door elk getal byzonder, en dezelven met malkander vermenigvuldigt, en ook te saamen vergaart, dat de drie *Quotienten* te saamen gelyk zyn aan het *Product*, en dat hunne Som mede zo veel doet?

O P L O S S I N G.

Stel voor de geduurige Evenredigen x, xy, xyy; waar van ieder gedeeld in $40 = a$, zullen de *Quotienten* zyn

$$\frac{a}{x},$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{x}\\[4pt]\frac{a}{xy}\\[4pt]\frac{a}{xyy}\end{array}\right\}\text{Vergaard en vermenigvuldigd.}$$

komt $\frac{ayy+ay+a}{xyy} = \frac{a^3}{x^3y^3} = x^3y^3$

$a^3 = x^6y^6$, dus $xxyy = a$, (of $xy = \sqrt{a}$.

Maar $\frac{ayy+ay+a}{xyy} = \frac{a^3}{x^3y^3}$

herl.

$\frac{yy+y+1}{xyy} = \frac{aa}{x^3y^3}$

xyy

$yy+y+1 = \frac{aa}{xxy}$

of $yy+y+1 = \frac{aay}{xxyy}$

Maar $xxyy = a$;

Derhalven $yy+y+1 = \frac{aay}{a} = ay$

$yy+y-ay = -1$

$\overline{\frac{1-a}{2}}\Big|^2 = \frac{1-2a+aa}{4}$

verg.

$yy+y-ay+\overline{\frac{1-a}{2}}\Big|^2 = \frac{aa-2a-3}{4}$

$\sqrt{}$

$$y + \frac{1-a}{2} = \frac{\sqrt{\overline{aa-2a-3}}}{2}$$

$$y = \frac{a-1+\sqrt{\overline{aa-2a-3}}}{2}$$

Deelende nu $a-1+\sqrt{\overline{aa-2a-3}}$ in $2\sqrt{a}$;

komt $x = \dfrac{\overline{a-1}\sqrt{a} - \overline{aa-2a-3}\sqrt{a}}{2}$

$xy = \sqrt{a}$

$xyy = \dfrac{\overline{a-1}\sqrt{a} + \overline{aa-2a-3}\sqrt{a}}{2}$

Of, dat het zelfde is,

$$x = \sqrt{\frac{a \times \overline{aa-2a+1}}{4}} + \sqrt{\frac{a \times \overline{aa-2a-3}}{4}}$$

$xy = \sqrt{a}$

$$xyy = \sqrt{\frac{a \times \overline{aa-2a+1}}{4}} + \sqrt{\frac{a \times \overline{aa-2a-3}}{4}}$$

Nu is gegeeven $a = 40$

$\overline{a-1} = 39 \quad \sqrt{}$

$\overline{aa-2a+1} = 1521$, dus $aa-2a-3 = 1517$

$\frac{1}{4}a = 10 \qquad \frac{1}{4}a = 10$

verm. verm.

$\dfrac{a \times \overline{aa-2a+1}}{4} = 15210 \qquad \dfrac{a \times \overline{aa-2a-3}}{4} = 15170$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\dfrac{a \times \overline{aa-2a+1}}{4}} = \sqrt{15210} \qquad \sqrt{\dfrac{a \times \overline{aa-2a-3}}{4}} = \sqrt{15170}.$

Derhalven $x = \sqrt{15210} - \sqrt{15170}$;

$xy = \sqrt{40}$;

$xyy = \sqrt{15210} - \sqrt{15170}$.

AN-

ANDERS.

Stel voor de Evenredigen x, $\sqrt{a}$, en $\frac{a}{x}$.

Deelende nu elk derzelven in het getal a, zo hebben wy;

$$\frac{a}{x},\ \frac{a}{\sqrt{a}},\ x$$

of $\frac{a}{x}$, $\sqrt{a}$, x, en dus de zelfde getallen, die wy gesteld hebben; waar uit blykt, dat de Som der *Quotienten* gelyk is aan de Som der getallen; dus blyft nog alleen maar overig, dat de Som der getallen aan het *product* derzelven gelyk zy. Daarom

$$x+\sqrt{a}+\frac{a}{x}=a\sqrt{a}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; x$$

$$xx+x\sqrt{a}+a=ax\sqrt{a}$$

$$xx+x\sqrt{a}-ax\sqrt{a}=-a$$

$$\text{komt } x=\frac{\overline{a-1}\sqrt{a}+\sqrt{a^3-2aa-3a}}{2} \text{ het eerste}$$

$$\frac{a}{x}=\frac{\overline{a-1}\sqrt{a}-\sqrt{a^3-2aa-3a}}{2} \text{ het derde (getal.}$$

Zynde de zelfde waarden als vooren, en daarom ook de zelfde getallen.

Maar indien gegeeven was $a=30$, zo is het de 88ste van M. WILKENS *eerste honderd Vraagen.*

XLIII. VRAAG.

Vind drie Getallen, van natuur als boven, die te saamen vergaard doen $55+\sqrt{4128\frac{4}{7}}$, en zo men die met malkanderen vermenigvuldigt, dat het *Product* zy $2255+\sqrt{4280668}$.

OPLOSSING.

Stel voor de Evenredigen x, xy, xyy;

 dan

dan is hunne Som $x+xy+xyy=a$

hun *product* $x^3y^3=b$, dus $xy=\sqrt[3]{b}$, stel $=c$.

Zo heeft men $x+xy+xyy=a$

$$xy=c$$

$$\frac{1+y+yy}{y}=\frac{a}{c}$$

herl.

$$c+cy+cyy=ay$$

of $cyy+cy-ay=-c$

c

$$ccyy+ccy-acy=-cc$$

$$\left.\frac{c-a}{2}\right|^2=\frac{cc-2ac+aa}{4}$$

verg.

$$ccyy+ccy-acy+\left.\frac{c-a}{2}\right|^2=\frac{aa-2ac-3cc}{4}$$

$\surd$

$$cy+\frac{c-a}{2}=\frac{\sqrt{aa-2ac-3cc}}{2}$$

of $cy=\frac{a-c+\sqrt{aa-2ac-3cc}}{2}$

c

$$y=\frac{a-c+\sqrt{aa-2ac-3cc}}{2c}$$

$$xy=c$$

verm.

$$xyy=\frac{a-c+\sqrt{aa-2ac-3cc}}{2}$$

Wederom $y=\frac{a-c+\sqrt{aa-2ac-3cc}}{2c}$ gedeeld in

$(xy=c;$

komt

komt $x = \frac{a - c - \sqrt{aa - 2ac - 3cc}}{2}$.

Om nu de getallen te vinden, zo is gegeeven $a = 55 + \sqrt{4128\frac{4}{7}}$

$b = 2255 + \sqrt{4280668}$.

Derhalven moet uit $b = 2255 + \sqrt{4280668}$ de *Cubic*-wortel getrokken worden, om c te hebben, het geen verricht wordt volgens den Regel, welke S. PANSER opgeeft, in zyne *Mathematische Rariteitkamer* pag. 21.

De Teerlings-wortel uit $2255 + \sqrt{4280668}$

$\overline{}\ \sqrt{}$

5085025   4280668

4280668

afget.

804357

$\sqrt[3]{}$

93 het verschil der *Quadraaten*.

3

279 deszelfs drievouwd.

Nu moet uit het *rationaale* deel (2255) de naaste *Cubic*-wortel getrokken worden, zodanig, dat, als dezelve in het *rationaale* deel (2255) gedeeld wordt, zy daar in effen opgaat, als mede, zo dit *Quotient* by 279 vergaard wordt, dat dan de Som een *rationaal Quadraat* zy. Nu is de naaste *Cubic*-wortel uit

2255 .. 13, doch deeze kan niet in 2255 gedeeld worden.

12

11 gedeeld in 2255 komt 205 .. 205

hier by 279

484

$\sqrt{}$

22

2

het *rationaale* deel .. 11 .. 121

afget.

84

gedeeld door 3

$$\sqrt{\quad 28 \text{ of } 4 \times 7}$$

het *Surdische* deel $2\sqrt{7}$

Dus $11 + 2\sqrt{7} = c$ het middelste getal.

Nu is $a = 55 + \frac{170}{7}\sqrt{7}$

$c = 11 + \frac{14}{7}\sqrt{7}$ afget.

$a - c = 44 + \frac{156}{7}\sqrt{7}$ $\sqrt{\ }$

$aa - 2ac + cc = 5412\frac{4}{7} + \frac{13728}{7}\sqrt{7}$

Wederom $c = 11 + 2\sqrt{7}$ $\sqrt{\ }$

$cc = 149 + 44\sqrt{7}$ 4

$4cc = 596 + 176\sqrt{7}$

Derh. $aa - 2ac - 3cc = \frac{236022 + 87142\sqrt{7}}{7 \times 7}$ hier uit (de Wortel;

komt $\sqrt{aa - 2ac - 3cc} = \frac{308 + 142\sqrt{7}}{7}$

of $\sqrt{aa - 2ac - 3cc} = 44 + \frac{142}{7}\sqrt{7}$ } verg. en afget.
$a - c = 44 + \frac{156}{7}\sqrt{7}$ }

$a - c + \sqrt{aa - 2ac - 3cc} = 88 + \frac{298}{7}\sqrt{7} = 2xyy$

$a - c - \sqrt{aa - 2ac - 3cc} = \frac{14}{7}\sqrt{7} = 2\sqrt{7} = 2x.$

Dat is $x = \sqrt{7}$

$xy = 11 + \sqrt{28}.$

$xyy = 44 + \frac{149}{7}\sqrt{7} = 44 + \sqrt{\frac{22201}{49} \times 7} = 44 +$ ($\sqrt{3171\frac{4}{7}}$.

Maar indien $a = 60 + \sqrt{4579\frac{3}{7}}$; en $b = 3168 + \sqrt{8911360}$ gegeeven was, zo is deeze de 97ste van M. WILKENS *eerste honderd Vraagen*, en dan zyn de getallen $\sqrt{10}$, $12 + \sqrt{40}$, en $48 + \sqrt{3388\frac{3}{7}}$.

XLIV.

XLIV. VRAAG.

Daar zyn drie getallen, als boven; het eerſte en derde doen te ſaamen 100, en de *Quadraaten* der getallen doen te ſaamen 8000. Men vraagt naar de getallen?

OPLOSSING.

Stel voor de Evenredigen x, xy, xyy;
Zo is de Som van de eerſte en derde $x + xyy = a$;
en de ſom der *Quadr.* $xx + xxyy + xxy^4 = b$ } afget.

$$xx + 2xxyy + xxy^4 = aa$$

$$xxyy = aa - b$$

$\surd$

$$xy = \sqrt{aa - b}. \text{ Stel } = c.$$

Wederom $x + xyy = a$

$xy = c$

$$\frac{1 + yy}{y} = \frac{a}{c}$$

herl.

$$c + cyy = ay$$

$$cyy - ay = -c$$

komt $cy = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc}$

c

$$y = \frac{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc}}{c}$$

$$xy = c$$

$$xyy = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc}$$

Deelende nu $y = \dfrac{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc}}{c}$ in $xy = c$;

komt $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc}$.

Nu is gegeeven $a = 100 \ldots\ldots aa = 10000$

$b = 8000 \ldots\ldots b = 8000$

$aa - b = 2000;$

dus $c = xy = \sqrt{2000}$.

$cc = 2000$

$\frac{1}{4}aa = 2500$

afget

$\frac{1}{4}aa - cc = 500$; dus $\sqrt{\frac{1}{4}aa - cc} = \sqrt{500}$ } verg. en

$\frac{1}{2}a \ldots = 50$ } afget.

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc} = 50 + \sqrt{500}$

$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - cc} = 50 - \sqrt{500}$

Derhalven $x = 50 - \sqrt{500}$
$xy = \sqrt{2000}$
$xyy = 50 + \sqrt{500}$ } de begeerde getallen.

Gegeeven zynde $a = 60$, $b = 3000$, zo is het de 80ste van M. Wilkens *eerste honderd konstige Vraagen.*

XLV. VOORSTEL.

Zoek drie geduurig evenredige Getallen, zodanig; dat, als men de Som des tweeden en derden door het eerste, des eersten en tweeden door het derde, en de som des eersten en derden door het tweede deelt, de som der drie *Quotienten* zy $10\frac{73}{96} + \sqrt{51\frac{1}{24}}$.

OPLOSSING.

Stel voor de Evenredigen x, xy, xyy, zo is

$$\frac{xy + xyy}{x} = \frac{y + yy}{1} = \frac{y^3 + y^4}{yy}$$

$$\frac{x + xy}{xyy} = \frac{1 + y}{yy} = \frac{1 + y}{yy}$$

$$\frac{x + xyy}{xy} = \frac{1 + yy}{y} = \frac{y + y^3}{yy}$$

verg.

$y^4 +$

$$\frac{y^4+2y^3+2y+1}{yy} = 10\tfrac{73}{96}+\sqrt{51\tfrac{1}{24}}$$

$$\frac{3yy}{yy} = 3$$

verg.

$$\frac{y^4+2y^3+3yy+2y+1}{yy} = 13\tfrac{73}{96}+\sqrt{51\tfrac{1}{24}}$$

$\sqrt{\ }$

$$\frac{yy+y+1}{y} = \tfrac{35}{96}\sqrt{96}+1$$

y

$$yy+y+1 = \tfrac{35}{96}y\sqrt{96}+y$$

$$\text{of } yy-\tfrac{35}{96}y\sqrt{96} = -1$$

$$\tfrac{1225}{384} = \tfrac{1225}{384}$$

verg.

$$yy-\tfrac{35}{96}y\sqrt{96}+\tfrac{1225}{384} = \tfrac{841}{384}$$

$\sqrt{\ }$

$$y-\frac{35}{4\sqrt{24}} = \frac{29}{4\sqrt{24}}$$

$$y = \frac{64}{4\sqrt{24}} = \sqrt{10\tfrac{2}{3}}.$$

Dewyl nu x, door de herleiding, verdweenen is, zo mag die naar welgevallen genomen worden. Want, hoe men die ook neemt, zal de ſom der *Quotienten* evenwel altoos de zelfde, en dus gelyk aan de gegeeven Waarde blyven. Indien men derhalven x op 't kleinſte neemt, zal het antwoord in de kleinſte Getallen gevonden worden.

Neemende $x=1$, dan zyn de getallen 1, $\sqrt{10\tfrac{2}{3}}$, en $10\tfrac{2}{3}$.

Indien gegeeven was $a=17\tfrac{229}{284}+\sqrt{79\tfrac{16}{71}}$ zo is het de 90ſte van M. WILKENS *eerſte honderd konſtige Vraagen*, en de Getallen zyn dan 1, $\sqrt{17\tfrac{1}{4}}$, en $17\tfrac{1}{4}$.

XLVI. VRAAG.

Zoek vier Getallen, zodanig; dat het $\frac{2}{3}$ van het tweede en derde zy $\frac{5}{6}$ van het vierde, en het $\frac{3}{4}$ van het derde en vierde zy $5\frac{1}{4}$ maal zo veel als het eerste; als mede, dat het vermenigvuldigde des eersten en tweeden getals zy 126, en dat des derden en vierden 756.

OPLOSING.

Stel voor de getallen x, y, z, p.

zo is $\frac{2}{3}\overline{y+z}=\frac{5}{6}p$ of $4y+4z=5p$, en $p=\dfrac{4y+4z}{5}$

$\frac{3}{4}\overline{z+p}=5\frac{1}{4}x$ of $3z+3p=21x$, en $p=7x-z$

$xy=126$

$zp=756$

$$\frac{4y+4z}{5}=7x-z$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ 5$$

$$4y+4z=35x-5z$$

$$9z=35x-4y$$

$$9\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$z=\frac{35x-4y}{9}$$

$$7x=\frac{63x}{9}$$

$$7x-z=\frac{28x+4y}{9}=p$$

Derh. zyn de begeerde get. x, y, $\dfrac{35x-4y}{9}$, $\dfrac{28x+4y}{9}$.

Nu is nog gegeeven $xy=126$;

En zp, dat is

$$\frac{35x-4y}{9}\times\frac{28x+4y}{9}=\frac{980xx+28xy-16yy}{81}=756$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ 81$$

980 *

$$980xx + 28xy - 16yy = 61236$$
$$28xy \ldots\ldots = 3528$$
$$\overline{}\ \text{afget.}$$
$$980xx \ldots\ldots - 16yy = 57708$$
$$4\ \overline{}$$
$$245xx \ldots\ldots - 4yy = 14427$$
$$\overline{}\ \surd$$
$$60025x^4 - 1960xxyy + 16y^4 = 208138329$$
$$3920xxyy \ldots\ldots = 62233920$$
$$\overline{}\ \text{verg.}$$
$$60025x^4 + 1960xxyy + 16y^4 = 270372249$$
$$\surd\ \overline{}$$
$$245xx + 4yy = 16443$$
$$245xx - 4yy = 14427$$
$$\overline{}\ \text{verg.}$$
$$490xx \ldots = 30870$$
$$490\ \overline{}$$
$$xx \ldots = 63,\ x = \surd 63$$

Verder is de aftrekking $8yy = 2016$

$$8\ \overline{}$$
$$yy = 252,\ y = \surd 252.$$

Zo is dan $x = 3\surd 7 = \surd 63.$

$$y = 6\surd 7 = \surd 252.$$
$$\frac{35x - 4y}{9} = z = 9\surd 7 = \surd 567.$$
$$\frac{28x + 4y}{9} = p = 12\surd 7 = \surd 1008.$$

XLVII. VRAAG.

Zoek eene *Geometrische Progressie* van vier *Termen*, zodanig; dat, als men den eersten met den tweeden *Term* vermenigvuldigt, het *product* zy 10, en dat het vermenigvuldigde des derden en vierden *Terms* zy 2560.

OPLOSSING.

Stel voor de *Geometrische Progressie* x, xy, xyy, xy^3.

Het vermenigv. van den 1sten en 3den *Term* $xxy =$ 10

van

van den 3den en 4den *Term* $xxy^5 = 2560$

$$xxy = 10$$

$$y^4 = 256$$

$$\sqrt{}$$

$$yy = 16,$$

dus $y = 4$.

$$y = 4 \quad xxy = 10$$

$$xx = 2\tfrac{1}{2}$$

$$\sqrt{}$$

$$x = \sqrt{2\tfrac{1}{2}}$$

$$xy = 4\sqrt{2\tfrac{1}{2}} = \sqrt{40}.$$

$$xyy = 16\sqrt{2\tfrac{1}{2}} = \sqrt{640}.$$

$$xy^3 = 64\sqrt{2\tfrac{1}{2}} = \sqrt{10240}.$$

XLVIII. VRAAG.

Vind vier Getallen, zodanig; dat het verschil tusschen het tweede en vierde, zy $\frac{3}{8}$ van het verschil tusschen het eerste en derde getal; als mede, dat het verschil tusschen het tweede en derde zo veel doet, als $\frac{2}{9}$ des verschils tusschen het eerste en vierde getal, en als men het eerste en vierde getal te saamen vermenigvuldigt, komt 'er 20, en het tweede met het derde vermenigvuldigd, doet 16.

OPLOSSING.

Stel voor de Getallen x, y, z, p, dan is:

$\overline{y-p} = \frac{3}{8}.\overline{x-z}$; derh. $8y - 8p = 3x - 3z$

$\overline{y-z} = \frac{2}{9}.\overline{x-p}$ of $8p = 8y + 3z - 3x$

$xp = 20$

$yz = 16$ Dewyl ook $y - z = \frac{2}{9}.\overline{x-p}$ is;

zo is $9y - 9z = 2x - 2p$

$$2p = 2x + 9z - 9y$$

$$4$$

$$8p = 8x + 36z - 36y$$

Derhalven $8y + 3z - 3x = 8x + 36z - 36y$

Daarom $44y = 11x + 33z$

$$11$$

$4y$.

$$4y = x + 3z$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; z$$
$$4yz = xz + 3zz$$
$$4 \; \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$yz = \frac{xz + 3zz}{4} = 16.$$

Wederom $4y = x + 3z$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; 2$$
$$8y = 2x + 6z$$
$$-3x + 3z = -3x + 3z$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{ verg.}$$
$$-3x + 3z + 8y = -x + 9z = 8p$$
$$p = \frac{-x + 9z}{8}$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; x$$
$$xp = \frac{-xx + 9xz}{8} = 20.$$

Door $yz = \frac{xz + 3zz}{4} = 16$, hebben wy $xz + 3zz = 64$;

$$xp = \frac{-xx + 9xz}{8} = 20 \ldots -xx + 9xz = 160$$
$$9xz = xx + 160$$
$$9x \; \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$z = \frac{xx + 160}{9x}$$
$$zz = \frac{x^4 + 320xx + 25600}{81xx}$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; 3$$
$$3zz = \frac{x^4 + 320xx + 25600}{27xx}$$
$$xz = \frac{xx + 160}{9}$$

$$xz + 3zz = \frac{4x^4 + 800xx + 25600}{27xx} = 64$$

$$\overline{}\ 27xx$$

$$4x^4 + 800xx + 25600 = 1728xx$$

$$4x^4 - 928xx + 25600 = 0$$

$$4\ \overline{}$$

$$x^4 - 232xx + 6400 = 0$$

$$7056 = 7056$$

$$\overline{}\ \text{verg.}$$

$$x^4 - 232xx + 13456 = 7056$$

$$\surd\ \overline{}$$

$$xx - 116 = 84$$

$$xx = 200$$

$$\surd\ \overline{}$$

$$x = \surd 200$$

$$9x = 9\surd 200.$$

$$xp = 20$$

$$x = \surd 200\ \overline{}$$

$$p = \surd 2$$

$$z = \frac{xx + 160}{9x} = \surd 8$$

$$yz = 16$$

$$z = \surd 8\ \overline{}$$

$$y = \surd 32$$

Dienvolgens zyn $\surd 200$, $\surd 32$, $\surd 8$, $\surd 2$ de begeerde getallen.

AANMERKING.

Dewyl de Wortel van de gevondene Vergelyking $x^4 - 232xx + 13456 = 7056$ ook kan zyn $xx - 116 = -84$, kunnen wy, op deeze Vraag, nog een ander antwoord vinden; want, dan is $xx = 32$, derhalven $x = \surd 32$.

$$\text{En } \frac{xx + 160}{9x} = \frac{192}{9\surd 32} = \surd 14\tfrac{2}{9} = z.$$

$\frac{20}{x}$,

$$\frac{20}{x} = p = \frac{20}{\sqrt{32}} = \sqrt{12\tfrac{1}{2}}.$$

$$\frac{16}{z} = y = \frac{16}{\sqrt{14\tfrac{2}{9}}} = \sqrt{18}.$$

Derh. zyn ook de getallen $\sqrt{32}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{14\tfrac{2}{9}}$, $\sqrt{12\tfrac{1}{2}}$.

XLIX. VRAAG.

Zoek vier getallen, die geduurig evenredig zyn, zodanig, dat, trekkende het eerſte van het derde getal, de reſt zy 6, en dat het vierde 10 meer zy, als het derde.

OPLOSSING.

Stel voor de Evenredigen x, xy, xyy, xy^3.

Zo is $xyy - x = 6$, en $xy^3 - xyy = 10$.

Deelende nu de eerſte van deeze Vergelykingen door de laatſte zo hebben wy

$$\frac{yy-1}{y^3-yy} = \tfrac{6}{10}$$

$$\text{of}\ \frac{yy-1}{y-1\cdot yy} = \tfrac{6}{10}$$

$$\frac{y+1}{yy} = \tfrac{6}{10}$$

$$6yy = 10y + 10$$

$$6yy = 10y = 10$$

$$y = \frac{5+\sqrt{85}}{6}$$

$$yy = \frac{110+10\sqrt{85}}{36}$$

$$x = \frac{-37+5\sqrt{85}}{7}$$

$$y = \frac{5+\sqrt{85}}{6}$$

$$xy = \frac{40-2\sqrt{85}}{7}$$

$$y = \frac{5+\sqrt{85}}{6}$$

$$xyy = \frac{30+30\sqrt{85}}{42}$$

$$= \frac{5+5\sqrt{85}}{7}.$$

Dus

$$\text{Dus } yy-1=\frac{74+10\sqrt{85}}{36} \quad \text{en } xy^3=\frac{450+30\sqrt{85}}{42}.$$

$$\text{en } \frac{6}{yy-1}=x=\frac{-37+5\sqrt{85}}{7} \quad =\frac{75+5\sqrt{85}}{7}.$$

L. VRAAG.

Daar is eene *Arithmetische Progressie* van vier *Termen*; als men de *Som* des eersten en tweeden *Terms* met den derden vermenigvuldigt, komt 'er 20, en als men de som des tweeden en derden *Terms* met den vierde vermenigvuldigt, komt 'er 40. Men vraagt naar de *Progressie*?

OPLOSSING.

Stel voor de *Arithmetische Progressie* $x, x+y, x+2y, x+3y$. Dan is volgens de *conditien* der Vraage;

$$\left.\begin{array}{l} \overline{2x+y}\times\overline{x+2y}=2xx+5xy+2yy=20 \\ \overline{2x+3y}\times\overline{x+3y}=2xx+9xy+9yy=40 \end{array}\right\}\text{afget.}$$

$$4xy+7yy=20$$

$$4xy=20-7yy$$

$$4y$$

$$x=\frac{20-7yy}{4y}$$

$$\sqrt{}$$

$$xx=\frac{400-280yy+49y^4}{16yy}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2xx=\dfrac{400-280yy+49y^4}{8yy} \\ 5xy=\dfrac{100y-35y^3}{4y} \\ 2yy=2yy \end{array}\right.$$

verg.

2xx.

$$2xx+5xy+2yy=\frac{400-80yy-5y^4}{8yy}=20$$

8yy

$$400-80yy-5y^4=160yy$$

$$5y^4+240yy=400$$

5

$$y^4+48yy=80$$

dus $yy=-24+\sqrt{656}$

√

$$y^4=1232-48\sqrt{656}$$

7

$$7y^4=8624-336\sqrt{656}$$

7

$$49y^4=60368-2352\sqrt{656}$$

Dewyl $yy=-24+\sqrt{656}$ is,
zo is $-280yy=6720-280\sqrt{656}$
$400=400$

verg.

$$49y^4-280yy+400=67488-2632\sqrt{656}$$

$16yy=16\times-24+\sqrt{656}$

$$\frac{49y^4-280yy+400}{16yy}=\frac{4218-164\frac{1}{2}\sqrt{656}}{-24+\sqrt{656}}=xx.$$

Dat is $xx=-83\frac{1}{2}+\sqrt{7472\frac{1}{4}}$

√

$x=\sqrt{-83\frac{1}{2}+\sqrt{7472\frac{1}{4}}}$ het eerfte getal.

Om de andere Getallen te vinden.

Daar is gevonden $yy=-24+\sqrt{656}$

7

$$\left.\begin{aligned}7yy&=-168+7\sqrt{656}\\20&=20\end{aligned}\right\}\text{afget.}$$

$$20-7yy=188-7\sqrt{656}=4xy$$

Dus $2xy=94-3\frac{1}{2}\sqrt{656}$
$xx=-83\frac{1}{2}+\frac{27}{8}\sqrt{656}$
$yy=-24+\sqrt{656}$

verg.

$$\sqrt{\;xx+2xy+yy = -13\tfrac{1}{2}+\sqrt{502\tfrac{1}{4}}\;}$$

$$x+y = \sqrt{-13\tfrac{1}{2}+\sqrt{502\tfrac{1}{4}}} \text{ het tweede get.}$$

Wederom

$$\begin{aligned} xx &= -83\tfrac{1}{2}+3\tfrac{3}{8}\sqrt{656} \\ 4xy &= 188 - 7\sqrt{656} \\ 4yy &= -96 + 4\sqrt{656} \end{aligned}$$

verg.

$$\sqrt{\;xx+4xy+4yy = 8\tfrac{1}{2} + \sqrt{92\tfrac{1}{4}}\;}$$

$$x+2y = \sqrt{8\tfrac{1}{2}+\sqrt{92\tfrac{1}{4}}} \text{ het derde getal.}$$

Eindelyk

$$\begin{aligned} xx &= -83\tfrac{1}{2}+ 3\tfrac{3}{8}\sqrt{656} \\ 6xy &= 282 - 10\tfrac{1}{2}\sqrt{656} \\ 9yy &= -216 + 9\sqrt{656} \end{aligned}$$

verg.

$$\sqrt{\;xx+6xy+9yy = -17\tfrac{1}{2}+\sqrt{2306\tfrac{1}{4}}\;}$$

$$x+3y = \sqrt{-17\tfrac{1}{2}+\sqrt{2306\tfrac{1}{4}}}$$

Derhalven is de begeerde *Arithmetische Progressie*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-83\tfrac{1}{2}+\sqrt{7472\tfrac{1}{4}}} \\ x+y &= \sqrt{-13\tfrac{1}{2}+\sqrt{502\tfrac{1}{4}}} \\ x+2y &= \sqrt{8\tfrac{1}{2}+\sqrt{92\tfrac{1}{4}}} \\ x+3y &= \sqrt{-17\tfrac{1}{2}+\sqrt{2306\tfrac{1}{4}}} \end{aligned}$$

AANMERKING.

Om te onderzoeken, of deeze getallen aan het begeerde voldoen, dat is, als men de Proef op het voorgestelde begeert te vinden; hier van zegt LUDOLF; *de Proeve is vermaakelyk, zoek de gemeene differentie, gy zult vinden* $\sqrt{-24+\sqrt{656}}$; *de som des eersten en tweeden getals is* $\sqrt{-170+\sqrt{36900}}$; *deeze vermenigvuldigd met het derde, komt* 20. *Ook is de som des tweeden en derden* $\sqrt{14+\sqrt{1476}}$, *deeze vermenigvuldigd met het vierde, komt* 40, *enz.* Deeze Proef schynt LUDOLF te willen gemaakt hebben, door de gemeene *differentie*, waar voor

voor wy gevonden hebben, $y = \sqrt{-24+\sqrt{656}}$, of $yy = -24+\sqrt{656}$; en, om dat, van de gestelde *Progressie*, de som des eersten en tweeden *Terms* is $2x+y$, of deszelfs *Quadraat* $4xx+4xy+yy$, zo hebben wy derhalven;

$$\begin{array}{rl} xx = & -83\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{3}{8}\sqrt{656} \\ \hline & \qquad\qquad 4 \\ 4xx = & -334 + 13\tfrac{1}{2}\sqrt{656} \\ 4xy = & 188 - 7\sqrt{656} \\ yy = & -24 + \sqrt{656} \\ \hline 4xx+4xy+yy = & -170 + 7\tfrac{1}{2}\sqrt{656} \\ = & -170 + \sqrt{36900} \end{array}$$

$$2x+y = \sqrt{-170+\sqrt{36900}}$$ de som des 1sten (en 2den.

De 3de is $x+2y = \sqrt{8\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}\sqrt{656}}$ verm.

komt $\sqrt{400}$, zynde gelyk aan 20, (het *Product*.

Wederom de gemeene *differentie* is $y = \sqrt{-24+\sqrt{656}}$. Nu is de Som van den tweeden en derden *Term* $2x+3y$, en by gevolg derzelver *Quadraat* $4xx+12xy+9yy$.

$$\begin{array}{rl} \text{Hierom } 4xx = & -334 + 13\tfrac{1}{2}\sqrt{656} \\ 12xy = & 564 - 21\sqrt{656} \\ 9yy = & -216 + 9\sqrt{656} \\ \hline 4xx+12xy+9yy = & 14 + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{656} \\ = & 14 + \sqrt{1476} \end{array}$$

$$2x+3y = \sqrt{14+\sqrt{1476}}$$ de Som des (tweeden en derden.

$$x+3y = \sqrt{-17\tfrac{1}{2}+\sqrt{2306\tfrac{1}{4}}}$$ de vierde verm.

komt $\sqrt{1600}$ gelyk aan 40; (dat getoond moest worden.

LI. VRAAG.

Zoek vier geduurig evenredige Getallen, die te saamen doen 10, en van welke de Som der *Quadraaten* is 80.

OPLOSSING.

Stel voor de geduurig Evenredigen x, xy, xyy, xy^3.

Dan is $x + xy + xyy + xy^3 = a$

$$xx + xxyy + xxy^4 + xxy^6 = b$$

ged.

$$\frac{1 + y + yy + y^3}{x \cdot \overline{1 + yy + y^4 + y^6}} = \frac{a}{b}$$

Of $\dfrac{1 + y + yy + y^3}{1 + yy + y^4 + y^6} = \dfrac{ax}{b}$

Maar $1 + y + yy + y^3$ is $= \overline{1+y} \cdot \overline{1+yy}$

$1 + yy + y^4 + y^6$ is $= \overline{1+y^4} \cdot \overline{1+yy}$

$$\frac{\overline{1+y} \cdot \overline{1+yy}}{\overline{1+y^4} \cdot \overline{1+yy}} = \frac{ax}{b}$$

$$\frac{1+y}{1+y^4} = \frac{ax}{b}$$

herl.

$$ax \cdot \overline{1+y^4} = b \cdot \overline{1+y}$$

$$x = \frac{b \cdot \overline{1+y}}{a \cdot \overline{1+y^4}}$$

Wederom $x + xy + xyy + xy^3 = a$

$$x = \frac{a}{1 + y + yy + y^3}$$

$$x = \frac{b \cdot \overline{1+y}}{a \cdot \overline{1+y^4}}$$

$b \cdot \overline{1+y}$

$$\frac{b.\overline{1+y}}{a.\overline{1+y^4}} = \frac{a}{\overline{1+y+yy+y^3}}$$

Derh. $b.\overline{y+1}.\overline{y^3+yy+y+1} = aa.\overline{y^4+1}$

of $b.y^4+2by^3+2byy+2by+b = aay^4+aa$

$$aay^4 - by^4 - 2by^3 - 2byy - 2by + aa - b = 0$$

$aa-b$ ged.

$$y^4 - \frac{2b}{aa-b}y^3 - \frac{2b}{aa-b}yy - \frac{2b}{aa-b}y + 1 = 0$$

In deeze Vergelykinge zyn de *Coëfficienten*, ter wederzyden, tweê aan twee malkander gelyk, of wel de zelfde Grootheden; en dewyl alle zodanige Vergelykingen, door 'er zekere Grootheid by te vergaaren, of van dezelve af te trekken, *rationaal* kunnen opgelost worden, zodanig, dat men door het vergaaren, of aftrekken, van die Grootheid, een andere Grootheid verkrygt, daar men de Vierkants-Wortel uit kan trekken; zullen wy onderstellen, dat de Wortel, uit het voortkomende *Quadraat*, zy $yy - \frac{b}{aa-b}y + 1$, dan is het *Quadraat* zelve $y^4 - \frac{2b}{aa-b}y^3 + \frac{2a^4-4aab+3bb}{a^4-2aa+bb}$ $yy - \frac{2b}{aa-b}y + 1$; dus wordt dan de gevonden Vergelykinge aldus opgelost:

$$y^4 - \frac{2b}{aa-b}y^3 - \frac{2b}{aa-b}yy - \frac{2b}{aa-b}y + 1 = 0$$

$$\frac{2a^4-2aab+bb}{a^4-2aab+bb}yy = \frac{2a^4-2aab+bb}{a^4-2aab+bb}yy$$

verg.

$$y^4 - \frac{2b}{aa-b}y^3 + \frac{2a^4-4aab+3bb}{a^4-2aab+bb}yy - \frac{2b}{aa-b}y + 1 = \left(\frac{2a^4-2aab+bb}{a^4-2aab+bb}yy\right.$$

$\surd$

$$yy - \frac{b}{aa-b}y + 1 = y\sqrt{\frac{2a^4 - 2aab + bb}{a^4 - 2aab + bb}}$$

$$\text{of } yy - \frac{b}{aa-b}y + 1 = \frac{y\sqrt{2a^4 - 2aab + bb}}{aa-b}$$

$$yy - \frac{b + \sqrt{2a^4 - 2aab + bb}}{aa-b}\,y = -1$$

Door deeze algemeene Vergelykinge kan nu de waarde van y gevonden, en vervolgens die van x gemakkelyk bepaald worden.

Laat, als in dit Voorbeeld, gegeeven zyn $a = 10$, $b = 80$;

zo is $yy - \overline{4 + \sqrt{26}}\,.\,y = -1$

$$\overline{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,|^2 = 10\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}$$

$$yy - \overline{4 + \sqrt{26}}\,.\,y + \overline{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,|^2 = 9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}$$

$\sqrt{}$

$$y - \overline{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26}} = \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$$

$$y = 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26} \pm \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$$

Indien deeze Waarde van y eenigzins van eene geschikte gedaante was, zou men hier door de Waarde van x gemakkelyk kunnen vinden; maar aangezien dezelve, in deeze Vraag, geheel ongeschikt is, en om dat de geheele hoofdzaak van dit Voorstel schynt te zyn, om zodanige ongeschikte *Surdische* Waarden te behandelen, zullen wy de waarde van x, door de reeds gevondene Vergelykingen, moeten vinden. Wy hebben

$$x = \frac{b\,.\,\overline{y+1}}{a\,.\,\overline{y^4+1}} = \frac{a}{y^3 + yy + y + 1}$$

$$b\,.\,\overline{y+1}\,.\,\overline{y^3 + yy + y + 1} = aa\,.\,\overline{y^4 + 1}$$

of

of $b.\overline{y^4+2y^3+2yy+2y+1} = aa.\overline{y^4+1}$

y^4+1 ———————————————————

$$\frac{b.\overline{y^4+2y^3+2yy+2y+1}}{y^4+1} = aa$$

b ———————————————————

$$\frac{y^4+2y^3+2yy+2y+1}{y^4+1} = \frac{aa}{b}$$

$$\frac{y^4+1}{y^4+1} = 1$$

——————————————————— verg. en afget.

$$\frac{2y^4+2y^3+2yy+2y+2}{y^4+1} = \frac{aa}{b}+1$$

$$\frac{2y^3+2yy+2y}{y^4+1} = \frac{aa}{b}-1$$

Derhalven van $\dfrac{2y^4+2y^3+2yy+2y+2}{y^4+1} = \dfrac{aa}{b}+1$

afgetrokken $\dfrac{y+1}{y^4+1} = \dfrac{ax}{b}$, of $\dfrac{2y+2}{y^4+1} = \dfrac{2ax}{b}$

———————————————————

Blyft 'er $\dfrac{2y^4+2y^3+2yy}{y^4+1} = \dfrac{aa}{b}+1-\dfrac{2ax}{b}$

Dit ged. door $\dfrac{2y^3+2yy+2y}{y^4+1} = \dfrac{aa}{b}-1$

———————————————————

komt $y = \dfrac{\dfrac{aa}{b}+1-\dfrac{2ax}{b}}{\dfrac{aa}{b}-1}$

Om deeze waarde van y onder eene gefchikte gedaante te brengen, zo heeft men

$$\frac{aa}{b} - 1 \text{ te deelen in } \frac{aa}{b} + 1 - \frac{2ax}{b}$$

$$\text{of } aa - b \text{ in } aa + b - 2ax$$

$$\text{Derhalven } y = \frac{aa + b - 2ax}{aa - b}$$

$$\overline{aa - b} \,.\, y = aa + b - 2ax$$

$$\text{of } 2ax = aa + b - \overline{aa - b} \,.\, y$$

$$\text{Dus } x = \frac{aa + b}{2a} - \frac{aa - b}{2a} y$$

Nu is wederom, volgens het Voorstel, gegeeven, $a = 10$, $b = 80$, en gevonden $y = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{26} \pm \sqrt{9\frac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$, waar uit openbaar is, dat wy tot dit Voorstel twee byzondere antwoorden kunnen neemen, agt geevende op het Teken $\pm$, welk in de Waarde van y is.

Om nu de Getallen te vinden.

Ten Eersten. Neemende $y = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{26} + \sqrt{9\frac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$,

$$\text{zo is } x = \frac{aa+b}{2a} - \frac{aa-b}{2a} \,.\, \overline{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26} + \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}}.$$

Maar $a = 10$, $b = 80$ gegeeven zynde, zo heeft men

$$x = \tfrac{180}{20} - \tfrac{20}{20} \,.\, \overline{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26} + \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}}$$

$$= 9 - 1 \,.\, \overline{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26} + \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}}$$

$$= 7 - \tfrac{1}{2}\sqrt{26} - \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$$

$$= 7 - \sqrt{6\tfrac{1}{2}} - \sqrt{9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104}} \text{ het eerste getal.}$$

$$\text{Boven is gevonden } x = 7 - \tfrac{1}{2}\sqrt{26} - \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$$

$$y = 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{26} + \sqrt{9\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$$

---

7 —

$$\overline{7-\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,.\,\overline{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}+\overline{7-\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,.\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}$$

$$(^*)\div\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}\qquad\div\overline{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,.\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}$$

$$xy=\overline{7-\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,.\,\overline{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}+\overline{5-\sqrt{26}}\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}\div\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}.$$

Dewyl nu $\sqrt{26}$, in den middelsten *Term*, meer bedraagt als 5, in dien zelfden *Term*, zo kan dit aldus uitgedrukt worden:

$$xy=\overline{7-\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,.\,\overline{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\div\overline{-5+\sqrt{26}}\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}\div\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}.$$

Deeze vermenigvuldigingen werkelyk verrichtende, zo is

$$\overline{7-\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}\,.\,\overline{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}}=7\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{2}\sqrt{26}$$

$$\div\overline{-5+\sqrt{26}}\,.\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}=\div\overline{-5+\sqrt{26}}\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}$$

$$\div\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}\;\ldots\;=\div\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}$$

$$\text{Derh. } xy=-2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}\div\overline{-5+\sqrt{26}}\sqrt{\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}$$

$$=-2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}\div\sqrt{\overline{-5+\sqrt{26}}|^2\cdot\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}$$

$$=-2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}\div\sqrt{\overline{51-10\sqrt{26}}\,.\,\overline{9\tfrac{1}{2}+2\sqrt{26}}}$$

$$=-2+\tfrac{1}{2}\sqrt{26}\div\sqrt{\overline{-35\tfrac{1}{2}+7\sqrt{26}}}$$

$$=-2+\sqrt{6\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\overline{-35\tfrac{1}{2}+\sqrt{1274}}}\ \text{het tweede getal.}$$

Op dezelfde wyze, vermenigvuldigende de Waarde van xy met y, en vervolgens die van xyy met y, heeft men

xyy,

(*) *Wy zullen ons voortaan van het Teken* ÷ *bedienen, om de aftrekking van Grootheden aan te duiden, welke uit meer dan één* Term *bestaan, om door de verandering van de Tekens, van welke de* Termen *dier Grootheden zyn aangedaan, niet duister te schynen.*

$xyy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{-35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$ het derde getal.

$xy^3 = 7 + \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$ . . het vierde getal.

Ten tweeden. Wegens het tweede Geval, als $y = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{26} \div \sqrt{9\frac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$ is, zullen wy hebben $x = \frac{aa+b}{2a} - \frac{aa-b}{2a} . 2 + \frac{1}{2}\sqrt{26} - \sqrt{9\frac{1}{2} + 2\sqrt{26}}$.

Maar $a = 10$, $b = 80$ gegeeven zynde; zo vindt men

$x = 7 - \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$ het eerste getal.

$xy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{-35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$ het tweede get.

$xyy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} - \sqrt{-35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$ het derde getal.

$xy^3 = 7 - \sqrt{6\frac{1}{2} - \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$ het vierde getal.

AANMERKING.

Indien wy de gevondene antwoorden, of *Termen*, van deeze *Geometrische Progressie* nagaan, vinden wy daar in geen ander onderscheid, dan dat de *Termen* verwisselen, zynde den eersten *Term*, van de eene, den laatsten *Term* van de andere; en zo wederom, de tweeden *Term*, in de eene, is de derde *Term* in de andere; waarom het in der daad maar één antwoord is, en eveneens, hoe dat men het Teken $\pm$, in de gevondene Waarde voor y, neeme. Want, daar is gevonden,

In de eerste Stelling.

$x = 7 - \sqrt{6\frac{1}{2} - \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$

$xy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} - \sqrt{35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$

$xyy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{-35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$

$xy^3 = 7 - \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$

In de tweede Stelling.

$x = 7 - \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$

$xy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} + \sqrt{-35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$

$xyy = -2 + \sqrt{6\frac{1}{2} - \sqrt{-35\frac{1}{2} + \sqrt{1274}}}$

$xy^3 = 7 - \sqrt{6\frac{1}{2} - \sqrt{9\frac{1}{2} + \sqrt{104}}}$.

Al.

Alleenlyk zegt LUDOLPH, dat dezelve beproefd zyn, waar in dan alleen moet onderzogt worden, of de Som derzelve 10, en de Som der *Quadraaten* 80 is. Dit is zeer gemakkelyk te doen, want de Getallen zyn:

$$x = 7 - \sqrt{6\tfrac{1}{2}} - \sqrt{9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104}}$$
$$xy = -2 + \sqrt{6\tfrac{1}{2}} - \sqrt{-35\tfrac{1}{2} + \sqrt{1274}}$$
$$xyy = -2 + \sqrt{6\tfrac{1}{2}} + \sqrt{-35\tfrac{1}{2} + \sqrt{1274}}$$
$$xy^3 = 7 - \sqrt{6\tfrac{1}{2}} + \sqrt{9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104}}$$

Dezelve vergaarende, zo zyn de *Surdische* twee aan twee + en −, en dus verdwynen dezelve.

Derhalven is de Som $+7 - 2 - 2 + 7 = 14 - 4 = 10$.

Indien wy nu ieder getal *Quadrateeren*, zo is:

$$xx = 55\tfrac{1}{2} - 14\sqrt{6\tfrac{1}{2}} \div + 14 - 2\sqrt{6\tfrac{1}{2}}\sqrt{9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104} + (9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104}}$$

$$xxyy = 10\tfrac{1}{2} - 4\sqrt{6\tfrac{1}{2}} \div - 4 + 2\sqrt{6\tfrac{1}{2}}\sqrt{-35\tfrac{1}{2} + \sqrt{1274} \cdot (+ -35\tfrac{1}{2} - \sqrt{1274}}$$

$$xxy^4 = 10\tfrac{1}{2} - 4\sqrt{6\tfrac{1}{2}} + - 4 + 2\sqrt{6\tfrac{1}{2}}\sqrt{-35\tfrac{1}{2} + \sqrt{1274} \cdot (+ -35\tfrac{1}{2} - \sqrt{1274}}$$

$$xxy^6 = 55\tfrac{1}{2} - 14\sqrt{6\tfrac{1}{2}} + + 14 + 2\sqrt{6\tfrac{1}{2}}\sqrt{9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104} \cdot (+ 9\tfrac{1}{2} + \sqrt{104}}$$

verg.

$$132 - 36\sqrt{6\tfrac{1}{2}} \qquad - 52 + 2\sqrt{104} + 2\sqrt{1274}$$
$$\text{of } 132 - 18\sqrt{26} \qquad \text{of } - 52 + 4\sqrt{26} + 14\sqrt{26}$$
$$- 52 + 18\sqrt{26} \quad \text{Dat is } - 52 + 18\sqrt{26}.$$

verg.

Komt 80 de Som der *Quadraaten*.

LII. VRAAG.

Vind drie *rationaale* Getallen, zodanig, dat, als men die te saamen vermenigvuldigt, en tot het *Product* ieder getal byzonder vergaart, de uitkomsten *rationaale Quadraaten* zyn.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen 1, $2x$, en $\frac{xx-2x}{2x}$; dan is hun vermenigvuldigde $xx-2x$; hier by ieder getal byzonder vergaard, zo zyn de uitkomsten

$$\left.\begin{array}{l} xx-2x+1 \\ xx \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \textit{rationaale Quadraaten.}$$

$$xx-2x+\frac{xx-2x}{2x}\text{; dat is } \frac{2x^3-4xx+xx-2x}{2x}$$

$$\text{of } \frac{2x^3-3xx-2x}{2x}$$

of $xx-1\frac{1}{2}x-1$, dit moet een *rationaal Quadraat* zyn. Stel den Wortel $=x-a$,

$$\text{Dan is } xx-1\tfrac{1}{2}x-1=xx-2ax+aa$$

$$\text{of } 2ax-1\tfrac{1}{2}x=aa+1$$

$$2$$

$$4ax-3x=2aa+2$$

$$x=\frac{2aa+2}{4a-3}$$

Neemende $a=3$, zo is $x=\frac{18+2}{12-3}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$

$$\text{Dus zyn de getallen } \left.\begin{array}{lcl} 1 & . \; . \; . \; . \; . & =1 \\ 2x & . \; . \; . \; . & =4\frac{4}{9} \\ \frac{xx-2x}{2x} & \text{of } \frac{1}{2}x-1= & \frac{1}{9} \end{array}\right\} \text{zynde de getallen, die LUDOLF opgeeft.}$$

ANDERS EN ALGEMEEN.

Stel voor de getallen x, y, z; dan is hun vermenigvuldigde xyz, hier by ieder getal byzonder vergaard, zo moeten

$\left.\begin{array}{l} xyz+x \\ xyz+y \\ xyz+z \end{array}\right\}$ *rationaale Quadraaten* zyn.

Stel $xyz+x = aaxx$

x ———

$yz+1 = aax$

$$x = \frac{yz+1}{aa}$$

——— yz

$$xyz = \frac{yyzz+yz}{aa}$$

hier by $y = \frac{aay}{aa}$

$xyz+y = \frac{yyzz+yz+aay}{aa}$ zynde de tweede Waarde, die mede een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel uit den Teller $= \overline{bz+z}\,.\,y$,

Dan is $yyzz+yz+aay = \overline{bbzz+2bzz+zz}\,.\,yy$

of $yyzz+yz+aay = bbyyzz+2byyzz+yyzz$

$yz+aay = bbyyzz+2byyzz$

y ———

$z+aa = bbyzz+2byzz$

$$y = \frac{z+aa}{bbzz+2bzz} = \frac{z+aa}{zz\,.\,\overline{bb+2b}}.$$

Neemende hier in $bb+2b = p$, zo is $y = \frac{z+aa}{zzp}$

$$yz = \frac{z+aa}{zp}$$

$$1 = \frac{zp}{zp}$$

$x =$

$$x = \frac{yz+1}{aa} = \frac{z+aa+zp}{aazp}$$

$$y = \ldots\ldots \frac{z+aa}{zzp}$$

$$z = \qquad z$$

verm.

$$xyz = \frac{\overline{z+aa+zp}\,.\,\overline{z+aa}\,.\,z}{aaz^3pp}$$

$$= \frac{\overline{z+aa+zp}\,.\,\overline{z+aa}}{aazzpp}$$

$$\text{of } xyz = \frac{zz+2aaz+zzp+a^4+aazp}{aazzpp}$$

$$z = \frac{aaz^3pp}{aazzpp}$$

$$xyz+z = \frac{aaz^3pp+zz+2aaz+zzp+a^4+aazp}{aazzpp}$$

zynde de derde waarde, die mede een *rationaal Quadraat* moet zyn; de Noemer is zodanig: dus blyft maar alleen overig, dat de Teller een *Quadraat* zy. Stel den Wortel uit den Teller $= aa + dz$.

Dan is $aaz^3pp+zz+2aaz+zzp+a^4+aazp = a^4+2aadz+ddzz$

$$aaz^3pp+zz+2aaz+zzp+aazp = 2aadz+ddzz$$

Neemende $2aaz+aazp = 2aadz$

zo is $2+p = 2d$

Dus $d = \frac{1}{2}p+1$

Nu blyft nog overig $aaz^3pp+zz+zzp = ddzz$

$$zz \qquad aazpp+1+p = dd$$

maar

maar $dd = \frac{1}{4}pp + p + 1$, om dat $d = \frac{1}{2}p + 1$ is

$$\overline{aazpp + 1 + p = \frac{1}{4}pp + p + 1}$$

$$aazpp = \frac{1}{4}pp, \text{ derhalven } z = \frac{1}{4aa}.$$

Dit nu in de plaats van z gebragt, in de gevondene Waarde $y = \frac{z + aa}{zz \cdot \overline{bb + 2b}} = \frac{4aa \cdot \overline{4a^4 + 1}}{bb + 2b}$; vervolgens om dat dan y en z bekend zyn, zo kan $x = \frac{yz + 1}{aa}$ gevonden worden, zo dat $x = \frac{4a^4 + 1 + bb + 2b}{aa \cdot \overline{bb + 2b}}$ zal zyn. Hierom zyn dan de getallen,

$$x = \frac{4a^4 + 1 + bb + 2b}{aa \cdot \overline{bb + 2b}},$$

$$y = \frac{4a^4 \cdot \overline{4a^4 + 1}}{aa \cdot \overline{bb + 2b}},$$

$$z = \frac{1}{4aa}.$$

Neemende $a = 1$, $b = 2$;

$$\text{zo is } x = \frac{4 + 1 + 4 + 4}{8} = \frac{13}{8} = 1\tfrac{5}{8},$$

$$y = \frac{4 \cdot \overline{4 + 1}}{8} = \frac{20}{8} = 2\tfrac{1}{2},$$

$$z = \tfrac{1}{4} \; \ldots\ldots\ldots \; = \tfrac{1}{4}.$$

P R O E V E.

Het *Product*
$$\left.\begin{aligned} xyz + x &= \tfrac{65}{64} + \tfrac{104}{64} = \tfrac{169}{64} \\ xyz + y &= \tfrac{65}{64} + \tfrac{160}{64} = \tfrac{225}{64} \\ xyz + z &= \tfrac{65}{64} + \tfrac{16}{64} = \tfrac{81}{64} \end{aligned}\right\}$$
drie *rationaale Quadraaten*, waar van de Wortels zyn, $\frac{13}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{9}{8}$.

Wan-

Wanneer a en b anders genomen worden, zo vindt men ook andere Getallen.

LIII. VRAAG.

Vind drie getallen, naast in hunne *Progressie* staande, zodanig, dat, zo men de *Trigonaalen* van het eerste en derde te saamen vermenigvuldigt, het *Product* zy 420.

OPLOSSING.

Stel voor de *Trigonaal*-Wortels

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \\ x \\ x+1 \end{array}\right\} \text{dan zyn de } \textit{Trigonaalen} \text{ van het eerste en derde getal} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{xx-2x+1+x-1}{2} \\[2ex] \dfrac{xx+2x+1+x+1}{2}. \end{array}\right.$$

Nu is $\dfrac{xx-2x+1+x-1}{2} = \dfrac{xx-x}{2}$ het eerste.

en $\dfrac{xx+2x+1+x+1}{2} = \dfrac{xx+3x+2}{2}$ het derde

verm.

$$\frac{x^4+2x^3-xx-2x}{4} = 420$$

4

$$x^4+2x^3-xx-2x = 1680$$

$$1 = 1$$

verg.

$$x^4+2x^3-xx-2x+1 = 1681$$

$\sqrt{}$

$$xx+x-1 = 41$$

$$1\tfrac{1}{4} = 1\tfrac{1}{4}$$

verg.

$$xx+x+\tfrac{1}{4} = 42\tfrac{1}{4}$$

$\sqrt{}$

$$x+\tfrac{1}{2} = 6\tfrac{1}{2}$$

$$x = 6$$

Derh.

Derh. zyn de Wortels $\left.\begin{array}{r} x-1=5 \\ x\ldots=6 \\ x+1=7 \end{array}\right\}$ en de *Tri-gonaalen* $\left\}\begin{array}{l} 15 \\ 21 \\ 28. \end{array}\right.$

AANMERKING.

LUDOLF zegt, dat het begeerde, buiten *Cos*, ligt te doen is; doch dan wordt vereischt, één der Eigenschappen, van zulke drie *Trigonaal*-getallen, by wyze van een *Lemma*, vooraf te bepaalen.

Nu kan men, met weinige moeite, gewaar worden, dat, wanneer van drie *Trigonaalen*, die malkander naast in haar *Progressie* volgen, de twee uitersten te saamen vermenigvuldigd worden, het *Product* altoos een *Pronik*-getal zy, wiens Wortel de eenheid minder is, als het middelste *Trigonaal*-getal. Daarom den *Pronik*-wortel getrokken uit deeze gegeevene 420, komt 20; hier by de eenheid vergaard, zo heeft men 21, voor het begeerde middelste *Trigonaal*-getal, waar uit de *Trigonaal*-wortel 6 is: dus moet dan de wortel van het voorgaande 5, en van het volgende 7 zyn. Want de Wortels der *Trigonaal*-getallen, die malkanderen in orde volgen, verschillen altoos de eenheid onder malkanderen.

Ook klimmen de *Trigonaal*-getallen zelve altoos op, met de Eenheid meer als hunne Wortels; zo moet dan het grootste 28, en het kleinste 15 zyn.

De *Pronik*-wortel uit 420 wordt aldus gevonden:

$$\begin{array}{rr} & 420 \\ \text{Vergaar} & \frac{1}{4} \\ \hline & 420\frac{1}{4} \\ \sqrt{} & \overline{} \\ & 20\frac{1}{2} \\ \text{afg.} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

komt 20 voor den *Pronik*-wortel.

LIV. VRAAG.

Daar zyn drie *Trigonaal*-getallen als boven, zo men het eerste met het derde vermenigvuldigt, en van het *Product* drie maal het tweede aftrekt, is het overblyfsel 546117. Vraage, als vooren?

OPLOSSING.

Stel voor de *Trigonaal*-wortels $x-1$, x, $x+1$; dan zyn de *Trigonaalen* $\frac{xx-x}{2}$, $\frac{xx+x}{2}$, $\frac{xx+3x+2}{2}$.

$$\text{Het eerste} = \frac{xx-x}{2}$$

$$\text{Het derde} = \frac{xx+3x+2}{2}$$

verm.

$$\text{komt } \frac{x^4+2x^3-xx-2x}{4} \text{ het Product van het eerste en derde}$$

$$\frac{6xx+6x}{4} \text{ driemaal het tweede.}$$

afget.

$$\frac{x^4+2x^3-7xx-8x}{4} = 546117$$

4

$$x^4+2x^3-7xx-8x = 2184468$$

$$16 = \ldots 16$$

$$x^4+2x^3-7xx-8x+16 = 2184484$$

$\sqrt{}$

$$xx+x-4 = 1478$$

$$4\tfrac{1}{4} = 4\tfrac{1}{4}$$

verg.

$$xx+x+\tfrac{1}{4} = 1482\tfrac{1}{4}$$

$\sqrt{}$

$$x+\tfrac{1}{2} = 38\tfrac{1}{2}$$

$$x = 38$$

Derh.

Derh. de Wortels $\left.\begin{array}{l} x-1=37 \\ x=38 \\ x+1=39 \end{array}\right\}$ en de *Trigonaal*-getallen $\left\{\begin{array}{l} 703 \\ 741 \\ 780. \end{array}\right.$

ANDERS.

Stel voor het middelste *Trigonaal*-getal x

$$\underline{}\;3$$

$$3x$$

hier toe gegeeven 54617

$$\underline{}$$

komt $54617+3x$ voor het *Product* van het eerste en derde *Trigonaal*-getal, dit nu is een *Pronik*-getal, wiens wortel de eenheid minder is, als het begeerde middelste *Trigonaal*-getal. Wy zullen derhalven hier uit den *Pronik*-wortel zoeken, volgens den Regel, die in de *Aanmerking*, der voorgaande VRAAG, toepasselyk voorgesteld is. Op deeze wyze:

Het gegeevene *Pronik*-getal $3x+54617$

$$\text{vergaar} \;.\;.\;.\; \tfrac{1}{4}$$

$$3x+54617\tfrac{1}{4}$$

$$\surd \;\underline{}$$

$$\sqrt{3x+54617\tfrac{1}{4}}$$

$$\text{Afget.} \;.\;.\;.\;.\;.\; \tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}+\sqrt{3x+54617\tfrac{1}{4}}$$

$$\text{Vergaar} \;.\;.\; 1$$

$\frac{1}{2}+\sqrt{3x+54617\frac{1}{4}}$ voor het middelste *Trigonaal*-getal, dat gelyk x gesteld is. Daarom:

$$x=\tfrac{1}{2}+\sqrt{3x+54617\tfrac{1}{4}}$$

$$\text{of } x-\tfrac{1}{2}=\sqrt{3x+54617\tfrac{1}{4}}$$

$$\underline{}\;\surd$$

$$xx-x+\tfrac{1}{4}=3x+54617\tfrac{1}{4}$$

$$xx-4x=54617$$

$$4=4$$

$$\underline{}\;\text{verg.}$$

$$\sqrt{xx - 4x + 4 = 54621}$$

$$x - 2 = 739$$

$$\text{of } x = 741$$

Dewyl nu het begeerde middelste *Trigonaal*-getal (741) gevonden is, zo kan, daar door, ook het eerste en derde getal gevonden worden; want, trek den *Trigonaal* wortel uit 741, volgens den Regel van *Wouter Verstap*, in zyne *Arithmetica Philosophica* pag. 24, en 25, of die van *J. J. Ferguson*, in zyne *Labyrinthus Algebræ* pag. 70; zo komt 'er 38; deeze getrokken zynde van 741, zal 'er 703, voor het eerste *Trigonaal*-getal, overblyven. Vervolgens, vergaarende de eenheid by deezen wortel 38, komt 'er 39; hier by 741 vergaard, zo heeft men 780, voor het derde *Trigonaal*-getal.

LV. VRAAG.

Zoek drie *Trigonaal*-getallen, van zodanige natuur; als men het eerste met het derde vermenigvuldigt, en tot het *Product* vergaart, tweemaal het *Quadraat* van het dubbeld des tweeden getals, met nog viermaal dat zelve getal, dat 'er kome 23011560.

OPLOSSING.

Stel voor de *Trigonaal*-wortelen $x - 1$, x, $x + 1$;

Dan zyn de *Trigon*, get. $\frac{xx - x}{2}$, $\frac{xx + x}{2}$, $\frac{xx + 3x + 2}{2}$.

Het middelste $\frac{xx + x}{2}$

$$\text{Het dubbeld } (xx + x)^2$$

$$x^4 + 2x^3 + xx$$

Viermaal het middelste . . $2xx + 2x$

$$x^4 + 2x^3 + 3xx + 2x$$

$\frac{xx - x}{2}$

$\frac{xx - x}{2}$ het eerste.

$\frac{xx + 3x + 2}{2}$ het derde

———————— verm.

$\frac{x^4 + 2x^3 - xx - 2x}{4}$

$\frac{4x^4 + 8x^3 + 12xx + 8x}{4}$ of $x^4 + 2x^3 + 3xx + 2x$

———————— verg.

$\frac{5x^4 + 10x^3 + 11xx + 6x}{4} = 23011560$

———————— 4

$5x^4 + 10x^3 + 11xx + 6x = 92046240$

———————— 5

$25x^4 + 50x^3 + 55xx + 30x = 460231200$

$9 = \ldots . 9$

———————— verg.

$25x^4 + 50x^3 + 55xx + 30x + 9 = 460231209$

$\surd$ ————————

$5xx + 5x + 3 = 21453$

————————

$5xx + 5x = 21450$

5 ————————

$xx + x = 4290$

————————

dus $x = 65$

$x - 1 = 64$

$x + 1 = 66.$

Derh. zyn de *Trigon.* getall. $\frac{64 \times 65}{2} = 2080$

$\frac{65 \times 66}{2} = 2145$

$\frac{66 \times 67}{2} = 2211.$

ALGEMEENE AANMERKING

Op de drie voorgaande VRAAGEN.

LEMMA.

Alle *Trigonaal-Progressien*, van drie *Termen*, hebben deeze eigenschap, wanneer dezelve onder malkander in de naaste orde staan, dat het vermenigvuldigde van de uitersten altoos gelyk is, aan het *Product*, dat voortkomt, als men de middelste met de eenheid minder, dan zich zelfs, vermenigvuldigt.

Want, laat $\frac{xx-x}{2}$, $\frac{xx+x}{2}$, $\frac{xx+3x+2}{2}$ drie *Trigonaal*-getallen zyn, die malkander in orde volgen. Dan is

$$\text{uiterste Termen}\begin{cases}\frac{xx-x}{2} \\ \frac{xx+3x+2}{2}\end{cases} \qquad \begin{matrix}\text{middelste } Term\ \frac{xx+x}{2} \\ \text{middelste min } 1 \ldots \frac{xx+x-2}{2}\end{matrix}$$

$$\text{verm.} \qquad\qquad \text{verm.}$$

$$\frac{x^4+2x^3-xx-2x}{4} = \frac{x^4+2x^3-xx-2x}{4};$$ derhalven zyn de beide *Producten* even groot.

Door dit *Lemma* kunnen dan de voorgaande drie Vraagen, en alle andere van het zelfde soort, tot eene Vierkants-Vergelykinge gebragt worden; om dat, wanneer de middelste *Term* gelyk y gesteld wordt, men door denzelven zeer ligt het vermenigvuldigde van de uitersten kan vinden. Want, stellende voor het middelste getal y, zo is het *Product* van de uitersten altoos $y.\overline{y-1}$, dat is $yy-y$, een *Pronik*-getal. Hierom zullen wy ons verledigen, om de drie voorgaande Vraagen, door deezen Regel, nog eens op te lossen.

SCHO-

SCHOLIUM.

Om nu deeze drie Vraagen, naamelyk N°. 53, 54, en 55, door deezen Regel, op te lossen, welke dan gezegd wordt, buiten de *Algebra* te bestaan, zo kan men slegts den Regel volgen; doch wy zullen, klaarheidshalve, de stelkundige Vergelykingen 'er byvoegen.

1. De LIII. Vraag. Stel het middelste getal $= y$.

Zo is het *Product* van het eerste en derde

$$yy - y = 420$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$yy - y + \tfrac{1}{4} = 420\tfrac{1}{4}$$
$$\surd \quad y - \tfrac{1}{2} = 20\tfrac{1}{2}$$
$$y = 21 \text{ het middelste getal.}$$

Stel nu den Wortel uit het middelste getal $= x$,

zo is het *Trigonaal*-getal $\dfrac{xx + x}{2} = 21$

$$2$$
$$xx + x = 42$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$xx + x + \tfrac{1}{4} = 42\tfrac{1}{4}$$
$$\surd \quad x + \tfrac{1}{2} = 6\tfrac{1}{2}$$
$$x = 6$$

Dus zyn de begeerde Wortels $\left.\begin{array}{l} x - 1 = 5 \\ x \quad\;\, = 6 \\ x + 1 = 7 \end{array}\right\}$ en de *Trig.* getallen $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5 \times 6}{2} = 15 \\ \dfrac{6 \times 7}{2} = 21 \\ \dfrac{7 \times 8}{2} = 28. \end{array}\right.$

2. De LIV. Vraag. Stel wederom het middelste getal $=y$, zo is het *Product* van het eerste en derde getal $yy-y$

hier af 3 maal het tweede . . . $3y$

$$yy-4y=546117$$
$$4=\quad 4$$
$$\sqrt{yy-4y+4}=\sqrt{546121}$$
$$y-2=739$$
$$y=741$$ het middelste (getal.

Stellende wederom den Wortel, uit dit *Trigonaal*-getal, $=x$;

zo is $\frac{xx+x}{2}=741$, of $xx+x=1482$;

waar door $x=38$, en dienvolgens 703, 741, 780 de begeerde *Trigonaal*-getallen.

3. De LV. Vraag. Stel wederom het middelste getal $=y$; zo is het *Product* van het eerste en derde $yy-y$

Het dubbeld van het middelste is dan $2y$

$$\sqrt{\quad}$$
$$4yy$$

nog viermaal het middelste $4y$

kt. $4yy+4y$

verg. $5yy+3y$

Derhalven $5yy+3y=23011560$

$$5)\ \overline{\quad}$$
$$yy+\tfrac{3}{5}y=4602312$$
$$\tfrac{9}{100}=\dots\tfrac{9}{100}$$
$$\sqrt{yy+\tfrac{3}{5}y+\tfrac{9}{100}}=\sqrt{4602312\tfrac{9}{100}}$$
$$y+\tfrac{3}{10}=2145\tfrac{3}{10}$$

$y=2145$ het middelste getal.

Ste

Stel wederom den *Trigonaal*-wortel $=x$, zo is het *Trigonaal*-getal $\frac{xx+x}{2}=2145$, of $xx+x$ ($=4290$; waar door $x=65$, en derhalven 2080, 2145, 2211 de begeerde *Trigonaal*-getallen.

LVI. VRAAG.

Zoek drie getallen, zodanig, dat het eerste *twee* minder zy, dan het tweede, en het derde *drie* meer dan het tweede; dat ook het vermenigvuldigde der drie getallen, meer 100, een *rationaale Cubic* zy.

OPLOSSING.

Stel het eerste getal $=x$
zo is het tweede $=x+2$
het derde $=x+5$

verm.

$$x^3+7xx+10x$$

100 by

$x^3+7xx+10x+100$ moet een (*rationaale Cubic* zyn.

Stel den wortel $=x+a$.

Dan is $x^3+7xx+10x+100=x^3+3axx+3aax+a^3$

$$7xx+10x+100=3axx+3aax+a^3$$

Laat $7xx=3axx$ genomen worden, dan is $a=\frac{7}{3}$

En $10x+100=3aax+a^3$

$$3aax-10x=100-a^3$$

$x=\frac{100-a^3}{3aa-10}$, en dewyl $a=\frac{7}{3}$ geno- (men is,

zo heeft men $x=13\frac{134}{171}$.

AANMERKING.

Deeze Oplossing is zodanig ingericht, dat men door dezelve maar een enkeld antwoord kan vinden, gelyk dit ook zo by LUDOLF gegeeven wordt; niettemin zou de Vraag konstiger zyn, indien men andere antwoorden, als de reeds gevondene, begeerde, en schoon dit niet zeer gemeen is, zullen wy onderzoeken, of wy, door het reeds gevonden antwoord, hier in niet kunnen slaagen.

Stel voor de begeerde get. $13\frac{134}{171}+x$, of $\frac{2357+171x}{171}$;

$15\frac{134}{171}+x$, of $\frac{2699+171x}{171}$;

$18\frac{134}{171}+x$, of $\frac{3212+171x}{171}$.

Dan hebben die de geëischte verschillen. Deeze Getallen dan met malkanderen vermenigvuldigd, en by het *Product* 100 vergaard, moet de som een *rationaale Cubic* zyn.

Dat is

$$\frac{\overline{2357+171x}\cdot\overline{2699+171x}\cdot\overline{3212+171x}}{\overline{171}|^3}+100=\ldots$$

$$\frac{20933297216+3864841965x+241764588xx+5000211x^3}{5000211}$$

(een *rationaale Cubic*.

Om nu deeze gevondene Grootheid tot een *rationaale Cubic* te brengen, heeft men aan te merken, dat de voorste en agterste leden beide *rationaale Cuben* zyn; door welke beschouwing men dan gemakkelyk aan den eisch kan voldoen. Doch, om het zo algemeen te hebben, als mogelyk is, zullen wy den Wortel van den Teller in algemeene *Termen* uitdrukken; dat is te zeggen, wy zullen die $b+ax$ noemen; derhalven is zyn *Cubic* $b^3+3abbx+3aabxx+a^3x^3$; deeze dan met de de bovenſtaande Waarde vergelykende, kan men drie byzondere Onderſtellingen maaken.

Ten eerſten.

Neemende $b^3 = 20933297216$, zo is $b = 2756$.
en $a^3 x^3 = \ldots .5000211 x^3$, zo is $a = 171$.

Dan is nog

$$3864841965\,x + 241764588\,xx = 3\,abb\,x + 3\,aab\,xx$$

x ————————————————

$$3864841965 + 241764588\,x = 3\,abb + 3\,aab\,x$$

————————————————

$$241764588\,x - 3\,aab\,x = 3\,abb - 3864841965$$

————————————————

$$x = \frac{3\,abb - 3864841965}{241764588 - 3\,aab}.$$

Nu is gevonden, door de onderſtelling, $a = 171$, $b = 2756$, derhalven $x = \frac{31668003}{0}$, en dus x onëindig groot, dat geen Getallen geeft.

Ten tweeden. Neemende, uit de twee vergelykende *Cuben*,

$$5000211\,x^3 = a^3 x^3$$

x^3 ————————————

$$5000211 = a^3;\ \text{dus}\ a = 171.$$

$$\text{En}\ 241764588\,xx = 3\,aab\,xx$$

xx ————————————

$$241764588 = 3\,aab,\ \text{dus}\ b = \frac{80588196}{aa};$$

$$\text{Maar}\ a = 171;\ \text{derh.}\ b = \frac{80588196}{29241} = 2756.$$

$$\text{Dan is nog}\ 20933297216 + 3864841965\,x = b^3 + 3\,abb\,x$$

————————————————

$$\text{of}\ 3864841965\,x - 3\,abb\,x = b^3 - 20933297216$$

————————————————

$$x = \frac{b^3 - 20933297216}{3864841965 - 3\,abb}$$

Indien nu $a = 171$, en $b = 2756$ genomen wordt,

zo

zo vindt men $x = \frac{0}{-16476931}$, en dus is x oneindig klein, het geene wederom geen getallen geeft.

Ten derden. Neemende $b^3 = 20933297216$, zo is ($b = 2756$.

Wederom $3abbx = 3864841965x$

$$3abb = 3864841965\text{, dus } a = \frac{1288280655}{bb}$$

Maar $b = 2756$ zynde, zo is $a = \frac{1288280655}{7595536}$.

Nu is nog $244764588xx + 5000211x^3 = 3aabxx + a^3x^3$

$$244764588 + 5000211x = 3aab + a^3x$$

$$\text{of } 5000211x - a^3x = 3aab - 244764588$$

$$x = \frac{3aab - 244764588}{5000211 - a^3}.$$

Maar $a = \frac{1288280655}{7595536}$, en $b = 2756$ genomen zynde, kunnen wy nu x, en vervolgens ook de andere getallen bepaalen. Doch alzo deeze getallen zeer groot, en by gevolg moeijelyk zyn, om, door dezelve, de waarde van x te bepaalen, zullen wy de bewerking niet verder voortzetten. Die lust heeft, kan zyne kragten hier aan beproeven, en zal, naar myne gedagten, nog een ander antwoord kunnen vinden.

LVII. VRAAG.

Vind drie getallen, zodanig, als men, van de *Cubic* van haare Som, ieder getal byzonder aftrekt, dat de overblyffelen drie *rationaale Cuben zyn.*

I. AANMERKING.

1. LUDOLF geeft op deeze *Vraag* twee antwoorden, en

en zegt: „ Antw. $\frac{494424}{\cdots\cdots\cdots}$, $\frac{472696}{2352637}$, $\frac{448000}{\cdots\cdots\cdots}$, of „ ook $\frac{4666071 04}{\cdots\cdots\cdots\cdots}$, $\frac{346734792}{1976656375}$, $\frac{408877504}{\cdots\cdots\cdots\cdots}$. De „ eerste drie doen te saamen $\frac{80}{133}$, en de andere drie „ doen te saamen $\frac{776}{1255}$, is ligt te proeven. Dit is een „ kunstige Vraage, en voor veele Jaaren gedigtet, door „ den zeer ervaaren *Diophanti*; maar niet gesolveert, „ vermag veel Facits: Maar een te vinden is kunst, hoe „ ik die door Cos gevonden hebbe, zal in myn groote „ Werk gevonden worden."

2. ABRAHAM DE GRAAF lost deeze Vraag op, in het 330ste Voorstel van zyne *Inleiding tot de Wiskunst* pag. 341, en zegt aan het einde van zyne Oplossing: „ Dee„ ze Questie is nooit volkomen gesolveerd, noch door „ *Diophantes*, noch door zyne Uitleggers, noch door „ *Ludolf van Keulen*, maar alleenlyk door *Adrianus* „ *Twilt*, volgens het getuigenis van *D. de Hollander*, „ in een Tractaatje (*) over deeze Questie alleenlyk „ handelende. In het welke verscheide middelen zyn „ aangeweezen, om deeze Questie op te lossen; en „ ook om vier zodanige Getallen te vinden, welke ma„ nier ook ligtelyk kan bespeurd worden uit de voor„ gaande Solutie; ja tot meer als vier."

II.

(*) *Dit Tractaatje, dat de Heer* Praalder *zegt nooit gezien te hebben, zie de volgende* III. Aanmerking, *is door* Dirk de Hollander *in 't licht gebragt, na het overlyden van* Adrianus Twilt, *waar van by de beweeg-redenen voorstelt, in zyne Voorrede voor dat Werkje. Het zelve is getyteld:* Toets-steen van de Algebra Speciosa, alwaar door den konstryken en zeer hoog-geleerden Mathematicus ADRIANUS TWILT, zal^{r}., byna op eene oneindelyke manier, proef-vast getoetst wordt, de 57ste Quæstie van LUDOLF VAN KEULEN, in zyn Boek des Cirkels, of de 19de Quæstie uit het vyfde Boek van den wydvermaarden Griek DIOPHANTES van *Alexandrie*, enz. by een gesteld en gecorrigeerd door DIRK DE HOLLANDER, enz. gedrukt te *Amsterdam*, voor den Autheur, in het Jaar 1669.

II. AANMERKING.

Niettegenſtaande nu DE GRAAF zegt, dat deeze Queſtie nooit volkomen geſolveerd is, noch door *Diophantes*, noch door anderen, maar alleen door *Adrianus Twilt*, komt my zulks nogthans zeer onwaarſchynlyk voor; want LUDOLF geeft op dit Voorſtel voldoende antwoorden, die waarlyk niet radender wyze; maar volgens een Wiskunſtige manier gevonden zyn (†); en om dit nader aan te toonen, zal ik hier eene wyze van Ont-

---

(†) *Wat hier van te oordeelen zy, kan ligtelyk opgemaakt worden uit den eigenhandigen Brief van* LUDOLF, *gedateerd* Leiden *den* 1 May *Anno* 1610, *waar in zyn E. de Oploſſing, van deeze* 57ste *Kunſtvraag, aan zynen vriend* N. Huybertsz van Percyn, *Landmeeter tot* Naarden, *toezendt. Deeze Brief, benevens de Oploſſing, wordt gevonden, in het zo even gemelde Werkje van* Adrianus Twilt *pag.* 51. *Doch alzo dit Werkje niet zeer bekend ſchynt te zyn, oordeelen wy niet ondienſtig de Oploſſing van* LUDOLF, *gelyk dezelve aldaar gevonden wordt, hier nog by te voegen.*

„ *Ik ſtel, zegt* LUDOLF, *voor de Som der Getallen* „ $4x$, *diens* Cubic *is* $64x^3$; *nu voor 't eerſte getal geſteld* $56x^3$, *voor het tweede* $37x^3$, *voor het derde* $63x^3$, „ *deeze elk genomen van* $64x^3$, *reſten* $8x^3$, $27x^3$, *en* „ x^3, *deeze reſten zyn alle drie* rationaale Cuben, *die* „ *addeert te ſaamen, komt* $156x^3$, *deeze moeten gelyk zyn* „ *aan* $4x$; *divideert over beide zyden met* $4x$, *komt* „ $39xx = 1$; *waar nu* 39 *een* rationaal Quadraat-*getal*, „ *dan was de Quæſtie geſolveerd: maar dat niet zynde,* „ *zo ſtel ik voor de* Cubic-*wortelen (welker* Cuben *zullen reſten, als elk getal van de* Cubic *van haar Som* „ *geſubſtraheerd wordt) voor de eerſte* $x - 1$, *voor de* „ *tweede* $4 - x$, *en voor de derde* 2; *haar* Cuben *zyn* „ $x^3 - 3xx + 3x - 1$, $64 - 48x + 12xx - x^3$, *en* 8, „ *deeze, verſtaat elk byzonder, geſubſtraheerd van* 64, „ *zullen reſten* $65 + 3xx - x^3 - 3x$, $48x + x^3 - 12xx$, „ *en* 56, *voor de getallen, welke net den geſtelden* Cubic 64 *doen, diens Somme is* $121 + 45x - 9xx$, *dee-*

ze

Ontbinding voorſtellen, die de zelfde Getallen voortbrengt, als LUDOLF die opgeeft.

Stel

„ *ze Somme door* 4 *gedivideert, komt* $30\frac{1}{4} + 11\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4}xx$,
„ *dit is nu gelyk aan een* Quadraat, *voor zyn wortel ſtel*
„ *ik* $5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$, *om my het ledige getal quyt te maaken*,
„ *dewyl* $5\frac{1}{2}$ *de* Quadraat-*wortel is uit* $30\frac{1}{4}$. Nota. *Dit*
„ Quadraat *is* $30\frac{1}{4} + 5\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx = 30\frac{1}{4} + 11\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4}xx$,
„ *dat is* $2\frac{1}{2}xx = 5\frac{3}{4}x$, *komt* $x = 2\frac{3}{10}$; *nu is boven geſteld*,
„ *voor de eerſte* Cubic-*wortel*, $x - 1$, *dat is* $1\frac{3}{10}$, *voor*
„ *de tweede* Cubic-*wortel* $4 - x$, *dat is* $1\frac{7}{10}$, *en voor de*
„ *derde* Cubic-*wortel* 2, *haare* Cuben *zyn* $\frac{2197}{1000}$, $\frac{4913}{1000}$,
„ *en* 8; *ſubſtraheerd elk van* 64, *reſten* $61\frac{803}{1000}$, $59\frac{87}{1000}$,
„ *en* 56. *Deeze reſten zyn van die natuur, dat, zo men*
„ *elk neemt van* 64, *de reſten drie* rationaale Cubic-ge-
„ *tallen zyn, en dat 'er, zo men dezelve addeert, een* ra-
„ tionaal Quadraat-*getal komt. Nu wederom geſteld*,
„ *voor de Som der begeerde getallen* $4x$, *zyn* Cubic *doet*
„ $64x^3$, *en voor het eerſte geſteld* $61\frac{803}{1000}x^3$, *voor het*
„ *tweede* $59\frac{87}{1000}x^3$, *en voor het derde* $56x^3$, *doen te ſaa-*
„ *men* $176\frac{89}{100}x^3$, *die moet gelyk zyn* $4x$, *dat is* $44\frac{89}{400}$
„ $xx = 1$; *komt* $x = \frac{20}{133}$, *deeze met* 4 *gemultipliceerd*,
„ *komt* $\frac{80}{133}$, *voor de ſom der getallen, diens Cubo is* $\frac{8000}{2352637}$
„ (*verſtaat van* x), *deeze multipliceert met* $61\frac{803}{1000}$, *komt*
„ *voor het eerſte getal* $\frac{494424}{2352637}$; *en met* $59\frac{87}{1000}$, *komt voor*
„ *het tweede getal* $\frac{472696}{2352637}$; *en met* 56, *komt voor het*
„ *derde getal* $\frac{448000}{2352637}$, *doen te ſaamen* $\frac{80}{133}$.

P R O E F.

„ *Cubeert de Somma, komt* $\frac{512000}{2352637}$, *hier van geſubſtra-*
„ *beerd* $\frac{494424}{2352637}$, *reſt* $\frac{17576}{2352637}$, *dat een* Cubic *is, diens*
„ *wortel is* $\frac{26}{133}$, *nog van de* Cubic *haarer Som geſubſtra-*
„ *beerd het tweede getal, reſt* $\frac{39304}{2352637}$, *diens wortel is*
„ $\frac{34}{133}$; *als mede van* $\frac{512000}{2352637}$ *geſubſtrabeerd* $\frac{448000}{2352637}$, *reſt*
„ $\frac{64000}{2352637}$, *diens wortel doet* $\frac{40}{133}$; *zyn alzo de getallen regt*
„ *gevonden, daar van Godt alleen de eere toekomt.*".

L. v. KEULEN.

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{65-3x+3xx-x^3}\,.\,y^3 \\ \overline{+48x-12xx+x^3}\,.\,y^3 \\ 56 \;\;\ldots\ldots\;\; y^3 \end{array}\right\}$$

Laat ook de Som van deeze getallen $= 4y$ genomen worden, zo is haare *Cubic* $= 64y^3$.

Van deeze $64y^3$ ieder getal byzonder afgetrokken zynde, zo zyn de overblyffelen,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{-1+3x-3xx+x^3}\,.\,y^3 \\ \overline{64-48x+12xx-x^3}\,.\,y^3 \\ 8 \;\;\ldots\ldots\ldots\;\; y^3 \end{array}\right\}$$

Welke alle *rationaale Cuben* zyn, doende de Wortels $\overline{-1+x}\,.\,y$, $\overline{4-x}\,.\,y$, $2y$.

Derhalven blyft maar alleen overig, dat de Som van de gestelde Getallen gelyk zy, aan de Som $4y$, volgens de onderstelling.

Dat is $\overline{121+45x-9xx}\,.\,y^3 = 4y$

y^3 ——————————

$121+45x-9xx = \frac{4}{yy}$; nu is $\frac{4}{yy}$ een *rationaal Quadraat*, en dienvolgens moet ook $121+45x-9xx$ een *rationaal Quadraat* zyn.

Stel den Wortel $= 11+bx$; dan is:

$$121+45x-9xx = 121+22bx+bbxx$$

$$bbxx+9xx = 45x-22bx$$

x ——————————

$$bbx+9x = 45-22b$$

$$x = \frac{45-22b}{bb+9}.$$

Dewyl nu $121+45x-9xx \left(= \frac{4}{yy}\right) = \overline{11+bx}|^2$ gesteld is, zo is ook $\overline{11+bx}|^2 = \frac{4}{yy}$, of $11+bx = \frac{2}{y}$, dus $y = \frac{2}{11+bx}$.

Neemende $b = 1$, zo is $x = 2\frac{3}{10}$, $y = \frac{20}{133}$, en daar door de getallen;

$$\begin{aligned} \overline{65 - 3x + 3xx - x^3} \,.\, y^3 &= \tfrac{494424}{2352637} \\ \overline{48x - 12xx + x^3} \,.\, y^3 &= \tfrac{472696}{2352637} \\ 56 \,.\; .\; .\; .\; .\quad y^3 &= \tfrac{448000}{2352637} \end{aligned}$$

verg.

Komt de Som $\frac{80}{133}$, en de *Cubic* van deeze Som is $\frac{512000}{2352637}$.

Hier van ieder getal byzonder afgetrokken, zo is

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{512000 - 494424}{2352637} = \tfrac{17576}{2352637} \\[2ex] \dfrac{512000 - 472694}{2352637} = \tfrac{39304}{2352637} \\[2ex] \dfrac{512000 - 448000}{2352637} = \tfrac{64000}{2352637} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{rationaale} \\ \textit{Cuben}, \\ \text{welker} \\ \text{Wortelen} \\ \text{zyn} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{26}{133}. \\[2ex] \tfrac{34}{133}. \\[2ex] \tfrac{40}{133}. \end{array}\right.$$

COROLLARIUM.

Het blykt nu klaar, dat deeze manier van Ontbindinge zeer moeyelyk is, en een groot vooruitzigt vereifcht, ook tevens niet algemeen is, om andere getallen te bekomen; fchoon nu hier nog een ander antwoord kan gevonden worden, dunkt my nogthans, dat het de moeite niet waard is, om dat zelve op te zoeken, te meer, om dat ik dit Voorftel volledig, en algemeen, zal oploffen, en dat op zulk een wyze, die ik vertrouwe, zo kort, duidelyk, en zo algemeen te zyn, dat ze tegen alle andere Ontbindingen mag gefteld worden. Ik heb de voorgaande Ontbinding alleenlyk bygebragt, om daar mede aan te toonen, dat miffchien LUDOLF zyne getallen, na die zelfde, of ten minften op diergelyke, wyze, zal gevonden hebben, te meer, om dat ze juift dezelfde zyn, die hy opgeeft.

III. AANMERKING.

Ik heb nooit het groote Werk van LUDOLF (*), noch ook nooit het Tractaatje van TWILT gezien. Alles wat ik van het laatste kan zeggen, is volgens het getuigenis van A. DE GRAAF, by de boven aangehaalde Oplossing van deeze Vraag, in het 30ste Voorstel van zyne *Inleiding tot de Wiskunst*. Dewyl nu aldaar van verscheide wegen van Oplossingen gemeld wordt, die in het gemelde Tractaatje te vinden zyn, zo heeft my dit aangezet, om ook een andere wyze van Ontbindinge na te speuren, eensdeels, om die gemakkelyker en eenvouwdiger te hebben; en ten anderen, om ook die *Calculatie* te ontgaan, tusschen welke paalen de bekende *Termen* moeten genomen worden, om voldoende antwoorden te hebben; en eindelyk, om tevens een weg te baanen, waar door niet alleen drie zulke Getallen, maar ook zo veel getallen van die natuur, als men begeert, kunnen gevonden worden.

I. SCHOLIUM.

Om nu, langs een anderen weg, dit Voorstel van LUDOLF te ontbinden, zo stel voor de getallen;

a^3,

(*) *Indien men in aanmerking neemt, dat dit groote Werk van* LUDOLF, *in het Jaar* 1610, *nog niet het licht kan gezien hebben, om dat hy toen de Oplossing van de* 57ste *Vraag, aan zyn Vriend* N. Huybertsz van Percyn *toezond, welke Oplossing voor zyn groote Werk was voorbehouden, waar in zyn Vriend, zo het 'er reeds geweest was, de Oplossing zou hebben kunnen vinden, zonder dat* LUDOLF *noodig hadt, die in 't byzonder aan hem te zenden. Wanneer men hier nog byvoegt, dat* Adrianus Twilt, *naauwlyks* 50 *Jaaren laater, zegt, dit groote Werk nooit gezien te hebben* (*zie* den Toets st en van de Algebra Speciosa *pag.* 5.), *zo kan men, mynes bedunkens, met genoegzaame grond, besluiten, dat dit groote Werk, waarschynlyk door het ontydig overlyden van* LUDOLF, *nooit is aan den dag gebragt.*

$\left.\begin{array}{l} a^3x^3 - b^3x^3 \\ a^3x^3 - c^3x^3 \\ a^3x^3 - d^3x^3 \end{array}\right\}$ En neemende de Som van deeze getallen $= ax$, zo is derzelver *Cubic* $= a^3x^3$; hier van ieder getal byzonder afgetrokken zynde, dan zyn de overblyffelen *rationaale Cuben.*

Daar blyft nu wederom alleen maar overig, dat alle deeze getallen te ſaamen genomen, gelyk moeten zyn aan de geſtelde Som.

Dat is $3a^3x^3 - b^3x^3 - c^3x^3 - d^3x^3 = ax$

x

$$3a^3xx - b^3xx - c^3xx - d^3xx = a$$

$$xx = \frac{a}{3a^3 - b^3 - c^3 - d^3}$$ het geen

een *rationaal Quadraat* moet zyn. Nu is het niet noodzaakelyk, dat den Teller en Noemer ieder byzonder een *rationaal Quadraat* zyn, gelyk A. DE GRAAF zegt; want, het zal genoeg weezen, dat de Breuk zelve maar alleen een *Quadraat* is, om dat, zo men twee getallen neemt, die, in malkanderen gedeeld zynde, een *rationaal Quadraat* voortbrengen, haar vermenigvuldigde ook altoos een *rationaal Quadraat* zal zyn. Daarom vermenigvuldige ik den Teller (a) met den Noemer ($3a^3 - b^3 - c^3 - d^3$), komt $3a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3$, dat een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $= 2aa - 3ae$;

Dan is $3a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 = 4a^4 - 12a^3e + 9aaee$

$$-a^4 + 12a^3e - 9aaee - ab^3 - ac^3 - ad^3 = 0$$

a

$$-a^3 + 12aae - 9aee - b^3 - c^3 - d^3 = 0$$

of $-a^3 + 12aae - 9aee - b^3 - c^3 = d^3$, dat een *rationaale Cubic* moet zyn. Stel deszelfs Wortel $= -a + 4e$, zo heeft men,

$$-a^3 + 12aae - 9aee - b^3 - c^3 = -a^3 + 12aae - 48aee + 64e^3$$

$$39aee = b^3 + c^3 + 64e^3$$

$$a = \frac{b^3 + c^3 + 64e^3}{39ee}.$$

Hier mede is niet alleen alles *rationaal*; maar men is ook aanstonds in staat, om, zonder eenige *Calculatie*, voldoende getallen te hebben. Want a moet maar alleen grooter zyn, als b, c, of d, dat is $-a+4e$, en derhalven moet a kleinder zyn, als $4e$, het geen zeer gemakkelyk aanstonds zodanig kan genomen worden.

Neemende $b = 10$, $c = 11$, en $e = 3$, zo is $a = \frac{451}{39}$, $d = \frac{17}{39}$; vervolgens $x = \frac{39}{551}$. Hier door zyn de getallen

$$a^3x^3 - b^3x^3 = \frac{32414851}{167284151}.$$

$$a^3x^3 - c^3d^3 = \frac{12780262}{167284151}.$$

$$a^3x^3 - d^3x^3 = \frac{91728938}{167284151}.$$

De Som . . . $\frac{451}{551} = ax$ en de *Cubic* van deeze Som is $\frac{91733851}{167284151}$, hier van ieder getal byzonder afgetrokken, zal komen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{91733851 - 32414851}{167284151} = \dfrac{59319000}{167284151} \\[2ex] \dfrac{91733851 - 12780262}{167284151} = \dfrac{78953589}{167284151} \\[2ex] \dfrac{91733851 - 91728938}{167284151} = \dfrac{4913}{167284151} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{ration.} \\ \textit{Cuben}, \\ \text{welker} \\ \text{Wortels} \\ \text{zyn} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{390}{551}. \\[2ex] \dfrac{429}{551}. \\[2ex] \dfrac{17}{551}. \end{array}\right.$$

II. SCHOLIUM.

Hier zullen wy nu byvoegen, op welke manier, men vier of meer zodanige getallen zal kunnen vinden, waar toe wy de handleiding van *A. de Graaf* niet zullen volgen, alzo men ligtelyk kan bespeuren, dat die manier niet alleen moeijelyk en lastig zal zyn, maar ook, zich over vyf of zes zodanige getallen uitstrekkende, byna ondoenlyk zou worden, te meer, dewyl het veel moeite na zich sleept, om, ter verkryging van voldoende getallen, de paalen aan te wyzen, tusschen welke de be-

bekende *Termen* moeten genomen worden. Wy zullen derhalven van deeze laatste manier gebruik maaken, om dat men, ten aanzien van de meerderheid der getallen, welke begeerd worden, allengskens meer ruimte heeft, om voldoende getallen te bekomen, het geen in de volgende Voorbeelden klaarblykelyk zal getoond worden.

I. VOORBEELD. zynde de LXIX. VRAAG van LUDOLF.

Om vier getallen te vinden, zodanig; dat als men ieder byzonder van de Cubic *van haar Som aftrekt, de overblyffelen* rationaale Cuben *zyn.*

Stel voor de Getallen

$$\left.\begin{array}{l} a^3x^3 - b^3x^3 \\ a^3x^3 - c^3x^3 \\ a^3x^3 - d^3x^3 \\ a^3x^3 - e^3x^3 \end{array}\right\}$$

En stellende ax voor de Som van deeze Getallen, zo is a^3x^3 deszelfs *Cubic*, hier van ieder getal byzonder afgetrokken zynde, zyn de overblyffelen *rationaale Cuben.*

Derhalven moet maar alleen de Som van deeze getallen, gelyk zyn aan de gestelde Som.

Dat is $4a^3x^3 - b^3x^3 - c^3x^3 - d^3x^3 - e^3x^3 = ax$

$$x \quad \overline{}$$

$$4a^3xx - b^3xx - c^3xx - d^3xx - e^3xx = a$$

$$x = \frac{a}{4a^3 - b^3 - c^3 - d^3 - e^3} \text{ dat}$$

een *rationaal Quadraat* moet zyn; derhalven moet ook het vermenigvuldigde van Teller en Noemer, dat is $4a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3$, een *Quadraat* zyn.

Stellende deszelfs Wortel $= 2aa - 3af$, zo heeft men,

$$4a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3 = 4a^4 - 12a^3f + 9aaff$$

$$-ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3 = -12a^3f + 9aaff$$

$$a \quad \overline{}$$

$$-b^3 - c^3 - d^3 - e^3 = -12aaf + 9aff$$

Stellende $-b = -a + f$, zo is $-b^3 = -a^3 + 3aaf - 3aff + f^3$

 $-c^3$

$$-c^3 = -c^3$$
$$-d^3 = -d^3$$
$$-e^3 = -e^3$$

$$\text{Derh.} -a^3 + 3aaf - 3aff + f^3 - c^3 - d^3 - e^3 = -12aaf + 9aff$$

$$-a^3 + 15aaf - 12aff + f^3 - c^3 - d^3 - e^3 = 0$$

$$\text{of } -a^3 + 15aaf - 12aff + f^3 - c^3 - d^3 = e^3$$

Dewyl nu e^3 een *Cubic* is, zo moet ook $-a^3 + 15aaf - 12aff + f^3 - c^3 - d^3$ een *rationaale Cubic* zyn.

Stel de zelfs Wortel $= -a + 5f$.

$$\text{Dan is } -a^3 + 15aaf - 12aff + f^3 - c^3 - d^3 = -a^3 + 15aaf - 75aff + 125f^3$$

$$-12aff + f^3 - c^3 - d^3 = -75aff + 125f^3$$

$$63aff - c^3 - d^3 = 124f^3$$

$$63aff = 124f^3 + c^3 + d^3$$

$$a = \frac{124f^3 + c^3 + d^3}{63ff}.$$

Neemende nu, c, d, f naar welgevallen, alleenlyk met deeze bepaalingen;

1. Dat a grooter zy, als b, c, d, of e; om dat de Som, $b^3 + c^3 + d^3 + e^3$, anders niet van $4a^3$ kan afgetrokken worden.
2. Dat a kleinder moet zyn als $5f$, om dat $e = -a + 5f$ is.

Neemende $c = 13$, $d = 14$, $f = 3$, zo is $ff = 9$, $f^3 = 27$; Vervolgens $a = 14\frac{13}{21}$, $b = 11\frac{13}{21}$, en $e = \frac{8}{21}$, dus $x = \frac{21}{425}$.

En de getallen $a^3x^3 - b^3x^3 = \frac{14407659}{76765625}$

$$a^3x^3 - c^3x^3 = \frac{8588026}{76765625}$$
$$a^3x^3 - d^3x^3 = \frac{3522259}{76765625}$$
$$a^3x^3 - e^3x^3 = \frac{28933931}{76765625}$$

De Som $\frac{55451875}{76765625}$, of $\frac{307}{425}$.

II. VOOR.

II. VOORBEELD.

Om vyf getallen te vinden, dat als men ieder byzonder van de Cubic *van haar Som aftrekt, de overblyfſelen* rationaale Cuben zyn.

Stel voor de Getallen

$$\left.\begin{array}{l} a^3x^3 - b^3x^3 \\ a^3x^3 - c^3x^3 \\ a^3x^3 - d^3x^3 \\ a^3x^3 - e^3x^3 \\ a^3x^3 - f^3x^3 \end{array}\right\}$$

En ſtellende ax voor de Som van deeze getallen, zo is a^3x^3 deszelfs *Cubic*, hier van ieder getal byzonder afgetrokken zynde, zyn de overblyffelen *rationaale Cuben.*

Derhalven moet de Som van deeze getallen gelyk zyn aan de geſtelde Som.

Dat is $5a^3x^3 - b^3x^3 - c^3x^3 - d^3x^3 - e^3x^3 - f^3x^3 = ax$

$$\frac{}{x}$$

$$5a^3xx - b^3xx - c^3xx - d^3xx - e^3xx - f^3xx = a$$

$$xx = \frac{a}{5a^3 - b^3 - c^3 - d^3 - e^3 - f^3}$$ dat een *rationaal Quadraat* moet zyn, derhalven moet ook het vermenigvuldigde van Teller en Noemer, dat is $5a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3 - af^3$, een *rationaal Quadraat* zyn.

Stel den Wortel van hetzelve $= 2aa - 3ag$;

Dan is $5a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3 - af^3 = 4a^4 - 12a^3g + 9aagg$

$$a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3 - af^3 = -12a^3g + 9aagg$$

$$a^4 + 12a^3g - 9aagg - ab^3 - ac^3 - ad^3 - ae^3 - af^3 = 0$$

$$\frac{}{a}$$

$$a^3 + 12aag - 9agg - b^3 - c^3 - d^3 - e^3 - f^3 = 0$$

$$a^3 + 12aag - 9agg - b^3 - c^3 - d^3 - e^3 = f^3$$

Stellende $b = a - g$, zo is $b^3 = a^3 - 3aag + 3agg - g^3$
$c = a - 2g$, zo is $c^3 = a^3 - 6aag + 12agg - 8g^3$

$$d^3 = d^3$$
$$e^3 = e^3$$

$$b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 2a^3 - 9aag + 15agg - 9g^3 + d^3 + e^3$$

$$a^3 + 12aag - 9agg = a^3 + 12aag - 9agg$$

$$a^3 + 12aag - 9agg - b^3 - c^3 - d^3 - e^3 = -a^3 + 21aag - 24agg + 9g^3 - d^3 - e^3 = f^3$$

Dit moet nu een *rationaale Cubic* zyn. Stel den Wortel derzelve $= -a + 7g$, zo is

$$-a^3 + 21aag - 24agg + 9g^3 - d^3 - e^3 = -a^3 + 21aag - 147agg + 343g^3$$

$$-24agg + 9g^3 - d^3 - e^3 = -147agg + 343g^3$$

$$123agg + 9g^3 - d^3 - e^3 = 343g^3$$

$$123agg - d^3 - e^3 = 334g^3$$

$$123agg = 334g^3 + d^3 + e^3$$

$$a = \frac{334g^3 + d^3 + e^3}{123gg}.$$

Neemende $d = 12$, $e = 13$, $g = 2$, zo is $a = 13\frac{67}{164}$, $b = 11\frac{67}{164}$, $c = 9\frac{67}{164}$; vervolgens $-a + 7g = f = 1\frac{97}{164}$, en $x = \frac{164}{3414}$; waar door dan de begeerde getallen zyn

$$a^3x^3 - b^3x^3 = \frac{4083787288}{39791521944}$$
$$a^3x^3 - c^3x^3 = \frac{6959836592}{39791521944}$$
$$a^3x^3 - d^3x^3 = \frac{3022375367}{39791521944}$$
$$a^3x_3 - e^3x^3 = \frac{942642631}{39791521944}$$
$$a_3x^3 - f^3x^3 = \frac{10632573926}{39791521944}$$

De

De Som $\frac{25630215804}{39791521944}$, dat is $\frac{2199}{3414}$, en de *Cubic* $\frac{10633486299}{39791521944}$.

Van deeze *Cubic* dan ieder getal byzonder afgetrokken, zo zyn de overblyffelen,

$$\frac{10633486299 - 4083787288}{39791521944} = \frac{6549699311}{39791521944}, \text{ wortel } \frac{1871}{3414}.$$

$$\frac{10633486299 - 6959836592}{39791521944} = \frac{3673650007}{39791521944}, \text{ wortel } \frac{1543}{3414}.$$

$$\frac{10633486299 - 3011375367}{39791521944} = \frac{7622111232}{39791521944}, \text{ wortel } \frac{1968}{3414}.$$

$$\frac{10633486299 - 942642631}{39791521944} = \frac{9690843968}{39791521944}, \text{ wortel } \frac{2132}{3414}.$$

$$\frac{10633486299 - 10632573926}{39791521944} = \frac{912673}{39791521944}, \text{ wort. } \frac{97}{3414}.$$

COROLLARIUM.

Men ziet derhalven, dat deeze wyze van Oplossing algemeen is, en altoos zal ſtand houden, tot hoe veel getallen men die ook bepaalt; ook blykt tevens daar uit, tusſchen welke bepaalingen de bekende Waarden moeten genomen worden: want men zal ten laatſten altoos eene Vergelykinge verkrygen, in welke de *Cuben* der twee geſtelde letteren zyn, die men zo na aan malkanderen gelyk neemt, als mogelyk is; naamelyk; dat die ſlegts de eenheid verſchillen, om dat ze, volgens het Voorſtel, kleinder moeten zyn, als a. Dit dan maar alleen in agt genomen zynde, zal men aanſtonds kunnen beſpeuren, hoe de derde letter in de gevondene Vergelykinge moet zyn.

Ik heb, in deeze Ontbindinge, niet zo zeer na de kleinſte getallen gezogt, die aan het Voorſtel voldoen, niet tegenſtaande 'er mogelyk kleinder kunnen gevonden worden, alzo dit alleen hier van afhangt, dat men het getal, voor a, ſomtyds zal kunnen verkleinen, en ſomtyds niet; evenwel ben ik verzeekerd, dat men, langs deeze weg, zeer kleine getallen zal bekomen, en wel ten aanzien van andere wegen, gelyk, by voorbeeld, die, welke *A. de Graaf* voorstelt; want zo men, langs dien weg, vyf getallen wilde bepaalen, zouden die zelfs onhandelbaar groot worden.

En of schoon gezegd wordt, dat in het Tractaatje van *Twilt* verscheiden wegen van Oplossingen getoond worden, verbeelde ik my nogthans, dat dezelve daar niet eenvouwdiger, en algemeender zullen zyn, zo dat ze tevens kleinder getallen voortbrengen; waarom wy ons hier mede vergenoegen, laatende het andere Liefhebbers aanbevolen, om dit onderwerp tot meerder volkomenheid te brengen.

LVIII. VRAAG.

Zoek drie getallen, zodanig, dat als men de *Cubic* van haar Som by ieder getal byzonder vergaart, de uitkomsten drie *rationaale Cuben* zyn.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{l} b^3x^3 - a^3x^3 \\ c^3x^3 - a^3x^3 \\ d^3x^3 - a^3x^3 \end{array}\right\}$$

En stellende ax voor de Som van deeze getallen, zo is a^3x^3 derzelver *Cubic*; deeze by ieder getal byzonder vergaard, zyn de uitkomsten *rationaale Cuben.*

Dus blyft 'er alleen maar overig, dat de Som van deeze getallen gelyk moet zyn aan de gestelde Som.

Dat is $b^3x^3 + c^3x^3 + d^3x^3 - 3a^3x^3 = ax$

$$x$$

$$b^3xx + c^3xx + d^3xx - 3a^3xx = a$$

$$xx = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3},$$ dit moet nu nog een *rationaal Quadraat* zyn; de Teller kan zodanig genomen worden, en dan moet de Noemer ook zodanig zyn.

Neem $b = f - v$, zo is $b^3 = f^3 - 3ffc + 3fcc - c^3$

$$c^3 = c^3$$

$$d^3 = d^3$$

$$-3a^3 = -3a^3$$

Der-

Derhalven $b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3 = f^3 - 3ffc + 3fcc + d^3 - 3a^3$ het geen dan een *rationaal Quadraat* moet zyn. Stel den Wortel $= cg + h$;

Zo is $f^3 - 3ffc + 3fcc + d^3 - 3a^3 = ccgg + 2cgh + hh$

$$\text{Neem } 3fcc \;\; . \;\; . \;\; . = ccgg \text{, zo is } f = \frac{gg}{3}$$

En dan is nog $f^3 - 3ffc + d^3 - 3a^3 = 2cgh + hh$ herl.

$$c = \frac{f^3 + d^3 - 3a^3 - hh}{3ff + 2gh}.$$

Hier mede is dan alles *rationaal*, en dus zyn de begeerde getallen gemakkelyk te bepaalen. Want

Neemende $a = 1$, $g = 3$, zo is $f = 3$.

Neemende $h = 2$, $d = 3$, zo is $c = \frac{47}{39}$, en $b = \frac{70}{39}$; vervolgens $x = \frac{507}{2847}$, en daarom

$b^3x^3 - a^3x^3 = \frac{623247157}{23076099423}$.

$c^3x^3 - a^3x^3 = \frac{97775288}{23076099423}$.

$d^3x^3 - a^3x^3 = \frac{3388419918}{23076099423}$.

De Som is $\frac{130323848}{23076099423}$, of $\frac{507}{2847} = ax$; dus a^3x^3 $\left(= \frac{130323843}{23076099423}\right.$.

Welke tot ieder getal byzonder vergaard zynde, zo heeft men:

$\frac{623247157 + 130323843}{23076099423} = \frac{753571000}{23076099423}$, wortel $\frac{910}{2847}$.

$\frac{97775288 + 130323843}{23076099423} = \frac{228099131}{23076099423}$, wortel $\frac{611}{2847}$.

$\frac{3388419918 + 130323843}{23076099423} = \frac{3518743761}{23076099423}$, wortel $\frac{1521}{2847}$.

ANDERS.

Stellende de getallen als vooren, zo zal men ook de zelfde de Vergelykinge vinden, $xx = \frac{a^3}{b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3}$, het geen een *Quadraat* moet zyn; doch hier in behoeft a geen *Quadraat* te zyn; het zal genoeg weezen, dat het gedeelte, of het vermenigvuldigde, van Teller en Noemer een *rationaal Quadraat* is. Wanneer men dan den Teller met den Noemer vermenigvuldigt, zo heeft men: $ab^3 + ac^3 + ad^3 - 3a^4$ het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $= 2aa + 3ae$;

zo is $ab^3 + ac^3 + ad^3 - 3a^4 = 4a^4 + 12a^3e + 9aaee$

$$a \,\frac{ab^3 + ac^3 + ad^3 = 7a^4 + 12a^3e + 9aaee}{b^3 + c^3 + d^3 = 7a^3 + 12aae + 9aee}$$

Neem $c = 2a - e$,

zo is $c^3 = 8a^3 - 12aae + 6aee - e^3$

$d^3 = d^3$

verg.

$c^3 + d^3 = 8a^3 - 12aae + 6aee - e^3 + d^3$ getrokk. van

$b^3 + c^3 + d^3 = 7a^3 + 12aae + 9aee$

rest $b^3 \;..= -a^3 + 24aae + 3aee + e^3 - d^3$ dit moet nog een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $= -a + 8e$;

zo is $-a^3 + 24aae + 3aee + e^3 - d^3 = -a^3 + 24aae - 192aee + 512e^3$

$$3aee + e^3 - d^3 = -192aee + 512e^3$$

$$195aee = 511e^3 + d^3$$

$$a = \frac{511e^3 + d^3}{195ee}$$

Neemende $d = 4$, $e = 1$, zo is $a = 2\frac{37}{39}$, $b = -a + ae = 5\frac{2}{39}$, $c = 2a - e = 4\frac{35}{39}$; vervolgens $x = \frac{39}{147}$, en de getallen:

b^3 a

$b^3x^3 - a^3x^3 = \frac{6124498}{41781923}$.
$c^3x^3 - a^3x^3 = \frac{5446996}{41781923}$.
$d^3x^3 - a^3x^3 = \frac{2275541}{41781923}$.

$\frac{13847035}{41781923}$, dat is $\frac{115}{347}$ de ſom der get. ax.

Derhalven $\frac{6124498+1520875}{41781923} = \frac{7645374}{41781923}$, wortel $\frac{197}{347}$.

$\frac{5446996+1520875}{41781923} = \frac{6967871}{41781923}$, wortel $\frac{191}{347}$.

$\frac{2275541+1520875}{41781923} = \frac{3796416}{41781923}$, wortel $\frac{156}{347}$.

A N D E R S.

Stel voor de getallen

$\left.\begin{array}{l} b^3x^3 - a^3x^3 \\ c^3x^3 - a^3x^3 \\ d^3x^3 - a^3x^3 \end{array}\right\}$ En de Som der Getallen $= ax$ genomen, zo vindt men, als vooren, $xx = \frac{a}{b^3+c^3+d^3-3a^3}$, het geen een *Quadraat* moet zyn; derhalven den Teller en Noemer te ſaamen vermenigvuldigt, zo heeft men $ab^3+ac^3+ad^3-3a^4$ een *ration. Quadraat.*

Stel den Wortel $= 2aa+3ad$;

zo is $ab^3+ac^3+ad^3-3a^4 = 4a^4+12a^3d+9aadd$

$ab^3+ac^3+ad^3 = 7a^4+12a^3d+9aadd$

a

$b^3+c^3+d^3 = 7a^3+12aad+9add$

$b^3 = 7a^3+12aad+9add-d^3-c^3$ dit moet een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $= -d+3a$.

Derhalven $7a^3+12aad+9add-d^3-c^3 = -d^3+9add-27aad+27a^3$

$7a^3 =$

$$7a^3 + 12aad - c^3 = -27aad + 27a^3$$

$$39aad = 20a^3 + c^3$$

$$d = \frac{20a^3 + c^3}{39aa}$$

Neemende $a = 1$, $c = 3$, zo is $d = \frac{47}{39}$, $b = -d + 3a = \frac{70}{39}$. Vervolgens vindt men $x = \frac{13}{73}$; en dus zyn de getallen $\frac{283681,\ 1542294,\ 44514}{10503459}$.

A A N M E R K I N G.

Deeze laatſte wyze is de eenvouwdigſte, en zo algemeen, dat men, door dezelve, zo veel getallen van die natuur kan vinden, als men begeert; het geen wy met de twee volgende Voorbeelden zullen aanwyzen.

I. V O O R B E E L D.

Om vier Getallen te vinden, zodanig; dat als men de Cubic *van haar Som tot ieder getal byzonder vergaart, de uitkomſten vier* rationaale Cuben *zyn.*

Stel voor de getallen $\left.\begin{array}{l} b^3x^3 - a^3x^3 \\ c^3x^3 - a^3x^3 \\ d^3x^3 - a^3x^3 \\ e^3x^3 - a^3x^3 \end{array}\right\}$ En neemende de ſom van deeze getallen $= ax$, zo is a^3x^3 deszelfs *Cubic*, welke by ieder getal byzonder vergaard zynde, komen 'er *rationaale Cuben.*

Derhalven moet maar alleen deeze ſom der getallen gelyk zyn aan de geſtelde Som, dat is;

$$b^3x^3 + c^3x^3 + d^3x^3 + e^3x^3 - 4a^3x^3 = ax$$

x

$$b^3xx + c^3xx + d^3xx + e^3xx - 4a^3xx = a$$

$xx = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 + e^3 - 4a^3}$ het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn; derhalven, den Teller en en Noemer te ſaamen vermenigvuldigende, heeft men, $ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 - 4a^4$, dat een *rationaal Quadraat* moet zyn. Stel den Wortel $= 2aa + 3ae$.

Dan is $ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 - 4a^4 = 4a^4 + 12a^3e + 9aaee$

$$\frac{\qquad\qquad}{a}$$

$$b^3 + c^3 + d^3 + e^3 - 4a^3 = 4a^3 + 12aaee + 9aee$$

$$b^3 = 8a^3 + 12aae + 9aee - e^3 - d^3 - c^3$$ dit moet nog een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $= -e + 3a$,

Derh. $8a^3 + 12aae + 9aee - e^3 - d^3 - c^3 = -e^3 + (9aee - 27aae + 27a^3$

$$8a^3 + 12aae - d^3 - c^3 = -27aae + 27a^3$$

$$39aae = 19a^3 + c^3 + d^3$$

$$e = \frac{19a^3 + c^3 + d^3}{39aa}.$$

Neemende $a = 1$, $c = 3$, $d = 2$, zo is $e = \frac{18}{13}$, $b = -e + 3a = \frac{21}{13}$; waar door men vindt $x = \frac{13}{80}$; en voor de Getallen:

$$\frac{7064}{\quad}, \frac{57122}{\quad}, \frac{15379}{\quad}, \frac{3635}{\quad}$$

Noem. 512000

verg. $x^3a^3 = \frac{2197}{\quad}, \frac{2197}{\quad}, \frac{2197}{\quad}, \frac{2197}{\quad}$

Noem. 512000

Komt $\frac{9261}{\quad}, \frac{59319}{\quad}, \frac{17576}{\quad}, \frac{5832}{\quad}$

Noem. 512000

Wortels $\frac{21}{\quad}, \frac{39}{\quad}, \frac{26}{\quad}, \frac{18}{\quad}$.

Noem. 80

II. VOORBEELD.

Om vyf Getallen te vinden, zodanig, dat zo men de Cubic *van haar Som tot ieder getal byzonder vergaart, de uitkomſten vyf* rationaale Cuben *zyn.*

Stel

Stel voor de Getallen

$$\left.\begin{array}{l} b^3x^3 - a^3x^3 \\ c^3x^3 - a^3x^3 \\ d^3x^3 - a^3x^3 \\ e^3x^3 - a^3x^3 \\ f^3x^3 - a^3x^3 \end{array}\right\}$$

En neemende ax voor de Som der Getallen, zo is a^3x^3 deszelfs *Cubic*; deeze vergaard by ieder getal byzonder, zyn de uitkomsten *rationaale Cuben.*

Dus moet deeze Som der Getallen gelyk zyn aan de gestelde Som;

Dat is $b^3x^3 + c^3x^3 + d^3x^3 + e^3x^3 + f^3x^3 - 5a^3x^3 = ax$

x

$$b^3xx + c^3xx + d^3xx + e^3xx + f^3xx - 5a^3xx = a$$

$$xx = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 - 5a^3}$$ dit moet dan een *rationaal Quadraat* zyn. Hierom Teller en Noemer te saamen vermenigvuldigd, komt $ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 + af^3 - 5a^4$ een *Quadraat*;

Stel den Wortel $= 2aa + 3af$,

dan is $ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 + af^3 - 5a^4 = 4a^4 + 12a^3f + 9aaff$

a

$$b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 - 5a^3 = 4a^3 + 12aaf + 9aff$$

$b^3 = 9a^3 + 12aaf + 9aff - f^3 - e^3 - d^3 - c^3$ dit moet wederom een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $= -f + 3a$, zo hebben wy:

$9a^3 + 12aaf + 9aff - f^3 - e^3 - d^3 - c^3 = -f^3 + 9aff - 27aaf + 27a^3$

$$39aaf = 18a^3 + e^3 + d^3 + c^3$$

$$f = \frac{18a^3 + c^3 + d^3 + e^3}{39aa}$$

Neemende $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, zo is $f = 2\frac{4}{13}$, $b = -f + 3a = 3\frac{9}{13}$, vervolgens $x = \frac{13}{142}$.

Daarom $ax = \frac{26}{142}$ de Som der Getallen.

Dus

Dus $\left.\begin{array}{l} b^3x^3 - a^3x^3 = \frac{93016}{2863288} \\ c^3x^3 - a^3x^3 = \frac{41743}{2863288} \\ d^3x^3 - a^3x^3 = \frac{123032}{2863288} \\ e^3x^3 - a^3x^3 = \frac{217049}{2863288} \\ f^3x^3 - a^3x^3 = \frac{9424}{2863288} \end{array}\right\}$ voor de getallen; hier by de *Cubic* van haar som, zynde $a^3x^3 = \frac{17576}{2863288}$, vergaard, zullen 'er vyf *rationaale Cuben* komen, te weeten:

$$\frac{110592 \ , \ 59319 \ , \ 140608 \ , \ 247625 \ , \ 27000}{2863288}$$

Welks Wortelen zyn

$$\frac{48 \ , \ 39 \ , \ 52 \ , \ 65 \ , \ 30}{142}.$$

LIX. VRAAG.

Vind drie getallen, zodanig, dat zo men de *Cubic* van haar som van ieder getal byzonder aftrekt, de overblyfselen *rationaale Cuben* zyn?

OPLOSSING.

Stel voor de getallen

$\left.\begin{array}{l} b^3x^3 + a^3x^3 \\ c^3x^3 + a^3x^3 \\ d^3x^3 + a^3x^3 \end{array}\right\}$ en neemende de som der getallen $= ax$, zo is deszelfs *Cubic* $= a^3x^3$, deeze afgetrokken van ieder getal byzonder, zyn de overblyffelen *rationaale Cuben*.

Derhalven moet maar alleen de som van deeze getallen gelyk zyn aan de gestelde som;

dat is $b^3x^3 + c^3x^3 + d^3x^3 + 3a^3x^3 = ax$

x

$$b^3xx + c^3xx + d^3xx + 3a^3xx = a$$

$$xx = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 + 3a^3}$$ het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn; dus, Teller en Noemer te saamen vermenigvuldigende, komt $ab^3 + ac^3 + ad^3 + 3a^4$; dat

dat by gevolg een *Quadraat* moet zyn. Stel den Wortel $= 2aa + 3ad$;

zo is dan $\dfrac{ab^3 + ac^3 + ad^3 + 3a^4 = 4a^4 + 12a^3d + 9aadd}{a}$

$$b^3 + c^3 + d^3 + 3a^3 = 4a^3 + 12aad + 9add$$

$b^3 = a^3 + 12aad + 9add - d^3 - c^3$ dit moet een *rationaale Cubic* zyn. Stel den Wortel $= -d + 3a$.

Derhalven

$$a^3 + 12aad + 9add - d^3 - c^3 = -d^3 + 9add - 27aad + 27a^3$$

$$12aad - c^3 = -27aad + 26a^3$$

$$39aad = 26a^3 + c^3$$

$$d = \frac{26a^3 + c^3}{39aa}.$$

Neemende $a = 1$, $c = 1$, zo is $d = \frac{9}{13}$, en $b = -d + 3a = 2\frac{4}{13}$.

Derhalven $xx = \frac{2197}{36517} = \frac{169}{2809}$; dus $x = \frac{13}{53}$, en $ax = \frac{13}{53}$;

En de getallen

$$\left.\begin{array}{l} b^3x^3 + a^3x^3 = \frac{29197}{148877} \\ c^3x^3 + a^3x^3 = \frac{4394}{148877} \\ d^3x^3 + a^3x^3 = \frac{2926}{148877} \end{array}\right\}$$

wanneer nu de *Cubic* $a^3x^3 = \frac{2197}{148877}$ van ieder getal byzonder wordt afgetrokken, zyn de overblyffelen *rationaale Cuben*. Want

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{29197 - 2197}{148877} = \frac{27000}{148877} \\[2ex] \dfrac{4394 - 2197}{148877} = \frac{2197}{148877} \\[2ex] \dfrac{2926 - 2197}{148877} = \frac{729}{148877} \end{array}\right\} \text{welks wort. zyn.} \left\{\begin{array}{l} \frac{30}{53}. \\[2ex] \frac{13}{53}. \\[2ex] \frac{9}{53}. \end{array}\right.$$

AANMERKING.

Op de zelfde wyze kan men zo veel getallen, van die natuur, vinden, als men begeert, het geen wy door twee Voorbeelden zullen doen zien.

I. VOORBEELD.

Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men de Cubic *van haar ſom van ieder getal byzonder aftrekt, de overblyfſelen vier* rationaale Cuben *zyn.*

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{l} b^3x^3 + a^3x^3 \\ c^3x^3 + a^3x^3 \\ d^3x^3 + a^3x^3 \\ e^3x^3 + a^3x^3 \end{array}\right\}$$

en neemende ax voor de ſom deezer getallen, zo is de *Cubic* a^3x^3, welke van ieder getal byzonder afgetrokken zynde, zullen de overblyfſelen *rationaale Cuben* zyn. Derhalven moet nog de ſom der getallen gelyk zyn aan de geſtelde ſom; dat is $b^3x^3 + c^3x^3 + d^3x^3 + e^3x^3 + 4a^3x^3 = ax$

$$x \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$b^3xx + c^3xx + d^3xx + e^3xx + 4a^3xx = a$$

$$xx = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + 4a^3}$$ het welk

nu een *rationaal Quadraat* moet zyn. Daarom Teller en Noemer te ſaamen vermenigvuldigd, komt $ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 + 4a^4$ een *rationaal Quadraat*; ſtel den Wortel $= 2aa + 3ae$, zo heeft men

$$ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 + 4a^4 = 4a^4 + 12a^3e + 9aaee$$

$$ab^3 + ac^3 + ad^3 + ae^3 = 12a^3e + 9aaee$$

$$a \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 12aae + 9aee$$

$$b^3 = 12aae + 9aee - e^3 - d^3 - c^3$$ het welk een (*rationaale Cubic* moet zyn.

Stel den Wortel $= -e + 3a$;

Dan is $12aae + 9aee - e^3 - d^3 - c^3 = -e^3 + 9aee - (27aae + 27a^3$

$$12aae - d^3 - c^3 = -27aae + 27a^3$$

$$39aae = 27a^3 + c^3 + d^3$$

$$e = \frac{27a^3 + c^3 + d^3}{39aa}$$

Neemende $a = 1$, $c = 2$, $d = 4$; zo is $e = \frac{33}{13}$, $b = -e + 3a = \frac{6}{13}$; waar door men vindt, $x = \frac{13}{125}$, dus $ax = \frac{13}{125}$ de fom der getallen.

$$\left.\begin{aligned} \text{En } b^3x^3 + a^3x^3 &= 2413 \\ c^3x^3 + a^3x^3 &= 19773 \\ d^3x^3 + a^3x^3 &= 142805 \\ e^3x^3 + a^3x^3 &= 38134 \end{aligned}\right\} \text{ieder gedeeld door } 1953125.$$

II. VOORBEELD.

Om vyf getallen te vinden, zodanig, dat als men den Cubic *van haar fom van ieder getal byzonder aftrekt, de overblyffelen* rationaale Cuben *zyn.*

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{aligned} b^3x^3 + a^3x^3 \\ c^3x^3 + a^3x^3 \\ d^3x^3 + a^3x^3 \\ e^3x^3 + a^3x^3 \\ f^3x^3 + a^3x^3 \end{aligned}\right\}$$ en neemende ax voor de fom der getallen, zo is de *Cubic* a^3x^3; deeze van ieder getal byzonder afgetrokken, zyn de overblyffelen *rationaale Cuben.*

Dus

Dus moet de ſom van deeze getallen gelyk zyn aan de geſtelde ſom; dat is

$$b^3x^3+c^3x^3+d^3x^3+e^3x^3+f^3x^3+5a^3x^3=ax$$

x

$$b^3xx+c^3xx+d^3xx+e^3xx+f^3xx+5a^3xx=a$$

$$xx=\frac{a}{b^3+c^3+d^3+e^3+f^3+5a^3}\text{, dit moet}$$

een *rationaal Quadraat* zyn. Daarom Teller en Noemer te ſaamen vermenigvuldigd, komt $ab^3+ac^3+ad^3+ae^3+af^3+5a^4$, het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $=2aa+3af$;

dan is $ab^3+ac^3+ad^3+ae^3+af^3+5a^4=4a^4+12a^3f+9aaff$

a

$$b^3+c^3+d^3+e^3+f^3+5a^3=4a^3+12aaf+9aff$$

$$b^3=-a^3+12aaf+9aff-f^3-d^3-c^3$$ dit moet een *rationaale Cubic* zyn.

Stel den Wortel $=-f+3a$, zo is

$$-a^3+12aaf+9aff-f^3-e^3-d^3-c^3=-f^3+9aff-27aaf+27a^3$$

$$-a^3+12aaf-e^3-d^3-c^3=-27aaf+27a^3$$

$$39aaf=28a^3+c^3+d^3+e^3$$

$$f=\frac{28a^3+c^3+d^3+e^3}{39aa}.$$

Neemende $a=1$, $c=1$, $d=2$, $a=3$; zo is $f=\frac{64}{39}$;
$b=-f+3a=\frac{53}{39}$; derhalven $x=\frac{39}{270}$, $ax=\frac{39}{270}$, en de getallen

$$\left.\begin{array}{l} b^3x^3+a^3x^3 = \ \ 208196 \\ c^3x^3+a^3x^3 = \ \ 118638 \\ d^3x^3+a^3x^3 = \ \ 533871 \\ e^3x^3+a^3x^3 = 1660932 \\ f^3x^3+a^3x^3 = \ \ 321463 \end{array}\right\} \text{ieder gedeeld door } 19683000.$$

LX. VRAAG.

Vind eene *Arithmetische Progressie* van drie *Termen*, zodanig, dat wanneer men den eersten met den tweeden *Term* vermenigvuldigt, en tot het *product* het *Quadraat* van den derden *Term* vergaart, de som zy 9088; en dat het vermenigvuldigde van den tweeden en derden *Term* zy 4928.

OPLOSSING.

Stel voor de *Arithmetische Progressie* $x-y, x, x+y$.

Dan is $xx-xy$ het vermenigvuldigde van den eersten (en tweeden *Term*,

en $xx+2xy+yy$ het *Quadraat* van den derden (*Term*.

Derhalven

$$2xx+xy+yy=9088$$

$$\text{en } xx+xy\ldots\ldots=4928\text{, dienvolg. } y=\frac{4928-xx}{x}.$$

afget.

$$xx\ldots\ldots+yy=4160 \qquad \sqrt{}$$

$$\text{of } yy=4160-xx \qquad yy=\frac{24285184-9856xx+x^4}{xx}$$

$$\text{Dus } 4160-xx=\frac{24285184-9856xx+x^4}{xx}$$

$$xx$$

$$4160xx-x^4=24285184-9856xx+x^4$$

$$2x^4-14016xx=-24285184$$

$$2$$

x^4-

$$x^4 - 7008\,xx = -\,12142592$$
$$\overline{3504}|^2 = 12278016$$

$$\sqrt{x^4 - 7008xx + \overline{3504}|^2} = \sqrt{135424}$$

$$xx - 3504 = -\,368$$

$$\left.\begin{array}{r} xx = 3136 \\ \text{dus } yy = 1024 \end{array}\right\}\text{waar door}\left\{\begin{array}{l} x = 56. \\ y = 32. \end{array}\right.$$

En de *Progressie* $x - y = 24$, $x = 56$, $x + y = 88$.

COROLLARIUM.

Uit de voorgaande Oplossing volgt, dat op dit Voorstel nog een antwoord kan gegeeven worden, als men den wortel *positif* neemt.

$$\text{Want } \sqrt{x^4 - 7008\,xx + \overline{3504}|^2} = \sqrt{135424}$$

$$xx - 3504 = 368$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Dus } xx = 3872 \\ \text{en } yy = 288 \end{array}\right\}\text{waar door}\left\{\begin{array}{l} x = 44\sqrt{2}; \\ y = 12\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Dienvolgens de *Progressie* $x - y = 32\sqrt{2}$, $x = 44\sqrt{2}$, $x + y = 56\sqrt{2}$.

LXI. VRAAG.

Vind drie getallen, zodanig, dat, als men die te saamen vermenigvuldigt, en van het *product* ieder getal byzonder aftrekt, de overblyffelen *rationaale Quadraaten* zyn.

OPLOSSING.

Stellende het eerste getal $= 1$,
het tweede $= 2x$,
en het derde $= \frac{xx + 1}{2x}$;

Zo is haar vermenigvuldigde $= xx + 1$; hier van ieder getal afgetrokken, zyn de overblysselen xx, $xx - 2x + 1$, $xx + 1 - \frac{xx+1}{2x}$; waar van maar alleen $xx + 1 - \frac{xx+1}{2x}$, dat is $\frac{2x^3 - xx + 2x - 1}{2x}$ een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $= x - \frac{1}{4}$;

$$\text{Dan is } \frac{2x^3 - xx + 2x - 1}{2x} = xx - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}$$

$$\times\, 2x$$

$$2x^3 - xx + 2x - 1 = 2x^3 - xx + \tfrac{1}{8}x$$

$$1\tfrac{7}{8}x = 1, \text{ dus } x = \tfrac{8}{15}.$$

$$\text{Derhalven } \left.\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2x &= \tfrac{16}{15} \\ \frac{xx+1}{2x} &= \tfrac{289}{240} \end{aligned}\right\} \text{de begeerde getallen.}$$

I. AANMERKING.

Deeze en de voorgaande LII. Vraag zyn van gelyke natuur, behalven dat hier ieder getal van het *product* moet afgetrokken worden, daar men in tegendeel dezelve in de LII. Vraag moest vergaaren. Ludolf geeft in deeze beide Voorstellen zodanige getallen, waar van het eerste de eenheid is; om dit te ontgaan, en het Voorstel algemeen op te lossen, hebben wy by de LII. Vraag eenen anderen weg ingeslagen, welke uit A. de Graaf (*) genomen is. Men zou derhalven met waarschynlykheid kunnen vermoeden,

(*) *Inleiding tot de Wiskunst* Voorstel 312. p. 320.

den, dat dit Voorſtel op de zelfde wyze kan opgeloſt worden; maar de ondervinding zal leeren, dat dit zo niet is. Want ſtellende even eens als wy by VRAAG LII. gedaan hebben, met de getallen $= x, y, z$ te neemen, zo is haar vermenigvuldigde xyz; hier van ieder getal byzonder afgetrokken

moeten $\left\{\begin{array}{l} xyz - x \\ xyz - y \\ xyz - z \end{array}\right\}$ *rationaale Quadraaten* zyn, die wy ook op de zelfde wyze zullen behandelen; om te doen zien, dat men genoodzaakt is, de Vraag op eene andere wyze aan te vatten.

$$\text{Stellende } xyz - x = aaxx \quad \left(\sqrt{\ } = ax\right)$$

$$x \quad \text{Dan is } yz - 1 = aax$$

$$x = \frac{yz - 1}{aa}$$

$$yz$$

$$xyz = \frac{yyzz - yz}{aa}$$

hier van $y = y$ afgetr.

reſt $xyz - y = \dfrac{yyzz - yz - aay}{aa}$, dit moet een (*rationaal Quadraat* zyn.

Stel den Wortel $= yz - byz$,

Dan is $yyzz - yz - aay = yyzz - 2byyzz + bbyyzz$

$$-yz - aay = -2byyzz + bbyyzz$$

$$y$$

$$-z - aa = -2byzz + bbyzz$$

$$y = \frac{z + aa}{2b - bb.zz}; \text{ ſtellende } 2b - bb = p;$$

 Dan

Dan is $y = \frac{z + aa}{pzz}$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} z$$

$$yz = \frac{z + aa}{pz}$$

Dus $yz - 1 = \frac{z + aa - pz}{pz}$

maar $\frac{yz - 1}{aa} = x$

$x = \frac{z + aa - pz}{aapz}$, vermenigv. met $yz = \frac{z + aa}{pz}$;

komt $xyz = \frac{\overline{z + aa} . \overline{z + aa - pz} . z}{pzz \times aapz}$.

Dienvolgens

$$xyz - z = \frac{zz + 2aaz - pzz + a^4 - aapz - aappz^3}{aappzz};$$

dit moet wederom een *rationaal Quadraat* zyn; de Noemer is zodanig. Stel derhalven de Wortel uit den Teller $= aa + dz$.

Dan is

$$zz + 2aaz - pzz + a^4 - aapz - aappz^3 = a^4 + 2aadz + ddzz$$

$$zz + 2aaz - pzz - aapz - aappz^3 = 2aadz + ddzz$$

Neem $2aaz \ldots\ldots - aapz \ldots\ldots\ldots = 2aadz$; dan is $d = 1 - \frac{1}{2}p$.

$$zz \ldots\ldots - pzz \ldots\ldots - aappz^3 = \ldots\ldots ddzz -$$

$$zz \quad \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$1 \ldots\ldots - p \ldots\ldots - aappz = \ldots\ldots dd$$

$$\text{maar } 1 - p + \tfrac{1}{4}pp = \ldots\ldots dd$$

$$1 - p - aappz = 1 - p + \tfrac{1}{4}pp$$

$$aappz = -\tfrac{1}{4}pp$$

$$pp \text{ ——————— } 4$$

$$4aaz = -1, \text{ dus } z = -\frac{1}{4aa};$$

Dienvolgens $y = \dfrac{\overline{4a^4 - 1}.4aa}{2b - bb}$, $x = \dfrac{bb - 2b + 1 - 4a^4}{2b - bb}$.

II. AANMERKING.

Hier uit blykt, dat één der gestelde getallen *negatif* is, dat is $z = -\frac{1}{4}aa$; en dus kan aan het Voorstel niet voldaan worden, wanneer men deeze wyze van Oplosfing verkiest. Misschien zal dit de reden zyn, waarom DE GRAAF, in zyne *Algebra* Voorstel 314, wegens de Oplossing van dit Voorstel een anderen weg inslaat, stellende vooraf dit

LEMMA.

Indien men het verschil van twee rationaale Quadraaten *in twee deelbaare Deelen schift, zo dat de halve som van deeze Deelen, de Wortel van het grootste* Quadraat *zy, zal het halve verschil van deeze deelbaare Deelen de Wortel van het kleinste* Quadraat *zyn.*

Bewys.

Laat $\left.\begin{array}{r} aa + 2ab + bb \\ aa - 2ab + bb \end{array}\right\}$ twee *rationaale Quadraaten* zyn,

waar van $4ab$ het verschil is. Van dit verschil nu zyn de deelbaare deelen $2a$ en $2b$; en om dat de halve som derzelve $(a + b)$ de wortel is van het grootste *Quadraat*, zal $a - b$ het halve verschil, en de wortel van het kleinste *Quadraat* zyn.

SCHO-

SCHOLIUM.

Dewyl deeze Vraag drie gevallen behelst, van welke LUDOLF en DE GRAAF 'er twee opgeeven, zullen wy hier het derde nog bydoen, en door dit *Lemma* algemeen oplossen. Deeze gevallen worden dus voorgesteld:

I. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men ieder derzelve tot haar vermenigvuldigde vergaart, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.* Zynde de voorgaande LII. VRAAG.

Stel voor de getallen bx, c, en $\frac{aax-b}{bc}$; zo is het vermenigvuldigde derzelve $aaxx-bx$, hier toe ieder getal byzonder vergaard, zo heeft men

$$aaxx,\ aaxx-bx+c,\ \text{en}\ aaxx-bx+\frac{aax-b}{bc}.$$

Het verschil van de twee laatsten is $c-\frac{aax-b}{bc}$;

of, dat het zelfde is, $\frac{bcc-aax+b}{bc}$.

Neemende de deelbaare deelen $\frac{a}{2bc}$, en $\frac{2bcc}{a}-2ax+\frac{2b}{a}$;

Dan is de halve som $-ax+\frac{a}{4bc}+\frac{bcc}{a}+\frac{b}{a}$.

Stel, om het werk te verkorten, $\frac{a}{4bc}+\frac{bcc}{a}+\frac{b}{a}=d$, zo is deeze halve som $=-ax+d$.

Der-

Derhalven

$$aaxx - bx + c = (\overline{-ax + d}|^2 =) \, aaxx - 2adx + dd$$

$$\text{Dus } x = \frac{dd - c}{2ad - b}.$$

Neemende $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$; zo is $d = \frac{7}{4}$, en $x = \frac{17}{208}$.

Dienvolgens de getallen $bx = \frac{17}{208}$, $c = 2$, en $\frac{aax - b}{bc} = \frac{2}{13}$.

2. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men ieder derzelve van haar vermenigvuldigde aftrekt, de overblyffelen drie* rationaale Quadraaten *zyn.* Zynde deeze LXI. VRAAG.

Stel voor de getallen bx, c, en $\frac{aax + b}{bc}$; zo is het vermenigvuldigde $aaxx + bx$, hier van ieder getal byzonder afgetrokken, zyn de overblyffelen $aaxx$, $aaxx + bx - c$, en $aaxx + bx - \frac{aax + b}{bc}$.

Het verfchil van de twee laatften is $\frac{aax + b}{bc} - c$;

Of, dat het zelfde is, $\frac{aax + b - bcc}{bc}$.

Neemende de deelbaare deelen $\frac{a}{2bc}$, en $2ax + \frac{2b}{a} - \frac{2bcc}{a}$;

Dan is de halve fom $ax + \frac{a}{4bc} + \frac{b}{a} - \frac{bcc}{a}$.

Stel, om het werk te verkorten, $\frac{a}{4bc} + \frac{b}{a} - \frac{bcc}{a} = d$, zo is deeze halve fom $= ax + d$.

Der-

Derhalven $aaxx + bx - c = aaxx + 2adx + dd$

$$\text{Dus } x = \frac{dd + c}{b - 2ad}.$$

Neemende $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$; zo is $d = \frac{1}{2}$, en $x = \frac{11}{16}$.

Dienvolgens de getallen $bx = \frac{11}{16}$, $c = 2$, $\frac{aax + b}{bc} = 6$.

3. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men haar vermenigvuldigde van ieder getal byzonder aftrekt, de overblyffelen drie* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen bx, c, en $\frac{b - aax}{bc}$; zo is het vermenigvuldigde derzelve $bx - aaxx$; dit van ieder getal byzonder afgetrokken, zyn de overblyffelen $aaxx$, $aaxx - bx + c$, en $aaxx - bx + \frac{b - aax}{bc}$.

Het verfchil van de twee laatften is $c - \frac{b - aax}{bc}$; of, dat het zelfde is, $\frac{bcc - b + aax}{bc}$.

Neemende de deelbaare deel. $\frac{a}{2bc}$, en $\frac{2bcc}{a} - \frac{2b}{a} + 2ax$;

Dan is de halve fom $\frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} - \frac{b}{a} + ax$.

Stel, om het werk te verkorten, $\frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} - \frac{b}{a} = d$; zo is deeze halve fom $= d + ax$.

Derhalven $aaxx - bx + c = aaxx + 2adx + dd$

$$\text{Dus } x = \frac{c - dd}{2ad + b}.$$

Nee-

Neemende $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$; zo is $d = \frac{1}{8}$, en $x = \frac{7}{32}$.

Dienvolgens de getallen $bx = \frac{7}{8}$, $c = 1$, en $\frac{b - axx}{bc} = \frac{15}{32}$.

I. COROLLARIUM.

Uit deeze Ontbinding volgt, dat, naar derzelver inrigting, altoos een der begeerde getallen (c) naar welgevallen kan genomen worden; waar door blykbaar is, dat wy het Voorſtel zouden kunnen en mogen veranderen, in alle die gevallen, op deeze wyze:

1. *By een gegeeven getal twee andere te vinden, welke ieder byzonder tot haar vermenigvuldigde vergaard zynde, de uitkomſten drie* rationaale Quadraaten *zyn.*

2. *By een gegeeven getal twee andere te vinden, welke ieder byzonder van haar vermenigvuldigde afgetrokken zynde, de overblyfſelen drie* rationaale Quadraaten *zyn.*

3. *By een gegeeven getal twee andere te vinden, zodanig, dat haar vermenigvuldigde van ieder derzelve afgetrokken zynde, de overblyfſelen drie* rationaale Quadraaten *zyn.*

II. COROLLARIUM.

Uit de Ontbinding volgt nog, dat 'er nog andere Conditien by het Voorſtel kunnen gevoegd worden, weshalven wy de voorgaande gevallen onder een naauwer bepaling zullen brengen, naamelyk: dat de Wortels der voortkomende begeerde *Quadraaten* in eene *Arithmetiſche Progresſie* ſtaan. Wy zullen hier by nog de zelfde orde in agt neemen.

1. Om *drie getallen te vinden, zodanig, dat als men ieder getal byzonder tot haar vermenigvuldigde vergaart, de uitkomſten drie* rationaale Quadraaten *zyn, wier Wortelen in eene* Arithmetiſche Progresſie *ſtaan.*

Stel

Stel voor de getallen $2bx$, $4bx+bb$, en $\frac{xx-2bx}{2bx.\overline{4bx+bb}}$, $\left(=\frac{x-2b}{8bbx+2b^3}\right)$ zo is het vermenigvuldigde derzelve $xx-2bx$; hier by ieder getal byzonder vergaard, komt

xx een *Quadraat* welks wortel is x

$xx+2bx+bb$ . . . . $x+b$

$xx-2bx+\frac{x-2b}{8bbx+2b^3}$, dat geen *Quadraat* is,

en nogthans als zodanig moet geſteld worden, dat $x-b$ de wortel zy.

Derhalven

$$xx-2bx+\frac{x-2b}{8bbx+2b^3}=xx-2bx+bb$$

$$\text{Dus } \frac{x-b}{8bbx+2b^3}=bb$$

$$x-2b=8b^4x+2b^5$$

$$x-8b^4x=2b^5+2b$$

$$x=\frac{2b.\overline{b^4+1}}{1-8b^4}.$$

Neem $b=\frac{1}{2}$, zo is $x=\frac{17}{8}$; en de getallen

$2bx=\frac{17}{8}$, $4bx+bb=\frac{9}{2}$; en $\frac{x-2b}{8bbx+2b^3}=\frac{1}{4}$.

2. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men ieder getal byzonder van haar vermenigvuldigde aftrekt, de uitkomſten drie* rationaale Quadraaten *zyn, wier Wortelen in eene* Arithmetiſche Progresſie *ſtaan.*

Stel

Stel voor de getallen $2\,bx$, $4\,bx - bb$, en $\frac{xx + 2\,bx}{2\,bx . 4\,bx - bb}$, $\left(= \frac{x + 2\,b}{8\,bbx - 2\,b^3}\right)$; zo is het vermenigvuldigde derzelve $xx + 2\,bx$; hier van ieder getal byzonder afgetrokken, zyn de overblyffelen

xx een *Quadraat* welks wortel is x

$xx - 2\,bx + bb$ . . . . $x - b$

$xx + 2\,bx - \frac{x + 2\,b}{8\,bbx - 2\,b^3}$ dat geen *Quadraat* is, en nogthans als zodanig moet gesteld worden, dat $x + b$ de Wortel zy.

Derhalven

$$xx + 2\,bx - \frac{x + 2\,b}{8\,bbx - 2\,b^3} = xx + 2\,bx + bb$$

$$- \frac{x + 2\,b}{8\,bbx - 2\,b^3} = bb$$

$$\frac{x + 2\,b}{8\,bbx - 2\,b^3} = - bb$$

$$x + 2\,b = - 8\,b^4 x + 2\,b^5$$

$$8\,b^4 x + x = 2\,b^5 - 2\,b$$

$$x = \frac{2\,b^5 - 2\,b}{8\,b^4 + 1}.$$

Hier vervalt men nu in de zelfde zwaarigheid, als in de algemeene Oplossing; dewyl het eene getal $4\,bx - bb$ *negatif* zal komen. Want $x = \frac{2\,b^5 - 2\,b}{8\,b^4 + 1}$ zynde, zo is $4\,bx = \frac{8\,b^6 - 8\,bb}{8\,b^4 + 1}$, hier van bb, of $\frac{8\,b^6 + bb}{8\,b^4 + 1}$, afge-

 trok-

trokken, rest $4bx - bb = \frac{-9bb}{8b^4+1}$, zynde eene *negative* waarde, die daarom niet aan het begeerde kan voldoen.

3. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men het vermenigvuldigde derzelve van ieder getal byzonder aftrekt, de overblyffelen drie* rationaale Quadraaten *zyn, wier Wortelen in eene* Arithmetische Progresfie *staan.*

Stel voor de getallen $2bx$, $4bx + bb$, en $\frac{2bx - xx}{2bx.\overline{4bx+bb}}$. $\left(= \frac{2b - x}{8bbx + 2b^3}\right)$ zo is haar vermenigvuldigde $2bx - xx$, dit van ieder getal byzonder afgetrokken, zyn de overblyffelen

xx een *Quadraat* welks wortel is x

$xx + 2bx + bb$ . . . . $x + b$

$\frac{2b - x}{8bbx + 2b^3} - 2bx + xx$ dat geen *Quadraat* is, en nogthans als zodanig moet gesteld worden, dat $x - b$ de Wortel zy.

Derhalven

$$\frac{2b - x}{8bbx + 2b^3} - 2bx + xx = xx - 2bx + bb$$

$$\frac{2b - x}{8bbx + 2b^3} = bb;\ \text{dus}\ 2b - x = 8b^4x + 2b^5.$$

$$8b^4x + x = 2b - 2b^5$$

$$x = \frac{2b.\overline{1 - b^4}}{8b^4 + 1}.$$

Nee-

Neemende $b = \frac{1}{2}$, zo is $x = \frac{5}{8}$; dienvolgens de begeerde getallen $2bx = \frac{5}{8}$, $4bx + bb = 1\frac{1}{2}$, en $\frac{2b - x}{8bbx + 2b^3} = \frac{1}{4}$.

III. AANMERKING.

Dewyl wy nu in het II. *Corollarium* onderſteld hebben, dat de Wortels van de komende *Quadraaten* in eene *Aritbmetiſche Progreſſie* moeſten ſtaan, hebben wy daar door ook het tweede geval onvoldoende gevonden, waarom wy alle die gevallen nog eens zullen hervatten, door het *Lemma* der II. *Aanmerking* daar op toe te paſſen.

1. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men tot haar vermenigvuldigde ieder getal byzonder vergaart, de uitkomſten* ration. Quadraaten *zyn, wier Wortelen in eene* Arithmetiſche Progreſſie *ſtaan.*

Stel voor de getallen bx, c, $\frac{aax - b}{bc}$, zo is haar vermenigvuldigde $aaxx - bx$; hier by ieder getal byzonder vergaard, zyn de uitkomſten

$aaxx$, $aaxx - bx + c$, $aaxx - bx + \frac{aax - b}{bc}$; van welke de twee laatſten tot *rationaale Quadraaten* moeten bepaald worden.

Nu is het verſchil derzelve $c - \frac{aax - b}{bc}$, waar van de Deelers zyn $\frac{a}{2bc}$, en $\frac{2bcc}{a} - 2ax + \frac{2b}{a}$.

Dus de halve ſom $-ax + \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} + \frac{b}{a}$,

en het halve verſchil $-ax - \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} + \frac{b}{a}$.

Dewyl wy nu het grootste *Quadraat* $= aaxx - bx + c$ gesteld hebben, zyn de *Quadraaten* en hunne Wortels

Quadraaten.	Wortels.
$aaxx - bx + c$	$-ax + \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} + \frac{b}{a}$
$aaxx$	$-ax$
$aaxx - bx + \frac{aax - b}{bc}$	$-ax - \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} + \frac{b}{a}$

Nu moeten de Wortelen in eene *Arithmetische Progressie* staan; en dus, vergaarende de beide uitersten, moet de som gelyk aan het dubbeld der middelste zyn.

Derhalven $-2ax + \frac{2bcc}{a} + \frac{2b}{a} = -2ax$

$$\frac{2bcc}{a} + \frac{2b}{a} = 0;$$ dus $cc = -1$, dat (onmogelyk is.

By gevolg kunnen de Wortels, naar deeze Oplossing, niet in eene *Arithm. Progressie* staan. Doch wy kunnen nog onderzoeken, of men de Wortels niet anders kan schikken. Want neemende

De Quadraaten.	De Wortels.
$aaxx$	$-ax$
$aaxx - bx + c$	$-ax + \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} + \frac{b}{a}$
$aaxx - bx + \frac{aax - b}{bc}$	$-ax - \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} + \frac{b}{a}$

Stel-

Stellende nu de Wortels in eene *Arithmetische Progressie*, zo hebben wy

$$-2ax-\frac{a}{4bc}+\frac{bcc}{a}+\frac{b}{a}=-2ax+\frac{2a}{4bc}+\frac{2bcc}{a}+\frac{2b}{a}$$

Dus $o=\frac{3a}{4bc}+\frac{bcc}{a}+\frac{b}{a}$; zynde wederom *negatif.*

Derhalven kan dit geval niet op deeze wyze worden opgelost, als men de Wortelen in eene *Arithmetische Progressie* begeert.

2. *Om drie getallen te vinden, zodanig, dat als men ieder derzelver byzonder van haar vermenigvuldigde aftrekt, de overblyffelen drie* rationaale Quadraaten *zyn, wier Wortelen in eene* Arithmetische Progressie *staan.*

Stel voor de getallen bx, c, $\frac{aax+b}{bc}$, zo is haar vermenigvuldigde $aaxx-bx$, en de *Quadraaten*, benevens hunne Wortels, volgens het *Scholium* der I. *Aanmerking.*

Quadraaten.	Wortels.
$aaxx+bx-\frac{aax-b}{bc}$	$ax+\frac{b}{a}-\frac{bcc}{a}-\frac{a}{4bc}$
$aaxx$	ax
$aaxx-bx-c$	$ax+\frac{b}{a}-\frac{bcc}{a}+\frac{a}{4bc}$

De uiterften vergaard, en de som met het tweevouwd der middelste vergeleeken, komt

$$2ax+\frac{2b}{a}-\frac{2bcc}{a}=2ax$$

$$\frac{2b}{a}-\frac{2bcc}{a}=o,\text{ dus } cc=1,\text{ of } c=1.$$

Hier uit blykt, dat de Wortels der *Quadraaten* in eene *Arithmetische Progressie* zullen zyn, wanneer $c=1$ is, derhalven is door de voorgaande Oplossing van dit geval, alwaar genomen is $d=\frac{b}{a}-\frac{bcc}{a}+\frac{a}{4bc}$, en gevonden $x=\frac{dd+c}{b-2ad}$; $d=\frac{a}{4b}$, en by gevolg

$$x=\frac{16bb+aa}{8b.\overline{2bb-aa}}.$$

Neemende $a=7$, $b=5$; zo is $x=\frac{449}{40}$, en de getallen

$$bx=\frac{449}{8},\ c=1, \text{ en } \frac{aax+b}{bc}=\frac{22201}{200}.$$

3. O*m drie getallen te vinden, zodanig, dat als men haar vermenigvuldigde van ieder getal byzonder aftrekt, de overblyfselen drie* rationaale Quadraaten *zyn, wier Wortelen in eene* Arithmetische Progressie *staan.*

Stel voor de getallen bx, c, $\frac{b-aax}{bc}$, zo is haar vermenigvuldigde $bx-aaxx$, en de *Quadraaten*, benevens hunne Wortels, volgens het *Scholium* der I. *Aanmerking*.

Quadraaten.	Wortels.
$aaxx-bx+c$	$ax+\frac{bcc}{a}-\frac{b}{a}+\frac{a}{4bc}$
$aaxx$	ax
$aaxx-bx+\frac{b-aax}{bc}$	$ax+\frac{bcc}{a}-\frac{b}{a}-\frac{a}{4bc}$.

De uitersten vergaard, en de som met het dubbeld der middelste vergeleeken, komt

$2ax$.

$$2ax + \frac{2bcc}{a} - \frac{2b}{a} = 2ax$$

$$\frac{2bcc}{a} - \frac{2b}{a} = 0; \text{ dus } cc = 1, \text{ of } c = 1.$$

Nu is volgens de voorgaande Oplosfing van dit geval genomen $d = \frac{a}{4bc} + \frac{bcc}{a} - \frac{b}{a}$, en gevonden $x = \frac{c - dd}{2ad + b}$; maar in dit geval $c = 1$ zynde, zo is $d = \frac{a}{4b}$, en $x = \frac{16bb - aa}{8b \cdot 2bb + aa}$.

Neemende $a = 2$, $b = 4$; zo is $x = (\frac{252}{1152} =) \frac{7}{32}$, en de getallen $bx = \frac{7}{8}$, $c = 1$, en $\frac{b - aax}{bc} = \frac{25}{32}$.

LXII. VRAAG.

Vind eene *Arithmetifche Progresfie* van drie *Termen*, zodanig, dat als men van ieder *Term* $4\frac{1}{3}$ aftrekt, de overblyffelen drie *rationaale Quadraaten* zyn.

OPLOSSING.

Stel voor de *Progresfie*

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2xy + yy + a \\ xx + 2xy + yy + a \\ xx + 6xy + yy + a \end{array}\right\}$$ deeze klimt op met $4xy$, en als men a aftrekt zyn de *Quadraaten*

$xx - 2xy + yy$

$xx + 2xy + yy$

$xx + 6xy + yy$; dit laatfte moet nog tot een *ration. Quadraat* gemaakt worden.

Stel den Wortel $= x + \frac{py}{q}$,

zo is $xx + 6xy + yy = xx + \frac{2xpy}{q} + \frac{ppyy}{qq}$

$$6xy + yy = \frac{2xpy}{q} + \frac{ppyy}{qq}$$

$$6xyqq + yyqq = 2xypq + ppyy$$

y

$$6xqq + yqq = 2xpq + ppy$$

of $6xqq - 2xpq = ppy - qqy$

Neem $x = pp - qq$, zo is $y = 6qq - 2pq$.

Deeze Waarden voor x en y geplaatst; dan is de *Progressie*

$$p^4 + 4p^3q - 10ppqq - 28pq^3 + 49q^4 + a,$$
$$p^4 - 4p^3q + 14ppqq - 20pq^3 + 25q^4 + a,$$
$$p^4 - 12p^3q + 38ppqq - 12pq^3 + q^4 + a.$$

Neemende $p = 0$, $q = 1$; dan is de *Progressie* $49 + a$, $25 + a$, $1 + a$; en dewyl $a = 4\frac{1}{3}$ is, zo zyn de getallen $53\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{3}$, en $5\frac{1}{3}$; enz.

AANMERKING.

Dit Voorstel behelst niets anders, dan

Om *drie* rationaale Quadraaten *te vinden, die gelyke verschillen hebben, en dus eene* Arithmetische Progressie *uitmaaken.*

Want het gegeeven getal (a), dat hier begeerd wordt om af te trekken, is geheel onafhangkelyk van het Voorstel, en kan derhalven drie verschillende gevallen uitleeveren, als:

1. Om

1. *Om drie getallen te vinden, die in eene* Arithmetische Progresfie *ftaan, zodanig, dat als men van ieder* Term *byzonder* $4\frac{1}{3}$ *aftrekt, de overblyffelen* rationaale Quadraaten *zyn.* Zynde deeze LXII. VRAAG.

2. *Om drie getallen te vinden, die in eene* Arithmetifche Progresfie *ftaan, zodanig, dat als men ieder* Term *van* $4\frac{1}{3}$ *aftrekt, de overblyffelen* rationaale Quadraaten *zyn.*

3. *Om drie getallen te vinden, die in eene* Arithmetifche Progresfie *ftaan, zodanig, dat als men by ieder* Term $4\frac{1}{3}$ *vergaart, de uitkomften* rationaale Quadraaten *zyn.*

OPLOSSING.

1. Om de getallen van LUDOLF te vinden, zo heeft men $x = \frac{\overline{pp - qq}\cdot y}{6qq - 2pq}$.

Neemende $p = 7$, $q = 3$, en $y = \frac{3}{10}$; zo is $x = 1$;

Dus $x - y = \frac{7}{10}$	de *Quadr.* zyn $\frac{49}{100}$, $\frac{169}{100}$, $\frac{289}{100}$
$x + y = \frac{13}{10}$	hier by $4\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}$ vergaard.
$x + \frac{py}{q} = \frac{17}{10}$	Derh. $4\frac{247}{300}$, $6\frac{7}{300}$, $7\frac{67}{300}$ de getallen.

2. De zelfde *Quadr.* zyn $\frac{49}{100}$, $\frac{169}{100}$, $\frac{289}{100}$, deeze afgetrokken van $4\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}$

Dan zyn de getallen $3\frac{253}{300}$, $2\frac{193}{300}$, $1\frac{133}{300}$.

3. En als men het gegeeven getal $4\frac{1}{3}$ van de gevondene *Quadraaten* moet aftrekken, kan dit op de zelfde wyze gefchieden. Want niet tegenftaande de gevondene *Quadraaten* minder zyn dan $4\frac{1}{3}$, kan men dezelve verhoogen, door haar met een *Quadraat* te vermenigvuldigen, dan zullen deeze verhoogde *Quadraaten* aan den eifch voldoen.

By voorbeeld

De gev. *Quadr.* $\frac{49}{100}$, $\frac{169}{100}$, $\frac{289}{100}$

9 een *Quadr.*

$\frac{441}{100}$, $\frac{1521}{100}$, $\frac{2601}{100}$

hier afgetrokken... $4\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}$

komt $\frac{23}{300}$, $10\frac{263}{300}$, $21\frac{203}{300}$ de getallen.

LXIII. VRAAG.

Een *rationaal Quadraat* in vier deelen te deelen, zodanig, dat zo men tot ieder deel byzonder de eenheid vergaart, de uitkomsten vier *rationaale Cuben* zyn.

OPLOSSING.

Stel voor de deelen

$$\left.\begin{array}{r} 3ax+3aaxx+a^3x^3 \\ 7-12ax+6aaxx-a^3x^3 \\ -1+b^3 \\ -1+c^3 \end{array}\right\}$$ wanneer dan by ieder 1 vergaard wordt, zyn de uitkomsten *rationaale Cuben.*

De som is

$5+b^3+c^3-9ax+9aaxx$, het geen een *ration.* (*Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $=3ax+d$;

Dan is $5+b^3+c^3-9ax+9aaxx=9aaxx+6adx+dd$

$$6adx+9ax=5+b^3+c^3-dd$$

$$x=\frac{5+b^3+c^3-dd}{6ad+9a}.$$

Nee-

Neemende $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, en $d = 5$, zo is $x = \frac{5}{13}$, en de getallen

$$\begin{aligned} 3ax + 3aaxx + a^3x^3 &= 1\tfrac{1438}{2197}, \\ 7 - 12ax + 6aaxx - a^3x^3 &= 3\tfrac{473}{2197} \\ -1 + b^3 \,\ldots\ldots\ldots\ldots &= 7 \\ -1 + c^3 \,\ldots\ldots\ldots\ldots &= 26 \end{aligned}$$

zynde de ſom $37\frac{147}{169}$ een *rationaal* (*Quadraat.*

LXIV. VRAAG.

Zoek vier getallen, zodanig, dat zo men tot het vermenigvuldigde derzelve, twee aan twee genomen, de eenheid vergaart, de uitkomſten *rationaale Quadraaten* zyn.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{l} x \\ x+2 \\ 4x+4 \\ 9x+6 \end{array}\right\}$$

deeze twee aan twee vermenigvuldigd, en by het *product* de eenheid vergaard, zo heeft men de zes volgende grootheden

$$\left.\begin{array}{r} xx + 2x + 1 \\ 4xx + 4x + 1 \\ 9xx + 6x + 1 \\ 4xx + 12x + 9 \\ 9xx + 24x + 13 \\ 36xx + 60x + 25 \end{array}\right\}$$

welke alle *rationaale Quadraaten* zyn, behalven $9xx + 24x + 13$, waarom deeze maar alleen tot een *rationaal Quadraat* moet gemaakt worden.

Stel den Wortel $= 3x - a$;

Dan is $9xx + 24x + 13 = 9xx - 6ax + aa$

$$6ax + 24x = aa - 13$$

$$x = \frac{aa - 13}{6a + 24}$$

Nee-

Neemende $a = 5$, zo is $x = \frac{2}{9}$; derhalven de getallen

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{9} \\ x+2 &= 2\tfrac{2}{9} \\ 4x+4 &= 4\tfrac{8}{9} \\ 9x+6 &= 8 \end{aligned}\right\}$$ zynde het zelfde Antwoord, dat by LUDOLF gevonden wordt.

A N D E R S

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{aligned} &x \\ 4&x+4 \\ 9&x+6 \\ 16&x+8 \end{aligned}\right\}$$ deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en by het *product* de eenheid vergaard, zo heeft men de volgende zes grootheden

$$\left.\begin{aligned} 4xx &+ 4x + 1 \\ 9xx &+ 6x + 1 \\ 16xx &+ 8x + 1 \\ 36xx &+ 60x + 25 \\ 64xx &+ 96x + 33 \\ 144xx &+ 168x + 49 \end{aligned}\right\}$$ deeze alle zyn wederom *rationaale Quadraaten*, behalven $64xx + 96x + 33$, welke dus maar alleen tot een *rationaal Quadraat* moet gemaakt worden.

Stel den Wortel $= 8x + a$,

Dan is $64xx + 96x + 33 = 64xx + 16ax + aa$

$$96x - 16ax = aa - 33$$

$$x = \frac{aa - 33}{96 - 16a}$$

Neemende $a = \frac{29}{5}$; zo is $x = \frac{1}{5}$; derhalven de getallen

$x = \frac{1}{5}$

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{5} \\ 4x + 4 = 4\frac{4}{5} \\ 9x + 6 = 7\frac{4}{5} \\ 16x + 8 = 11\frac{1}{5} \end{array}\right\}$$ zynde het tweede Antwoord van LUDOLF.

COROLLARIUM.

Hier uit volgt, dat wy de getallen, op de zelfde wyze, met een ontkennend Teken hadden kunnen ſtellen, aldus:

1. Stellende voor de getallen x, $x - 2$, $4x - 4$, $9x - 6$; deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en tot het *product* de eenheid vergaard, zyn de uitkomſten alle *Quadraaten*, behalven $9xx - 24x + 13$. Stel den Wortel $= 3x \backsim a$.

Dan is $9xx - 24x + 13 = 9xx - 6ax + aa$

$$\text{Dus } x = \frac{aa - 13}{6a - 24}.$$

Neemende $a = 8$; dan zyn de getallen $2\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{2}$, en $13\frac{1}{8}$.

2. Stellende voor de getallen x, $4x - 4$, $9x - 6$, $16x - 8$; deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en tot het *product* de eenheid vergaard, zyn de uitkomſten alle *Quadraaten*, behalven $64xx - 96x + 33$. Stel den Wortel $= 8x \backsim a$.

Dan is $64xx - 96x + 33 = 64xx - 16ax + aa$

$$x = \frac{aa - 33}{16a - 96}.$$

Neemende $a = 11$; dan zyn de getallen $1\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $3\frac{9}{10}$, en $9\frac{3}{5}$.

I. AANMERKING.

Deeze stelling, welke geschikt is om juist de Antwoorden van LUDOLF te hebben, vereischt vry wat doorzigt, om dezelve zodanig in te rigten, dat vyf der *producten* als van zelf *rationaal* komen, en geeft daarenboven gebroken getallen. Hierom zullen wy aanwyzen, hoe deeze Vraag in heele getallen kan beantwoord worden, door eene stukswyze Oplossing; dat is te zeggen, wy zullen in de eerste plaats twee zulke getallen bepaalen, dan drie, en eindelyk vier; zulks dat dezelve twee aan twee te saamen vermenigvuld'gd, en by elk der komende *producten* de eenheid vergaard zynde, de uitkomsten *rationaale Quadraaten* zyn.

1. *Om twee getallen te vinden, by welker* product *de eenheid vergaard zynde, een* rationaal Quadraat *voortbrengt.*

Stel voor de getallen x en y; dan moet $xy + 1$ een *ration. Quadraat* zyn.

Stel $xy + 1 = xxyy - 2xy + 1 = \overline{xy - 1}|^2$

$$xxyy = 3xy;\ \text{dus}\ xy = 3.$$

Neemende $x = 1$, zo is $y = 3$, de begeerde getallen.

2. *Om drie getallen te vinden, by welker* producten *twee aan twee de eenheid vergaard zynde*, rationaale Quadraaten *komen.*

Stel de getallen 1, 3, z; zo moeten $z + 1$ en $3z + 1$ *rationaale Quadraaten* zyn.

Neem $z + 1 = aa$, zo is $z = aa - 1$; dus $3z + 1 = 3aa - 2$; dat een *Quadraat* moet zyn.

Neem $a = b + 1$, dan is $3aa - 2 = 3bb + 6b + 1$.

Stel

Stel $\underline{3bb + 6b + 1 = 1 + 4b + 4bb} = \overline{1 + 2b}|^2$

$bb = 2b$; dus $b = 2$.

Derhalven zyn 1, 3, 8 de getallen.

3. *Om vier getallen te vinden, welke twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en by het* product *de eenheid vergaard zynde, de uitkomſten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen 1, 3, 8, en $vv + 2v$; deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en tot het *product* de eenheid vergaard, zo hebben wy

$4, 9, 25, vv + 2v + 1, \left.\begin{array}{r} 8vv + 16v + 1 \\ 3vv + 6v + 1 \end{array}\right\}$ deeze twee moeten *Quadr.* zyn.

verſchil $5vv + 10v$

van dit verſchil zyn de deelbaare deelen $5v$, en $v + 2$; wier halve ſom is $3v + 1$.

Stel $\underline{8vv + 16v + 1 = 9vv + 6v + 1} = \overline{3v + 1}|^2$

$vv = 10v$; dus $v = 10$, en $vv + 2v$, (= 120.

Derhalven 1, 3, 8, en 120 de getallen.

A N D E R S.

Stel voor de getallen 2, $2aa - 2a$, $2aa + 2a$, en $2xx + 2x$; deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en tot het *product* de eenheid vergaard, zyn de uitkomſten

$4aa - 4a + 1$
$4aa + 4a + 1$
$4xx + 4x + 1$
$4a^4 - 4aa + 1$

$4aa$,

$$\left.\begin{array}{l} 4aaxx - 4axx + 4aax - 4ax + 1 \\ 4aaxx + 4axx + 4aax + 4ax + 1 \end{array}\right\}$$ deeze moeten *ration. Quadr.* zyn.

Verschil $8axx \ldots\ldots + 8ax$, waar van de Deelers zyn $4ax$, en $2x+2$.

En de halve som der Deelers is $2ax + x + 1$.

Derh. $4aaxx + 4axx + 4aax + 4ax + 1 = 4aaxx + 4axx + 4ax + xx + 2x + 1 = \overline{2ax + x + 1}|^2$

$$4aax = xx + 2x$$

$$4aa = x + 2;$$ dus $x = 4aa - 2$. Deeze waarde voor x geplaatst, vindt men voor de getallen

$$2,\ 2aa - 2a,\ 2aa + 2a, \text{ en } 32a^4 - 24aa + 4.$$

Neemende $a = 2$, dan zyn de getallen 2, 4, 12, en 420.

II. AANMERKING.

Niet tegenstaande deeze Ontbinding algemeen is, en altoos heele getallen voortbrengt, zo is dezelve nogthans zodanig geschikt, dat men altoos en bepaaldelyk de eenheid tot het vermenigvuldigde van twee en twee getallen moet vergaaren. Daarom zullen wy dit Voorstel nog eens oplossen, en een weinig algemeender stellen.

VOORSTEL.

Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men by het vermenigvuldigde van twee en twee, vervolgens genomen, een gegeeven Quadraat *vergaart, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{l} x \\ x+2y \\ 4x+4y \\ 9x+6y \end{array}\right\}$$ deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en by ieder *product* het *Quadraat* yy vergaard, zo verkrygt men de volgende grootheden

$$\left.\begin{array}{l} xx+2xy+yy \\ 4xx+4xy+yy \\ 9xx+6xy+yy \\ 4xx+12xy+9yy \\ 9xx+24xy+13yy \\ 36xx+60xy+25yy \end{array}\right\}$$ deeze alle zyn *Quadraaten*, behalven $9xx+24xy+13yy$, waarom deeze afzonderlyk tot een *Quadraat* moet gemaakt worden.

Stel den Wortel $= 3x - \frac{ay}{b}$,

Dan is $9xx+24xy+13yy = 9xx - \frac{6axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$

$$24xy+13yy = -\frac{6axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$$

$$24xybb+13yybb = -6abxy+aayy$$

y

$$24xbb+13ybb = -6abx+aay$$

$$x = \frac{\overline{aa-13bb}.y}{24bb+6ab}$$

Neemende $y = 24bb+6ab$, zo is $x = aa-13bb$, waar door men heeft

$$\left.\begin{array}{l} x \ldots\ldots = aa \ldots\ldots\ldots - 13bb \\ x+2y = aa+12ab+35bb \\ 4x+4y = 4aa+24ab+44bb \\ 9x+6y = 9aa+36ab+27bb \end{array}\right\}$$ deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en daar by telkens $yy = \overline{24bb+4ab}|^2$ vergaard, zullen' er *ration. Quadr.* komen.

VOORBEELD.

Om vier getallen te vinden, welke twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en tot het product *telkens een gegeeven* Quadraat (2304) *vergaard, de uitkomſten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Nu is $x = \frac{\overline{aa - 13bb.y}}{24bb + 6ab}$; neemende $b = 1$, $a = 4$, dus $x = \frac{3}{48}y$.

Dewyl nu $y = 48$ gegeeven is, zo is $x = 3$, en de getallen zyn 3, 99, 204, en 315.

A N D E R S.

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{r} x \\ 4x + 4y \\ 9x + 6y \\ 16x + 8y \end{array}\right\}$$

deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en by het *product* een gegeeven *Quadraat* yy vergaard, hebben wy de volgende grootheden

$$\left.\begin{array}{rrr} 4xx + & 4xy + & yy \\ 9xx + & 6xy + & yy \\ 16xx + & 8xy + & yy \\ 36xx + & 60xy + & 25yy \\ 64xx + & 96xy + & 33yy \\ 144xx + & 168xy + & 49yy \end{array}\right\}$$

welke alle *rationaale Quadraaten* zyn, behalven $64xx + 96xy + 33yy$, welk daarom afzonderlyk tot een *Quadraat* moet gemaakt worden.

Stel den Wortel $= 8x - \frac{ay}{b}$; dan is

$$64xx + 96xy + 33yy = 64xx - \frac{16axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$$

96xy +

$$96xy + \frac{16axy}{b} = \frac{aayy}{bb} - 33yy$$

$$96bbxy + 16abxy = aayy - 33bbyy$$

$$y \quad 96bbx + 16abx = aay - 33bby$$

$$x = \frac{aay - 33bby}{96bb + 16ab}$$

Neemende $y = 96bb + 16ab$, zo is $x = aa - 33bb$; waar door men heeft

$$\left.\begin{array}{rl} x \ldots\ldots = & aa \ldots\ldots\ldots - 33bb \\ 4x + 4y = & 4aa + 64ab + 252bb \\ 9x + 6y = & 9aa + 96ab + 279bb \\ 16x + 8y = & 16aa + 128ab + 240bb \end{array}\right\}$$ deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en by het *product* $yy = 96bb + 16ab$ vergaard, zullen 'er *ration. Quadraaten* komen.

VOORBEELD.

Om vier getallen te vinden, welke twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en tot het product *telkens een gegeeven* Quadraat (4096) *vergaard zynde, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Nu is $x = \frac{\overline{aa - 33b}.y}{96bb + 16ab}$; neemende $a = 6$, $b = 1$, zo is $x = \frac{1}{64}y$.

Dewyl dan $y = 64$ gegeeven is, zo is $x = 1$; en de getallen zyn 1, 260, 393, en 528.

III. AANMERKING.

Tot hier toe hebben wy getoond, hoe dit Voorstel opgelost kan worden, wanneer men by het vermenigvuldigde der getallen, twee aan twee genomen, de eenheid of een gegeeven *Quadraat* vergaart, ten einde de uitkomsten *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Doch het zal kunstiger zyn, wanneer wy het vergaar-tal naar welgevallen verkiezen, en het Voorstel in alle deszelfs veranderingen neemen, waar door wy de drie volgende gevallen moeten beschouwen.

1. *Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men dezelve twee aan twee te saamen vermenigvuldigt, en by het* product *een gegeeven getal vergaart, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

2. *Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men dezelve twee aan twee te saamen vermenigvuldigt, en van het* product *een gegeeven getal aftrekt, de overblyfselen* rationaale Quadraaten *zyn.*

3. *Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men dezelve twee aan twee te saamen vermenigvuldigt, en het* product *van een gegeeven getal aftrekt, de overblyfselen* rationaale Quadraaten *zyn.*

LEMMA.

Vooraf zullen wy drie getallen leeren vinden, zodanig, dat indien men by het vermenigvuldigde derzelve, twee aan twee genomen, een gegeeven getal vergaart, de uitkomsten *rationaale Quadraaten* zyn.

Stel voor de getallen x, $\frac{xxyy-a}{x}$, en $\frac{xxzz-a}{x}$; deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigt, en by het *product* een gegeeven getal (a) vergaard, zo verkrygt men

$xxyy$
$xxzz$

$$\frac{x^4yyzz - xxyya - xxzza + aa + axx}{xx}$$ het geen een (*ration. Quadr.* (moet zyn.

Stel den Wortel uit den Teller $= xxyz - a$,
Dan is

$$x^4yyzz - xxyya - xxzza + aa + axx = x^4yyzz - 2axxyz + aa$$

$$a \left| \frac{- xxyya - xxzza + axx = - 2axxyz}{- xxyy - xxzz + xx = - 2xxyz} \right.$$

$$\text{of } xxyy + xxzz - xx = 2xxyz$$

$$xx \left| \frac{xxyy + xxzz - xx = 2xxyz}{yy + zz - 1 = 2yz} \right.$$

$$yy - 2yz + zz = 1$$

$$\sqrt{} \; y - z = \pm 1, \text{ dus } z = y - 1$$; en de drie getallen x, $\frac{xxyy - a}{x}$, $\frac{xxyy - 2xxy + xx - a}{x}$.

COROLLARIUM.

Wanneer wy den Wortel *negatif* neemen, dan is $z = y + 1$; en dus zyn de getallen x, $\frac{xxyy - a}{x}$, $\frac{xxyy + 2xxy + xx - a}{x}$; waar uit volgt, dat wy naar deeze ſtelling nu gemakkelyk vier getallen kunnen vinden, zodanig, dat het vermenigvuldigde van twee en twee derzelven, tot een gegeeven getal vergaard, vyf der uitkomſten *rationaale Quadraaten* zullen zyn, zo dat 'er ſlegts een eenige grootheid tot een *rationaal Quadraat* zal moeten gemaakt worden. Wy zullen dit gezegde door het volgende nader ophelderen.

I. VOORSTEL.

Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men dezelve twee aan twee te saamen vermenigvuldigt, en tot het product *een gegeeven getal vergaart, de uitkomsten zes* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen x, $\frac{xxyy-a}{x}$, $\frac{xxyy-2xxy+xx-a}{x}$, $\frac{xxyy+2xxy+xx-a}{x}$; deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en by elk der *producten* a vergaard, hebben wy

$$xxyy \ldots\ldots = \square \quad (= \overline{xy}|^2$$

$$xxyy - 2xxy + xx \ldots\ldots = \square \quad (= \overline{xy - x}|^2$$

$$xxyy + 2xxy + xx \ldots\ldots = \square \quad (= \overline{xy + x}|^2$$

$$\frac{x^4y^4 - 2x^4y^3 + x^4yy - 2axxyy + 2axxy + aa}{xx} \ldots = \square \quad \left(= \overline{\frac{xxyy - xxy - a}{x}}\right|^2$$

$$\frac{x^4y^4 + 2x^4y^3 + x^4yy - 2axxyy - 2axxy + aa}{xx} = \square \quad \left(= \overline{\frac{xxyy + xxy - a}{x}}\right|^2$$

$\frac{x^4y^4 - 2x^4yy - 2axxyy + x^4 - axx + aa}{xx}$; dit moet tot een *rationaal Quadraat* gemaakt worden. Stel den Wortel uit den Teller $= xxyy - a$; dan is

$$\underline{x^4y^4 - 2x^4yy - 2axxyy + x^4 - axx + aa = x^4y^4 - 2axxyy + aa}$$

$$\underline{-2x^4yy + x^4 - axx = 0}$$

$$x^4 - 2x^4yy = axx; \text{ dus } \underline{xx - 2xxyy = a}$$

$$xx = \frac{a}{1 - 2yy}.$$

I. COROLLARIUM.

Indien nu a als een *Quadraat* gegeeven was, wierdt hier niets anders vereischt, als om $1 - 2yy$ tot een *Quadraat* te maaken. Stel den Wortel $= 1 - by$;

Dan is $\underline{1 - 2yy = 1 - 2by + bbyy}$

$$\text{Dus } y = \frac{2b}{bb + 2}.$$

Gegeeven zynde $a = 4$ een *Quadraat*, en neemende $b = 1\frac{1}{2}$; dan is $y = \frac{12}{17}$, $x = 34$. Dienvolgens zyn de getallen 34, $\frac{572}{34}$, $\frac{96}{34}$, en $\frac{3360}{34}$; enz.

II. COROLLARIUM.

Maar indien a bepaaldelyk als een gegeeven getal wordt aangemerkt, zullen wy genoodzaakt zyn eenen anderen weg in te slaan; en zie hier dezelve.

De grootheid, welke tot een *rationaal Quadraat* moest gemaakt worden, was $x^4y^4 - 2x^4yy - 2axxyy + x^4 - axx + aa$; hier van de *Termen* in orde geschikt, is $y^4 - 2yy + 1.\, x^4 - 2ayy + a.\, xx + aa$. Stel den Wortel $= yy - 1.\, xx - b$, Dan is deszelfs *Quadraat* $= \overline{y^4 - 2yy + 1}.\, x^4 - \overline{2byy - 2b}.\, xx + bb$. Deeze grootheden van malkanderen afgetrokken, zoo is het overblyffel gelyk o.

$$\text{Dat is } \overline{2byy - 2b} - \overline{2ayy + a}.\, xx + aa - bb = 0$$

$$\overline{2byy - 2b - 2ayy + a}.\, xx = bb - aa$$

$$xx = \frac{bb - aa}{2byy - 2ayy - 2b - a},$$ het geen nog een *Quadr.* moet zyn.

Neemende $b = pp + qq$, $a = pp - qq$, het geen altoos een gegeeven getal kan zyn; dan heeft men

$$xx = \frac{appqq}{4qqyy - \overline{3pp + qq}}.$$

Dus moet maar alleen de Noemer van deeze Breuk een *Quadraat* zyn.

Stel den Wortel $= 2qy - r$;

$$\text{Dan is } 4qqyy - \overline{3pp + qq} = 4qqyy - 4qry + rr$$

$$4qry = 3pp + qq + rr$$

$$y = \frac{3pp + qq + rr}{4qr}$$

Nu is alles *rationaal*; alleenlyk moet men indagtig zyn, dat $a = pp - qq$ genomen is, en mede een gegeeven getal moet zyn. Derhalven, neemende $p = c + d$, en $q = c - d$, zo is

$$pp = cc + 2cd + dd$$
$$qq = cc - 2cd + dd$$

afget.

$$pp - qq = \ldots\ldots 4cd = a; \text{ derhalven } c = \frac{a}{4d}.$$

By gevolg $\left.\begin{aligned} p &= \frac{a}{4d} + d \\ q &= \frac{a}{4d} - d \end{aligned}\right\}$ waar mede alles *rationaal* en rigtig is.

Laat nu het gegeeven getal zyn $a = 7$.

Neemende dan $d = 1$, zo is $p = \frac{11}{4}$

$$r = 2, \ldots q = \tfrac{3}{4}, \text{ derh. } b = \tfrac{65}{8};$$

$$y = \left(\frac{3pp + qq + rr}{4qr} = \right) \tfrac{109}{24};$$

$$x = \left(\frac{2pq}{2qy - r} = \right) \tfrac{6}{7};$$

En de begeerde getallen $\frac{6}{7}$, $\frac{2111}{224}$, $\frac{579}{224}$, $\frac{4067}{224}$.

II. VOORSTEL.

Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men dezelve twee aan twee te saamen vermenigvuldigt, en van elk der producten *een gegeeven getal aftrekt, de overblyfselen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen x, $\frac{xxyy + a}{x}$, $\frac{xxyy - 2xxy + xx + a}{x}$, $\frac{xxyy + 2xxy + xx + a}{x}$.

Deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en van elk der *Producten* het gegeeven getal (a) afgetrokken, zullen wy hebben

$$xxyy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{xy}|^2$$

$$xxyy - 2xxy + xx \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{xy - x}|^2$$

$$xxyy + 2xxy + xx \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{xy + x}|^2$$

$$\frac{x^4y^4 - 2x^4y^3 + x^4yy + 2xxyya - 2xxya + aa}{xx} =,$$

$$\left(, \frac{xxyy - xxy + a}{x}\right|^2$$

$$\frac{x^4y^4 + 2x^4y^3 + x^4yy + 2xxyya + 2xxya + aa}{xx} =,$$

$$\left(, \frac{xxyy + xxy + a}{x}\right|^2$$

$$\frac{x^4y^4 - 2x^4yy + 2xxyya + x^4 + xxa + aa}{xx};$$ dit moet nog tot een *rationaal Quadraat* gemaakt worden. Stel den Wortel $= xxyy + a$;

Dan is

$$\underline{x^4y^4 - 2x^4yy + 2xxyya + x^4 + xxa + aa = x^4y^4 + 2xxyya + aa}$$

$$xx\,\underline{- 2x^4yy + x^4 + xxa = 0}$$

$$\underline{- 2xxyy + xx + a = 0}$$

$$\underline{2xxyy - xx = a}$$

$$xx = \frac{a}{2yy - 1}.$$

I. COROLLARIUM.

Indien nu wederom a als een *rationaal Quadraat* gegeeven was, moest alleen nog $2yy - 1$ tot een *Quadraat* gemaakt worden.

Neem $y = b + 1$; dan is

$2yy - 1 = \underline{2bb + 4b + 1, \text{ ftel} = bbcc - 2bc + 1}$ een *Quadr.*

$$2bb + 4b = bbcc - 2bc$$

$$b \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$2b + 4 = bcc - 2c$$

$$b = \frac{2c + 4}{cc - 2}.$$

Laat gegeeven zyn $a = 4$ een *Quadraat*, en neemende $c = 2$;

Dan is $b = 4$, $y = 5$, $x = \frac{2}{7}$; en de getallen $\frac{8}{7}$, $\frac{148}{7}$, $\frac{130}{7}$, $\frac{170}{7}$; welke aan den eifch zullen voldoen.

II. COROLLARIUM.

Maar indien wy bepaaldelyk a als een gegeeven getal willen aanmerken, zullen wy wederom genoodzaakt zyn eenen anderen weg in te flaan. Hierom de gevondene grootheid $x^4y^4 - 2x^4yy + 2xxyya + x^4 + xxa + aa$, welke een *ration. Quadraat* moet zyn, in orde gefchikt, dan is dezelve $\overline{y^4 - 2yy + 1}.\, x^4 + \overline{2ayy + a}.\, xx + aa$.

Stel den Wortel $= \overline{yy - 1}.\, xx - b$; zo is het *Quadraat* $\overline{y^4 - 2yy + 1}.\, x^4 - \overline{2byy - 2b}.\, xx + bb$; dit aan de gevondene grootheid gelyk ftellende, is het verfchil

$$\overline{2ayy + a + 2byy - 2b}.\, xx + aa - bb = 0$$

$$\overline{2ayy + a + 2byy - 2b}\, xx = bb - aa$$

$$xx = \frac{bb - aa}{2ayy + a + 2byy - 2b}$$ het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Neem

Neem $b = pp + qq$

$a = pp - qq$ het geen altoos een gegeeven getal kan zyn, en die voor de waarden van a en b genomen, zo is

$$xx = \frac{4ppqq}{4ppyy - pp + 3qq}$$, dit moet dan nog maar alleen een *rationaal Quadraat* zyn; de Teller is reeds een *Quadraat*; dus blyft maar alleen overig, om den Noemer als zodanig te bepaalen. Stel den Wortel $= 2py - r$;

Dan is $\overline{4ppyy - pp + 3qq} = 4ppyy - 4pry + rr$

$$4pry = rr + pp + 3qq$$

$$y = \frac{rr + pp + 3qq}{4pr}.$$

Nu is alles *rationaal*; doch men moet indagtig zyn, dat $pp - qq = a$ een gegeeven getal moet zyn. Hierom $p = c + d$, en $q = c - d$ neemende,

zo is $pp = cc + 2cd + dd$

$qq = cc - 2cd + dd$ afget.

$pp - qq = 4cd = a$, derhalven $c = \frac{a}{4d}$;

en by gevolg $p = \frac{a}{4d} + d$, $q = \frac{a}{4d} - d$.

Hier mede is dan alles *rationaal* en rigtig; en dus kunnen wy de begeerde getallen bekomen.

Laat wederom gegeeven zyn $a = 7$.

Neem $d = 1$, zo is $p = \frac{11}{4}$

$r = 2 \ldots . q = \frac{3}{4}$, derh. $b = \frac{65}{8}$;

$y =$

$$y = \left(\frac{pp + 3qq + rr}{4pr} = \right) \tfrac{53}{88};$$

$$x = \left(\frac{2pq}{2py - r} = \right) \tfrac{22}{7};$$

En dan zyn de begeerde getallen $\frac{22}{7}$, $\frac{8297}{2464}$, $\frac{6713}{2464}$, $\frac{25369}{2464}$.

III. VOORSTEL.

Om vier getallen te vinden, zodanig, dat als men dezelve twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigt, en elk der producten *van een gegeeven getal aftrekt, de overblyfſelen zes* rationaale Quadraaten *zyn.*

Dit Voorſtel heb ik niet kunnen oplosſen, door dat ik nergens eenige opening zag, om door de eene of andere weg 'er toe te komen; zelfs niet om drie zulke getallen te vinden. Ik zal hier nogthans byvoegen, welke weg ik tot dat einde ben ingeſlagen, en hoe ver de bewerking gebragt is.

Om drie zodanige getallen te vinden, zo laat voor dezelve geſteld worden ax, $\frac{1-ayy}{x}$, $\frac{1-azz}{x}$; deeze twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigd, en elk der *producten* van het gegeeven getal (a) afgetrokken, dan zyn de overblyfſelen

$aayy$

$aazz$

$\frac{axx + ayy + azz - 1 - aayyzz}{xx}$ dit laatſte moet een *rationaal Quadraat* zyn; doch voor hetzelve kan in geenerlei wyze een Wortel geſteld worden; derhalven

neem

neem $ayy + azz - aayyzz = 0$

$$ayy + azz = aayyzz$$

$$a$$

$$yy + zz = ayyzz$$

$$ayyzz - yy = zz$$

$$yy = \frac{zz}{azz - 1}$$

Derhalven moet $azz - 1$ een *Quadraat* zyn; en dan moet $axx - 1$, de overige *Termen* der waarde, mede een *Quadraat* zyn. Nu is het zeker, dat $axx + 1$, of $azz + 1$, naar de wyze die FERMAT opgeeft, altoos tot een *Quadraat* kan gemaakt worden; doch niet als het teken — is. Daar zyn in der daad maar eenige weinige gevallen, in welke $axx - 1$, of $azz - 1$, *rationaal* kan gemaakt worden. Zie hier van breeder de *Mathematische Liefhebbery* IV. Deel p. 433. op het laatste van het 383ste Voorstel, alwaar onder de eerste honderd getallen, die voor a kunnen genomen worden, 20 getallen zyn, welke toelaaten, om deeze tot een *rationaal Quadraat* te hebben. Dat is, $azz - 1$ kan zyn

$2zz - 1 = \ldots\ldots 1$, derhalv. $a = 2$

$5zz - 1 = \ldots\ldots 4 \ldots\ldots a = 5$

$10zz - 1 = \ldots\ldots 9 \ldots\ldots a = 10$

$13zz - 1 = \ldots\ldots 324 \ldots\ldots a = 13$

$17zz - 1 = \ldots\ldots 16 \ldots\ldots a = 17$

$26zz - 1 = \ldots 25$, derhalv. $a = 26$

$29zz - 1 = \ldots 4900 \ldots a = 29$

$37zz - 1 = \ldots 36 \ldots a = 37$

$41zz - 1 = \ldots 1024 \ldots a = 41$

$50zz - 1 = \ldots 49 \ldots a = 50$

$53zz - 1 = \ldots 33124 \ldots a = 53$

$58zz - 1 = \ldots 9801 \ldots a = 58$

$61zz - 1 = 883159524 \ldots a = 61$

$65zz - 1 = \ldots 64 \ldots a = 65$

$73zz - 1 = \ldots 1140624 \ldots a = 73$

$74zz - 1 = \ldots 1849 \ldots a = 74$

$82zz - 1 = \ldots 81 \ldots a = 82$

$85zz - 1 = \ldots 142884 \ldots a = 85$

$89zz - 1 = \ldots 250000 \ldots a = 89$

$97zz - 1 = .31404816 \ldots a = 97.$

COROLLARIUM.

Hier uit volgt dan, dat wy één van deeze 20 getallen kunnen verkiezen voor het gegeeven getal, van welk de *producten*, twee aan twee genomen, zouden kunnen afgetrokken worden, zodanig dat 'er drie *rationaale Quadraaten* zouden overblyven, en dan is het nog een konſtig Voorſtel; waarom wy hetzelve hier zullen opgeeven, en eene volkomene Oplosſing daar by doen.

VOORBEELD. *Vind drie getallen zodanig, dat wanneer men het* product *van twee vervolgens van* 41 *aftrekt, de overblyſſelen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel

Stel voor de getallen ax, $\frac{1-ayy}{x}$, $\frac{1-azz}{x}$.

Deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en de *producten* van het gegeeven getal a afgetrokken, dan zyn de overblyfselen

$aayy$

$aazz$

$\frac{axx+ayy+azz-1-aayyzz}{xx}$ het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Neem hier in $ayy+azz-aayyzz=0$

$$\frac{a}{yy+zz-ayyzz=0}$$

Derhalven $yy=\frac{zz}{azz-1}$.

Nu moet $axx-1$ ook nog een *rationaal Quadraat* zyn; en neemende dan $a=41$, zo blykt dat

$\left.\begin{array}{l}41zz-1\\ \text{en } 41xx-1\end{array}\right\}$ *rationaale Quadraaten* moeten zyn.

Om deeze zodanig te bepaalen, zullen wy ons van den regel van FERMAT bedienen.

$$\text{Stel } 41zz-1=\overline{6z+b}|^2=36zz+12bz+bb$$

$$12bz+bb=5zz-1$$

$$\text{Neem } z=2b+c, \text{ kt. } 20bb+20bc+5cc-1=25bb+12bc$$

$$8bc+5cc=5bb+1$$

$$b=2c+d, \text{ kt. } 20cc+20cd+5dd+1=21cc+8cd$$

$$12cd+5dd=cc-1$$

$$c=12d+e, \text{ kt. } 144dd+24de+ee-1=149dd+12de$$

$$12de+ee=5dd+1$$

Nee-

Neemende hier in $d = 0$, zo is $e = 1$; vervolgens $c = 1$, $b = 2$, en $z = 5$. Derhalven $zz = 25$, en $41zz - 1 = 1024$ een *rationaal Quadraat.*

Wanneer wy verder met de gevondene Vergelyking $12de + ee = 5dd + 1$ op de zelfde wyze voortgaan, tot dat men weder tot de eerste Vergelyking komt, zal men de *tweede* waarde verkrygen.

Neem $d = 2e + f$, k^t. $20ee + 20ef + 5ff + 1 = 25ee + 12ef$

$$8ef + 5ff = 5ee - 1$$

$e = 2f + g$, k^t. $20ff + 20fg + 5gg - 1 = 21ff + 8fg$

$$12fg + 5gg = ff + 1$$

$f = 12g + h$, k^t. $144gg + 24gh + hh + 1 = 149gg + 12gh$

$$12gh + hh = 5gg - 1$$

Deeze is de zelfde Vergelyking, als die wy in het eerst ontmoet hebben; derhalven, wanneer in deeze voor g en h zulke getallen genomen worden, als voor z en b gevonden zyn, zullen hier mede de beide leden der Vergelyking aan malkanderen gelyk zyn. Nu was boven gevonden, $b = 2$, $z = 5$; daarom neemende $g = 5$, en $h = 2$, zo is daar mede deeze laatste Vergelyking gelyk. Dienvolgens vindt men $f = 62$, $e = 129$, $d = 320$, $c = 3969$, $b = 8258$, $z = 20485$.

Als men een voldoende getal voor z gevonden heeft, zo kan men, volgens de gemeene wyze, ook zo veel antwoorden vinden, als men begeert.

Want, stellende $z = 5 + p$, zo is $zz = 25 + 10p + pp$.

Derhalven (*Quadr.*

$41zz - 1 = 1024 + 410p + 41pp = 1024 \pm 64pq + ppqq$ een

$$\pm 64pq + 410p = ppqq - 41pp$$

p ———————————————

$$\pm 64q + 410 = pqq - 41p$$

$$p = \frac{\pm 64q + 410}{qq - 41}.$$

Neemende $q = 7$, zo is $p = -1\frac{3}{4}$, en dus $z = \frac{1}{4}$.

Hier door is blykbaar, dat men, om $azz - 1$, of $axx - 1$ *rationaal* te hebben, zo veel getallen kan vinden, als men begeert; doch dezelve zullen nooit voldoende zyn; want, men zal altoos ondervinden, dat twee van deeze gestelde getallen *negatif* zullen zyn. By voorbeeld, ayy en azz moeten beide minder dan de eenheid zyn; nu is $yy = \frac{zz}{azz - 1}$, en dus ook $ayy = \frac{azz}{azz - 1}$ meer dan de eenheid: by gevolg zyn deeze beide gestelde waarden $\frac{1 - ayy}{x}$ en $\frac{1 - azz}{x}$ *negatif*.

Want, neemende $a = 41$, $z = 5$; zo is $y = \frac{1}{32}$, en

$$\left.\begin{aligned} ax &= 205 \\ \frac{1 - ayy}{x} &= \frac{-1}{1024 \cdot 5} \\ \frac{1 - azz}{x} &= \frac{-1024}{5} \end{aligned}\right\}$$ de getallen, waar van de twee laatsten *negatif* zyn.

S C H O L I U M.

Het Voorstel zal gemakkelyk op te lossen zyn, indien voor het gegeeven getal een *Quadraat* (aa) genomen wordt; want, wy hebben dan niet anders te bepaalen, als dat $aazz - 1$, en $aaxx - 1$ *ration. Quadraaten* moeten zyn. Of, stellende voor de getallen x, $\frac{aa - yy}{x}$, en $\frac{aa - zz}{x}$, en deeze twee aan twee te

saa-

ſaamen vermenigvuldigd, en de *producten* van *aa* afgetrokken zynde, dan zyn de overblyffelen

yy

zz

$$\frac{aaxx + aayy + aazz - yyzz - a^4}{xx} \text{ ſtel } = \frac{aaxx - 2abx + bb}{xx}$$

$$2abx = \overline{aa - yy} \times \overline{aa - zz + bb}$$

$$x = \frac{\overline{aa - yy} \times \overline{aa - zz + bb}}{2ab}$$

Laat gegeeven zyn $aa = 9$; dan is $a = 3$.

Neemende $y = 1$, $z = 2$, $b = 4$, zo is $x = \frac{7}{3}$. Derhalven zyn de getallen $\frac{7}{3}$, $\frac{24}{3}$, en $\frac{15}{7}$.

IV. AANMERKING.

Ik zie geen mogelykheid om vier zodanige getallen te vinden, welker *product* afgetrokken zynde van een gegeeven getal, en zelfs van een gegeeven *Quadraat*, dat de overblyſſelen *rationaale Quadraaten* zyn; waarom ons dit Voorſtel ontvalt om te ontbinden; doch om dit gebrek eenigzins te vergoeden, zullen wy hier nog eenige kunſtige Voorſtellen byvoegen, welke door de reeds gevondene eigenſchappen gemakkelyk kunnen opgeloſt worden, en zonder welke eigenſchappen men dezelve bezwaarlyk zou kunnen beantwoorden.

I. SCHOLIUM.

1. *Vind vier getallen, zodanig dat haar ſom by het vermenigvuldigde van twee en twee, vervolgens genomen, vergaard zynde, de uitkomſten zes* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen, volgens de I. *Aanmerking*, p, $3p$, $8p$, en $120p$; indien dan de som van deeze getallen pp was, zouden de Conditien van het Voorstel voldaan zyn; dat is, dat 'er telkens *rationaale Quadraaten* zouden komen, als men de *producten* van deeze getallen, twee aan twee genomen, by de som pp vergaart.

Derhalven moet deeze gestelde som pp gelyk weezen aan de eigenlyke som der getallen.

Dat is $pp = 132p$; dus $p = 132$;

en de begeerde getallen 132, 396, 1056, en 15840; enz.

2. *Vind vier getallen zodanig, dat wanneer men het vermenigvuldigde van de drie kleinsten, tot de* producten *van twee en twee getallen, vervolgens genomen, vergaart, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen p, $3p$, $8p$, en $120p$, en laat haar vermenigvuldigde pp zyn. Wanneer men dan dit *product* tot de *producten* der getallen, twee aan twee genomen vergaart, zullen 'er telkens *rationaale Quadraaten* komen. Derhalven moet maar alleen het aangenomen *product* pp gelyk zyn aan het eigenlyk *product* van de drie kleinste getallen.

Derhalven $pp = 24p^3$, $24p = 1$, of $p = \frac{1}{24}$;

en dus de getallen $\frac{1}{24}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{8}{24}$, en $\frac{120}{24}$.

COROLLARIUM.

Op de zelfde wyze kan ook de Oplossing ingericht worden, wanneer de som der getallen, of het vermenigvuldigde van drie derzelven, van de *producten* van twee en twee vervolgens moet afgetrokken worden, zo dat 'er, in die beide gevallen, telkens *rationaale Quadraaten* voortkomen. Men moet dan van de getallen, in de III. *Aanmerking* gevonden, gebruik maaken.

I. VOOR-

I. Voorbeeld. *Om vier getallen te vinden, zodanig, dat wanneer men baar ſom van hunne* producten, *twee aan twee genomen, aftrekt, de overblyſſelen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de getallen $\frac{2}{7}p$, $\frac{148}{7}p$, $\frac{130}{7}p$, en $\frac{170}{7}p$.

Indien nu de ſom van deeze getallen $4pp$ was, zou het *product* van twee derzelven, agtervolgens genomen, en van pp afgetrokken zynde, telkens *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Dus blyft nog maar alleen overig, dat deeze aangenomene ſom $4pp$ gelyk zy aan de eigenlyke ſom der getallen.

$$\text{Daarom } \tfrac{450}{7}p = 4pp$$

$$28p = 450;\ \text{dus } p = \tfrac{225}{14};$$

en de begeerde getallen $\frac{450}{98}$, $\frac{33300}{98}$, $\frac{29250}{98}$, $\frac{38250}{98}$.

II. Voorbeeld. *Om vier getallen te vinden, zodanig, dat indien men bet* product *van de drie eerſten, van de* producten *derzelven, twee aan twee genomen, aftrekt, de overblyſſelen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel wederom voor de getallen $\frac{2}{7}p$, $\frac{148}{7}p$, $\frac{130}{7}p$, en $\frac{170}{7}p$.

Indien dan het vermenigvuldigde der drie eerſte getallen $4pp$ was, zou dit *product*, van de *producten*, twee aan twee genomen, afgetrokken zynde, *rationaale Quadraaten* geeven. Dus moet maar alleen dit aangenomen *product* pp gelyk zyn aan het eigenlyke *product*. Derhalven

$$4pp = \tfrac{2}{7}p \times \tfrac{148}{7}p \times \tfrac{130}{7}p;\ \text{dat is } 4pp = \tfrac{38480}{343}p^3;$$

$$\text{of } p = \tfrac{343}{9620};$$

en de getallen $\frac{98}{9620}$, $\frac{7252}{9620}$, $\frac{6370}{9620}$, $\frac{8330}{9620}$; enz.

V. AANMERKING.

Dewyl wy in het ontbinden van dit opgegeeven Voorstel bevonden hebben, dat van de vier begeerde getallen altoos drie zodanig kunnen gesteld worden, dat ze aan de Conditien van het Voorstel voldoen, en geene verdere bepaaling vereisschen, zo zien wy klaar, dat deeze getallen op nieuw nog eene andere Conditie kunnen ondergaan, naamelyk; dat dezelve in eene *Arithmetische Progressie* zyn. Hier van zullen wy spreeken in dit

II. SCHOLIUM.

Als wy de drie begeerde getallen in eene *Arithmetische Progressie* stellen, kunnen wy neemen

1. die van LUDOLF,

$$\begin{array}{r|r|r} x & x & x \\ x+2y & 4x \pm 4y & 9x \pm 6y. \\ 4x+4y & 9x \pm 6y & 16x \pm 8y. \end{array}$$

Deeze twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en yy daar by vergaard, komen telkens *rationaale Quadraaten*; en om dat daarenboven de getallen in eene *Arithmetische Progressie* moeten zyn, zo is volgens

de 1^{ste} *Stelling* geen Progressie te bekomen.

de 2^{de} *Stelling* $10x \pm 6y = 8x \pm 8y$; dus $x = y$, en (de *Prog.* $y, 8y, 15y$.

de 3^{de} *Stelling* $17x \pm 8y = 8x \pm 12y$; dus $x = 4y$, en (de *Prog.* $4y, 30y, 56y$.

2. Kunnen wy, volgens de III. *Aanmerking*, ook deeze getallen neemen,

† op het vergaaren x, $\dfrac{xxyy-a}{x}$, $\dfrac{xxyy+2xxy+xx-a}{x}$.

Dee-

Deeze getallen zyn dan van zodanige eigenſchap, dat zo men dezelve twee aan twee te ſaamen vermenigvuldigt, en by elk der *producten* een gegeeven getal a vergaart, de uitkomſten *rationaale Quadraaten* zyn; en om dat de getallen in eene *Aritbmetiſche Progresſie* moeten ſtaan, daarom

$$x + \frac{xxyy + 2xxy + xx - a}{x} = \frac{2xxyy - 2a}{x}$$

$$xx + xxyy + 2xxy + xx - a = 2xxyy - 2a$$

$$xxyy - 2xxy - 2xx = a$$

Neemende $x = 1$, $y = 3$; zo is $a = 1$; en de getallen zyn 1, 8, 15.

‡ Op het aftrekken, ſtel

$$x, \frac{xxyy + a}{x}, \frac{xxyy + 2xxy + xx + a}{x}.$$

Dan hebben deeze getallen de begeerde eigenſchap; dus moeten dezelve ook tot eene *Aritbmetiſche Progresſie* gebragt worden.

Derhalven

$$x + \frac{xxyy + 2xxy + xx + a}{x} = \frac{2xxyy + 2a}{x}$$

$$xx + xxyy + 2xxy + xx + a = 2xxyy + 2a$$

$$2xxy + 2xx - xxyy = a.$$

Neemende $x = 2$, $y = 1$; zo is $a = 12$; en de getallen zyn 2, 8, 14; welke getallen in eene *Aritbmetiſche Progresſie* ſtaan, en van zodanige natuur zyn, dat als men van de *producten* derzelven, twee aan twee genomen, 12 aftrekt, de overblyfſelen *rationaale Quadraaten* zyn.

I. COROLLARIUM.

Hier door kunnen wy wederom andere kunstige Vraagen formeeren.

1. *Om drie getallen in eene* Arithmetische Progressie *te vinden, zodanig, indien men de som der getallen, tot het vermenigvuldigde derzelven, twee aan twee genomen, vergaart, dat 'er telkens* rationaale Quadraaten *komen.*

Stellende voor de getallen y, $8y$, $15y$. Indien dan derzelver som yy was, zou deeze som, tot de *producten* der getallen, twee aan twee genomen, vergaard zynde, *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Laat dus deeze aangenomene som yy aan de eigenlyke som der getallen gelyk gesteld worden, zo is alles naar den eisch. Derhalven $yy = 24\,y$; dat is $y = 24$, en de begeerde getallen 24, 192, 360.

2. *Om drie getallen in eene* Arithmetische Progressie *te vinden, zodanig, indien men de som derzelven van hunne* producten, *twee aan twee genomen, aftrekt, de overblyfselen* ration. Quadraaten *zyn.*

Stellende voor de getallen $2y$, $8y$, en $14y$. Indien dan derzelver som $12yy$ was, zou deeze som, van de *producten* der getallen, twee aan twee genomen, afgetrokken zynde, *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Laat dus deeze aangenomene som $12yy$, gelyk gesteld worden aan de eigenlyke som, zo is alles naar den eisch geschikt. Derhalven

$2yy = 24y$, dus $y = 12$; en de begeerde getallen 4, (16, 28; enz.

3. *Om drie getallen in eene* Arithmetische Progressie *te vinden, zodanig, indien men het* product *derzelven tot hunne* producten, *twee aan twee genomen, vergaart, dat 'er telkens* rationaale Quadraaten *komen.*

Stel-

Stellende voor de getallen y, $8y$, $15y$. Indien dan het *product* derzelver yy was, zou dit *product*, tot de *producten* der getallen, twee aan twee genomen, vergaard zynde, *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Laat dus dit aangenomen *product* yy aan het eigenlyk *product* der getallen gelyk gesteld worden, dan is

$$yy = 120y^3;\ \text{of } 120y = 1,\ \text{en dus } y = \tfrac{1}{120};$$

derhalven zyn de begeerde getallen $\frac{1}{120}$, $\frac{8}{120}$. $\frac{15}{120}$; enz.

4. *Om drie getallen in eene* Arithmetische Progressie *te vinden, zodanig, indien men het* product *derzelve, van hunne* producten, *twee aan twee genomen, aftrekt, de overblyfselen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stellende voor de getallen $2y$, $8y$, $14y$. Indien dan het *product* van deeze getallen $12yy$ was, zou dit *product*, van de *producten* der getallen, twee aan twee genomen, afgetrokken zynde, *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Laat dus dit aangenomen *product* $12yy$ gelyk aan het eigenlyke *product* der getallen gesteld worden, zo hebben wy

$$12yy = 224y^3,\ \text{dus } y = \tfrac{3}{56};\ \text{en de begeerde getallen } \tfrac{3}{28}, \tfrac{12}{28}, \tfrac{21}{28};\ \text{enz.}$$

II. COROLLARIUM.

Wanneer wy de drie begeerde getallen van eenen *rationaalen* regthoekigen Driehoek ontleenen, kunnen wy wederom andere en tevens zeer konstige Vraagen formeeren; en dus wordt vereischt, dat wy die vooraf zodanig stellen, dat de *Quadraaten* van twee derzelven gelyk zyn aan het *Quadraat* van het derde getal, ten einde 'er de eigenschap van eenen regthoekigen Driehoek in gevonden worde.

Volgens de III. *Aanmerking* hebben wy, by stelling, drie zulke getallen, welke twee aan twee te saamen vermenigvuldigd, en by de *producten* telkens *a* vergaard zynde, de uitkomsten *rationaale Quadraaten* zyn. Waarom wy dezelven voor de zyden van eenen regthoekigen Driehoek zullen stellen.

Naamelyk x, $\dfrac{xxyy - 2xxy + xx - a}{x}$ voor de regthoekszyden, en $\dfrac{xxyy - a}{x}$ voor de fchuinfche.

Nu is, volgens de eigenfchap van een regthoekigen Driehoek, het *Quadraat* op de fchuinfche gelyk aan de fom der *Quadraaten* van de twee andere zyden.

Hierom

$$x^4y^4 - 4x^4y^3 + 6x^4yy - 2axxyy - 4x^4y + 4axxy + x^4 - 2axx + aa$$

gedeeld door $xx + xx = \dfrac{x^4y^4 - 2axxyy + aa}{xx}$.

$$- 4x^4y^3 + 6x^4yy - 4x^4y + 4axxy + 2x^4 - 2axx = 0$$

$$2xx \quad 4x^4y^3 - 6x^4yy + 4x^4y - 4axxy - 2x^4 + 2axx = 0$$

$$2xxy^3 - 3xxyy + 2xxy - 2ay - xx + a = 0$$

$$2ay - a = 2xxy^3 - 3xxyy + 2xxy - xx$$

$$a = \frac{xx.\overline{2y^3 - 3yy + 2y - 1}}{2y - 1}.$$

Deeze grootheid dan voor a genomen, en in de geftelde Waarde gebragt, zullen wy voor de zyden van den regthoekigen Driehoek verkrygen

$$\left.\begin{array}{l} x \\ \dfrac{x.\overline{-2yy + 2y}}{2y - 1} \end{array}\right\} \text{de regthoekszyden.}$$

$$\frac{x.\overline{2yy - 2y + 1}}{2y - 1} \text{ de fchuinfche.}$$

Hier

Hier door hebben wy de *proportie* der zyden van den Driehoek gevonden.

Want, neemende $x = 2y - 1$, dan zyn de drie zyden, $\overline{-y+1}.\,2y$, $2y-1$, en $2yy - 2y + 1$. Dienvolgens zal daar door $a = 4y^4 - 8y^3 + 7yy - 4y + 1$ zyn.

1. Dewyl nu voor de eene regthoekszyde $\overline{-y+1}.\,2y$, dat is $\overline{1-y}.\,2y$, en voor de andere $2y - 1$ gevonden is, zo blykt, dat aan den eenen kant y minder moet zyn dan 1, en aan den anderen kan $2y$ meer dan 1; daarenboven, dat $a = 4y^4 - 8y^3 + 7yy - 4y + 1$ is; derhalven $y = 1$ zynde, zal $a = 0$ zyn, en y minder dan 1 zynde, zal x altoos *negatif* worden.

2. Hier uit is dan openbaar, dat dit Voorstel, naar deeze voorwaarde, niet op het vergaaren, en dus maar alleen op de aftrekking van een gegeeven getal van de *producten*, twee aan twee genomen, kan toegepast worden; en dat wy, in dit geval, de zyden van deezen regthoekigen Driehoek nog wel met eene Conditie kunnen vermeerderen, naamelyk: dat dezelve daarenboven in eene *Arithmetische Progressie* zyn.

Want, stellende voor de zyden.

$$\left.\begin{array}{r} -2yy+2y \\ 2y-1 \end{array}\right\}\text{ de beide regthoekszyden.}$$

$$2yy - 2y + 1 \text{ de schuinsche.}$$

Dewyl dan dezelve in eene *Arithmetische Progressie* moeten zyn, zo hebben wy

$4y - 2 = 1$, of $4y = 3$, en $y = \frac{3}{4}$. Deeze Waarde in plaats van y gesteld, zo zyn de zyden van den regthoekigan Driehoek $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$; of in heele getallen 3, 4, 5.

III. CO-

III. COROLLARIUM.

Hier uit kunnen wy nu wederom nieuwe Voorſtellen ſaamenſtellen, die, door de voorgevondene eigenſchappen, wel gemakkelyk te ontbinden, doch op haar zelven in der daad konſtig zyn.

1. *Om eenen regthoekigen Driehoek te vinden, wiens zyden* rationaal *zyn, en in eene* Arithmetiſche Progresſie *ſtaan, zodanig, dat als men de ſom der zyden van hunne* producten, *twee aan twee genomen, aftrekt, de overblyfſelen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stellende voor de zyden van den Driehoek $3p$, $4p$, $5p$, en neemende voor haar ſom $11\,pp$, dan zal deeze ſom van de *producten* der zyden, twee aan twee genomen, afgetrokken zynde, telkens *rationaale Quadraaten* voortbrengen; derhalven blyft nog overig, dat deeze aangenomene ſom $11\,pp$ gelyk genomen worde, aan de eigenlyke ſom der zyden;

dat is $11\,pp = 12p$, dus $p = \frac{12}{11}$.

En de begeerde Driehoek $\frac{36}{11}$, $\frac{48}{11}$, $\frac{60}{11}$.

2. *Om eenen regthoekigen Driehoek te vinden, wiens zyden* rationaal *zyn, en in eene* Arithmetiſche Progresſie *ſtaan, zodanig, dat als men het vermenigvuldigde der zyden van hunne* producten, *twee aan twee genomen, aftrekt, de overblyfſelen* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel wederom voor de zyden van deezen regthoekigen Driehoek $3p$, $4p$, $5p$; en neem voor het vermenigvuldigde derzelven $11\,pp$; dan zal dit *product* der zyden, afgetrokken van de *producten* derzelven, twee aan twee genomen, *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Dus moet maar alleen dit aangenomen *product* $11\,pp$ gelyk zyn aan het eigenlyke *product* der zyden;

dat is $60p^3 = 11\,pp$, dus $p = \frac{11}{60}$; en de zyden van den begeerden Driehoek zyn $\frac{33}{60}$, $\frac{44}{60}$, $\frac{55}{60}$; enz.

LXV. VRAAG.

Deel een *rationaal Quadraat* in vier deelen, zodanig, dat zo men van het eerste deel het tweede, derde, of vierde aftrekt, de overblyffelen telkens *rationaale Quadraaten* zyn.

OPLOSSING.

Stel voor de deelen

$$\left.\begin{array}{l} x \\ x - aa \\ x - bb \\ x - cc \end{array}\right\}$$ indien dan het tweede, derde, of vierde van het eerste deel afgetrokken worden, zullen de overblyffelen *rationaale Quadraaten* zyn.

Daar blyft derhalven nog overig, dat ook de som der deelen $4x - aa - bb - cc$ een *rationaal Quadraat* zy.

Stel $4x - aa - bb - cc = dd$

Dan is $4x = aa + bb + cc + dd$

$$x = \frac{aa + bb + cc + dd}{4}$$

Neemende $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{5}{4}$, en $d = \frac{17}{4}$, zo is $x = 5\frac{1}{16}$; en de deelen

$$\begin{array}{l} x \ldots\ldots = 5\tfrac{1}{16}, \\ x - aa = 5\ , \\ x - bb = 4\tfrac{1}{2}\ , \\ x - cc = 3\tfrac{1}{2}. \end{array}$$

het geheele getal is $18\frac{1}{16}$, of $\frac{289}{16} = \overline{\frac{17}{4}}\,\Big|^2$ een *rationaal Quadraat*; zynde de zelfde getallen die LUDOLF geeft.

LXVI.

LXVI. VRAAG.

Zoek een *Quadraat*, dat men in vier deelen kan deelen, zodanig; dat als men het tweede van het eerste, het derde van het tweede, en het vierde van het derde aftrekt, dat 'er telkens *rationaale Quadraaten* overblyven.

OPLOSSING.

Stel voor de deelen

$$\left.\begin{array}{l} x \\ x - aa \\ x - aa - bb \\ x - aa - bb - cc \end{array}\right\}$$

indien men dan het tweede van het eerste, het derde van het tweede, en het vierde van het derde aftrekt, zullen de overblyffelen *rationaale Quadr.* zyn.

Derhalven blyft nog overig, dat de som der deelen $4x - 3aa - 2bb - cc$ een *rationaal Quadraat* zy.

Stel $4x - 3aa - 2bb - cc = dd$ een *Quadr.*

Dan is $4x = 3aa + 2bb + cc + dd$
4

$$x = \frac{3aa + 2bb + cc + dd}{4}$$

Neemende $a = 8\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 11\frac{1}{2}$; zo is $x = 90\frac{1}{4}$. Dus zyn de deelen.

$x \ldots\ldots\ldots = 90\frac{1}{4}$

$x - aa \ldots\ldots = 18$

$x - aa - bb \ldots = 14$

$x - aa - bb - cc = 10$

het geheele getal is $132\frac{1}{4}$, of $\frac{529}{4} = \overline{\frac{23}{2}}|^2$ een *rationaal Quadraat*; zynde de zelfde getallen die LUDOLF opgeeft.

LXVII.

LXVII. VRAAG.

Daar zyn vier getallen; het eerfte is $4\frac{1}{2}$ minder dan het tweede, en zo veel is mede het tweede minder dan het derde, ook doet het vierde zo veel meer dan het derde, gelyk mede haar fom een *rationaal Quadraat*. Welke zyn die getallen?

OPLOSSING.

Stel voor de getallen x

$$x + 4\tfrac{1}{2}$$
$$x + 9$$
$$x + 13\tfrac{1}{2}$$

Dan is haar fom $4x + 27$ dat een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $= d$, zo hebben wy

$$4x + 27 = dd$$

$$4x = dd - 27$$

4

$$x = \frac{dd - 27}{4}$$

Neemende $d = 6$, zo is $x = 2\frac{1}{4}$; en de getallen zyn $2\frac{1}{4}$, $6\frac{3}{4}$, $11\frac{1}{4}$, $15\frac{3}{4}$; zynde de zelfde getallen welke LUDOLF geeft, waar van de fom 36 een *rationaal Quadraat* is.

LXVIII. VRAAG.

Zoek vier getallen van zodanige eigenfchap, als men haar fom met het eerfte vermenigvuldigt, het *product* een *rationaale Cubic* zy, met het tweede een *rationaal Quadraat*, met het derde een *Pronik*, en met het vierde een *Trigonaal*-getal.

OPLOSSING.

Stel voor de getallen

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{a^3}{x}\\[2ex] \dfrac{bb}{x}\\[2ex] \dfrac{cc+c}{x}\\[2ex] \dfrac{dd+d}{2x}\end{array}\right\}$$

Indien dan de fom der getallen x waare, zou ieder getal, met deeze fom vermenigvuldigd zynde, de begeerde Conditien voldoen.

Derhalven blyft dan maar alleen overig, dat deeze aangenomen fom gelyk zy aan de eigenlyke fom der getallen.

Dat is $\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{bb}{x}+\dfrac{cc+c}{x}+\dfrac{dd+d}{2x}=x$

$$\overline{}\; x$$

$a^3+bb+cc+c+\dfrac{dd+d}{2}=xx$; dit moet nu (een *rationaal Quadraat* zyn.

Stel den Wortel $=b+e$;

Dan is $a^3+bb+cc+c+\dfrac{dd+d}{2}=bb+2be+ee$

$$4be=2a^3+2cc+2c+dd+d-2ee$$

$$b=\frac{2a^3+2cc+2c+dd+d-2ee}{4e}.$$

Neemende $a=2$, $c=3$, $d=9$, en $e=5$; zo is $b=4$; vervolgens $x=9$; en de begeerde getallen $\frac{8}{9}$, $1\frac{7}{9}$, $1\frac{1}{3}$, 5; zynde de zelfde getallen die Ludolf geeft.

LXIX.

LXIX. VRAAG.

Ik heb gevonden vier getallen, zodanig, dat als men haar ſom *cubeert*, en van deezen *Cubic* ieder getal byzonder aftrekt, de overblyffelen *rationaale Cuben* zyn.

Ludolf voegt hier nog by, de getallen zyn $\frac{36928}{206763}$, $\frac{37867}{206763}$, $\frac{3901625}{50243409}$, en $\frac{6517000}{50243409}$, haar ſom is $\frac{70}{123}$; de Proef is ligt, en de weg om de getallen te vinden konſtig.

AANMERKING.

Dit Voorſtel hebben wy algemeen ontbonden, by het II. *Scholium* van het LVII. Voorſtel deezer konſtige Vraagen; daar wy niet alleen vier, maar ook vyf zodanige getallen gevonden hebben, welke aan de voorgeſtelde conditien voldoen; weshalven hetzelve hier voor op pag. 165 kan nagezien worden.

LXX. VRAAG.

Wat zyn het voor vyf getallen, van zodanige natuur, dat zo men haar ſom *quadrateert*, en vervolgens één der getallen by dit *Quadraat* vergaart, of van hetzelve aftrekt, de ſommen en overblyffelen telkens *rationaale Quadraaten* zyn.

I. LEMMA.

1. Indien men twee *rationaale Quadraaten* naar welgevallen neemt, zo zal het dubbelde *product* derzelver vergaard by de ſom der *Quadraaten* van deeze getallen, of daar van afgetrokken zynde, telkens *rationaale Quadraaten* voortbrengen.

Bewys.

Laat x en y twee *rationaale* getallen zyn, zo is de ſom van haare *Quadraaten* . . . . $xx+yy$
het dubbeld *product* derzelven is . . $2xy$

deeze vergaard zo heeft men $xx+2xy+yy$ } zynde beide *ration.*
en afgetrokken zynde, komt 'er $xx-2xy+yy$ } *Quadr.*

Dat te bewyzen was.

OPLOSSING.

2. Stellende nu voor de som der begeerde getallen

$$\sqrt{xx+yy}=s$$

$$\overline{}\ \sqrt{}$$

zo is . . . $xx+yy=ss$

$$xx=ss-yy$$ het geen een *rationaal Quadraat* moet zyn.

Stel den Wortel $=s-\frac{py}{q}$, of $\frac{py}{q}-s$;

Dan is $ss-yy=ss-\frac{2psy}{q}+\frac{ppyy}{qq}$

$$\frac{ppyy}{qq}+yy=\frac{2psy}{q}$$

$$ppyy+qqyy=2pqsy$$

y ———

$$ppy+qqy=2pqs$$

$$y=\frac{2pqs}{pp+qq}.$$

Neemende nu p en q geduurig anders en anders, zo zullen x en y ook geduurig anders en anders zyn, zo dat nogthans $xx+yy=ss$ het *Quadraat* van derzelver som onveranderd zal blyven, en dus zal $2xy$ mede anders en anders komen.

Nee-

Neemende $q = 1$, $p = 3$, zo is $y = \frac{6}{10}s$, en $x = \frac{8}{10}s$.

$$\begin{array}{lll} p = 5 \ldots & y = \frac{10}{26}s \ldots & x = \frac{24}{26}s. \\ p = 7 \ldots & y = \frac{14}{50}s \ldots & x = \frac{48}{50}s. \\ p = 8 \ldots & y = \frac{16}{65}s \ldots & x = \frac{63}{65}s. \\ p = 18 \ldots & y = \frac{36}{325}s \ldots & x = \frac{323}{325}s. \end{array}$$

Neemende nu de ſom der getallen, of $s = 325$;

$$\begin{array}{ll} \text{zo is } y = 195, & \text{en } x = 360 \\ y = 125 \ldots & x = 300 \\ y = 91 \ldots & x = 312 \\ y = 80 \ldots & x = 315 \\ y = 36 \ldots & x = 323 \end{array}$$

Hier door is $xx + yy$ altoos even veel, en bepaaldelyk $= ss$; zynde in dit geval $= 105625$, om dat $s = 325$ genomen is.

Het dubbelde *product*, of $2xy$, zal nu geduurig veranderen, en hetzelve zal agtervolgens zyn, 101400, 75000, 56784, 50400, en 23256; deeze getallen by $xx + yy = 105625$ vergaard, en ook daar van afgetrokken zynde, zullen, volgens het *Lemma*, altoos *rationaale Quadraaten* voortbrengen.

3. Stellende nu voor de begeerde getallen

$$\left.\begin{array}{r} 101400\,zz \\ 75000\,zz \\ 56784\,zz \\ 50400\,zz \\ 23256\,zz \end{array}\right\}$$

wanneer dan de ſom deezer getallen $325z$, of wel derzelver *Quadraat* $105625zz$ waare, zouden deeze getallen, ieder byzonder by $105625zz$ vergaard, of daar van afgetrokken zynde, *rationaale Quadraaten* voortbrengen.

Derhalven blyft maar alleen nog overig, dat deeze aangenomen ſom der getallen $325z$ gelyk zy aan de eigentlyke ſom.

Dat is $306840zz = 325z$

$$5z \quad \overline{}$$

$$61368z = 65$$

$$z = \frac{65}{61368}\text{; derh. } zz = \frac{4225}{3766031424}.$$

Deeze waarde voor zz in de getallen geplaatſt, zo heeft men

$$\left.\begin{array}{r} 101400zz = 428415000 \\ 75000zz = 316875000 \\ 56784zz = 239912400 \\ 50400zz = 212940000 \\ 23256zz = 9825600 \end{array}\right\}\text{ieder gedeeld door } 3766031424$$

voor de begeerde getallen.

COROLLARIUM.

Hier uit blykt dan genoegzaam, dat deeze Oploſſing algemeen is, en op zo veel getallen kan toegepaſt worden, als men begeert; dewyl men, om andere getallen te hebben, voor p en q ſlegts andere getallen moet neemen.

I. AANMERKING.

Dit Voorſtel wordt woordelyk gevonden by A. DE GRAAF, *Inleiding tot de Wiskunſt* p. 323. Voorſtel 315, en by P. VENEMA, *Algebra* p. 158. Voorſt. 81, die het mogelyk beide uit LUDOLF genomen hebben, alleenlyk met die verandering, dat zy ſlegts vier zodanige getallen begeeren, zonder het een of ander daar by te doen. Dewyl nu dit Voorſtel, in alle deszelfs veranderingen beſchouwd zynde, een van de allerkonſtigſte Vraagen is, welke LUDOLF opgeeft, zullen wy alle die veranderingen hier nog byvoegen, en dezelve, om mede een weinig verder te gaan, tot zes getallen bepaalen, waar door wy dan vier verſchillende Voorſtellen op te loſſen hebben.

I. VOOR-

I. VOORSTEL.

Om zes getallen te vinden, zodanig, dat zo men ieder getal byzonder tot het Quadraat *van haar som vergaart, of ook daar van aftrekt, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de som der getallen $\sqrt{xx+yy}=s$

$$\text{zo is } xx+yy=ss$$

$$xx=ss-yy$$

Neemende voor den Wortel $x=s-\frac{py}{q}$, of $\frac{py}{q}-s$;

zo vindt men $y=\frac{2pqs}{pp+qq}$.

Neemende de som der getallen $s=325$, en vervolgens

$$
\begin{array}{llll}
q=1, \text{ en } p=3, & \text{zo is } x=260, & y=195. \\
p=5 \ldots\ldots & x=300, & y=125. \\
p=7 \ldots\ldots & x=312, & y=91. \\
p=8 \ldots\ldots & x=315, & y=80. \\
p=18 \ldots\ldots & x=323, & y=36. \\
q=4, \; p=7 \ldots\ldots & x=165, & y=280.
\end{array}
$$

Derhalven is $xx+yy$ geduurig $=ss=105625$, en vervolgens

$$
\left.
\begin{array}{l}
2xy=101400 \\
\quad\;\; =75000 \\
\quad\;\; =56784 \\
\quad\;\; =50400 \\
\quad\;\; =23256 \\
\quad\;\; =92400
\end{array}
\right\}
$$

deeze vergaard by $xx+yy=105625$, en ook daar van afgetrokken, zullen telkens *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Hierom stellende voor de begeerde getallen

$$\left.\begin{array}{r} 101400\,zz \\ 75000\,zz \\ 56784\,zz \\ 50400\,zz \\ 23256\,zz \\ 92400\,zz \end{array}\right\}$$

en laat de fom derzelver $325z$, en dus haar *Quadraat* $105625\,zz$ zyn; wanneer men dan ieder getal byzonder by het *Quadraat* der fom vergaart, of daar van aftrekt, zullen de uitkomften *rationaale Quadraaten* zyn.

Derhalven moet dan maar alleen deeze aangenomen fom der getallen $325z$, gelyk zyn aan de eigentlyke fom, dat is

$$399240\,zz = 325\,z;\ \text{derhalven } z = \frac{65}{79848},\ \text{en } zz = \frac{4225}{6375703104}.$$

Dienvolgens zyn de begeerde getallen

$$\left.\begin{array}{r} 101400\,zz = 428415000 \\ 75000\,zz = 316875000 \\ 56784\,zz = 239912400 \\ 50400\,zz = 212940000 \\ 23256\,zz = 98256600 \\ 92400\,zz = 390390000 \end{array}\right\}\ \text{ieder gedeeld door } 6375703104.$$

II. VOORSTEL.

Om zes getallen te vinden, zodanig, dat zo men het Quadraat *van haar fom by ieder getal byzonder vergaart, of ook daar van aftrekt, de uitkomften* rationaale Quadraaten *zyn.*

Stel voor de fom der getallen $\sqrt{2xy} = s$

$$\text{zo is } 2xy = ss;\ \text{dus } y = \frac{ss}{2x}.$$

Hier door zal het *Quadraat* van de fom der getallen ss geduurig het zelfde kunnen blyven, en de getallen zelve, waar voor wy $xx + yy$ ftellen, geduurig veranderen, zodanig, dat als het *Quadraat* van deeze fom $2xy$ by ieder getal, dat is $xx + yy$, vergaard, en ook

ook daar van afgetrokken wordt, de uitkomſten *rationaale Quadraaten* zyn.

Neemende $x = 2$, zo is $y = \frac{1}{4}ss$.

$$\begin{aligned} x &= 3 \ldots\ldots y = \tfrac{1}{6}ss. \\ x &= 4 \ldots\ldots y = \tfrac{1}{8}ss. \\ x &= 6 \ldots\ldots y = \tfrac{1}{12}ss. \\ x &= 9 \ldots\ldots y = \tfrac{1}{18}ss. \\ x &= 72 \ldots\ldots y = \tfrac{1}{144}ss. \end{aligned}$$

Neemende $s = 12$, zo is $ss = 144$, en dienvolgens

$$\left.\begin{array}{l} x = 2,\ y = 36 \\ x = 3,\ y = 24 \\ x = 4,\ y = 18 \\ x = 6,\ y = 12 \\ x = 9,\ y = 8 \\ x = 72,\ y = 1 \end{array}\right\}$$

Hierom zal $2xy$, of het *Quadraat* van de ſom der getallen geduurig het zelfde blyven, en bepaaldelyk 144 zyn. Vervolgens zullen de getallen zelve, dat is $xx + yy$ geduurig veranderen. Want dit naar vervolg genomen, zo is

$xx + yy = 1300$, 585, 340, 180, 145, en 5185.

Stel dan voor de begeerde getallen

$$\left.\begin{array}{r} 1300zz \\ 585zz \\ 340zz \\ 180zz \\ 145zz \\ 5185zz \end{array}\right\}$$

Indien nu de ſom van deeze getallen $12z$, of wel het *Quadraat* derzelve $144zz$ waare, zou het *Quadraat* van deeze ſom, dat is $144zz$, by ieder getal byzonder vergaard, en ook daar van afgetrokken zynde, *rationaale Quadraaten* voortbrengen.

Hierom moet deeze aangenomen ſom $12z$ gelyk zyn aan de eigentlyke ſom der getallen.

Derhalven $7735zz = 12z$; dat is $z = \frac{12}{7735}$, en by gevolg $zz = \frac{144}{59830225}$.

Deeze waarde voor zz in de gegeevene getallen geplaatſt, zo hebben wy voor de begeerde getallen.

$$\left.\begin{array}{r} 1300zz = 187200 \\ 585zz = 84240 \\ 340zz = 49860 \\ 180zz = 25920 \\ 145zz = 20880 \\ 5185zz = 746640 \end{array}\right\}\text{ ieder gedeeld door } 5983022 5.$$

III. VOORSTEL.

Om zes getallen te vinden, zodanig, dat zo men de som derzelve by het Quadraat *van ieder getal byzonder vergaart, en ook daar van aftrekt, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Dit is een der allerkonstigste Vraagen, die my ooit wegens deeze stoffe zyn voorgekomen; en om dezelve op eene klaare en duidelyke wyze op te lossen, moeten wy voor af verscheide andere zaaken verklaaren.

II. LEMMA.

Alle regthoekige Drieboeken bebben deeze eigenschap; naamelyk, dat zo men den vierdubbelden Inhoud derzelven by het Quadraat *der schuinse zyde vergaart, of ook daar van aftrekt, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

Bewys.

Dit *Lemma* komt met het eerste in alles overeen. Want laat de regthoekszyden x en y zyn; dan is het *Quadraat* op de schuinsche $= xx + yy$

de vierdubbelde Inhoud $= 2xy$

$$\begin{array}{l} \text{———— ———— ———— vergaard en afgetr.,} \\ \text{komt } xx + 2xy + yy = \overline{x+y}|^2 \\ \text{en } xx - 2xy + yy = \overline{x-y}|^2 \end{array}\left.\right\}\text{ ration. Quadr.}$$

Doch

Doch om ons oogmerk nog klaarder te doen zien, zullen wy den regthoekigen Driehoek *rationaal* ſtellen; en dan is het aldus.

Het *Quadraat* op de ſchuinſche $= x^4 + 2xxyy + y^4$
Den vierdubbelden Inhoud . . $= \ldots 4x^3y - 4xy^3$

verg. en afg.

komt $x^4 + 4x^3y + 2xxyy - 4xy^3 + y^4$
en $x^4 - 4x^3y + 2xxyy + 4xy^3 + y^4$

zynde beide *rationaale Quadraaten*, welker Wortelen zyn

$$xx + 2xy - yy$$
$$-xx + 2xy + yy$$

zynde de halve ſom derzelven $2xy$, en het halve verſchil $xx - yy$, overeenkomende met de zyden van den regthoekigen Driehoek.

COROLLARIUM.

Uit dit *Lemma* ziet men nu, hoe gemakkelyk wy drie *rationaale Quadraaten* kunnen vinden, die in eene *Arithmetiſche Progresſie* ſtaan. Want

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 4x^3y + 2xxyy + 4xy^3 + y^4 \\ x^4 \ldots\ldots + 2xxyy \ldots\ldots + y^4 \\ x^4 + 4x^3y + 2xxyy - 4xy^3 + y^4 \end{array}\right\}$$

zyn drie zulke *Quadraaten*, welke in eene *Arithmetiſche Progresſie* ſtaan, waar van het gemeen verſchil $4x^3y - 4xy^3$ is.

En deeze zyn juiſt die geene, welke wy tot de oplosſing van het geſtelde Voorſtel noodig hebben.

II. COROLLARIUM.

Hier uit volgt dan, dat wy voor af noodig hebben, zes *rationaale* regthoekige Driehoeken te vinden, welke een gelyken Inhoud hebben, dat is, dat geduurig $4x^3y - 4xy^3$, zynde viermaal den Inhoud des Driehoeks, even veel bedraagt, waar door dan de ſchuinſche zyde $xx + yy$, en by gevolg ook deszelfs *Quadraat* $x^4 + 2xxyy + y^4$ geduurig zal veranderen, waar uit de begeerde getallen kunnen ontſtaan; en ſtellende, dat de vierdubbelde Inhoud de ſom der getallen uitdrukt, dan zal moeten volgen, dat wanneer deeze ſom $4x^3y - 4xy^3$ by het *Quadraat* der ſchuinſche $x^4 + 2xxyy + y^4$, dat is, by het *Quadraat* van ieder getal, vergaard, en ook daar van afgetrokken wordt, de uitkomſten *rationaale Quadraaten* zullen zyn.

III. COROLLARIUM.

Hier uit blykt dan nu, dat wy zes *rationaale* regthoekige Driehoeken moeten vinden, welke een gelyke Inhoud hebben; het geen, myns weetens, nooit van iemand gedaan is.

A. DE GRAAF (*Inleiding tot de Wiskunſt* pag. 327. Voorſt. 319) toont aan, hoe men drie zodanige regthoekige Driehoeken zal vinden, waar van de Inhoud gelyk is; en wel op deeze wyze.

Laat de drie begeerde Driehoeken zyn

$$\begin{array}{l|c|c|c} \text{regthoeks z.} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} xx - yy \\ 2xy \end{array} & \begin{array}{c} xx - zz \\ 2xz \end{array} & \begin{array}{c} qq - xx \\ 2xq \end{array} \\ \text{ſchuinſche} & xx + yy & xx + zz & qq + xx \end{array}$$

Dan zyn de Driehoeken *rationaal;* dus blyft maar alleen overig, dat haare Inhouden aan elkander gelyk zyn.

Hierom $2x^3y - 2xy^3 = 2x^3z - 2xz^3 = 2xq^3 - 2x^3q$.

Stellende dan $2x^3y - 2xy^3 = 2x^3z - 2xz^3$

$$2x \overline{}$$

$$xxy - y^3 = xxz - z^3$$

$$xxy - xxz = y^3 - z^3$$

$$y - z \overline{}$$

$$xx = yy + yz + zz.$$

We-

Wederom $2x^3y - 2xy^3 = 2xq^3 - 2x^3q$

$$2x \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$xxy - y^3 = q^3 - xxq$$

$$xxy + xxq = q^3 + y^3$$

$$y+q \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$xx = qq - qy + yy = yy + yz + zz$$

$$yz + zz = qq - qy$$

$$yz + qy = qq - zz$$

$$z+q \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$y = q - z \text{ of } q = y + z.$$

Derhalven moet een der waarden, die gelyk aan xx zyn, nog tot een *rationaal Quadraat* gemaakt worden, op dat x mede *rationaal* zy.

Stellende dan $x = y - \frac{az}{b}$;

zo is $xx = yy + yz + zz = yy - \frac{2ayz}{b} + \frac{aazz}{bb}$

$$\frac{2ayz}{b} + yz = \frac{aazz}{bb} - zz$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, bb$$

$$2abyz + bbyz = aazz - bbzz$$

$$z \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$2aby + bby = aaz - bbz.$$

Neemende $y = aa - bb$, zo is $z = 2ab + bb$; vervolgens $y - z = q = aa + 2ab$, en $x = aa + ab + bb$.

Neemende $a = 2$, $b = 1$; zo is $x = 7$, $y = 3$, $z = 5$, $q = 8$, en derhalven de begeerde Driehoeken

regt-

regthoeks z.	40	24	15
	42	70	112
ſchuinſche	58	74	113

AANMERKING.

Ik zie geen middel, om meer *rationaale* regthoekige Driehoeken van gelyken Inhoud te vinden; nogthans zullen wy, om tot het begeerde oogmerk te geraaken, een anderen weg inſlaan, en alvoorens oploſſen het volgende

VOORBEELD.

Een regthoekige Driehoek rationaal *gegeeven zynde, een anderen te vinden, die mede* rationaal, *en van gelyken Inhoud is.*

Laat m, n de regthoekszyden, en a de ſchuinſche van een *rationaalen* regthoekigen Driehoek zyn, welks Inhoud $\frac{1}{2}mn$ is; dan zullen wy een anderen *rationaalen* regthoekigen Driehoek moeten vinden, waar van wy de ſchuinſche zyde $x+a$ zullen noemen, en dan moet deszelfs Inhoud mede $\frac{1}{2}mn$ zyn.

Nu zullen 'er, volgens het tweede *Lemma*; als men het viervouwd van den Inhoud des Driehoeks by het *Quadraat* op de ſchuinſche vergaart, of daar van aftrekt, niet alleen *rationaale Quadraaten* komen; maar de Wortelen zullen ook zodanig zyn, dat de halve ſom derzelven de eene, en het halve verſchil de andere regthoekszyde zal uitdrukken.

Hierom $xx+2ax+aa$ het *Quadraat* op de ſchuinſche zyde.

$2mn$ het viervouwd van den Inhoud des Driehoeks.

Dan moeten $\left.\begin{matrix} xx+2ax+aa+2mn \\ xx+2ax+aa-2mn \end{matrix}\right\}$ *rationaale Quadraaten* zyn.

Maar

Maar in den gegeeven Driehoek is $aa = mm + nn$, derhalven zo moeten

$$\left.\begin{array}{l} xx + 2ax + mm + 2mn + nn \\ xx + 2ax + mm - 2mn + nn \end{array}\right\} \textit{rationaale Quadraaten}\text{ zyn.}$$

Stel $m + n = c$, en $m - n = d$, zo heeft men

$$\left.\begin{array}{l} xx + 2ax + cc \\ xx + 2ax + dd \end{array}\right\} \text{dat } \textit{ration. Quadraaten} \text{ moeten}$$

zyn. Deeze, het eene met dd, en het andere met cc, dat *Quadraaten* zyn, vermenigvuldigd, dan zyn de *Quadraaten*

$$ddxx + 2addx + ccdd$$
$$ccxx + 2accx + ccdd$$

Hier van is het verschil $ccxx - ddxx + 2accx - 2addx$, waar van de Deelers zyn $cx + dx$, en $cx - dx + 2ac - 2ad$.

By gevolg is de halve som van deeze Deelers $cx + ac - ad$; en dus

$$ccxx + 2accx + ccdd = \overline{cx + ac - ad}|^2 = ccxx + aacc + aadd + 2accx - 2acdx - 2aacd$$

$$\text{komt } x = \frac{aacc + aaddd - ccdd - 2aacd}{2acd}.$$

Derhalven $x + a = \dfrac{aacc + aadd - ccdd}{2acd}$ de schuinsche.

Om nu de regthoekszyden te bekomen, zo zullen wy het *Lemma* volgen; dat is, wy zullen het viervouwd van den Inhoud des Driehoeks by het *Quadraat* op de schuinsche zyde vergaaren, en ook daar van aftrekken, om dus de *Quadraaten*, en by gevolg ook de wortels te vinden; welke dan de halve som en het verschil der regthoekszyden zullen uitmaaken.

Nu

Nu is $x+a=\frac{aacc+aadd-ccdd}{2acd}$ hier boven gevon-
(den.

Maar $c=m+n$, $d=m-n$ zynde, zullen wy deeze waarden hier in op de volgende wyze plaatfen.

$$c=m+n\ ,\ cc=mm+2mn+nn$$
$$d=m-n\ ,\ dd=mm-2mn+nn$$

$$cd=mm-nn,\ cc+dd=2mm+2nn$$
$$aa=mm+nn$$
verm.
$$aacc+aadd=2m^4+4mmnn+2n^4$$
$$ccdd=m^4-2mmnn+n^4$$
afget.
$$aacc+aadd-ccdd=m^4+6mmnn+n^4$$

Maar $mm+nn=aa$,

Derhalven $m^4+2mmnn+n^4=a^4$
$$4mmnn\ \ldots\ldots=4mmnn$$
verg.
$$m^4+6mmnn+n^4=a^4+4mmnn$$
maar $m^4+6mmnn+n^4=aacc+aadd-ccdd$ boven
(gevonden,

Derhalven $aacc+aadd-ccdd=a^4+4mmnn$

Dit gedeeld door $2acd=2amm-2amn$,

zo is $x+a\left(=\frac{aacc+aadd-ccdd}{2acd}\right)=\frac{a^4+4mmnn}{2amm-2ann}$

de fchuinfche zyde; en het *Quadraat* $\overline{x+a}|^2=$
$$\frac{a^8+8a^4mmnn+16m^4n^4}{4aa.\overline{m^4-2mmnn+n^4}}.$$

Maar $aa=mm+nn$ zynde, moet deeze waarde van aa in den Teller gebragt worden; dan is

$$\overline{x+a}|^2=\frac{m^8+12m^6nn+38m^4n^4+12mmn^6+n^8}{4aa.\overline{m^4-2mmnn+n^4}}.$$

En

En brengende den viervouwdigen Inhoud, die $2\,mn$ is, onder den Noemer van deeze breuk, dan is dezelve

$$\frac{8\,aa.\overline{m^5n - 2m^3n^3 + mn^5}}{4\,aa.\overline{m^4 - 2\,mmnn + n^4}} = \frac{8m^7n - 8m^5n^3 - 8m^3n^5 + 8mn^7}{4\,aa.\overline{m^4 - 2\,mmnn + n^4}}$$

Deeze viervouwdige Inhoud nu vergaard en afgetrokken zynde, by en van het *Quadraat* der fchuinfche, zullen 'er *rationaale Quadraaten* komen; naamelyk:

$$\frac{\overline{m^8 + 8m^7n + 12m^6nn - 8m^5n^3 + 38m^4n^4 - 8m^3n^5 + 12mmn^6 + 8mn^7 + n^8}}{4\,aa.\overline{m^4 - 2\,mmnn + n^4}},$$

$$\frac{\overline{m^8 - 8m^7n + 12m^6nn + 8m^5n^3 + 38m^4n^4 + 8m^3n^5 + 12mmn^6 - 8mn^7 + n^8}}{4\,aa.\overline{m^4 - 2\,mmnn + n^4}},$$

welker Wortelen zyn

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\overline{m^4 + 4m^3n - 2mmnn + 4mn^3 + n^4}}{2\,a.\overline{mm - nn}} & \text{de fom} \\[2ex] \dfrac{\overline{m^4 - 4m^3n - 2mmnn - 4mn^3 + n^4}}{2\,a.\overline{mm - nn}} & \text{het verfchil} \end{array}\right\}\text{der regthoekszyden.}$$

Deeze vergaard en afgetrokken, dan zyn de helften

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{m^4 - 2\,mmnn + n^4}}{2\,a.\overline{mm - nn}} \text{ of } \dfrac{\overline{mm - nn}}{2\,a} \\[2ex] \dfrac{\overline{4\,m^3n + 4\,mn^3}}{2\,a.\overline{mm - nn}} \text{ of } \dfrac{2\,amn}{\overline{mm - nn}} \end{array}\right\}\text{de begeerde regthoekszyden.}$$

Derhalven zyn de twee Driehoeken van gelyken Inhoud deeze:

regt-

$$\text{regthoekszyden}\begin{cases} m & \left|\ \dfrac{2amn}{mm-nn}.\right. \\ n & \left|\ \dfrac{mm-nn}{2a}.\right. \end{cases}$$

$$\text{fchuinfche } a \quad \left|\ \dfrac{a^4+4mmnn}{2a.\overline{mm-nn}}.\right.$$

IV. COROLLARIUM.

Dewyl wy nu, in het III. *Corollarium*, met A. DE GRAAF drie byzondere regthoekige Driehoeken, van gelyken Inhoud, gevonden hebben, zo kan men, door de laatfte *Aanmerking*, tot elk eenen anderen vinden, en daar door zes *rationaale* regthoekige Driehoeken bekomen, die gelyke Inhoud hebben.

Ten eerften. Neem $a=58$, $m=42$, $n=40$, zo hebben wy voor den anderen Driehoek

$$\left.\begin{array}{r} \text{regthoekszyden}\begin{cases} \dfrac{41}{29} \\ \dfrac{48720}{41} \end{cases} \\ \text{fchuinfche } \dfrac{1412881}{1189} \end{array}\right\} \text{dus het } Quadr. \text{ der fchuinfche} = \frac{1996232720161}{1413881}.$$

Ten tweeden. Neem $a=74$, $m=70$, $n=24$, zo hebben wy voor den anderen Driehoek.

$$\left.\begin{array}{r} \text{regthoekszyden}\begin{cases} \dfrac{1081}{37} \\ \dfrac{62160}{1081} \end{cases} \\ \text{fchuinfche } \dfrac{2579761}{39997} \end{array}\right\} \text{dus het } Quadr. \text{ der fchuinfche} = \frac{6655166817121}{1599760009}.$$

Ten

Ten derden. Neem $a = 113$, $m = 112$, $n = 15$, zo hebben wy voor den anderen Driehoek

$$\left.\begin{array}{l} \text{Regthoekszyden}\left\{\begin{array}{c} \dfrac{12319}{226} \\[2ex] \dfrac{379680}{12319} \end{array}\right. \\[4ex] \text{Schuinsche}\ \dfrac{174336961}{2784094} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dus het } \textit{Quadraat} \text{ der} \\ \text{schuinsche} = \ . \ . \\ \dfrac{30393375970715521}{7751179400836} \end{array}$$

Dewyl wy nu zes *rationaale* regthoekige Driehoeken, van gelyken Inhoud, hebben, zo zyn wy hier mede in staat gebragt, om dit III. VOORSTEL van het II. SCHOLIUM op te lossen; want, stellende de schuinsche zyden van deeze Driehoeken voor de begeerde getallen, naamelyk:

$$\left.\begin{array}{r} 58\,p \\ 74\,p \\ 113\,p \\ \dfrac{1412881}{1189}\,p \\[2ex] \dfrac{2579761}{39997}\,p \\[2ex] \dfrac{174336961}{2784094}\,p \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dan zyn de} \\ \textit{Quadraaten} \\ \text{van deeze} \\ \text{getallen} \end{array} \left\{\begin{array}{r} 3364\,pp. \\ 5476\,pp. \\ 12769\,pp. \\ \dfrac{1996232720161}{1413721}\,pp. \\[2ex] \dfrac{6655166817121}{1599760009}\,pp. \\[2ex] \dfrac{30393375970715521}{7751179400836}\,pp. \end{array}\right.$$

Indien nu de som deezer getallen $3360pp$ was, dat is viermaal den Inhoud van deezen Driehoek, dan zou deeze som, by en van het *Quadraat* der schuinsche zyde, dat is, by en van het *Quadraat* van ieder getal byzonder, vergaard en afgetrokken zynde, door het II. *Lemma*, geduurig *rationaale Quadraaten* voortbrengen. Hierom moet deeze aangenomene som $3360\,pp$ gelyk zyn aan de eigenlyke som der getallen. Derhalven

$$58+74+113+\frac{1412881}{1189}+\frac{2579761}{39997}+\frac{174336961}{2784094}.$$

$(p=3360pp$

p

$$3360p=245+\frac{1412881}{1189}+\frac{2579761}{39997}+\frac{174336961}{2784094}$$

$$p=\frac{245+\frac{1412881}{1189}+\frac{2579761}{39997}+\frac{174336961}{2784094}}{3360}$$

Of door herleiding

$$p=\frac{206468943140021587}{444869308049718720}.$$

Deeze waarde voor p in de geſtelde getallen gebragt zynde, zo bekomt men voor de begeerde getallen

$$58p=\frac{206468943140021587\times 58}{444869308049718720}.$$

$$74p=\frac{206468943140021587\times 74}{444869308049718720}.$$

$$113p=\frac{206468943140021587\times 113}{444869308049718720}.$$

$$\frac{1412881}{1189}p=\frac{206468943140021587\times 1412881}{444869308049718720\times 1189}.$$

$$\frac{2579761}{39997}p=\frac{206468943140021587\times 2579761}{444869308049718720\times 39997}.$$

$$\frac{174336961}{2784094}p=\frac{206468943140021587\times 174336961}{444869308049718720\times 2784094}.$$

AAN-

AANMERKING.

Hier uit blykt nu, dat de *Theorie* genoegzaam toelaat; om zo veel *rationaale* regthoekige Driehoeken van gelyken Inhoud te vinden, als men begeert; dus kan men ook zo veel getallen hebben als men begeert, welke deeze eigenschap hebben, dat hun som vergaard en afgetrokken zynde, by en van het *Quadraat* van ieder getal byzonder, de uitkomsten telkens *rationaale Quadraaten* zyn. Doch de ondervinding leert genoegzaam, dat de getallen zo magtig groot worden, dat ze byna onhandelbaar zyn, en dus gemakkelyk misreekening kunnen veroorzaaken, voornaamelyk wanneer men dezelve door een lastigen arbeid gevonden hebbende, vervolgens begeert te beproeven. Derhalven kunnen 'er, in kleine getallen, niet meer dan drie *rationaale* regthoekige Driehoeken, van gelyken Inhoud, gevonden worden.

Hierom zullen wy dit Voorstel ook tot drie zulke getallen bepaalen, welke dan ook klein vallen, en gemakkelyk beproefd kunnen worden. By voorbeeld.

Om drie getallen te vinden, zodanig, dat indien men haar som, by en van het Quadraat *van ieder getal byzonder, vergaart en aftrekt, de uitkomsten* rationaale Quadraaten *zyn.*

OPLOSSING.

Neem uit het III. *Corollarium* de drie gevondene regthoekige Driehoeken van gelyken Inhoud, die aldaar 840 is, en ſtel de ſchuinſche zyden van deeze Driehoeken voor de begeerde getallen, als

$58p$, $74p$, $113p$ wanneer nu de ſom van deeze getallen $3360pp$ was, dat is, de viervouwdige Inhoud van deeze Driehoeken, dan zou deeze ſom by en van het *Quadraat* der ſchuinſche zyde, vergaard en afgetrokken zynde, telkens *rationaale Quadraaten* voortbrengen.

Dus blyft dan maar alleen overig, dat deeze aangenomene ſom $3360pp$ gelyk zy aan de eigenlyke ſom der getallen.

$$\text{Dat is } 3360pp = 58p + 74p + 113p$$

$$3360pp = 245p$$

$$5p$$

$$672p = 49;\ \text{derh. } p = \frac{49}{672}, \text{ of } \frac{7}{96}.$$

Deeze waarde voor p in de geſtelde getallen gebragt, zo is

$$\left.\begin{array}{l} 58p = \frac{406}{96} \\ 74p = \frac{518}{96} \\ 113p = \frac{791}{96} \end{array}\right\} \text{de begeerde getallen.}$$

IV.

IV. VOORSTEL.

Om zes getallen te vinden, zodanig, dat indien men het Quadraat *van ieder getal byzonder by en van de ſom der getallen vergaart en aftrekt, de uitkomſten* rationaale Quadraaten *zyn.*

AANMERKING.

Indien men zes *rationaale* regthoekige Driehoeken konde vinden, die elk een zelfde ſchuinſche zyde hadden, en dus hunne Inhouden van elkander verſchillende, doch alle *rationaale Quadraaten* waaren, dan konden wederom de viervouwdige Inhouden deezer Driehoeken voor de *Quadraaten* der begeerde getallen genomen worden; en het *Quadraat* der ſchuinſche zyde zou de ſom van deeze getallen kunnen zyn, volgens het II. *Lemma*; zodanig, dat indien men de *Quadraaten* van deeze getallen by de ſom der getallen vergaart, of ook daar van aftrekt, de uitkomſten *rationaale Quadraaten* zyn. Derhalven zou dit Voorſtel nog als vooren kunnen opgelost worden, door de ſom deezer getallen met de aangenomene ſom gelyk te ſtellen.

Maar ik zie geen middel, om eenen *rationaalen* regthoekigen Driehoek te vinden, welks Inhoud een *rationaal Quadraat* is, waarom het my ook niet doenlyk is, dit Voorſtel op te losſen. Want

Om een *rationaalen* regthoekigen Driehoek te vinden; welks Inhoud een *rationaal Quadraat* zy; daar toe wordt vereischt, dat men twee *rationaale Quadraats-*

Quadraaten moet vinden, welker verfchil een *rationaal Quadraat* is; of, dat het zelfde is, men zou twee *rationaale Quadraaten* moeten vinden, welker fom en verfchil *rationaale Quadraaten*, of ten minften *communicanten* zyn.

Want, ftellende voor de regthoekszyden $2xyy$ en xzz, dan is de Inhoud een *rationaal Quadraat*, en volgens de eigenfchap van den regthoekigen Driehoek, moet $4xxy^4 + xxz^4$ een *rationaal Quadraat* zyn.

Stel den Wortel $= x.\overline{2yy - \frac{zza}{b}}$;

Dan is $4xxy^4 + xxz^4 = xx.4y^4 - \frac{4yyzza}{b} + \frac{z^4aa}{bb}$

xx ———

$$4y^4 + z^4 = 4y^4 - \frac{4yyzza}{b} + \frac{z^4aa}{bb}$$

$$\frac{4yyzza}{b} = \frac{z^4aa}{bb} - z^4$$

——— bb

$$4yyzzab = z^4aa - bbz^4$$

zz ———

$$4yyab = zzaa - bbzz; \text{ dus } zz = \frac{4abyy}{aa-bb}.$$

Neemende $yy = aa - bb$ } deeze moeten *rationaale*
Zo is $zz = 4ab$ } *Quadraaten* zyn.

Neem

Neem $a = pqq$, en $b = prr$;

Zo is wel het eene, naamelyk $4ab = 4ppqqrr$ een *rationaal Quadraat*, doch $aa - bb$ zal dan $= ppq^4 - ppr^4$, en dus mede een *rationaal Quadraat* moeten zyn, of, dat het zelfde is, $q^4 - r^4$ moet een *rationaal Quadraat* zyn; en dewyl deeze grootheid het vermenigvuldigde is van $qq - rr$ zien wy ligtelyk, dat hier toe vereischt wordt, dat deeze *Factores rationaale Quadraaten*, of ten minsten *communicanten* zyn.

Nu wordt dit by alle Wiskunstenaars voor eene onmogelyke zaak gehouden, alhoewel het, myns weetens, niet *direct* beweezen is, en dus zullen wy dit IV. VOORSTEL zonder oplossing moeten laaten.

AANMERKING.

De ondervinding zal leeren, dat de 30 Konst-Vraagen, welke LUDOLF op de voorgaande laat volgen, gelyk hy zelf zegt, niet zwaar, en in der daad van weinig belang zyn. Want het geheele doelwit, dat LUDOLF door dezelve beöogde, was, om de wortel of waarde van x uit alle hooge Vergelykingen, door benadering, te vinden; dat in den tyd, toen LUDOLF leefde nog als een groot geheim en verborgenheid wierdt gehouden; doch thans, voor allen die de Stelkunde oeffenen, eene geringe zaak is, waar van men hier voor, by de V. KONST-VRAAG, een algemeenen Regel kan vinden, en welke in het II. Deel der *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen*, en by andere Schryvers, onder eene geschikte Leerwyze wordt voor-

voorgeſteld. Wy zullen daarom ook geen zwaarigheid maaken, om die Voorſtellen, als van weinig nuttigheid zynde over te ſlaan, en hier mede de oploſſing der Konst-Vraagen van LUDOLF te eindigen.

EINDE.

VERBETERENDE AANMERKING

aangaande de Oplosſing van Voorſtel CXXXI. (*pag.* 192) I. Deel.

Deeze Oplosſing is openbaar valsch, en kan alleenlyk plaats hebben, wanneer de gegeeven Driehoek gelykzydig is. Immers is het klaar te zien, dat de hoeken APB, BPC, APC (I. *Deel. Plaat* V. *Fig.* 1), naar die *Conſtructie*, in een ongelykzydigen Driehoek nooit aan malkanderen gelyk kunnen zyn, dat nogthans plaats heeft, wanneer AP + BP + PC = een *Minimum* is (Gronden der Meetk. B. XI. *Theor.* 3). Indien men op BC het *Segment* eens cirkels beſchryft, waar in een hoek BPC van 120° kan gemaakt worden (Meetk. V. 15), vervolgens den geheelen cirkel voltrekt, en het *Segment* dat alsdan onder den *Baſis* (dien ik onderſtel BC te zyn) valt, in Q in twee gelyke deelen deelt, heeft men ſlegts uit A naar Q een lyn AQ te trekken, deeze zal den boog BPC in het begeerde punt P ſnyden.

Het Bewys van deeze *Conſtructie*, hebbende tot grondſlag *Theor.* 6, III. B. en *Theor.* 3, XI. B. van de Gronden der Meetkunst, is nu gemakkelyk op te maaken. Wy hebben hetzelve, by gebrek van eene geſchikte *Figuur*, moeten voorby gaan.

Deeze MATHEMATISCHE en andere Boeken, zyn by J. MORTERRE gedrukt en te bekomen:

Aſtronomia of Sterrekunde, met de daar toe noodige nieuwe Tafelen verrykt, door den Heer DE LA LANDE.

Oeffenſchool der Mathematiſche Weetenſchappen, 15 ſtukjes, met Plaaten.

A. B. STRABBE, Inleiding tot de Mathematiſche Weetenſchappen, of gemeenzaame Leerwyze der Arithmetica en Algebra, 2 deelen.

L. PRAALDER, nuttige uitbreidingen over de 70 Konſtige Vraagen van LUDOLF VAN KEULEN.

De gronden der Meetkunst, volgens de leidinge van den beroemden T. SIMPSON, met Figuuren.

Uitvoerige Tafelen van de ondeelbaare of primgetallen van 1 tot 400,000, benevens eene Verhandeling over de wyze van vinding, en de nuttigheid derzelve, gedeeltelyk getrokken uit de Memorien van den grooten EULER, en andere beroemde Wiskundigen.

Verhandeling over de Rekening met ſtaafjes, tot eene vermakelyke uitſpanning voor Liefhebberen der Rekenkunde, met Plaaten.

F. A. MARCI, over de Tover-Vierkanten, met Plaaten.

CLAIRAUT, gronden der Algebra.

——— ——— Beginſelen der Geometrie en Trignometrie, met Plaaten.

A. DE GRAAF, Wiskundige Arithmetica.

——— ——— over het Italiaans Boekhouden.

——— ——— Exemplaarboekje van de Arithmetica.

A. B. STRABBE, Appendix of Aanhangzel.

G. LA BORDE, over het Koopmans Boekhouden, verbeterde Druk.

Nieuw

Nieuw Licht des Koophandels, handelende over de Wisfel en Arbitrages, en andere op Koopmans Comptoiren voorkomende Rekeningen.

L. GRAVE VAN BYLAND, Zeetactick of Krygsdienst ter Zee, 2 deelen, met Plaaten.

J. H. KINSBERGEN, korte Inftructien, betreffende de Zeedienst.

DU HAMEL DE MONCEAU, Verhandeling over de Scheepsbouw, met uitvoerige Plaaten.

VAN DER HOOGH, over het vocaal Mufyk, met Plaaten.

Nieuw verbeterd Pfalmgezang, voor Beminnaars der Zangkonst, zynde de eerfte Verfen der Pfalmen Davids, thans by de Hervormde Kerk van Nederland in gebruik.

W. SEWEL, Wegwyzer tot de Engelfche Taal.

——— Wegwyzer tot de Nederduitfche Taal.

C. V. BYNKERSHOEK, Verhandeling over de Burgerlyke Rechtzaaken, 2 deelen.

De gevallen van Telemachus, 2 deelen, met Plaaten.

W. DE BRITAINE, Menfchelyke Wysheid of weg des Fortuins.

Bekeerings-gefchiedenis van den Graaf STRUENSEE, 2 deelen.

C. PLINIUS, over de Dieren, uitvoerige vermeerderde Druk, met Plaaten.

Hiftorie der wreede en vreemde Dieren tot een vervolg op C. PLINIUS in 't licht gebragt, met Plaaten.

De vermakelyke Avanturier, 2 deelen, met Plaaten.

VLAMING en WELLEKENS, Dichtlievende Uitfpanningen, met uitvoerige Plaaten van J. GOEREE.