Het arithmetisch continuum

HET ARITHMETISCH CONTINUUM

J. THIE

HET ARITHMETISCH CONTINUUM

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. H. F. NIERSTRASZ, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 3 NOVEMBER 1924, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JOHANNES THIE
GEBOREN TE RODEN (DR).

P. NOORDHOFF — 1924 — GRONINGEN

Aan mijn Ouders.

Bij het indienen van dit proefschrift betuig ik allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, mijn hartelijken dank.

In het bizonder ben ik U erkentelijk, Hooggeleerde Wolff, Hooggeachte Promotor, voor Uw heldere voorlichting, groote bereidwilligheid en voortdurende belangstelling.

INHOUD.

INLEIDING.

Tusschen de beide groote gebieden der wiskunde, de Meetkunde en de Analyse, bestaat, hoe verschillend van aanzien beide ook zijn, op velerlei wijzen verband. Dit verband, hoewel dikwijls schijnbaar gezocht, is zoo sterk, dat het aanleiding heeft gegeven tot het onderbrengen van analytische objecten onder de meetkunde en omgekeerd. Van het eerste is zeker het irrationale getal een belangrijk voorbeeld.

Wanneer we in het kort de geschiedenis van het irrationale getal nagaan, merken we op, dat het begrip „irrationale grootheid" reeds bij Euklides aanwezig is (Pringsheim, Encyclopedie der Math. Wissenschaften). Hij kent dit echter niet als een getal, doch als een verhouding van twee meetkundige grootheden, die geen gemeenschappelijke maat hebben. Uitdrukkelijk zegt hij: onmeetbare grootheden verhouden zich *niet als getallen*.

De eerste, die een begrip heeft gehad van irrationale getallen is M. Stifel, die zegt, dat de irrationale getallen evengoed als de rationale een bepaalde plaats in de *geordende getallenrij* toekomt, waarmee dus het ordebegrip naar voren komt, iets dat ook in de moderne theorie van de irrationale getallen een fundamenteele rol speelt.

Als eindelijk Descartes zijn nieuwe Meetkunde gegrondvest heeft, waardoor met de geometrie der ouden volkomen wordt gebroken, komt meer dan ooit de behoefte op om het begrip van het irrationale getal verder uit te spinnen. Newton zegt reeds, dat de verhouding van twee grootheden een getal aangeeft. Toch heeft zulk een getal nog altijd meetkundigen ondergrond, het ontstaat door het meten van segmenten door middel van een willekeurig gekozen eenheidssegment. Bij het zoeken van een gemeenschappelijke maat door onderverdeeling van het eenheidssegment, vindt men een onbegrensde rij van rationale getallen die men een nieuw getal noemt, dit is dan geoorloofd, omdat met een dgl. metingsrij een bepaald segment overeenkomt. Omgekeerd kan echter niet geconcludeerd worden, dat met elke getallenrij een bepaald segment overeenkomt; op grond van bovenstaande opvatting kan men dus niet zeggen, dat elke getallenrij een getal voorstelt. De theorie is echter in zooverre belangrijk, dat zij één der moderne theorieën, die van CANTOR, een duidelijker basis geeft.

Het zijn CANTOR en DEDEKIND geweest, die de laatste band, die het irrationale getal aan meetkundige objecten koppelde, hebben doorgesneden. In de Math. Annalen Bd. V wijst CANTOR erop, dat elk arithmetisch gebouw op bovenstaande wijze geconstrueerd alleen met behulp van een zuiver geometrisch axioma kan worden vergeleken met segmenten.

Tot zoover zijn dus alle begrippen omtrent irrationale getallen afkomstig van meetkundige overwegingen; een gebied der Wiskunde dat naar uiterlijke vorm niets met Meetkunde te maken heeft, is gedurende eeuwen door diezelfde Meetkunde beheerscht. Met WEIERSTRASZ-CANTOR-DEDEKIND komt de kentering; DEDEKIND schrijft: „Statt dessen fordre ich, dasz die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll.” (Stetigkeit und irrationale Zahlen). Klaar en duidelijk is hier uitgesproken, dat men wil breken met de prioriteit der Meetkunde, men stelt zich op het standpunt, dat de Analyse moet zijn een vrije schepping, berustend op axioma's desnoods, maar dan op eigen axioma's. En wonderlijk genoeg, krijgt nu bij veel wiskundigen de Analyse een zekere prioriteit, de Meetkunde kan worden gearithmetiseerd. Hiermee wil nu weer niet gezegd zijn, dat de Meetkunde afhankelijk is van de Analyse, ook zij kan zich zonder de analyse uitgaande van enkele axioma's uitstekend ontwikkelen. (D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie). Met de prioriteit van de Meetkunde is het echter gedaan.

Van de genoemde theorieën over der invoering der irrationale getallen zijn die van CANTOR en DEDEKIND de belangrijkste. Uiterlijk zeer verschillend, kan men ze toch uit elkaar afleiden (HOBSON, Functions of a real variable). Die van CANTOR is wel de meest doorzichtige, het is ook de theorie die het meest aansluit bij de historische ontwikkeling der irrationale getallen. Immers hij beschouwt een rij van rationale getallen a_1, a_2, a_3 . . . .

met de eigenschap $|a_{n+\varrho} - a_n| < \varepsilon$; $n > N$; $\varrho = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ Deze rij kan men dan vergelijken met de rij, die men krijgt bij het zoeken naar de gemeenschappelijke maat van twee meetkundige grootheden. Zoo'n *„fundamentaalrij"* stelt dan een getal voor. CANTOR leidt hieruit af de limiet van getalverzamelingen. De fundamentaalreeksen zijn gemakkelijk te hanteeren, de mathematicus heeft van een dgl. rij een behoorlijke voorstelling, het rekenen met deze nieuwe getallen is, vergeleken bij de DEDEKINDSCHE, eenvoudig.

Theoretisch is echter de DEDEKINDSCHE methode boven die van CANTOR te stellen, zooals wij later zullen zien. Op geniale wijze wordt door DEDEKIND in zijn: „Stetigkeit und irrationale Zahlen" het begrip „Snede" ontwikkeld, een begrip, dat bij alle theorieën over irrationale getallen terug gevonden kan worden. Zijn theorie is abstracter, de bewerkingen met de nieuw ingevoerde getallen zijn omslachtiger, de opzet is echter ruimer dan die van de CANTORSCHE theorie.

NOODZAKELIJKHEID VAN HET SYSTEEM.

Alvorens over te gaan tot de beschouwing der irrationale getallen, zullen wij enkele opmerkingen maken over de opbouw van een getalsysteem. De grondslag van elk systeem is de verzameling der natuurlijke getallen. Deze uiterst belangrijke, voor iedere niet-mathematicus volkomen duidelijke verzameling, zullen we niet verder bekijken, waarmee niet gezegd is, dat de meeningen van alle mathematici omtrent de opbouw hiervan volkomen parallel loopen. Axiomatici als DEDEKIND willen haar afleiden uit enkele axioma's (Was sind und was sollen die Zahlen); intuitionisten als BROUWER zijn klaar met de woorden: „1, 2, 3 . . . . deze rij is intuitief duidelijk" (Grondslagen der Wiskunde). De laatste methode is ongetwijfeld de meest eenvoudige; de vraag, of zij wiskundig den voorrang genieten moet, is nog altijd actueel. We zullen deze verzameling bekend onderstellen.

Men kan nu rekenregels geven voor de natuurlijke getallen. De meest eenvoudige bewerking is de optelling; we weten dat het resultaat van elke optelling van twee natuurlijke getallen weer een natuurlijk getal is; we kunnen zeggen dat de optelling binnen het domein der natuurlijke getallen steeds mogelijk is. Anders staat het met de tegengestelde bewerking, de aftrekking. Is $a + b = c$, dan kan men afspreken, dat $a = c - b$ en zoo de aftrekking van 2 getallen c en b defineeren. Natuurlijk moet dan $c > b$ zijn. Toch bestaat er geen bezwaar tegen om ook voor 't geval $c < b$ aan de uitdrukking $c - b$ de beteekenis van een getal te geven, het „getal" a is dan geen natuurlijk getal, maar een zg. negatief getal. Voegt men deze getallen toe aan de natuurlijke, dan ontstaat een uitgebreider verzameling, die der positieve en negatieve getallen. Het getal $a - a$ noemt men het getal nul. De inverse bewerking der opteloperatie geeft dus onmiddellijk aanleiding tot uitbreiding van het getalsysteem.

Een tweede uitbreiding der getalverzameling ontstaat door de vermenigvuldiging en haar inverse. Vermenigvuldiging is in het domein der bovengenoemde systemen steeds mogelijk; de inverse bewerking niet. Is $ab = c$, dan kan men definieeren $a = \frac{c}{b}$, zoodat dus een getal a van de verzameling kan worden voorgesteld door het getallenpaar $\frac{c}{b}$. Omgekeerd echter is elk getallenpaar (c, b) geen getal der verzameling, m.a.w. de inverse bewerking is binnen het domein der positieve en negatieve geheele getallen niet altijd uitvoerbaar. Wil men nu toch aan elk getallenpaar (c, b) de beteekenis van een getal toekennen, dan moeten nieuwe getallen ingevoerd worden. Hier is dus niet ver gezocht om te postuleeren: elk getallenpaar (p, q) waarbij $q \neq 0$ stelt een nieuw getal voor, een breuk. Voegt men deze getallen nog toe aan de reeds bestaande verzameling, dan is ook de inverse bewerking der vermenigvuldiging altijd mogelijk. Men noemt de zoo ontstane verzameling die der rationale getallen.

Het eerste werk is nu om elk getal der nieuwe verzameling zijn plaats aan te wijzen, m.a.w. de verzameling der rationale getallen te ordenen. Hiertoe kan men als volgt te werk gaan:

1⁰. $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$ als resp. $ad > bc$; $ad = bc$; $ad < bc$.

2⁰. We definieeren $\frac{a}{1} = a$, waardoor de plaats der nieuwe getallen tusschen de oude wordt bepaald.

Optelling kan worden gedefinieerd als:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Vermenigvuldiging als: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Op analoge wijze definieert men de inverse bewerkingen, gemakkelijk blijkt dan dat in deze definities de bewerkingen met de natuurlijke getallen liggen opgesloten. Doordat de rekenregels voor de nieuw ingevoerde getallen ook voor de oorspronkelijke getallen gelden, is de naam „getal” voor het complex (a, b) gerechtvaardigd.

De opmerking moet gemaakt, dat bovenstaande definities oogenschijnlijk vrij willekeurig zijn, ook de aard van een getal (a, b) is nogal duister. Veel eenvoudiger zou het dan ook zijn om een breuk als volgt te definieeren: Verdeel de eenheid in b gelijke deelen en neem a van die deelen; dan heeft men de breuk $\frac{a}{b}$ en het is ongeveer duidelijk wat hiermee wordt bedoeld. Echter hier neemt men zijn toevlucht tot zaken, die niet meer zuiver arithmetisch zijn, men vooronderstelt hier het begrip *eenheid, die men in gelijke deelen kan verdeelen*. Wil men zuiver arithmetisch blijven werken, dan is dit niet geoorloofd en ook niet noodig. In zijn „Functions of a real variable" geeft Hobson dan ook een middel om de aard der breuken duidelijker te zien, onafhankelijk van het verdeelingsbegrip.

Men kan de elementen van een eindige verzameling laten correspondeeren één aan één met de getallen van een aanvangssegment der natuurlijke getallen, b.v. $1, 2, \ldots . b$. Hoe men deze (1, 1) correspondentie ook inricht, altijd krijgt men hetzelfde aanvangssegment $1, 2, \ldots . b$. (Brouwer, Mengenlehre, 1[e] deel pag. 5.) Kies nu een deelverzameling en laat daarmee correspondeeren het segment $1, 2, \ldots . a$, waarbij $a \leq b$, dwz. we hebben a elementen genomen uit de verzameling van b elementen. Dit kan men aanwijzen door de schrijfwijze $\frac{a}{b}$, het getallenpaar $\frac{a}{b}$ noemen we een breuk. Wil men een breuk $\frac{a}{b}$ ($a > b$) definieeren, dan neme men meerdere verzamelingen van b elementen en kieze daaruit weer a ($a > b$). Zoo kan men $\frac{a}{1}$ beschouwen als de verzameling van a elementen die elk behooren tot de verzameling (1). Deze interpretatie lijkt mij even voor de hand liggend als de verdeelingsinterpretatie. Du Bois-Reymond meent (Allgemeine Functionenlehre) dat een breuk is ontstaan bij de oervolken om een buit te verdeelen. Maar men zal toch wel eerst begrip gehad moeten hebben om 6 reebokken onder 3 personen te verdeelen (bovengenoemde opvatting) en daarna 3 reebokken onder 6 personen. En daar de oorsprong van de vermenigvuldigingsregel $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ toch in het duister ligt is voor de eene opvatting evenveel te zeggen als voor de andere, terwijl bovenstaande het voordeel heeft, geen beroep te doen op het verdeelingsprincipe.

De verzameling der rationale getallen, die we met R zullen aanduiden is er een van eerbiedwaardigen omvang. RUSSELL noemt haar in zijn „Principles of Mathematics" zelfs continu, waarmee hij dan bedoelt, dat er tusschen elke twee elementen altijd een derde en bijgevolg oneindig veel liggen. Wij zullen haar liever „dicht in zich zelf" noemen. Verder noemt hij haar „endless" d.w.z. zonder eerste of laatste element. Zeer merkwaardig is de eigenschap, dat zij *aftelbaar* is, d.w.z. de elementen kunnen in (1, 1) correspondentie worden gebracht met de elementen der natuurlijke getallen. Een zeer eenvoudig bewijs van de aftelbaarheid is het volgende. De rij der natuurlijke getallen is aftelbaar. Het product van twee aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar. Breng nu de verzameling der natuurlijke getallen in het quadraat, dan krijgt men juist het R systeem, dit is dus aftelbaar.

Ten slotte nog de bewerkingen Machtsverheffing en haar inverse. De eerste is weer mogelijk in het domein der rationale getallen, de laatste echter niet. DEDEKIND laat b.v. zien, dat $\sqrt{2}$ niet bestaat in het R systeem. Wil men nu ook deze bewerking een beteekenis geven, dan moet de verzameling nogmaals worden uitgebreid. De vraag is echter hoe. Bij de laatste uitbreiding ging men eenvoudig zeggen: elk complex (a, b) zal een getal voorstellen, de deelingsoperatie gaf de uitbreiding als vanzelfsprekend aan. Maar hier wordt de zaak moeilijker, de worteltrekking geeft geen directe aanwijzing voor de nieuw in te voeren getallen. Bij nadere beschouwing van het R systeem wordt men echter vanzelf gevoerd tot oneindige getalverzamelingen. Hiertoe merken wij op, dat de deelverzameling der quadraatgetallen van het R systeem overal dicht ligt t.o.v. de verzameling R. Kiest men nu een getal p van R dat geen quadraat is, dan kan men een rij van quadraatgetallen van R bedenken, die meer en meer tot p naderen en het ligt voor de hand, om de rij, die men krijgt door de wortels uit elk der quadraatgetallen te nemen, als het getal te beschouwen dat $\sqrt{p}$ voorstelt. Op dezelfde manier kan men handelen t.o.v. van hoogeremachtswortels. Het is duidelijk, dat men op deze wijze alleen krijgt de algebraische getallen, doch het principe is aangegeven en kan ook worden uitgebreid tot transcendente getallen.

Ook de ontstaanswijze van het getal π geeft aanwijzing voor de te volgen methode en ook hier komt men tot de beschouwing van een oneindige getallenrij.

De bedoeling van bovenstaande is niet om een wiskundig betoog van de ontstaanswijze van de irrationale getallen te geven, doch slechts om in 't kort uiteen te zetten, in welke richting men noodzakelijk wordt gevoerd. Bovenstaande gedachte ligt ook aan alle theorieën ten grondslag, al wordt zij daar ook niet uitgesproken.

We zullen nu overgaan tot de bespreking van de belangrijkste theorieën, nl. die van Dedekind, Cantor en Baudet. Op de eerste twee theorieën is door Russell (Principles of Mathematics) scherpe critiek gegeven, terwijl Hobson in de genoemde Functions of a real variable aantoont, dat beide gelijkwaardig zijn, d.w.z. dezelfde resultaten geven.

DE THEORIE VAN DEDEKIND.

In het jaar 1872 zijn onafhankelijk van elkaar twee theorieën over de invoering der irrationale getallen ontworpen, de één door DEDEKIND in zijn beroemd werkje: „Stetigkeit und Irrationale Zahlen'', de andere door CANTOR in Band V der Mathematische Annalen. Het werk van DEDEKIND bestaat uit twee naar hun aard zeer verschillende deelen; de paragrafen 1, 2 en 3 vormen, zou men kunnen zeggen, een populaire, volkomen onwetenschappelijke aanloop tot het kernpunt van het betoog, dat in paragraaf 4 gegeven wordt. In deze populaire inleiding voert DEDEKIND het systeem der rationale getallen in en beeldt deze af op een rechte lijn. In par. 2 spreekt hij van de analogie van de punten van een rechte en het systeem R der rationale getallen. Om deze analogie aan te toonen, noemt hij de volgende drie eigenschappen van het R systeem:

1⁰. Is een getal $a > b$ en $b > c$, dan is $a > c$.

2⁰. Zijn a en c twee verschillende rationale getallen, dan ligt er altijd een rationaal getal b (en dus oneindig veel) tusschen a en c.

3⁰. Is a een getal van R, dan vallen de getallen van R uiteen in 2 klassen, A_1 en A_2, die beide oneindig veel individuen bevatten, en waarbij alle getallen van $A_1 < a$ en alle getallen van $A_2 > a$ zijn, a zelf kan dan ad libitum tot A_1 of A_2 gerekend worden.

Neemt men op de rechte lijn een nulpunt en een eenheidssegment aan, dan gelden voor de punten op die rechte analoge eigenschappen. Op den keper beschouwd, komen wij op deze wijze geen stap verder, wat DEDEKIND hier doet is niets anders dan het R systeem op een andere wijze voorstellen, men zou kunnen zeggen een andere symboliek invoeren, in plaats van het getal $1/2$ te schrijven, zet hij nu een punt. De bedoeling is echter om ons te laten zien, dat er op een rechte lijn nog andere punten geconstrueerd kunnen worden, dan de „rationale''; hij zegt nl.: zet vanuit het nulpunt af de hypothenusa van een rechthoekigen driehoek, waarvan de rechthoekszijden gelijk aan 1 zijn, dan is het eindpunt niet een rationaal punt. Hierdoor wordt aannemelijk gemaakt, dat op de rechte meer punten liggen, dan het R systeem getallen bevat. Deze beschouwing hebben wij boven populair genoemd, want de stelling van Pythagoras, die hierbij gebruikt wordt heeft eerst zin als de irrationale getallen ingevoerd zijn. Men moet verder niet uit het oog verliezen, dat de rechte waarvan DEDEKIND spreekt, niets anders is, dan de te fabriceeren getalverzameling. De heele inleiding kan men in 't kort samenvatten met de woorden: de vergelijking $x^2 = 2$ is valsch in het systeem der rationale getallen. Daarom is een uitbreiding noodig en deze uitbreiding is de invoering der irrationale getallen.

Hiertoe komt DEDEKIND nu, door zich de intuitieve rechte lijn voor te stellen als een vloeiende opeenvolging van punten. De moeilijkheid is echter om dit intuitieve begrip wetenschappelijk te definieeren en DEDEKIND meent het als volgt te kunnen doen: Als alle punten van een rechte in twee klassen A_1 en A_2 uiteenvallen, zoodat alle punten van A_1 links van die van A_2 liggen, dan bestaat er één punt, dat deze indeeling teweegbrengt. Hij noemt dit een axioma, we zouden het nog beter kunnen noemen: „continuiteitsdefinitie'', want van het bestaan en de opeenvolging van punten in de intuitieve rechte lijn hebben wij toch eigenlijk in 't geheel geen notie. We kunnen nog even wijzen op een logische fout in bovengenoemde definitie, die door RUSSELL (Principles of Mathematics) is aangewezen. Hij zegt als *alle* punten uiteenvallen, blijft er geen enkel punt meer over, dat de splitsing kan veroorzaken, zoodat dus de definitie eenigszins gewijzigd moet worden. RUSSELL zegt dan ook: Als alle punten uiteenvallen in genoemde twee klassen, heeft de eerste klasse geen laatste, de tweede een eerste, òf de eerste een laatste en de tweede geen eerste element. De bedoeling van DEDEKIND is eenvoudig deze: Als de punten van een rechte in 2 klassen A_1 en A_2 gesplitst worden dan is er een punt van de rechte *zelf* (het laatste van A_1 of het eerste van A_2), dat deze splitsing bewerkstelligt. Veel wetenschappelijks zit er in deze uitspraak niet, wij doen het best met dit te beschouwen als een poging om de komende continuiteitsdefinitie te koppelen aan het intuitieve begrip, dat wij meenen te hebben van vloeiende opeenvolging van punten op een rechte lijn.

We komen nu tot het wetenschappelijk gedeelte. Toetsen we de verzameling R aan deze definitie, dan zien we onmiddellijk, dat zij er niet aan voldoet. De getallen, waarvan het quadraat kleiner is dan 2 kan men in klasse A_1 opnemen, er ontstaat blijkbaar een snede, die echter niet door een getal der verzameling R is teweeggebracht. Om nu een continue getalverzameling te krijgen, beschouwt DEDEKIND de verzameling *aller* sneden in R en voegt aan elke snede een „getal" toe en wel een rationaal getal als de snede door een zoodanig getal wordt teweeg gebracht, een irrationaal getal als de snede op eenige andere wijze ontstaat. Het op deze wijze aangeduide getal wordt nu nader vastgelegd door $> <$ en $=$ van twee dezer getallen te definieeren.

In de eerste plaats moet goed in 't oog gehouden worden, op welke wijze hier de continue verzameling der reëele getallen ontstaat. Zij ontstaat *niet* door het tusschenvoegen van nieuwe getallen tusschen die van het R systeem, „door het volstoppen der gaten", maar als één geheel: de snedenverzameling in R; er wordt een *geheel nieuwe verzameling* gemaakt, waarvan intusschen een aftelbaar oneindige deelverzameling „correspondeert" met de verzameling der rationale getallen. Ik meen deze opmerking te moeten maken, in verband met uitdrukkingswijzen van HAUSDORFF en een zienswijze van RUSSELL. HAUSDORFF geeft nl. in zijn „Grundzüge der Mengenlehre", pag. 91 een algemeene methode tot Lückenausfüllung van een willekeurige dichte verzameling zonder eerste en laatste element en bewijst dan, dat de Anfangsstücke zonder laatste element, die verschillen van o en van de gegeven verzameling, een continue verzameling vormen. Van Lückenausfüllung is hier echter geen sprake, hij maakt een geheel nieuwe verzameling, die der genoemde Anfangsstücke; een deelverzameling ervan kan dan in (1, 1) correspondentie gebracht worden met de elementen der gegeven verzameling. Op te merken is nog dat bovengenoemde verdichting alleen geldt voor niet-continue verzamelingen, past men hetzelfde nog eens toe op de continue verzameling, dan krijgt men niet een nog sterker gecomprimeerde verzameling zooals door HOBSON is bewezen (Functions of a real variable).

RUSSELL meent (Principles of Mathematics) dat DEDEKIND de irrationale getallen opvat als limieten. Het is mogelijk, dat het woord snede aanleiding kan geven tot een dgl. meening, misschien ook het door DEDEKIND genoemde voorbeeld van een snede, die niet door een rationaal getal ontstaat. RUSSELL redeneert (Principles of Mathematics) als volgt: Een limiet van een verzameling U heeft alleen zin als U deel uitmaakt van een omvangrijker verzameling, waartoe de limiet als element behoort, m. a. w. het bestaan van de limiet moet verzekerd zijn. Hij zegt nu, dat DEDEKIND de irrationale getallen opvat als limieten, zonder aan te toonen, dat deze limieten bestaan en demonstreert zijn zienswijze aan de hand van een voorbeeld, nl. $\sqrt{2}$. Hij toont aan, dat de snede, door $\sqrt{2}$ in R teweeg gebracht niet het recht geeft om van een limiet te spreken, omdat volgens hem, deze limiet niet kan zijn een rationaal getal en, zegt hij, aan de bepaling van limiet is dus niet voldaan, daar er geen verzameling is, die deze limiet als element bevat en waarvan R een deelverzameling is. Afgezien van het feit, dat dit de bedoeling van DEDEKIND niet geweest is, waartoe wij boven den nadruk legden op het ontstaan van de verzameling der reëele getallen in haar geheel, kan het RUSSELLsche bezwaar op buitengewoon eenvoudige wijze weerlegd worden. Neem b.v. het getalsysteem zooals BROUWER dit in de Grondslagen der Wiskunde ontwikkelt (pag. 6). Hij zegt: men kan het R systeem aanvullen met de gebruikelijke irrationale getallen, in de eerste plaats door invoering van gebroken exponenten ..... Men houdt dan zelfs een verzameling van hetzelfde type η als R waarvan R een deelverzameling is. Vult men nu R aan met $\sqrt{2}$, dan houdt men een „series", immers de plaats van getal $\sqrt{2}$ betreffende $>$ en $<$ is volkomen bepaald, d. w. z. men kan bij elk getal a van R uitmaken of $\sqrt{2} > a$ of $\sqrt{2} < a$. En dan mag men $\sqrt{2}$ toch volgens RUSSELL's definitie wel als een limiet beschouwen.

De beschouwing van het BROUWERsche systeem in dit verband is alleen geschied terwille van een eenvoudige uiteenzetting, men zou kunnen zeggen omdat de BROUWERsche schrijfwijze iets gemakkelijker is. Overigens kan de weerlegging met het DEDEKINDsche stelsel zelf evengoed gegeven worden. Men kan echter de RUSSELsche opvatting geheel van de baan brengen als men als volgt redeneert: Voor het uiteenvallen van R in de twee klassen van Dedekind is noodig een *wet*. Deze wet kan dan zijn een fundamentaalrij van Cantor, een zooals Dedekind in zijn voorbeeld geeft enz. Aan deze wet nu, koppelen we het begrip „getal", de wet bepaalt een getal, waarmee het woord „snede" dat blijkbaar een der oorzaken voor de begripsverwarring is geweest, komt te vervallen. Het is duidelijk dat niemand bezwaar kan maken om aan een dgl. wet het woord „getal" in ruimere beteekenis toe te voegen. Van een limiet is op deze wijze in 't geheel geen sprake.

Zoo voert m.i. Dedekind zijn getallen ook werkelijk in. Hij zegt immers: Jedesmal nun, wenn ein Schnitt $(A_1\, A_2)$ vorliegt, welche durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt $(A_1\, A_2)$ vollständig definirt ansehen. Hoe een dgl. snede ontstaat, daarover spreekt Dedekind zich niet uit, elke wet waarmee men een snede kan bepalen, is goed. Deze wet kan wel heel ingewikkeld zijn, 't is zelfs mogelijk, dat men er op het eerste gezicht geen snede aan vastknoopt, wanneer er echter een snede mee bepaald *kan* worden, is het Dedekindsche getal gereed. De groote algemeenheid der definitie zit hem in het stuk: „welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird." Stellen wij de vraag: hoe kan dan een snede ontstaan behalve door een rationaal getal, dan kan men hiervoor allerlei wetten bedenken; fundamentaalrij van Cantor, getalverzameling van Baudet, hypothenusa van een rechthoekig gelijkbeenigen driehoek met rechthoekszijden $=1$ enz. Zoo opgevat is de Dedekindsche theorie de meest algemeene der drie genoemde. Uit bovenstaande volgt, dat de verzamelingen $(A_1\, A_2)$ de gelijkheid van verschillend geformuleerde snedenwetten vast leggen en zoo kan men deze verzamelingen $A_1\, A_2$ gelijk stellen met de gelijkheidsdefinitie van twee getalverzamelingen zooals Baudet die geeft. Intusschen bieden de theoriën van Cantor en Baudet zeker voordeelen, het rekenen met de Dedekindsche getallen is nogal omslachtig. Theoretisch lijkt mij echter het Dedekindsche stelsel zeker te stellen boven het systeem van Baudet.

DE THEORIE VAN CANTOR.

De grondslagen van CANTOR'S theorie vindt men in Bd. V der Math. Annalen, pag 123, later aangevuld in Bd. XXI. In de eerstgenoemde verhandeling vormt CANTOR een rij van rationale getallen $a_1 a_2 \ldots . a_n \ldots$ (*1*) die de eigenschap heeft dat $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ voor ε willekeurig en positief, $n > N$, en m willekeurig. Deze eigenschap der rij drukt hij uit door te zeggen: de rij heeft een bepaalde grens b. Tegen deze gevaarlijke uitdrukking is natuurlijk niet veel anders in te brengen, dan dat zij gevaarlijk is, daar zij sterk aan een limiet doet denken. Intusschen, zoolang de limiet niet gebruikt wordt, is er tegen de uitdrukking geen bezwaar. Wel echter bestaat groot bezwaar tegen de volgende passage: Es haben also diese Worte zunächst keinen anderen Sinn als den eines Ausdrückes für jene Beschaffenheit der Reihe und *aus dem Umstande, das wir mit der Reihe (1) ein besonderes Zeichen b verbinden, folgt, dasz bei verschiedenen derartigen Reihen auch verschiedene Zeichen b, b', b'' . . . . zu bilden sind.* Hier wreekt zich de ontijdige invoering van het woord „Grenze" immers, indien het teeken „b" alleen slaat op de „Beschaffenheit" dat $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ enz. (en op iets anders kan het geen betrekking hebben), dan volgt hieruit dat *elke* rij met deze Beschaffenheit het teeken b toekomt. Voeren wij den naam fundamentaalrij in, een naam dien CANTOR eerst later gebruikt, dan moet elke fundamentaalrij het teeken b toegevoegd worden. Men moet dus *definieeren*: elke fundamentaalrij geven wij een teeken b, terwijl twee niet *identische* rijen verschillende teekens b en b' krijgen.

Hierna wordt gedefinieerd $b = b'$, $b > b'$, $b < b'$, terwijl ten slotte de rationale getallen in het B systeem een plaats wordt gegeven. CANTOR maakt dus een nieuwe verzameling waarvan de elementen bestaan uit fundamentaalrijen, als fundamentaalrij is ook te beschouwen een rij als $a, a, a, \ldots$. Dit reëele getal is dan gelijk aan het rationale getal a. Nu volgt de stelling, dat elke verzameling van rationale getallen $a_1, a_2, \ldots$ waarbij aan de voorwaarde voor fundamentaalrij voldaan is, in deze verzameling een grenselement heeft. De nieuwe verzameling wordt dus eerst gemaakt en daarna de de grensstelling bewezen. Dit in verband met de kritiek van RUSSELL, waarop we bij de theorie van BAUDET nader terugkomen.

In Bd. XXI behandelt CANTOR hetzelfde onderwerp nog eens, waarbij vooral de limietstelling sterk op den voorgrond treedt. In het kort bespreekt hij hier de theorieën van WEIERSTRASZ en DEDEKIND en geeft daarbij enkele bezwaren op van deze methoden. Van de DEDEKINDsche theorie zegt hij op pag. 566, 567, dat een groot voordeel is het feit dat bij elk getal slechts één snede behoort. Reeds bij de bespreking van het DEDEKINDsche systeem wezen wij erop, dat DEDEKIND zich niet uitspreekt over het ontstaan van een snede, de snede is secundair, maar door het getalbegrip aan de snede te koppelen, bereikt DEDEKIND dat elk reëel getal slechts op één wijze kan worden voorgesteld. CANTOR begint met één fundamentaalrij te nemen en hieraan een getal te koppelen, maar daarna definieert hij de gelijkheid van reëele getallen, die door verschillende fundamentaalrijen worden voorgesteld. Zoo wordt dus de oorspronkelijke (1, 1) corr. van fundamentaalrij en getal verbroken. BAUDET gaat nu nog een stap verder en begint met een reëel getal te definieeren als een klasse van „gelijke" verzamelingen. Van dien kant bezien kunnen wij dus zeggen, dat CANTOR staat tusschen DEDEKIND en BAUDET.

Als nadeel voor de theorie van DEDEKIND noemt CANTOR de omstandigheid dat de getallen zich nooit als sneden voordoen in de Analyse. In der daad lijkt mij de CANTORsche manier van invoeren der irrationale getallen doorzichtiger in verband met de uiteenzetting in het hoofdstuk „Noodzakelijkheid van het systeem". Maar toch kan men bij een getal als $\sqrt{2}$ heel goed aan een snede denken; in de eene klasse komen de getallen. waarvan het quadraat < 2, in de andere die waarvan het quadraat > 2. Deze bewering van CANTOR is dus niet juist.

De theorie van WEIERSTRASZ treedt minder op den voorgrond. Hij beschouwt verzamelingen van rationale getallen, die de eigenschap hebben, dat hoeveel en welke van deze getallen men ook in eindig aantal sommeert, de som altijd beneden een bepaalde grens blijft. De opteloperatie speelt hierin een fundamenteele rol en CANTOR merkt zeer terecht op, dat deze theorie staat en valt met het al of niet doorgaan van de eigenschappen der optelling, b.v. commutativiteit. Wenscht men de theorie uit te breiden ook op transfinite getallen, dan houdt de commutatieve wet op en is dus de theorie van WEIERSTRASZ onbruikbaar. Intusschen is deze uitbreiding voor de opbouw van het systeem der reëele getallen niet noodig, zoodat dit bezwaar van zuiver theoretischen aard is.

Op pag. 569 geeft CANTOR zeer kort aan, dat als men heeft een verzameling van irrationale getallen, dus fundamentaalrijen b_n, zoodat bij ieder positief getal ε een getal N behoort met de eigenschap, dat $| b_{\nu+\mu} - b_\nu | < \varepsilon$ voor $\nu > N$ en μ willekeurig, er een fundamentaalrij (a_ν) bestaat, die een getal b definieert zoodanig, dat

$$\lim_{\nu \to \infty} b_\nu = b.$$

Het bewijs kan men als volgt geven. De verzameling van irrationale getallen stellen we voor door:

$$b_1^{(1)},\ b_2^{(1)},\ \ldots,\ b_1^{(2)},\ b_2^{(2)}\ \ldots,\ \ldots,\ b_1^{(n)} b_2^{(n)}\ \ldots,\ \ldots$$

waarvan dus gegeven is:

$$| b^{(n+m)} - b^{(n)} | < \varepsilon \quad n > N, \quad m \text{ willekeurig.}$$

We vormen nu de rij:

$$b = b_{p_1}^{(1)},\ b_{p_2}^{(2)},\ b_{p_3}^{(3)}\ \ldots,\ b_{p_n}^{(n)},\ \ldots$$

waarin $| b^{(n)} - b_{p_n}^{(n)} | < {}^1/_n$.

Dit beteekent dus, dat we uit elke fundamentaalrij $b^{(n)}$ een element $b_{p_n}^{(n)}$ nemen, zoodat $| b^{(n)} - b_{p_n}^{(n)} | < \dfrac{1}{n}$ wat volgens een vorige stelling mogelijk is. Te bewijzen is nu: Gegeven ε, dan is er een μ zoodanig, dat $| b - b^{(\nu)} | < \varepsilon$ zoodra $\nu > \mu$.

De verschilreeks komt er als volgt uit te zien:

$$b - b^{(\nu)} = (b_{p_1}^{(1)} - b_1^{(\nu)}),\ (b_{p_2}^{(2)} - b_2^{(\nu)}),\ \ldots,\ (b_{p_{\nu+1}}^{(\nu+1)} - b_{\nu+1}^{(\nu)}),\ \ldots$$

$$\ldots,\ (b_{p_{\nu+m}}^{(\nu+m)} - b_{\nu+m}^{(\nu)}),\ \ldots$$

We vinden nu de volgende ongelijkheden:

$$\left| b^{(\nu+m)}_{p_{\nu+m}} - b^{(\nu+m)} \right| < {}^1/_3\,\varepsilon \; \left(\text{nl.} < \frac{1}{\nu+m}\right) \quad . \; . \; . \quad (1)$$

voor $\nu > \mu_1$, m willekeurig.

$$\left| b^{(\nu+m)} - b^{(\nu)} \right| < {}^1/_3\,\varepsilon \text{ (volgens gegeven)} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$\nu > \mu_2$, m willekeurig.

Kies nu een waarde voor $\nu > \mu_1$ en $> \mu_2$, dus bv. $\nu > \mu$, en hou deze waarde voor ν vast. Dan kan men m_1 bepalen, zoodat voor $m > m_1$ geldt:

$$\left| b^{(\nu)} - b^{(\nu)}_{\nu+m} \right| < {}^1/_3\,\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Uit (1), (2), (3) volgt:

$$\left| b^{(\nu+m)}_{p_{\nu+m}} - b^{(\nu)}_{\nu+m} \right| < \varepsilon \quad \nu > \mu,\; m > m_1.$$

Van de verschilreeks onderaan pag. 16 worden dus bij een bepaalde $\nu > \mu$ de termen vanaf een zeker nummer $\nu + m_1$ kleiner dan ε, dus $\left| b - b^{(\nu)} \right| < \varepsilon$. Voor $b^{(\nu+p)}$ geldt hetzelfde, waaruit volgt:

$$\left| b - \lim_{\nu \to \infty} b^{(\nu)} \right| \leq \varepsilon, \text{ dus } b = \lim_{\nu \to \infty} b^{(\nu)}.$$

DE THEORIE VAN BAUDET.

In „Christiaan Huygens" 1e Jrgg. No. 1 geeft BAUDET een theorie van het irrationale getal, die zich eenerzijds aansluit bij die van DEDEKIND, anderzijds overeenkomst vertoont met die van CANTOR. Zij is zeker algemeener dan de laatste wat de formuleering betreft, echter niet algemeener dan de eerste, wel meer concreet dan deze. Intusschen zijn de getallen van BAUDET ten slotte dezelfde als die van DEDEKIND en CANTOR, wat wij zullen aantoonen.

Het door HUNTINGTON in zijn „Continuum" zoo karakteristiek genoemde „framework" der rationale getallen vormt weer den grondslag en BAUDET beschouwt nu willekeurige verzamelingen van rationale getallen. Twee dergelijke verzamelingen U en V heeten gelijk als elk getal, dat een getal van V overtreft ook een getal van U overtreft en omgekeerd. Alle getalverzamelingen, die in dezen zin aan de verzameling U gelijk zijn, vormen een *klasse*, zoo'n klasse noemt BAUDET een *reëel* getal.

We zullen nu laten zien dat de getallen van BAUDET overeenkomen met de DEDEKINDSCHE. Bewezen moet dus worden, dat elke klasse, of wat hetzelfde is, elke representant V eener klasse, een snede in R bepaalt. Hiertoe merken we het volgende op. Kies een getal x van R, dan bestaan voor dat getal twee mogelijkheden:

1⁰. Er is een getal van V aan te wijzen, dat $< x$.

2⁰. Er is geen getal van V aan te wijzen, dat $< x$.

We vormen nu twee klassen van rationale getallen, nl.:

a. Klasse K_1, waarin alle rationale getallen x komen, die aan 1⁰. voldoen.

b. Klasse K_2 waarin we alle rationale getallen x onderbrengen, die aan 2⁰. voldoen.

In de eerste plaats is het nu duidelijk, dat $K_1 + K_2 = R$.

Zal nu $(K_1 \; K_2)$ een snede in R definieeren, dan moet elk getal van $K_1 >$ alle getallen van K_2 en elk getal van $K_2 <$ alle getallen van K_1 zijn.

Bewijs. Ligt x in K_1 en y in K_2, dan is volgens de bepaling van K_2 geen getal van V aan te wijzen, dat $< y$, m. a. w. $y \leq$ alle getallen van V. Maar volgens definitie van K_1 is er een getal van V dat $< x$, waaruit dus volgt, dat $y < x$.

We zien dus, dat de verzameling V een snede in R bepaalt. Omgekeerd is het direct duidelijk, dat een snede van DEDEKIND een getalverzameling bepaalt, zooals BAUDET gebruikt. Bij de snede $(A_1 \; A_2)$ kan men b.v. A_1 beschouwen als de representant van een klasse van BAUDET. In plaats van A_1 mag men dan ook nemen elke verzameling die met A_1 coinitiaal is, de verzameling dezer coïnitiale verzamelingen vormt een klasse in den zin van BAUDET. En dus, zou men kunnen zeggen, is de opzet van BAUDET algemeener. Toch is dit m.i. niet het geval. Immers de verzamelingen $(A_1 \; A_2)$ zijn bij de DEDEKINDSCHE theorie niet primair, doch secundair, zooals bij de DEDEKINDSCHE theorie reeds besproken is.

Natuurlijk kan men zich op het standpunt stellen, dat de theorie van BAUDET is opgezet zonder aan het snedenbegrip te denken. Ik kan mij dit voorstellen bij het CANTORSCHE stelsel; de ontwikkeling van het getalsysteem voert vanzelf in die richting. Het koppelen echter van het getalbegrip aan een willekeurige verzameling van rationale getallen heeft m.i. geen enkelen logischen grond, en kan alleen verklaard worden als een poging om een zeer algemeene snedenwet op te stellen.

Door HOBSON (Functions of a real variable) is bewezen, dat de getallen van DEDEKIND en CANTOR dezelfde zijn; uit bovenstaande volgt in verband hiermee, dat de theorieën van BAUDET en CANTOR dezelfde getallen bepalen. We kunnen echter deze identiteit ook rechtstreeks gemakkelijk afleiden en moeten dus laten zien, dat uit de klasse van BAUDET, die een reëel getal voorstelt, een representant kan worden gekozen, die de eigenschappen heeft van een CANTORSCHE fundamentaalreeks.

Kies hiertoe een representant der klasse V en laten we onderstellen om triviale gevallen uit te sluiten, dat V geen eerste element heeft. In R zijn nu altijd 2 getallen te vinden a_1 en b_1

zoodanig dat $a_1 >$ een getal van V en $b_1 <$ alle getallen van V. Tusschen a_1 en b_1 liggen nu oneindig veel getallen van V, daar anders V een eerste element zou moeten hebben. We bepalen nu het getal $\frac{a_1+b_1}{2}$, d. i. een getal van R, waardoor het segment $a_1 - b_1$ in 2 gelijke deelen wordt verdeeld, het ééne deelsegment bevat de kleinste, het andere de grootste getallen van $a_1 - b_1$. Voor $\frac{a_1+b_1}{2}$ bestaan twee mogelijkheden, of $\frac{a_1+b_1}{2}$ is $>$ een getal van V òf $<$ alle getallen van V. Is $\frac{a_1+b_1}{2} <$ alle getallen van V dan laten we het segment $b_1 - \frac{a_1+b_1}{2}$ weg en beschouwen alleen verder het andere segment; is $\frac{a_1+b_1}{2} >$ een getal van V, dan vervalt verder het segment $\frac{a_1+b_1}{2} - a_1$. Het is duidelijk, dat in het overblijvende segment getallen van V moeten liggen, we kiezen een getal x_1 en maken van dit segment weer het arithmetisch midden op, dat weer een getal van R is. Met de twee ontstane segmenten handelen we weer als boven, in het overblijvende kiezen we weer een getal x_2 van V, maar zóó, dat $x_2 < x_1$. Dit is altijd mogelijk omdat het overblijvende segment als kleinste getal heeft een getal $<$ alle getallen van V. Op deze wijze krijgen we een reeks van segmenten, die binnen elkaar liggen en waarvan de grootte tot nul nadert. De getallen x zijn monotoon afnemend, terwijl, als x_n in het segment s_n ligt, alle volgende getallen x ook binnen s_n liggen Geeft men nu een willekeurig positief getal ε, dan is er een s_n te vinden $< \varepsilon$. Hierbinnen liggen dan alle getallen x_n en volgende, zoodat dus de ongelijkheid geldt.: $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ voor p willekeurig. De reeks $x_1, x_2, \ldots$ is dus een afdalende fundamentaalreeks van CANTOR.

Rest nog te bewijzen, dat zij in den zin van BAUDET gelijk is aan V. In de eerste plaats zal elk getal, dat een getal van de rij $x_1, x_2, \ldots$ overtreft ook een getal van V overtreffen, daar de getallen x tot V behooren. Nu het omgekeerde. Stel er is een getal P van R dat $>$ een getal van V maar niet $>$ getal van de rij $x_1, x_2, \ldots$ dus $<$ alle x'en. V bevat zeker getallen $< P$.

Kies hiervan één Q, en laat $P - Q = \eta$. We kunnen nu van onze deelsegmenten er een nemen die $< \eta$, daar het kleinste getal van dit deelsegment $< Q$, zal zeker P buiten dit deelsegment liggen. Maar in dat deelsegment ligt een x_n, deze x_n is dus $< P$, waaruit de onhoudbaarheid der onderstelling blijkt. Nieuwe getallen worden dus door BAUDET niet gedefinieerd, zijn theorie kan dan ook alleen van belang zijn door grootere eenvoud in de bewijzen van sommige stellingen.

Over de voordeelen van de theorie van BAUDET zullen wij nader spreken. Eerst echter moet gewezen worden op een niet onbelangrijk nadeel; nl. dat zij de toch al niet zoo heel eenvoudige voorstelling van het irrationale getal nog ingewikkelder maakt. Terwijl men bij de theorie van CANTOR onmiddellijk inziet, dat de fundamentaalrij haar oorsprong heeft òf in de beschouwing van de in het R systeem onuitvoerbare worteltrekking òf in het beschouwen van de ontstaanswijze van een getal als π door een fundamentaalrij van rationale getallen ziet men hier geen enkele aanwijzing en lijkt de definitie van reëel getal iets willekeurigs. Bovendien is zeker de fundamentaalreeks heel wat duidelijker dan een klasse van gelijke getalverzamelingen. Men kan wel zeggen, dat bij CANTOR ook gedacht moet worden aan een klasse van confinale of coïnitiale fundamentaalreeksen, echter voor elk reëel getal beschouwt CANTOR slechts één fundamentaalreeks, die ons duidelijk voor oogen staat. *Daarna* eerst definieert hij de gelijkheid van twee fundamentaalrijen. BAUDET doet omgekeerd, hij definieert eerst de gelijkheid van twee verzamelingen en noemt daarna de klasse van gelijke verzamelingen een reëel getal. Het gevolg hiervan is, dat de aansluiting bij de rationale getallen gemakkelijker wordt, waarover later.

De klasse van BAUDET is veel ingewikkelder, dan zij op het eerste gezicht lijkt. Zij bevat een formidabel aantal representanten, de verzameling hiervan is zelfs niet aftelbaar, maar heeft de machtigheid van het continuum. Immers kies een irrationaal getal a, dit wordt gerepresenteerd door de verzameling van alle rationale getallen $> a$. Kies een rationaal getal $b > a$, elke deelverzameling der rationale getallen $> b$ vormt met de getallen $> a$ en $\leq b$ een representant van het getal a. De verzameling der rationale getallen $> b$ is aftelbaar, het aantal deelverzamelingen bedraagt $2^{\aleph_0} = c$ d.i. de machtigheid van het continuum. Hieruit volgt, dat het cardinaalgetal van de verzameling van alle representanten van $a \geq c$. Maar kiest men een getal $b' < a$, dan hebben de deelverzamelingen der getallen $> b'$ weer het cardinaalgetal c, de verzameling dezer deelverzamelingen is echter $>$ klasse die a bepaalt, zoodat deze de machtigheid c van het continuum heeft.

Men ziet dus, dat een dgi. klasse wel gemakkelijk kan worden neergeschreven, maar niet zoo heel eenvoudig voor te stellen is.

In dit verband is het niet ondienstig op een zekere analogie te wijzen, die bestaat tusschen de theorieën van BAUDET en RUSSELL, zooals de laatste ontwikkelt in zijn Principles of Mathematics pag. 270 en volgende. Hij begint met een scherp verschil te maken tusschen reëele getallen en rationale getallen. Geestig is de aanhef van par. 258:

The philosopher may be surprised after all that has already been said concerning numbers, to find that he is only now to learn about *real* numbers; and his surprise will be turned to horror, when he learns that *real* is opposed to rational . . . . But he will be relieved to learn *that real numbers are really not numbers at all*, but something quite different.

Deze uitspraak behoeft ons niet te verwonderen. We zagen reeds vroeger dat de rationale getallen logisch volgen uit de hoofdbewerkingen der rekenkunde. We zagen echter ook dat de nieuwe uitbreiding, noodig voor het uitvoerbaar zijn van worteltrekking, van geheel anderen aard was en aanleiding gaf tot de beschouwing van oneindige verzamelingen van rationale getallen. Geen wonder dus, dat de kritische blik van RUSSELL een scheiding meent te moeten trekken tusschen de natuurlijke getallen met de relaties daartusschen, de rationale getallen, eenerzijds en de irrationale getallen anderzijds.

De grondslag van RUSSELL's theorie is weer het framework der rationale getallen. Hij beschouwt hiervan een element a, waardoor 4 getalklassen gedefinieerd worden nl.: alle getallen $< a$, alle getallen niet $> a$, alle getallen $> a$ en alle getallen niet $< a$. De verzameling der getallen $< a$ kan men ook definieeren als een verzameling van rationale getallen $<$ een variable term der verzameling. Zoo komt hij tot de definitie van een segment, d.i. een verzameling van rationale getallen, die:

1°. niet leeg is en niet samenvalt met alle rationale getallen.

2°. identisch is met de verzameling der getallen kleiner dan een variabele der verzameling.

Hij bewijst nu, dat een dgl. segment evengoed bepaald kan worden door een willekeurige, maar *begrensde* eindige of oneindige verzameling van rationale getallen.

We beschouwen hiertoe alleen een verzameling die oneindig is en geen maximum heeft en die we U zullen noemen. Neem nu de verzameling V der getallen $<$ variabele van U. Deze verzameling bevat alle u's. Immers stel u_x behoort er niet toe. Er is een term van U, u_y, zoodanig dat $u_y > u_x$, waaruit blijkt, dat u_x er wel toe behoort. Verder is elke term van $V <$ een term van U, dus $<$ een term der verzameling V zelf, maar ook is elke term die $<$ dan de een of andere term van V à fortiori $<$ een term van U, en is dus een term van V. De verzameling V is dus identisch met de verzameling der termen $<$ een of andere term der verzameling en is dus een segment.

Een dgl. segment noemt RUSSELL nu een reëel getal.

Men ziet hierin eenig verband met de voorstelling van DEDEKIND, immers een segment van RUSSELL bepaalt een snede, omgekeerd echter behoeft een snede niet een segment te bepalen. In verband met de vorige alinea ziet men er ook in een overeenkomst met de CANTORsche methode; een fundamentaalrij van CANTOR bepaalt in het algemeen een segment, omgekeerd kan uit een segment een fundamentaalrij gekozen worden, die het segment bepaalt. Aardiger is echter het verband tusschen de theorie van RUSSELL en die van BAUDET. Neemt men twee getalverzamelingen u en v, zoodanig, dat elk getal van u een getal van v overtreft en omgekeerd, dan definieeren beide verzamelingen hetzelfde segment. Zulke verzamelingen noemt RUSSELL coherent en hij zegt: coherente verzamelingen hebben iets gemeenschappelijks, dit gemeenschappelijke is het door hen bepaalde segment, het RUSSELLsche reëele getal. Maar men ziet, dat coherente verzamelingen van RUSSELL niets anders zijn als wat BAUDET gelijke verzamelingen noemt. Het verschil in beide theorieën is nu, dat BAUDET een reëel getal voorstelt door alle mogelijke getalverzamelingen, die tot één klasse behooren en waarvan wij gezien hebben, dat zij de machtigheid van het continuum heeft, waardoor het moeilijk wordt zich een dgl. klasse voor te stellen. RUSSELL ondervangt dit bezwaar, door het gemeenschappelijke dezer coherente verzamelingen als een reëel getal aan te zien, waardoor het reëel getal geen andere beteekenis krijgt maar de voorstelling van het reëele getal vergemakkelijkt wordt. We kunnen ook zeggen: RUSSELL noemt de som van alle coherente verzamelingen een reëel getal, terwijl de termen der som bij hem slechts in zooverre een rol spelen, dat zij het segment kunnen bepalen. BAUDET beschouwt elke term en ook de som als gelijkberechtigde dingen om een reëel getal te bepalen.

De voornaamste grief van RUSSELL tegen de bestaande theorieën is, dat daar de irrationale getallen worden opgevat als limieten, waarvan het bestaan door RUSSELL wordt ontkend. Hij zegt dan ook: een segment kan wel een limiet hebben, maar dan is het een rationale limiet, omdat er geen andere getallen bestaan, die een limiet zouden kunnen zijn. Vroeger zagen we reeds, dat RUSSELL de kwestie onjuist heeft gesteld, de bedoeling van DEDEKIND, CANTOR en BAUDET is: eerst het systeem der reëele getallen scheppen en daarna de limietstelling bewijzen.

De RUSSELLsche segmentenrekening vindt men eigenlijk, zij het ook minder uitvoerig, bij HAUSDORFF (Grundzüge der Mengenlehre). Zijn Anfangsstück is niets anders dan het RUSSELLsche segment als men er aan toevoegt, dat het geen laatste element mag bevatten.

Keeren wij terug tot de theorie van BAUDET. RUSSELL maakt bezwaar tegen het feit dat CANTOR het getal a (rationaal) ook voorstel door de rij $a, a, a, \ldots$ CANTOR echter identificeert het rationale getal a niet met het reëele getal $a, a, \ldots\ldots$ doch stelt ze alleen aan elkaar gelijk, waartegen geen bezwaar is. BAUDET echter doet dit wel. Op pag. 35 *indentificeert* hij het rationale getal a met het reëel getal (a) en dit is niet geoorloofd. De verzameling (a) behoort immers tot een heel andere categorie dan het element a en men mag dus niet spreken van identiteit. Wel mag men natuurlijk het reëele getal (a) gelijk stellen aan het rationale getal a.

Als voordeelen van zijn theorie boven de bestaande noemt BAUDET ten eerste de aansluiting der reëele getallen bij de rationale.

Een dgl. aansluiting, moet dan bestaan in het feit, dat de operaties met reëele getallen die met rationale getallen insluiten. BAUDET zegt nu, dat bij zijn theorie die aansluiting gemakkelijker is in te zien. Laten we daartoe de optelling nagaan. Bij CANTOR wordt de som van (a_ν) en (b_ν) voorgesteld door $(a_\nu + b_\nu)$. Aansluiting bij de rationale getallen krijgt men als a_ν en b_ν beide een rationale limiet hebben, waaruit dan moet volgen dat $(a_\nu + b_\nu)$ ook een rationale limiet heeft gelijk aan de som der limieten van a_ν en b_ν. Laat nu lim. $(a_\nu) = A$, lim. $b_\nu = B$ zijn, dan is $A + B = C$ (rationaal). Eenvoudig bewijst men nu, dat C de limiet van $(a_\nu + b_\nu)$ is. Immers kies ε, dan is er een n_1, zoodat $|A - a_{n_1}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ waarbij de ongelijkheid goed blijft voor elke $n > n_1$, verder is er een n_2 zoodat $|B - b_{n_2}| < \frac{1}{2}\varepsilon$, terwijl weer dezelfde opmerking voor n_2 als voor n_1 geldt, kies de grootste van beide, b. v. n_2, dan is $|C - (a_{n_2} + b_{n_2})| < \varepsilon$, waarmee het bewijs gegeven is.

Schijnbaar is het proces bij BAUDET eenvoudiger. Hij zegt: als twee reëele getallen meetbaar zijn, mag men als representanten nemen twee rationale getallen, waarbij de aansluiting onmiddellijk te zien is. CANTOR kan echter precies eender redeneeren. Hij kan de twee reëele getallen voorstellen door $a, a, \ldots$ en $b, b, \ldots$ de aansluiting is dan ook evident. Er is dus in werkelijkheid geen verschil.

De verklaring van deze meening van BAUDET moet dunkt mij gezocht worden in practische overwegingen. Stel, men heeft twee reëele getallen A en B. Daar BAUDET zich A als een klasse van gelijke getalverzamelingen denkt, ligt het voor de hand, dat hij meent onmiddellijk uit te kunnen maken, of onder de representanten een rationaal getal is. Evenzoo voor B. Dit lijkt mij tenminste een logisch gevolg van de bepaling van het reëele getal. Zooals boven werd aangetoond, hebben wij echter de representantenverzameling in de verste verte niet voor oogen, zoodat in de meeste gevallen hier evenmin op eenvoudige wijze kan worden uitgemaakt of er een rationale representant is als bij CANTOR.

Een tweede voordeel ziet BAUDET in de stelling van de onderste en bovenste grens. Deze stelling is een bizonder geval van de meer algemeene: elke oneindige verzameling van reëele getallen heeft een grenselement (dat dus weer een reëel getal is), d.i. niets anders als een der voorwaarden voor het perfect zijn van de verzameling der reëele getallen, n. l. het afgesloten zijn. Geheel duidelijk is BAUDET op dit punt niet. Hij neemt een verzameling V van reëele getallen en zegt nu op pag. 41:

„Daartoe beschouwen wij de verzameling W der meetbare getallen, die ontstaan door *ieder getal van V door een representeerende verzameling van meetbare getallen te vervangen* en al die verzamelingen tot één verzameling te vereenigen. Uit het onderstreepte moeten wij concludeeren, dat hij hier met *reëele* getallen bedoelt *rationale* getallen, immers een reëel getal *is* reeds gerepresenteerd door een verzameling van rationale getallen, en kan ook niet anders worden gerepresenteerd. Bedoelt hij rationale getallen, dan is de stelling fout, bedoelt hij reëele getallen, dan is de stelling juist, maar het bewijs onjuist geformuleerd.

Veel eenvoudiger dan het bewijs voor het bestaan van een bovenste grens bij de CANTORsche getallen, is dit echter niet. CANTOR wijst er op, dat men zijn getallen kan voorstellen door oneindig voortloopende decimale breuken. Heeft men nu een verzameling van dgl. fundamentaalreeksen (laten we aannemen zonder grootste element) dan construeere men de volgende decimaalbreuk. Als eerste decimaal neme men de grootste van alle eerste decimalen der voorkomende breuken. Is er één, die de grootste decimaal heeft, dan is dit de bovenste grens (uitgesloten volgens aanname). We beschouwen nu alleen de breuken met de grootste eerste decimaal en gaan hiervan de tweede decimaal na. Hiervan nemen we weer de grootste enz. De decimaalbreuk, die zoo ontstaat is de bovenste grens. Men ziet dat dit niet of althans weinig ingewikkelder is dan de methode van BAUDET; zoodat het tweede voordeel ook niet zoo heel veel beteekent.

Eindelijk de slotopmerking van BAUDET. RUSSELL zou hierin ongetwijfeld een poging hebben gezien om het bestaan van een limiet aan te toonen van een verzameling van rationale getallen. Hij zegt nl. dat het reëele getal feitelijk als onderste grens van een verzameling van rationale getallen is ingevoerd. Dit is niet juist. Eerst wanneer men de rationale getallen (als reëele) in het systeem der reëele getallen heeft opgenomen, kan men zeggen, dat een verzameling, van reëele getallen, waarvan elk element gelijk is aan een rationaal getal in het gebied der reëele getallen een onderste grens heeft.

HET CONTINUUM.

Bij een beschouwing over de invoering der irrationale getallen mogen enkele opmerkingen over het continuumbegrip niet achterwege blijven, daar dit ten nauwste samenhangt met deze getallen. Noodig is het hier twee geheel verschillende soorten continua te scheiden en wel het *geometrisch* continuum eenerzijds, het arithmetisch continuum anderzijds. Van beide is zeker wel het geometrisch continuum het oerbegrip, men kan dit als een soort physisch begrip beschouwen, ontstaan door een bewegend punt, waarvan men *alle* opvolgende standen opgeteekend denkt. Als eenvoudigste continuum ontstaat hieruit de rechte lijn, een van de „elementen der meetkunde", een begrip overigens duidelijker voor den oningewijde, dan voor den mathematicus. Interessant beschrijft H. POINCARÉ deze kwestie in zijn „Science et l'Hypothese". Hij stelt zich voor, dat de rechte lijn ontstaat door een streep, die men al smaller en smaller laat worden, waarbij dus reeds een limietenkwestie optreedt. Men ziet dat op deze wijze de rechte lijn al minder eenvoudig wordt dan men op het eerste gezicht denkt. Moeilijker, maar in verband met het arithmetisch continuum belangrijker, wordt de zaak als men tracht, populair gesproken, de rechte lijn stuk te slaan, haar te ontleden in zijn elementen, die men punten noemt. De invoering der irrationale getallen is aan te zien als een poging om hiertoe te geraken; op bevredigende wijze opgelost is echter de kwestie tot dusver niet (Prof. WOLFF, Inaugureele rede 16 Oct. 1922). Door Prof. BROUWER wordt dan ook aangenomen dat een dergelijke verdeeling onmogelijk is, voor hem is het continuum niet herleidbaar, hij beschouwt het als mathematische entiteit die geen verdere reductie gedoogt, een „eenheid in de veelheid."

Hoe dit zij, vast staat, dat in het geometrisch continuum de aanleiding van het continuumbegrip gezocht moet worden, dit heeft de analisten geprikkeld tot het scheppen van een arithmetisch continuum d.i. een getalverzameling even gecomprimeerd als de verzameling der punten op een rechte lijn. De vraag moet dus gesteld worden, welke eigenschappen noodig en voldoende zijn om een verzameling dezelfde machtigheid te geven als het continuum der rechte lijn. Deze vraag is echter nog steeds open, en waar de definities van rechte lijn òf een beroep doen op onze intuitieve voorstelling (Euclides) òf heelemaal niets zeggen (HILBERT Grundlagen der Geometrie) is het de vraag of dergelijke eigenschappen wel ooit gevonden zullen worden. Mathematici als DEDEKIND en CANTOR hebben het dan ook over een andere boeg gegooid en zijn begonnen met een „continuumdefinitie" te geven, d. w. z. voorwaarden op te stellen, waaraan de elementen eener verzameling moeten voldoen om continu te heeten. Tot op zekere hoogte zijn deze definities willekeurig, het doel van alle is echter verzamelingen te definieeren die zoo nabij mogelijk het continuum der rechte lijn komen. Hierover nader.

Men zou kunnen meenen, dat de verzameling der rationale getallen als continu beschouwd kan worden: de eigenschap, dat tusschen elke twee getallen andere liggen wijst hierop, de punten eener rechte vertoonen een zelfde eigenschap. Wanneer wij echter de rationale getallen op de rechte lijn af gaan beelden, door b.v. eerst de geheele getallen te bepalen en de zoo ontstane segmenten door midden deelt enz. enz. (waardoor een puntverzameling ontstaat, gelijkmachtig met de verzameling der rationale getallen) dan kunnen wij opmerken, dat men op deze wijze slechts een verzameling krijgt van punten, die een zekere tusschenruimte hebben (zie POINCARÉ Science et l'Hypothèse pag. 30). Van een continuiteit als bij de intuitieve rechte is dus geen sprake. POINCARÉ noemt deze verzameling dan ook een met continuiteit der eerste orde. Ook RUSSELL noemt deze verzameling in den beginne continu.

Blijkbaar bevat de verzameling der rationale getallen dus nog niet „genoeg" elementen, er moet een continuum van de tweede orde ontstaan, dat beter voldoet, waarmee we komen tot de definities van DEDEDIND en CANTOR. Volgens DEDEKIND is een verzameling continu als elke snede in de verzameling ook door een element der verzameling wordt teweeggebracht.

CANTOR zelf geeft twee definities, waarvan de eerste het begrip afstand vooronderstelt, de tweede alleen orderelaties bevat. Het CANTORsche getalsysteem beantwoordt aan beide definities, de eerste is: perfect en samenhangend, de tweede: perfect en bevattend een deelverzameling van het type η, zoodanig dat tusschen elke 2 elementen der verzameling elementen der verzameling η liggen. Men ziet dat inderdaad het CANTORsche getalsysteem aan beide definities beantwoordt.

Of nu het arithmetisch continuum werkelijk overeenstemt met het geometrisch intuitieve continuum is niet uitgemaakt. De ontstaanswijzen der beide continua zijn zeker totaal verschillend. Terwijl het geometrisch continuum a. h. w. met één slag gereed is, wordt het arithmetisch continuum met groote moeite in elkaar getimmerd, door achtereenvolgens de natuurlijke, rationale en irrationale getallen in te voeren. Wiskundig is echter deze kwestie van weinig beteekenis, tenzij men hierin de kloof ziet tusschen de Analyse en de Meetkunde.

De zuivere Meetkunde heeft het arithmetisch continuum niet noodig, het is voor de Analyse van weinig belang of haar continuum zich werkelijk dekt met de punten op de physische rechte. Van arithmetisatie der Meetkunde in den strengsten zin van het woord kan men echter niet spreken. Het zal dus zaak zijn groote voorzichtigheid te betrachten bij het gebruik van meetkundige voorstellingen bij analytische problemen.

Reeds eenige keeren is gebruik gemaakt van een decimale ontwikkeling voor de voorstelling van een reëel getal, omdat deze voorstelling een zeer eenvoudige is. We hebben opgemerkt, dat de theorieën van CANTOR en BAUDET te beschouwen zijn als speciaal gevallen van de alomvattende DEDEKINDsche theorie. We zullen nu nagaan, of het mogelijk is, een bruikbaar continuum op te bouwen door middel van ontwikkeling in één of ander talstelsel.

Het eenvoudigst is het duale stelsel. Onder een getal tusschen *0* en *1* verstaan wij een volgens een bepaalde wet oneindig voortloopende duaalbreuk, waarin dus alleen de cijfers *0* en *1* optreden. We maken nog deze restrictie, dat in de ontwikkeling altijd een oneindig aantal keeren nul moet voorkomen, m. a. w. het geval, dat vanaf een zeker cijfer alle verdere cijfers *1* zijn, wordt uitgesloten.

In de eerste plaats scheppen we orde, d. w. z. we definieeren $>=$ en $<$. Een getal $A=0, a_1, a_2, \ldots$ is $>$ getal $B=0, b_1, b_2, \ldots$ als $a_1 > b_1$ of voor 't geval $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots \ldots a_n = b_n$, en $a_{n+1} \neq b_{n+1}$ als $a_{n+1} > b_{n+1}$ $A = B$ als $a_n = b_n$, dit kan altijd worden uitgemaakt, daar volgens definitie de voortschrijdingswet gegeven is.

We merken nu op, dat de rationale getallen in dit systeem een plaats krijgen. Immers van elk rationaal getal is de duale ontwikkeling door het getal zelf vastgelegd. En ook de stelling van de bovenste grens is gemakkelijk te bewijzen. Nemen wij een verzameling van reëele getallen en construeeren we het volgende reëele getal: $a_1 = 1$ als minstens één der gegeven reëele getallen als eerste cijfer 1 heeft. Is er slechts één zoo'n getal aanwezig, dan is dit het te construeeren reëele getal. Hebben alle getallen het cijfer 0 als 1[e] cijfer, dan nemen we $a_1 = 0$. Zijn er meerdere met 1[e] cijfer $=1$, dan gaan we de cijfers op de 2[e] plaats na. a_2 wordt nu weer 1 als er minstens één getal is, dat als 2[e] cijfer 1 heeft, anders wordt $a_2 = 0$. Is er maar één met 2 cijfers $=1$, dan is dat getal het te construeeren getal, zijn er meerdere, dan kijken we naar de cijfers op de 3[e] plaats enz. Het reëele getal, dat zoo ontstaat is de bovenste grens.

Bewijs. Uit de constructie van de bovenste grens volgt reeds, dat er geen getal der verzameling is, zoodat $B <$ dit getal. Er is echter altijd een getal dat de eerste n cijfers met B gemeenschappelijk heeft, waarbij we voor n elk geheel getal mogen nemen. Geef nu een ε, dan kan men kiezen een n zóó dat $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Bepaal het getal dat de eerste n cijfers met B gemeen heeft, dan is $B -$ getal $< \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

We hebben hier dus inderdaad een continuum verkregen. Merkwaardig is, dat de ontstaanswijze geheel anders is, als die van de besproken continua, immers, daar werd eerst het R systeem opgebouwd en was noodzakelijk voor de vorming van het continuum, hier vervalt dit. Voor de vorming van een element van het continuum is slechts noodig het systeem der natuurlijke getallen. Voor de vorming van de *geheele* verzameling echter is meer noodig. Immers, door CANTOR is bewezen, dat deze verzameling niet aftelbaar is, d. w. z. haar elementen kunnen niet in (1, 1) correspondentie gebracht worden met de natuurlijke getallen. Dit wil dus zeggen, dat de verzameling der voortschrijdingswetten, volgens welke we een getal gedefinieerd hebben, een grootere machtigheid heeft dan de verzameling der natuurlijke getallen en we moeten ons dus de vraag stellen: hebben we een scherp begrip van een dergelijke verzameling?

We komen hier tot een probleem, dat in de mathematische wereld heel wat stof heeft doen opwaaien, dat een splitsing onder de Mathematici heeft teweeggebracht. De volgelingen van CANTOR meenen, dat zij wel begrip hebben van verzamelingen van hoogere machtigheid dan die der natuurlijke getallen, de tegenstanders zooals BOREL, BROUWER e.a. erkennen alleen aftelbare verzamelingen als wiskundig beteekenis hebbend. Alle andere verzamelingen noemen zij zinloos.

Het is wel de moeite waard in 't kort na te gaan, welke gronden de laatste hebben om alleen aftelbare verzamelingen toe te laten. Deze kan men toch ook nooit kant en klaar neerschrijven, waarom worden zij nu als wiskundig denkbaar aangezien? Hierop geeft ons BOREL in zijn „Polémiques sur le transfini" (Leçons sur la theorie des Fonctions) een duidelijk antwoord. Hij gaat uit van een stelling van P. DU BOIS-REYMOND. Deze stelling is de volgende: Gegeven een aftelbare verzameling van stijgende functies, dan bestaat er een stijgende functie grooter dan elk der gegeven functies. Hij vergelijkt dit met de rij der natuurlijke getallen en komt tot de conclusie, dat wij van laatstgenoemde een voorstelling hebben, van de eerste niet. De motiveering is, dat bij het spreken over aftelbare verzamelingen de wiskundigen elkaar begrijpen, terwijl bij kwesties over niet aftelbare verzamelingen groote verdeeldheid onder de Mathematici optreedt. Men denke b.v. aan het principe van ZERMELO aangaande het kiezen van een element uit een dgl. verzameling, een principe, dat door de eene categorie wel, door de andere niet geaccepteerd wordt. Van degenen, die het transfinitum niet erkennen, zegt BOREL (pag. 145):

La question est maintenant de savoir si ces derniers sont dans leur droit, ou bien s'ils se trouvent vis-à-vis du transfini dans une situation analogue à celle d'un enfant qui vient d'apprendre la numération à qui on expliquerait ce qui est un ensemble dénombrable et qui aurait quelque peine à le comprendre. Afwijzen doet BOREL hier het transfinitum dus niet, beschouwt het echter momenteel als wiskundig geen zin hebbend.

Het is een zonderlinge geschiedenis met deze continue verzameling. Zij is in elkaar gezet en de maker schijnt van zijn eigen werk geen overzicht meer te hebben. BROUWER noemt haar aftelbaar onaf, maar dit is slechts een kwestie van naam. Hij neemt aan, dat zij wiskundig niet bestaat. Een ding echter staat vast; het CANTORsche bewijs der niet-aftelbaarheid toont aan dat er verzamelingen zijn met een hoogere machtigheid dan die der natuurlijke getallen. De continue verzameling mag dan wiskundig geen zin hebben, dat er behalve de aftelbare verzamelingen nog andere zijn, is zeker, al hebben wij dan ook niet het middel om haar mathematisch te bepalen.

SLOTOPMERKINGEN.

De grondslagen der Wiskunde kunnen zich verheugen in een groote belangstelling van de zijde der philosophie. Talrijke philosophen hebben met meer of minder succes over deze materie hun ideeën verkondigd, in de duistere diepten dezer gronden is menig gevecht geleverd tusschen philosophen eenerzijds, mathematici anderzijds. We behoeven slechts te herinneren aan de transfinite getallen van CANTOR, het Zermelosche Auswahlaxiom, enz. om aan te toonen, dat de wegen der beide wetenschapsmenschen elkaar moesten kruisen. En in het algemeen zal ook de wetenschap hier wel bij varen, samenwerking harer verschillende beoefenaren is absoluut noodzakelijk. Mogelijk is echter deze samenwerking niet altijd, de verschillende standpunten loopen dikwijls zoover uiteen, dat van overbruggen der kloof geen sprake kan zijn, nu eens is het de philosoof, die niet mathematisch denkt en voelt, dan weer de mathematicus, die niet philosophisch aangelegd is. Elke korte bespreking van een paar philosophische werken mag hier een plaats vinden in verband met het in dit proefschrift behandelde.

In „Die Gesetze und Elemente des Wissenschaftlichen Denkens" behandelt prof. HEYMANS o.a. het getalbegrip. Hij begint met de invoering van het systeem der natuurlijke getallen, dat oorspronkelijk niets anders is als een willekeurige, maar bepaalde rij van klanken. Deze rij wordt gebruikt als een soort maatstaf, men kan hiermee beslissen of de elementen van twee verzamelingen met elkaar in (1, 1) correspondentie gebracht kunnen worden. Stellen we hier even vast, dat het begrip „verzameling" door prof. HEYMANS als bekend wordt aangenomen; dit is immers juist de aanleiding voor het scheppen der natuurlijke getallen geweest. Er is dan ook geen bezwaar tegen om, zooals in par. 37 pag. 136 gebeurt, de rij der klanken te vervangen door een rij van teekens 1, 2, . . .

Nu volgt de verklaring van de formule $7+4=11$. Men merke op, dat de gang van zaken als volgt is: $7+4=11$ wordt neergeschreven, daarna wordt aangegeven, *wat met die formule wordt bedoeld.* Natuurlijk kan men ook omgekeerd eerst de omschrijving geven en daarna deze omschrijving kort door een formule weergeven. De omschrijving is de volgende: De rij der getallen van 1 . . . 7 en die van 1 . . . 4, laten zich in (1, 1) correspondentie brengen met de rij 1 . . . 11 en omgekeerd, het begrip aantal speelt hierbij geen rol, dit komt eerst later bij de toepassing. De nadruk moet gelegd worden op het feit, dat de verklaring der arithmetische formules, voorzoover zij betrekking hebben op de natuurlijke getallen, wordt gegeven door directe aanwending van de rij der natuurlijke getallen zelf, die van te voren is vastgelegd en die men met WEYL (Das Continuum) een grondkategorie kan noemen.

In par. 40 wordt de uitbreiding van de getallenrij besproken, de hier volgende theorie kan men noemen de „eenheids" theorie. Alle formules zullen worden teruggevoerd op de ééne grondkategorie der natuurlijke getallen, te dien einde voert prof. HEYMANS in een „negatieve eenheid", „breukeneenheid", „irrationale" en zelfs „imaginaire eenheid". Zeer zeker geeft deze opvatting tot weinig moeilijkheden aanleiding, of zij echter aan de eischen van wetenschappelijke strengheid beantwoordt, zullen wij moeten nagaan.

In de eerste plaats wijst prof. HEYMANS erop, dat de invoering der nieuwe getallen aanleiding geeft tot nieuwe problemen, zeer zeker, de invoering zelf is reeds een probleem. Hij zegt, dat we van te voren niet weten wat we onder een negatief of gebroken aantal objecten moeten verstaan. Natuurlijk niet, evenmin als de Boschjesman weet, wat wij onder 3 peren verstaan, weten wij in dit stadium van de theorie wat met een negatief aantal dingen bedoeld wordt. Als deze uitdrukking beteekenis heeft, moet die eerst verklaard worden. Anders gezegd: zoolang wij alleen de natuurlijke getallen kennen, zijn alle andere „getallen" voor ons mysteries. En evenals men de grondkategorie der natuurlijke getallen willekeurig, maar bruikbaar heeft ingevoerd, moet men nu de kategorie der breuken in zijn geheel invoeren. Zelfs WEYL, die zoo beangst is voor „Stufenbildung" durft nog wel een tweede grondkategorie der rationale getallen invoeren. En hiertegen is ook niet het minste bezwaar, mits men maar niet al te scrupuleus aan het begrip „tellen" vast zit. En zelfs kan men breuken wel invoeren zonder afstand te doen van dit begrip, men kan ze scheppen (analoog aan de rij der natuurlijke getallen) als een verzameling van klanken of teekens, waarvan de samenstellende deelen genomen worden uit de rij der natuurlijke getallen. Men moet nu (als bij de natuurlijke getallen) deze symbolen een beteekenis toekennen. Dit definieeren we nu: $^1/_3$ wil zeggen: uit een verzameling van 3 elementen er één nemen, (zie Noodzakelijkheid van het systeem), hierbij wordt dan alleen gebruik gemaakt van het begrip verzameling (wat geoorloofd is) en van de verzameling der natuurlijke getallen. Men vergelijke de beteekenis van het getal 7., d.i. de rij 1 . . . 7. En nu de verklaring der formules: Boven zagen we, welke de beteekenis is van: $7 + 4 = 11$. Nu moeten we een beteekenis geven aan $^1/_3 + ^1/_5 = ^8/_{15}$. Deze kan men als volgt geven: Neem een verzameling van 15 elementen, $^1/_3$ beteekent hiervan 5 nemen, $^1/_5$ er 3 van nemen, samen dus 8 elementen, d.i. $^8/_{15}$. Er wordt hierbij nergens gebruik gemaakt van dingen die niet van te voren verklaard zijn. Is dit niet in den grond hetzelfde als de verklaring van $7 + 4 = 11$? Het verschil lijkt mij slechts gradueel, dat breuken meer moeite geven, minder doorzichtig zijn is niet te verwonderen, het zijn toch ook de producten van een hoogere beschaving. Zeker zijn de breuken niet een direct gevolg van het tellen, wel echter wordt op bovenstaande wijze hun beteekenis geheel op de natuurlijke getallen teruggevoerd. Bovendien, voor het bewijs van de formule $7 + 4 = 11$ is de rij der natuurlijke getallen alleen niet voldoende, ook het toevoegingsprincipe moet bekend ondersteld worden. Men zou nu nog kunnen vragen: waarom is $^1/_3 \times ^1/_5 = ^1/_{15}$? Voor ons ongetwijfeld omdat het ons zoo geleerd is, de oorsprong van deze formule is echter zelfs CANTOR niet bekend. Met het definieeren en het geven van de interpretatie is dus de zaak afgeloopen.

Prof. HEYMANS doet het anders. Tegen bovenstaande invoering maakt hij op pag. 146 bezwaar, waaraan hij een voorbeeld laat voorafgaan. Hij zegt: Die Wissenschaft hat ohne Zweifel das Recht, einen bestehenden Begriff zu erweitern: einzelne seiner Merkmale fallen zu lassen, oder andere, allgemeinere, an die Stelle derselben treten zu lassen. Aber sie hat nicht das Recht, ein Merkmal fallen zu lassen, und dennoch andere, welche von *diesem Merkmale abhängen*, zu handhaben. Sie war ohne Zweifel berechtigt, nachdem der Ozon endeckt worden war, aus dem Begriff des Sauerstoff's das Merkmal eines spezifischen Gewichtes = 16 fallen zu lassen und also den weiteren Begriff eines Stoffes, dem sämtliche bekannte Eigenschaften des Sauerstoff's, nur nicht ein bestimmtes spezifiches Gewicht zukämen, aufzustellen. Aber sie würde nicht berechtigt sein, den Begriff eines Etwas aufzustellen, dem sämtliche bekannte Eigenschaften des Sauerstoff's *auszer dem Merkmale der Stofflichkeit zukämen.* Denn ohne Stofflichkeit lassen sich eben die übrigen Eigenschaften des Sauerstoffs nicht denken; der aufgestellte Begriff enthielte demnach einen Widerspruch. De bedoeling is, dat de eigenschappen, die een *gevolg van de stoffelijkheid zijn*, zich anders niet laten denken. Voorzichtig moet men hiermee toch zijn, b.v. radioactieve stoffen hebben eigenschappen, die ook niet stoffelijke dingen bezitten nl. de aethertrillingen. Overigens is het voorbeeld juist. Maar nu volgt: Einen solchen Widerspruch enthielte nun aber der Begriff eines Etwas, welches ohne ein Produkt des Zählens, ohne demnach eine eigentliche Zahl zu sein, dennoch den Zahlgesetzen unterworfen wäre. Het verband met bovenstaande voorbeeld ontgaat mij. Indien in plaats van „Zahlgesetzen" had gestaan „Zählungsgesetzen", is het duidelijk, maar men mag toch een bestaand begrip uitbreiden, en dus ook het getalbegrip, en in de plaats van „eigentliche Zahl", (d.i. natuurlijke getal), een ruimer getalbegrip invoeren, hiervoor rekenregels geven, waarin de regels van de natuurlijke getallen opgesloten liggen. Voert men de breuken in als boven, dan blijkt dat de natuurlijke getallen ook in dit kader passen, met behoud van hun oorspronkelijke beteekenis (zie Noodzakelijkheid van systeem). De invoering van een nieuwe eenheid, waarvan er n *aequivalent* zijn met een andere eenheid (breuk $^1/_n$) maakt de zaak m.i. niet duidelijker.

Een ander bezwaar van prof. HEYMANS tegen bovengenoemde invoering van breuken is, dat de toepassing op objecten problematisch moet blijven. Met hetzelfde recht kan men dan ook de toepassing van de natuurlijke getallen op objecten problematisch noemen. Alles is immers een gevolg van conventie, bij de natuurlijke getallen evenzoo goed als bij de andere.

Eindelijk de invoering der irrationale getallen. Hier blijkt toch heel duidelijk de onhoudbaarheid van de gevolgde methode. Immers wordt de irrationale eenheid vastgelegd door de geometrie, nl. de beschouwing van den rechthoekig gelijkbeenigen driehoek. Maar de stelling van Pythagoras heeft toch eerst zin, als de irrationale getallen ingevoerd zijn? Door DEDEKIND is hierop dunkt mij zeer duidelijk gewezen. De Analyse heeft waarlijk reeds leergeld genoeg betaald als gevolg van het gebruik maken van geometrische voorstellingen.

En hoe moeten de imaginaire getallen verklaard worden? Zij zijn toch ongetwijfeld producten van bewerkingen, die de Analyse zelf voorschrijft, de rekenregels met deze getallen worden door de Analyse, in aansluiting met die van de reëele getallen vastgesteld. Wat prof. HEYMANS zich voorstelt bij een imaginaire eenheid anders dan de letter *i* kan ik niet begrijpen.

En nu de vraag: waarom twijfelt niemand aan de door mathematische bewerkingen verkregen uitkomsten. Het antwoord is tweeledig: De zuiver theoretische bewerkingen berusten geheel op van te voren vastgestelde definities, zoolang de overeengekomen regels gevolgd worden is men zeker steeds *hetzelfde* resultaat te krijgen, daar alle regels ondubbelzinnig zijn. In het uitsluiten der dubbelzinnigheid ligt m.i. de mathematische zekerheid. Ten tweede de toegepaste wiskunde. Hier is de kwestie een geheel andere. Zekerheid van een langs mathematischen weg bereikt resultaat, bestaat dan lang niet altijd, dit hangt van allerlei factoren af. Nemen wij een paar voorbeelden. Op een rechte lijn kan men een beweging naar rechts positief, naar links negatief noemen en verder een nulpunt kiezen. Men kan nu bewegingen naar rechts door positieve, naar links door negatieve getallen voorstellen. Een beweging vanaf het nulpunt naar rechts van 3 cm., gevolgd door een naar links van 3 cm. levert b.v. weer het nulpunt op, enz. De bewerkingen met negatieve getallen vinden hier een analogon, het rekenen met positieve en negatieve getallen beeldt zich ondubbelzinnig af als bewegingen naar links en naar rechts. Erkent men met HEYMANS het toevoegingsprincipe, dan zijn de uitkomsten bij deze toepassing even zeker als de uitkomsten bij de zuiver theoretische bewerkingen. Andere voorbeelden van toegepaste wiskunde levert ons de mathematische physica. En hier hangt de zekerheid van het resultaat niet af van de wiskundige bewerkingen, doch van physische hypothesen. Neemt men deze aan, dan moet ook het resultaat als vaststaand beschouwd worden. Dit is echter een kwestie, die geheel buiten de wiskunde staat.

In de tweede plaats is door R. J. KORTMULDER een beschouwing gegeven over de invoering van het getalsysteem (Dissertatie, De logische Grondslagen der Wiskunde). Ten grondslag ligt een vrij vage „grondrij", waarmee de natuurlijke getallen gedefinieerd worden. Door een relativeeringsproces komt hij tot de invoering der negatieve getallen en tot de rationale getallen. Of dit relativeeringsproces overal erg duidelijk is zullen we daar laten, een „oorspronkelijke eenheid als relatieve veelheid" denken (pag. 122 invoering der breuken) lijkt nu niet zoo heel eenvoudig, liever gaan we na wat de schrijver opmerkt over de invoering der irrationale getallen. We treffen hier, anders als bij HEYMANS de namen CANTOR en DEDEKIND aan, en KORTMULDER blijkt het meest te voelen voor de DEDEKINDsche opvatting. Hij zegt nl. dat de CANTORsche wijze van opvatting formalistisch is, terwijl DEDEKIND de invoering bewerkstelligt door te letten op de ordinale functie. Hiertegen is weinig in te brengen, echter zijn opvatting van de DEDEKINDsche getallen is niet die, zooals zij door DEDEKIND is bedoeld. Op pag. 125 zegt hij: Deze (de irrationale getallen) worden dan ingevoerd als het geheel der elementen, die de hiaten in de rij der rationale getallen vullen. Geen sprake van. Zoo mag men deze getallen niet beschouwen. Zeer duidelijk zegt DEDEKIND: Jedesmal nun, wenn ein Schnitt vorliegt, welche durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl, m. a. w. er wordt een geheel nieuwe verzameling van dingen gemaakt, nl. de snedenverzameling in R, met elke snede correspondeert een getal. Van het opvullen van hiaten is geen sprake. Eerst *nà* de invoering wordt aan de nieuwe getallen een plaats in het systeem aangewezen.

In dezelfde paragraaf trekt hij ook van leer tegen de formalistische invoering van de negatieve getallen, waarbij hij zich beroept op FREGE. Volgens deze laatste is het dwaasheid om een nieuw teeken in te voeren voor $b - c$, als $c > b$, want zegt hij:

men kan evengoed een teeken invoeren voor de gemeenschappelijke oplossing van $x+2=1$ en $x+1=2$. FREGE vergeet hier één ding.

Indien de ontwikkeling der getallenleer er toe zou leiden om een dgl. teeken in te voeren, dan zou dit ook zonder bezwaar kunnen gebeuren. Gebeurt bij de invoering der imaginaire getallen niet precies hetzelfde? In het voorbeeld bovengenoemd zal wel niemand behoefte gevoelen om een nieuw symbool in te voeren, juist daarom is het aangehaalde voorbeeld waardeloos. Bij de negatieve getallen staat de zaak geheel anders. Dat een bewerking $b-c$ alleen beteekenis heeft vòor $b>c$ is toch in elk geval iets onvolkomens, en het ligt m. i. voor de hand om te trachten die onvolkomenheid op te heffen. En in de toegepaste wiskunde? Men zal hier bij elk voorkomend geval moeten nagaan of er in de werkelijkheid dingen voorkomen die tot elkaar in dezelfde betrekking staan als de ingevoerde negatieve getallen tot de positieve. En dit gebeurt ook inderdaad, al denkt men daarbij ook niet atijd na. Waarom heet een schuld van 3 gulden — 3 gulden vordering? Omdat een schuld van 3 gulden en een vordering van 3 gulden samen niets opleveren. En waarom gelooven wij zoo vast aan onze wiskunde? Al onze berekeningen berusten op van te voren vastgestelde wetten, het resultaat is dus een gevolg van deze definities en is dus met betrekking tot de definities in orde. Zijn nu de definities toepasbaar op werkelijke dingen, dan spreekt het voor ons ook van zelf, dat de berekeningsresultaten voor die dingen goed zijn. Ieder die dit niet wil toegeven moet dunkt mij ook het bestaan van een functie-theorie loochenen, de integraalstelling van CAUCHY is toch ook zuiver formalisme. Toch gelooft ieder mathematicus eraan om de eenvoudige reden, dat bij het ontstaan der stelling de van te voren vastgestelde rekenvoorschriften gevolgd zijn. En eenig contact met de werkelijkheid zal deze stelling toch wel nooit krijgen.

Hier dreigen dus geen gevaren, waarmee niet gezegd is, dat gevaren überhaupt niet bestaan. Zij komen van geheel andere zijde en wortelen in de al- of niet-toelaatbaarheid van in de wiskunde gebruikte axioma's, in welks middelpunt het principiuum tertii exclusi staat (BROUWER—WEYL). Deze vragen staan echter buiten het door KORTMULDER bestreken gebied.

Op pag. 128 § 19 vertelt KORTMULDER ons wat wij hebben te verstaan onder continu. Hij zegt: „Het systeem der reëele getallen is continu, omdat door het voorschrift der opvulling aller hiaten de discretie verdwenen is. Continuiteit wil zeggen: absolute samenhang door opvulling aller gapingen. Het begrip „tusschen" is hier van groot belang. Een lichaam beweegt zich continu, als alle tusschengelegen punten doorloopen worden, juister gezegd; als alle tusschen begin- en eindpunt op de bewegingslijn te denken punten doorloopen worden. Toepassing van tusschenstelling, tot deze uitgeput is, dat is wat het begrip continuiteit eischt."

Hadden DEDEKIND en CANTOR niet geleefd, dan zou dit continuumbegrip denkbaar kunnen zijn. Blijkbaar denkt KORTMULDER hier aan de vloeiende lijn, het physische ding, dat geheel buiten de Analyse staat. De beweging van een lichaam, dat alle punten van een lijn doorloopt, heeft met arithmetische kwesties niets te maken. De constructie van het arithmetisch continuum wijkt ook nog al af van die van de physische rechte, het eerste onstaat als een verzameling, die successievelijk wordt opgebouwd uit verzamelingen van lagere machtigheid, de laatste in eens door een pennestreek. Dat het arithmetisch continuum geconstrueerd is door naar de physische lijn te kijken, is ongetwijfeld waar, maar daarom zijn beide noch niet identisch. Continuiteit wil niet zeggen: absolute samenhang door opvulling aller hiaten, continuiteit beteekent heel eenvoudig: gehoorzaam zijn aan de *continuumdefinitie* en niets meer.

We zagen dat KORTMULDER het CANTORsche stelsel van irrationale getallen verwerpt als zijnde formalistisch. Is het DEDEKINDsche dat niet? CANTOR construeert een fundamentaalrij en voegt hieraan een „getal" toe, DEDEKIND maakt een snede, d. i. twee getalverzamelingen die . . . enz. en voegt hieraan een „getal" toe. In den grond is dat toch evengoed formalisme. De oorzaak van de dwaling zit hem dunkt me in een verkeerd begrijpen van het stelsel van DEDEKIND. KORTMULDER schijnt te meenen, dat DEDEKIND a. h. w. tusschen 2 rationale punten een irrationaal punt stopt, dat is echter niet waar, de verzameling der reëele getallen ontstaat als één geheel, waarin de rationale getallen een plaats kunnen krijgen door ze aan een snede toe te voegen.

Afgezien echter van alles wat hierboven over de meening van Kortmulder is opgemerkt, is zijn theorie ontoereikend. Op pag. 104 zegt hij: „Het zal nu in het vervolg blijken, dat de voortgezette ontwikkeling van het getalbegrip bestaat uit een voortdurend toepassen van ditzelfde proces: het relativeeren der getallen, het beweeglijk stellen t. o. v. een gebied, dat met de getallen ontstaat en dat zoo in den schijn een zekere onafhankelijkheid krijgt van de getallen, waarmee het echter ontstaat". Voor de irrationale getallen echter moet Dedekind helpen, het relativeeringsproces wordt dus gedurende eenige tijd op non-actief gezet, maar komt plotseling in par. 20 pag. 129 weer in dienst; om nl. heel gauw de bewerkingen met de irrationale getallen te verklaren. Hoe een irrationaal getal zonder dat van te voren de bewerkingen ermee zijn *„gedefinieerd"* als relatieve nul op kan treden, is mij een raadsel.

Ten slotte is de door Kortmulder gegeven oplossing van de paradox van Burali Forti zeker niet juist. Deze paradox is de volgende: Als het geheel der welgeordende typen naar volgorde gerangschikt wordt, dan is dat geheel weer een welgeordend type en wel de grootste. Maar dan krijgt men door toevoeging van één element een nog grooter welgeordend type; het eerste was dus niet de grootste.

Kortmulder zegt nu, dat de voortgezette relativeering van de eenheid steeds grootere rang-getallen schept. Dit proces is onvoleindbaar, daar ieder ontstaan getal tot nieuwe eenheid kan worden gekozen. Het begrip nu van de verzameling van alle rang-getallen, is een begrip, dat ondenkbaar is, daar het een innerlijke tegenstrijdigheid bevat, immers: *de voortdurende voortzetbaarheid van eenzelfde denkhandeling*, nl. de relativeering der eenheid, waarop de uitbreiding van het getalsbegrip berust, sluit de afsluitbaarheid van het proces uit, het is dus ongeoorloofd het begrip „verzameling" van alle ranggetallen te vormen, daar het begrip tegenstrijdig is. Deze „oplossing" is onjuist. Het bewijs draait hier om de voortdurende voortzetbaarheid van dezelfde denkhandeling. In de eerste plaats kan men zonder nieuwe „Erzeugungsprincipes" nooit tot hooger alefs komen; wat ook op pag. 132 door Kortmulder niet bestreden wordt. Van eenzelfde denkhandeling is dus geen sprake. Maar nemen we nu eens als voorbeeld de natuurlijke getallen. Door steeds een nieuwe eenheid toe te voegen, d. w. z. door voortdurend dezelfde denkhandeling te verrichten, krijgt men al grooter en grooter getallen. Pas hier op woord voor woord bovenstaande uitspraak toe, behalve dan het relativeeren. Het proces is onvoleindbaar, het begrip dus van de verzameling van alle natuurlijke getallen is ondenkbaar! En toch spreken *alle* mathematici van de verzameling der natuurlijke getallen.

STELLINGEN.

I.

De meening van DU-BOIS-REYMOND over het ontstaan der breuken bij de oervolken, is ongemotiveerd. (Allgemeine Funktionenlehre, pag. 49).

II.

De relativeeringstheorie van KORTMULDER kan de irrationale getallen niet te voorschijn roepen. (Dissertatie, pag. 104 en § 18).

III.

De voordeelen van de theorie van BAUDET boven die van CANTOR blijken minder belangrijk te zijn. (Christiaan Huygens, 1e Jaargang, 1921—1922, N^0. 1, bldz. 33, 37. en § 7).

IV.

Ten onrechte beweert RUSSELL, dat CANTOR en DEDEKIND de irrationale getallen invoeren als limieten. (Principles of Mathematics, pag. 280, § 267 en pag. 285, § 269).

V.

De uitspraak van CANTOR dat irrationale getallen zich nooit als snede voordoen, is niet juist. (Math. Annalen Bd. XXI, pag. 567).

VI.

Het begrip getal is door HEYMANS te eng geformuleerd. (Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens, § 36—§ 42).

VII.

Op pag. 403 § 124 zegt H. WEBER (Lehrbuch der Algebra 1e deel):

Setzen wir: $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$.

(x = irrationaal getal, a_0 = geheel getal, zoodat $a_0 < x < a_0 + 1$) so ist x_1 ein positiver unechter Bruch. Dit is onjuist.

VIII.

In het 1e deel van zijn Geometrie der Lage geeft TH. REYE een bewijs van den Fundamentalsatz (pag. 52, 53). Dit bewijs is zeer onvolledig.

IX.

De ontwikkeling van het integraalbegrip uitgaande van een continue functie is onlogisch. (HK. DE VRIES, Leerboek der Diff. en Integraalrekening, 2e deel, § 1).

X.

In hetzelfde werk 1e deel pag. 35—36 wordt een bewijs gegeven van de gelijkmatige continuiteit van $f(x)$ in een gesloten interval $a \leq x \leq b$ voor 't geval $f(x)$ in elk punt van het interval continu is. Dit bewijs is niet voldoende scherp.

XI.

De invoering der homogene lijncoördinaten door JESSOP is onlogisch. (Treatise on the line-complex pag. 16 § 3).

XII.

De invoering van het begrip kracht zonder kinematische inleiding is ongewenscht. (RIECKE, Lehrbuch der Physik, 1e deel).

IX.

De ontwikkeling van het integraalbegrip uitgaande van een constante functie is onlogisch. (Dr. L. Kiepert, Grundriss der Diff. en Integralrechnung, 2e deel, § 1).

X.

In Kiepert's werk 1e deel pag. 38—40 wordt een bewijs gegeven van de gelijkmatige continuiteit van $f(x)$ in een gesloten interval $a \leq x \leq b$ voor 't geval $f(x)$ in elk punt van dat interval continu is. Dit bewijs is niet voldoende scherp.

XI.

De invoering der homogene lijncoördinaten door Jessop is onlogisch. (Treatise on the line-complex pag. 10 § 3).

XII.

De invoering van het begrip kracht zonder mathematische inleiding is ongewenscht. (Riecke, Lehrbuch der Physik, 1e deel).