



Limieten van puntverzamelingen

<https://hdl.handle.net/1874/283039>

A. qu. 192, 1925

LIMIETEN VAN PUNTVERZAMELINGEN

DOOR

J. ROZENBERG



Diss.
Utrecht

1925

LIMIETEN
VAN PUNTVERZAMELINGEN

THE
FEDERAL GOVERNMENT

Diss. Utrecht 1925

LIMIETEN VAN PUNTVERZAMELINGEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING
VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE
WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE
RIJKS UNIVERSITEIT TE UTRECHT,
OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAG-
NIFICUS DR H. F. NIERSTRASZ, HOOG-
LEERAAR IN DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS
BESLUIT VAN DEN SENAAT DER
UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDEN-
KINGEN VAN DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDE-
DIGEN OP MAANDAG 25 MEI 1925,
DES NAMIDDAGS VIER UUR

DOOR

JOËL ROZENBERG

GEBOREN TE LEEUWARDEN



H. J. PARIS

AMSTERDAM—MCMXXV

*Aan de nagedachtenis mijner
moeder en aan mijn vader
Aan mijn vrouw*

Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij een aangename taak U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen, en U Hooggeleerde Schuh dank te zeggen voor het onderwijs, dat ik van U heb ontvangen.

Uwe boeiende en levendige colleges, Hooggeleerde Barrau, zullen bij mij steeds in dankbare herinnering blijven.

U, Hooggeleerde Wolff, Hooggeachte Promotor betuig ik in 't bijzonder mijn erkentelijkheid voor Uwe heldere voorlichting, buitengewone welwillendheid en zoo bemoedigende belangstelling.

INHOUD

	Blz.
Inleiding	1
De limietverzamelingen	7
De ruime limietverzameling	15
De enge limietverzameling	26
Slotopmerkingen	35

INLEIDING

De in dit proefschrift afgeleide eigenschappen voor puntverzamelingen zijn, indien het tegendeel niet uitdrukkelijk vermeld is, geldig voor een ruimte R_n van een willekeurig aantal dimensies.

We zullen in deze inleiding een aantal begrippen en stellingen welke tot goed begrip van het volgende noodig zijn in 't kort uiteenzetten.

Onder een punt A in een ruimte van n afmetingen verstaan we een verzameling van n reële getallen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (de coördinaten van A).

Onder een bol om het punt A met straal ϵ , of een omgeving ϵ van A, verstaan we de meetkundige plaats van punten X, wier coördinaten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ voldoen aan:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2 < \epsilon^2$$

Het positieve getal r wordt genoemd de afstand van het punt X tot het punt A.

Een punt A wordt *verdichtingspunt* of *limietpunt* van een puntverzameling E genoemd, als iedere bol met middelpunt A een van A verschillend punt van de verzameling E bevat. Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat in elke bol om A oneindig veel punten der verzameling E liggen. De verzameling E' der

limietpunten van een puntverzameling E wordt de „afgeleide” verzameling van E genoemd.

Een puntverzameling E heet *gesloten* als zij al de punten harer afgeleide verzameling E' bevat, hetwelk we als volgt voorstellen:

$$E' \subset E$$

Een puntverzameling E heet *dicht in zich zelf*, als elk harer punten verdichtingspunt van E is. Dit wil dus zeggen: $E \subset E'$.

Een puntverzameling E heet *perfect* als zij gesloten en dicht in zich zelf is, dus als $E = E'$.

Een punt P heet een inwendig punt van een puntverzameling E als er een positief getal ϵ te bepalen is, zoodanig dat alle punten in een bol met straal ϵ om P tot E behooren. Een puntverzameling, waarvan alle punten inwendige punten zijn heet een open puntverzameling. Een bol om een punt P is dus een open puntverzameling.

Onder een omgeving Ω van een puntverzameling E verstaan we een open verzameling, die E bevat.

Onder de vereeniging $S(E_1, E_2, E_3, \dots)$ van een rij puntverzamelingen $E_1, E_2, E_3, \dots$ verstaan we de verzameling der punten, die minstens tot één verzameling E_n behooren.

De doorsnede $D(E_1, E_2, E_3, \dots)$ van een rij puntverzamelingen $E_1, E_2, E_3, \dots$ is de verzameling der punten, die tot alle verzamelingen E_n behooren.

Een verzameling E wordt leeg genoemd als zij geen enkel punt bevat.

Van groot nut zal voor ons zijn het begrip ε -samenhang eener puntverzameling. We geven hiervan de volgende definitie.:

Voor een positief getal ε wordt een niet leege verzameling E ε -samenhangend genoemd, wanneer bij elke verdeeling van E in twee niet ledige verzamelingen F en G de onderste grens van de afstanden van een punt van F tot een punt van $G \leq \varepsilon$ is. Is $\rho > \varepsilon$ dan is dus elke ε -samenhangende puntverzameling ook ρ -samenhangend.

Is bovengenoemde onderste grens bij elke verdeeling 0, dan heet E 0-samenhangend (d.i. dus ε -samenhangend voor elk positief getal ε).

Van de volgende stelling zullen we herhaaldelijk gebruik moeten maken:

Een verzameling E is ε -samenhangend, als men tusschen elk tweetal harer punten een polygoon kan leggen waarvan de hoekpunten tot E behooren en de zijden $\leq \varepsilon$ zijn.

Bewijs: Stel de verzameling was niet ε -samenhangend, dan was E te splitsen in twee niet ledige deelverzamelingen E_1 en E_2 , zoodat de onderste grens der afstanden van de punten van E_1 tot de punten van E_2 grooter dan ε was. Het is dan onmogelijk een punt van E_1 met een punt van E_2 te verbinden door een polygoon, waarvan de hoekpunten in E liggen en met zijden $\leq \varepsilon$. Immers in een polygoon tusschen een punt van E_1 en een punt van E_2 komt een laatste hoekpunt in E_1 en een eerste in E_2 voor. De zijde van de polygoon tusschen deze beide punten is grooter dan ε . Uit de

onderstelling, dat de verzameling niet ε -samenhangend is leiden we dus af, dat er twee punten van E zijn, die niet te verbinden zijn door een polygoon, waarvan de hoekpunten in E liggen en de zijden $\leq \varepsilon$ zijn. Dit is in strijd met het onderstelde, de gemaakte onderstelling is dus onjuist.

Opgemerkt dient te worden, dat het omgekeerde van deze stelling niet juist is. Immers is E de verzameling der punten binnen twee buiten elkaar gelegen cirkels, waarvan de afstand der omtrekken ε is, dan is E ε -samenhangend. Een polygoon van de boven omschreven eigenschappen tusschen een punt binnen de eene cirkel en een punt binnen de andere is echter niet aanwezig. Indien E echter gesloten is, ziet men gemakkelijk in, dat dan wel het omgekeerde geldt.

De verzameling E wordt in F afgesloten genoemd, als

$$E = D(F, G)$$

de doorsnede van F met een gesloten verzameling G is.

Een verzameling E heet samenhangend zonder meer, als zij zich niet in twee niet leege in E afgesloten deelverzamelingen zonder gemeenschappelijk punt splitsen laat. Een gesloten 0-samenhangende verzameling E is dus samenhangend zonder meer, want splitst men deze in twee niet ledige in E afgesloten verzamelingen dan zou noodzakelijk de eene een verdichtingspunt van de andere moeten bevatten, zou er dus een punt mee gemeen hebben.

Ten slotte zullen we nog het volgende begrip invoeren.

Een rij van puntverzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$

wordt ε -samenhangend, waarbij ε met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert, genoemd, als het mogelijk is bij elk positief getal ε een natuurlijk getal N te bepalen, zoodat V_n voor $n > N$ ε -samenhangend is.

De hier gegeven definities over den samenhang eener verzameling zijn voor een groot deel ontleend aan Felix Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre.

Cantor definieerde een samenhangende puntverzameling als volgt:

Een puntverzameling E heet samenhangend als elk tweetal harer punten te verbinden is door een polygoon, waarvan de hoekpunten tot E behooren en waarvan de zijden kleiner zijn dan een willekeurig vooraf gegeven bedrag. Volgens onze terminologie is dit dus slechts 0-samenhangend. De beide begrippen dekken elkaar alleen als E gesloten is.

Een *continuum* is een gesloten samenhangende puntverzameling. Een punt wordt zodoende bij deze beschouwingen onder de continua gerangschikt.

Ter verduidelijking van de hier gegeven definities over de samenhang eener puntverzameling mogen de volgende voorbeelden dienen.:

- 1°. De verzameling der punten met geheele coördinaten in R_n is 1-samenhangend.
- 2°. De verzameling der punten met rationale coördinaten in R_n is 0-samenhangend, maar niet samenhangend.
- 3°. De verzameling van de punten van de X-as, wier

coördinaten zijn $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, 2$ is 1-samenhangend. Ook aan dit voorbeeld is te zien, dat een polygoon met zijde ≤ 1 niet mogelijk is om elk tweetal punten te verbinden. Het punt met coördinaat 2 laat zich nl. met een ander punt der verzameling niet op die wijze verbinden.

4°. Zij V_n de verzameling der punten op de lijn

$$y = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \text{ waarvoor}$$

$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \quad , \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1$$

De rij verzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$ is dan ϵ -samenhangend, waarbij ϵ met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert.

Om ons in het volgende niet tot begrensde puntverzamelingen te beperken denken we R_n tot afsluiting gebracht door een punt ∞ .

Ten slotte zullen we reeds in het tweede hoofdstuk de volgende stelling¹ noodig hebben:

Bevat een continuüm C een punt van een verzameling A en tevens een punt van het complement van A , dan bevat C een grenspunt van A .

Alvorens de inleiding te beëindigen wil ik me verdedigen tegen een eventueel verwijt, nl. dat ik zeer evidente stellingen, welke naar het oordeel van sommigen geen bewijs behoeven, in alle gestrengheid bewijs. Op het gebied der puntverzamelingen is nl. het evidente vaak foutief, terwijl het paradoxale regel is. Mijn groote voorzichtigheid bij de bewijsvoering vindt hierin zonder twijfel haar rechtvaardiging.

¹ Zie F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, blz. 247.

HOOFDSTUK I

De Limietverzamelingen

§ 1. Zij $V_1, V_2, V_3, \dots$ een oneindige rij van puntverzamelingen in R_n .

Onder de *limiet* of *ruime grensverzameling* verstaan we de verzameling der punten l , die de volgende eigenschap hebben: in iedere omgeving van l dringen oneindig veel verzamelingen van de rij door. We zullen deze verzameling in dit proefschrift steeds door de letter L voorstellen.

Onder de *enge limiet* of *grensverzameling* verstaan we de verzameling der punten l , die de volgende eigenschap hebben: er is bij elk gegeven getal $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N te vinden, zoodat voor elke $n > N$ V_n in de omgeving van l met straal ε doordringt. We zullen deze verzameling door L^* voorstellen.

Uit deze beide definities volgt onmiddellijk, dat elk punt van L^* ook tot L behoort m.a.w. $L^* \subset L$.

L^* kan leeg zijn, L niet, want indien geen enkel punt van de afgesloten R_n limietpunt was, dan zouden we om elk punt een zoodanigen bol kunnen leggen dat in elke bol slechts een eindig aantal V_n zou doordringen. Volgens een stelling van Borel zou dan de geheele R_n

te overdekken zijn door een eindig aantal van die bollen, waaruit zou volgen, dat er slechts een eindig aantal V_n was, hetgeen strijdig is met het onderstelde. L is dus niet leeg.

§ 2. STELLING I. *Is E een gesloten puntverzameling, die met oneindig veel V_1 punten gemeen heeft, dan heeft E met L minstens één punt gemeen.*

Bewijs: Had E met L geen enkel punt gemeen, dan zou, P een willekeurig punt van E zijnde, er een omgeving van P bestaan, waarin slechts een eindig aantal V_1 doordringen en daar men E met een eindig aantal van die omgevingen overdekken kan, zou E slechts met een eindig aantal V_1 punten gemeen hebben, hetgeen strijdig is met het onderstelde.

STELLING II. *L is gesloten.*

Bewijs: Als L zich in a verdicht en Ω een willekeurige omgeving van a is, terwijl men een willekeurig natuurlijk getal N geeft, dan bevat Ω een punt l van L en dringt er dus een V_i , $i > N$, in Ω .

STELLING III. *L^* is gesloten.*

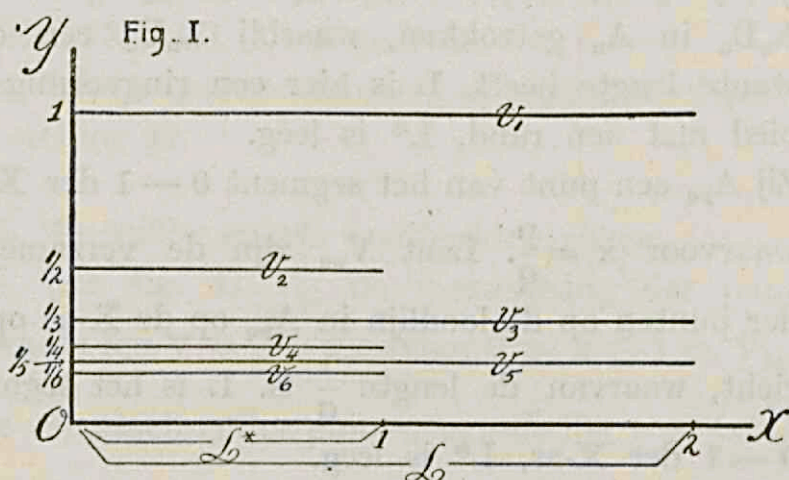
Het bewijs gaat volkomen op dezelfde wijze als voor stelling II.

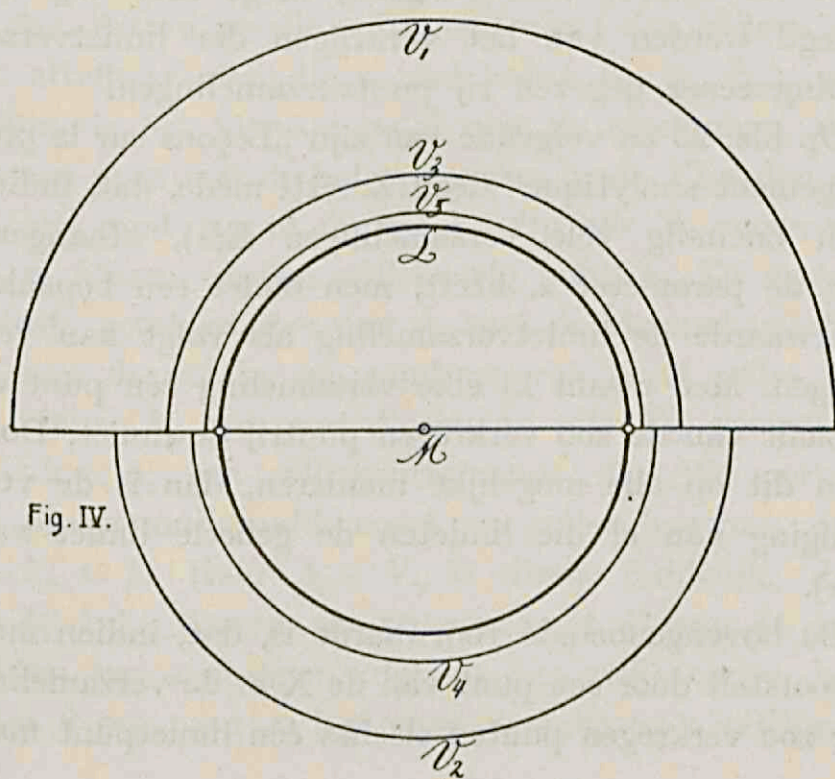
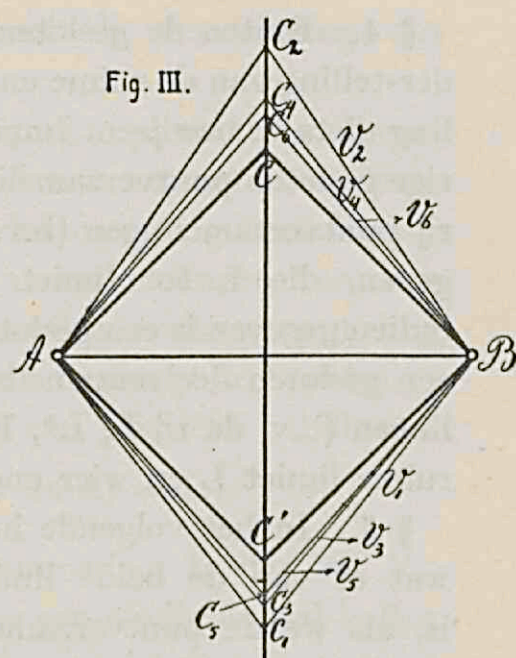
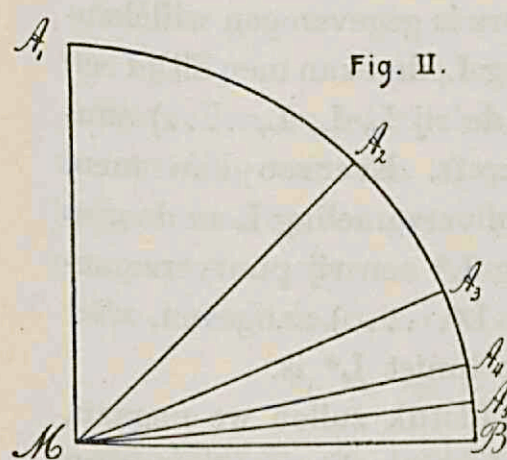
§ 3. We zullen enkele voorbeelden geven.

- 1) Zij (zie fig. I) V_{2n} de verzameling der punten van de lijn $y = \frac{1}{2n}$, waarvoor $0 \leq x \leq 1$ en V_{2n+1} de verzameling der punten van de lijn $y = \frac{1}{2n+1}$,

- waarvoor $0 \leq x \leq 2$. L is het segment $0 \leq x \leq 2$ van de X -as, L^* het segment $0 \leq x \leq 1$.
- 2) Laat elke verzameling V_n uit slechts één punt en wel een rationaal punt van het segment $0 - 1$ der X -as bestaan, zoodanig dat elk rationaal punt van dat segment ook een V_n is. L is nu de verzameling van alle punten van het segment $0 - 1$ van de X -as. L^* is leeg.
- 3) Zij gegeven een kwartcirkel (zie fig. II) en laat $V_n = MA_n$ zijn, zoodanig, dat $\angle BMA_n = \frac{\pi}{2^n}$. $L = L^* = MB$.
- 4) Kies op een cirkel punten $A_1, A_2, A_3, \dots$, zoodat de hoek die MA_n met een vaste lijn maakt alle waarden onderling meetbaar met π doorloopt. Zij $V_n = MA_n$. L bestaat uit de punten binnen den cirkel en op den omtrek. L^* bestaat slechts uit één punt, het middelpunt van den cirkel.
- 5) Kies de punten $A_1, A_2, A_3, \dots$ zooals in voorbeeld 4. Zij V_n de verzameling der punten op de raaklijn $A_n B_n$ in A_n getrokken, waarbij $A_n B_n$ een constante lengte heeft. L is hier een ringvormig gebied met den rand, L^* is leeg.
- 6) Zij A_{pq} een punt van het segment $0 - 1$ der X -as, waarvoor $x = \frac{p}{q}$. Laat V_{pq} zijn de verzameling der punten op de loodlijn in A_{pq} op de X -as opgericht, waarvan de lengte $\frac{1}{q}$ is. L is het segment $0 - 1$ der X -as, L^* is leeg.

- 7) Laat A en B (zie fig. III) punten op de X-as met coördinaten -1 en $+1$ zijn, C_{2n} een punt op de Y-as met ordinaat $1 + \frac{1}{2n}$ en C_{2n-1} een punt op de Y-as met ordinaat $-1 - \frac{1}{2n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Zij $V_n = AC_nB$. Is C het punt op de Y-as met ordinaat 1 en C' met ordinaat -1 , dan is $L = ACBC'$ en L^* bestaat uit de beide punten A en B.
- 8) Beschrijf (zie fig. IV) met een gegeven punt M als middelpunt halve cirkels met straal $1 + \frac{1}{2^n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Voor n even kiezen we de halve cirkels aan een bepaalde zijde van een gegeven lijn door M, voor n oneven aan de andere zijde. Voor deze rij halve cirkels is L de cirkel met M tot middelpunt en straal 1 . L^* bestaat uit de twee snijpunten van de gegeven lijn met deze cirkel.





§ 4. Buiten de geslotenheid valt zonder nadere onderstelling van de ruime en van de enge limietverzameling niets te bewijzen. Immers is gegeven een willekeurige gesloten puntverzameling L , dan kan men altijd een rij puntverzamelingen (b.v. de rij $L, L, L, \dots$) aangeven, die L tot limiet heeft. Evenzoo kan men, indien gegeven is een gesloten verzameling L en daarop een gesloten deelverzameling L^* een rij puntverzamelingen (b.v. de rij $L, L^*, L, L^*, \dots$) aangeven, wier ruime limiet L en wier enge limiet L^* is.

§ 5. In het volgende hoofdstuk zullen we nagaan, wat er van de beide limietverzamelingen te zeggen is, als we de puntverzamelingen gaan specialiseeren. Alvorens hiertoe over te gaan, moge hier nog iets gezegd worden van het verkrijgen der limietverzameling eener gegeven rij puntverzamelingen.

Op blz. 25 en volgende van zijn „Leçons sur le prolongement analytique” deelt Zoretti mede, dat, indien men oneindig vele verzamelingen $E(\alpha)$, afhankelijk van de parameter α , heeft, men onder een bepaalde voorwaarde de limietverzameling als volgt kan verkrijgen. Men neemt in elke verzameling één punt en bepaalt van de zoo verkregen puntrijs de limiet. Doet men dit op alle mogelijke manieren, dan is de vereeniging van al die limieten de geheele limiet van $E(\alpha)$.

De bovengenoemde voorwaarde is, dat, indien men α voorstelt door een punt van de X -as de verzameling der zoo verkregen punten slechts één limietpunt mag

hebben. In 't bijzonder moet de verzameling dus aftelbaar zijn.

Indien gegeven is een rij van puntverzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$ is dus aan deze voorwaarde voldaan.

We zullen nu laten zien, dat men de geheele limietverzameling van een rij puntverzamelingen kan verkrijgen door op een geschikte wijze in elke verzameling één punt te kiezen en daarvan de limiet te bepalen.

We kiezen daartoe een rij van positieve getallen,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

We kunnen de limietverzameling L der rij $V_1, V_2, V_3, \dots$ overdekken door een eindig aantal bollen met straal ε_1 , door een eindig aantal bollen met straal ε_2 , enz. Zetten we dit onbepaald voort dan krijgen we een aftelbaar oneindig aantal bollen $b_1, b_2, b_3, \dots$. Stel n_1 is het kleinste getal met de eigenschap, dat V_{n_1} een punt met de bol b_1 gemeen heeft. Kies dan op V_{n_1} een punt A_{n_1} in de bol b_1 . Op alle V_i , waarvoor $i < n_1$ kiezen we een willekeurig punt A_i . Zij n_2 het kleinste getal grooter dan n_1 met de eigenschap, dat V_{n_2} met de bol b_2 een punt gemeen heeft. Kies op V_{n_2} binnen b_2 een punt A_{n_2} en op alle V_k , waarvoor $n_1 < k < n_2$ een willekeurig punt A_k . We zetten dit proces onbepaald voort en zullen bewijzen, dat $\lim A_n = L$. Daar $A_n \in V_n$ is direct duidelijk, dat $\lim A_n \in L$. Kiezen we nu een punt P van L dan moeten we aantoonen, dat in een willekeurige bol ω om P een punt A_i ligt voor oneindig veel indices i .

Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, zal P liggen in een oneindig aantal bollen, alle binnen elkaar gelegen en geheel binnen ω . In elke bol b_i is een punt A_{n_i} op V_{n_i} gekozen. Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

- 1°. Onder de A_{n_i} zijn oneindig veel verschillende. Dan is P dus limiet der puntreeks A_{n_i} .
- 2°. Onder de A_{n_i} zijn slechts een eindig aantal verschillend. Dan zal dus A_{n_i} voor oneindig veel waarden van de index met P samenvallen. Echter heeft een puntreeks uitsluitend bestaande uit dezelfde punten, dat punt tot limietpunt¹, m.a.w. P is limietpunt der punten A_{n_i} .

Daar het bovenstaande geldt voor elke bol om P is P dus limietpunt der gekozen puntreeks, m.a.w. $\lim A_n = L$.

¹ Zie F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, blz. 233.

HOOFDSTUK II

De ruime limietverzameling

§ 6. We zullen een noodige en voldoende voorwaarde afleiden, waaronder de limiet van een rij continua zelf een continuum is.

Definitie: Een rij continua $C_1, C_2, \dots, C_\mu$ noemen we een ε -ketting als de afstand van ieder opeenvolgend paar kleiner is dan ε . We zeggen, dat de ketting C_1 met C_μ verbindt.

§ 7. STELLING IV. *De limiet L van een oneindige rij continua $C_1, C_2, \dots$ is dan en dan alleen een continuum, als men bij ieder positief getal ε een natuurlijk getal N kan bepalen, zoodat voor ieder paar indices $n' > n > N$ de corresponderende C_n en $C_{n'}$ verbonden kunnen worden door een ε -ketting, die uit continua van de rij bestaat, welker indices niet kleiner zijn dan n.*

§ 8. We beginnen met de voldoendeheid der voorwaarde te bewijzen. Was L geen continuum, dan was $L = L_1 + L_2$; L_1 en L_2 zijn gesloten, niet leeg en hebben geen punt gemeen. Er bestaan omgevingen Ω_1 en Ω_2 van L_1 en L_2 , die een afstand $\varepsilon > 0$ hebben. Vanaf zekeren index N_1 ligt C_n in $\Omega_1 + \Omega_2$ want anders zouden oneindig veel C_n in het gesloten com-

plement van $\Omega_1 + \Omega_2$ doordringen, waaruit zou volgen, dat L daar ook indringt.

Daar een continuüm, dat een punt van een verzameling A en tevens een punt van het complement van A bevat, door de grens van A gaat, ligt C_n of geheel in Ω_1 of geheel in Ω_2 voor $n > N_1$. Daar Ω_1 een omgeving is van een willekeurig punt van L_1 , ligt C_n in Ω_1 voor oneindig veel waarden van n , terwijl hetzelfde geldt voor Ω_2 .

Zij N het getal dat in de onderstelling bij ϵ behoort. Er bestaat een C_n , $n > N$ en tevens $> N_1$ die in Ω_1 ligt en een $C_{n'}$, $n' > n$, die in Ω_2 ligt.

Volgens onderstelling bestaat er een ϵ -ketting van C_n naar $C_{n'}$, bestaande uit continua, waarvan de indices $> n > N_1$ zijn. Dit is onmogelijk, want die continua liggen allen of in Ω_1 of in Ω_2 , zoodat er twee opeenvolgende continua van de ketting zouden zijn, waarvan de eene in Ω_1 en de andere in Ω_2 ligt, zoodat hun afstand $> \epsilon$ is. Hiermede is de voldoendeheid van de voorwaarde aangetoond.

§ 9. Zij omgekeerd L een continuüm en laat ϵ gegeven zijn. Wij kunnen L overdekken door een eindig aantal bollen γ_i , waarvan de middelpunten M_i in L liggen en de stralen $= \frac{1}{6}\epsilon$ zijn. Vanaf zekeren index N ligt C_n in de verzameling Σ_{γ_1} (verg. § 8). Zijn M_i en M_j twee middelpunten dan is er een polygoon, die M_i met M_j verbindt, waarvan de hoekpunten middelpunten van γ 's zijn en met zijden $< \frac{1}{3}\epsilon$.

Daar namelijk L een continuüm is, bestaat er een

polygoon $M_1, P_1, P_2, \dots, P_l, M_j$, waarvan de hoekpunten in L liggen en met zijden $< \frac{1}{5}\varepsilon$ (zie inleiding); ieder hoekpunt van deze polygoon ligt minder dan $\frac{1}{5}\varepsilon$ verwijderd van een middelpunt van een bol γ , omdat L door de γ 's wordt overdekt, waaruit onmiddellijk het bestaan van de bedoelde polygoon volgt.

Laat n en n' twee indices zijn, waarvoor $n' > n > N$. Daar C_n in Σ_{γ_1} ligt is zijn afstand tot één der middelpunten M_1 kleiner dan $\frac{1}{5}\varepsilon$. Evenzoo is de afstand van $C_{n'}$ tot een middelpunt M_j kleiner dan $\frac{1}{5}\varepsilon$. Zij $M_1 M_\alpha M_\beta \dots M_l M_j$ een polygoon, waarvan de hoekpunten M_ρ middelpunten van bollen γ_ρ zijn en met zijden $< \frac{3}{5}\varepsilon$. Daar M_α in L ligt dringen oneindig veel continua C_n in γ_α . Zij C_{n_α} er één van met $n_\alpha > n$. De afstand van C_n tot C_{n_α} is dan kleiner dan ε . Oneindig veel continua dringen in γ_β . Zij C_{n_β} er één van met $n_\beta > n$. De afstand van C_{n_α} tot C_{n_β} is dan kleiner dan ε . Zoo voortgaande blijkt het bestaan van een ε -ketting die C_n met $C_{n'}$ verbindt, die uit continua van de rij bestaat met indices grooter dan n . De noodzakelijkheid van de voorwaarde is hiermee aangetoond.

§ 10. De toevoeging, dat de indices van de continua, die de ε -ketting vormen van C_n naar $C_{n'}$, niet kleiner dan n zijn, mag niet worden weggelaten, zonder dat de voorwaarde onvoldoende wordt. Het volgende voorbeeld toont dit aan:

Zij C_1 het segment $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, C_2 en C_3 de middelste segmenten van de intervallen $0 - \frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3} - 1$, beide

van de lengte $\frac{1}{3^2}$, C_4 , C_5 , C_6 , C_7 de middelste segmenten groot $\frac{1}{3^3}$ van de intervallen, die overblijven nadat uit het segment 0 — 1 de punten 0,1 en de segmenten C_1 , C_2 , C_3 weggenomen zijn, en zoo voort. L is hier, zooals bekend is, een perfecte overal discontinue puntverzameling (nl. de verzameling der punten, bepaald door oneindige ternaalbreuken, waarin het cijfer 1 niet voorkomt). Geeft men echter ε , dan kan men als n en n' gegeven zijn C_n met $C_{n'}$ door een ε -ketting van continua C_i verbinden. Blijkens de constructiewijze der C_i ligt echter tusschen C_n en $C_{n'}$ altijd een C_k , zoodat $k < n$. De ε -ketting bevat dus altijd een C_k , waarbij $k < n$, voor ε voldoende klein.

§ 11. We zullen nu een andere noodig en voldoende voorwaarde afleiden, dat de limiet van een rij continua zelf een continuum is. We hebben daartoe echter eenige hulpstellingen noodig, welke we eerst zullen aantoonen.

STELLING V. Zij $V_1, V_2, V_3, \dots$ een rij van gesloten puntverzamelingen met limiet L en met de eigenschap $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ dan is $L = D(V_1, V_2, V_3, \dots)$.

Bewijs: Is P een punt van D , dan behoort het tot alle V_i , dus tot L . Is omgekeerd Q een punt van L , dan behoort Q tot alle V_i . Was dit niet het geval, dan zou het b.v. niet tot V_n behooren. Daar V_n gesloten is, is er een positief getal ε te bepalen, zoodanig, dat als

we om Q een bol met straal ε leggen, V_n niet in die bol doordringt. Aangezien alle V_i ($i > n$) in V_n bevat zijn, zou dan elke V_i ($i > n$) geheel buiten de bol met straal ε om Q liggen. Daaruit zou dan volgen, dat Q niet tot L behoort. Dit is een ongerijmdheid, de onderstelling, dat Q niet tot alle V_i behoort, is dus onjuist, waarmee de stelling bewezen is.

§ 12. STELLING VI. *Zij gegeven een rij van continue*¹ $C_1, C_2, C_3, \dots$. *Noemen we* $S_1 (C_1, C_2, C_3, \dots)$ *de vereeniging der verzamelingen* $C_1, C_2, C_3, \dots$ *en* $S'_1 (C_1, C_2, C_3, \dots)$ *de afgeleide dezer vereeniging dan zullen we, als* L *de limiet der rij* $C_1, C_2, C_3, \dots$ *is, aantoonen, dat*

$$S'_1 (C_1, C_2, C_3, \dots) = S (L, C_1, C_2, \dots)$$

Bewijs: Een punt van S'_1 is of een verdichtingspunt van een C_i en dan behoort het tot C_i dus tot S , of het is een punt in welker omgeving oneindig vele C_i doordringen en behoort dan tot L , dus tot S . Omgekeerd behoort een punt van S tot S'_1 . Immers een punt van S behoort of tot een C_i of tot L . In het eerste geval behoort het punt ook tot S'_1 , in het tweede geval is het een punt in welker omgeving oneindig vele C_i doordringen, is het dus verdichtingspunt van $S_1 (C_1, C_2, C_3, \dots)$, behoort het dus tot $S'_1 (C_1, C_2, C_3, \dots)$.

§ 13. STELLING VII. *Noemen we* $S_n (C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, \dots)$ *de vereeniging der verzamelingen* $C_n,$

¹ We onderstellen, dat we met perfecte puntverzamelingen te doen hebben, m.a.w. dat de C_i niet uit slechts één punt bestaan.

$C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, S'_n$ haar afgeleide dan is $S'_1 \supset S'_2 \supset S'_3 \supset \dots$

Bewijs: We zullen bewijzen, dat $S'_n \supset S'_{n+1}$ voor elke n .

Uit stelling VI volgt dat $S'_n = S(L, C_n, C_{n+1}, \dots)$ en dat $S'_{n+1} = S(L, C_{n+1}, C_{n+2}, \dots)$. Hieruit blijkt onmiddellijk, dat $S'_n \supset S'_{n+1}$.

§ 14. STELLING VIII. *Heeft S'_n de beteekenis daaraan in de vorige paragraaf toegekend, dan is $L = \lim S'_n$.*

Bewijs: Daar $S'_1 \supset S'_2 \supset S'_3 \supset \dots$ is volgens stelling V $\lim S'_n = D(S'_1, S'_2, S'_3, \dots)$. Uit stelling VI volgt dan dat $\lim S'_n = L$. Immers een punt van L behoort tot elke S'_n dus tot $D(S'_1, S'_2, S'_3, \dots)$. Omgekeerd kan een punt buiten L niet tot $D(S'_1, S'_2, S'_3, \dots)$ behooren, want uit stelling VI volgt, dat de gemeenschappelijke punten van alle S'_n uitsluitend punten van L zijn.

§ 15. We hebben dus nu geconstrueerd een rij van gesloten puntverzamelingen $S'_1, S'_2, S'_3, \dots$ wier limiet dezelfde is als de limiet der rij $C_1, C_2, C_3, \dots$. De nieuwe rij heeft echter het voordeel, dat $S'_n \supset S'_{n+1}$. Met behulp van deze rij is een andere noodig en voldoende voorwaarde af te leiden, dat de limiet van een rij continua weer een continuum is. Vooraf ga echter nog een hulpstelling.

STELLING IX. *Is $V_1, V_2, V_3, \dots$ een rij gesloten puntverzamelingen met limiet L en met de eigenschap $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$, terwijl elke V_i ε -samenhangend is, dan is L ook ε -samenhangend.*

Bewijs: Was L niet ε -samenhangend, dan was L te splitsen in twee gesloten niet ledige deelverzamelingen L_1 en L_2 , wier afstand $> \varepsilon$ is. Er is een omgeving Ω van L te bepalen, zoodat $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, waarbij Ω_1 een omgeving van L_1 en Ω_2 een omgeving van L_2 is, en zoodanig, dat de afstand van Ω_1 tot Ω_2 grooter dan ε is. Verder is te bepalen een natuurlijk getal N , zoodat voor $n > N$ V_n geheel in Ω ligt. Immers was dit niet het geval, dan zou voor oneindig veel waarden van n , V_n punten in het gesloten complement van Ω hebben, waaruit zou volgen, dat L daarin ook minstens één punt had, wat niet mogelijk is. Aangezien zoowel in Ω_1 als in Ω_2 minstens één punt van L ligt moet V_n voor $n > N$ zoowel in Ω_1 als in Ω_2 een punt bezitten. Daar V_n geheel in $\Omega_1 + \Omega_2$ voor $n > N$ ligt, zou daaruit volgen, dat V_n in twee deelverzamelingen gesplitst was, wier afstand grooter dan ε is, hetgeen in strijd is met het onderstelde. L is dus ε -samenhangend.

§ 16. STELLING X. *De limiet L van een rij continua $C_1, C_2, C_3, \dots$ is dan en dan alleen een continuum als S'_n ε -samenhangend is, waarbij ε met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert.*

Bewijs: De voorwaarde is noodig. Zij gegeven dat L een continuum is. L is bevat in elke S'_n .

Overdekken we L met bollen wier straal $\frac{1}{2}\varepsilon$ is en wier middelpunten op L liggen dan ligt voor $n > N$ S'_n geheel binnen die bollen en omdat L in S'_n bevat is dringt S'_n ook in al die bollen door. Om de ε -samen-

hang van S'_n te bewijzen, zullen we gebruik maken van de stelling in de inleiding genoemd, dat een verzameling ε -samenhangend is, als elk tweetal punten te verbinden is door een polygoon, waarvan de hoekpunten tot de verzameling behooren en de zijden $\leq \varepsilon$ zijn. Stel P en Q zijn twee punten van S'_n . Voor $n > N$ liggen beide in een bol met straal $\frac{1}{2}\varepsilon$ en met middelpunten M_1 en M_2 . M_1 en M_2 zijn te verbinden door een polygoon, waarvan de hoekpunten middelpunten van bollen zijn, dus tot L , dus tot S'_n behooren en waarvan de zijden dus $< \varepsilon$ zijn. Voegen we aan deze polygoon nog toe de segmenten PM_1 en QM_2 dan voldoet de nu geconstrueerde polygoon aan bovengenoemde eischen. S'_n is dus ε -samenhangend.

De voorwaarde is voldoende. Bij elk positief getal ε is nl. te bepalen (zie inleiding) een natuurlijk getal N , zoodat voor $n > N$ S'_n ε -samenhangend is. Volgens stelling IX is dan L ook ε -samenhangend. De bepaling van een natuurlijk getal N is voor elke ε mogelijk m.a.w. L is ε -samenhangend voor elke ε d.w.z. 0-samenhangend. Daar L gesloten is, is L dus een continuüm.

§ 17. Uit deze tweede noodig en voldoende voorwaarde, dat de limiet van een rij continua zelf een continuüm is, volgt onmiddellijk de eerste. Immers is $C'_n = S(L, C_n, C_{n+1}, \dots)$ $\frac{1}{2}\varepsilon$ -samenhangend voor $n > N$ dan wil dit dus zeggen, dat men voor $n' > n > N$, C_n en $C_{n'}$ die gesloten zijn (zie inleiding) kan verbinden door een $\frac{1}{2}\varepsilon$ -ketting, bestaande, uit continua van de rij wier indices $> n$ zijn, in welke

ketting misschien ook nog L optreedt. Door L weg te laten uit deze ketting krijgen we dan een ε -ketting uitsluitend bestaande uit continua van de rij met indices $> n$. Deze laatste voorwaarde, dat de verbindende continua een grootere index dan n moeten hebben komt hier op geheel natuurlijke wijze voor den dag. Immers in $S'_n = S(L, C_n, C_{n+1}, \dots)$ treden de continua van lageren index dan n niet meer op.

§ 18. Bij de bewijsvoering zoowel van stelling IV als van stelling X is uitsluitend gebruik gemaakt van den ε -samenhang voor elke ε der naderende verzamelingen. De noodig en voldoende voorwaarde, dat een rij van continua een continuum tot limiet heeft, is dus ook de noodig en voldoende voorwaarde, dat een rij van ε -samenhangende puntverzamelingen, waarbij ε met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert, een continuum tot limiet heeft. Als voorbeeld hiervan kunnen we geven het door Zoretti op blz. 27 van zijn „Leçons sur le prolongement analytique” om andere redenen gegeven voorbeeld.

Laat V_n zijn de verzameling der punten op de lijn $y = \frac{1}{n}$ waarvoor.

$$\frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{2}{3n}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{3n}$$

.....

$$\frac{p}{n} + \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{p}{n} + \frac{2}{3n} \quad (p \leq n-1)$$

M.a.w. op elke rechte $y = \frac{1}{n}$ wordt het segment $0 - 1$ in n gelijke deelen verdeeld en V_n is dan de verzameling der punten van het middelste derde deel van elk der segmenten. De limiet L (het segment $0 - 1$ der X -as) is dus een continuüm, omdat V_n ε -samenhangend is, waarbij ε met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert (ε is hier nl. $\frac{2}{3n}$).

§ 19. Als bijzonder geval van stelling IV krijgen we een stelling van Zoretti, die als volgt luidt:

STELLING XI. *Is voor een rij van continua $C_1, C_2, C_3, \dots, L^*$ niet leeg dan is L een continuüm.*

Inderdaad wordt dan aan de voorwaarde van § 7 voldaan. Is nl. P een punt van L^* dan leggen we om P als middelpunt een bol γ met straal $\frac{1}{2}\varepsilon$. Is n grooter dan een zeker natuurlijk getal N , dan dringt C_n in γ . Is dus $n' > n > N$ dan is de afstand van C_n tot $C_{n'}$ kleiner dan ε . Hier vormt zelfs iedere rij continua met indices $> N$ een ε -ketting.

Het voorbeeld van § 18, waarbij men V_n kan opvatten als te bestaan uit n continua, is door Zoretti gegeven om te laten zien, dat ook, als L^* leeg is, L een continuüm kan zijn. Met de stellingen IV en X is dus weerlegd de op blz. 27 van zijn „Leçons sur le prolongement analytique” gemaakte opmerking:

„L'existence d'un point limite a pour tous les E_n ,

c'est-à-dire tel que dans un cercle¹ de centre a il y ait des points de tous les E_n à partir d'une certaine valeur de n , semble bien être presque essentielle pour que l'on puisse énoncer un théorème général".

¹ Lees: cercle quelconque.

HOOFDSTUK III

De enge limietverzameling

§ 20. Een rij puntverzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$ zullen we *normaal* noemen als $L^* = L$, m. a. w. als ieder punt P van L de volgende eigenschap heeft: is ω een willekeurige omgeving van P , dan is er een natuurlijk getal N te bepalen, zoodat voor $n > N$ V_n in ω doordringt.

Wij zullen een noodige en voldoende voorwaarde afleiden, waaronder een rij normaal is.

Zij d_{ik} de bovenste grens van de afstanden, waarop de verschillende punten van V_i verwijderd zijn van V_k .

STELLING XII. *De rij $V_1, V_2, V_3, \dots$ is dan en dan alleen normaal als voor i en k beide voldoende groot $d_{ik} < \varepsilon$, waarin ε een willekeurig gegeven positief getal is.*

De voorwaarde is voldoende. Is nl. l een willekeurig punt van L dan construeeren we bollen γ met l tot middelpunt. Behoorde l niet tot L^* , dan zou er een bol γ zijn, waarin oneindig veel V_n niet doordringen. Is de straal van γ gelijk aan 2ε dan merken wij op, dat oneindig veel V_n doordringen in den concentrischen bol γ' met straal ε . Hieruit volgt onmiddellijk, dat er d_{ik} groter dan ε zijn, waarbij i en k ieder bedrag

kunnen overschrijden. Dit is in strijd met de onderstelling, dus de voldoendheid der voorwaarde is aangetoond.

De voorwaarde is noodzakelijk. Zij nl. $L^* = L$. Wij overdekken L met een eindig aantal bollen γ_μ , waarvan de middelpunten op L liggen en met $\frac{1}{2}\varepsilon$ tot stralen (ε is gegeven). V_n dringt in γ_μ , zoodra n een bepaald getal N_μ overtreft. Zijn i en k beide $> N > N_\mu$, waarin μ ieder van de indices der γ 's mag zijn, dan dringen V_i en V_k in alle γ_μ , zoodat $d_{ik} \leq \varepsilon$, waarmee de noodzakelijkheid der voorwaarde bewezen is.

§ 21. STELLING XIII. *Iedere rij V_n bevat een deelrij V_{n_ρ} , $\rho = 1, 2, 3, \dots$ met $d_{n_i n_k} < \varepsilon$, waarin $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven is; i en k mogen onafhankelijk van elkaar alle waarden doorloopen.*

Om dit te bewijzen beschouwen we weer de bollen γ_μ . V_n ligt in Σ_{γ_μ} , zoodra n een bepaald getal ν overtreft en dringt door in zekere γ_μ . Daar het aantal combinaties der γ_μ eindig is en het aantal indices, die ν overtreffen oneindig, bestaat er een aantal γ_μ , zoodat oneindig veel V_n in ieder daarvan en in geen andere doordringen. Deze V_n noemen we V_{n_ρ} . Zijn nu i en k twee willekeurige natuurlijke getallen, dan is $d_{n_i n_k} < \varepsilon$, want als P een punt van V_{n_i} is, is P minder dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ verwijderd van een middelpunt van een γ_μ , waarin ook V_{n_k} doordringt.

§ 22. STELLING XIV. *Iedere rij V_n bevat normale deelrijen.*

Er is een deelrij R_1 ($V_{n_{11}}, V_{n_{12}}, \dots$) waarbij $d_{ik} < 1$,

als i en k twee willekeurige indices uit de rij zijn (§ 21). R_1 bezit een deelrij $R_2 (V_{n_{11}}, V_{n_{12}}, \dots)$ met $d_{ik} < \frac{1}{2}$. Zoo voortgaande correspondeert met ieder natuurlijk getal g een deelrij $R_g (V_{n_{g1}}, V_{n_{g2}}, \dots)$ met $d_{ik} < \frac{1}{g}$ en steeds is R_{g+1} een deelrij van R_g .

Beschouw nu de deelrij $R (V_{n_{11}}, V_{n_{12}}, \dots)$. Deze is normaal. Is nl. ε gegeven dan is er een natuurlijk getal $g > \frac{1}{\varepsilon}$. De verzamelingen $V_{n_{gg}}, V_{n_{g+1g+1}}, \dots$ behooren allen tot de deelrij R_g . Dus als i en k beide g overtreffen is $d_{n_{ii} n_{kk}} < \frac{1}{g} < \varepsilon$. Uit Stelling XII volgt derhalve, dat R normaal is.

§ 23. Laat weer een rij continua $C_1, C_2, C_3, \dots$ gegeven zijn.

STELLING XV. *Noodig en voldoende voor het bestaan van een deelrij met perfecte limiet is: de diameter¹ δ_n van C_n nadert niet tot nul voor n oneindig.*

Nadert δ_n niet tot nul, dan is er een deelrij, waarin alle diameters een vast positief getal h overtreffen. Deze heeft een normale deelrij (§ 22). De limiet hiervan is een continuüm L' . Onmogelijk kan L' uit slechts 1 punt l bestaan. Want leggen we om l als middelpunt een bol γ met straal $\frac{h}{2}$, dan dringt C_n in γ vanaf zekere n . Daar $\delta_n > h$, moet V_n ook punten buiten γ bezitten.

¹ Onder de diameter van een puntverzameling verstaan we de bovenste grens van de afstanden van twee harer punten.

Daaruit zou volgen, dat L' ook punten buiten γ bevat. L' is dus perfect ¹.

Nadert δ_n tot nul, dan kan de limiet van een normale deelrij uit niet meer dan 1 punt bestaan. Bevatte de limiet nl. twee punten l_1 en l_2 dan zou C_{n_0} voor ρ voldoende groot een punt in een nog zoo kleine omgeving van l_1 in een punt in een nog zoo kleine omgeving van l_2 hebben, hetgeen in strijd is met $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Hiermee is het door Zoretti bewezen theorema: „als L^* niet leeg is en L meer dan 1 punt bevat, bestaat er een normale deelrij met perfecte limiet” ² eenigszins aangevuld; bij die onderstelling kan δ_n niet tot nul naderen, omdat oneindig veel continua punten bezitten in de nabijheid van twee verschillende punten.

§ 24. Met behulp van de stelling, dat elke rij normale deelrijen bevat, laat zich een zeer eenvoudig bewijs van de volgende welbekende stelling geven.

STELLING XVI. Zij $C_1, C_2, C_3, \dots$ een rij van continua met de eigenschap dat $\delta_n > h$ is. Indien L de limietverzameling is, heeft deze een continu deel L' met diameter $\delta \geq h$.

De gegeven rij bevat een normale deelrij.

$$C_{n_1}, C_{n_2}, C_{n_3}, \dots$$

Noemen we daarvan de limietverzameling L' dan is

$$L' \subset L$$

L' is een continuüm. Stel de diameter δ daarvan is

¹ Een continuüm, dat meer dan één punt bevat is perfect.

² Bulletin de la Soc. Math. de Fr., Dl. 37, 1909, pag. 116.

kleiner dan h , dus b.v. $\delta = h - \varepsilon$. L' is te overdekken met bollen, wier straal $\frac{1}{4}\varepsilon$ is. Voor $q > N$ ligt C_{n_q} in die bollen en dringt in al die bollen door. Daaruit volgt dan dat $\delta_{n_q} < h - \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$ dus $\delta_{n_q} < h - \frac{1}{2}\varepsilon$, wat in strijd is met het onderstelde.

Opmerking: Het is duidelijk, dat de eigenschap $\delta_n > h$ slechts behoeft te gelden voor een oneindige deelrij der rij $C_1, C_2, \dots$. Het bewijs gaat nl. onveranderd door, indien men in plaats van de gegeven rij die deelrij beschouwt.

§ 25. We zullen nog een tweede noodig en voldoende voorwaarde geven, dat een rij van puntverzamelingen normaal is, laten daartoe echter de volgende hulpstelling voorafgaan.

STELLING XVII. *Indien voor een rij van puntverzamelingen elke deelrij dezelfde limiet L heeft, is dit ook de limiet der geheele rij.*

Bewijs: Dat elk punt van L ook tot de limiet der rij behoort is direct duidelijk. We zullen nu nog aantoonen, dat elk punt der limiet tot L behoort. Stel er was een punt l der limiet dat niet tot L behoort. Dat wil dan zeggen, dat in elke omgeving ω van l oneindig veel verzamelingen der rij doordringen. Beschouwen we deze rij. Deze deelrij kan dan L niet tot limiet hebben, want haar limiet bevat het punt l , dat niet tot L behoort. Hiermee is de gemaakte onderstelling ad absurdum gevoerd.

§ 26. STELLING XVIII. *Een rij puntverzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$ is dan en dan alleen nor-*

maal als elke oneindige deelrij dezelfde limiet L heeft.

De voorwaarde is voldoende. Nemen we aan, dat de rij niet normaal is, dan bevat L, omdat L de limiet is der geheele rij (§ 25) een punt l, zoodanig, dat in een willekeurige bol om l oneindig veel verzamelingen der rij niet doordringen. Beschouwen we nu deze oneindige deelrij, dan kan deze onmogelijk L tot limiet hebben, want tot haar limiet behoort het punt l niet, dat wel tot L behoort.

De voorwaarde is noodzakelijk. Zij de rij $V_1, V_2, V_3, \dots$ normaal. Voor $n > N$ dringt V_n in een willekeurige bol om een punt l der limiet L. Daar L met een eindig aantal dezer bollen te overdekken is, dringt dus voor n voldoende groot, V_n in al die bollen. Elke oneindige deelrij bevat nu een oneindig aantal dezer verzamelingen V_n , wier limiet, zooals duidelijk is, L is, zoodat elke oneindige deelrij L tot limiet heeft.

§ 27. Als een noodige (maar niet voldoende) voorwaarde, dat een rij puntverzamelingen normaal is moge hier nog genoemd worden de volgende:

Noodig, dat een rij puntverzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$ normaal is, is dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta$ (δ_n is de diameter van V_n , δ de diameter van de limiet L).

Immers L is te overdekken met een eindig aantal bollen, wier straal $\frac{1}{4}\epsilon$ is en omdat de rij normaal is zal V_n voor $n > N$ in al die bollen doordringen en er geheel binnen liggen. Zijn dus A en B twee punten van L met afstand δ dan dringt V_n voor $n > N$ in die bollen en is dus voor $n > N$:

$$\delta - \varepsilon < \delta_n < \delta + \varepsilon \quad \text{d.w.z.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta$$

De voorwaarde is geenszins voldoende. Denken we ons nl. in een cirkel een overal dicht aftelbaar stelsel middellijnen, dan is de limiet het binnengebied van den cirkel + de rand. Hier is voor elke n $\delta_n = \delta$, terwijl de rij toch niet normaal is.

§ 28. We zullen een voorwaarde afleiden, waaronder de enge limiet L^* van een rij continua $C_1, C_2, C_3, \dots$ zelf een continuüm is. Het is wel bijna absoluut zeker, dat het onmogelijk is aan de C_n zelf een voorwaarde op te leggen, omdat in de deelen van C_n , die niet tot de vorming van L^* meewerken een groote willekeurigheid zit, ook al is L^* een continuüm. De volgende stelling levert ons een rij verzamelingen, waaraan het mogelijk zal zijn een conditie op te leggen, zoodat L^* een continuüm is.

STELLING XIX. *Indien L^* niet leeg is, is er altijd aan te geven een normale rij verzamelingen $E_n \subset C_n$, zoodanig, dat $\lim. E_n = L^*$.*

Bewijs: Zij ε_n het maximum van de afstanden der verschillende punten van L^* tot C_n . Daarmee is dus gedefinieerd een rij van getallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, zoodat $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Immers was $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \neq 0$, dan zou dit beteekenen, dat ε_n voor oneindig veel waarden van n groter was dan $\varepsilon > 0$. Voor oneindig veel waarden van n zou dan het maximum der afstanden der verschillende punten van L^* tot C_n groter dan ε zijn. Overdekken we L^* echter met een eindig aantal

bollen, wier straal $\frac{1}{2}\varepsilon$ is, dan dringt C_n voor $n > N$ in al die bollen, waaruit volgt, dat het maximum der afstanden der verschillende punten van L^* tot C_n voor $n > N$ kleiner dan ε is. Dit is strijdig met de gemaakte onderstelling, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Zij E_n nu de verzameling der punten van C_n , die op een afstand $\leq \varepsilon_n$ van L^* liggen. E_n is, zooals blijkt uit de definitie van ε_n , niet leeg.

We zullen nu aantoonen, dat de rij E_n normaal is en dat $\lim E_n = L^*$.

Is P een punt van L^* en leggen we daarom een bol Ω dan is er een ε , zoodanig dat een bol met straal ε om P geheel binnen Ω ligt. Verder is te bepalen een natuurlijk getal N , zoodat voor iedere $n > N$, $\varepsilon_n < \varepsilon$. Een bol met straal ε om P heeft dus met E_n voor $n > N$ minstens één punt gemeen. De bol Ω heeft dus ook een punt met E_n voor $n > N$ gemeen. Dit geldt voor elk punt P en voor elke bol Ω om P , m.a.w. de rij E_n heeft alle punten van L^* tot normale limiet.

Omgekeerd kan een punt buiten L^* niet limietpunt zijn voor de rij E_n , want was A zoo'n punt, dan is daarom een bol te leggen, zoodanig dat elk punt daarbinnen een afstand $> \varepsilon_n$ tot L^* heeft, m.a.w. voor $n > N$ blijft E_n buiten die bol. Hieruit volgt dus dat $\lim E_n = L^*$.

§ 29. Zij weer gegeven een rij continua $C_1, C_2, C_3, \dots$ en laten de verzamelingen E_n dezelfde beteekenis hebben als in § 28.

STELLING XX. Noodig en voldoende, dat L^* een continuum is, is dat E_n ε -samenhangend is, waarbij ε met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert.

De voorwaarde is noodig. Zij L^* een continuum. L^* is te overdekken met een eindig aantal bollen, wier straal $\frac{1}{4}\varepsilon$ is. Daar de rij E_n normaal is, dringt E_n voor $n > N$ in al die bollen door. Deze bollen, vormen een samenhangend gebied. Splitsen we dus E_n in twee deelen E'_n en E''_n dan is de onderste grens van de afstanden van punten van E'_n tot punten van E''_n kleiner dan ε . Aangezien dit geldt voor elke ε , is de voorwaarde dus noodig.

De voorwaarde is voldoende. Was L^* geen continuum, dan was $L^* = L_1 + L_2$. L_1 en L_2 zijn gesloten, niet leeg en hebben geen punt gemeen. Er bestaan omgevingen Ω_1 en Ω_2 van L_1 en L_2 , die een afstand $\varepsilon > 0$ hebben. Daar de rij E_n normaal is, dringt E_n voor $n > N$ in Ω_1 en Ω_2 en is geheel bevat in $\Omega_1 + \Omega_2$. Hieruit zou volgen, dat E_n voor $n > N$ gesplitst was in twee deelverzamelingen, wier afstand grooter dan ε is. Dit is in strijd met het gegeven, dat E_n ε -samenhangend is, waarbij ε met $\frac{1}{n}$ tot nul nadert. De voldoendeheid der voorwaarde is dus aangetoond.

HOOFDSTUK IV

Slotopmerkingen

§ 30. Zij gegeven een rij van rijen puntverzamelingen.

R_1	$V_{11},$	$V_{12},$	$V_{13},$		limiet L_1
R_2	$V_{21},$	$V_{22},$	$V_{23},$		„ L_2
R_3	$V_{31},$	$V_{32},$	$V_{33},$		„ L_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
					
	limiet K_1	limiet K_2	limiet K_3		

L_1 is met een eindig aantal bollen met straal ε te overdekken.

L_2 is met een eindig aantal bollen met straal ε te
: overdekken.

:
enz.

Voor $n > N_1$ bevindt zich V_{1n} in de bollen, die L_1 overdekken.

Voor $n > N_2$ bevindt zich V_{2n} in de bollen, die L_2
: overdekken.

:
enz.

Definitie: Men zegt, dat de rijen $R_1, R_2, R_3, \dots$ gelijkmatig of uniform tot haar limieten convergeeren, als het mogelijk is bij een gegeven positief getal ε een natuurlijk getal N te bepalen, zoodanig, dat voor $n > N$ en voor elke p V_{pn} zich bevindt in de bollen met straal ε , die L_p overdekken.

Schrijft men deze rij van rijen puntverzamelingen b.v. door middel van de diagonaalmethode als een enkele rij en noemen we daarvan de limiet L , dan is altijd:

$$L \supset S(L_1, L_2, L_3, \dots)$$

De vraag dringt zich op: onder welke voorwaarden zal

$$L = S(L_1, L_2, L_3, \dots)?$$

Direct valt het volgende op te merken. Zijn onder de $L_1, L_2, L_3, \dots$ oneindig veel verschillende dan laten deze een niet ledige limietverzameling L' toe, waarvan men onmiddellijk inziet, dat deze tot L behoort. Slechts in zeer speciale gevallen b.v. als er onder de $L_1, L_2, L_3, \dots$ slechts een eindig aantal verschillende voorkomen of als $L' \subset S(L_1, L_2, L_3, \dots)$. zal $L = S(L_1, L_2, L_3, \dots)$ kunnen zijn.

§ 31. Men kan zich nu de vraag stellen: onder welke voorwaarden zal

$$L = S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)?$$

Een voldoende (niet noodige) voorwaarde is:

1°. de rijen $R_1, R_2, \dots$ convergeeren gelijkmatig tot haar limieten.

2°. $S(K_1, K_2, \dots) \subset S(L', L_1, L_2, \dots)$.

Bewijs: Daar altijd $L \supset S(L', L_1, L_2, \dots)$ zullen

we nog aantonen, dat in dit geval ook $L \prec S(L', L_1, L_2, \dots)$. Zij l een willekeurig punt van L . In een willekeurige omgeving van l dringen dus oneindig veel verzamelingen V_{pq} door. Er zijn nu 3 gevallen te onderscheiden:

- a) Deze oneindige rij van verzamelingen V_{pq} bevat een oneindige deelrij, waarvan alle eerste indices dezelfde zijn b.v. alle gelijk aan m . Dan behoort l tot L_m , dus tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$.
- b) De rij bevat een oneindige deelrij, waarvan alle tweede indices dezelfde zijn b.v. alle gelijk aan r . Dan behoort l tot K_r , dus tot $S(K_1, K_2, K_3, \dots)$, dus tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$.
- c) Noch aan het onderstelde in *a*), noch aan het onderstelde in *b*) is voldaan. Stel het punt l behoorde niet tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$. De verzameling $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$ is gesloten, want een verdichtingspunt is of een verdichtingspunt van een L_p en behoort dan, omdat L_p gesloten is tot L_p dus tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$, of het is een punt in welker omgeving oneindig vele verzamelingen L_p doordringen en behoort dan dus tot L' , dus tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$. Daar $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$ gesloten is, heeft l een positieve afstand $> \epsilon$ tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$ dus ook tot $L', L_1, L_2, L_3, \dots, K_1, K_2, K_3, \dots$. In een bol met straal $\frac{1}{2}\epsilon$ om l dringt dus noch L' , noch één der $L_1, L_2, L_3, \dots$ of $K_1, K_2, K_3, \dots$ door. Daar l een punt van L is, dringen in die bol oneindig vele verzamelingen V_{pq} door, waarvan we mogen

aannemen, omdat noch aan de voorwaarde in *a*) genoemd, noch aan de voorwaarde in *b*) genoemd voldaan is, dat de indices boven elk van te voren gegeven getal uitkomen.

Elke der limietverzamelingen $L_1, L_2, L_3, \dots$ is met een eindig aantal bollen, wier straal $\frac{1}{2}\varepsilon$ is te overdekken. Wegens de gelijkmatige convergentie der rijen, zal voor $n > N$ en voor elke p V_{pn} zich bevinden in de bollen die L_p overdekken. Dit is in strijd met het feit, dat oneindig vele verzamelingen V_{pq} met steeds toenemende indices in de bol met straal $\frac{1}{2}\varepsilon$ om l doordringen. De onderstelling, dat l niet tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$ behoort is dus onjuist, waaruit dus volgt, dat $L = S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$.

Opmerking 1. Van het onderstelde is de tweede voorwaarde noodig, de eerste niet.

Immers is aan de tweede voorwaarde niet voldaan, dan is er een punt behoorende tot een verzameling K , en dus een punt van L , dat niet behoort tot $S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$, zoodat onmogelijk $L = S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$ kan zijn.

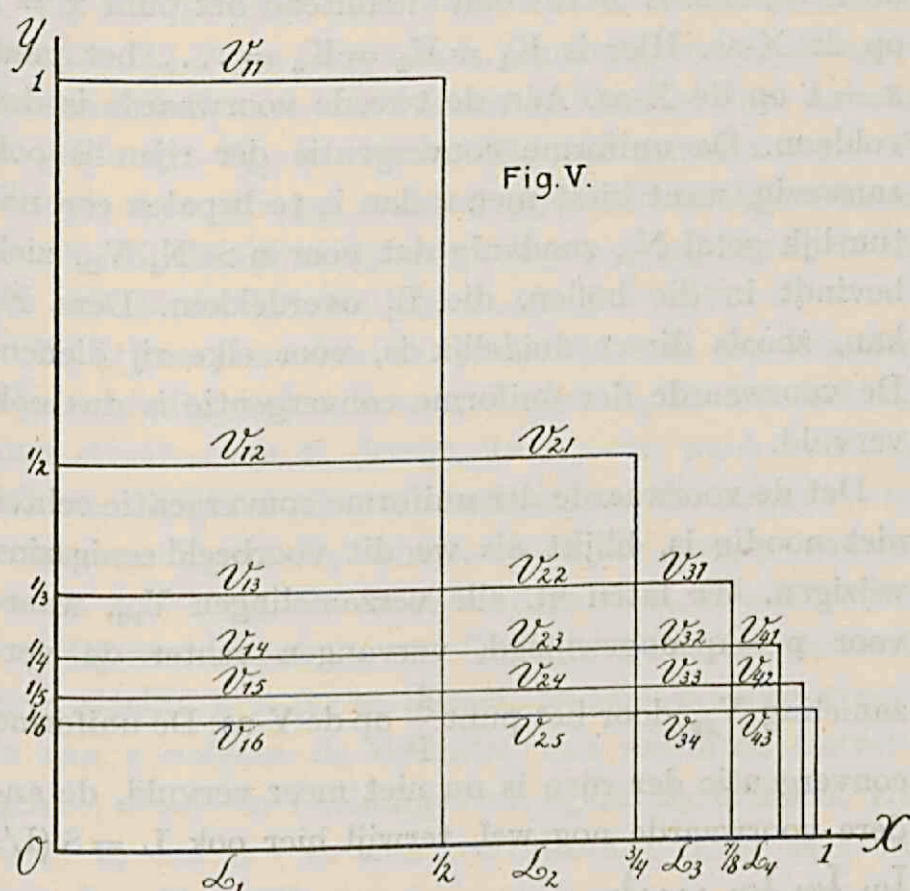
Opmerking 2. Blijkens het bewijs zou in plaats van de gelijkmatige convergentie der rijen, ook die der kolommen voldoende zijn.

Opmerking 3. Is het aantal rijen eindig, dan is aan beide voorwaarden voldaan en daar L' dan leeg is, geldt daarvoor altijd $L = S(L_1, L_2, L_3, \dots)$, wat ook direct in te zien is.

In het volgende zullen we aan een voorbeeld laten

zien, dat de gelijkmatige convergentie der rijen geen noodzakelijke voorwaarde is.

Voorbeelden



Zij (zie fig. V) de verzameling V_{1n} de verzameling der punten $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ op de lijn $y = \frac{1}{n}$, de verzameling V_{2n} de verzameling der punten $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ op de lijn $y = \frac{1}{n+1}$, de verzameling V_{3n} de verzameling der punten $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8}$ op de lijn $y = \frac{1}{n+2}$, enz.

L_1 is dan de verzameling der punten $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ op de X-as, L_2 de verzameling der punten $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ op de X-as, L_3 de verzameling der punten $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8}$ op de X-as, enz. L' bevat dan uitsluitend het punt $x = 1$ op de X-as. Hier is $K_1 = K_2 = K_3 = \dots$ het punt $x = 1$ op de X-as. Aan de tweede voorwaarde is dus voldaan. De uniforme convergentie der rijen is ook aanwezig, want kiest men ε dan is te bepalen een natuurlijk getal N_1 , zoodanig dat voor $n > N_1$ V_{1n} zich bevindt in die bollen, die L_1 overdekken. Deze N_1 kan, zooals direct duidelijk is, voor elke rij dienen. De voorwaarde der uniforme convergentie is dus ook vervuld.

Dat de voorwaarde der uniforme convergentie echter niet noodig is, blijkt als we dit voorbeeld eenigszins wijzigen. We laten nl. alle verzamelingen V_{pq} , waarvoor $p = q$ ongewijzigd, vervangen echter de verzameling V_{pp} door het punt $\frac{1}{p}$ op de Y-as. De uniforme convergentie der rijen is nu niet meer vervuld, de andere voorwaarde nog wel, terwijl hier ook $L = S(L', L_1, L_2, L_3, \dots)$.

Ten slotte ziet men nog aan dit voorbeeld, dat de kolommen ook niet gelijkmatig tot haar limiet convergeeren. Ook dit is dus niet noodig.

§ 32. We zullen zoo'n rij van rijen nog eens van een ander standpunt bezien. We beschouwen weer het schema van § 30.

STELLING XXI. *Zijn de rijen normale rijen en*

convergeeren deze gelijkmatig tot hun limiet dan is de ruime limiet der K 's = de enge limiet der K 's = de ruime limiet der L 's.

Zij K^* de enge limiet der K 's, L de ruime limiet der L 's. Zij P een punt van L . Oneindig veel L_n dringen in een bol B_1 met straal ε om P . Voor al deze indices n geldt dat V_{np} in een bol B_2 met straal 2ε om P dringt voor $p > p_0$, waarbij p_0 onafhankelijk van n is. Dus K_p dringt in B_2 voor iedere $p > p_0$, dus P zit in de enge limiet K^* der K 's, m.a.w. $L \subset K^*$.

Zij Q een punt van de ruime limiet K der K 's. Er zijn oneindig veel indices p , zoodat K_p in een bol B_3 met straal ε om Q dringt. Is A_p een punt van K_p binnen B_3 , dan zijn er oneindig veel nummers n , waarvoor V_{np} in B_3 dringt. Nu kieze men p van te voren zoo hoog, dat voor al deze n L_n steeds in een bol B_4 met straal 2ε om Q dringt; daartoe behoeft men slechts $p > p_0$ te kiezen, waarin p_0 toegevoegd is aan ε volgens de definitie van uniforme convergentie. Daar nu oneindig veel L_n in B_4 dringen, zit Q in L , dus $K \subset L$. Men heeft dus $L \subset K^* \subset K \subset L$, dus $L = K = K^*$.

De K -rij is dus normaal en heeft de ruime limiet der L -rij tot limiet.

Nemen we eens als bijzonder geval, dat ook de kolommen uniform tot haar limiet convergeeren en tevens normaalreeksen zijn. Dan is dus $L = K = L^* = K^*$ en men ziet gemakkelijk in, dat het geheele tableau geen limietpunt heeft buiten $S(L, L_1, L_2, L_3, \dots, K_1, K_2, K_3, \dots)$

§ 33. We zullen ten slotte enkele opmerkingen maken over de limiet van een rij vlakke continue krommen. Onder een continue kromme verstaan we een puntverzameling die het continue beeld is van een lijnsegment. Zooals bekend is, is een puntverzameling M het beeld van een andere puntverzameling N , wanneer aan elk punt van N een punt van M toegevoegd is, zoodanig dat ook aan elk punt van M minstens één punt van N toegevoegd is. Verder is M het continue beeld van N , als die toevoeging aan de volgende voorwaarde voldoet: is Q een punt van N , waaraan P van M is toegevoegd, is verder Q_n een veranderlijk punt van N , waaraan P_n van M is toegevoegd, dan zal als Q_n in een omgeving δ van Q ligt, P_n in een omgeving ε van P liggen, waarbij ε met δ tot nul nadert.

Onder N verstaan we nu het eenheidssegment $0 \leq t \leq 1$ eener t -as. Onder M een puntverzameling in het XY -vlak. M is nu het continue beeld van het eenheidssegment, als er twee continue functies $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bestaan, zoodanig, dat als t het eenheidssegment doorloopt, het punt van het XY -vlak met coördinaten $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ minstens eenmaal met elk punt van M samenvalt.

Het continue beeld van een gesloten samenhangende verzameling is zooals bekend is weer gesloten en samenhangend. Is M het continue beeld van het eenheidssegment dan moet M dus een continuüm zijn. Dat deze voorwaarde niet voldoende is, is door Hahn be-

wezen¹. Er is nl. nog een voorwaarde noodig wil een continuüm een continue kromme zijn. Het is de volgende:

Is P een punt van M , dan behoort bij elk positief getal ε een positief getal η , zoodanig dat elk in de omgeving η van P liggend punt P' van M met P verbonden kan worden door een continuüm, dat deel is van M en dat geheel in de omgeving ε van P ligt. Een verzameling, die in elk harer punten deze eigenschap bezit zullen we met Hahn „samenhangend in het kleine” noemen. We zullen hier het bewijs van Hahn geven, dat deze voorwaarde noodig is, wil een continuüm een continue kromme zijn.

Stel M was niet in 't kleine samenhangend, dan was er minstens één punt P van M , dat de bovengenoemde eigenschap niet heeft. Dit wil zeggen, er bestaat een positief getal ε , zoodanig dat er in iedere omgeving van P punten P' van M liggen, zoodanig, dat elk continu deel van M , dat zoowel P als P' bevat, ook punten buiten de omgeving ε van P bevat. Laat $P'_1, P'_2, \dots$ een rij verschillende van dergelijke punten zijn met $\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n = P$. Daar M het continue beeld van het eenheidssegment is, is elk punt P'_n beeld van minstens één punt daarvan, b.v. van t'_n . Op het eenheidssegment hebben we nu oneindig vele verschillende punten $t'_1, t'_2, \dots$ die dus minstens

¹ H. Hahn, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Dl. 23, 1914 en Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Abt. IIa, Dl. 123, 1914.

één verdichtingspunt t' hebben. In de rij der t'_n is dus een deelrij $t'_{n_1}, t'_{n_2}, \dots$ zoodat $\lim_{i \rightarrow \infty} t'_{n_i} = t'$.

Wegens de continuïteit der afbeelding wordt noodzakelijk t' op P afgebeeld. Het segment $t'_{n_1}t'$ wordt op een continu deel van M afgebeeld, dat zoowel het punt P als het punt P'_{n_1} bevat. Nu zijn echter de coördinaten van het aan het punt t van het eenheidssegment toegevoegde punt van M continue functies $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ van t ; er bestaat dus een positief getal δ , zoodat voor $|t - t'| < \delta$

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad |\psi(t) - \psi(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Daar $\lim_{i \rightarrow \infty} t'_{n_i} = t'$ bestaat er echter een getal i_0 , zoodat

$$|t'_{n_i} - t'| < \delta \quad \text{voor } i \geq i_0 \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt echter dat voor $i \geq i_0$ alle punten van het segment $t'_{n_i}t'$ in de omgeving ε van het beeldpunt P van t' (d.i. van het punt met coördinaten $x = \varphi(t')$, $y = \psi(t')$) afgebeeld worden. Voor $i \geq i_0$ bevindt zich dus in de omgeving ε van P een continu deel van M , dat zoowel P als P'_{n_i} (het beeldpunt van t'_{n_i} met coördinaten $x = \varphi(t'_{n_i})$, $y = \psi(t'_{n_i})$) bevat. Dit is echter in strijd met de gemaakte onderstelling. De samenhang in 't kleine is dus noodzakelijk.

Dat de samenhang in 't kleine ook voldoende is, wil een continuüm een continue kromme zijn, wordt ook door Hahn bewezen. Voor het nogal uitvoerige bewijs verwijzen we den lezer naar de reeds genoemde „Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.”

§ 34. Een eenvoudig voorbeeld van een continuüm, dat niet in 't kleine samenhangend is levert de verzameling der punten van de kromme $y = \sin \frac{1}{x}$ ($0 < x \leq 1$) aangevuld met de punten der Y-as waarvoor $-1 \leq y \leq 1$. In alle punten van dit laatste segment bestaat geen samenhang in het kleine; want is P één of ander punt van dat segment dan bestaat op de kromme $y = \sin \frac{1}{x}$ een rij van punten P_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$; hoe dicht echter P_n ook bij P ligt elk continu deel van de verzameling, dat zoowel P_n als P bevat, moet het tusschen P_n en de Y-as verloopende deel der kromme $y = \sin \frac{1}{x}$ bevatten en blijft dus niet binnen een willekeurig kleine cirkel om P.

Een ander voorbeeld is (zie fig. VI) de verzameling der punten bestaande uit:

1°. de punten der X-as waarvoor $0 \leq x \leq 1$.

2°. de punten der Y-as, waarvoor $0 \leq y \leq 1$.

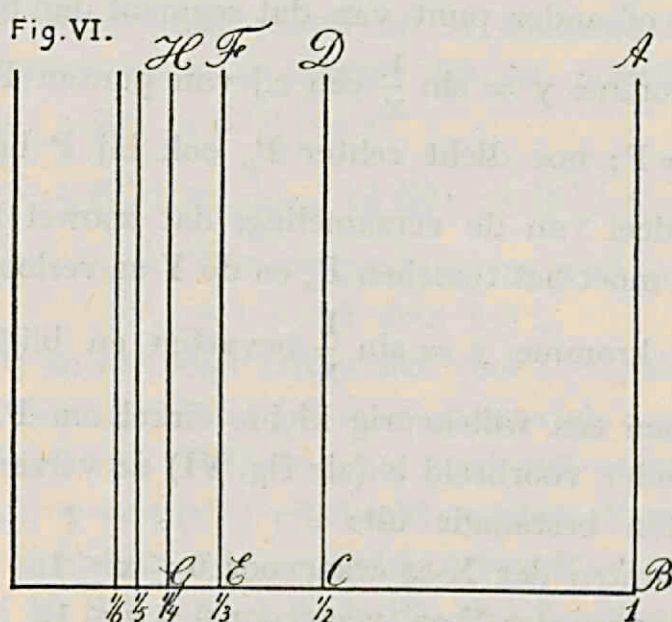
3°. de punten der lijnen $x = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

waarvoor $0 \leq y \leq 1$.

Men ziet direct in, dat samenhang in 't kleine niet bestaat voor de punten der Y-as, waarvoor $0 < y \leq 1$.

§ 35. We zullen nu eens nagaan, wanneer de limiet van een rij continue krommen weer een continue kromme is en zullen ons beperken tot een normale rij van continue krommen C_n . In 't algemeen is nl. de limiet

van een normale rij continue krommen niet een continue kromme. Immers zij (zie fig. VI) C_1 de kromme ABCD, C_2 de kromme ABCDCEF, C_3 de kromme ABCDCEFEFGH enz. De limiet is dan het continuüm in het tweede voorbeeld van de vorige paragraaf genoemd en is dus geen continue kromme, terwijl men direct inziet, dat de rij normaal is.



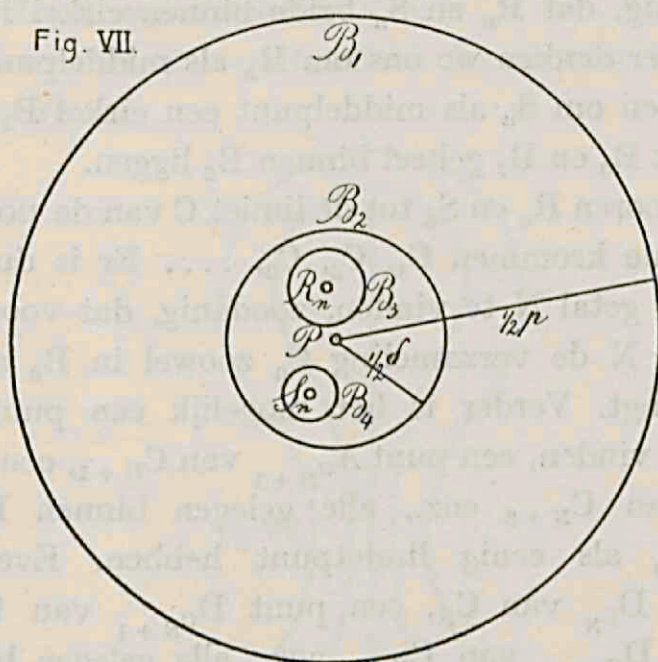
Alvorens een stelling over de limiet van een normale rij continue krommen te formuleeren merken we op dat de limiet daarvan altijd een continuüm is. Indien we onder $|P_n - P'_n|$ verstaan de afstand van P_n tot P'_n dan geldt de volgende

STELLING. XXII. *De limiet C van een normale rij continue krommen C_n is zelf een continue kromme, als, P_n en P'_n twee punten van C_n zijnde, er voldaan is aan de volgende voorwaarde: aan ieder positief getal ϵ is een*

positief getal δ toegevoegd, zoodat uit de ongelijkheid $|P_n - P'_n| < \delta$ volgt dat de diameter van een tot C_n behoorend continuum dat P_n en P'_n verbindt kleiner dan ε is hetgeen onafhankelijk van n moet gelden.

Bewijs: Er moet bewezen worden, dat de limiet C_1 samenhangend in 't kleine is. Ontkenning hiervan brengt mee, dat er twee tot C behorende puntreeksen $R_1, R_2, R_3, \dots$ en $S_1, S_2, S_3, \dots$ zijn, zoodanig dat $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n - S_n| = 0$, terwijl een van nul verschillend positief getal p is aan te geven, zóó dat voor geen waarde van n de punten R_n en S_n deel uitmaken van een tot C behoorend continuum met diameter $\leq p$.

Fig. VII.



Zij P een limietpunt van de puntreeks $R_1, R_2, R_3, \dots$ dan is P ook limietpunt van de reeks $S_1, S_2, S_3, \dots$. We mogen, zonder aan de algemeenheid te kort

te doen, aannemen dat P het eenige limietpunt der beide reeksen is. Ware dit nl. niet het geval, dan zouden we deelreeksen kunnen beschouwen, die slechts een enkel limietpunt hebben.

Denken we ons om P als middelpunt een cirkel B_1 met straal $\frac{1}{2} p$.

Aan het in de stelling genoemde positieve getal ε geven we de waarde $\frac{1}{3} p$. Hieraan is dan op grond van het onderstelde toegevoegd een positief getal δ . Men ziet direct, dat $\delta < \varepsilon$ en dus $\delta < \frac{1}{3} p$. Om P als middelpunt denken we ons een tweeden cirkel B_2 met straal $\frac{1}{2} \delta$. Vervolgens bepalen we een natuurlijk getal n , zoodanig, dat R_n en S_n beide binnen cirkel B_2 liggen. Verder denken we ons om R_n als middelpunt een cirkel B_3 en om S_n als middelpunt een cirkel B_4 , zoodanig, dat B_3 en B_4 geheel binnen B_2 liggen.

Nu behooren R_n en S_n tot de limiet C van de normale rij continue krommen $C_1, C_2, C_3, \dots$. Er is dus een natuurlijk getal N te vinden, zoodanig, dat voor elke index $q \geq N$ de verzameling C_q zoowel in B_3 als B_4 binnendringt. Verder is het mogelijk een punt A_{C_N} van C_N te vinden, een punt $A_{C_{N+1}}$ van C_{N+1} , een punt $A_{C_{N+2}}$ van C_{N+2} enz., alle gelegen binnen B_3 en welke R_n als eenig limietpunt hebben. Eveneens een punt D_{C_N} van C_N , een punt $D_{C_{N+1}}$ van C_{N+1} , een punt $D_{C_{N+2}}$ van C_{N+2} enz., alle gelegen binnen B_4 en welke S_n als eenig limietpunt hebben.

De afstand van $A_{C_{N+1}}$ tot $D_{C_{N+1}}$ is voor elke l kleiner dan δ en deze punten zijn dus te verbinden door een

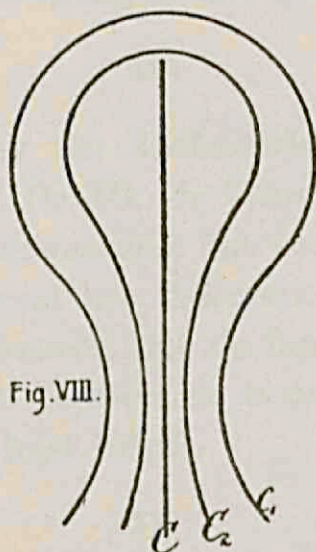
continuum $K_{C_{N+1}}$ dat deel is van C_{N+1} en welks diameter $< \frac{1}{3} p$ is, zoodat $K_{C_{N+1}}$ dus geheel ligt binnen cirkel B_1 . De limietverzameling K van deze continua ligt dus geheel binnen of op cirkel B_1 en heeft dus een diameter $\leq p$.

We memoreeren nog even de in § 19 genoemde stelling van Zoretti in eenigszins gewijzigde vorm:

Zij F_n een reeks punten met limietpunt F . Behoort F_n voor elke n tot een continuum V_n dan is de limiet V van V_n een continuum.

Dit toegepast levert hier dat de limietverzameling K een continuum is. Verder bevat K de punten R_n en S_n en heeft een diameter $\leq p$.

Hiermee is een contradictie bereikt en de stelling dus bewezen.



Opmerking: De conditie is niet noodzakelijk, zooals blijkt uit bovenstaande figuur.

STELLINGEN

I

De uitdrukking van Zoretti: "un point limite pour tous les E_n " is slordig.

Zoretti: Leçons sur le prolongement analytique blz. 27.

II

Is de maat van de limiet van een rij puntverzamelingen $V_1, V_2, V_3, \dots$ nul, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu V_n = 0$. Het omgekeerde dezer stelling is niet juist.

III

In het Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening van Prof. Dr. Hk. de Vries wordt op blz. 345 (§ 77) onder de voorwaarden, dat voor een functie $f(x)$ in een zeker interval het theorema van Rolle geldt, genoemd de voorwaarde, dat de functie bij gedeelten monotoon is. Deze voorwaarde is overbodig en voert hier tot een niet juist bewijs.

IV

In dezelfde paragraaf van het bovengenoemde leerboek wordt een voorbeeld gegeven van een functie,

II

wier grafische voorstelling in een punt twee raaklijnen bezit en gezegd, dat in dat punt de afgeleide niet eenwaardig is. Dit is onjuist. De functie heeft in dat punt geen afgeleide.

V

Het bewijs, dat Borel geeft van het theorema van Cantor-Bendixson is niet juist.

Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles blz. 5.

VI

De definitie, die Hausdorff van een gebied geeft werkt verwarrend.

F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre blz. 215.

VII

De definitie van een oneindig kleine grootheid wordt vaak foutief gegeven.

Zie o.a. Dr. Chs. van Os: Het oneindige.

VIII

“Nun bemerke man, dasz wenn C_1 , und C_2 zwei Punktmengen sind, die man als Vereinigung von endlich oder abzählbar unendlich vielen perfekten Punktmengen ansehen kann, dasselbe auch für die Vereinigungsmenge $(C_1 \dot{+} C_2)$ und für den Durchschnitt $C_1 C_2$ der Punktmengen C_1 und C_2 zutrifft”.

Het tweede deel dezer bewering is onjuist.

Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen blz. 404.

XI

Het is bewijsbaar, dat de puntenparen van een vlak V niet $(1,1)$ en algebraïsch afbeeldbaar zijn op een platte R_4 .

X

Het vervangen van den naam "omhullende" door "omhulde" is voor de wiskunde van geen beteekenis. Beide namen zijn te verdedigen.

XI

De methode van Czuber voor de bepaling der omhullende van een systeem vlakke krommen wordt door Wieleitner onvoldoende bewezen.

Wieleitner: Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung blz. 49.

XII

Het verlangen om de met behulp van hoogere wiskunde bereikte resultaten ook langs elementairen weg te verkrijgen, leidt in vele leerboeken der natuurkunde tot waardelooze afleidingen.

Zie o.a. in Müller Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie de afleiding voor het traagheidsmoment van een staaf wentelende om een uiteinde.

XIII

De theoretische verklaring van G. Klein voor de vermindering der wrijving bij een roteerenden zuiger is onjuist.

G. Klein: Untersuchung und Kritik von Hochdruckmessern blz. 18.

XIV

Aan middelbare scholen, waar een litterair economische afdeeling bestaat en in plaatsen, waar afzonderlijke litterair-economische scholen bestaan, dient de facultatiefstelling der Mechanica in de vijfde klasse aan de mathematisch-physische afdeeling, respectievelijk school, te vervallen.

