Over de poolfiguren van eenige cirkelstelsels

https://hdl.handle.net/1874/280188

OVER DE POOLFIGUREN VAN EENIGE CIRKELSTELSELS

W. ENKLAAR

OVER DE POOLFIGUREN VAN EENIGE CIRKELSTELSELS

OVER DE POOLFIGUREN VAN EENIGE CIRKELSTELSELS

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS MR. J. C. NABER, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DONDERDAG 31 MEI 1923 'S NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR

WILLEM ENKLAAR

GEBOREN TE RUURLO

GEDRUKT BIJ DE ERVEN J. J. TIJL TE ZWOLLE

AAN MIJNE OUDERS.

AAN MIJN VROUW.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik om U, Hoogleeraren en Oud-Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn oprechten dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U genoten heb.

In mijn tegenwoordigen werkkring wordt het mij steeds meer duidelijk, Hooggeleerde Julius, dat het een groot voorrecht voor mij was, eenige jaren als assistent onder Uwe leiding te mogen werken.

Hooggeleerde Ornstein, ik zal U steeds dankbaar blijven voor de hulpvaardigheid en welwillendheid, die Gij mij hebt bewezen.

Hooggeleerde De Vries, Hooggeachte Promotor, U ben ik ten zeerste dankbaar èn voor Uw boeiend onderwijs èn voor de hulp, die Gij mij op zoo welwillende wijze verleend hebt bij de samenstelling van dit proefschrift.

INLEIDING.

Bepaling van de polen van een cirkel.

Als een cirkel gegeven is door de vergelijkingen:

$$(C)\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0 \ (B) \\ px + qy + rz - s = 0 \ (V), \end{cases}$$

kan men den bol, die den gegeven cirkel tot grooten cirkel heeft, vinden uit den bollenbundel:

$$B + 2\lambda V = 0, \quad \text{d.i.}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(A - \lambda p)\,x - 2(B - \lambda q)\,y -$$
$$- 2(C - \lambda r)\,z + (D - 2\lambda s) = 0 \ (B').$$

De coördinaten van het middelpunt van een bol (B') zijn:

$$\xi' = A - \lambda p,$$
$$\eta' = B - \lambda q,$$
$$\zeta' = C - \lambda r.$$

Zal nu de bol (B') den cirkel (C) tot grooten cirkel hebben, dan moet het middelpunt van (B') in het vlak van (C), dus in (V) liggen. D.w.z.:

$$p(A - \lambda p) + q(B - \lambda q) + r(C - \lambda r) - s = 0,$$

waaruit: $$\lambda = \frac{pA + qB + rC - s}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

De vergelijking van den bol (B_0), die (C) tot grooten cirkel heeft, is dus:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D +$$
$$+ 2\,\frac{pA + qB + rC - s}{p^2 + q^2 + r^2}\,(px + qy + rz - s) = 0 \ (B_0).$$

Men vindt nu de polen van cirkel (C), door de as van (C), dus de loodlijn uit het m. p. van (B) op (V), te snijden met den bol (B_0). Deze loodlijn wordt voorgesteld door: $\frac{x-A}{p}=$ $=\frac{y-B}{q}=\frac{z-C}{r}$. En men vindt dus de polen van den cirkel, voorgesteld door de vergelijkingen (C), uit:

$$\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2-2AX-2BY-2CZ+D+ \\ +2\,\dfrac{pA+qB+rC-s}{p^2+q^2+r^2}(pX+qY+rZ-s)=0, \\ \dfrac{X-A}{p}=\dfrac{Y-B}{q}=\dfrac{Z-C}{r}. \end{cases}$$

HOOFDSTUK I.

De polen van de cirkelvormige doorsneden eener elliptische paraboloide.

§ 1. Zij de paraboloide gegeven door de vergelijking:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z \text{ (1)}, \ (\alpha > \beta).$$

Omdat de paraboloide symmetrisch is ten opzichte van het xz vlak en van het yz vlak, kan men a priori cirkels op haar oppervlak verwachten, die

òf symmetrisch zijn t.o.v. het xz vlak en in twee, t.o.v. het yz vlak symmetrische, groepen voorkomen,

òf symmetrisch zijn t.o.v. het yz vlak en in twee, t.o.v. het xz vlak symmetrische, groepen voorkomen.

Cirkels, die symmetrisch zijn t.o.v. beide genoemde vlakken en dus loodrecht op de as der paraboloide staan, kunnen niet voorkomen, omdat vlakken, loodrecht op de as, elliptische doorsneden geven.

Wanneer $\alpha > \beta$ heeft men, zooals blijken zal, de laatstgenoemde groep cirkels op het oppervlak.

§ 2. Om deze te vinden, snijden we de paraboloide met een bol, die zijn middelpunt heeft op de z-as:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz + D = 0 \text{ (2)}.$$

Eliminatie van x tusschen de verg. (1) en (2) geeft als yz projectie der doorsnede:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) y^2 - z^2 + (2\,C - \alpha)\,z - D = 0,$$

wat men schrijven kan in den vorm:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) y^2 - \left(z - \frac{2\,C - \alpha}{2}\right)^2 + \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - D = 0.$$

Men kan deze vergelijking ook opvatten als die van een hyperbolischen cylinder, welke gaat door de doorsnede van paraboloide en bol. Is nu

$$D = \left(C - \frac{a}{2}\right)^2,$$

dan ontaardt deze cylinder in 2 platte vlakken:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{\beta} - 1\right)}\, y = \pm \left(C - Z + \frac{a}{2}\right) \quad (3),$$

welke met den bol

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,C\,z + \left(C - \frac{a}{2}\right)^2 = 0, \quad (4)$$

en dus ook met de paraboloide, cirkelvormige doorsneden geven.

De vlakken (3) zijn dus de cyclische vlakken van de paraboloide en de cirkelvormige doorsneden worden gegeven door:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz + \left(C - \frac{a}{2}\right)^2 = 0, \\ \sqrt{\frac{a}{\beta} - 1}\;\; y \qquad = \pm \left(Z - C + \frac{a}{2}\right). \end{cases}$$

De polen der cirkels

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\,C\,z + \left(C - \frac{a}{2}\right)^2 = 0, \\ \sqrt{\frac{a}{\beta} - 1}\; y - z + C - \frac{a}{2} = 0, \end{cases}$$

worden gegeven door:

$$\text{II.} \begin{cases} X = 0, \\ \dfrac{Y}{\sqrt{\frac{a}{\beta} - 1}} = \dfrac{Z - C}{-1}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\,C\,Z + \left(C - \frac{a}{2}\right)^2 - \\ \qquad - \beta \left\{ \sqrt{\left(\frac{a}{\beta} - 1\right)}\, Y - Z - \frac{a}{2} + C \right\} = 0; \end{cases}$$

die der cirkels

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\,C\,z + \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0, \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} - 1}\; y + z - C + \frac{\alpha}{2} = 0, \end{cases}$$

door:

$$\text{III.}\begin{cases} X = 0, \\ \dfrac{Y}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} - 1}} = \dfrac{Z - C}{1}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\,C\,Z + \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \\ \qquad + \beta \left\{ \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)}\; Y + Z + \frac{\alpha}{2} - C \right\} = 0. \end{cases}$$

De meetkundige plaats der polen bestaat dus uit 2 vlakke krommen, gelegen in het vlak $y\,o\,z$. Eliminatie van C uit II opv. III geeft voor deze krommen:

$$\text{(II)}\quad X = o,\ (Y - \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = (\alpha - \beta)\left(Z - \frac{\alpha - 2\beta}{4}\right).$$

$$\text{(III)}\quad X = 0,\ (Y + \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = (\alpha - \beta)\left(Z - \frac{\alpha - 2\beta}{4}\right).$$

Dit zijn 2 parabolen met assen evenwijdig aan de z-as. De top van (II) is over een afstand $\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}$ verschoven in de richting y^+, over een afstand $\dfrac{\alpha - 2\beta}{4}$ in de richting z^+, de top van (III) over even groote afstanden resp. in de richting y^- en z^+.

§ 3. Dat de vlakken (3) de eenige cyclische vlakken zijn, blijkt, als men tusschen de vergelijkingen:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z \quad (1)$$

$$\text{en}\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz + D = 0 \quad (2),$$

de y elimineert:

$$\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) x^2 + \left(z - C + \frac{\beta}{2}\right)^2 = -D + \left(C - \frac{\beta}{2}\right)^2.$$

Dit is, als $D < \left(C - \frac{\beta}{2}\right)^2$, een ellips. Voor $D = \left(C - \frac{\beta}{2}\right)^2$ ontaardt deze ellips in een imaginair lijnenpaar met reëel snijpunt $x = 0$, $z = C - \frac{\beta}{2}$. De bollenreeksen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz + \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0$$

en
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz + \left(C - \frac{\beta}{2}\right)^2 = 0$$

hebben één exemplaar gemeen: voor $C = \dfrac{\alpha + \beta}{4}$.

§ 4. De doorsnede van de paraboloide met het vlak $x = 0$ levert:

$$\text{(I)} \qquad y^2 = \beta z,$$

een parabool, die de y-as in O raakt en de lijn oz tot as heeft. De krommen (II) en (III), die in 't algemeen een anderen parameter $(\alpha - \beta)$ hebben dan (I), hebben een top en as, die ten opzichte van die van (I) verschoven zijn, symmetrisch t.o.v. oz. Wat deze verschuiving in de z-richting betreft moet men 3 gevallen onderscheiden, n.l. dat

$$\alpha \lesseqgtr 2\beta.$$

Denkt men zich β constant en α veranderlijk en te beginnen met een waarde, weinig meer dan die van β, dan is $\sqrt{\alpha\beta - \beta^2} = \sqrt{\beta(\alpha - \beta)}$ bijna 0, dus de verplaatsing naar rechts, resp. links, van (II) en (III), gering. De verplaatsing in de andere richting bedraagt $\dfrac{\alpha - 2\beta}{4}$ naar $z+$, dus $\dfrac{2\beta - \alpha}{4}$ naar $z-$, dat is iets minder dan $\dfrac{\beta}{4}$. Daar $\alpha - \beta$ weinig van 0 verschilt, zijn de parabolen (II) en (III) smal vergeleken bij (I). (Voor $\alpha = \beta$ is de paraboloide een omwentelingspar^ide^ en de z-as de gezochte meetkundige plaats.)

Groeit α aan, dan komen (II) en (III) verder van de z-as af en hooger en zij worden breeder. Is $\alpha = 2\beta$ geworden, dan hebben (II) en (III) de verg. (als voortaan alle verand. met kleine letter worden aangeduid):

$$(y \pm \beta)^2 = \beta z.$$

Dus (II) en (III) zijn congruent met (I), raken de y-as en zijn over een afstand β naar rechts, resp. links, verschoven.

Neemt α verder toe, dan zullen (II) en (III) zich verder van de z-as verwijderen, breeder worden en raken aan een lijn, // y-as loopende, boven O.

In de figuur (fig. 1) is gekozen: $\alpha = 100$; $\beta = 90$, zoodat $\alpha < 2\beta$. De kromme (I) wordt dan

$$y^2 = 90z;$$

de krommen (II) en (III): $(y \pm 30)^2 = 10(z + 20)$.

§ 5. De vergelijking van de bollen (4), welke met de paraboloide cirkelvormige doorsneden geven, kan men schrijven in den vorm:

$$x^2 + y^2 + (z - C)^2 = \alpha\left(C - \frac{\alpha}{4}\right). \quad (4)$$

Hieruit blijkt, dat deze bol reëel is, als $C \geqq \frac{\alpha}{4}$. Voor $C = \frac{\alpha}{4}$ is de straal van den bol 0, zoodat er van een reëele doorsnijding nog geen sprake is. Wat is nu de kleinste waarde van C, waarvoor de bol (4) een reëele doorsnijding geeft?

Daar, wegens de symmetrie, hetgeen voor (II) ten opzichte van (I) geldt, ook geldt voor (III) ten opzichte van (I), is het voldoende, alleen op bijv. (I) en (II) te letten.

Voor de kromme (II) gelden de verg. II:

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{aligned} & x = 0, \\ & y = -(z - C)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} - 1}, \\ & x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz + \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \\ & \qquad - \beta\left\{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)}y - z - \frac{\alpha}{2} + C\right\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Eliminatie van y uit deze verg. geeft, behalve $x = 0$:

$$\frac{1}{\beta}z^2 - \left(\frac{2\,C}{\beta} - 1\right)z + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} - 2\,C + \frac{C^2}{\beta} = 0. \quad (5)$$

Deze vergelijking geeft, na subst. van zekere waarde van C, de z-coörd. der bijbehoorende cirkelpolen (gelegen op de kromme (II)). Zullen deze reëel zijn, dan moet

$$\left(\frac{2\,C}{\beta}-1\right)^2-4\,\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}-2\,C+\frac{C^2}{\beta}\right)\geqq 0,$$

of
$$\frac{4\,C}{\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\geqq 0,$$

of, daar $\beta > 0$:
$$C\geqq\frac{\alpha+\beta}{4}\quad\text{zijn.}$$

Voor $C=\dfrac{\alpha+\beta}{4}$ krijgt de bol (4) de verg.:

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{\alpha+\beta}{4}\right)^2=\frac{\alpha\,\beta}{4}.\qquad(6)$$

Het gelijk zijn van de wortels der vergelijking (5) beteekent niet, dat de bijbehoorende cirkelpolen liggen op een lijn, evenwijdig aan de y-as, omdat de paraboloide geen cirkels bevat, welker vlak evenwijdig met haar as is, maar dat de bijbehoorende polen samenvallen en dus polen zijn van een puntcirkel.

De bol (6) bepaalt dus op de paraboloide 2 puntcirkels P_1 en P_2 (de verg. III voeren n.l. tot dezelfde verg. (5)), met coörd.:

$$P_1\begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\,\beta-\beta^2}\\ z=\dfrac{\alpha-\beta}{4}\end{cases}\qquad\text{en}\qquad P_2\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\,\beta-\beta^2}\\ z=\dfrac{\alpha-\beta}{4}\end{cases}$$

De paraboloide en de bol hebben dan ook in P_1 het raakvlak

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-1}\;y=z+\frac{\alpha-\beta}{4},$$

in het punt P_2 het raakvlak

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-1}\;y=-\left(z+\frac{\alpha-\beta}{4}\right),$$

gemeen.

§ 6. De krommen (I) en (II) snijden elkaar in:

$$P_1\begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta-\beta^2}\\ z=\dfrac{\alpha-\beta}{4}\end{cases}\qquad A_1\begin{cases}x_1=0\\ y=-\dfrac{(\alpha+2\,\beta)\sqrt{\alpha\,\beta-\beta^2}}{2\,(\alpha-2\,\beta)}\\ z=\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\alpha+2\,\beta)^2}{4\,(\alpha-2\,\beta)^2}\end{cases}$$

de krommen (I) en (III) in:

$$P_2\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta-\beta^2} \\ z = \dfrac{\alpha-\beta}{4} \end{cases} \qquad A_2\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{(\alpha+2\beta)\sqrt{\alpha\beta-\beta^2}}{2(\alpha-2\beta)} \\ z = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)^2}{4(\alpha-2\beta)^2}. \end{cases}$$

Is $\alpha < 2\beta$, dan liggen de punten P_1 en A_1 rechts van de z-as, P_2 en A_2 links van de z-as.

Is $\alpha = 2\beta$, dan worden de coörd.:

$$P_1\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}\beta \\ z = \dfrac{\beta}{4} \end{cases} \quad A_1\begin{cases} x = 0 \\ y = \infty \\ z = \infty \end{cases} \quad P_2\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}\beta \\ z = \dfrac{\beta}{4} \end{cases} \quad A_2\begin{cases} x = 0 \\ y = \infty \\ z = \infty. \end{cases}$$

De punten A_1 en A_2 liggen dan in het oneindige en wel, daar $\dfrac{z}{y}$ van de orde $\dfrac{1}{0}$ is, op de z-as. Dit komt overeen met hetgeen boven opgemerkt is, dat in dit geval de krommen (II) en (III) kunnen worden gevonden door een translatie van (I) // y-as.

Is $\alpha > 2\beta$ dan ligt P_1 rechts, A_1 links van de z-as; P_2 links, A_2 rechts van de z-as.

§ 7. De vergelijkingen II van § 5 geven de bij elkaar behoorende cirkelpolen als de snijpunten van de cirkelas met den bol, die den cirkel als grooten cirkel heeft. De cirkelassen vormen een bundel evenwijdige rechten, blijkens verg. II, gelegen in het yz vlak, de cirkelpolen worden op deze assen bepaald door de in het yz vlak gelegen cirkelverzameling:

$$y^2 + z^2 - 2Cz + \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)^2 -$$
$$- \beta\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} - 1}\; y - z - \frac{\alpha}{2} + C\right) = 0,$$

wat men schrijven kan:

$$(y - \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 + \left(z - \frac{2C-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\left(C - \frac{\alpha+\beta}{4}\right). \quad (7)$$

Dit stelsel heeft den index twee. Substitueert men nl. de coördinaten van een willekeurig punt in de verg. (7) dan verkrijgt men een vierkantsvergelijking in C. De cirkels, behoorende bij de waarden van C, die aan deze vergelijking voldoen, gaan door het punt.

Een cirkel uit deze verzameling is óók een groote cirkel van den bijbehoorenden bol uit II en wel een, welks vlak (samenvallende met het yz-vlak) loodrecht staat op het vlak van de bijbehoorende cyclische doorsnede van de paraboloide. Zooals men ziet hebben de cirkels (7) tot m. pl. hunner middelpunten de lijn

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta - \beta^2},$$

dat is de lijn door $P_1 \,//\, z$-as, de middellijn $P_1 Q_1$ van de parabool (II).

De cirkel (7) gaat voor $C = \dfrac{\alpha + \beta}{4}$ over in een puntcirkel: het punt P_1. $\dfrac{\alpha + \beta}{4}$ is, zooals boven ook reeds opgemerkt is, de kleinste waarde van C welke bestaanbare, (hier samenvallende) polen geeft.

Een cirkelas, b.v. $K_1 K_2$, snijdt den bijbehoorenden cirkel M uit (7) in 2 punten, welke op de kromme (II) gelegen zijn. Trekt men nu in cirkel M een middellijn $\perp K_1 K_2$, dan is deze lijn de snijlijn van het vlak van de bijbehoorende cyclische doorsnede met het vlak yoz. De snijpunten L_1 en L_2 van deze lijn met de parabool (I) zijn de in het yz-vlak gelegen punten der cyclische doorsnede en dus is $ML_1 = MK_1 = ML_2 = MK_2$, d.w.z. de cirkel M gaat door L_1 en L_2.

Wanneer nu M loopt langs $P_1 Q_1$ verschuiven $K_1 K_2$ en $L_1 L_2$ evenwijdig, waarbij K_1 en K_2 over (II), L_1 en L_2 over (I) loopen en hun afstanden tot M blijven onderling gelijk. De lijn $O'T$, die door $P_1 Q_1$ middendoor gedeeld wordt, behoort tot het stelsel koorden van (II), welke $// K_1 K_2$ zijn. Zoo behoort OT' tot het stelsel $L_1 L_2$ van (I). De krommen (I) en (II) hebben dan ook de middellijn $P_1 Q_1$ gemeen. Komt M in P_1, dan vallen K_1 en K_2 op (II) samen in P_1, $K_1 K_2$ wordt raaklijn in P_1 aan (II); L_1 en L_2 vallen op (I) samen in P_1, $L_1 L_2$ wordt raaklijn in P_1 aan (I): de krommen (I) en (II) snijden dus elkaar in P_1 rechthoekig. Dit blijkt ook eenvoudig uit de verg. van de raaklijnen in P_1

$$\text{aan (I): } \sqrt{\alpha\beta - \beta^2}\, y - \beta z = \frac{\beta}{4}(\alpha - \beta),$$

$$\text{„ (II): } \beta y + \sqrt{\alpha\beta - \beta^2}\, z = \frac{\alpha + \beta}{4}\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}.$$

Wat hier opgemerkt is omtrent de krommen (I) en (II), geldt, wegens de symmetrie, ook voor (I) en (III).

De bol (4), welke behoort bij de door cirkel M bepaalde waarde van C, heeft zijn middelpunt in het snijpunt S van $K_1 K_2$ met de as $o z$ der paraboloide. De cirkel, volgens welken het vlak $y o z$ dezen bol snijdt, gaat door L_1, door L_2 en door H_2 en H_1, de spiegelbeelden van L_1 en L_2 t.o.v. de z-as. In de vlakken, door $L_1 L_2$, resp. $H_1 H_2$, loodrecht op het $y z$-vlak gebracht, liggen de cirkels, volgens welke deze bol de paraboloide snijdt. De polen van den 2^{en} cirkel zijn de spiegelbeelden van K_1 en K_2 t.o.v. de z-as, gelegen op de kromme (III).

§ 8. Ten slotte kan nog opgemerkt worden, dat de krommen (I) en (II), wat haar eigenschappen betreft, verwisselbaar zijn: Het punt M beweegt zich over een lijn, die middellijn is van beide parabolen, de cirkel M snijdt beide krommen in de uiteinden eener middellijn. Dit doet vermoeden, dat, waar (II) een gedeelte van de meetk. plaats van de polen der cirkelvormige doorsneden eener paraboloide is, die met het vlak $y o z$ de doorsnede (I) heeft, (I) een gedeelte van de meetk. plaats van de polen der cirkelvormige doorsneden eener paraboloide is, die met het vlak $y o z$ de doorsnede (II) heeft.

Zooals gebleken is behoort bij de paraboloide

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z,$$

die met het vlak $y o z$ de doorsnede

$$y^2 = \beta z \quad \text{(I)}$$

heeft, als (gedeeltelijke) meetk. plaats van de polen der cirkelvormige doorsneden:

$$(y - \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = (\alpha - \beta)\left(z + \frac{2\beta - \alpha}{4}\right), \quad \text{(II)}$$

in het vlak $x = 0$. Verplaatst men nu den oorsprong van het coörd. stelsel naar $0'$ door te stellen:

$$x' = x;\ y' = y - \sqrt{\alpha\beta - \beta^2};\ z' = z + \frac{2\beta - \alpha}{4},$$

dan gaat de laatste verg. over in:

$$y'^2 = (\alpha - \beta)\, z', \qquad (8)$$

de voorlaatste in:

$$(y' + \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = \beta\left(z' - \frac{2\beta - \alpha}{4}\right). \qquad (9)$$

Men behoeft nu slechts te bepalen, welke waarde p moet hebben in de verg.

$$\frac{x'^2}{p} + \frac{y'^2}{\alpha - \beta} = z' \qquad (10)$$

om te maken, dat (9) de bij de paraboloide (10) behoorende (gedeeltelijke) meetk. plaats is. Bij de paraboloide (10) behooren als m. plaats:

$$\left\{y' \pm \sqrt{p(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)^2}\right\}^2 =$$
$$= (p - \alpha + \beta)\left(z' - \frac{p - 2\alpha + 2\beta}{4}\right);$$

en voor $p = \alpha$ gaat een dezer verg. over in:

$$(y' + \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = \beta\left(z' - \frac{2\beta - \alpha}{4}\right),$$

d. i. de vergelijking (9).

De oorspronkelijke paraboloide voldoet in ongeaccentueerde coördinaten aan:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z,$$

de nieuwe paraboloide in geaccentueerde aan:

$$\frac{x'^2}{\alpha} + \frac{y'^2}{\alpha - \beta} = z'.$$

(*Opm.* In de figuur ligt (II) lager dan (I), omdat $\alpha < 2\beta$. Nu ligt (I) hooger dan (II), dus moet $\alpha > 2(\alpha - \beta)$. Dit is inderdaad het geval, als $\alpha < 2\beta$.)

Drukt men nu alles in ongeacc. coördinaten uit, dan voldoet de oorspronkelijke paraboloide aan:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z,$$

de beide nieuwe (beide, want wat voor (II) geldt, geldt ook voor (III)) aan:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y \pm \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2}{\alpha - \beta} = z + \frac{2\beta - \alpha}{4}.$$

Stelt men nu:

$$x'' = x' = x;\ y'' = y + \sqrt{\alpha\beta - \beta^2},$$
$$y' = y - \sqrt{\alpha\beta - \beta^2};\ z'' = z' = z + \frac{2\beta - \alpha}{4},$$

dan gaan deze verg. over in:

$$\frac{x''^2}{\alpha} + \frac{y''^2}{\alpha - \beta} = z'';\ \frac{x'^2}{\alpha} + \frac{y'^2}{\alpha - \beta} = z'.$$

Bij de eerste dezer behoort nu de meetk. pl.:

$$(y'' \pm \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = \beta\left(z'' + \frac{\alpha - 2\beta}{4}\right),$$

d.w.z., in ongeacc. coördinaten:

$$(y + 2\sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = \beta z \quad \text{en} \quad y^2 = \beta z.$$

Dus, bij de paraboloide, die (III) tot doorsnijding heeft met het yz-vlak, behooren als meetk. plaats de parabool (I) en een een parabool, congruent met (I) en over een afstand $2\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}$ in de richting y^- verschoven, d.w.z. de symmetrie van (I) t.o.v. $o''z''$.

Bij de tweede der verg. behoort als m. plaats:

$$(y' \pm \sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = \beta\left(z' + \frac{2\beta - \alpha}{4}\right),$$

of, in ongeacc. coördinaten:

$$y^2 = \beta z, \quad \text{en} \quad (y - 2\sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2 = \beta z.$$

D.w.z. bij de paraboloide, die (II) tot doorsnijding met het yz-vlak heeft, behooren als meetk. plaats de parabool (I) en een parabool, congruent met (I) en over een afstand $2\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}$ verschoven in de richting y^+, dus de symmetrie van (I) t.o. van $o'z'$.

Zet men dit voort, dan vindt men, dat bij een paraboloide, voorgesteld door $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{(y + k\sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2}{\beta} = z$, (12)

behooren de parabolen, voorgesteld door:

$$(11')\begin{cases} x = 0 \\ \{y + (k+1)\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}\}^2 = (\alpha - \beta)\left(z + \dfrac{2\beta - \alpha}{4}\right), \end{cases}$$

en

$$(11'')\begin{cases} x = 0 \\ \{y + (k-1)\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}\}^2 = (\alpha - \beta)\left(z + \dfrac{2\beta - \alpha}{4}\right). \end{cases}$$

Bij de paraboloide, voorgesteld door:

$$(12)\ \frac{x^2}{z} + \frac{(y + l\sqrt{\alpha\beta - \beta^2})^2}{\alpha - \beta} = z + \frac{2\beta - \alpha}{4},\ \text{behooren:}$$

$$(12')\begin{cases} x = 0 \\ \{y + (l+1)\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}\}^2 = \beta z, \end{cases}$$

en
$$(12'')\begin{cases} x = 0 \\ \{y + (l-1)\sqrt{\alpha\beta - \beta^2}\}^2 = \beta z. \end{cases}$$

Hierin stellen k en l voor geheele, positieve of negatieve getallen; k even, l oneven.

Men kan ook zeggen, dat de krommen, die bij een zeker exemplaar van (11) als meetkundige plaatsen behooren, gevonden worden, doordat men de oppervlakken uit (12), waarvoor $l = k \pm 1$, snijdt met $x = 0$, en omgekeerd.

Of (met het oog op 't geen in § 7 is medegedeeld) neemt men naburige oppervlakken uit de reeksen (11) en (12) (waarvoor b.v. $k = 2p$, $l = 2p + 1$), dan bestaat er een stelsel bollen, waarvan elk exemplaar elk dezer paraboloiden snijdt volgens een grooten cirkel, zoo, dat de vlakken dezer groote cirkels loodrecht op elkaar en loodrecht op het vlak $x = 0$ staan en de meetkundige plaats van de polen der cirkels, die door de bollen op één der paraboloiden worden uitgesneden, is de doorsnijding van de andere paraboloide met het vlak $x = 0$.

HOOFDSTUK II.

De polen van de cirkelvormige doorsneden eener ellipsoide.

§ 1. De ellipsoide worde voorgesteld door de vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

in de onderstelling, dat $a > b > c$ is.

Deze drieassige ellipsoide is symmetrisch ten opzichte van de coördinaatvlakken. De cyclische doorsneden kunnen bij dit oppervlak niet loodrecht op een der assen staan; zij vormen twee stelsels van cirkels, die symmetrisch liggen ten opzichte van een der symmetrievlakken van het oppervlak.

Een vlak door de x-as snijdt de ellipsoide volgens een ellips, waarvan de eene as a is en de andere, afhankelijk van den stand van het vlak, een waarde tusschen b en c, dus steeds kleiner dan a. Een dergelijke doorsnede kan geen cirkel zijn.

Een vlak door de z-as snijdt het oppervlak volgens een ellips, die C tot eene as heeft en tot andere een waarde tusschen b en a, dus steeds grooter dan c. Ook zoo'n vlak levert nooit een cirkelvormige doorsnede.

Een vlak door de y-as echter snijdt volgens een ellips, die b tot eene as heeft en een waarde tusschen a en c tot andere. Dit vlak kan dus zoo geplaatst worden, dat de erin gelegen ellips gelijke assen heeft, d.w.z. een cirkel is. De andere cyclische doorsneden liggen in vlakken, evenwijdig met het zoo juist genoemde, dus loodrecht op het vlak zox.

§ 2. De bol

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Cz + D = 0,$$

die zijn het middelpunt op de z-as heeft, heeft met de ellipsoide een doorsnede, welker projectie op het vlak zox tot vergelijking heeft:

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)z^2-2Cz+b^2+D=0,$$

$$\text{of: }\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)\left(z+\frac{c^2C}{b^2-c^2}\right)^2=$$
$$=-\left(D+b^2+\frac{c^2C^2}{b^2-c^2}\right).$$

Men kan dit opvatten als de vergelijking van een hyperbolischen cylinder, welke gaat door de doorsnede van ellipsoide en bol.

Als
$$D=-\left(b^2+\frac{c^2C^2}{b^2-c^2}\right),$$

dan ontaardt de hyperbolische cylinder in 2 platte vlakken:

$$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\,x=\pm\sqrt{\frac{b^2}{c^2}-1}\left(z+\frac{c^2C}{b^2-c^2}\right),$$

welke gaan door de doorsnede van bol en ellipsoide, en op de laatste dus cirkels bepalen.

De vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2Cz-\left(b^2+\dfrac{c^2C^2}{b^2-c^2}\right)=0 \\ \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\,x+\pm\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}-1}\left(z+\dfrac{c^2C^2}{b^2-c^2}\right), \end{cases}$$

bepalen dus de beide stellen van cyclische doorsneden op de ellipsoide.

De polen der cirkels

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2Cz-\left(b^2+\dfrac{c^2C^2}{b^2-c^2}\right)=0 \\ \dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\,x-\dfrac{1}{c}\sqrt{b^2-c^2}\,z-\dfrac{cC}{\sqrt{b^2-c^2}}=0, \end{cases}$$

worden gegeven door:

$$\left\{\begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2-2CZ-b^2-\dfrac{c^2C^2}{b^2-c^2}- \\ \quad -\dfrac{2a^2cC}{(a^2-c^2)\sqrt{b^2-c^2}}\left(\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\,X-\dfrac{1}{c}\sqrt{b^2-c^2}\,Z-\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\dfrac{cC}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)=0 \\ \dfrac{aX}{\sqrt{a^2-b^2}}=-\dfrac{c(Z-C)}{\sqrt{b^2-c^2}} \\ Y=0, \end{array}\right.$$

of:

$$\text{II}\left\{\begin{array}{l} X^2+Z^2-\dfrac{2ac\sqrt{a^2-b^2}\,C}{(a^2-c^2)\sqrt{b^2-c^2}}X+\dfrac{2c^2C}{a^2-c^2}Z+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{c^2(a^2+c^2)C^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}-b^2=0 \\ C=\dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}\,X+c\sqrt{a^2-b^2}\,Z}{c\sqrt{a^2-b^2}} \\ Y=0. \end{array}\right.$$

Eliminatie van C voert tot een verg. in X en Z:

$$\frac{b^2(a^2+c^2)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}X^2+\frac{4abc}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}XZ+$$
$$+\frac{b^2(a^2+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}Z^2=b^2;$$

of:

$$\text{(II)}\quad \frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}X^2+\frac{4ac}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}XZ+$$
$$+\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}Z^2=1$$

met $Y=0$.

De polen der cirkels

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2Cz-\left(b^2+\dfrac{c^2C^2}{b^2-c^2}\right)=0 \\ \dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\,x+\dfrac{1}{c}\sqrt{b^2-c^2}\,z+\dfrac{cC}{\sqrt{b^2-c^2}}=0, \end{array}\right.$$

worden aangewezen door:

$$\text{III.}\left\{\begin{aligned}&X^2+Z^2+\frac{2\,a\,c\sqrt{a^2-b^2}\,C}{(a^2-c^2)\sqrt{b^2-c^2}}X+\frac{2\,c^2\,C}{a^2-c^2}Z+\\&\qquad\qquad+\frac{c^2\,(a^2+c^2)\,C^2}{(a^2-c^2)\,(b^2-c^2)}-b^2=0\\&\frac{a\,X}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{c\,(Z-C)}{\sqrt{b^2-c^2}};\ Y=0.\end{aligned}\right.$$

Dit geeft na eliminatie van C de verg.:

$$\text{(III)}\quad \frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)\,(a^2-b^2)}X^2-\frac{4\,a\,c}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)}}X\,Z+$$
$$+\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)\,(b^2-c^2)}Z^2=1$$
$$\text{met } Y=0,$$

een vergelijking, welke van de vorige slechts verschilt in het teeken van den gemengden term.

De meetkundige plaats van de polen der cyclische doorsneden bestaat dus uit 2 vlakke krommen, gelegen in het vlak van de grootste en kleinste as der ellipsoide.

§ 3. De vergelijking (II) is de voorstelling van een kegelsnede, waarvan men onmiddellijk kan opmerken, dat het een ellips is, omdat op een ellipsoide geen cirkels met oneindig grooten straal en in het oneindige gelegen polen voorkomen.

De ellips (II) heeft den oorsprong tot middelpunt, want, als X_0 en Z_0 aan haar vergelijking voldoen, zullen ook $-X_0$ en $-Z_0$ er aan voldoen. De assen der ellips zijn gedraaid ten opzichte van de coördinaatassen.

Schrijft men de verg. als

$$p\,X^2+2q\,X\,Z+r\,Z^2=1 \quad (2)$$

en subst.

$$\left\{\begin{aligned}X&=X'\cos\varphi-Z'\sin\varphi\\Z&=X'\sin\varphi+Z'\cos\varphi\end{aligned}\right.$$

dan gaat verg. (2) over in

$$(p\cos^2\varphi+q\sin 2\,\varphi+r\sin^2\varphi)\,X'^2+(-p\sin 2\,\varphi+$$
$$+2\,q\cos 2\,\varphi+r\sin 2\,\varphi)\,X'\,Z'+(p\sin^2\varphi-$$
$$-q\sin 2\,\varphi+r\cos^2\varphi)\,Z'^2=1.$$

Voor de waarde φ_0, welke voldoet aan:

$$-p \sin 2\varphi_0 + 2q \cos 2\varphi_0 + r \sin 2\varphi_0 = 0$$

$$tg\ 2\varphi_0 = \frac{p-r}{2q},$$

ontstaat de verg.:

(3). $(p \cos {}^2\varphi_0 + q \sin 2\varphi_0 + r \sin {}^2\varphi_0)\, X'^2 +$
$+ (p \sin {}^2\varphi_0 - q \sin 2\varphi_0 + r \cos {}^2\varphi_0)\, Z'^2 = 1.$

Substitueert men voor p, q en r hunne waarden, dan vindt men:

$$tg\ 2\varphi_0 = \frac{4\,a\,c\,\sqrt{(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)}}{(a^2+c^2)\,\{2b^2-(a^2+c^2)\}}.$$

Is $2\,b^2 > a^2 + c^2$, dan vindt men voor $2\,\varphi_0$ een hoek in het eerste en een hoek in het derde kwadrant; is $2\,b^2 < a^2 + c^2$, dan vindt men voor $2\,\varphi_0$ een hoek in het 2e en een in het 4e kwadrant, dus voor φ_0 waarden, van welke in beide gevallen er een scherp is.

Denkt men zich deze gekozen, dan gaat de verg. (3) over in:

$$\frac{a^4-c^4+\sqrt{(a^2+c^2)^2(2\,b^2-a^2-c^2)^2+16\,a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{2\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\,(a^2-c^2)}\,X'^2 +$$

$$+\frac{a^4-c^4-\sqrt{(a^2+c^2)^2(2\,b^2-a^2-c^2)^2+16\,a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{2\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\,(a^2-c^2)}\,Z'^2=1.$$

Kan deze ellips een cirkel zijn? Daarvoor is blijkbaar noodig, dat de vorm onder het wortelteeken verdwijnt. Deze vorm is een som van 2 positieve termen, dus zou

$$2\,b^2-a^2-c^2=(b^2-c^2)-(a^2-b^2)=0$$

èn bijv.: $a^2-b^2=0$

moeten zijn, 't welk voeren zou tot $a=b=c$.

Bij een drieassige ellipsoide is het dus niet mogelijk, dat cirkels als m. pl. der polen optreden.

§ 4. De vergelijking (III) is de voorstelling van een ellips, congruent met (II), maar in andere richting gedraaid ten opzichte van $o\,x$. De verg. kan geschreven worden als

$$p\,X^2-2\,q\,X\,Z+r\,Z^2=1.$$

Substitueert men weer $X = X' \cos \varphi - Z' \sin \varphi$; $Z = X' \sin \varphi + Z' \cos \varphi$, dan verdwijnt de term met $X'\,Z'$ voor een waarde φ' van φ, welke voldoet aan:

$$tg\,2\varphi' = -\frac{2\,q}{p - r} = -\,tg\,2\varphi_0.$$

Hieraan voldoet steeds

$$\varphi' = -\,\varphi_0.$$

Het blijkt dus, dat de ellipsen, waaruit de meetkundige plaats der polen bestaat, assen hebben, welke uit de as $o\,x$ ontstaan door een draaiïng over een hoek φ_0 naar weerskanten. De assen der ellipsen onderling maken een hoek, gegeven door

$$2\,\varphi_0 = arc\,tg\left|\frac{4\,a\,c\,\sqrt{(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2)}}{(a^2 + c^2)\left\{2\,b^2 - (a^2 + c^2)\right\}}\right|.$$

§ 5. De verg. II van § 2 bepalen een polenpaar als de snijpunten van den bol, die den bij de polen behoorenden cirkel tot grooten cirkel heeft, met de as van den cirkel.

De bol heeft een verg., welke geschreven kan worden als:

$$\left\{X - \frac{a\,c\,\sqrt{a^2 - b^2}}{(a^2 - c^2)\,\sqrt{b^2 - c^2}}\,C\right\}^2 + Y^2 + \\ + \left(Z + \frac{c^2}{a^2 - c^2}\,C\right)^2 = b^2\left\{1 - \frac{c^2\,C^2}{(a^2 - c^2)\,(b^2 - c^2)}\right\}.$$

De cirkelas wordt voorgesteld door:

$$\begin{cases} a\,\sqrt{b^2 - c^2}\;X + c\,\sqrt{a^2 - b^2}\;Z = c\,\sqrt{a^2 - b^2}\;C. \\ Y = 0. \end{cases}$$

Men kan dit weer opvatten als een verzameling cirkels en een schaar evenwijdige rechten, die aan elkaar zijn toegevoegd, gelegen in het vlak $x\,o\,z$ en waarvan twee bij elkaar behoorende exemplaren telkens een polenpaar bepalen:

$$\begin{cases} (4)\ \left\{X - \dfrac{a\,c\,\sqrt{a^2 - b^2}}{(a^2 - c^2)\,\sqrt{b^2 - c^2}}\,C\right\}^2 + \left(Z + \dfrac{c^2}{a^2 - c^2}\,C\right)^2 = \\ \qquad = b^2\left\{1 - \dfrac{c^2\,C^2}{(a^2 - c^2)\,(b^2 - c^2)}\right\}. \\ (5)\ a\,\sqrt{b^2 - c^2}\;X + c\,\sqrt{a^2 - b^2}\;Z = c\,\sqrt{a^2 - b^2}\;C. \end{cases}$$

Opm. Dit stelsel van cirkels heeft den index 2. Substitueert men de coörd. X en Z van een willekeurig punt van het vlak $x o z$ in de cirkelvergelijking, dan ontstaat n.l. een vierkantsvergelijking in C. Door het punt gaan dus 2 cirkels.

De cirkel (4) is een puntcirkel voor:

$$C = \pm \frac{1}{c} \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Voor waarden van C, gelegen tusschen deze, stelt (4) een reëelen cirkel voor.

§ 6. Laat in de figuur (fig. 2), welke voor een bijzonder geval ($z.o.$) geconstrueerd is, doch wel als model voor het algemeene kan dienen, cirkel M een der cirkels (4) zijn. De bijbehoorende rechte (5) is een rechte door M, welke den meetcirkel in 2 punten K_1 en K_2 (een polenpaar) van de meetkundige plaats snijdt. De cyclische doorsnede van de ellipsoide, welker polen K_1 en K_2 zijn, is de doorsnijding van het vlak, door M loodrecht op $K_1 K_2$ gebracht, met den bol, die cirkel M tot grooten cirkel heeft. Trekt men nu de lijn door M loodrecht op $K_1 K_2$ dan zijn de snijpunten L_1 en L_2 van deze lijn met cirkel M de snijpunten van de cyclische doorsnede met cirkel M en met de kromme (I), de doorsnede van de ellipsoide met het vlak $x o z$. De punten L_1 en L_2 zijn dus snijpunten van cirkel M met de kromme (I).

Als nu C verandert tusschen de bovengenoemde grenzen verplaatsen de punten K_1 en K_2 zich zoo over de kromme (II), dat de rechte $K_1 K_2$ een bundel evenwijdige stralen beschrijft. Het midden M van $K_1 K_2$ beweegt daarbij over een middellijn van (II), welker vergelijking men vindt, door tusschen de uitdrukkingen voor de coördinaten van M:

$$\xi = \frac{a c \sqrt{a^2 - b^2}}{(a^2 - c^2)\sqrt{b^2 - c^2}} C, \quad \mathfrak{z} = -\frac{c^2}{a^2 - c^2} C,$$

de grootheid C te elimineeren. De vergelijking is:

$$c \sqrt{b^2 - c^2}\, \xi + a \sqrt{a^2 - b^2}\, \mathfrak{z} = 0.$$

De coördinaten van de puntcirkels P_1 en P_2 zijn:

$$P_1 \begin{cases} \xi = -\dfrac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ \mathfrak{z} = \dfrac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} \xi = \dfrac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ \mathfrak{z} = -\dfrac{c\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \end{cases}$$

Beide stellen coördinaten voldoen aan de vergelijking der kromme (II) en aan die der kromme (I):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (I)$$

Bij de beweging van M langs $P_1 P_2$ beschrijft ook $L_1 L_2$, welke steeds in M loodrecht op $K_1 K_2$ staat, een bundel evenwijdige stralen. De bijbehoorende cirkel M gaat steeds door de 4 punten K_1, L_1, K_2, L_2. M is steeds het midden ook van $L_1 L_2$, zoodat $P_1 P_2$ ook middellijn is van de kromme (I).

Wanneer K_1 en K_2 in P_1 (P_2) samenvallen op (II), dan vallen L_1 en L_2 samen in P_1 (P_2) op (I) en de ellipsen snijden elkaar in P_1 en P_2 rechthoekig. Dit blijkt ook uit de vergelijkingen der raaklijnen, in P_1 bijv.:

aan I: $-c\sqrt{a^2 - b^2}\,x + a\sqrt{b^2 - c^2}\,z = ac\sqrt{a^2 - c^2}$,

„ II: $a\sqrt{b^2 - c^2}\,x + c\sqrt{a^2 - b^2}\,z =$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}.$$

De verg. III stellen een ellips voor, welke de symmetrie is van (II) ten opzichte van de as ox. De punten P_3 en P_4, de spiegelbeelden van P_2 en P_1, zijn de puntcirkels van de bijbehoorende cirkelverzameling.

§ 7. De bol uit de verzameling

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Cz = b^2 + \frac{c^2\,C^2}{b^2 - c^2} \qquad (6),$$

welke op de ellipsoide o.a. den cirkel bepaalt, welks polen K_1 en K_2 zijn, heeft zijn middelpunt op oz en op de lijn $K_1 K_2$, de as van de cirkelvormige doorsnede, dus in S. Een der door dezen bol bepaalde cyclische doorsneden is de cirkel, die $L_1 L_2$ tot middellijn heeft en welks vlak loodrecht vlak xoz staat, de andere is een cirkel, die de lijn $L_3 L_4$ (L_3 en L_4

zijn de spiegelbeelden van L_1 opv. L_2 t.o.v. $o\,z$) tot middellijn heeft en welks vlak loodrecht op het vlak $x\,o\,z$ staat.

Voor $C = -\frac{1}{c}\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$ snijdt de bol (6) op de ellipsoide de puntcirkels P_1 (op de kromme (II) gelegen) en P_3 (op (III) gelegen) in, deze bol raakt de ellipsoide in de genoemde punten. Zijn vergelijking is:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2}{c}\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\,z = a^2+b^2-c^2.$$

Het raakvlak in P_1 bijv. aan beide oppervlakken wordt voorgesteld door:

$$-c\sqrt{a^2-b^2}\,x + a\sqrt{b^2-c^2}\,z = a\,c\sqrt{a^2-c^2}.$$

Het middelpunt van dezen bol is het punt T, waar de raaklijn in P_1 aan de kromme (II) (de verbindingslijn der samengevallen punten K), de z-as snijdt.

§ 8. Wat de beweging der punten K, L en M betreft bij verandering van C, zijn de krommen (I) en (II) bij de ellipsoide, evenals bij de paraboloide, verwisselbaar. In aansluiting hiermee kan ook hier bewezen worden, dat de kromme (I) een gedeelte is van de meetkundige plaats van de polen der cyclische doorsneden eener ellipsoide, die het vlak $x\,o\,z$ snijdt volgens de kromme (II).

Om dit aan te toonen op de wijze, waarop het bij de behandeling der paraboloide bewezen is, zou men uit moeten gaan van de ellipsoide

$$\frac{a^4-c^4+\sqrt{(a^2+c^2)^2(2b^2-a^2-c^2)^2+16a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}X'^2+$$

$$+\frac{Y^2}{q^2}+$$

$$+\frac{a^4-c^4-\sqrt{(a^2+c^2)^2(2b^2-a^2-c^2)^2+16a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}Z'^2=1.$$

Men zou vervolgens op de boven besproken wijze uit deze vergelijking moeten afleiden die van de meetkundige plaats van de polen der cyclische doorsneden dezer ellipsoide (die het vlak $x\,o\,z$ snijdt volgens kromme (II)), en nagaan, welke waarde q moet hebben opdat de vergelijking van een gedeelte der meetkundige plaats identiek worde met die der kromme (I), wanneer men deze onderworpen heeft aan de transformatie van de ongeaccentueerde naar de geaccentueerde assen. Het bestaan van een dergelijke waarde van q zou n.l. de bewuste betrekking aantoonen.

Het bewijs kan echter ook zeer eenvoudig geleverd worden: De punten K_1 en K_2 zijn de polen van cirkel $L_1 L_2$ (loodrecht op 't vlak $x o z$), die, als M loopt van P_1 naar P_2, de oorspronkelijke ellipsoide beschrijft. Men kan echter ook L_1 en L_2 beschouwen als polen van den cirkel $K_1 K_2$, een grooten cirkel van denzelfden bol M, ook loodrecht staande op 't vlak $x o z$. Wat is nu, als M van P_1 naar P_2 loopt, het door den cirkel $K_1 K_2$ beschreven oppervlak?

De cirkel $K_1 K_2$ is de doorsnede van den bol M met het vlak door $K_1 K_2$ loodrecht op het vlak $x o z$. Hij wordt dus voorgesteld door:

$$\left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2\,a\,c\sqrt{a^2 - b^2}}{(a^2 - c^2)\sqrt{b^2 - c^2}}\,C x + \frac{2\,c^2}{a^2 - c^2}\,C z + \\ & \qquad + \frac{c^2\,(a^2 + c^2)}{(a^2 - c^2)\,(b^2 - c^2)}\,C^2 = b^2 \\ & a\sqrt{b^2 - c^2}\;x + c\sqrt{a^2 - b^2}\;z = c\,C\sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}\right.$$

Het door den cirkel $K_1 K_2$ beschreven oppervlak vindt men, door hiertusschen C te elimineeren. Het resultaat is de vergelijking:

$$\frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)\,(a^2 - b^2)}\,x^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)\,(b^2 - c^2)}\,z^2 +$$
$$+ \frac{4\,a\,c\,x\,z}{(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)\,(b^2 - c)}} = 1. \quad (7)$$

Dit is inderdaad de vergelijking van een ellipsoide, welke het vlak $x o z$ snijdt volgens de kromme (II). De in de y-richting gelegen as dezer ellipsoide is b, (de hierboven met q aangeduide grootheid blijkbaar), welke dus even groot is als de overeenkomstige as der oorspronkelijke ellipsoide. Uit de wijze, waarop de door de verg. (7) voorgestelde ellipsoide ontstaat, blijkt onmiddellijk, dat de ellips (I) de meetkundige plaats is van de polen van een reeks der cyclische doorsneden. De meetkundige plaats van de polen der andere cyclische doorsneden van (7) is een ellips, congruent met (I) en symmetrisch met deze gelegen ten opzichte van de assen van (II).

Verder bestaat er een ellipsoide, congruent met (7), welke de ellips (III) als doorsnede met het vlak xoz heeft. De bij deze ellipsoide behoorende meetkundige plaats bestaat uit (I) en een ellips, congruent met (I) en symmetrisch met deze gelegen ten opzichte van de assen van (III).

Zet men dit voort, dan vindt men twee reeksen ellipsoiden en twee reeksen ellipsen als doorsneden daarvan met het vlak xoz. De gelijknamige assen van twee opvolgende exemplaren uit een reeks maken hoeken $2\varphi_0$ met elkaar. Bij de ellipsoide, die een ellips van een der reeksen als doorsnede met het vlak xoz heeft, behooren als meetkundige plaats der polen de ellipsen uit de andere reeks, welker assen hoeken φ_0 maken met die der doorsnijdingsellips.

Is $2\varphi_0$ met 360° onderling meetbaar, dan vindt men eindige reeksen ellipsoiden (en ellipsen), zijn $2\varphi_0$ en 360° onderling onmeetbaar, dan vindt men oneindig voortloopende reeksen.

§ 9. De figuur is geteekend in de op blz. 27 niet genoemde onderstelling, dat

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

Dan is $tg\, 2\varphi = \infty$, $2\varphi = 90°$, dus

$$\varphi = 45°.$$

Men heeft dan verder:

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = \frac{a^2 - c^2}{2}.$$

De y-as der ellipsoide hangt dan op bepaalde wijze van de x- en de z-as af: haar vierkant is het rekenkundig gemiddelde van de vierkanten der andere.

De vergelijking der ellipsoide wordt dan:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2 + c^2}{2}} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

De vergelijking van de bollen (6), die op de ellipsoide de cirkels uitsnijden, gaat over in

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Cz = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{2c^2C^2}{a^2 - c^2}.$$

De cirkels worden op deze bollen bepaald door de vlakken

$$cx - az = \frac{2ac^2C}{a^2 - c^2}$$

en

$$cx + az = -\frac{2ac^2C}{a^2 - c^2}.$$

De polen worden bepaald door:

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 + Z^2 - \dfrac{2aC}{a^2 - c^2}X + \dfrac{2c^2C}{a^2 - c^2}Z + \dfrac{2c^2(a^2 + c^2)C^2}{(a^2 - c^2)^2} = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{a^2 + c^2}{2} \\ Y = 0 \\ \qquad C = \dfrac{aX + cZ}{c}, \end{array}\right.$$

en door:

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 + Z^2 + \dfrac{2aC}{a^2 - c^2}X + \dfrac{2c^2C}{a^2 - c^2}Z + \dfrac{2c^2(a^2 + c^2)C^2}{(a^2 - c^2)^2} = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{a^2 + c^2}{2} \\ Y = 0 \\ \qquad C = \dfrac{-aX + cZ}{c}. \end{array}\right.$$

Deze stellen geven bij de eliminatie van C:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2(a^2 + c^2)}{(a^2 - c^2)^2}X^2 \pm \dfrac{8ac}{(a^2 - c^2)^2}XZ + \dfrac{2(a^2 + c^2)}{(a^2 - c^2)^2}Z^2 = 1 \\ Y = 0. \end{array}\right.$$

De vergelijking met positieven coëfficient van XZ komt overeen met de ellips (II) in de figuur.

De vergelijkingen van de verzamelingen cirkels en rechten, die (II) voortbrengen, worden:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(X - \dfrac{acC}{a^2 - c^2}\right)^2 + \left(Z + \dfrac{c^2C}{a^2 - c^2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2}\left\{1 - \dfrac{2c^2C^2}{(a^2 - c^2)^2}\right\} \\ \quad Y = 0. \\ aX + cZ = cC. \end{array}\right.$$

De waarden van C, welke puntcirkels geven, zijn:

$$C = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{2}\,(a^2 - c^2),$$

de middelpuntscoördinaten der cirkels van het stelsel:

$$\xi = \frac{ac}{a^2 - c^2}\, C, \quad \mathfrak{z} = -\frac{c^2}{a^2 - c^2}\, C.$$

De middelpunten liggen op de rechte $P_1 P_2$:

$$c\xi + a\mathfrak{z} = 0.$$

De coördinaten van de puntcirkels zijn:

$$\xi_0 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \mathfrak{z}_0 = \mp \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

In het algemeene geval wordt de afstand d_0 van O tot een der puntcirkels gegeven door:

$$d_0^2 = \left(\frac{-a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right)^2 = a^2 - b^2 + c^2.$$

§ 10. De hoek Θ_0, dien de voerstraal uit O naar een puntcirkel met de as ox_+ maakt, volgt uit:

$$\sin^2 \Theta_0 = \frac{(b^2 - c^2)\, c^2}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}.$$

De hoek Θ_1 tusschen ox_+ en den voerstraal uit O, die een lengte b heeft, volgt uit:

$$\sin^2 \Theta_1 = \frac{(a^2 - b^2)\, c^2}{(a^2 - c^2)\, b^2}.$$

De waarden van Θ_0 en Θ_1, die hieraan voldoen, zijn in het algemeen verschillend, zij zijn gelijk voor het geval

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

of

$$2b^2 = a^2 + c^2,$$

d.w.z. het bij de constructie der figuur ondersteelde.

Dit volgt ook daaruit, dat hier

$$d_0^2 = \xi_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 = \frac{a_2 + c^2}{2} = b^2,$$

dus de voorstraal naar een puntcirkel tevens de voorstraal is, welke gelijk is aan de y-as der ellipsoide.

Hieruit volgt nu, dat in de figuur P_1P_2 en P_3P_4 toegevoegde middellijnen zijn der ellips (I). Want de vlakken door P_3P_4 en door de raaklijn in P_1 aan (I) loodrecht op het vlak xoy zijn cyclische vlakken van dezelfde reeks, dus evenwijdig. Dus zijn ook hun snijlijnen met het vlak xoz evenwijdig, d.w.z. de middellijn P_3P_4 is evenwijdig met de raaklijn in het uiteinde P_1 van de middellijn P_1P_2.

§ 11. Wat andere kwadratische oppervlakken betreft, kan men opmerken, dat de resultaten bij de hyperboloiden analoog zijn aan de bij de ellipsoide gevondene. Bij de eenbladige hyperboloide ontbreken de puntcirkels, omdat elk raakvlak de hyperboloide volgens twee rechten snijdt.

Op de hyperbolische paraboloide komen geen cirkels voor.

HOOFDSTUK III.

De meetkundige plaats van de polen der cirkels, die de exemplaren van een vlakkenbundel uit een met den vlakkenbundel projectieven bollenbundel uitsnijden.

§ 1. We beschouwen eerst:

De meetkundige plaats van de polen der cirkels, die de vlakken van een vlakkenbundel op een bol uitsnijden (fig. 3, a—f).

De oorsprong van het coördinatenstelsel zij het middelpunt van den bol; de as van den vlakken bundel zij de lijn, gegeven door

$$z = 0,\ y = k.$$

Dan is de vergelijking van den bol, als a zijn straal is:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \qquad (1)$$

die van den vlakken bundel:

$$y + \lambda z - k = 0. \qquad (2)$$

De polen van één der door de verg. (1) en (2) bepaalde cirkels zijn gegeven door:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 + 2\dfrac{-k}{1+\lambda^2}(Y + \lambda Z - k) = 0 \\ X = 0 \\ Y = \dfrac{Z}{\lambda}. \end{cases}$$

Eliminatie van λ hieruit geeft als vergelijking van de meetkundige plaats der polen der cirkels:

$$\begin{cases} X = 0. \\ (Y^2 + Z^2)(Y^2 + Z^2 - a^2) - 2kY(Y^2 + Z^2 - kY) = 0. \quad (3) \end{cases}$$

Deze vergelijking stelt voor een 4e graads kromme, gelegen in het vlak yoz, symmetrisch ten opzichte van de y-as.

De punten dezer kromme kunnen op eenvoudige wijze constructief bepaald worden. Het vlak yoz snijdt den bol volgens een cirkel, die O tot middelpunt en a tot straal heeft; het snijdt den vlakkenbundel volgens een waaier, die zijn top heeft in het punt T, met coördinaten $(0, k, 0)$. Snijdt een der vlakken van den bundel het vlak yoz volgens een lijn, die den cirkel in A' en B' snijdt, dan is $A'B'$ de middellijn van den cirkel, volgens welken het vlak den bol snijdt. De as van dien cirkel is de loodlijn OM' uit O op $A'B'$ neergelaten en de polen van den cirkel zijn de punten van OM', welke op afstand $M'A' = M'B'$ van M' liggen.

De door de vergelijking (3) voorgestelde kromme heeft een dubbelpunt in O. De snijding met $z = 0$ geeft (de toevoeging $x = 0$ is weggelaten en voor de coörd. zijn kleine letters gebruikt):

$$\begin{cases} y^2 = 0 \quad \text{en} \quad (y - k)^2 = a^2 - k^2. \\ z = 0. \end{cases}$$

Als men nu onderstelt $k > a$ (dus T buiten den cirkel), dan heeft de kromme alleen in O twee reëele punten met de y-as gemeen.

De dubbelpuntsraaklijnen zijn:

$$z = \pm \sqrt{\frac{2k^2 - a^2}{a^2}}\, y. \quad (4)$$

Ook meetkundig ziet men gemakkelijk in, dat de kromme 2 keer door O gaat. Trekt men n.l. uit T de lijnen TAB en TCD zóo, dat de hoeken AOB en COD recht zijn, dan komt van elk der cirkels AB en CD van den bol een der polen in O terecht. Een willekeurige rechte, door O getrokken, heeft met de kromme, behalve het dubbelpunt O, 2 buiten O vallende punten gemeen, op de loodlijnen op TAB en TCD zijn nu 3 der snijpunten met de kromme in O samen gevallen, deze lijnen zijn dus de dubbelpuntsraaklijnen. De lijn TAB b.v. is daardoor bepaald, dat de afstand van O tot TB $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ is. De vergelijking dezer lijn is:

$$y - \sqrt{\frac{2k^2 - a^2}{a^2}}\, z = k.$$

Die der loodlijn, uit O hierop neergelaten:

$$z = -\sqrt{\frac{2k^2 - a^2}{a^2}}\, y,$$

een der boven gevonden dubbelpuntsraaklijnen. Verder bewijst men eenvoudig, dat de kromme in Q en R, de niet in O gelegen polen der cirkels AB en CD, loodrecht op OQ, opv. OR, staat. De driehoeken $OM'A'$, OMA, ONC enz. hebben n.l. gelijke basis en tophoek; dan zal de gelijkbeenige driehoek daaronder de grootste som der opstaande zijden hebben. D.w.z.

$$OM + MA = OQ \text{ is max., zoo ook } OR.$$

Verder gaat de kromme door de snijpunten van den cirkel met oz en zij raakt aan de stralen, getrokken uit O naar de raakpunten van de raaklijnen uit T aan den cirkel; zij staat dus in die raakpunten loodrecht op de raaklijnen.

Nadert het punt T tot den cirkel (de as van den vlakkenbundel tot den bol), dan naderen de raakpunten van de raaklijnen uit T aan den cirkel tot E; de koorde AB nadert tot den stand ET, $\angle YOQ$ wordt kleiner.

Als P in E ligt, dus voor $k = a$, wordt de vergelijking der kromme:

$$(y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - a^2) - 2ay(y^2 + z^2 - ay) = 0.$$

Men kan dit schrijven als:

$$(y^2 - ay + z^2 - az)(y^2 - ay + z^2 + az) = 0,$$

$$\left\{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}a^2\right\}\left\{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}a^2\right\} = 0,$$

d.w.z. de 4°-graads kromme ontaardt in het samenstel van 2 cirkels. De verg. (4) worden nu:

$$z = \pm\, y,$$

dit komt overeen met den stand EF van AB in dit geval.

Meetkundig: De meetkundige plaats van M' is in dit geval de cirkel, die OE tot middellijn heeft. Men vindt het punt Q_1, door te nemen $O\,Q_1 = O\,M' + M'\,E$. De meetkundige plaats van Q_1 is dan de cirkelboog, die $O\,E$ tot koorde en $\frac{1}{2} \angle M = 45° = \angle\, O\,F\,E$ tot hoek heeft. Een overeenkomstige redeneering geldt voor de andere cirkelbogen.

Wanneer T in E gekomen is, heeft de kromme voor het eerst 4 reëele snijpunten met de y-as. Komt T binnen den cirkel te liggen, is dus $k < a$, dan blijft dit zoo. Deze punten volgen uit:

$$y^2\,(y^2 - a^2) - 2\,k\,y\,(y^2 - k\,y) = 0.$$

$$y^2 = 0,\ y = k \pm \sqrt{a^2 - k^2},$$

d.w.z. het dubbelpunt O en 2 punten, welke als polen behooren bij den cirkel, welks vlak loodrecht op $o\,y$ staat.

Wanneer k afneemt van a tot $\frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ beweegt een dezer punten, H, zich naar rechts, het andere, I, naar links. H heeft als y-coörd.:

$$y_H = k + \sqrt{a^2 - k^2}$$

en $\dfrac{d\,y_H}{d\,k} < o$, d.w.z. y_H neemt toe bij afnemende k, als $k^2 > \frac{1}{2}\,a^2$.

Voor $k = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ wordt $y_H = a\sqrt{2} = O\,Q = O\,R$, dus als $k > \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$, dan is $O\,H < O\,Q$ en $O\,R$.

Daar de kromme symmetrisch is ten opzichte van de y-as en H en I enkelvoudige punten zijn, staat ze in deze punten loodrecht op $o\,y$; verder is $O\,H$ een minimum, $O\,I$ een maximum voerstraal.

Uit $y_I = k - \sqrt{a^2 - k^2}$

volgt: $\dfrac{d\,y_I}{d\,k} = 1 + \dfrac{k}{\sqrt{a^2 - k^2}}$, dus voor alle waarden van k, gelegen tusschen a en 0 positief. Bij afnemende k beweegt het punt I zich voortdurend naar links.

Voor $k = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ wordt de vergelijking der kromme:

$$(y + z)^2\,(y^2 + z^2 - a^2) - a\sqrt{2}\,y\,(y^2 + z^2 - \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{2}\,y) = 0,$$

en de snijpunten met de y-as worden bepaald door:

$$y^3 = 0,\ y = a\sqrt{2}.$$

Het punt I is in O gekomen, de kromme heeft daar een keerpunt, met oy als keerpuntsraaklijn. De koorden AB en CD vallen hier samen in de koorde, in T loodrecht op oy getrokken; de punten Q en R liggen op oy samengevallen met H.

Stelt men

$$y = \rho \cos \varphi,\ z = \rho \sin \varphi,$$

dan wordt de vergelijking:

$$\rho^2 (\rho^2 - a\sqrt{2}\, \rho \cos \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) = 0,$$

of:

$$\rho^2 = 0 \quad \rho^2 - a\sqrt{2}\, \rho \cos \varphi - a^2 \sin^2\varphi = 0.$$

De laatste vergelijking geeft voor de positieve waarde van ρ:

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2} (\cos \varphi + \sqrt{1 + \sin^2\varphi})$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \sin \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi}} - 1 \right).$$

Dit is negatief voor alle waarden van $\varphi < 180°$, zoodat de voerstraal uit O naar de punten der kromme getrokken, steeds afneemt, als hij wentelt van OH in de richting oy_+ naar oz^+.

Neemt k verder af, dan geeft de verg. (4) aan, dat O is geworden een geïsoleerd dubbelpunt. De koorden AB en CD bestaan niet meer: alle koorden zijn grooter dan $a\sqrt{2}$. De punten H en I naderen de uiteinden van de horizontale middellijn van den cirkel. Verder is:

$$\rho = k \cos \varphi + \sqrt{a^2 - k^2 \cos^2\varphi}$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k \sin \varphi \left(-1 + \frac{\frac{k}{a} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2} \cos^2\varphi}} \right).$$

Dat dit negatief is voor waarden φ tusschen 90° en 180° blijkt onmiddellijk. Nu is echter, als men $k^2 = \frac{1}{2} a^2 (1 - \delta)$ stelt:

$$\frac{k}{a} \cos \varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, \sqrt{1 - \delta} \cos \varphi,$$

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2} \cos^2\varphi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, \sqrt{1 + \delta} \cos \varphi \quad \text{als } \varphi < 90° \text{ is,}$$

dus:

$$\frac{\frac{k}{a}\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}\cos^2\varphi}} = \frac{1-\delta}{1+\delta} < 1, \text{ dus ook } \frac{d\rho}{d\varphi} < 0.$$

Men heeft dus ook hier weer, dat de voerstraal voortdurend afneemt, als een punt zich langs de kromme van H over F naar I beweegt; n.l. van $k + \sqrt{a^2 - k^2}$ tot $-k + \sqrt{a^2 - k^2}$.

Is ten slotte T in O gekomen, als $k = 0$, dan wordt de vergelijking der kromme:

$$(y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - a^2) = 0,$$

d.w.z. de kromme bestaat uit den cirkel OF en O als puntcirkel. Schuift T naar het oneindige, dan wordt de kromme tenslotte samengedrongen op de z-as tusschen 2 punten, welker z-coördinaten zijn $\pm a\sqrt{2}$.

§ 2. Men denke zich nu een vlakkenbundel en een bollenbundel, tusschen welker elementen een verwantschap een aan een bestaat. Een vlak uit den eenen en de toegevoegde bol uit den anderen bundel bepalen een cirkel. Wat is de meetkundige plaats van de polen van alle cirkels, die de projectieve bundels bepalen?

Stel, dat de vlakkenbundel bepaald wordt door de vlakken:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = c & \text{(waarin } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ gesteld mag worden)} \\ z = h, & \end{cases}$$

dan is de vergelijking van den bundel:

$$\alpha x + \beta y - c + \lambda (z - h) = 0$$

of:
$$\alpha x + \beta y + \lambda z - (c + \lambda h) = 0. \qquad (1)$$

De as van den vlakkenbundel is dus een rechte, evenwijdig met het vlak $x\,o\,y$ op een afstand h daarvan.

Zonder nu te kort te doen aan de algemeenheid, wat betreft de plaatsing van de twee bundels ten opzichte van elkaar, mag men als centraal van den bollenbundel de x-as kiezen en 't $y\,o\,z$-vlak als symmetrievlak.

In een bollenbundel zijn steeds de exemplaren twee aan twee gelijk. Heeft men n.l. den bundel:

$$(x^2+y^2+z^2-Ax-2By-2Cz+D)+\rho(x^2+$$
$$+y^2+z^2-2A'x-2B'y-2C'z+D')=0,$$

of: $(1+\rho)(x^2+y^2+z^2)-2(A+\rho A')x-$
$$-2(B+\rho B')y-2(C+\rho C')z+(D+\rho D')=0,$$

dan wordt de straal van een willekeurigen bol uit den bundel gegeven door:

$$R^2=\frac{(A+\rho A')^2+(B+\rho B')^2+(C+\rho C')^2-(1+\rho)(D+\rho D')}{(1+\rho)^2}.$$

Dit geeft voor een bepaalde waarde van R twee waarden van ρ, d.w.z. twee (in 't algemeen verschillende) bollen, welke gelijken straal hebben. Het is dus geoorloofd, een bollenbundel met behulp van twee gelijke exemplaren samen te stellen. De eene bol zij:

$$x^2+y^2+z^2-2Ax+D=0,$$

de andere:

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+D=0,$$

dan wordt de bundel voorgesteld door:

$$(1+\rho)(x^2+y^2+z^2)-2A(1-\rho)x+(1+\rho)D=0,$$

of:

$$x^2+y^2+z^2-2\frac{1-\rho}{1+\rho}Ax+D=0.$$

Nu mag $\dfrac{1-\rho}{1+\rho}=\lambda$ als parameter aangenomen worden, want tusschen ρ en λ bestaat een lineair verband. De vergelijking van den bollenbundel wordt dan:

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda Ax+D=0. \quad (2)$$

Het cyclisch oppervlak, door de beide projectieve bundels bepaald, dus voorgesteld door:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\lambda z-(c+\lambda h)=0 \\ x^2+y^2+z^2-2\lambda Ax+D=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

is een derdegraads oppervlak (σ_3), zooals blijkt, wanneer men λ elimineert tusschen de verg. (3).

§ 3. Denkt men zich één bol van den bundel (2) gesneden met àlle vlakken van den vlakkenbundel, dan behoort bij de hierdoor verkregen cirkels als meetkundige plaats der polen een vlakke vierdegraads kromme ρ_4 van een der boven besproken typen, al naar den afstand van het middelpunt van den bol tot de as van den vlakken bundel, in verband met den straal van den bol. Het vlak dier kromme gaat door het middelpunt van den bol en staat loodrecht op de as van den vlakkenbundel. Wordt deze bewerking toegepast op alle bollen van den bundel (2), dan ontstaat een verzameling van dergelijke krommen ρ_4, gelegen in vlakken, welke evenwijdig zijn, omdat zij alle loodrecht staan op de as van den vlakkenbundel. Deze krommen hebben als meetkundige plaats een vierdegraads oppervlak σ_4, de meetkundige plaats van de polen van de tweevoudige oneindigheid van cirkels, die alle vlakken van den vlakkenbundel met alle bollen van den bollenbundel bepalen.

Elke ρ_4 op dit oppervlak σ_4 draagt nu tot de gezochte meetkundige plaats ρ_n 2 punten bij. Een ρ_4 behoort n.l. bij een bol uit den bollenbundel; hieraan wordt door de verwantschap een vlak uit den vlakkenbundel toegevoegd. Bol en vlak bepalen een cirkel, welke, als cirkel van den bol, zijn polen heeft op ρ_4 en ook op de as van den cirkel, dat is de loodlijn, uit het middelpunt van den bol op het vlak van den cirkel neergelaten. Deze loodlijn ligt in het vlak van ρ_4. ρ_4 heeft in het middelpunt van den bol een dubbelpunt en de beide andere snijpunten van de loodlijn met ρ_4 zijn de bij den op den bol gelegen cirkel behoorende polen.

De kromme ρ_n is dus gelegen op σ_4 en wordt daarop uitgesneden door de loodlijnen, die men uit de middelpunten der bollen op de bijbehoorende vlakken kan neerlaten. Deze loodlijnen vormen een kwadratische regelschaar σ_2, welke de as van den bollenbundel tot richtlijn en een vlak, loodrecht op de as van den vlakkenbundel tot richtvlak heeft.

De as van den bollenbundel, welke bij het opstellen der vergelijkingen als x-as genomen is, is een dubbelrechte van σ_4. Elke ρ_4 heeft n.l. een dubbelpunt op die lijn, zoodat het oppervlak er met 2 bladen doorheen moet gaan. De regelschaar σ_2 bevat ook de as van den bollenbundel als rechte. De achtstegraads doorsnijding van de oppervlakken σ_4 en σ_2 zal dus voor een gedeelte bestaan uit de dubbel te tellen gemeenschappelijke rechte der beide oppervlakken, zoodat de gezochte meetkundige plaats ρ_n is een 6^e-graads ruimtekromme ρ_6, de gedeeltelijke doorsnijding der opp. σ_4 en σ_2.

§ 4. Analytisch blijkt dit als volgt:

Een kromme ρ_4 is de meetkundige plaats van de polen van een stelsel van cirkels, bepaald door:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \mu z - (\mu h + c) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda A x + D = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

als μ in de 1e vergelijking veranderlijk gedacht wordt.

De polen van één der door (4) voorgestelde cirkels volgen uit:

$$(5)\left\{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\lambda A X + D + \\ + 2\dfrac{\lambda\alpha A - \mu h - c}{1 + \mu^2}(\alpha X + \beta Y + \mu Z - \mu h - c) = 0 \quad (a) \\ \dfrac{X - \lambda A}{\alpha} = \dfrac{Y}{\beta} = \dfrac{Z}{\mu}. \quad (b) \end{array}\right.$$

ρ_4 wordt voorgesteld door de vergelijkingen, welke ontstaan door eliminatie van μ uit de verg. (5). Uit de laatste gelijkheid van (5) volgt:

$$\mu = \beta \frac{Z}{Y}.$$

Substitutie hiervan in (a) geeft, na herleiding:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} (Y^2 + \beta^2 Z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\lambda A X + D) + \\ \quad + 2(\lambda\alpha A Y - c Y - \beta h Z)(\alpha X Y + \beta Y^2 + \\ \qquad\qquad + \beta Z^2 - c Y - \beta h Z) = 0 \\ \text{in } (b): \\ \qquad \beta X - \alpha Y = \lambda\beta A. \end{array}\right.$$

Om nu de vergelijking van het oppervlak σ_4 te vinden moet men uit de verg. (6) λ elimineeren. Het resultaat is:

$$(7)\quad (Y^2 + \beta^2 Z^2)\left(- X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\frac{\alpha}{\beta} X Y + D\right) +$$
$$+ 2\left(\alpha X Y - \frac{\alpha^2}{\beta} Y^2 - c Y - \beta h Z\right) \times$$
$$\times (\alpha X Y + \beta Y^2 + \beta Z^2 - c Y - \beta h Z) = 0.$$

De gevraagde meetkundige plaats wordt nu op dit oppervlak uitgesneden door de regelschaar, welke men verkrijgt, door uit het middelpunt van elken bol een loodlijn neer te laten op het aan dien bol toegevoegde vlak van den vlakkenbundel. Dus uit het punt:

$$\lambda A,\ 0,\ 0,$$

op het vlak

$$\alpha x + \beta y + \lambda z - (\lambda h + c) = 0.$$

De vergelijking van die lijn is:

$$\frac{X - \lambda A}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\lambda},$$

die van het regelvlak:

$$\beta X Y - \alpha Y^2 = \beta^2 A Z. \quad (8)$$

De meetkundige plaats wordt dus voorgesteld door:

$$(9) \begin{cases} (Y^2 + \beta^2 Z^2)\left(- X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\frac{\alpha}{\beta} XY + D\right) + \\ \quad + 2\left(\alpha X Y - \frac{\alpha^2}{\beta} Y^2 - cY - \beta h Z\right) \times \\ \quad \times (\beta Y^2 + \beta Z^2 + \alpha X Y - c Y - \beta h Z) = 0 \\ \beta X Y - \alpha Y^2 = \beta^2 A Z, \end{cases}$$

voor zoover hiertoe niet behoort de x-as.

Dat het oppervlak σ_4 de x-as tot dubbelrechte heeft, blijkt, als men de vergelijking (7) combineert met die van een willekeurig vlak door de x-as:

$$Z = k Y. \quad (10)$$

Eliminatie van Z uit de verg. (7) en (10) geeft als xy projectie der snijkromme:

$$(10a) \begin{cases} (1 + k^2\beta^2)\left\{- X^2 + (1 + k^2) Y^2 + 2\frac{\alpha}{\beta} XY + D\right\} + \\ \quad + 2\left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{\beta} Y - \beta h k - c\right) \times \\ \quad \times \left\{\alpha X + \beta (1 + k^2) Y - \beta h k - c\right\} = 0 \\ Y^2 = 0, \end{cases}$$

dus een kegelsnede en de dubbel te tellen x-as.

§ 5. Dat de gezochte meetkundige plaats een 6e graads kromme is, blijkt ook uit het volgende.

De polen van een der cirkels uit de verzameling worden bepaald door de vergelijkingen:

$$(11)\left\{\begin{aligned}&X^2+Y^2+Z^2-2\lambda AX+D+\\&+2\frac{\lambda\alpha A-\lambda h-c}{1+\lambda^2}(\alpha X+\beta Y+\lambda Z-\lambda h-c)=0\\&\frac{X-\lambda A}{\alpha}=\frac{Y}{\beta}=\frac{Z}{\lambda}.\end{aligned}\right.$$

De vergelijkingen (11) zijn, als λ veranderlijk is, een voorstelling van de meetkundige plaats.

Uit de laatste der verg. (11) kan men oplossen:

$$X=\frac{\alpha}{\beta}Y+\lambda A \qquad (12b)$$

$$Z=\frac{\lambda}{\beta}Y. \qquad (12c)$$

Substitutie hiervan in de eerste der verg. (11) geeft voor Y:

$$Y^2+2Y\frac{\beta(\lambda\alpha A-\lambda h-c)}{1+\lambda^2}-$$
$$-\beta^2\frac{(\lambda^2A^2-D)(1+\lambda^2)-2(\lambda\alpha A-\lambda h-c)^2}{(1+\lambda^2)^2}=0$$

of: $Y=\dfrac{\beta}{1+\lambda^2}\times$

$$\times\left\{-(\lambda\alpha A-\lambda h-c)\pm\sqrt{(\lambda^2A^2-D)(1+\lambda^2)-(\lambda\alpha A-\lambda h-c)^2}\right\}. \qquad (12a)$$

Men kan nu de vergelijkingen (12) opvatten als een parametrische voorstelling der kromme met λ als parameter. Om den graad der kromme te vinden substitueert men in de vergelijking van een willekeurig vlak:

$$PX+QY+RZ+T=0 \qquad (13)$$

eerst (12b) en (12c). Dit geeft:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}P+Q+\frac{\lambda}{\beta}R\right)Y+P\lambda A+T=0.$$

Substitueert men daarna (12a), dan vindt men, na kwadrateering:

$$\begin{aligned}
&2(Pa+Q\beta+R\lambda)^2(\lambda a A-\lambda h-c)^2+\\
&+2(Pa+Q\beta+R\lambda)(-\lambda a A+\lambda h+c)(T+P\lambda A)(1+\lambda^2)+\\
&+(T+P\lambda A)^2(1+\lambda^2)^2-\\
&-(Pa+Q\beta+R\lambda)(\lambda^2A^2-D)(1+\lambda^2)=0, \qquad (14)
\end{aligned}$$

dus een 6^{e} graads vergelijking in λ, waarin de coïfficient van λ^6 is:

$$A^2(P^2-R^2).$$

De oplossing van de vergelijking (14) levert 6 waarden voor λ. Deze bepalen echter, in de vergelijkingen (12) gesubstitueerd, 12 punten. Maar elke waarde van λ bepaalt slechts één punt, dat in het vlak (13) gelegen is. Men kan n.l. de vergelijking, waaraan voldaan moet worden, en die na kwadrateering de verg. (14) geeft, voorstellen door:

$$L_1=\pm\sqrt{L_2}.$$

Een waarde van λ, die aan (14) voldoet, zal nu L_1 gelijk maken òf aan $+\sqrt{L_2}$, of aan $-\sqrt{L_2}$, hetgeen daarop neerkomt, dat voor elk der 6 waarden van λ één der waarden van (12a) in aanmerking komt; dus liggen in het vlak (13) 6 snijpunten met de kromme.

Ook kan men opmerken, dat een bij zekere waarde van λ behoorend, door de vergelijkingen (12) bepaald, puntenpaar gelegen is op een beschrijvende der schaar σ_2. Nu gaat een willekeurig vlak (13) niet door een dezer beschrijvenden, dus zal van een door (12) bepaald puntenpaar, dat behoort bij een aan (14) voldoende waarde van λ, slechts één punt in het vlak (13) liggen.

§ 6. Een willekeurig vlak V door de x-as snijdt σ_4, behalve volgens de dubbel te tellen x-as, in een kegelsnede (verg. (10)), het 2^{e}-graads regelvlak σ_2 volgens de x-as en een andere rechte. Rechte en kegelsnede hebben 2 snijpunten, welke punten zijn van ρ_6, gelegen in V.

Daar het vlak V willekeurig is, ligt het voor de hand, te vermoeden, dat 4 der snijpunten van V met ρ_6 op de x-as liggen. Dat dit vermoeden juist is, blijkt meetkundig als volgt:

Door een willekeurig punt A van de x-as gaat een 2^{e} rechte van σ_2. Deze rechte bepaalt met de x-as een vlak W, dat σ_4 snijdt volgens de x-as en een kegelsnede. Deze kegelsnede snijde de x-as in de punten B en B'. Beschouw nu de verwantschap tusschen de punten A en B. Bij één punt A behooren blijkbaar 2 punten B.

Om te bepalen, hoeveel punten A bij één punt B behooren, merke men op, dat het bovengenoemde vlak $W \sigma_4$ *raakt* in de punten B en B'. Door een punt B_1 van de x-as kan men nu aanbrengen 2 raakvlakken aan σ_4, n.l. één aan elk der bladen, welke door de x-as gaan. Elk dezer vlakken bevat, behalve de x-as, tevens een 2e rechte van σ_2, welke de x-as snijdt in een aan het punt B_1 toegevoegd punt A. Bij een punt B behooren dus 2 punten A. De verwantschap tusschen de punten A en B heeft dus als kenmerkende getallen (2, 2). Zij bevat dus 4 coïncidenties.

Een punt nu, op de x-as, waarin een punt A en een bijbehoorend punt B zijn samengevallen, is een snijpunt van de x-as met ρ_6. De centraal van den bollenbundel heeft dus 4 snijpunten met de meetkundige plaats der polen.

En analytisch:

Een snijpunt van ρ_6 met de x-as heeft men dàn, wanneer een cirkel uit de verzameling een zijner polen op de x-as heeft, d.w.z. in het middelpunt van den bol, waarop de cirkel gelegen is. Dit zal het geval zijn, als de straal van den cirkel gelijk is aan den afstand van het middelpunt van den bol tot het vlak van den cirkel, dus $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal den straal van den bol.

Nu is van den bol

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda A x + D = 0$$

de straal bepaald door

$$R^2 = \lambda^2 A^2 - D.$$

De afstand van het middelpunt (λA, 0, 0) van den bol tot het bij den bol behoorende vlak

$$\alpha x + \beta y + \lambda z - (\lambda h + c) = 0$$

wordt bepaald door:

$$a^2 = \frac{(\lambda \alpha A - \lambda h - c)^2}{1 + \lambda^2}.$$

Nu moet: $a = \frac{1}{2} R\sqrt{2}$, dus $a^2 = \frac{R^2}{2}$, dus

$$\frac{(\lambda a A - \lambda h - c)^2}{1 + \lambda^2} = \frac{\lambda^2 A^2 - D}{2}$$

zijn. Dit geeft de vergelijking:

$$A^2 \lambda^4 + (A^2 - 2a^2 A^2 + 4 a A h - 2 h^2 - D) \lambda^2 +$$
$$+ 4 (a A - h) c \lambda - (D + c^2) = 0. \quad (15)$$

De bij de 4, aan deze vergelijking voldoende, waarden van λ behoorende cirkels hebben een pool op ox; deze heeft dus 4 snijpunten met ρ_6.

§ 7. Het derdegraadsoppervlak σ_3 is opgebouwd uit de cirkels, bepaald door de verg. (3). Van een cirkel dezer verzameling wordt de straal gevonden uit de eerste der verg. (5), n.l. die van den bol, welke den cirkel tot grooten cirkel heeft. Gemakkelijker vindt men hem, door op te merken, dat het kwadraat van den straal van den cirkel (3) gelijk is aan het kwadraat van den straal van den bol (3), waarop hij ligt, verminderd met het kwadraat van den afstand van het middelpunt van dien bol tot het vlak (3). Het resultaat is:

$$r^2 = \lambda^2 A^2 - D - \frac{(\lambda a A - \lambda h - c)^2}{1 + \lambda^2}.$$

Nu is voor 4 waarden van λ $r^2 = 0$, n.l. voor die, welke voldoen aan de 4^e-graads vergelijking:

$$(1 + \lambda^2)(\lambda^2 A^2 - D) = (\lambda a A - \lambda h - c)^2.$$

Het bij een zoodanige waarde λ_0 van λ behoorende stel (3) heeft als snijcirkel een punt, het is dus een bol en een vlak, die elkaar raken. In 't algemeen zal het dus 4 keeren voorkomen, dat een vlak en de bijbehoorende bol elkaar raken. Van een puntcirkel vallen de polen met den puntcirkel samen. De 4 puntcirkels op σ_3 zijn dus tevens punten van ρ_6, dus snijpunten van beide.

Men ziet nu gemakkelijk in, dat, als voor $\lambda = \lambda_0$ $r^2 = 0$ is, dit in het algemeen niet een minimum waarde van r^2 is. Was dit n.l. wel het geval, dan zou voor $\lambda = \lambda_0 \pm \delta$, (waarin δ klein) de snijcirkel (3) een reëele, kleine cirkel zijn en dan zou de vorm van het oppervlak σ_3 in de buurt van den puntcirkel P zoodanig zijn, dat een door P gelegd vlak met

σ_3 een doorsnede zou hebben met een dubbelpunt in P. Een vlak, door 3 der 4 punten P gebracht, zou dan als doorsnede met σ_3 moeten hebben een 3e graads kromme met 3 dubbelpunten. Dit is onmogelijk, tenzij die doorsnijdingskromme ontaardt in de rechten $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$. Neemt men dan echter ook het 4e punt P_4 in aanmerking, dan zouden op σ_3 gelegen moeten zijn de ribben van het tetraëder $P_1 P_2 P_3 P_4$. Nu is de vergelijking van σ_3:

$$(z - h)(x^2 + y^2 + z^2 + D) + 2Ax(\alpha x + \beta y - c) = 0.$$

De kegel, die de oneindig verre punten van dit oppervlak uit den oorsprong van het coördinatenstelsel projecteert, heeft tot vergelijking:

$$z(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Het reëele deel hiervan is slechts het vlak xoy. Het is dus onmogelijk, dat de ribben van bovengenoemd viervlak op σ_3 liggen.

Daar nu r^2 voor $\lambda = \lambda_0$ niet een minimum is, zal bijv. de waarde van r^2, die met $\lambda = \lambda_0 - \delta$ correspondeert positief, die, welke met $\lambda = \lambda_0 + \delta$ overeenkomt, negatief zijn. Op de bij $\lambda = \lambda_0 - \delta$ behoorende beschrijvende van σ_2 liggen 2 gescheiden punten van ρ_6, op de bij $\lambda = \lambda_0$ behoorende 2 samenvallende, en die, welke bij $\lambda = \lambda_0 + \delta$ behoort, bevat geen punten van ρ_6. Deze raakt dus in de punten P aan de bijbehoorende beschrijvende lijnen van σ_2 en staat in die punten loodrecht op σ_3.

§ 8. De kromme ρ_6 heeft 2 reëele snijpunten met het oneindig verre vlak. Dit volgt uit het feit dat de cirkelverzameling slechts één oneindig grooten cirkel kan bevatten, omdat de bollenbundel slechts één oneindig grooten bol heeft.

Maar ook volgt het uit de vergelijkingen. De vergelijkingen, welke de kegels voorstellen, die de doorsnijdingen van σ_4 en σ_2 met het oneindig verre vlak uit den oorsprong projecteeren, zijn:

$$\begin{cases} (Y^2 + \beta^2 Z^2)\left(-X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\dfrac{\alpha}{\beta} XY\right) + \\ \qquad + 2\left(\alpha XY - \dfrac{\alpha^2}{\beta} Y^2\right)(\alpha XY + \beta Y^2 + \beta Z^2) = 0 \\ (\beta X - \alpha Y)\, Y = 0. \end{cases}$$

Dit stelsel valt uiteen in 3 andere:

$$(16a)\begin{cases} X^2 - Z^2 = 0. \\ Y = 0. \end{cases} \qquad (16b)\begin{cases} Z^2 = 0 \\ Y = 0. \end{cases}$$

$$(16c)\begin{cases} (Y^2 + \beta^2 Z^2)^2 = 0 \\ X = \frac{\alpha}{\beta}\, Y. \end{cases}$$

Hiervan geeft (16*c*) alleen den oorsprong aan. (16*b*) heeft betrekking op het oneindig verre punt van de x-as, 't welk geen punt van ρ_6 is, daar (15) geen oneindig groote waarde van λ als wortel heeft. De verg. (16*a*) geven 2 richtingen aan, in welke ρ_6 een oneindig ver gelegen punt heeft.

En ook blijkt het uit de verg. (14). Deze heeft als coëfficient van λ^6:

$$A^2 (P^2 - R^2).$$

Deze verdwijnt, d.w.z. (14) heeft een oneindig grooten wortel, als

$$P = \pm R.$$

Dan wordt de vergelijking van het vlak (13)

$$P (X \pm Z) + Q\, Y + T = 0,$$

d.i. de vergelijking van een vlak, evenwijdig aan een der door (16*a*) voorgestelde richtingen.

§ 9. De op σ_2 gelegen kromme ρ_6 bestaat nu, in de onderstelling dat de verg., die de punten P bepaalt, 4 reëele wortels heeft, uit twee stukken, waarvan het eene geheel in het eindige ligt, het andere bestaat uit 2 gedeelten, welke in de oneindig verre punten der kromme aaneensluiten.

Het eerstgenoemde stuk ligt tusschen de beschrijvenden van σ_2, welke bijv. door P_2 en P_3 gaan. Alle beschrijvenden van σ_2 tusschen deze twee bevatten 2 reëele punten van ρ_6. De beschrijvenden, gelegen tusschen die van P_1 en P_2 en tusschen die van P_3 en P_4, bevatten geen punten van ρ_6; de gedeelten van het 2° bovengenoemde stuk liggen op de beschrijvenden, gelegen buiten die van P_1 en P_4. De kromme raakt, zooals reeds opgemerkt is, de beschrijvenden der punten P in die punten en staat er loodrecht op het cyclische oppervlak, dat de punten P als puntcirkels bevat.

Heeft de genoemde vergelijking slechts 2 reëele wortels, dan ontbreken b.v. de punten P_2 en P_3 en het tusschen deze punten begrepen gedeelte van ρ_6. De kromme bestaat dan uit 2 takken, welke de beschrijvenden van P_1 en P_4 op σ_2 in die punten raken, daar loodrecht op σ_3 staan en in de 2 oneindig verre punten samenhangen.

Heeft de vergelijking geen reëele wortels (een geval, dat zich zal voordoen, wanneer de bollenbundel een basiscirkel heeft, welke de as van den vlakkenbundel omsluit) dan ontbreken de punten P alle. ρ_6 bestaat dan uit twee gedeelten, die met alle beschrijvenden van σ_2 2 gescheiden punten gemeen hebben.

§ 10. De kromme ρ_6 ligt op het oppervlak σ_2. Zij snijdt de als x-as gekozen rechte van σ_2 (welke behoort tot de schaar, welker exemplaren met een a worden aangeduid) in 4 punten, de exemplaren der andere schaar (lijnen b) in 2 punten. Legt men nu een vlak V door een willekeurig stel lijnen a en b, dan heeft ρ_6 6 snijpunten met V, welke liggen op de doorsnijding van σ_2 en V, dus op de lijnen a en b. 2 er van liggen op b, dus 4 op a.

Hieruit volgt, dat de punten van ρ_6 zoodanig over de rechten van σ_2 zijn verdeeld, dat de lijnen van de eene schaar van σ_2 vier, die der andere twee punten van ρ_6 dragen.

Denken we ons nu, dat de kromme ρ_6 uit een willekeurig punt O van σ_2 wordt geprojecteerd en de projecteerende kegel gesneden met een willekeurig vlak W. De doorsnede is dan een kromme van den 6^{en} graad k_6, waarvan het volgende is op te merken.

Stel, dat de door O gaande lijnen a en b van σ_2 het vlak W in A opv. B snijden, dan is, op grond van het voorgaande, A een 4-voudig, B een 2-voudig punt van k_6. Andere meervoudige punten bezit k_6 niet. Daarvoor zou toch noodig zijn, dat andere projecteerende stralen uit O dan a en b 2 of meer punten met ρ_6 gemeen hadden, dus met σ_2 3 of meer punten. Deze lijnen zouden dan geheel op σ_2 liggen, hetgeen onmogelijk is. Het 4-voudige punt A en het 2-voudige punt B

van k_6 zijn te zamen voor $\frac{4 \times 3}{2} + 1 = 7$ gewone dubbelpunten te tellen.

Verder kan k_6 geen keerpunten bezitten. Een keerpunt zou n.l. zijn het snijpunt van een raaklijn uit O aan ρ_6 met W. Deze raaklijn aan ρ_6 zou tevens raaklijn aan σ_2 zijn en dus geheel op σ_2 liggen, wat onmogelijk is. Het aantal keerpunten van k_6 is dus 0. Voor deze kromme geldt dus:

graad: $n = 6$,
aantal dubbelpunten $d = 7$,
„ keerpunten $r = 0$.

Past men nu de formules van Plücker toe, dan vindt men verder:

de klasse $\nu = n\,(n - 1) - 2\,d - 3\,r = 16$,

en uit:

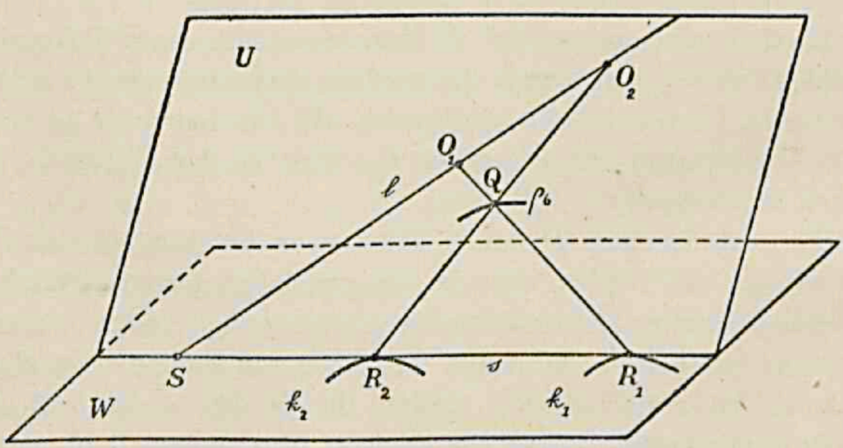
$$\begin{cases} \rho = 3\,n\,(n - 2) - 6\,d - 8\,r \\ n = \nu\,(\nu - 1)\,2\,\delta - 3\,\rho \end{cases}$$

het aantal buigraaklijnen $\rho = 30$,
„ „ dubbelraaklijnen $\delta = 72$,

en ten slotte het geslacht: $g = \frac{1}{2}\,(n - 1)(n - 2) - d - r = 3$.

Hieruit vindt men voor ρ_6 het volgende:

De rang van ρ_6, d.w.z. het aantal raakvlakken aan ρ_6 door een willekeurige rechte, is 16. Snijdt n.l. de rechte l σ_2 in



O_1 en O_2 (zie fig.) en is U een vlak door l, dat ρ_6 raakt in een punt Q, dan zal de snijlijn s van U met een vlak W

de in W gelegen krommen k_1 en k_2, volgens welke de projecteerende kegels van ρ_6, die O_1 opv. O_2 tot top hebben, W snijden, raken in de punten R_1 en R_2, waar $O_1 Q$, opv. $O_2 Q$, s snijden. Het aantal raakvlakken U door l aan ρ_6 is dus gelijk aan het aantal raaklijnen, dat men uit het snijpunt s van l met W aan een der krommen k kan trekken (zij raken tevens de andere) dus 16.

Een vlak, gebracht door O en een buigraaklijn van k_2 is een osculatievlak van de kromme ρ_6. Het aantal door een punt gaande osculatievlakken van ρ_6, haar klasse, is dus gelijk aan het aantal buigraaklijnen van k_6, dus 30.

Het aantal schijnbare dubbelpunten van ρ_6 is het aantal dubbelpunten harer projectie, dus 7.

Het aantal door een punt gaande dubbelraakvlakken van ρ_6 is het aantal dubbelraaklijnen der projectie, dus 72.

Het geslacht van ρ_6 is het geslacht der projectie, dus 3.

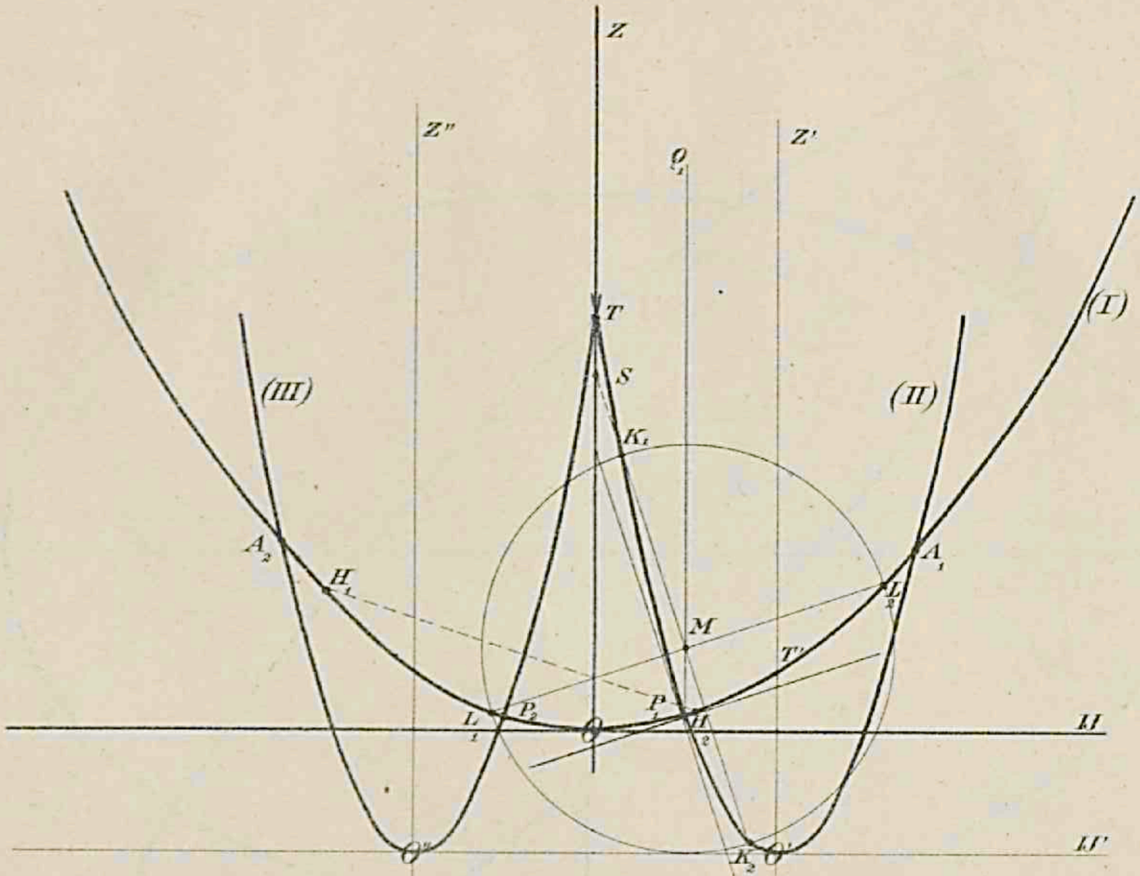


Fig.1

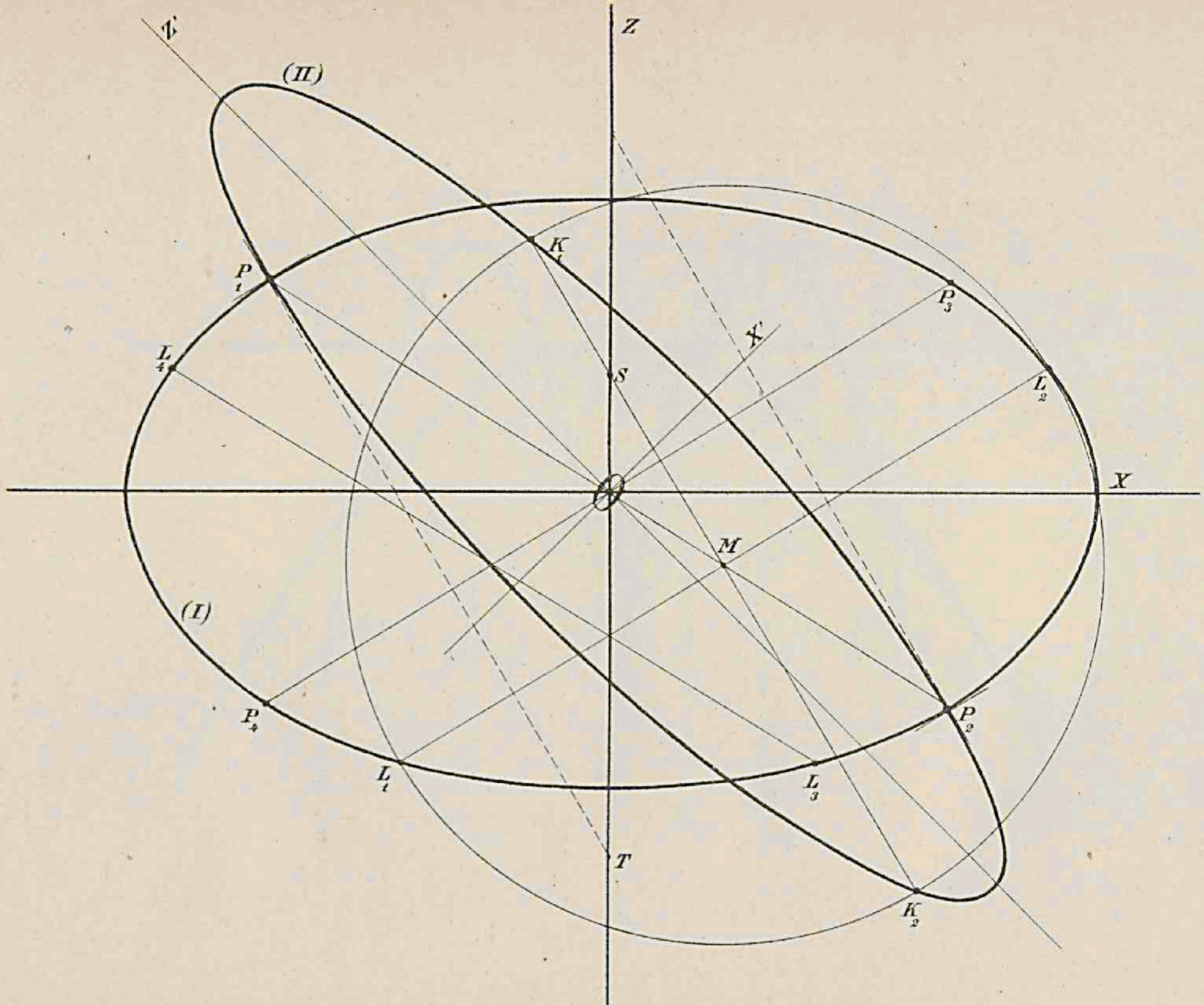
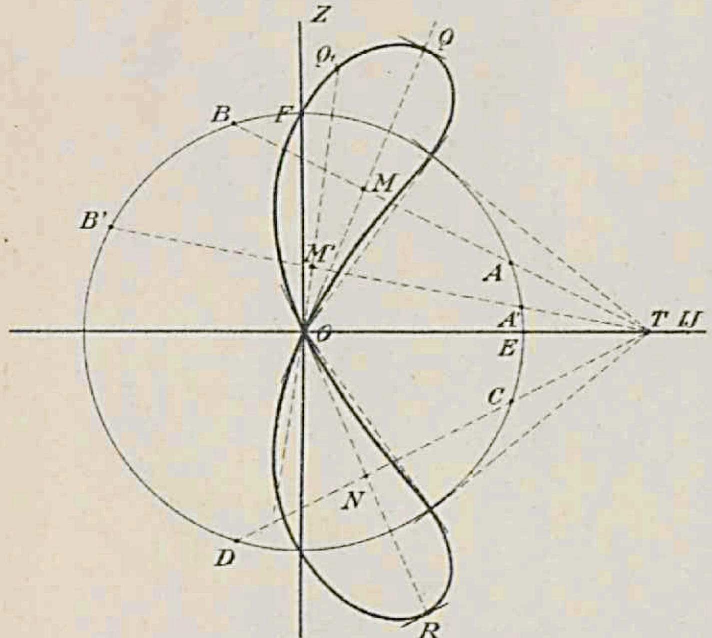


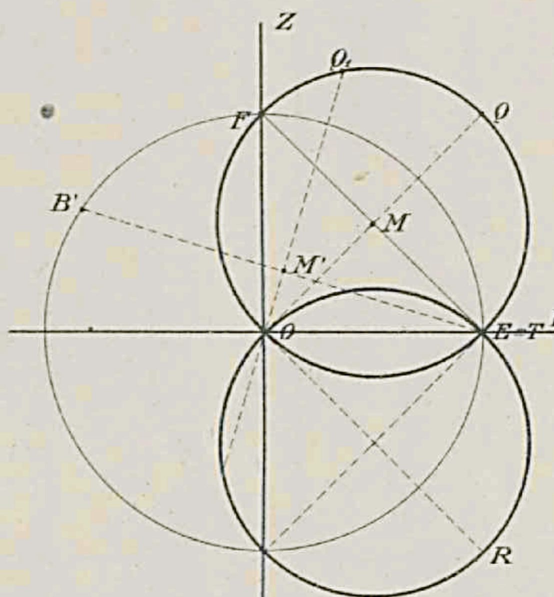
Fig. 2.



$k > a$.

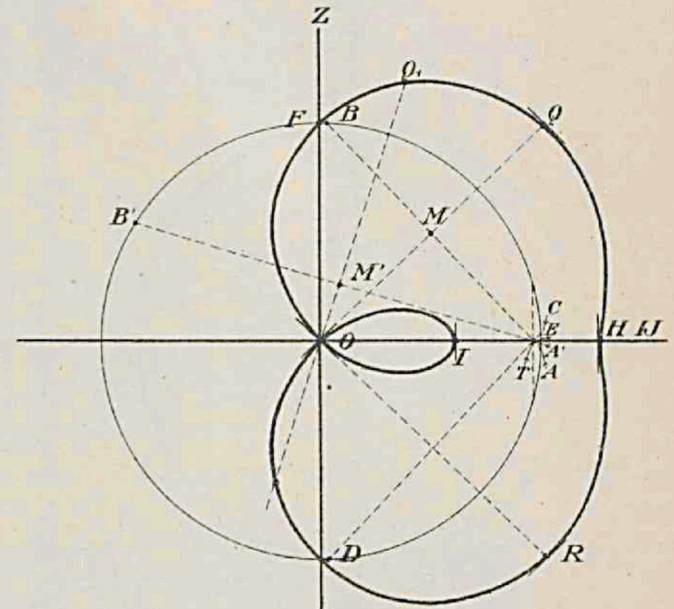
$OT = k$, $OE = a$.

Fig. 3, a.



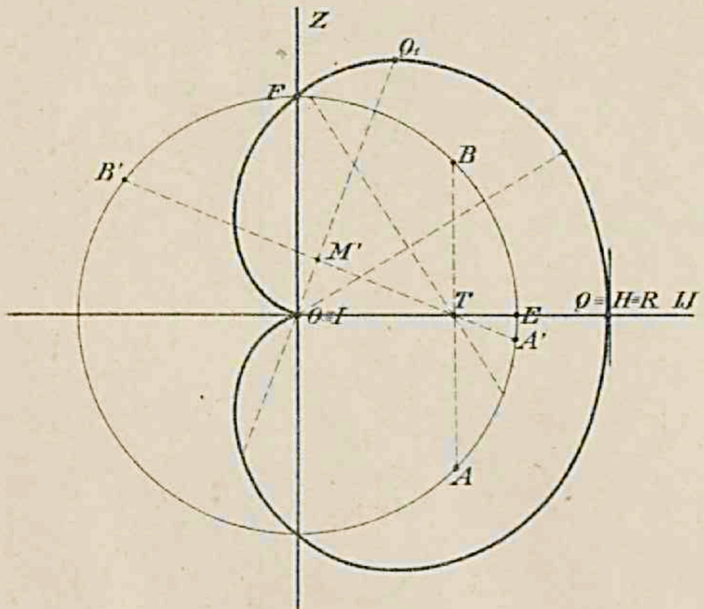
$k = a$.

Fig. 3, b.

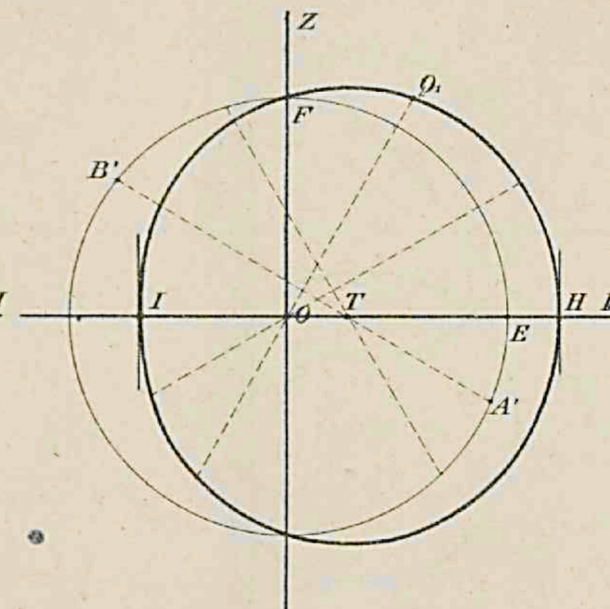


$\frac{1}{2}a\sqrt{2} < k < a$.

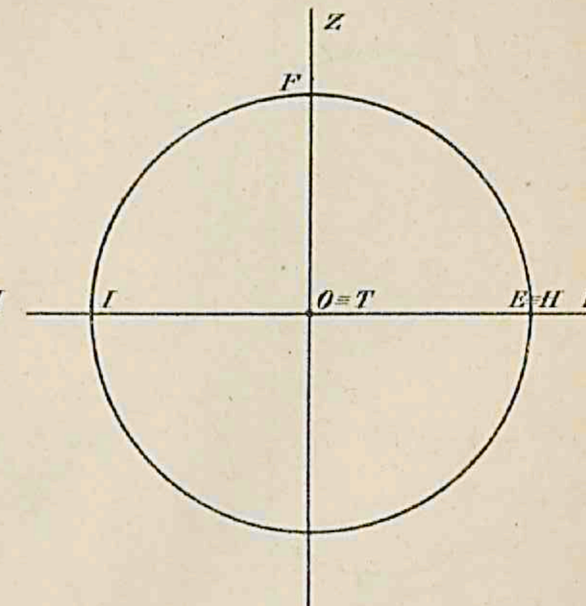
Fig. 3, c.



$k = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.
Fig. 3 d.



$0 < k < \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.
Fig. 3, e.



$k = 0$.
Fig. 3, f.

STELLINGEN.

1.

De krommen van Hdst. III § 1 kunnen opgevat worden als voetpuntskrommen van kegelsneden.

2.

De meetkundige plaats van de polen der cirkels van een cyclisch oppervlak van den n^{en} graad is in het algemeen niet van den graad $2n$.

3.

Er zijn gevallen, waarin de door P. J. VAN LOO in zijn proefschrift, Inl. § 3, genoemde verwantschap $(1,1)$ een verwantschap (m, n) is.

4.

Dat de veeltermen van ABEL reëele, positieve en onderling verschillende wortels hebben kan eenvoudig worden bewezen. (Vgl. diss. A. A. NIJLAND, § 9).

5.

De wijze, waarop J. EDIE in § 3 van zijn proefschrift afleidt, dat de functie $L(x)$ den eenheidscirkel tot singuliere lijn heeft, is onjuist.

6.

De stelling en het bewijs op bl. 181, 182, (§ 490) van SERRET—SCHEFFERS „Lehrbuch der Diff. und Int. rechnung II" zijn onjuist.

7.

Men kan geen principieel verschil maken tusschen qualitatieve en quantitatieve overeenstemming van theorie en waarneming.

8.

Het is in beginsel mogelijk Röntgengolven te analyseeren, langer dan die, welke men tot nu toe heeft onderzocht. Een uitbreiding van de experimenteele techniek in deze richting is met het oog op de theorie zeer gewenscht.

9.

De gevolgtrekking, die A. Bouwers maakt in het naschrift van zijn artikel „Zwarting van de photografische plaat door Röntgenstralen" (Physica, April 1923) aangaande de overeenstemming tusschen twee zwartingswetten, is onjuist.
