



# **Sur la totalisation des dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes**

<https://hdl.handle.net/1874/280202>

.192, 1923

H. LOOMAN

SUR LA TOTALISATION DES DÉRIVÉES  
DES FONCTIONS CONTINUES DE PLUSIEURS  
VARIABLES INDÉPENDANTES

EXTRAIT DE »FUNDAMENTA MATHEMATICAE«, T. IV.



CRACOVIE  
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ  
1922

**A. qu.  
192**





SUR LA TOTALISATION DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS  
CONTINUES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES



SUR LA TOTALISATION  
DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS  
CONTINUES DE PLUSIEURS  
VARIABLES INDÉPENDANTES

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN  
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS-  
EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-  
UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG  
VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS MEESTER  
J. C. NABER, HOOGLEERAAR IN DE  
FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,  
VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT  
DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDEN-  
KINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS-  
EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN  
OP MAANDAG 26 FEBRUARI 1923,  
'S NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR

**HERMAN LOOMAN**  
GEBOREN TE MARKELO





*AAN MIJNE OUDERS*



Bij het aanbieden van dit proefschrift is het mij een aangename taak, mijn dank te betuigen aan U, Hooggeleerden in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier colleges ik bezocht.

Dit geldt in het bijzonder U, Hooggeleerde DENJOY; niet genoeg dankbaar kan ik U zijn voor Uw onderricht, dat mij opgewekt heeft tot de studie van de werken van de moderne Fransche School en in het bijzonder van Uw eigen integratie-methoden. Ik beschouw het als een groot voorrecht, mij Uw leerling te kunnen noemen.

Hooggeleerde WOLFF, de bereidwilligheid, waarmee Gij de taak van Promotor op U hebt willen nemen, heeft mij ten zeerste aan U verplicht.

---

the first number of its publication is for the year  
1880, and the last, for the year 1889. It is  
published by the American Historical Association, and  
is one of the most valuable series of historical  
publications in the world. It contains a large  
amount of original research, and is a most  
interesting and useful work for all those  
concerned with the study of American history.  
The first number of its publication is for the year  
1880, and the last, for the year 1889. It is  
published by the American Historical Association, and  
is one of the most valuable series of historical  
publications in the world. It contains a large  
amount of original research, and is a most  
interesting and useful work for all those  
concerned with the study of American history.

H. LOOMAN

SUR LA TOTALISATION DES DÉRIVÉES  
DES FONCTIONS CONTINUES DE PLUSIEURS  
VARIABLES INDÉPENDANTES

---

EXTRAIT DE »FUNDAMENTA MATHEMATICAE«, T. IV.

---

CRACOVIE  
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ  
1922



## Sur la totalisation des dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes.

Par

H. Looman (Utrecht).

M. Arnaud Denjoy a résolu le problème de trouver les fonctions primitives  $f(x)$  de la fonction dérivée la plus générale  $\varphi(x)$ ; le procédé de calcul, permettant de remonter de  $\varphi(x)$ , connue en tout point d'un intervalle  $a < x < b$  (sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle), à la variation  $f(b) - f(a)$  de  $f$  sur  $(a, b)$ , a reçu le nom de *totalisation*<sup>1)</sup>.

Je me propose de définir un procédé analogue dans le cas de plusieurs variables indépendantes. Les dérivées partielles qui donnent lieu à une telle généralisation sont évidemment  $\frac{\partial^n f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$ . Pour ne pas supposer l'existence de dérivées partielles d'ordre  $< n$ , je prends pour définition dans le cas  $n = 2$ ,

$$s(x, y) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0}} \frac{f(x+u, y+v) + f(x, y) - f(x+u, y) - f(x, y+v)}{uv}.$$

On peut d'ailleurs considérer d'autres définitions (n° 10). Aucune de ces définitions n'est équivalente à celle de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

<sup>1)</sup> A. Denjoy: Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1916, p. 127—222 et 1917, p. 181—236.

Ce mémoire est précédé par deux autres:

Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues, *Journ. de Math.* 1915, p. 105—240.

Mémoire sur les fonctions dérivées sommables, *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1915, p. 161—248.

Pour notre but il est essentiel de rechercher, si la variation de  $f(x, y)$  sur un rectangle  $r\{a < x < b, c < y < d\}$  c. à d. le nombre

$$\Delta(f, r) = f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)$$

est déterminée par la connaissance de la dérivée (avec une de ses définitions) dans  $r$  (11—16).

Il se trouve que pour une fonction continue  $f(x, y)$  l'existence de  $s(x, y)$  dans  $r$  entraîne l'existence d'une dérivée par rapport à  $x$ ,  $p(x, y)$ , finie en tout point de  $r$ , et continue en  $y$  (mais non pas nécessairement par rapport à  $x$ ), si  $f(x, c)$  est dérivable par rapport à  $x$ ; énoncé analogue pour  $q(x, y)$ , si  $q(a, y)$  existe (12, 13).

L'objet principal de ce travail est de montrer que  $\Delta(f, r)$  peut être calculé par une *infinité dénombrable* d'opérations au plus, sous la seule condition que  $s(x, y)$  existe en tout point et est connu, sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle (17).

Le procédé s'applique sous des conditions plus générales.

Pour la totalisation des dérivées des fonctions d'une seule variable, la distinction d'ensembles fermés (non denses) en ensembles fermés *dénombrables* et *non dénombrables* est d'une grande importance; les ensembles *parfaits non denses* jouent un rôle fondamental dans le calcul totalisant.

Dans le cas de 2 variables indépendantes, il faut distinguer, au lieu d'ensembles fermés dénombrables et non dénombrables, les ensembles fermés que j'appelle *de seconde sorte* et *de première sorte* (3—7).

L'ensemble parfait (dans le cas d'une seule variable) est remplacé par *l'ensemble de première sorte en lui-même*.

Je n'énonce les définitions et théorèmes que pour le cas de 2 variables indépendantes, puisque l'extension à plusieurs variables est immédiate.

### Définitions. Ensembles. Théorèmes préliminaires.

1. Nous entendons par *rectangle* un rectangle à côtés parallèles aux axes, donc un ensemble  $a < x < b, c < y < d$ <sup>1)</sup>. Les sommets  $(a, c)$ ,  $(b, c)$ ,  $(b, d)$ ,  $(a, d)$  seront désignés resp. par 1<sup>er</sup>, 2<sup>me</sup>, 3<sup>me</sup>, 4<sup>me</sup> sommets et les côtés

<sup>1)</sup> Parfois nous remplacerons les signes  $<$  par  $\leq$ .

$$y = c, a < x < b, \text{ ou } i_a(a, b)$$

$$x = b, c < y < d, \text{ ou } i_b(c, d)$$

$$y = d, a < x < b, \text{ ou } i_a(a, d)$$

$$x = a, c < y < d, \text{ ou } i_a(c, d)$$

par 1<sup>er</sup>, 2<sup>me</sup>, 3<sup>me</sup>, 4<sup>me</sup> côtés du rectangle  $r\{a < x < b, c < y < d\}$ .

Je désigne par  $i_{x_0}(c, d)$  (resp.  $i_{y_0}(a, b)$ ), un *intervalle* appartenant à  $x = x_0$  (resp.  $y = y_0$ ) et d'extrémités  $(x_0, c)$  et  $(x_0, d)$  (resp.  $(a, y_0)$  et  $(b, y_0)$ ) et par  $s_{x_0}(c, d)$  (resp.  $s_{y_0}(a, b)$ ) le *segment* correspondant<sup>1)</sup>.

2. En désignant par  $E$  un ensemble fermé (non dense) plan, définissons l'expression: *portion*  $\Pi(E, r)$  de  $E$ , déterminée par un rectangle  $r$ .

Si  $r$  ne contient pas de points de  $E$  dans son intérieur,  $\Pi(E, r)$  n'existera pas; si  $r$  contient des points de  $E$  dans son intérieur,  $\Pi(E, r)$  sera l'ensemble des points de  $E$  intérieurs à  $r$ , augmenté de leurs points limites sur le contour de  $r$ .  $\Pi(E, r)$  est le plus petit ensemble fermé coïncidant avec  $E$  à l'intérieur de  $r$ .

Si  $\Pi(E, r)$  existe, ses projections  $\Pi_x(E, r)$  sur  $Ox$  et  $\Pi_y(E, r)$  sur  $Oy$  existent et sont fermés.

Si chacun des 2 ensembles  $\Pi_x(E, r)$  et  $\Pi_y(E, r)$  contient au moins 2 points, il existe un plus petit rectangle  $r_1$  contenant  $\Pi(E, r)$ ; au contraire,  $r_1$  n'existe pas, si l'un au moins des 2 ensembles  $\Pi_x(E, r)$  et  $\Pi_y(E, r)$  ne contient qu'un seul point. Donc pour que  $r_1$  existe toujours, il faut et il suffit, que  $\Pi_x(E, r)$  et  $\Pi_y(E, r)$  soient parfaits, quel que soit le rectangle  $r$ , contenant des points de  $E$  dans son intérieur<sup>2)</sup>.

Il est à remarquer que  $\Pi(E, r_1)$ , s'il existe, ne coïncide pas nécessairement avec  $\Pi(E, r)$ .

3. Un ensemble fermé  $E$  non dense plan et borné sera appelé: *de première sorte en lui-même*, si toute portion de  $E$  se projette sur les 2 axes suivant un ensemble non dénombrable (nécessairement parfait);  $E$  est alors nécessairement parfait;

*de première sorte*, si  $E$  contient un ensemble parfait  $P$  de première sorte en lui-même;

*de seconde sorte*, si  $E$  n'est pas de première sorte.

1) Intervalle  $ab$ , c'est l'ensemble  $a < x < b$ ,

segment  $ab$ , c'est l'ensemble  $a \leq x \leq b$ .

2) C. à d. que  $E$  soit de première sorte en lui-même, n° 3.

Disons que  $E$  est de première sorte en  $M$ , s'il existe dans  $E$ , un ensemble parfait  $P(M)$  contenant  $M$  et de première sorte en lui-même;  $E$  sera de seconde sorte en  $M'$ , si  $E$  n'est pas de première sorte en  $M'$ .

Soit  $\Omega$  l'ensemble des points (de  $E$ ), où  $E$  est de première sorte et  $\Omega'$  sont complémentaire.

$\Omega$  contient tout  $P(M)$ ,  $\Omega$  est fermé. Car si la suite de points de  $\Omega$ ,  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ , tend vers  $M_0$ , les portions des  $P(M_n)$ , déterminées par les carrés de centres  $M_n$  et de côtés  $\frac{1}{n}$ , augmentées du point  $M_0$ , constituent un ensemble  $P(M_0)$ .

$\Omega$  est donc le plus grand ensemble fermé de première sorte en lui-même, contenu dans  $E$ .

Ceci rappelle la décomposition d'un ensemble en un ensemble dense en lui-même et un ensemble clairsemé (en particulier la décomposition d'un ensemble fermé en un noyau parfait en un ensemble dénombrable).

Un ensemble fermé de seconde sorte est fini ou dénombrable sur toute droite de pente finie non nulle.

Mais  $E$  peut être fini sur toute droite sans être de seconde sorte (Exemple: un cercle).

Un ensemble fermé de première sorte en lui-même peut encore être caractérisé comme il suit. Appellons *segment* d'un ensemble fermé  $E$  les segments  $s_{x_0}(\gamma, \delta)$  et  $s_{y_0}(\alpha, \beta)$ , contenant au moins un point de  $E$ ; un segment  $s_{x_0}(\gamma, \delta)$  ou  $s_{y_0}(\alpha, \beta)$  sera dit isolé, s'il existe un rectangle, ayant ce segment pour diamètre et ne contenant pas d'autres points de  $E$ . Alors un ensemble de première sorte en lui-même est un ensemble fermé ne possédant pas de segment isolé.

Ceci rappelle la définition d'un ensemble parfait comme ensemble fermé n'ayant pas de point isolé.

4. Si la fonction continue  $f(x, y)$  est du type  $g(x) + h(y)$  sur un rectangle  $r(a < x < b, c < y < d)$ , le nombre  $\Delta(f, \varrho) = f(\delta, \beta) + f(\alpha, \gamma) - f(\beta, \gamma) - f(\alpha, \delta)$  est zéro sur tout rectangle  $\varrho(\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta)$  contenu dans  $r$ ; et réciproquement.

Convenons de dire que  $f(x, y)$  est du type  $g(x) + h(y)$  en un point  $M$ , si  $M$  est centre d'un carré  $\gamma(M)$ , où  $f$  est du type  $g(x) + h(y)$ ; il est équivalent de dire que  $\Delta(f, \varrho) = 0$  sur tout rectangle  $\varrho$  contenu dans  $\gamma(M)$ .

Si  $f(x, y)$  est du type  $g(x) + h(y)$  en tout point d'un rectangle  $r_0$  ( $a_0 < x < b_0, c_0 < y < d_0$ ),  $f(x, y)$  est du type  $g(x) + h(y)$  sur  $r_0$ .

Il suffit de démontrer que  $\Delta(f, r_1) = 0$ , si  $r_1$  est un rectangle quelconque intérieur à  $r_0$ .

Faisons correspondre à tout point  $M$  de  $r_1$  le plus grand carré  $\gamma(M)$  de centre  $M$ , où  $f$  est de la forme  $g(x) + h(y)$  et soit  $2u(M)$  la longueur de son côté.

Si le minimum de  $u(M)$  était zéro, il existerait une suite de points  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$  tendant vers un point  $M_0$  de  $r_1$ , tels que  $u(M_n)$  tend vers 0. Après une certaine valeur de  $n$ ,  $M_n$  appartient au carré de centre  $M_0$  et de côté  $\frac{1}{2}u(M_0) > 0$ , mais dès ce moment  $u(M_n) > \frac{1}{2}u(M_0)$ .

Donc le minimum de  $u(M)$  est un nombre positif  $\mu$ . Divisons  $r_1$  en  $pq$  rectangles  $r'_i$ , par des droites parallèles à  $Ox$  et à  $Oy$ , les côtés des  $r'_i$  étant inférieurs à  $\mu$ . Puisque  $\Delta(f, r'_i) = 0$ , on a  $\Delta(f, r) = \Sigma \Delta(f, r'_i) = 0$ ,<sup>1)</sup> c. q. f. d.

5. Supposons maintenant que  $f$  est du type  $g(x) + h(y)$  en tout point intérieur à  $r$  et étranger à un ensemble fermé non dense  $E$  contenu dans  $r$ .

Si  $E$  est de première sorte,  $f$  n'est pas nécessairement du type  $g(x) + h(y)$  sur  $r$ .

Exemple: soit  $r$  le carré  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ , et soit  $E$  un ensemble parfait discontinu situé sur la droite  $y = x$  et ayant pour points extrêmes 0, 0 et 1, 1.

Soit  $\varphi$  une fonction continue quelconque, constante dans les intervalles contigus de  $E$  et variante en tout point de  $E$ , avec  $\varphi(0, 0) = 0$ . Nous définissons  $f(x, y)$  comme il suit:

Sur  $y = x$ ,  $f(x, y)$  coïncide avec  $\varphi$ .

Dans le domaine  $0 \leq y \leq x \leq 1$ ,  $f$  est indépendante de  $x$ .

Dans le domaine  $0 \leq x \leq y \leq 1$ ,  $f$  est indépendante de  $y$ .

On voit aisément que  $\Delta(f, r')$  est zéro sur tout rectangle  $r'$  ne contenant pas de points de  $E$  dans son intérieur, donc  $f$  est du type  $g(x) + h(y)$  en tout point étranger à  $E$ .

On voit que  $f$  est zéro sur les 2 axes, donc si  $f$  était du type  $g(x) + h(y)$  sur  $r$ ,  $f$  serait nulle partout, ce qui n'est pas ainsi.

<sup>1)</sup> On peut aussi appliquer le lemme de Borel et remarquer que la partie commune à 2 rectangles est un rectangle.

Il est à remarquer que  $E$  ne divise pas l'intérieur de  $r$  en régions distinctes <sup>1)</sup>.

6. Au contraire,

Si  $E$  est de seconde sorte,  $f$  est du type  $g(x) + h(y)$  sur  $r_0$ , si elle est du type  $g(x) + h(y)$  en tout point de  $r_0$  étranger à  $E$ .

Il suffit de démontrer que  $f$  est du type  $g(x) + h(y)$  en tout point de  $E$  ou encore que  $\Delta$  est zéro sur tout rectangle appartenant à  $r_0$ .

D'après no 4, nous savons déjà que  $\Delta(f, \rho)$  est zéro sur tout rectangle  $\rho$  ne contenant pas de points de  $E$  dans son intérieur.

Nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemme I: Une fonction continue  $f(x)$  d'une seule variable indépendante, constante dans les intervalles contigus d'un ensemble fermé dénombrable  $E'$ , est constante sur tout intervalle contenant des points de  $E'$ .

En effet, soit  $\alpha\beta$  un intervalle contenant des points de  $E'$  dans son intérieur. L'ensemble des valeurs prises par  $f$  aux points de  $\alpha\beta$  est fini ou dénombrable, puisque  $f$  ne peut prendre de valeurs différentes en  $x$  et  $x'$ , que si  $x$  et  $x'$  appartiennent à  $E'$ , ou si  $x$  et  $x'$  appartiennent à des contigus différents de  $E'$ . Or l'ensemble des points de  $E'$  et celui des intervalles contigus de  $E'$ , appartenant à  $\alpha\beta$  est fini ou dénombrable. — Si l'on avait  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,  $f$ , étant continue, devrait prendre entre  $\alpha$  et  $\beta$  toute valeur comprise entre  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ , c. à d. un ensemble de valeurs ayant la puissance du continu.

Donc on a  $f(\alpha) = f(\beta)$ , c. q. f. d. <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> D'autre part, un segment de droite  $s_{x_0}(0, 1)$  ( $0 < x_0 < 1$ ) est un ensemble fermé divisant  $r$  en 2 régions; cependant  $f$  est de la forme  $g(x) + h(y)$  sur  $r$  si elle est de cette forme en tout point étranger à  $s_{x_0}(0, 1)$ .

On aura d'ailleurs l'occasion de remarquer que la distinction de continu et discontinu et la répartition d'un ensemble ouvert en régions distinctes n'intervient jamais dans les résultats.

<sup>2)</sup> Cette proposition est connue. Voir pour 2 autres démonstrations:

H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, p. 12

A. Denjoy, Journ de Math., 1915 p. 111

Il est à remarquer que la démonstration exige seulement la propriété de  $f(x)$  de prendre entre  $\alpha$  et  $\beta$  toute valeur comprise entre  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ , si  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ . Or, cette propriété appartient non seulement aux fonctions continues, mais aussi à certaines fonctions discontinues (Voir A. Denjoy, Enseignement Math. Genève 1916) savoir les fonctions à prépondérance de continuité, en particulier les fonc-

Lemme II: Soit  $E''$  un ensemble fermé non dense plan, se projetant sur l'un des axes suivant un ensemble fini ou dénombrable. Si  $\Delta(f, \varrho'') = 0$  sur tout rectangle  $\varrho''$  ne contenant pas de points de  $E''$ , dans son intérieur,  $f$  est de la forme  $g(x) + h(y)$ .

Nous démontrerons que  $\Delta(f, r'') = 0$ , si  $r''\{a'' < x < b'', c'' < y < d''\}$  est un rectangle contenant des points de  $E''$  dans son intérieur. La projection de  $\Pi(E'', r'')$  sur un des axes, p. e.  $Ox$ , est fini ou dénombrable. La fonction de  $x$ :

$$\varphi(x, c'', d'') = f(x, d'') - f(x, c'')$$

est continue et constante dans les intervalles contigus de  $\Pi_x(E'', r'')$ . Donc, d'après le Lemme I  $\varphi(x, c'', d'')$  est constante entre 2 points quelconques du segment  $a'', b''$ , d'où

$$\Delta(f, r'') = \varphi(b'', c'', d'') - \varphi(a'', c'', d'') = 0, \text{ c. q. f. d.}$$

Même démonstration, en introduisant la fonction

$$\psi(y, a'', b'') = f(b'', y) - f(a'', y),$$

si  $\Pi_y(E'', r'')$  est dénombrable.

Passons maintenant à la démonstration de notre théorème.  $E$  contient nécessairement des points  $M$ , centres de rectangles  $r$ , tels que l'un au moins des 2 ensembles  $\Pi_x(E, r)$  ou  $\Pi_y(E, r)$  soit dénombrable; sinon  $E$  serait de première sorte (en lui-même).

En ces points  $M$ ,  $f(x, y)$  est, d'après le Lemme II, de la forme  $g(x) + h(y)$ .

Si  $E$  ne contient pas d'autres points, la propriété est démontrée.

Si, au contraire,  $E$  contient des points  $M_1$  tels que, si  $r_1$  est un rectangle quelconque, contenant  $M_1$  dans son intérieur, les ensembles  $\Pi_x(E, r_1)$  et  $\Pi_y(E, r_1)$  sont l'un et l'autre non dénombrables, ces points  $M_1$  forment un ensemble  $E_1$  qui est évidemment fermé. En tout point étranger à  $E_1$ ,  $f$  est de la forme  $g(x) + h(y)$ .

Soit  $E_2$  l'ensemble des points de  $E_1$ , qui ne sont pas centres de rectangles  $r_2$  tels que un au moins des 2 ensembles  $\Pi_x(E_1, r_2)$  ou  $\Pi_y(E_1, r_2)$  est dénombrable.

D'après le Lemme II,  $f(x, y)$  est de la forme  $g(x) + h(y)$  en tout point de  $E_2 - E_1$ .

Nous définissons ensuite  $E_3, E_4, \dots, E_n, \dots$

tions approximativement continues, et les dérivés préponderants, en particulier les dérivés approximatives, les dérivées ordinaires.

L'énoncé est donc exact pour ces fonctions discontinues.

Si  $E_n$  existe pour toute valeur de  $n$ , soit  $E_\omega$  l'ensemble (fermé) des points communs à tous les  $E_n$ .

$E_\omega$  existe; en tout point étranger à  $E_\omega$ ,  $f$  est de la forme  $g(x)+h(y)$ .

Généralement, soit  $\alpha$  un nombre ordinal quelconque. Si  $\alpha$  est de première espèce,  $E_\alpha$  est l'ensemble des points  $M_\alpha$  de  $E_{\alpha-1}$ , qui ne sont pas centres d'un rectangle  $r_\alpha$ , tel que l'un au moins des 2 ensembles  $\Pi_x(E_{\alpha-1}, r_\alpha)$  et  $\Pi_y(E_{\alpha-1}, r_\alpha)$  soit dénombrable. Si  $\alpha$  est de seconde espèce,  $E_\alpha$  est l'ensemble commun à tous les  $E_{\alpha'}$  d'indice  $\alpha' < \alpha$ .

Tout  $E_\alpha$  est fermé et agrégé aux ensembles  $E_\alpha$  d'indice inférieur. Donc, d'après le théorème connu de Cantor, il existe un nombre transfini (dénombrable)  $\beta$ , tel que  $E_\beta = E_{\beta+1} = \dots$ ;  $E_{\beta-1}$  étant différent de  $E_\beta$ .

Supposons que  $E_\beta$  contienne des points. D'après la définition de  $E_{\beta+1} (= E_\beta)$ , quel que soit le rectangle  $\rho$  contenant des points de  $E_\beta$  dans son intérieur, les 2 ensembles  $\Pi_x(E_\beta, \rho)$  et  $\Pi_y(E_\beta, \rho)$  sont parfaits. Donc  $E_\beta$  est de première sorte en lui-même et  $E$  serait de première sorte, contrairement à notre hypothèse.

Donc  $E_\beta$  ne peut pas contenir des points. Donc  $f$  est de la forme  $g(x)+h(y)$  en tout point de  $E$ , donc  $f$  est de cette forme sur  $r_0$ , c. q. f. d.

7. Montrons par un exemple que ce nombre  $\beta$  peut être tout nombre ordinal donné d'avance.

Nous construirons  $E$  à l'aide d'ensembles  $\lambda(r)$  et  $\mu(r)$  dont voici les définitions.

Si  $r$  est le rectangle  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ , nous construisons les segments  $s_{x_0}(c, d)$ ,  $x_0 = a + \frac{b-a}{2^n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Puis nous construisons pour toute valeur de  $n$  les  $2^n$  segments, se projetant sur  $Ox$  dans le segment occupant le tiers médian du segment  $a + \frac{b-a}{2^n} \leq \leq x \leq a + \frac{b-a}{2^{n-1}}$  et sur  $Oy$  en les points  $c + k \frac{d-c}{2^n}$  ( $k=0, 1, \dots, 2^n-1$ ).

La réunion de tous ces segments, augmentée du segment  $s_a(c, d)$  constitue un ensemble parfait  $\lambda(r)$ , tel que  $\lambda_1(r)$  (déduit de  $\lambda(r)$  comme  $E_1$  de  $E$  au n° 6) existe et est identique au segment  $s_a(c, d)$ .

En remplaçant  $x$  par  $y$ ,  $a$  par  $c$ ,  $b$  par  $d$ , nous obtenons un ensemble analogue  $\mu(r)$ , tel que  $\mu_1(r)$  existe et est identique au segment  $s_c(a, b)$ .

Cela posé, prenons pour  $r_0$  le carré  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

Si  $\beta = 1$ , on prend pour  $E$  le segment  $s_{x=0}(0, 1)$ . Si  $\beta = 2$ , nous pouvons prendre pour  $E$  l'ensemble  $\lambda(r_0)$ . Si  $\beta = 3$ , on construit d'abord l'ensemble  $\lambda(r_0)$  et puis nous construisons pour les rectangles  $r'_n$ , ayant pour côtés verticaux les segments  $s_{x=\frac{1}{2^n}}(0, 1)$  et  $s_{x=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}}(0, 1)$  les ensembles  $\lambda(r'_n)$  et pour les rectangles  $r''_{n,k}$  ayant pour côtés horizontaux les segments  $s_{y=\frac{k}{2^n}}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} \frac{1}{2^n}\right)$  et  $s_{y=\frac{k+1}{2^n}}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} \frac{1}{2^n}\right)$ , ( $k=0, 1, \dots, 2^n-1$ ), nous construisons les ensembles  $\mu(r)$ . L'ensemble  $E$ , réunissant ces ensembles, a pour ensemble  $E_1$  l'ensemble  $\lambda(r_0)$ .

En répétant cette construction un nombre fini de fois, on construit des ensembles tels que  $\beta =$  nombre fini.

Soit  $\beta$  maintenant un nombre transfini. Sur un rectangle  $r'(a' < x < b', c' < y < d')$  ou peut construire de la façon suivante des ensembles  $\sigma(r')$  et  $\tau(r')$ , tel que  $\sigma_\omega(r')$  et  $\tau_\omega(r')$  déduits de  $\sigma$  et  $\tau$  comme  $E_\omega$  de  $E$  au n° 6) existent et sont resp. identiques à  $s_a(c, d)$  et  $s_c(a, b)$ .

Pour obtenir  $\sigma(r')$ , nous divisons  $r'$  en rectangles

$$r'_n\left(a' + \frac{b' - a'}{2^n} \leq x \leq a' + \frac{b' - a'}{2^{n-1}}, c' \leq y' \leq d'\right).$$

Dans  $r'_n$  nous construisons un ensemble  $e(r'_n)$ , tel que l'ensemble  $e_n(r'_n)$  existe et est identique à l'ensemble commun à  $r'_n$  et  $\lambda(r')$ .  $\sigma(r')$  est défini comme réunion des tous les  $e(r'_n)$ , augmentée du segment  $s_a(c, d)$ ;  $\sigma_\omega(r')$  est visiblement identique à  $s_c(a, b)$ .

En remplaçant  $x$  par  $y$ ,  $a$  par  $c$ ,  $b$  par  $d$ , nous obtenons l'ensemble  $\tau(r')$ .

Si  $\beta = \omega + 1$ , on peut prendre pour  $E$  l'ensemble  $\sigma(r_0)$ .

Si  $\beta = \omega + 2$ , il suffit d'appliquer les constructions des ensembles  $\lambda, \mu, \sigma$  et  $\tau$ .

On voit aisément que par application répétée de ces constructions on peut atteindre tout nombre  $\beta$ .

8. Soit  $P$  un ensemble parfait de première sorte en lui-même et soit  $\Pi(P, r)$  la portion de  $P$ , déterminée par le rectangle

$$r(a < x < b, c < y < d).$$

Pour calculer ce que nous pouvons appeler: la variation d'une fonction continue  $f(x, y)$  sur l'ensemble complémentaire  $C(\Pi)$  de

$\Pi(P, r)$  par rapport à  $r^1$ ), nous considérerons un certain domaine  $D$  constitué d'un nombre fini de rectangles sans points intérieurs en commun, dont voici la définition.

Donnons nous un nombre positif  $\omega$  arbitrairement; divisons l'intervalle  $a < x < b$  en  $n$  intervalles partiels  $x_{i-1} < x < x_i$  ( $x_0 = a, x_n = b$ ), dont la longueur est  $< \omega$ . Désignons par  $\beta_i$  la bande verticale  $x_{i-1} < x < x_i, c < y < d$ . Alors les rectangles  $\rho$  constituant  $D$  seront tous de la forme  $x_{i-1} < x < x_i, \gamma < y < \delta$  ( $c \leq \gamma \leq \delta \leq d, i = 1, 2, \dots, n$ ) et seront choisis d'après la règle suivante:

Si  $\Pi(P, \beta_i)$  n'existe pas,  $\rho$  sera le rectangle  $\beta_i$  lui-même.

Si  $\Pi(P, \beta_i)$  existe et si sa projection  $\Pi_v(P, \beta_i)$  sur  $Oy$  ne coïncide pas avec le segment  $c \leq y \leq d$ , il peut se faire ou non qu'il existe des intervalles contigus de  $\Pi_v(P, \beta_i)$  dont la longueur est  $\geq x_i - x_{i-1}$ . Dans le premier cas nous prenons pour rectangles  $\rho$  tous les rectangles  $x_{i-1} < x < x_i, \gamma_n < y < \delta_n, \gamma_n \delta_n$  étant un intervalle contigu de  $\Pi_v(P, \beta_i)$ , tel que  $\delta_n - \gamma_n \geq x_i - x_{i-1}$ . Dans le second cas, nous dirons que les rectangles  $\rho$  n'existent pas (pour la bande  $\beta_i$  considérée).

Si  $\Pi_v(P, \beta_i)$  coïncide avec le segment  $cd$ , les rectangles  $\rho$  n'existent non plus.

Deux rectangles  $\rho$  n'ont jamais des points intérieurs en commun et peuvent seulement avoir des points frontières en commun, s'ils appartiennent à 2 bandes consécutives  $\beta_i$  et  $\beta_{i+1}$ .

Un rectangle  $\rho$  possède sur l'un au moins des côtés horizontaux des points de  $P$ , excepté peut être dans le cas où ces 2 côtés appartiennent resp. à  $y = c$  et à  $y = d$ .

Le nombre des rectangles  $\rho$  est fini, puisque les bandes  $\beta_i$  (en nombre fini) contiennent chacune un nombre de rectangles  $\rho$ ,

$$< \frac{d - c}{x_i - x_{i-1}}.$$

On voit facilement, que, si  $u(M)$  désigne la longueur du demi-côté du plus grand carré  $\gamma(M)$  de centre  $M$ , appartenant à  $r$  et ne contenant pas de points de  $P$  dans son intérieur, le point  $M$  est intérieur à tout domaine  $D$ , appartenant à un nombre  $\omega \leq u(M)$ .

De là on déduit que la mesure de  $D$  tend vers la mesure du complémentaire  $C(\Pi)$  de  $\Pi^2$ ), sous la seule condition que  $\omega$  tende vers zéro.

<sup>1)</sup> Voir le n° 25.

<sup>2)</sup> La mesure de  $C(\Pi)$  est la variation de la fonction  $\varphi(x, y) = xy$  sur

9.  $\varphi(x)$  étant une fonction (continue) d'une seule variable, on définit comme *variation*  $V(x, x')$  de  $\varphi$  sur l'intervalle  $x, x'$  le nombre  $\varphi(x') - \varphi(x)$ , ( $x < x'$ ).

On définit comme *variation relative* de  $\varphi$  sur  $x, x'$  le rapport  $\frac{V(x, x')}{x' - x}$ , dont le dénominateur n'est autre chose que la variation de la fonction  $\varphi_1(x) = x$ .

Si  $V(x, x')$  est nulle, quels que soient  $x$  et  $x'$ ,  $\varphi$  est une *constante*; si  $\frac{V(x, x')}{x' - x}$  a une valeur constante pour tout couple  $x, x'$ ,  $\varphi$  est une fonction *linéaire*.

Si  $f(x, y)$  est une fonction (continue) de  $x$  et  $y$ , nous définissons comme *variation* de  $f$  sur un rectangle  $r\{x_0 < x < x_0', y_0 < y < y_0'\}$  le nombre

$$\Delta(f, r) = f(x_0', y_0') + f(x_0, y_0) - f(x_0', y_0) - f(x_0, y_0').$$

Nous définissons comme *variation relative* de  $f$  sur  $r$  le rapport  $\frac{\Delta(f, r)}{(x_0' - x_0)(y_0' - y_0)}$ , dont le dénominateur, égal à l'aire de  $r$ , représente la variation de la fonction  $f_1(x, y) = xy$ .

Si  $\Delta(f, r) = 0$  sur tout rectangle  $r$ ,  $f$  est de la forme  $g(x) + h(y)$ ; les fonctions du type  $g(x) + h(y)$  sont donc les analogues des constantes.

Si  $\frac{\Delta(f, r)}{(x' - x_0)(y' - y_0)} =$  nombre constant  $A$ , pour tout rectangle  $r$ ,  $f$  est de la forme  $Axy + g_1(x) + h_1(y)$ ; les fonctions de ce type sont donc analogues aux fonctions linéaires.

Remarquons que  $\Delta(f, r)$  ne change pas sa valeur, si l'on remplace  $f(x, y)$  par  $f(x, y) + g(x) + h(y)$ . En particulier on peut remplacer  $f(x, y)$  par  $f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$ , sans changer  $\Delta(f, r)$ ; ou, ce qui revient au même, on peut toujours supposer que  $f(x, y)$  s'annule sur les 2 axes.

Si l'on remplace le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>me</sup> sommet de  $r$  par le 2<sup>me</sup> et le 4<sup>me</sup>,  $\Delta(f, r)$  change seulement de signe, donc  $\frac{\Delta(f, r)}{(x_0' - x_0)(y_0' - y_0)}$  ne varie pas.

10. Voici quelques définitions de dérivées et nombres dérivés.

C(II). On voit donc que cette variation s'obtient comme limite de la variation de  $\varphi$  sur  $D$ , si  $\omega$  tend vers zéro.

a) Soit  $x, y$  un point fixe,  $r$  un rectangle variable de sommets opposés  $x, y$  et  $x + u, y + v$  ( $uv \neq 0$ ),  $\frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}$  la variation relative de la fonction continue  $f(x, y)$  sur  $r$ , et appelons  $i^{\text{me}}$  quadrant ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) du point  $x, y$ , la région où doit se trouver le point  $x + u, y + v$ , pour que  $r$  ait le point  $x, y$  pour  $i^{\text{me}}$  sommet. Nous posons

$$L_i = \overline{\lim} \frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv},$$

$$l_i = \underline{\lim} \frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}$$

si le point  $x + u, y + v$  tend vers  $x, y$  en restant dans le  $i^{\text{me}}$  quadrant.

$l_i$  et  $L_i$  sont les nombres dérivés extrêmes dans le  $i^{\text{me}}$  quadrant; s'ils sont égaux, il existe une dérivée pour le  $i^{\text{me}}$  quadrant; si les 8 nombres dérivés sont égaux, il existe une dérivée  $s(x, y)$ .

b) Soient  $\lambda_i(\alpha, \beta)$  et  $\Lambda_i(\alpha, \beta)$  la plus petite et la plus grande limite d'indétermination de  $\frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}$ , si  $x + u, y + v$  tend vers  $x, y$  en

restant dans le  $i^{\text{me}}$  quadrant, de façon que  $\alpha < \left| \frac{u}{v} \right| < \beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  indépendants de  $u$  et de  $v$ . Si  $\alpha$  tend vers 0 et  $\beta$  vers  $\infty$ ,  $\lambda_i$  et  $\Lambda_i$  tendent respectivement vers des limites déterminées  $r_i$  et  $R_i$ , que l'on peut appeler: *nombres dérivés extrêmes réguliers*.  $r_i$  et  $R_i$  peuvent être égaux, sans que l'on ait  $l_i = L_i$ .

c) Posons  $u = \rho \cos \theta$ ,  $v = \rho \sin \theta$  et faisons tendre  $\rho (> 0)$  vers 0,  $\theta$  restant fixe. Soient  $\mu(\theta)$  et  $M(\theta)$  les limites inférieure et supérieure de  $\frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}$  et posons

$A_i =$  borne inférieure stricte de  $\mu(\theta)$ ,

$B_i =$  borne supérieure stricte de  $M(\theta)$ ,

pour les valeurs de  $\theta$  correspondant au  $i^{\text{me}}$  quadrant.

On a  $r_i \leq A_i \leq B_i \leq R_i$ .

On peut avoir  $A_i = B_i$  et en même temps  $r_i < A_i$  et  $B_i < R_i$ .

d) Le point  $x + u, y + v$  tend vers  $x, y$  dans le  $i^{\text{me}}$  quadrant en restant dans la région  $0 < \left| \frac{v}{u} \right| < \alpha'$ . Si nous désignons par  $\sigma_i(\alpha')$

et  $\Sigma_i(\alpha')$  les limites inférieures et supérieures de  $\frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}$ , ainsi

obtenues, ou voit que  $\sigma_i(\alpha')$  et  $\Sigma_i(\alpha')$  tendent vers des limites déterminées  $s_{x,i}$  et  $S_{x,i}$ , si  $\alpha'$  tend vers zéro.

Si l'on remplace la condition  $0 < \left| \frac{v}{u} \right| < \alpha$  par la condition  $\beta < \left| \frac{v}{u} \right| < \infty$ , on définit des nombres analogues  $s_{y,i}$  et  $S_{y,i}$ .

On a évidemment  $l_i \leq s_{x,i} \leq S_{x,i} \leq L_i$  et  $l_i \leq s_{y,i} \leq S_{y,i} \leq L_i$ .

e) Soit  $\gamma$  un carré variable de côté  $u$  contenant  $x, y$  dans son intérieur ou sur son contour et soit  $\frac{\Delta(f, \gamma)}{u^2}$  la variation relative de  $f$  sur  $\gamma$ . Posons

$$C = \overline{\lim}_{u \rightarrow 0} \frac{\Delta(f, \gamma)}{u^2}, \quad c = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Delta(f, \gamma)}{u^2}$$

On a: le plus petit des nombres  $l_i \leq c \leq C \leq$  le plus grand des nombres  $L_i$ .

On ne voit pas immédiatement que l'égalité  $c = C$  n'entraîne pas nécessairement  $l_i = L_i$ . L'exemple suivant montre que  $\Delta$  peut être zéro sur tout rectangle contenant un point  $O$ , sans que l'on ait  $l_i = L_i$  au point  $O$ .

Soit  $O$  le centre de coordonnées; nous divisons le plan en 8 octants par les 2 axes et leurs bissectrices; nous les numérotions I, II, ..., VIII, dans l'ordre où l'on les rencontre en décrivant un cercle de centre  $O$  et en partant du demi-axe des  $x$  positifs.

$f(x, y)$ , nulle sur les axes, sera définie ainsi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y(x - y), \text{ dans I et V,} \\ f(x, y) &= x(x - y), \text{ dans II et VI,} \\ f(x, y) &= x(x + y), \text{ dans III et VII,} \\ f(x, y) &= -y(x + y), \text{ dans IV et VIII.} \end{aligned}$$

Si  $\gamma$  est un carré quelconque de côté  $u$ , contenant le point  $O$ , l'un (au moins) des sommets, soit  $x_0, y_0$ , appartient à I ou à II, les autres sommets sont alors  $(x_0 - u, y_0)$ ,  $(x_0 - u, y_0 - u)$ ,  $(x_0, y_0 - u)$ . Il faut démontrer:

$$f(x_0, y_0) + f(x_0 - u, y_0 - u) = f(x_0 - u, y_0) + f(x_0, y_0 - u).$$

Si  $x_0, y_0$  appartient à I, resp. à II, le sommet opposé  $x_0 - u, y_0 - u$  appartient à VI, resp. à V et l'on vérifie immédiatement:

$$f(x_0, y_0) + f(x_0 - u, y_0 - u) = (x_0 - y_0)(x_0 + y_0 - u)$$

Le sommet  $x_0 - u, y_0$  appartient à III ou à IV; le sommet  $x_0, y_0 - u$  appartenant alors resp. à VIII et VII, on a en tous les cas:  $f(x_0 - u, y_0) + f(x_0, y_0 - u) = (x_0 - y_0)(x_0 + y_0 - u)$ .

Donc  $\Delta(f, \gamma) = 0$ .

Cependant  $l_i = -1, L_i = +1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )<sup>1)</sup>.

### Cas. où $\Delta(f, r)$ est déterminé par la connaissance d'une dérivée dans $r$ .

11. Considérons d'abord les nombres  $l_i$  et  $L_i$ .

Si  $\varphi(x)$  est une fonction continue d'une seule variable indépendante, on sait que l'existence d'un nombre dérivé médian ou extrême zéro d'un certain côté invariable entraîne la nullité de la variation  $\varphi(b) - \varphi(a)$ , quels que soient  $a$  et  $b$ <sup>2)</sup>.

Un tel théorème n'existe pas pour les nombres  $l_i$  et  $L_i$ .

En effet, nous allons donner des exemples de fonctions continues, telles que  $l_i = L_i = 0$  en tout point ( $i$  fixe) sans que  $\Delta(f, r)$  soit

1) Toute fonction  $f(x, y)$ , nulle sur les axes et dont la variation est nulle sur tout carré contenant l'origine des coordonnées, est connue en tous les octants, si elle est connue dans l'un d'eux, p. e. dans I. En considérant diverses catégories de carrés, on trouve:

1°  $f = 0$  sur les bissectrices; (carrés dont un sommet est dans  $O$ )

2°  $f$  prend des valeurs opposées et égales en 2 points  $M$  et  $M'$ ,

a) symétriques p. r. à la 2° bissectrice,  $M$  dans I ou II,  $M'$  dans VI ou V (carré dont 1 sommet est sur la 2° bissectrice),

b) symétriques p. r. à la 1° bissectrice,  $M$  dans III ou VI,  $M'$  dans VIII ou VII (carrés dont 1 sommet est sur la 1° bissectrice),

3°  $f$  prend des valeurs égales en 2 points  $N$  et  $N'$ , situés sur une même droite  $x = x_0$  (ou  $y = y_0$ ) dans des quadrants différents et ayant pour distance le nombre  $|x_0|$  (resp.  $|y_0|$ ) (carré dont 2 sommets sont sur l'un des axes de coordonnées).

$N$  et  $N'$  sont dans II et III, ou IV et V, ou VI et VII, ou VIII et I.

De là résulte immédiatement la propriété énoncée.

On voit facilement que dans I,  $f$  satisfait à l'équation:

$$f(x, y) - f(d - y, d - x) + f(y, x + y - d) - f(x, x + y - d) = 0 \quad (x \leq d \leq x + y),$$

et que réciproquement, toute fonction dans I, continue, satisfaisant à cette équation et nulle pour  $x = 0$  et pour  $y = x$ , détermine une fonction  $f(x, y)$ , nulle sur les axes et dont la variation est nulle sur tout carré contenant  $O$ .

On vérifiera que toute fonction du type  $\varphi(x) - \varphi(x - y) - \varphi(y) + \varphi(0)$ ,  $\varphi$  étant une fonction continue d'une seule variable, satisfait à l'équation et s'annule pour  $x = 0$ , et pour  $y - x = 0$ . Notre exemple correspond à  $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

2) A. Denjoy. *Journ. de Math.* 1915, p. 175.

La démonstration exige seulement la continuité du côté opposé à celui où l'on considère le nombre dérivé zéro.

identiquement nulle. Donc  $\Delta(f, r)$  n'est pas déterminé par la connaissance d'une dérivée finie, supposée existante, pour un même quadrant invariable.

Exemple: Soit  $f_1(x, y) = y$ , pour  $y - x \leq 0$   
 $= x$ , pour  $y - x \geq 0$ .

Dans chacun des demi-plans  $y - x \leq 0$  et  $y - x \geq 0$ ,  $f_1(x, y)$  est du type  $g(x) + h(y)$ , donc  $\Delta(f_1, r) = 0$ , si  $r$  appartient entièrement à un de ces demi-plans.

Sur la droite  $y - x = 0$ , les rectangles servant à la définition de  $l_2$  et  $L_2$  sont encore situés entièrement dans  $y - x \geq 0$ , ceux qui servent pour  $l_4$  et  $L_4$  dans  $y - x \leq 0$ , donc en tout point  $l_2 = L_2 = l_4 = L_4 = 0$ .

Cependant  $f_1(x, y)$ , nulle sur les demi-axes positif n'est pas indistinctement nulle dans le premier quadrant.

Géométriquement  $z = f_1(x, y)$  est représentée par un dièdre ayant pour arête la droite  $x = y = z$ , les 2 faces passant resp. par l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  (positifs).

Exemple analogue, si l'on exige  $l_1 = L_1 = 0$  ou  $l_3 = L_3 = 0$ .

Cet exemple montre que les nombres  $l_i$  et  $L_i$  ne possèdent pas un théorème de la moyenne généralisé, comme les nombres dérivés des fonctions continues d'une seule variable, et comme la dérivée seconde généralisée.

12.  $f(x, y)$  étant une fonction continue, je désignerai par  $d_x^+(x, y)$ ,  $D_x^+(x, y)$ ,  $d_x^-(x, y)$ , et  $D_x^-(x, y)$  les nombres dérivés extrêmes de  $f$  par rapport à  $x$  au point  $x, y$ ; par  $d_y^-(x, y)$ , etc. les nombres dérivés par rapport à  $y$ .

La signification de  $d_y^+[D_x^+(x, y)]$ ,  $D_y^+[D_x^+(x, y)]$  sera alors évidente.

Je vais démontrer la proposition suivante:

Si  $l_1$  et  $L_1$  <sup>1)</sup> sont finis au point  $x_0, y_0$ , on a:

1° si  $D_x^+(x_0, y_0)$  est  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), il existe un nombre positif  $\varrho$ , tel que  $D_x^+(x, y + v) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) pour  $0 \leq v < \varrho$ ;

2° si  $D_x^+(x_0, y_0)$  est fini, le nombre  $D_x^+(x, y)$  est continue à droite par rapport à  $y$  au point  $x_0, y_0$  et l'on a

$$l_1 \leq d_y^+[D_x^+(x_0, y_0)] \leq D_y^+[D_x^+(x_0, y_0)] \leq L_1.$$

Théorème analogue pour  $d_x^+(x_0, y_0)$  et (en échangeant  $x$  et  $y$ ) pour  $D_y^+(x_0, y_0)$  et  $d_y^-(x_0, y_0)$ .

<sup>1)</sup> On voit facilement les changements à apporter si l'on remplace  $l_1$  et  $L_1$  par les autres nombres  $l_i$  et  $L_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ).

Démonstration: A tout nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un nombre positif  $\varrho$ , tel que les 2 inégalités

$$0 < u < \varrho, \quad 0 < v < \varrho$$

entraînent

$$l_1 - \varepsilon < \frac{f(x_0 + u, y_0 + v) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0 + v)}{uv} < L_1 + \varepsilon.$$

$$(1) \quad (l_1 - \varepsilon)v < \frac{f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0 + v)}{u} - \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} < (L_1 + \varepsilon)v$$

1° Si  $D_x^+(x_0, y_0) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} = +\infty$ , il existe une suite de nombres positifs  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  tendant vers 0, tels que

$$\frac{f(x_0 + u_n, y_0) - f(x_0, y_0)}{u_n} \text{ tend vers } +\infty.$$

Le rapport

$$\frac{f(x_0 + u_n, y_0 + v) - f(x_0, y_0 + v)}{u_n} > \frac{f(x_0 + u_n, y_0) - f(x_0, y_0)}{u_n} + (l_1 - \varepsilon)v$$

( $0 < v < \varrho$ ,  $v$  indépendant de  $n$ )

tend donc aussi vers  $+\infty$ . Donc  $D_x^+(x_0, y_0 + v) = +\infty$  ( $0 \leq v < \varrho$ ).

Si  $D_x^+(x_0, y_0) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} = -\infty$ , on a aussi

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} = d_x^+(x_0, y_0) = -\infty,$$

donc  $\frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u}$  tend vers  $-\infty$ , quelle que soit la façon où  $u$  tend vers  $+0$ . Mais le rapport

$$\frac{f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0 + v)}{u} < \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} + (L_1 + \varepsilon)v$$

tend aussi vers  $-\infty$ ,  $u$  tendant vers  $+0$  d'une façon quelconque. Donc  $D_x^+(x_0, y_0 + v) = d_x^+(x_0, y_0 + v) = -\infty$  ( $0 \leq v < \varrho$ ).

2° Si  $D_x^+(x_0, y_0)$  est fini, il existe une suite de nombres positifs  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  tendant vers  $+0$ , tels que

$$\lim \frac{f(x_0 + u_n, y_0) - f(x_0, y_0)}{u_n} = D_x^+(x_0, y_0),$$

nombre fini.

Donc toutes les limites de  $\frac{f(x_0 + u_n, y_0 + v) - f(x_0, y_0 + v)}{u_n}$  sont finies et  $\geq D_x^+(x_0, y_0) + (l_1 - \varepsilon)v$ . D'où

$$D_x^+(x_0, y_0 + v) \geq D_x^+(x_0, y_0) + (l_1 - \varepsilon)v.$$

Est-ce que  $D_x^+(x_0, y_0 + v)$  peut être  $> D_x^+(x_0, y_0) + (L_1 + \varepsilon)v$ ? Non, car alors il existerait une suite de nombre  $u_n$  tendant vers 0, tels que  $\frac{f(x_0 + u_n, y_0 + v) - f(x_0, y_0 + v)}{u_n}$  tend vers  $D_x^+(x_0, y_0) + (L_1 + \varepsilon)v + \omega$

( $0 < \omega$ ), d'où résulte que le rapport  $\frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u_n}$  aurait au moins une limite  $\geq D_x^+(x_0, y) + \omega$ , ce qui est impossible. Donc nous avons

$(l_1 - \varepsilon)v \leq D_x^+(x_0, y_0 + v) - D_x^+(x_0, y_0) \leq (L_1 + \varepsilon)v$  ( $0 \leq v < \rho$ ) d'où résulte que  $D_x^+(x_0, y_0)$  est continue à droite par rapport à  $y$  et que ses nombres dérivés extrêmes à droite par rapport à  $y$  sont compris entre  $l_1 - \varepsilon$  et  $L_1 + \varepsilon$  inclusivement. Donc,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit,

$$l_1 \leq d_v^+[D_x^+] \leq D_v^+[D_x^+] \leq L_1.$$

Même raisonnement pour  $d_x^+(x, y)$ . Enfin, pour démontrer la proposition pour  $D_y^+$  et  $d_y^+$  on part de la double inégalité

$$(2) \quad (l_1 - \varepsilon)u < \frac{f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0 + u, y_0)}{v} < \frac{f(x_0, y_0 + v) - f(x_0, y_0)}{v} < (L_1 + \varepsilon)u$$

à laquelle s'applique un raisonnement comme ci-dessus<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Le raisonnement et les résultats subsistent, si l'on remplace les nombres  $l_1$  et  $L_1$  par les nombres  $s_{y,1}$  et  $S_{y,1}$  dans (1); et par les nombres  $s_{x,1}$  et  $S_{x,1}$  dans (2). Voir n° 10.

Si l'on veut seulement obtenir la continuité de  $D_x^+(x, y)$  et  $d_x^+(x, y)$  par rapport à  $y$  au point  $x_0, y_0$ , il suffit de supposer que le rapport

$$\frac{f(x_0 + u, y_0 + v) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0 + v)}{u}$$

tend vers 0, si  $u$  et  $v$  tendent vers  $+0$ .

13. Démontrons maintenant le théorème suivant<sup>2)</sup>:

Si en tout point d'une droite déterminée  $x = x_0$ ,

1°  $l_1$  et  $L_1$  sont finis et égaux,  $= \sigma(x, y)$ .

2°  $l_4$  et  $L_4$  sont finis (ou, condition moins restrictive, si

$$\frac{f(x+u, y+v) + f(x, y) - f(x+u, y) - f(x, y+v)}{u}$$

tend vers 0, pour  $u = +0, v = -0$ ), alors, s'il existe un seul point  $x_0, y_0$ , où  $f$  possède une dérivée à droite par rapport à  $x$  finie  $p^+(x_0, y_0)$ ,

a)  $f$  possède en tout point  $x_0, y$  une dérivée à droite par rapport à  $x$  finie  $p^+(x_0, y)$ ;

b) cette dérivée  $p^+(x_0, y)$ , continue par rapport à  $y$ , possède une dérivée à droite par rapport à  $y$ ,  $= \sigma(x, y)$ .

Démonstration. Tout point  $x_0, y$ , où  $D_x^+(x_0, y)$  est infini (resp. fini) est, d'après le théorème du n° 13 (énoncé pour  $l_1$  et  $L_1$  et pour  $l_4$  et  $L_4$ ) centre d'un intervalle  $i_{x_0}(y - \varrho, y + \varrho)$ , en tout point duquel  $D_x^+$  est infini (resp. fini).

Les deux ensembles  $E$ , où  $D_x^+(x_0, y)$  est infini, et  $E'$  où  $D_x^+(x_0, y)$  est fini sont l'un et l'autre des ensembles ouverts; ils sont complémentaires, donc l'un d'eux ne peut pas exister; c'est évidemment  $E$ , puisque au point  $x_0, y_0$   $D_x^+$  est fini. Donc  $D_x^+$  est fini en tout point  $x_0, y$ .

De même,  $d_x^+(x_0, y)$  doit être fini en tout point de la droite  $x = x_0$ .

D'après n° 12,  $d_x^+(x_0, y)$  et  $D_x^+(x_0, y)$  sont continues par rapport à  $y$  et puisque nous avons supposé  $l_1 = L_1 = \sigma(x, y)$ , on a

$$d_v^+[d_x^+] = D_v^+[d_x^+] = d_v^+[D_x^+] = D_v^+[D_x^+] = \sigma(x, y)$$

c. à. d.  $d_x^+(x_0, y)$  et  $D_x^+(x_0, y)$  ont en tout point  $x_0, y$  une dérivée à droite par rapport à  $y = \sigma(x, y)$ .

De même, pour obtenir la continuité de  $D_x^+(x, y)$  et de  $d_x^+(x, y)$  par rapport à  $y$ , il suffit de supposer que

$$\frac{f(x_0+u, y_0+v) + f(x_0, y_0) - f(x_0+u, y_0) - f(x_0, y_0+v)}{v}$$

tend vers 0, si  $u$  et  $v$  tendent vers 0.

On peut encore faire d'autres hypothèses.

<sup>2)</sup> Il est évident, qu'en obtient des énoncés analogues, en remplaçant les indices 1 et 4, par 1 et 2, ou 2 et 3, ou 3 et 4, ou en échangeant les indices d'un même couple.

Ils coïncident au point  $x_0, y_0$ , par hypothèse, donc ils coïncident en tout point de  $x = x_0$ , donc en tout point de cette droite  $f$  admet une dérivée à droite finie  $p^+(x_0, y)$  par rapport à  $x$ , continue par rapport à  $y$  et admettant une dérivée à droite par rapport à  $y$ , égale à  $\sigma(x, y)$ ; c. q. f. d.

Remarque: En particulier, si tous les nombres  $l$ , et  $L$ , sont égaux entre eux pour  $x = x_0$  et  $= s(x_0, y)$ , c. à. d. s'il existe une dérivée en tout point de la droite  $x = x_0$ , et s'il existe un seul point  $x_0, y_0$ , où  $f$  possède une dérivée par rapport à  $x$ , en tout point  $x_0, y$ , il existe alors une dérivée  $p(x_0, y)$  continue en  $y$ ;  $\frac{\partial p}{\partial y}$  existe et  $= s(x_0, y)$ .

Même remarque pour  $q(x, y_0)$  si l'on remplace  $x_0$  par  $y_0$  et  $y$  par  $x$ ;  $\frac{\partial q}{\partial x}$  existe et  $= s(x_0, y)$ .

Il existe alors même une différentielle totale première, comme il résulte de la formule:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{u^2 + v^2}} &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} + \\ &+ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{f(x_0, y_0 + v) - f(x_0, y_0)}{v} + \\ &+ \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}. \end{aligned}$$

13. bis. Soit  $r$  le rectangle  $a < x < b, c < y < d$ .

Si les conditions 1° et 2° du n° 13, sont vérifiées pour tout nombre  $x_0, a < x_0 < b, (c < y < d)$ , je dis que  $\Delta(f, r)$  est entièrement déterminé par la connaissance de  $\sigma(x, y)$  en tout point de  $r$ .

Posons, en effet,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= f(x, y) + f(a, c) - f(x, c) - f(a, y), \\ &\text{pour } a \leq x \leq b, c \leq y \leq d. \end{aligned}$$

$\varphi(x, y)$  satisfait aux mêmes conditions que  $f(x, y)$  dans  $r$ .

De plus  $\varphi(x, c) = 0$  pour  $a \leq x \leq b$ , donc admet une dérivée par rapport à  $x$  pour toute valeur  $x_0, a < x_0 < b$ . Donc d'après n° 12,  $\varphi(x, y)$  admet en tout point de  $r$  une dérivée à droite par rapport à  $x$ ,  $\pi(x, y)$ , celle-ci est continue par rapport à  $y$  et admet  $\sigma(x, y)$  pour dérivée à droite par rapport à  $y$ . Donc, puisque une fonction continue d'une seule variable est déterminée par sa dérivée

à droite finie, existante en tout point, et par sa valeur en un point,  $\pi(x_0, y)$ , nulle pour  $y = c$ , est entièrement déterminée ( $c < y' < d$ ) par  $\sigma(x_0, y')$ , et  $\varphi(x, y_0)$ , nulle pour  $x = a$ , est déterminée par  $\pi(x', y_0)$  ( $a < x' < x$ ). Donc

$\Delta(f, r) = \varphi(b, d)$  est entièrement déterminé.

14.  $\Delta(f, r)$  peut être déterminée moyennant d'autres hypothèses. Soit  $r$  le rectangle  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ .

Supposons que:

1° il existe une infinité dénombrable de droites  $y = y_n$ , partout denses sur  $r$ , telle qu'en tout point  $x, y_n$  les 4 dérivés extrêmes par rapport à  $x$ , c. à d.  $d_x^-, D_x^-, d_x^+, D_x^+$  soient finis.

2° il existe une pleine épaisseur<sup>1)</sup> de droites  $x = x_0$ , telles qu'en tout point  $x_0, y$  ( $c < y < d$ ) l'une au moins des 2 hypothèses suivantes soit vérifiée:

a)  $l_1, L_1, l_4$  et  $L_4$  sont finis,

b)  $l_2, L_2, l_3$  et  $L_3$  sont finis.

3° si l'hypothèse a) est vérifiée, ou bien  $l_1 = L_1$ , ou bien  $l_4 = L_4$ ; si l'hypothèse b) est vérifiée, ou bien  $l_2 = L_2$ , ou bien  $l_3 = L_3$ .

En désignant cette valeur commune par  $\tau(x_0, y)$ ,  $\Delta(f, r)$  est entièrement déterminé par la connaissance de  $\tau(x, y)$ .

Démonstration. Puisque une fonction d'une seule variable à nombres dérivés extrêmes finis, possède une dérivée sur une pleine épaisseur, à chaque droite  $y = y_n$  correspond une pleine épaisseur  $E_n$  de valeurs de  $x$  telles que  $d_x^- = D_x^- = d_x^+ = D_x^+ = p(x, y_n)$ ,  $x$  appartenant à  $E_n$ . Les ensembles  $E_n$  ont en commun un ensemble  $E_0$  complémentaire d'un ensemble de mesure nulle. Si  $x_0$  appartient à  $E_0$ , on a en tout point  $x_0, y_n$ , c. à d. sur une infinité dénombrable de points partout denses sur l'intervalle  $i_{x_0}(c, d)$ ,

$$d_x^- = D_x^- = d_x^+ = D_x^+ = p(x, y_n).$$

L'ensemble des valeurs de  $x$ , pour lesquelles l'hypothèse 2° est vérifiée, possède en commun avec  $E_0$  une pleine épaisseur  $E_0'$ .

Soit  $x_0'$  un point de  $E_0'$  et  $y_0$  un point de l'intervalle  $(c, d)$ . Il suit du théorème du n° 12, que si au point  $x_0', y_0$  le cas a) se présente, les 2 nombres  $d_x^+(x_0', y_0)$  et  $D_x^+(x_0', y_0)$  doivent être finis et égaux entre eux; donc  $p_x^+(x_0', y_0)$  existe. De même, si au point  $x_0', y_0$ , le cas b) se présente,  $d_x^-(x_0', y_0)$  et  $D_x^-(x_0', y_0)$  sont finis et égaux entre eux et  $p_x^-(x_0', y_0)$  existe.

<sup>1)</sup> c. à d. complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

Il existe donc une fonction  $\varphi(x, y)$ , définie quels que soient  $x$ , appartenant à  $E'_0$  et  $y$  appartenant à l'intervalle  $(c, d)$ , coïncidant avec  $p(x_0, y_n)$  aux points  $x_0, y_n$ , avec  $p^+(x_0, y)$  ou  $p^-(x_0, y)$  resp., aux points  $x_0, y$  où le cas a) resp. le cas b) se présente.  $\varphi(x, y)$  est continue par rapport à  $y$ , car  $\varphi(x, y) = \lim \varphi(x, y_n)$ , si  $y_n$  tend vers  $y$ , donc  $= \lim \varphi(x, y')$ , si  $y'$  tend vers  $y$ , puisque tout  $\varphi(x_0, y')$  est lui-même limite de  $\varphi(x, y_n)$ .

De notre hypothèse 3<sup>o</sup>), il résulte (d'après n<sup>o</sup> 13) que  $\varphi(x, y)$  ( $x$  appartenant à  $E'_0$ ) possède une dérivée unilatérale finie,  $= \sigma(x, y)$ , quelque soit  $y$  appartenant à l'intervalle  $(c, d)$ .

Donc pour une telle valeur de  $x$ , la variation de  $\varphi(x, y)$ , c. à d. le nombre  $\varphi(x, y) - \varphi(x, c)$ , est entièrement déterminée par la connaissance de  $\sigma(x, y)$  pour cette valeur de  $x$ .

Considérons maintenant  $f(x, y_n)$ ; puisque  $f(x, y_n)$  est à nombres dérivés finis par rapport à  $x$  (hypothèse 1<sup>o</sup>), la variation de  $f$  (pour cette valeur  $y_n$ ) par rapport à  $x$ , est entièrement déterminée par la connaissance de la dérivée  $\varphi(x, y)$ , sur la pleine épaisseur  $E'_0$ .

Donc,  $f(x, y_n) - f(a, y_n)$  étant entièrement déterminé et  $y_n$  étant partout dense sur l'intervalle  $c < y < d$ ,  $\Delta(f, r)$  est entièrement déterminé.

15. Démontrons maintenant que:

$\Delta(f, r)$  est entièrement déterminé, par la limite  $\lambda(x, y)$  de  $\frac{\Delta(f, \gamma)}{u^2}$  supposée existante et finie,  $\gamma$  étant un carré quelconque contenant  $x, y$ , le côté  $u$  tendant vers 0.

Il suffit évidemment de démontrer, que  $\Delta(f, r) = 0$ , si  $\lambda(x, y) = 0$  en tout point de  $r$ .

Pour cela, je démontre d'abord, que:

Si  $\frac{\Delta(f, r)}{\text{mes}(r)} = \omega$  et si  $\lambda(x, y)$  existe en tout point de  $r$ , il existe au moins un point  $M'$  intérieur à  $r'$ , tel que  $\lambda(M') \geq \omega - \varepsilon$ , et au moins un point  $M''$ , tel que  $\lambda(M'') \leq \omega + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire, donné d'avance.

En effet, puisque  $f(x, y)$  est continue, il existe un rectangle  $r_1$ , dont le rapport des côtés = nombre rationnel  $p/q$  ( $p$  et  $q$  nombres entiers), et tel que

$$\omega - \varepsilon = \frac{\Delta(f, r)}{\text{mes}(r)} - \varepsilon < \frac{\Delta(f, r_1)}{\text{mes}(r_1)} < \frac{\Delta(f, r)}{\text{mes}(r)} + \varepsilon = \omega + \varepsilon.$$

Divisons  $r_1$  en  $pq$  carrés égaux.

Sur l'un au moins des carrés ainsi obtenus, soit  $\gamma'$ , on aura:

$$\Delta(f, \gamma') \geq \frac{1}{pq} \Delta(f, r_1).$$

On a aussi:  $\text{mes } \gamma' = \frac{1}{pq} \text{mes } r_1$ , donc

$$\frac{\Delta(f, \gamma')}{\text{mes } (\gamma')} \geq \frac{\Delta(f, r_1)}{\text{mes } r_1} > \omega - \varepsilon.$$

De même, il existe au moins un carré  $\gamma''$ , tel que

$$\frac{\Delta(f, \gamma'')}{\text{mes } (\gamma'')} < \omega + \varepsilon.$$

Divisons le carré  $\gamma'$  en 4 carrés égaux; sur l'un de ces carrés, soit  $\gamma'_1$ , on a  $\frac{\Delta(f, \gamma'_1)}{\text{mes } \gamma'_1} > \omega - \varepsilon$ . On peut déduire de  $\gamma'_1$  un carré  $\gamma'_2$ , comme  $\gamma'_1$  est déduit de  $\gamma'$ , et ainsi de suite. On obtient alors une suite de carrés

$$\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$$

tels que  $\gamma'_{n+1}$  est contenu dans  $\gamma'_n$  et que  $\text{mes } (\gamma'_{n+1}) = \frac{1}{4} \text{mes } \gamma'_n$ . Il existe donc un point  $M'$  et un seul appartenant à tous les  $\gamma'_n$ , et l'on a

$$\lambda(M') \geq \omega - \varepsilon,$$

puisque l'on a, quel que soit  $n$ ,  $\frac{\Delta(f, \gamma'_n)}{\text{mes } \gamma'_n} > \omega - \varepsilon$ .

D'une manière analogue, on trouve un point  $M''$ , tel que  $\lambda(M'') \leq \omega + \varepsilon$ . Donc notre lemme est établi.

Supposons  $\omega \neq 0$ .

Si  $\omega > 0$ , prenons  $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ ; on voit que  $\lambda(M') \geq \frac{\omega}{2}$ .

Si  $\omega < 0$ , prenons  $\varepsilon = \frac{|\omega|}{2}$ ; on voit que  $\lambda(M'') \leq -\frac{|\omega|}{2}$ .

Donc en tout cas, on trouve un point, où  $\lambda \neq 0$ .

Donc si  $\lambda(x, y) = 0$  en tout point,  $\omega = \Delta(f, r)$  doit être 0, c. q. f. d.

16. Un raisonnement analogue permet de démontrer que  $\Delta(f, r_0)$  est entièrement déterminé par la dérivée régulière<sup>1)</sup>  $\varrho(x, y)$ , supposée

<sup>1)</sup> Voir n°. 10 b),  $\varrho(x, y)$  est la valeur commune des  $r_i$  et  $R_j$  supposés égaux entre eux.

existante et finie en tout point de  $r_0$ , si l'on fait l'hypothèse complémentaire, que pour une suite régulière de rectangles  $r_n$  ayant un point  $x, y$  pour sommet, le rapport  $\frac{\Delta(f, r_n)}{\text{mes } c_n}$  tend vers zéro,  $c_n$  étant le plus petit carré de sommet  $x, y$  contenant  $r_n$ .

Le calcul totalisant.

17. Il est bien facile de former des fonctions dérivées  $s(x, y)$ , non sommables au sens de Lebesgue<sup>1)</sup>.

En effet, si  $\varphi(x)$  est une fonction continue d'une seule variable indépendante, admettant une dérivée non sommable  $\varphi'(x)$ , la fonction continue  $f(x, y) = y\varphi(x)$  est telle que

$$\frac{\Delta}{uv} = \frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{uv} = \frac{\varphi(x+u) - \varphi(x)}{u}$$

donc  $s(x, y)$  existe et  $=\varphi'(x)$ , donc  $s(x, y)$  n'est pas sommable, car toute fonction sommable est sommable par rapport à  $x$  pour une pleine épaisseur de valeurs de  $y$ .

Nous avons démontré, que si  $s(x, y)$  existe (et est finie) et si nous supposons  $f(a, y) = f(x, c) = 0$  (ce qui est toujours permis),  $p$  existe et est continue par rapport à  $y$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$  existe et  $= s(x, y)$ .

(De même  $q$  existe et est continue par rapport à  $x$  et  $\frac{\partial q}{\partial x} = s(x, y)$ ).

$s(x, y)$ , dérivée d'une fonction continue en  $y$ , est donc totalisable sur chaque droite parallèle à  $Oy$  (et sur chaque droite parallèle à  $Ox$ )

<sup>1)</sup> Dans ce qui suit, j'entends par "intégrale" toujours l'intégrale double, c. à d.  $\lim \Sigma \text{ mes. ens. } \{l_i \leq S(x, y) < l_{i+1}\}$  (les  $l_i$  étant une échelle de nombres allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) pour une suite quelconque de subdivisions, telle que  $\max(l_{i+1} - l_i)$  tend vers zéro.

Pour calculer l'intégrale répétée  $\int_a^b dx \int_c^d s(x, y) dy$ , si cette intégrale a un

sens, il faudrait calculer  $\int_c^d s(x, y) dy$  pour une pleine épaisseur de valeurs de  $x$ ,

ce qui exigerait une infinité non dénombrable d'opérations. Or, notre but est de ne pas sortir du dénombrable.

Totalisons  $(y)T_c^d s(x, y) = p(x, d) - p(x, c)$ .

$p(x, y)$ , continue pas rapport à  $y$ , peut avoir, par rapport à  $x$ , toutes les discontinuités de la fonction dérivée la plus générale.

Donc, pour pouvoir calculer

$$\Delta(f, r) = (x)T_a^b[p(x, d) - p(x, c)].$$

il faut calculer  $(y)(T_c^d s(x_0, y))$  pour une pleine épaisseur de valeurs de  $x_0$ , c. à d. il faut effectuer une infinité non dénombrable d'opérations.

L'objet des pages suivantes est de donner une méthode exigeant seulement l'emploi d'une suite *dénombrable* de calculs.

Faisons d'abord une remarque générale.

Le nombre  $s(x, y)$  étant la limite du nombre  $\frac{\Delta(f, r)}{\text{mes}(r)}$  dépendant du rectangle  $r$ , le problème de l'intégration <sup>1)</sup> est de retrouver  $\Delta(f, r)$  pour tous les rectangles  $r$ .

<sup>1)</sup> Tout revient, comme nous verrons, à donner le moyen de trouver un ensemble fermé  $E_1$  agrégé à un ensemble fermé  $E$  (non dense, donné quelconque) et non dense sur  $E$ , en dehors duquel la totalisation puisse être effectuée, si elle est déjà effectuée en dehors de  $E$ . A l'analogie de la totalisation dans le cas linéaire, on pourrait être tenté de tirer parti de la décomposition du complémentaire de  $E$  en régions distinctes  $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ ; tâcher de définir la totalisation pour l'intérieur de  $R_n$ , puis pour le domaine  $D_n$ , correspondant à  $R_n$ ; puis tâcher de réunir  $D_m$  et  $D_n$ , si  $D_m$  et  $D_n$  ont des points en commun, etc. Mais un exemple simple montrera que la décomposition du complémentaire de  $E$  en régions distinctes ne peut pas jouer un rôle dans la totalisation.

Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue, dont la dérivée  $\varphi'(x)$  existe en tout point du segment  $0, 1$  et admet pour ensemble de points de non-sommabilité un certain ensemble parfait  $H$  de points extrêmes  $0$  et  $1$ . La fonction  $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2\varphi(x)$ , définie sur le carré  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , admet une dérivée  $s(x, y) = y\varphi'(x)$ , dont l'ensemble des points de non sommabilité est constitué par des segments  $s_{x_0}(0, 1)$ ,  $x_0$  appartenant à  $H$ .

L'ensemble complémentaire est composé d'une infinité dénombrable de régions distinctes.

Définissons maintenant  $f_1(x, y)$  sur le rectangle  $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ ;  $= f(x, y)$ , pour  $0 \leq y \leq 1$ ;  $= 0$ , pour  $-1 \leq y \leq 0$ .  $f_1(x)$  possède en tout point une dérivée  $s_1(x, y)$ , dont l'ensemble des points de non-sommabilité est le même que celui pour  $f(x, y)$ . Maintenant l'ensemble complémentaire est une seule région.

Cependant les difficultés de la totalisation sont les mêmes.

Or,  $\Delta(f, r)$  dépend continûment des 4 paramètres, dont dépend  $r$ . Donc il suffit de donner le moyen de calculer  $\Delta(f, r')$  pour tous les rectangles  $r'$ , en infinité dénombrable, dont les coordonnées des sommets sont des nombres rationnels. Nous les appellerons *rectangles à sommets rationnels*. Si  $r_0$  est donné quelconque,  $\Delta(f, r)$  peut être calculé comme  $\lim \Delta(f, r')$ ,  $r'$  tendant vers  $r_0$ .

19. Si  $s(x, y)$  est sommable sur le rectangle  $r(a < x < b, c < y < d)$ , on a l'égalité

$$\Delta(f, r) = \int\int_{(r)} s(x, y) dx dy^1).$$

D'après les propriétés de l'intégrale de Lebesgue, on a:

$$\int\int_{(r)} s(x, y) dx dy = \int_E dx \int_c^d s(x, y) dy,$$

$E$  désignant la pleine épaisseur de valeurs de  $x_0$ , pour lesquelles

$\int_c^d s(x_0, y) dy$  a un sens.

D'après n° 17, et les propriétés de la totale de Denjoy on a:

$$\int_c^d s(x_0, y) dy = (y) T_c^d s(x_0, y),$$

donc puisque dans le calcul de la totale les valeurs sur un ensemble de mesure nulle peuvent être négligées,

$$\int_a^b dx \int_c^d s(x_0, y) dy = (x) T_a^b (y) T_c^d s(x_0, y) = \Delta(f, r),$$

c. q. f. d.

20. Supposons maintenant  $s(x, y)$  non sommable.

Dans tous les cas,  $s(x, y)$  est la limite de la suite de fonctions continues

$$\frac{f(x+u_n, v_n) + f(x, y) - f(x+u_n, y) - f(x, y+v_n)}{u_n v_n},$$

<sup>1)</sup> C'est seulement dans les démonstrations que nous utilisons les intégrales et les totales répétées, pour le calcul nous nous servons exclusivement de l'intégrale double.

$u_n$  et  $v_n$  étant deux suites de nombres, non nuls, tendant vers 0. Donc, d'après le théorème de Baire:

*Quelque soit l'ensemble parfait  $P$ , l'ensemble des points au voisinage desquels  $s(x, y)$  n'est pas borné sur  $P$ , est non dense sur  $P$ .*

A fortiori,

*l'ensemble  $H$  des points, au voisinage desquels  $s(x, y)$  est non sommable sur  $P$ ,  $H$  est non dense sur  $P$ .*

$H$  est évidemment fermé.

L'expression „ $s(x, y)$  est sommable sur  $P^u$ , signifie que la fonction  $\sigma(x, y) = s(x, y)$  sur  $P$  et  $= 0$  en dehors de  $P$ , est sommable.

21. Soit  $E$  l'ensemble (fermé, non dense, d'après 20) des points du plan au voisinage desquels  $s(x, y)$  n'est pas sommable. Pour tous les rectangles  $r_1$ , à sommets rationnels, ne contenant pas de points de  $E$  dans leur intérieur, ni sur leur contour, nous calculons  $\Delta(f, r_1)$  d'après la formule:

$$\Delta(f, r_1) = \int_{(r_1)} s(x, y) dx dy.$$

L'intégration besgienne sera appelée la *première opération de la totalisation*.

Les rectangles  $r_1$  étant en infinité dénombrable, nous n'effectuons qu'une infinité dénombrable d'opérations.

22. Soit maintenant  $r_2$  un rectangle à sommets rationnels, contenant des points de  $E$  sur son contour, mais n'en contenant pas dans son intérieur.

D'après la remarque du n° 17, nous calculons  $\Delta(f, r_2)$  suivant la formule

$$\Delta(f, r_2) = \lim \Delta(f, r'_1),$$

en désignant par  $r'_1$  un rectangle variable, intérieur à  $r_2$ , et tendant vers  $r_2$ ;  $\Delta(f, r'_1)$  est déjà connu (n° 21).

Le calcul de  $\Delta$  d'après cette formule sera appelé la *seconde opération de la totalisation*.

Les rectangles  $r_2$  sont en nombre nul, fini ou infinité dénombrable.

Dès à présent, quel que soit le rectangle  $r_0$ , ne contenant pas de points de  $E$  dans son intérieur,  $\Delta(f, r_0)$  peut être supposé connu.

23. Supposons que les rectangles  $r_3$  et  $r'_3$

1° ne possèdent pas de points de  $E$  dans leur intérieur; \*

2° possèdent un côté en commun et soient situés de part et d'autre de ce côté. Supposons que ce côté contienne des points de  $E$  et appelons  $r_4$  la réunion de  $r_3$  et  $r'_3$ .

Il résulte de la définition de  $\Delta$ , que l'on a:

$$\Delta(f, r_4) = \Delta(f, r_3) + \Delta(f, r'_3).$$

Le calcul de  $\Delta$  d'après cette formule sera appelé la *troisième opération* de la totalisation.

24. Effectuons maintenant la décomposition:

$$E = P + Q$$

$P$  = l'ensemble (parfait) des points où  $E$  est de première sorte

$Q$  = l'ensemble des points au voisinage desquels  $E$  est de seconde sorte (n° 3).

Nous allons démontrer, que, si  $r_0$  est un rectangle quelconque ne contenant pas de points de  $P$  dans son intérieur,  $\Delta(f, r_0)$  peut être calculé en appliquant un nombre fini ou infiniité dénombrable de fois la première, seconde, et troisième opérations.

Pour cela, nous calculerons  $\Delta(f, \rho)$  sur tous les rectangles  $\rho$  à sommets rationnels, ne contenant pas de points de  $P$  dans leur intérieur; ces rectangles sont évidemment en infiniité dénombrable.

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots$

la suite d'ensembles fermés, définis au n° 5.

Il existe un nombre fini ou transfini dénombrable  $\beta$ , tel que  $E_\beta = E_{\beta+1} = \dots = P$ ,  $E_{\beta-1}$  étant différent de  $P$ .

Nous distinguons successivement les cas suivants:

1)  $\rho$  contient des points de  $E$ , (dans son intérieur), et ne contient pas de points de  $E_1$  (ni dans son intérieur, ni sur son contour). Soit  $\rho$  le rectangle  $\alpha < x < \beta$ ,  $\gamma < y < \delta$ .

Tout point de  $\Pi(E, \rho)$  étant centre d'un rectangle, tel que la projection de la portion correspondante de  $E$ , sur l'un au moins des deux axes, est dénombrable, on voit, en appliquant le lemme de Borel, que  $\Pi(E, \rho)$  est compris dans la réunion de 2 ensembles fermés  $H$  et  $K$ ,  $H$  étant constitué de segments  $s_{\gamma_0}(\gamma, \delta)$ ,  $H_x$  est fini ou dénombrable;  $K$  étant constitué de segments  $s_{\gamma_0}(\alpha, \beta)$ ,  $K_{\gamma_0}$  est fini ou dénombrable.

A tout intervalle contigu  $\alpha_m < x < \beta_m$  de  $H_x$ , il correspond un rectangle  $\sigma_m \{ \alpha_m < x < \beta_m, \gamma < y < \delta \}$ , tel que  $\Pi(H + K, \sigma_m) = \Pi(K, \sigma_m)$ .

L'ensemble complémentaire de  $\Pi(K, \sigma_m)$  par rapport à  $\sigma_m$  est divisé en rectangles (en nombre fini ou infinité dénombrable), où  $\Delta$  est déjà connu. De ces nombres on déduit  $\Delta(f, \sigma_m)$  en appliquant la 2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup> opération en nombre fini ou une infinité dénombrable de fois, d'une manière analogue à celle employée dans la totalisation de Denjoy<sup>1)</sup>.

Après avoir calculé  $\Delta(f, \sigma_m)$  pour toute valeur de  $m$ , on calcule  $\Delta(f, \varrho)$  au moyen des  $\Delta(f, \sigma_m)$  de la même façon que  $\Delta(f, \sigma_m)$  a été calculé.

La démonstration, que le résultat obtenu, est exactement  $\Delta(f, \varrho)$ , se fait à l'aide de la proposition du n<sup>o</sup> 9.

1 bis)  $\varrho$  contient des points de  $E_1$  sur son contour, mais non pas dans son intérieur.

On applique la *seconde opération*,  $\Delta$  étant calculé pour tous les rectangles du cas 1<sup>o</sup>).

2<sup>o</sup>)  $\varrho$  contient des points de  $E_1$  dans son intérieur, et ne contient pas de points de  $E_2$  dans son intérieur, ni sur son contour.

On opère comme dans le cas 1<sup>o</sup>).

2 bis)  $\varrho$  contient des points de  $E_2$  sur son contour, mais non pas dans son intérieur.

On opère comme dans le cas 2<sup>o</sup>).

De là on passe au cas 3), 3 bis), ...  $n$ ),  $n$  bis), ... Si  $E_\omega$  existe, et si  $\varrho$  ne contient pas de points de  $E_\omega$  dans son intérieur, ni sur son contour,  $\Delta(f, \varrho)$  est déjà calculé dans un des cas  $n_0$ ) ou  $n_0$  bis),  $n_0$  étant un certain nombre fini.

De là on parvient au cas

$\omega$  bis)  $\varrho$  contient des points de  $E_\omega$  sur son contour, mais non pas dans son intérieur, et ainsi de suite.

Arrivé à l'opération de rang  $\beta$ ), il ne reste qu'à effectuer l'opération de rang  $\beta$  bis), pour avoir  $\Delta(f, \varrho)$  sur tout rectangle  $\varrho$ , ne contenant pas de points de  $E_\beta = P$  dans son intérieur.

Dès lors  $\Delta(f, r_0)$  peut être supposé connu, quel que soit  $r_0$ , n'ayant aucun point de  $P$  pour point intérieur; on n'est jamais sortie du dénombrable.

25. Définissons maintenant la *quatrième opération* de la totalisation.

$P$  étant un ensemble parfait de première sorte en lui même,  $r$

<sup>1)</sup> Voir Denjoy. Ann. Sc. Ec. Norm. 1917 p. 192.

un rectangle contenant des points de  $P$  dans son intérieur, soit  $C(\Pi)$  l'ensemble complémentaire de  $\Pi(P, r)$  par rapport à  $r$ .

Soit  $\omega$  un nombre positif arbitrairement petit,  $D$  un domaine correspondant à  $\omega$  (voir n° 8) et désignons par  $V(f, D)$  (variation de  $f$  sur  $D$ ), la somme des variations de  $f$  sur les rectangles  $\rho$ , constituant  $D$ .

$$V(f, D) = \Sigma \Delta(f, \rho).$$

Alors, si  $\lim V(f, D)$ , pour  $\omega = 0$ , existe, nous dirons, que la variation  $V(f, C(\Pi))$  de  $f$  sur  $C(\Pi)$  est définie et nous posons:

$$V(f, C(\Pi)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V(f, D).$$

Le calcul de  $V(f, C(\Pi))$ , (si ce nombre est défini), sera la quatrième opération.

Il suffit évidemment, de choisir une suite de nombres décroissants, tendant vers zéro,

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$

de construire des domaines correspondants,

$$D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$$

et de calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(f, D_n)$$

26. Soit  $P$  l'ensemble (parfait, de première sorte en lui-même), du n° 25.

D'après n° 20, l'ensemble (fermé)  $H$  des points de  $P$ , au voisinage desquels  $s(x, y)$  n'est pas sommable sur  $P$ ,  $H$  est non dense sur  $P$ .

Soit  $M$  un point de  $P - H$ .

Nous dirons que  $\Delta(f, r)$  est calculable au voisinage de  $M$ , si  $M$  est centre d'un rectangle  $\gamma(M)$ , tel que:

1°  $V\{f, C(\Pi(P, r))\}$  est défini sur toute portion  $\Pi(P, r)$  appartenant à  $\Pi(P, \gamma)$ ;

2° il existe égalité entre les 2 nombres:

$$\Delta(f, r) \quad \text{et} \quad \int_{(\gamma)} \int \sigma(x, y) dx dy + \lim_{\omega \rightarrow 0} V(f, D)^1).$$

<sup>1)</sup>  $\sigma(x, y) = s(x, y)$  sur  $P$   
 $= 0$  hors de  $P$ .

L'intégrale  $\int_{(\gamma)} \int \sigma(x, y) dx dy$  existe évidemment pour tout rectangle  $r$  ne contenant par de points de  $H$  dans son intérieur, ni sur son contour.

L'ensemble des points  $M$ , au voisinage desquels  $\Delta(f, r)$  est calculable, est évidemment ouvert sur  $P$ . Son complémentaire  $K$  par rapport à  $P$ , est donc fermé;  $K$  comprend évidemment  $H$ .

27. Nous voulons démontrer que:

*L'ensemble  $K$  des points de  $P$ , au voisinage desquels  $\Delta(f, r)$  est non calculable,  $K$  est non dense sur  $P$ .*

Il suffit de démontrer, que toute portion  $\Pi(P, r_0)$  contient un point  $M$ , au voisinage duquel  $\Delta(f, r)$  est calculable; pour cela il est permis de supposer que  $r_0$  ne contient pas de points de  $H$  dans son intérieur, ni sur son contour (puisque  $H$  est non dense).

Nous établirons l'existence de  $M$ :

1° Si  $\Pi(P, r_0)$  contient une portion  $\Pi(P, r'_0)$  constitué de segments  $s_x(c'_0, d'_0)$ ;  $r'_0$  est le rectangle  $a'_0 < x < b'_0, c'_0 < y < d'_0$ .

Si  $\Pi(P, r_0)$  ne satisfait pas à 1°), mais si  $\Pi(P, r_0)$  contient une portion  $\Pi_x(P, r'_0)$ , tel que  $\Pi_x(P, r'_0)$  coïncide avec le segment  $a'_0 \leq x \leq b'_0$ .

3° Si  $\Pi(P, r_0)$  ne satisfait ni à 1°), ni à 2°).

Donc l'existence de  $M$  sera établi dans tous les cas.

28. Dans le premier, resp. le troisième cas,  $\Pi_x(P, r'_0)$ , resp.  $\Pi_x(P, r_0)$  sont des ensembles parfaits discontinus. Désignons  $r'_0$  dans le 1<sup>er</sup> cas, et  $r_0$  dans le 3<sup>me</sup> cas, par  $r\{a < x < b, c < y < d\}$  et soient  $\alpha_n < x < \beta_n$  les intervalles contigus de  $\Pi_x(P, r)$ . A tout intervalle  $\alpha_n \beta_n$  correspond un rectangle  $r_n(\alpha_n \leq x \leq \beta_n, c \leq y \leq d)$  ne contenant pas de points de  $\Pi$  dans son intérieur.

En désignant par  $r'_n$  un rectangle quelconque intérieur à  $r_n$  (sens large), nous posons

$$\mu_n = \frac{\max |\Delta(r'_n)|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \quad 1).$$

Nous allons voir que:

Tout point  $(\alpha_n, y_0)$ , ( $c \leq y_0 \leq d$ ), est soit premier sommet, soit quatrième sommet d'un rectangle, tel que  $\frac{|\Delta|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \geq \frac{1}{4} \mu_n$ , si  $\Delta$  est la variation de  $f$  sur ce rectangle.

Tout point  $(\beta_n, y_0)$  ( $c \leq y_0 \leq d$ ), est soit le deuxième, soit le quatrième sommet d'un rectangle, tel que  $\frac{|\Delta|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \geq \frac{1}{4} \mu_n$ .

1) Ce nombre est analogue à l'oscillation relative dans le cas d'une seule variable. Voir pour cette notion:

Denjoy Journ. de Math. 1915, p. 166.

Démontrons p. e. la première partie.

Soit  $\alpha'_n \leq x \leq \beta'_n$ ,  $\gamma'_n \leq y \leq \delta'_n$ , un rectangle ou  $|\Delta(r'_n)|$  atteint son maximum. Nous prolongeons ses 2 côtés horizontaux (s'il le faut) jusqu'à leur rencontre avec  $x = \alpha_n$ . On obtient (sauf dans le cas  $\alpha'_n = \alpha_n$ ) 2 rectangles nouveaux, ayant l'un et l'autre le point  $\alpha_n$ ,  $\gamma'_n$  pour 1<sup>er</sup> sommet et  $\alpha_n$ ,  $\delta'_n$  pour 4<sup>me</sup> sommet et l'on voit aisément que sur l'un de ces rectangles le nombre  $\frac{|\Delta|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \geq \frac{1}{2} \mu_n$ . (Si  $\alpha_n = \alpha'_n$ , l'un de ces rectangles est nul, l'autre coïncide avec le rectangle, sur lequel le maximum est atteint). Désignons ce rectangle par  $r''_n$ .

Prolongeons le côté vertical à droite jusqu'à sa rencontre avec  $y = c$  et  $y = d$ . Cette droite verticale et  $x = \alpha_n$  déterminent avec une droite quelconque  $y = y_0$  ( $c \leq y_0 \leq d$ ) et les 2 côtés horizontaux respectifs de  $r''_n$ , 2 rectangles (dont l'un peut être nul). Sur l'un de ces 2 rectangles le nombre  $\frac{|\Delta|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \geq \frac{1}{2} \frac{|\Delta(r''_n)|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \geq \frac{1}{4} \mu_n$ .

On voit en considérant respectivement les hypothèses:  $c \leq y_0 \leq \gamma'_n$ ,  $\gamma'_n < y_0 < \delta'_n$ ,  $\delta'_n \leq y_0 \leq d$ , que ce rectangle peut avoir le point  $\alpha_n$ ,  $y_0$  aussi bien pour 1<sup>er</sup> que pour 4<sup>me</sup> sommet,

Donc notre énoncé est établi.

La seconde partie se démontre d'une façon analogue.

29. Apellons: nombres  $\mu_n$  au voisinage de  $x_0$  ( $x_0$  appartenant à  $\Pi_x$ ) les nombres  $\mu_n$  correspondant aux intervalles contigus  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  au voisinage de  $x_0$ .

Supposons que l'ensemble des nombres  $x_0$ , au voisinage desquels les nombres  $\mu_n$  ne sont pas bornés, soit dense sur  $\Pi_n$ , en autres termes, contienne une portion  $\Pi_x$  de  $\Pi_x$ .

Puisque tout point  $\alpha_n$ ,  $c$  est premier sommet d'un rectangle  $r'_n$ , tel que  $\frac{|\Delta(r'_n)|}{(\beta_n - \alpha_n)(d - c)} \geq \frac{1}{4} \mu_n$ , donc à fortiori  $\frac{|\Delta(r'_n)|}{\text{mes}(r'_n)} \geq \frac{1}{4} \mu_n$ , l'ensemble des nombres  $\frac{|\Delta(r'_n)|}{\text{mes}(r'_n)}$  est non borné au voisinage de tout point de  $\Pi_x$ .

En appliquant un type de raisonnement connu<sup>1)</sup>, on voit qu'il

<sup>1)</sup> Voir pour ce type de raisonnement Denjoy, Journ. de Math. 1915, p. 149.  
On applique le principe suivant:  
Si l'ensemble dénombrable  $M_n$  est partout dense sur l'ensemble parfait (con-

existe un ensemble partout dense  $R$  sur  $\Pi_x$ , tel que tout point  $x_0$  de  $R$  est premier sommet d'une infinité de rectangles  $r'_{n_p}$ , dont la longueur des côtés horizontaux tend vers zéro avec  $\frac{1}{n_p}$ , le nombre

$\frac{|\Delta(\varrho_{n_p}(u_0))|}{\text{mes } \varrho_{n_p}(u_0)}$  tendant en même temps vers  $\infty$ .

Si la suite de rectangles  $r'_{n_p}$  contient une suite partielle  $r'_v$ , telle que la longueur des côtes verticaux tend aussi vers zéro avec  $\frac{1}{v}$ , l'un au moins des 2 nombres  $|l_1|$  et  $|L_1|$  est  $\infty$  au point  $x_0, c$ .

Si une telle suite n'existe pas, il existe évidemment une suite de rectangles  $r''_v$ , tendant vers un segment limite  $s_{x_0}(c, \delta)$ .

On voit aisément que dans ce cas le nombre  $\frac{\Delta(r''_v)}{\text{mes}(r''_v)}$  ne peut tendre vers  $\pm\infty$  que si l'un au moins des nombres  $l_1, L_1, l_4, L_4$  est infini au point  $x_0, \delta$ , ou si l'un au moins des nombres  $|d_x^+|$  et  $|D_x^+|$  est infini, soit au point  $x_0, c$ , soit au point  $x_0, \delta$ .

Donc, en supposant  $l_1, L_1, l_4$  et  $L_4$  finis (en particulier en supposant l'existence d'une dérivée  $s(x, y)$  finie), l'ensemble des points  $x_0$  de  $\Pi_x$  au voisinage desquels les nombres  $\mu_n$  ne sont pas bornés, cet ensemble est non dense sur  $P$ .

Même conséquence, si l'on suppose  $l_2, L_2, l_3$  et  $L_3$  finis.

30. Il existe donc, d'après n° 29, un rectangle  $r_1(a_1 < u < b_1, c < y < d)$  appartenant à  $r$ , tel que les nombres  $\mu_n$  sont bornés sur  $\Pi_x(P, r_1)$  par un même nombre fini  $A$ .

$s(x, y)$  est sommable sur  $\Pi(P, r_1)$ .

Je dis que, dans le premier cas,  $\Delta(f, r_2)$  est calculable au voisinage d'un point quelconque  $M$  intérieur à  $\Pi(P, r_1)$ .

En effet, soit  $r_2$  un rectangle quelconque, appartenant à  $r_1$  et contenant des points de  $P$  dans son intérieur.

Considérons la fonction de  $x, (a_2 < x < b_2)$ :

$$\varphi(x, c_2, d_2) = f(x, d_2) - f(x, c_2).$$

tinu ou discontinu, à un nombre quelconque de dimensions), et si le point  $M_n$  est intérieur à un domaine  $\omega_n$ , il existe un ensemble  $R$  partout dense sur  $P$  et dont chaque point est intérieur à une infinité de domaines  $\omega_n$ .

$R$  est appelé un résiduel, savoir un ensemble situé sur  $P$  et dont la complémentaire relativement à  $P$  est, ou bien non dense sur  $P$ , ou bien la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur  $P$ .

Cette fonction  $\varphi$  possède les propriétés suivantes:

- 1°  $\varphi$  est continue;
- 2°  $\varphi$  possède en tout point une dérivée finie  $= p(x, d_2) - p(x, c_2)$
- 3°  $p(x, d_2) - p(x, c_2)$  est sommable sur  $\Pi_x(P, r_1)$  et l'on a:

$$\int_{\Pi_x(P, r_1)} [p(x, d_2) - p(x, c_2)] dx = \int_{\Pi(P, r_1)} s(x, y) dx dy = \int_{(r)} \int_{(r)} \sigma(x, y) dx dy.$$

Démonstration analogue à celle du n° 19.

4° L'oscillation relative de  $\varphi(x)$  autour de  $\Pi_x(P, r_1)$  est bornée, et la variation de  $\varphi$  autour de  $\Pi_x(P, r_1)$  est définie. En effet, si  $\alpha\beta$  est un intervalle appartenant à un intervalle contigu  $\alpha_n\beta_n$  de  $\Pi(P, r_1)$ , on a évidemment

$$\left| \frac{\varphi(\beta, c_2, d_2) - \varphi(\alpha, c_2, d_2)}{\beta_n - \alpha_n} \right| \leq (d - c) A.$$

Donc on a, d'après les propriétés de la totale de Denjoy:

$$\Delta(f, r_2) = \varphi(b_2, c_2, d_2) - \varphi(a_2, c_2, d_2) = \int_{\Pi_x(P, r_1)} [p(x, d_2) - p(x, c_2)] dx + \Sigma W(\varphi, \alpha_n, \beta_n),$$

en désignant par  $W(\varphi, \alpha_n, \beta_n)$  le nombre  $\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)$ , et en étendant la sommation sur tous les intervalles contigus de  $\Pi_x(P, r_1)$ .

Construisons maintenant un domaine  $D$  correspondant à un nombre positif  $\omega$  assez petit.

Les rectangles  $\varrho$  constituant  $D$ , ont tous leurs côtés horizontaux sur  $y = c$  et  $y = d$ , donc on a:

$$V(f, D) = \Sigma \Delta(\varrho) = \Sigma W(\varphi, \alpha, \beta),$$

si  $\alpha < x < \beta$  est la projection de  $\varrho$  sur  $Ox$ ,  $\alpha\beta$  appartient à un intervalle  $\alpha_n\beta_n$ .

Donc  $V(f, D) =$  somme des variations de  $\varphi$  sur un certain nombre d'intervalles  $\alpha'_n\beta'_n$ , intérieurs à des intervalles contigus  $\alpha_n\beta_n$  de  $\varphi$ ; un intervalle  $\alpha_n\beta_n$  contient au plus un intervalle  $\alpha'_n\beta'_n$  et l'on a:  $\alpha'_n - \alpha_n < \omega$ ,  $\beta_n - \beta'_n < \omega$ .

Donc, puisque la variation de  $\varphi$  autour de  $\Pi_x(P, r_1)$  existe,

1°  $\lim_{\omega \rightarrow 0} V(f, D)$  existe;

2° Cette limite est  $\Sigma W(\varphi, \alpha_n, \beta_n)$ .

Donc:

$$\begin{aligned} \Delta(f, r_2) &= \int_{\Pi_x(P, r_1)} [p(x, d_2) - p(x, c_2)] dx + \Sigma W(\varphi, \alpha_n, \beta_n) = \\ &= \int_{(r)} \int \sigma(x, y) dx dy + \lim_{\omega=0} V(f, D), \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

31. Désignons maintenant par  $r(a < x < b, c < y < d)$ :

le rectangle  $r_1$  (n° 30) pour le troisième cas,

le rectangle  $r'_0$  (n° 27) pour le deuxième cas.

L'ensemble des points  $x$  de  $\Pi_x(P, r)$ , tel que le segment  $s_x(c, d)$  appartient à  $\Pi(P, r)$ , est un ensemble fermé non dense sur  $\Pi_x$ , s'il existe. L'ensemble complémentaire est donc ouvert et partout dense sur  $\Pi_x(P, r)$ ;  $x_0$  appartenant à ce complémentaire, le segment  $s_{x_0}(c, d)$  contient à la fois des points de  $\Pi(P, r)$  et du complémentaire  $C(\Pi)$  de  $\Pi(P, r)$ ; ces derniers points constituent des intervalles  $i_{x_0}(\gamma, \delta)$ , dont l'un au moins des extrémités appartient à  $\Pi(P, r)$ , l'autre pouvant appartenir à  $y = c$ , ou  $y = d$ , sans appartenir à  $\Pi(P, r)$ .

L'ensemble des points  $x_0, \gamma$  et des points  $x_0, \delta$  est partout dense sur  $\Pi(P, r)$ <sup>1)</sup>.

Considérons les nombres

$$\mu = \frac{\max_{\gamma \leq y' < y'' \leq \delta} |p(x, y'') - p(x, y')|}{\delta - \gamma} \quad ^2).$$

Puisque  $p(x, y)$  est continue par rapport à  $y$ , le segment  $s_x(\gamma, \delta)$  contient au moins deux points  $x, y_1$  et  $x, y_2$  tel que

$$\frac{|p(x, y_2) - p(x, y_1)|}{\delta - \gamma} = \mu.$$

On voit aisément que l'un au moins des 2 nombres

$$\frac{|p(x, y_2) - p(x, \gamma)|}{\delta - \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{|p(x, y_1) - p(x, \gamma)|}{\delta - \gamma}$$

est  $\geq \frac{1}{2}\mu$  et de même l'un au moins des 2 nombres

$$\frac{|p(x, \delta) - p(x, y_2)|}{\delta - \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{|p(x, \delta) - p(x, y_1)|}{\delta - \gamma}.$$

<sup>1)</sup> Ces points n'existent pas dans le premier cas.

<sup>2)</sup>  $p(x, y)$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$ , ou plus généralement la dérivée à droite (dans ce cas  $s(x, y)$  est la valeur commune de  $l_1$  et  $L_1$ ).

Donc à fortiori chacun des deux nombres:

$$\frac{\max_{\gamma \leq y \leq \delta} |p(x, \delta) - p(x, y)|}{\delta - y} \quad \text{et} \quad \frac{\max_{\gamma \leq y \leq \delta} |p(x, y) - p(x, \gamma)|}{y - \gamma}$$

est au moins égale à  $\frac{1}{2}\mu$ .

32. Supposons que l'ensemble des points de  $\Pi(P, r)$  au voisinage desquels les nombres  $\mu$  ne sont pas bornés, soit dense sur  $\Pi$  (ou contienne une portion  $\Pi'$  de  $\Pi$ ).

Il en est donc de même de l'ensemble où les nombres:

$$\frac{\max_{\gamma \leq y \leq \delta} |p(x, \delta) - p(x, y)|}{\delta - y} \quad \text{et} \quad \frac{\max_{\gamma \leq y \leq \delta} |p(x, y) - p(x, \gamma)|}{y - \gamma}$$

ne sont pas bornés.

En remarquant que tout rapport  $\frac{p(x, y'') - p(x, y')}{y'' - y'}$  est limite d'une suite de nombres  $\frac{\Delta(f, r_n)}{\text{mes } r_n}$ , où  $r_n$  désigne un rectangle variable, ayant le segment  $s_x(y', y'')$  pour côté gauche et dont le côté horizontal tend vers zéro, on démontre, par un raisonnement analogue à celui du n° 29, l'existence d'un résiduel  $R$  de  $\Pi'$ , dont tout point est premier sommet d'une suite de rectangles  $r'$ , dont le côté horizontal tend vers zéro, et sur lequel le nombre  $\frac{\Delta(f, r')}{\text{mes}(r')}$  tend vers  $\pm \infty$ . Comme au n° 29, on démontre, que cela est incompatible avec l'hypothèse de nombres  $l_1, L_1, l_4$  et  $L_4$  finis en tout point, et en particulier avec l'existence d'une dérivée finie  $s(x, y)$ .

On peut aussi considérer les nombres  $l_2, L_2, l_3$  et  $L_3$ .

33. On peut donc déterminer toujours une portion  $\Pi(P, r_1)$  de l'ensemble  $\Pi(P, r)$  du n° 31, sur lequel les nombres  $\mu$  sont bornés par un nombre fini  $B$ .

Je dis que, dans le deuxième cas,  $\Delta$  est calculable au voisinage de tout point intérieur à  $\Pi(P, r_1)$ .

Soit  $r_2$  un rectangle intérieur à  $r_1$  (sens large), tel que  $\Pi(P, r)$  existe; il faut démontrer que l'on a:

$$\Delta(f, r_2) = \int_{(r_2)} \int \sigma(x, y) dx dy + \lim_{\omega_n \rightarrow 0} V(f, D_n).$$

Tout domaine  $D_n$  est la réunion d'un nombre fini de rectangles  $q_i$  du type  $u_{i-1} \leq u \leq u_i, \mu_i \leq y \leq v_i$ , sans points intérieurs en commun.

Posons  $\psi_k(x) = 0$ , si  $x$  n'appartient pas à l'intervalle  $x_{i-1} < x < x_i$ ;  
 $\psi_k(x) = p(x, v_k) - p(x, \mu_k)$ , si  $x$  appartient à l'intervalle  
 $x_{i-1}, x_i$ .

Soit

$$\varphi_n(x) = \Sigma \psi_k(x),$$

la sommation étant étendue sur tous les rectangles  $q_k$ .

L'intervalle  $i_{x_0}(\mu_k, v_k)$  appartient à un intervalle  $i_{x_0}(\gamma, \delta)$ ; donc  
 $|p(x, v_k) - p(x, \mu_k)| \leq M(\delta - \gamma)$  est borné, donc  $\psi_k(x)$  est intégrable.

On a:  $|\varphi_n(x)| < M(d - c)$ , donc  $\varphi_n(x)$  étant mesurable, est intégrable.

Donc:

$$V(f, D_n) = \Sigma \Delta(f, q_k) = \Sigma \int_{a_2}^{b_2} \psi_k(x) dx = \int_{a_2}^{b_2} \Sigma \psi_k(x) dx = \int_{a_2}^{b_2} \varphi_n(x) dx.$$

A l'aide de cette expression nous allons démontrer que  $\lim_{\omega_n=0} V(f, D_n)$  existe. Il nous suffit de démontrer, d'après le théorème de la passage à la limite sous le signe  $\int$  pour les fonctions bornées, que  $\varphi_n(x)$  tend vers une fonction limite bornée<sup>1)</sup>.

Nous posons:

$$\varphi(x_0) = (c_2 \Sigma d_2) [p(x_0, \delta) - p(x_0, \gamma)],$$

le second membre désignant la somme de la série absolument convergente des nombres  $p(x_0, \delta) - p(x_0, \gamma)$ , si les intervalles  $i_{x_0}(\delta, \gamma)$ , sont les intervalles contigus (s'il en existe) de l'ensemble fermé (s'il existe) commun à  $s_{x_0}(c_2, d_2)$  et  $\Pi(P, r_2)$ . Si aucun intervalle contigu n'existe, nous posons  $\varphi(x_0) = 0$ ; si l'ensemble fermé pour  $x = x_0$  n'existe pas, nous posons  $\varphi(x_0) = p(x_0, d_2) - p(x_0, c_2)$ .  
 $\varphi(x)$  est une fonction bornée de  $x^2$ .

Je dis que  $\varphi_n(x)$  tend vers  $\varphi(x)$ <sup>1)</sup>.

L'ensemble commun à  $D$  et  $x = x_0$ , s'il existe, est un nombre fini d'intervalles, intérieurs aux intervalles contigus de la section de  $\Pi(P, r_2)$  avec  $x = x_0$ , tendant vers le système d'intervalles contigus, si  $\omega_n$  tend vers 0.  $\varphi_n(x)$  pour une valeur de  $x$  différente des points de division

<sup>1)</sup> Tout au moins en exceptant une infinité dénombrable de valeurs de  $x$  au plus.

<sup>2)</sup>  $\varphi(x)$  est la variation de  $p(x_0, y)$  sur l'ensemble complémentaire de l'ensemble commun à  $x = x_0$  et  $\Pi(P, r_2)$ .

$x$  n'est autre chose que la variation de  $p(x, y)$  sur ce nombre fini d'intervalles. D'où résulte, en remarquant (comme au n° 30) que la variation de  $p(x, y)$  autour de l'ensemble  $\{II(P, r_i), x_0\}$  est définie que  $\varphi_n(x)$  tend vers  $\varphi(x)$ . Dans les cas particuliers où  $x = x_0$  ( $x_0$  différent des  $x_i$ ) ne contient pas de points de  $C(II)$ , ou de  $II(P, r)$ ,  $\varphi_n(x) = \varphi(x)$  après une certaine valeur de  $\omega_n$ .

Si  $x$  appartient au système des  $x_i$  pour une infinité de valeurs de  $n$ , il peut se faire que  $\lim \varphi_n(x)$  n'existe pas, mais cet ensemble est de mesure nulle.

Donc on a:

$$\lim_{\omega_n=0} V(f, D_n) = \lim_{\omega_n=0} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_n(x) dx = \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x) dx.$$

Il nous reste à démontrer l'égalité des 2 nombres  $\Delta(f, r_2)$  et  $\int_{(r_2)} \int \sigma(x, y) dx dy + \lim_{\omega_n=0} V(f, D_n)$ .

Or, pour une pleine épaisseur  $E$  de valeurs de  $x$ ,  $\int_{c_1}^{d_1} \sigma(x, y) dy$  existe, et l'on a  $\int_{r_2} \int \sigma(x, y) dx dy = \int_E dx \int_{c_1}^{d_1} \sigma(x, y) dy$ , donc le second membre de l'égalité à démontrer équivaut à

$$\int_E [\varphi(x) + \int_{c_1}^{d_1} \sigma(x, y) dy] dx.$$

On voit aisément que la fonction à intégrer est égale à  $p(x, d_2) - p(x, c_2)$ , donc, puisque  $f(x, d) - f(x, c)$  est une totale indéfinie par rapport à  $x$ :

$$\int_{(r_2)} \int \sigma(x, y) dx dy + \lim_{\omega_n=0} V(f, D) = \int_E [p(x, d_2) - p(x, c_2)] dx = \Delta(f, r_2),$$

c. q. f. d.

34. Désignons maintenant par  $r(a < x < b, c < y < d)$  le rectangle  $r_1$  du n° 33, pour le troisième cas.

L'ensemble  $II_x(P, r)$  est parfait discontinu; sur  $II(P, r)$  l'ensemble des points  $x, \gamma$  et  $x, \delta$  est partout dense. En désignant par  $\alpha_n, \beta_n$  les intervalles contigus de  $II_x(P, r)$ , même l'ensemble des points  $\alpha_n, \gamma$  et  $\alpha_n, \delta$ , et celui des points  $\beta_n, \gamma$  et  $\beta_n, \delta$  est partout dense sur  $II(P, r)$ .

Considérons les rectangles  $r'$ , dont un côté vertical appartient à un intervalle  $i_{x_0}(\gamma, \delta)$ ,  $x_0$  étant un point  $\alpha_n$  ou  $\beta_n$ , et dont la projection  $r'_x$  sur  $Ox$  appartient à un intervalle contigu de  $\Pi_x$ . En désignant la longueur de  $r'_x$  aussi par  $r'_x$ , nous considérons les nombres

$$\nu = \max \frac{\Delta(r')}{r'_x(\delta - \gamma)}, \text{ si } x_0, \delta \text{ et } \gamma \text{ sont fixes et } r' \text{ varie.}$$

Considérons en particulier les rectangles  $r'(\gamma)$  et  $r'(\delta)$ , ayant pour sommets les points  $x_0, \gamma$  et  $x_0, \delta$ , et se projetant sur  $Ox$  dans  $r'_x$ . On voit facilement que les 2 nombres

$$\max \frac{|\Delta(r'(\gamma))|}{r'_x(\delta - \gamma)} \quad \text{et} \quad \max \frac{|\Delta(r'(\delta))|}{r'_x(\delta - \gamma)}$$

sont au moins égaux à  $\frac{1}{2}\nu$ .

En supposant que l'ensemble des points de  $\Pi(P, r)$ , au voisinage desquels les nombres  $\nu$  ne sont pas bornés, soit dense sur  $\Pi(P, r)$ , on obtient une contradiction analogue à celle déjà obtenue aux n° 29 et 32.

Donc, si  $s(x, y)$  existe et est fini, l'ensemble des points de  $\Pi(P, r)$  au voisinage desquels les nombres  $\nu$  ne sont pas bornés, est non dense sur  $\Pi(P, r)$ .

35 Il existe donc toujours une portion  $\Pi(P, r_1)$  de  $\Pi(P, r)$  telle que les nombres  $\nu$  sont bornés par un même nombre fini  $C$ .

Je dis que  $\Delta$  est calculable au voisinage de tout point intérieur à  $\Pi(P, r)$ .

Désignons par  $r_2(a_2 < x < b_2, c_2 < y < d_2)$  un rectangle appartenant à  $r_1$ , tel que  $\Pi(P, r_2)$  existe; nous choisissons une suite de nombres décroissants, tendant vers zéro:  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$  et nous construisons des domaines  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  correspondants. Si  $n$  est assez grand, il existe parmi les rectangles  $\varrho$  de  $D$  des rectangles  $\varrho_1$ , ayant leur côtés horizontaux resp. sur  $y = c_2$  et  $y = d_2$  et encore d'autres rectangles  $\varrho_2$ .

Ecrivons:

$$V(f, D) = \Sigma \Delta(f, \varrho) = \Sigma \Delta(f, \varrho_1) + \Sigma \Delta(f, \varrho_2).$$

On voit, comme au n° 30, que  $\Sigma \Delta(f, \varrho_1)$  tend vers  $\Sigma [f(\beta_r, d) - f(\beta_r, c) - f(\alpha_r, d) + f(\alpha_r, c)]$ , en désignant par  $\alpha_r, \beta_r$  les intervalles contigus de  $\Pi(P, r)$ .

En désignant par  $\varrho_{2,x}$  la projection d'un rectangle  $\varrho_2$  ( $x_2 < x < x'_2, y_2 < y < y'_2$ ) sur  $Ox$ ,  $\varrho_{2,x}$  contient en général des points de  $\Pi_x(P, r_2)$

dans son intérieur et  $\varrho_2$  est la réunion d'une infinité dénombrable de rectangles  $\varrho'_2$ , ayant même hauteur que  $\varrho_2$ , et se projetant sur  $Ox$  comme les intervalles contigus de  $\Pi_x(P, r_2)$ , (deux des  $\varrho'_2$  peuvent se projeter suivant des parties d'intervalles contigus), et d'un ensemble parfait de segments  $s_{x_0}(y_2, y'_2)$ . Les nombres  $p(x_0, y'_2) - p(x_0, y_2)$  sont bornés et les nombres  $|\Delta(\varrho'_2)|$  sont en rapport borné avec  $\varrho'_{2,x}$  donc

$$\Delta(f, \varrho_2) = \Sigma \Delta(f, \varrho'_2) + \int_{(\Pi_x \varrho_{2,x})} [p(x, y'_2) - p(x, y_2)] dx.$$

Faisons la sommation sur les rectangles  $\varrho_2$  (en nombre fini). On a :

$$\Sigma \Delta(f, \varrho_2) = \Sigma [\Sigma \Delta(f, \varrho'_2)] + \Sigma \int_{\Pi_x \varrho_{2,x}} [p(x, y'_2) - p(x, y_2)] dx.$$

Comme au n° 33, on montre que, si  $x$  appartient à  $\Pi_x(P, r_2)$ ,  $\Sigma \int_{\Pi_x \varrho_{2,x}} [p(x, y'_2) - p(x, y_2)] dx$  (que l'on peut écrire aussi  $\int_{a_2}^{b_2} \varphi_n(x) dx$ , en posant  $\psi_k(x) = p(x, y'_{2,k}) - p(x, y_{2,k})$ , si  $x$  appartient à  $\Pi_{x, \varrho_{2,k,x}}$  et  $= 0$ , si  $x$  n'appartient pas à  $\Pi_{x, \varrho_{2,k,x}}$  et  $\varphi_n(x) = \Sigma \psi_k(x)$ ), tend vers  $\int_{\Pi_x} \varphi(x) dx$ , en définissant  $\varphi(x)$ , pour  $x$  appartenant à  $\Pi_x(P, r)$  comme nous avons fait au n° 33 pour  $x$  quelconque.

Nous démontrerons que  $\Sigma [\Sigma \Delta(f, \varrho'_2)]$  tend vers 0.

Ce nombre étant la somme d'un nombre fini de séries absolument convergentes, nous pouvons prendre les termes dans un ordre quelconque.

Faisons d'abord la somme des  $\Delta(f, \beta'_2)$  correspondant à des rectangles  $\varrho'_2$  se projetant dans un même intervalle contigu  $u_n$  de  $\Pi_x$ , cette somme est inférieure à  $C \times u_n \times (d - c)$ .

En faisant maintenant la somme sur les intervalles contigus de  $\Pi_x$ , nous voyons :

$$\Sigma (\Sigma \Delta(f, \varrho'_2)) < C \times (d - c) \times \text{mes}(\text{projection des } \varrho'_2 \text{ sur } Ox).$$

Or on voit facilement que cette mesure tend vers zéro avec  $\omega_n$ . Donc  $\Sigma (\Sigma \Delta(f, \varrho'_2))$  tend vers zéro.

Donc  $\lim V(f, D_n)$  existe et =

$$\Sigma \{f(\beta_r, d) - f(\beta_r, c) - f(\alpha_r, d) + f(\alpha_r, c)\} + \int_{\Pi_x} \varphi(x) dx.$$

• On voit, comme au n° 33, que l'on a :

$\int_{\Pi_x} \varphi(x) dx = \int_{(r)} \int \sigma(x, y) dx dy = \int_{\Pi_x} [p(x, d) - p(x, c)]$ , et que ce nombre augmenté de  $\Sigma \{f(\beta_r, d) - f(\beta_r, c) - f(\alpha_r, d) + f(\alpha_r, c)\}$  est égale à  $\Delta(f, r_2)$ .

Donc on a :

$$\Delta(f, r_2) = \int_{(r)} \int \sigma(x, y) dx dy + \lim_{\omega_n=0} V(f, D_n), \quad \text{c. q. f. d.}$$

36. Ayant démontré que l'ensemble  $K$  des points de  $P$ , au voisinage desquels  $\Delta$  est non calculable, est non dense sur  $P$ , soit  $r_0$  un rectangle à sommets rationnels, étranger à  $K$  et contenant des points de  $P - K$  dans son intérieur.

Tout point de  $\Pi(P, r_0)$  est centre d'un plus grand carré  $\gamma$  (de demi-côté  $u$ ) tel que  $\Delta$  est calculable sur tout rectangle  $r'$  intérieur à  $\gamma$ . On voit que le minimum des nombres  $u$  est un nombre positif  $u_0$  (cf. n° 4). Divisons  $r_0$  en un nombre fini de rectangles  $r'_0$  (de côté  $< u_0$ ) et calculons les nombres  $\Delta(f, r'_0)$ . On trouve ensuite  $\Delta(f, r_0)$  par la formule

$$\Delta(f, r_0) = \Sigma \Delta(f, r'_0).$$

En appliquant la 2<sup>m</sup>e opération, on trouve  $\Delta(f, r)$  sur tous les rectangles à sommets rationnels, qui contiennent des points de  $K$  sur leurs contours mais pas dans leur intérieur.

37. Décomposons :

$$K = P_1 + Q_1 \quad (\text{voir n° 24}).$$

Nous sommes dans le cas étudié,  $E$  étant remplacé par  $K$ , nous faisons des calculs analogues; et ainsi de suite. Nous obtenons une suite d'ensembles fermés :

$$E, P, P_1, P_2, \dots, P_\omega, \dots, P_{\omega+1}, \dots, P_{2\omega}, \dots$$

dont la définition est évidente.

Chacun des ensembles étant non dense sur les précédents, la suite s'arrête à un ensemble nul à un certain rang fini ou dénombrable.

Arrivé à ce rang, nous connaissons  $\Delta$  sur tout rectangle à sommets rationnels, après avoir fait seulement une infinité dénombrable d'opérations.

La totalisation est donc effectuée.

## STELLINGEN.

1. De verzameling der punten, waar voldaan is aan een der ongelijkheden

$$l_i > L_j \text{ (diss. § 10 } ^a \text{)},$$

heeft de maat nul.

2. De stelling van diss. § 6 kan bewezen worden zonder ordinaalgetallen.

3. Hulpstelling I van § 6 laat voor meer onafhankelijk veranderlijken nog andere generalisaties toe dan de stelling van § 6.

4. Een continue functie  $f(x, y)$ , die in elk rechthoekig gebied buiten een niet dichte afgesloten verzameling  $E$  van de maat nul, samenvalt met een functie  $g_r(x) + h_r(y)$ , valt overal samen met een enkele functie  $g(x) + h(y)$ , als in elk punt van  $E$  de getallen  $l_1, L_1, l_4, L_4$ , of ook de getallen  $c$  en  $C$  (diss. § 10 <sup>a</sup>) en <sup>e</sup>) eindig zijn.

5. Het is mogelijk, om, onafhankelijk van de stelling van Baire, een rij continue functies te construeeren, die convergeert tot een gegeven approximatief continue functie (meer algemeen een functie à prépondérance de continuité voor eenzelfde kant) of tot een gegeven approximatieve afgeleide (meer algemeen een nombre dérivé prépondérant). \*)

6. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat een functie  $f(x, y)$  van begrensde totale variatie is (in den zin van HARDY), is, dat op elke afgesloten verzameling de variatie gedefinieerd is (in den zin van § 8 van dit proefschrift).

7. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat een afgesloten verzameling van de 2e soort is (diss. § 3), is, dat ze begrepen is in de vereeniging van een aftelbare oneindigheid van rechten  $x = \text{const.}$  en  $y = \text{const.}$

---

\*) Hierover verschijnt een mededeeling in Fundamenta Mathematicae, dl. V.

8. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat  $f(x)$  het verschil is van 2 convexe functies, is, dat  $f(x+y)$  van begrensde (2-dimensionale) variatie is ten opzichte van  $x, y$ .
9. Dat men langen tijd een functie  $f(x)$  continu noemde, als ze tusschen  $a$  en  $b$  elke waarde aanneemt tusschen  $f(a)$  en  $f(b)$ , (verschillend ondersteld), komt waarschijnlijk hierdoor, dat men alleen aan discontinuïteiten van de 1<sup>e</sup> soort gedacht heeft.
10. Van de uitkomsten van dit proefschrift zijn toepassingen te maken in de complexe-functietheorie.
11. In Math. Ann. Bd. 83, pag. 120, laat H. HAKE de vraag open, of iedere functie, integreerbaar volgens PERRON (in meer uitgebreiden zin), ook integreerbaar is volgens DENJOY. Deze vraag moet bevestigend beantwoord worden. Bovendien bestaan er functie's, integreerbaar volgens DENJOY (in den meest algemeenen zin), die niet integreerbaar zijn volgens PERRON\*).
12. Dat van een continue functie  $f(x)$  de variatie  $f(b) - f(a)$  bepaald is door de gegeneraliseerde 1<sup>e</sup> afgeleide:
- $$\varphi(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u},$$
- kan op verschillende manieren aangetoond worden.
13. Er bestaat voor het lineaire continuum een redeneerprincipe, dat analogie vertoont met het principe van de volledige inductie.
14. In dit proefschrift mag een zekere puntverzameling toegelaten worden, waar de afgeleide oneindig is.
15. Is  $f(z)$  een continue, eenwaardige complexe functie, die in elk punt binnen zeker gebied een eindig of oneindig differentiaalquotient heeft, dan is de verzameling van de punten, waar  $f'(z) = \infty$  is, nergens dicht en van de maat nul; de verzameling  $P$  van de singulariteiten van  $f(z)$  bevat in elke omgeving van elk harer punten, punten die op een continuum binnen  $P$  liggen.

\*) Hierover verschijnen elders uitvoeriger mededeelingen.

16. Ten onrechte ontbreekt in HOBSON „Theory of functions”, 2<sup>d</sup> Ed. vol. I, de vermelding, dat de in § 91 en § 112 behandelde splitsing van puntverzamelingen op hetzelfde neerkomen.
  17. De figuur van de 10 rechten, die door alle exemplaren van een 5-voudig oneindig lineair stelsel van quadratische oppervlakken gesneden worden in de puntenparen van eenzelfde involutie (Ch. v. Oss, diss. Utrecht 1916, Hfdst. VIII, § 7, blz. 159), bestaat uit de 10 gemeenschappelijke bisecanten van 2 kubische ruimtekrommen.
  18. Een convexe kromme heeft in alle punten (afgezien hoogstens van een aftelbare oneindigheid) een raaklijn.
  19. De verklaring, die DEMBER en UIBE (Leipziger Berichte, 1917) (Ann. der Physik 55, 387, 1916) geven van den schijnbaren vorm van het hemelgewelf, is niet bevredigend.
  20. Het „Prinzip der beschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen” van BERNSTEIN (Math. Ann. dl. 71, blz. 419) dient met voorzichtigheid toegepast te worden.
  21. Het bewijs, betreffende de uniciteit van de ontwikkeling van een functie naar veeltermen van ABEL, voorkomende in de dissertatie van A. A. NIJLAND (Over een bijzonder soort geheele functiën, blz. 69, § 48) is van geen waarde.
  22. Le principal gage des progrès de l'esprit est dans l'instinct qui nous pousse à quitter sentes et chemins pour monter droit à la source des faits. A. DENJOY.
-









A.

1