Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

# Onregelmatige straalkromming

https://hdl.handle.net/1874/283118

A. 4° 192 1925

# ONREGELMATIGE STRAALKROMMING

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

DR. M. G. J. MINNAERT

A. qu.
192

# ONREGELMATIGE STRAALKROMMING

RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT
2494 413 8

A. qu. 192, 1925

# ONREGELMATIGE STRAALKROMMING

**PROEFSCHRIFT** TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN **DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE** AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. H. F. NIERSTRASZ, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 6 JULI 1925, DES NAMIDDAGS 3 UUR, DOOR

**DR. MARCEL GILLES JOZEF MINNAERT,**

GEBOREN TE BRUGGE (VLAANDEREN).

—o—

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

ELECTR. DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE" J. VAN DRUTEN — UTRECHT
1925

AAN DE NAGEDACHTENIS VAN

Prof. Dr. W. H. JULIUS.

Het verschijnen van dit proefschrift geeft mij gelegenheid mijn dank te betuigen aan allen die tot mijn vorming als natuurkundige hebben bijgedragen, en die mij zoo hartelijk hebben ontvangen in de Noordelijke helft van ons Nederlandsche vaderland.

Hooggeleerde JULIUS, Uw aandenken blijft mij onvergetelijk. Het is mij een onschatbaar voorrecht geweest onder den invloed van Uw edele persoonlijkheid te komen, en zoovele jaren onder Uw rechtstreeksche leiding te mogen werken. Wat dit voor mij beteekend heeft, kan ik niet in korte woorden tot uitdrukking brengen. De geestdrift die U voor de studie der zonnephysica bezielde, hebt Gij ook aan mij weten mede te deelen, en het zal mijn streven zijn, in Uw geest verder te werken. Dat ik U dit proefschrift, waarin Gij zoo warm belang steldet, niet voltooid heb kunnen aanbieden, is mij zeer smartelijk geweest. Uw heengaan laat een blijvende leemte in mijn leven.

Hooggeleerde ORNSTEIN, ik dank U voor de bereidwilligheid waarmede Gij de taak van Promotor hebt willen overnemen; na het overlijden van Prof. JULIUS kon niemand mij als zoodanig liever zijn dan U. Gaarne zou ik dit proefschrift meer in bijzonderheden aan Uw oordeel hebben onderworpen, doch de omstandigheden maakten dit moeilijk; voor de nuttige wenken die Gij mij nog hebt gegeven, ben ik U zeer verplicht. Het is mij een behoefte hier mijn bewondering uit te spreken voor de groote kracht die van U uitgaat, voor Uw liefde tot

de natuurkunde; ik verheug er mij op verder onder Uwe leiding te mogen werken.

Aan alle andere Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde te Leiden en te Utrecht, wier onderwijs ik heb mogen genieten, betuig ik hierbij mijn erkentelijkheid.

Vrienden van het Physisch Laboratorium te Utrecht, U allen dank ik voor den echt kameraadschappelijken omgang dien ik steeds met U hebben mocht. Deze vriendschap geeft kracht om de moeilijkheden van het wetenschappelijke werk te overwinnen, en maakt de beoefening der wetenschap tot een genot.

# INHOUD.

INLEIDING . . . . . 1

HOOFDSTUK I.

**De integraalvergelijking en de differentiaalvergelijking der onregelmatige straalkromming.**

§ 1. De afleiding der algemeene vergelijkingen . . . 8
§ 2. De differentiaalvergelijking toegepast op een dampkring begrensd door twee evenwijdige vlakken . . 15
§ 3. De differentiaalvergelijking toegepast op een bol . 20

HOOFDSTUK II.

**De uitspreiding van één enkelen bundel.**

§ 4. De uitspreiding van één enkelen *oneindig breeden* bundel, in een dampkring begrensd door twee evenwijdige vlakken . . . . . 28
§ 5. De uitspreiding van een *naaldvormigen* bundel in een dampkring van overal gelijken uitspreidingscoëfficiënt . . . . . 34
§ 6. De uitspreiding van een naaldvormigen bundel *in een laagsgewijs opgebouwden dampkring* . . . . 46
§ 7. De samenwerking van *regelmatige en onregelmatige breking* bij het krommen en uitspreiden van een bundel . . . . . 59
§ 8. De uitspreiding van een *schuin invallenden* bundel, in een dampkring begrensd door twee evenwijdige vlakken . . . . . 67

## HOOFDSTUK III.

### Toepassing van de theorie der onregelmatige straalkromming op zonneverschijnselen.

Bladz.

§ 9. De invloed der onregelmatige straalkromming op de lichtverdeeling over de zonneschijf . . . . 76

§ 10. Het vraagstuk van den scherpen zonsrand . . . 93

## AANHANGSEL.

§ 11. De onregelmatige straalkromming als niet-omkeerbaar proces; „makroskopische" en „mikroskopische" beschouwingen . . . . . 114

§ 12. Enkele proeven betreffende onregelmatige straalkromming . . . . . 128

# INLEIDING.

**Onregelmatige terugkaatsing, breking, straalkromming. Verstrooiing. —**

Wanneer een lichtbundel op een plaatje matglas valt, wordt hij door de kleine onregelmatigheden van het oppervlak in alle richtingen verspreid. Het verschijnsel aan de achterzijde van de matglazen plaat duiden wij aan door de uitdrukking „*onregelmatige breking*"; het verschijnsel aan de voorzijde, door „*onregelmatige terugkaatsing*". Dergelijke verschijnselen kunnen wij waarnemen, wanneer wij een glazen bakje vullen met stukjes glas, en daar een lichtbundel op laten vallen. Ieder scherfje werkt op geheel onregelmatige wijze, maar tezamen geven zij aanleiding tot een bepaalde gemiddelde lichtverdeeling. De onderdeelen van den bundel worden hier niet ieder éénmaal, maar een groot aantal malen gebroken en teruggekaatst. Dit is de meest onregelmatige vorm van het verschijnsel, en men kan verwachten, dat het juist daardoor eenvoudiger te beschrijven zal zijn dan de werking van een matglazen plaat.

Bij de proef met de glasscherfjes werken onregelmatige breking en onregelmatige terugkaatsing *samen*. De onregelmatige terugkaatsing *alleen* kan men waarnemen, indien men de glasklompjes vervangen denkt door dunne glasplaatjes, gebroken mikroskoopdekglaasjes bijvoorbeeld. De stralen ondergaan daarin geen noemenswaarde afwijkingen, maar worden in alle richtingen gespiegeld.

Ook de onregelmatige breking kan men alleen laten werken. In een groot aquarium mengen wij een geconcentreerde oplossing keukenzout met water; bij het door elkaar roeren van de vloeistoffen wordt de heele massa eigenaardig troebel; een lichtbundel, die door het aquarium wordt gestuurd, wordt

penseelvormig uitgespreid. De lichtuitspreiding is hier alleen te wijten aan het verschil in optische dichtheid van naburige nog onvermengde slieren, zoutoplossing en water, waardoor de stralen in allerlei richtingen gaan krommen en afwijken. Terwijl de eigenlijke onregelmatige breking altijd gepaard gaat met onregelmatige terugkaatsing, is deze *onregelmatige straalkromming* niet met andere verschijnselen vermengd. Het kenmerkende is, dat de brekingsaanwijzer hier geleidelijk verandert, en niet merkbaar van waarde verschilt voor twee punten op den afstand eener golflengte. [1]) De onregelmatige straalkromming is het, waaraan wij in het vervolg onze aandacht willen wijden.

Het onderscheid tusschen onregelmatige breking en onregelmatige terugkaatsing vervalt, wanneer de korreltjes die het licht verstrooien van de afmetingen der golflengte of kleiner worden; dit is het geval bij het fijnste matglas, dat het doorgelaten licht een roodachtige tint geeft. In deze omstandigheden spreken wij van de *verstrooiing* van het licht. Evenals voor de onregelmatige breking en voor de onregelmatige terugkaatsing kunnen wij het verschijnsel niet alleen in één dunne laag, maar in een geheel ruimtegebied laten plaats grijpen: wij kunnen bijvoorbeeld enkele druppels eener alcoholische harsoplossing uitgieten in een groote hoeveelheid water; de roodachtige kleur van het doorgelaten licht, de blauwe tint van het rondom verstrooide, laten ons toe de kleinheid der deeltjes te beoordeelen.

Wij hebben dus onderscheiden:

1. onregelmatige terugkaatsing;
2. „ breking;
3. „ straalkromming;
4. verstrooiing.

Tusschen deze verschijnselen bestaan natuurlijk allerlei overgangen. Maar het is van groot belang voor de theoretische

---

[1]) Een eenvoudig en helder bewijs, waarom in deze omstandigheden geen terugkaatsing plaats grijpt, vindt men bij H. A. LORENTZ, Stralingstheorie, Leiden 1919, blz. 47.

behandeling, in de eerste plaats de zuivere grensgevallen te onderzoeken zooals wij die hier hebben gekenmerkt.

De typische verstrooiing van het licht is sedert RAYLEIGH uitvoerig bestudeerd, zoowel proefondervindelijk als theoretisch. Daarentegen is onze kennis van de onregelmatige terugkaatsing, breking, straalkromming, nog hoogst onvoldoende. Vele dezer vraagstukken zijn van het grootste belang voor andere natuurwetenschappen. De meteoroloog onderzoekt de onregelmatige breking en terugkaatsing met het oog op de verklaring van troebelheid van den dampkring, van de kleur der wolken en den vorm van lichtzuilen; de sterrekundige maakt ervan gebruik bij de theorie der albedo; de technicus doet er metingen over bij projectieschermen en bij allerlei soorten gefigureerd glas en matglas. Deze toepassingen hebben herhaaldelijk aanleiding gegeven tot vruchtbaar onderzoek, maar de literatuur over het onderwerp is moeilijk bereikbaar en zeer verspreid.

**Geschiedkundig overzicht der theorieën betreffende de onregelmatige straalkromming. —**

Voor middenstoffen van doorloopend veranderlijke dichtheid kan de baan van één enkelen straal niet door algemeene formules worden voorgesteld; daarenboven is het de vraag hoe de trillingsrichting van het gepolariseerde licht bij zulke gekromde stralen is. HARZER [1]) en BOUSSINESQ [2]) hebben de regelmatige straalkromming bestudeerd van het standpunt der elastische lichttheorie; SEELIGER [3]) heeft zich op het electromagnetische standpunt geplaatst. Deze schrijvers hebben aangetoond dat het trillingsvlak der aetherdeeltjes altijd denzelfden hoek blijft vormen met het invalsvlak van den lichtstraal; de trilling is transversaal, op termen van hoogere orde na; de gekromde straal behoudt overal dezelfde energie.

De beweringen van AUG. SCHMIDT [4]) over lichtverlies bij

[1]) A. N. N°. 1883, **104**, 2477; 1884, **107**, N°. 2554—2556.
[2]) C. R. 1899, **129**, 859 en 905.
[3]) Phys. Zs. 1904, **5**, 237.
[4]) Phys. Zs. 1903, **4**, 455; 1905, **6**, 528; enz.

regelmatige straalkromming, en de formules die hij zelfs voor dit lichtverlies had opgegeven (!), kunnen als weerlegd worden beschouwd. Hieruit volgt tevens, dat een straal natuurlijk licht door de straalkromming niet gepolariseerd wordt; het onderzoek van FABRY [1]) heeft dit proefondervindelijk bevestigd, en is niet in tegenspraak met de eigenaardige resultaten van GANS. [2])

Van groot belang voor ons is de reeks onderzoekingen betreffende het fonkelen der sterren, welke wij aan verscheidene natuurkundigen, meteorologen en astronomen te danken hebben. [3]) De dampkring der aarde, met zijn afwisselend heetere en koudere lagen, met zijn windstroomingen en zijn verschillen in vochtigheidsgehalte, is een typisch voorbeeld van een middenstof die onregelmatige straalkromming veroorzaakt. De scintillatie blijkt te bestaan uit een schijnbare plaatsverschuiving, een intensiteitsverandering, en een kleurwisseling van de sterren; bij sterke scintillatie bedraagt de schommeling tot $\pm$ 7″, normaal zijn schommelingen van $\pm$ 4″ met een periode van de orde van enkele tijdsecunden. De luchtslieren blijken een gemiddelde grootte te hebben van 10—20 cm., de kromtestraal der golfvlakken is van de orde 3 Km.

Bij deze studie echter is typisch, dat altijd wordt waargenomen met *kleine* openingen; de grootte van den oogappel bij visueele waarnemingen, de grootte van het objectiefdiaphragma bij den scintillometer (c.a. 4 cm.) zijn van dezelfde orde als de afmetingen der luchtslieren of kleiner. De scintillatiewaarnemingen zijn daarom te bestempelen als een „*mikroskopisch*" onderzoek, in den zin welken wij in het aanhangsel nader zullen toelichten. Zoodra men echter overgaat tot waarnemingen met kijkers van *groote* opening, verdwijnt het fonkelen: iedere ster schijnt verbreed tot een wazig uit-

[1]) C. R. 1907, **145**, 112.

[2]) Ann. der Phys. 1915, **47**, 709.

[3]) Algemeen overzicht in EXNER: Über die Szintillation. Wien 1891. Ook in PERNTER-EXNER: Meteorologische Optik. Wien und Leipzig, 1922; blz. 188—241.

vloeiend vlekje, wit en van onveranderlijke helderheid.[1]) Juist deze laatste soort waarnemingen behoort tot het gebied der onregelmatige straalkromming, dat typisch de „*makroskopische*" waarnemingen beschrijft.

Duidelijk uitgesproken is het begrip der onregelmatige straalkromming voor het eerst door JULIUS, reeds in een zijner allereerste verhandelingen over de zonnetheorie[2]); en het zal stellig een zijner grootste verdiensten blijven, dat hij de gevolgen van dit verschijnsel met zulk een zuivere intuïtie, met zulk een levendig voorstellingsvermogen heeft nagegaan. Door tal van proeven heeft hij zijn opvattingen over de onregelmatige straalkromming gestaafd, en ruim partij getrokken uit de nieuw ontdekte wetten om de verschijnselen op de zon uit te leggen. — In deze zelfde verhandeling van 1900 verklaart hij de chromospheer en de protuberanties door onregelmatige kromming der stralen in de buurt van de Fraunhofer lijnen. In 1902 wijst hij als oorzaak der onregelmatige gradiënten de discontinuïteitsoppervlakken aan, die volgens HELMHOLTZ en EMDEN moeten bestaan in een zich afkoelende, wentelende gasmassa. In 1903 [3]) verklaart hij de duisterheid der Fraunhoferlijnen als in hoofdzaak een gevolg van de onregelmatige straalkromming der sterk breekbare stralen in de buurt der eigenfrequenties van de zonnegassen; en in een geheele reeks verhandelingen [4]) leidt hij hieruit vrijwel alle eigenaardigheden af, die door de waarneming dezer lijnen te voorschijn zijn gekomen. In 1904 [5]) breidt hij deze opvattingen uit tot de spektroskopie der sterren. Tevens laat hij zien dat het algemeene uitzicht der spektro-

[1]) NEWTON, Opticks, 1730; blz. 98 (Lib. I, pars 1, prop. 8, probl. 2). EXNER, Sitzungsber. Wien, 1881, **84**, II, 1060–1064.

[2]) Versl. Akad. Amsterdam, 1900, 8, 510. Phys. Zs. 1901, **2**, 348. Arch. Neerl. 1901, II, t. 4, 155.

[3]) Versl. Akad. Amsterdam, 1903, 650. A. J. 1903, **18**, 50.

[4]) A. J. 1910, **31**, 419; 1911, 1395; 1914, **40**, 1; 1916, **43**, 43; Versl. Akad. Amsterdam, 1915, **24**, 678; 1923, **32**, 487 (met MINNAERT).

[5]) Werken v. h. Gen. ter bev. van Nat., Gen., Heelk. te Amsterdam 1904, 116. Versl. Akad. Amsterdam: 1904, **13**, 138 en 359; 1908, **17**, 193. A. J. 1905, **21**, 278 en 286; 1908, **28**, 360.

heliogrammen volkomen in overeenstemming is met de opvattingen der dispersietheorie. Tenslotte komt er nog een gewichtige verhandeling in 1913 [1]), waarin wordt aangetoond dat de onregelmatige straalkromming van het gewone (witte) zonlicht het verschijnsel van den scherpen zonsrand kan verklaren, ook indien de gemiddelde dichtheid der zonnegassen zeer geleidelijk verandert.

Onder den invloed van deze zonnetheorie, werd de studie der onregelmatige straalkromming te Utrecht door verscheiden natuurkundigen voortgezet en uitgebreid. Ornstein en Zernike [2]) deden een zeer belangrijken stap, door de grondslagen te leggen voor de wiskundige behandeling van het verschijnsel. Van Cittert toonde proefondervindelijk aan [3]), dat de onregelmatige breking van het licht in de buurt van anomale gebieden aanleiding kan geven tot dispersiebanden, en dat deze verplaatsingen kunnen ondergaan welke met de theorie in overeenstemming zijn. Spijkerboer [4]) behandelde de onderlinge verhouding van verstrooiing en onregelmatige straalkromming.

Het was wel geen toeval, dat juist te Utrecht het onderzoek begonnen werd van een verschijnsel dat als een geheel nieuwe toepassing van de onregelmatige straalkromming kan worden beschouwd: de troebelheid der vloeibare kristallen en de eigenaardige wijze waarop zij het licht uitspreiden. R. Riwlin heeft dit verschijnsel zóó verklaard [5]): de moleculen groepeeren zich vanzelf tot zwermen; de richting der deeltjes verandert van de eene groep tot de andere, een straal die uit een bepaald groepje komt en in een bepaalde richting trilt, zal in een naburig groepje gesplitst worden in een gewonen en in een buitengewonen straal; en daar deze beide stralen bij de vloeibare kristallen zeer verschillende brekingsaanwijzers bezitten, zullen zij in verschillende richtingen ge-

[1]) Versl. Akad. Amsterdam, 1913, **22**, 64.
[2]) Versl. Akad. Amsterdam, 1917, **25**, 1478.
[3]) Diss. Utrecht, 1918.
[4]) Versl. Akad. Amsterdam, 1923, **32**, 934.
[5]) Diss. Utrecht, 1923.

kromd worden. De zorgvuldige proeven van R. Riwlin hebben getoond dat deze onregelmatige straalkromming tengevolge van dubbele breking dezelfde wetten schijnt te volgen als de gewone. Mocht deze uitkomst algemeen gelden — en er is alle reden om dit te verwachten —, dan zouden wij in de vloeibare kristallen voortreffelijke onderzoekingsobjekten hebben, om proefondervindelijk al die vraagstukken van onregelmatige straalkromming na te gaan welke te ingewikkeld zijn om door berekening op te lossen.

## HOOFDSTUK I.

## DE INTEGRAALVERGELIJKING EN DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING DER ONREGELMATIGE STRAALKROMMING.

### § 1. DE AFLEIDING DER ALGEMEENE VERGELIJKINGEN.

De wiskundige behandeling van het vraagstuk der onregelmatige straalkromming is voor het eerst aangevat door ORNSTEIN en ZERNIKE, in een korte mededeeling, waarvan de inhoud echter van groot belang is [1]) Wij zullen hunne redeneering volgen en hier en daar iets nader toelichten.

**De grondslagen der theorie. —**

ORNSTEIN en ZERNIKE hebben niet getracht door een of ander bijzonder beeld de slieren in den dampkring te beschrijven; als grondslag voor hunne beschouwingen hebben zij den gezamenlijken invloed genomen van een groot aantal zeer kleine dichtheidsgradiënten. Deze invloed bestaat daarin, dat een bundel oorspronkelijk evenwijdige stralen, na een afstand $l$ te hebben doorloopen, penseelvormig uitgespreid is over de naburige richtingen, zoodat zijn energie verdeeld is over de afwijkingshoekjes $\alpha$ volgens een kansfunctie $\chi(\alpha)$. Heeft de oorspronkelijke bundel de lichtsterkte 1 per oppervlakte-eenheid zijner doorsnede, dan is $\chi(\alpha)\,d\omega$, de lichtsterkte welke onder een hoek $\alpha$ is afgeweken binnen een ruimtehoekje $d\omega$ en dan is $\int \chi(\alpha)\,d\omega = 1$.

Het mooie van de theorie is nu, dat de vorm van de uitspreidingsfunctie $\chi$ voor de verdere redeneering geheel zonder

[1]) Versl. Akad. Amsterdam 1917. **25**, 1478.

belang is, mits slechts de uitspreiding na elk doorloopen wegelementje tot zeer kleine hoeken beperkt blijft, zoodat $\chi(\alpha)$ alleen voor kleine waarden van $\alpha$ een merkbare waarde bezit. Het kenmerkende verschil tusschen de moleculaire verstrooiing en de onregelmatige straalbreking komt hierin tot uitdrukking: bij het ééne verschijnsel wordt een klein deel van het licht naar alle richtingen verstrooid terwijl de hoofdbundel ongehinderd doorgaat; bij het andere wordt de geheele bundel eerst over kleine, dan over langzaam aangroeiende hoeken opengespreid.

Hoe het mogelijk is iets te weten te komen over de uitspreidingswetten zonder onderstellingen over den elementairen opbouw der middenstof, kan men het best nagaan door vergelijking met de theorie van de waarnemingsfouten. Bessel heeft aangetoond [1]), dat men altijd een kromme van Gauss krijgt wanneer een aantal gedeeltelijke fouten samenwerken, die ieder hun eigen, geheel willekeurige frequentiekrommen vertoonen, mits 1°. het aantal gedeeltelijke fouten zeer groot weze, 2°. elk der fouten zeer klein, en 3°. de fouten onafhankelijk van elkaar. De twee eerste voorwaarden zijn stellig vervuld wanneer wij een stralenbundel als geheel beschouwen die een doorsnede heeft, groot t.o. van de ongelijkmatigheden der middenstof. De 3e voorwaarde echter zal onvoldoende vervuld zijn. Een stralenbundel die door een optischen dichtheidsgradiënt dringt, zal een afwijking ondergaan die afhangt van zijn hoek met de gradiëntrichting, en die dus mede bepaald wordt door de vroeger ondergane afwijkingen; wij kunnen de fouten niet als onafhankelijk van elkaar beschouwen. Daar staat echter tegenover dat *gemiddeld* de invloed der verschillende gradiënten wel onafhankelijk is van de helling der stralen; het zal altijd mogelijk zijn een zeker aantal elementairgebieden vereenigd te denken tot een geheel, dat aan elken straal dezelfde uitspreiding geeft, hoe ook de richting weze van dewelke hij aankomt.

Bessel behandelde alleen het geval waarin de gedeeltelijke fouten

[1]) A. N. 1838, **15**, 369, N°. 358, 359.

symmetrische frequentiewetten vertoonen, en PEARSON[1]) is, hiervan uitgaande, tot het besluit gekomen dat de samenwerking van asymmetrische elementairfouten ook een asymmetrie van de resulteerende kromme veroorzaakt. Deze opvatting was geheel onjuist; ook bij asymmetrische elementairfouten is de resulteerende foutenwet symmetrisch, mits aan de voorwaarden 1, 2, 3 voldaan weze. [2]) Dit bevestigt ons in de overtuiging, dat de vorm der afzonderlijke vloeistofslieren zonder belang is, zoodra het op de samenwerking van een groot aantal hunner aankomt. Wij hebben dus alle reden om aan te nemen dat de verdeelingswet $\chi(\alpha)$ den vorm van de foutenwet zal hebben, en in elk geval symmetrisch zal zijn.

In vele gevallen is het doelmatig de vraagstukken der onregelmatige straalkromming te behandelen in het platte vlak als vraagstuk van 2 afmetingen. Wij kunnen ons voorstellen dat de lichtbundel door een zeer lange spleet dringt, en gebroken wordt door lange onregelmatige dichtheidsslieren, die alle als prisma's evenwijdig aan de invalsspleet zijn gericht.

Het uitspreidingsvraagstuk wordt dan onafhankelijk van de lengtecoördinaat dezer slieren, en kan behandeld worden in een vlakke doorsnede, loodrecht op deze richting. Alle rekeningen en voorstellingen worden door deze beschouwingswijze zeer vereenvoudigd. Uit hare studie kunnen de eigenschappen der lichtuitspreiding door onregelmatige straalkromming qualitatief worden gevonden; terwijl quantitatief wel enkele getallenfactoren, maar zelden de algemeene vorm der wetten voor de uitspreiding in de ruimte zal worden gewijzigd.

Omdat het er voor ons op aankwam, de tot hiertoe nog onbekende wetten der onregelmatige breking in hare hoofdtrekken te leeren overzien, hebben wij in het vervolg een belangrijke plaats toegekend aan de twee-dimensionale behandeling. Het ware zeer wenschelijk die naderhand nog in elk onderdeel tot de onregelmatige straalkromming in de ruimte uit te breiden.

---

[1]) Phil. Trans. 1895, **186**, 344.

[2]) CROFTON, Phil. Trans. 1869, **160**, 175. — KAPTEIJN: Skew Frequency Curves, Groningen, 1903; blz. 5—11 — ORNSTEIN en BURGER, Versl. Akad. Amst. 1919, 28, 183.

**Uitspreiding in 2 afmetingen.** —

Beschouw een stralenbundel die door het punt $P_2$ gaat en daar een hoek $\vartheta$ met de $x$-as maakt (fig. 1). Deze straling is afkomstig van stralen $f(x, y, \vartheta')$ uit de buurt van $P_1$ $(x, y)$, die vandaar onder ietwat verschillende hoeken $\vartheta'$ vertrokken zijn, en die, wanneer zij een lengte $l$ hebben afgelegd en in $P_2$ zijn aangekomen, door onregelmatige straalkromming een afwijking $\vartheta - \vartheta' = \alpha$ hebben ondergaan en ieder een breukdeel $f(x, y, \vartheta')\,\chi(\alpha)\,d\vartheta'$ in de richting $\vartheta$ bijdragen. De straling in $P_2\,(x + l\cos\vartheta,\ y + l\sin\vartheta)$ is de som van al die bijdragen; dus krijgen wij de integraalvergelijking:

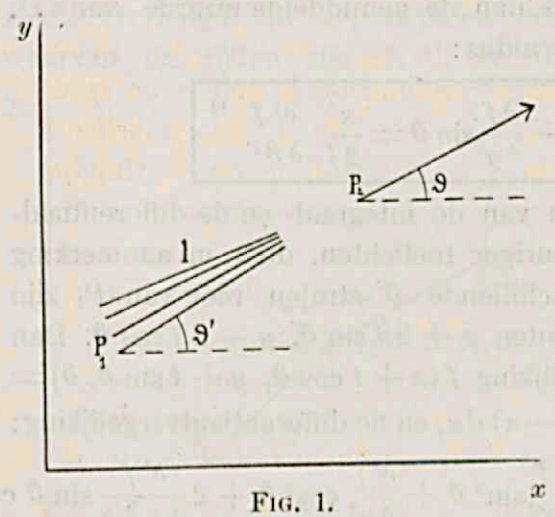


FIG. 1.

$$(1)\qquad f(x + l\cos\vartheta, y + l\sin\vartheta, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\alpha)\, f(x, y, \vartheta - \alpha)\, d\alpha.$$

Aangenomen is, dat de verschillende stralen die van punten in de buurt van $P_1$ vertrekken, alleen tengevolge van hun $\vartheta'$-verschil een verschil in sterkte vertoonen. Het verschil in hun $x$- en $y$-coördinaten kan verwaarloosd worden tegenover de verandering die deze coördinaten ondergaan bij overgang van $P_1$ naar $P_2$.

Deze integraalvergelijking, afgeleid in de onderstelling dat de afwijkingshoeken $\alpha$ klein zijn, kan in dit geval tot een differentiaalvergelijking worden omgevormd. Wij ontwikkelen beide leden en vinden:

$$f(x, y, \vartheta) + l\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta\right) = f(x, y, \vartheta)\int \chi(\alpha)\, d\alpha$$

$$- \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\int \chi(\alpha)\,.\,\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}\int \chi(\alpha)\,\alpha^2\, d\alpha.$$

De eerste integraal is gelijk aan 1; de tweede verdwijnt, wegens de symmetrie der kansfunctie $\chi(\alpha)$ (blz. 10); in de derde is de integraal niets anders dan de gemiddelde waarde van $\alpha^2$.

De vergelijking wordt aldus:

$$(2) \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta = \frac{\overline{\alpha^2}}{2l}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}} \text{ [1]}$$

Men kan het ontstaan van de integraal- en de differentiaalvergelijking nog nauwkeuriger toelichten, door in aanmerking te nemen dat de verschillende $\vartheta'$-stralen niet van $P_1$ zijn uitgegaan, maar van punten $x + \alpha l \sin\vartheta$, $y + \alpha l \cos\vartheta$. Dan wordt de integraalvergelijking $f(x + l\cos\vartheta,\ y + l\sin\vartheta,\ \vartheta) = \int \chi(\alpha) . f(x + \alpha l \sin\vartheta,\ \vartheta - \alpha)\, d\alpha$, en de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta = \frac{\overline{\alpha^2} l}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\vartheta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\vartheta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$
$$+ \frac{\overline{\alpha^2}}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\,\partial y}\cos\vartheta + \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\,\partial x}\sin\vartheta\right) + \frac{\overline{\alpha^2}}{2l}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}.$$

Om nu een differentiaalbetrekking te krijgen, moeten de stukjes $l$ oneindig klein gekozen worden; hierbij nadert tevens $\alpha$ tot nul. In de grens vallen de twee eerste termen weg, terwijl de term in $\frac{\overline{\alpha^2}}{l}$ tot een eindige grenswaarde nadert. Wij vinden aldus de vergelijking (2) terug.

## UITSPREIDING IN 3 AFMETINGEN. —

Wij nemen een rechthoekig coördinatenstelsel (fig. 2), en bepalen de richting van een straal $P_2 S$ door zijn hoek $\vartheta = S P_2 X$ met de $x$-as en door den hoek $\Phi$ van het vlak $S P_2 X$ met het vlak $S P_2 Y$ (azimuth). Deze straal is samengesteld uit de bijdragen van verschillende stralen $f(x, y, z, \vartheta', \Phi')$ vertrokken uit de buurt van $P_1\,(x, y, z)$. Door een dergelijke redeneering als tevoren vinden wij de integraalvergelijking

$$(3) \quad f(x + l\cos\vartheta,\ y + l\sin\vartheta\cos\Phi,\ z + l\sin\vartheta\sin\Phi,\ \vartheta, \Phi) =$$
$$= \int \chi(\alpha)\, f(x, y, z, \vartheta', \Phi')\, d\omega'.$$

---

[1] ORNSTEIN en ZERNIKE geven op: $\frac{\overline{\alpha^2}}{4l}$, hetgeen blijkbaar op een rekenfout berust.

Beschouwen wij nu den eenheidsbol met $P_2$ als middenpunt; de richting der $x$-as $P_2 X$, de straal $P_2 S$ en de straal $P_1 P_2$ (verlengd tot $S'$) bepalen een boldriehoek (fig. 3) waarvan de zijden zijn $\vartheta, \vartheta'$, en de afwijkingshoek $\alpha$, en waarvan de hoek $\widetilde{S X S'}$ gelijk is aan $\phi' - \phi$. Bij het integreeren over de verschillende stralen komt het punt $S'$ achtereenvolgens op allerlei plaatsen rond $S$ te liggen, en het integratie-element $d\omega'$ om $S'$ bestrijkt de heele omgeving van $S$, terwijl echter $\alpha$ steeds klein blijft. Noem $\psi$ den hoek $\widetilde{X S S'}$ van den boldriehoek; dan is $d\omega' = \alpha\, d\alpha\, d\psi$.

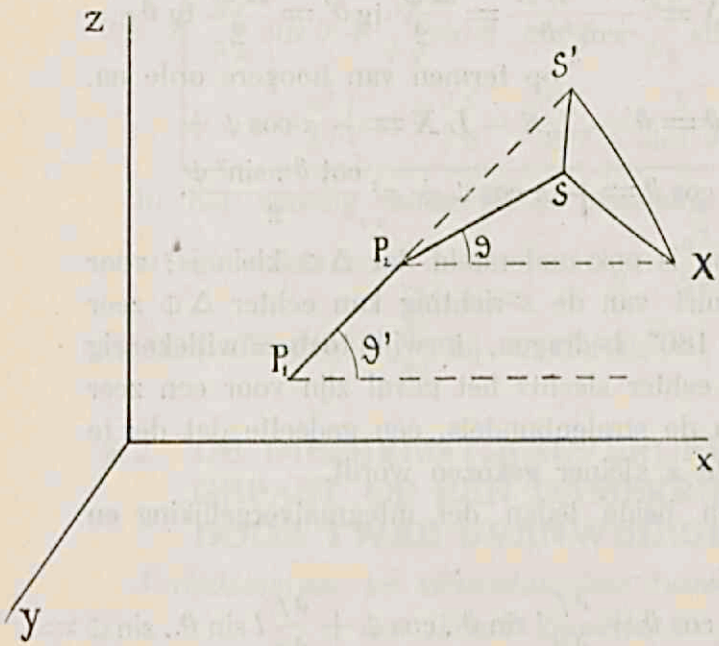



Fig 2.

Wij zullen de verschillen in de hoekcoördinaten van de stralen uitdrukken in den afwijkingshoek $\alpha$.

$$(4) \qquad \Delta\phi = \phi' - \phi = \alpha \frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}$$

aangezien $\vartheta$ en $\vartheta'$ in het algemeen weinig van elkaar verschillen, $\alpha$ en $\Delta\phi$ gelijk aan hun sinus kunnen worden gesteld.

Om $\Delta\vartheta = \vartheta' - \vartheta$ te vinden, trekken wij de bogen $S'L$ loodrecht op $\vartheta$, en $S'G$ zóó dat $XG = XS' = \vartheta'$. Nu is

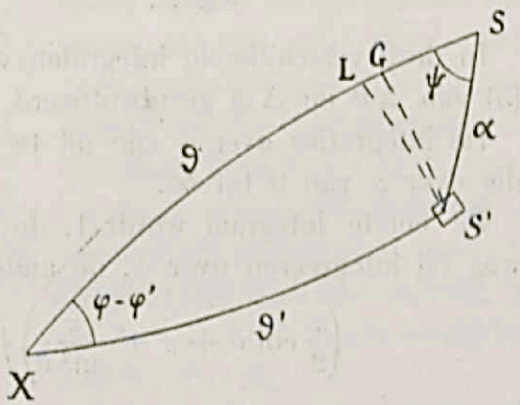



Fig 3.

$$L\,S = \alpha \cos\psi;$$

$$\operatorname{tg} L\,X = \operatorname{tg}\vartheta' \cos\Delta\phi = \operatorname{tg}\vartheta'\left(1 - \frac{\overline{\Delta\phi^2}}{2}\right);$$

$$\operatorname{tg}\vartheta' - \operatorname{tg} L\,X = \frac{\vartheta' - L\,X}{\cos^2\vartheta} = \frac{\overline{\Delta\phi^2}}{2}\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\overline{\Delta\phi^2}}{2}\operatorname{tg}\vartheta$$

op termen van hoogere orde na.

$$(5)\quad \Delta\vartheta = \vartheta' - \vartheta = \vartheta' - L\,S - L\,X = -\alpha\cos\psi + \frac{\overline{\Delta\phi^2}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta = -\alpha\cos\psi + \alpha^2\frac{\cot\vartheta\,.\,\sin^2\psi}{2}.$$

In deze afleiding is ook ondersteld dat $\Delta\phi$ klein is; voor stralen in de buurt van de $x$-richting kan echter $\Delta\phi$ zeer groot zijn, zelfs 180° bedragen, terwijl toch $\alpha$ willekeurig klein is. Dit zal echter slechts het geval zijn voor een zeer klein gedeelte van de stralenbundels, een gedeelte dat des te kleiner is naarmate $\alpha$ kleiner gekozen wordt.

Wij ontwikkelen beide leden der integraalvergelijking en krijgen:

$$f(x,y,z,\vartheta,\phi) + \frac{\partial f}{\partial x}l\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}l\sin\vartheta\,.\,\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial z}l\sin\vartheta\,.\,\sin\phi =$$

$$= f(x,y,z,\vartheta,\phi)\int\chi(\alpha)\,d\omega' + \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\iint\Delta\vartheta\,.\,\alpha\,\chi(\alpha)\,d\alpha\,d\psi + \frac{\partial f}{\partial\phi}\iint\Delta\phi\,.\,\alpha\chi(\alpha)\,d\alpha d\psi$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\iint(\Delta\vartheta)^2\,\alpha\,\chi(\alpha)\,d\alpha\,d\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\,\partial\phi}\iint\Delta\vartheta\,.\,\Delta\phi\,.\,\alpha\,\chi(\alpha)\,d\alpha\,d\psi +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\iint(\Delta\phi)^2\,\alpha\,\chi(\alpha)\,d\alpha\,d\psi.$$

In deze verschillende integralen worden de waarden (4) en (5) van $\Delta\vartheta$ en $\Delta\varphi$ gesubstitueerd.

De integraties over $\psi$ zijn uit te voeren tusschen 0 en $2\pi$, die over $\alpha$ van 0 tot $\infty$.

De eerste integraal wordt 1, de derde en de vijfde vallen weg bij integreeren over $\psi$, de andere leveren

$$\left(\frac{\pi}{2}\cot\vartheta + \pi + \frac{\pi}{\sin^2\vartheta}\right)\int\alpha^3\,\chi(\alpha)\,d\alpha.$$

Hierbij is in de vierde integraal de term in $\alpha^5$ verwaarloosd.

De integraal $\int \alpha^3 \chi(\alpha)\, d\alpha$ is onmiddellijk in verband te brengen met de gemiddelde waarde $\overline{\alpha^2} = \int \alpha^2 \chi(\alpha)\, d\omega = 2\pi \int \alpha^3 \chi(\alpha)\, d\alpha$. Onze differentiaalvergelijking wordt aldus:

(6)
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta \,.\, \cos\Phi + \frac{\partial f}{\partial z}\sin\vartheta\sin\Phi = \frac{\overline{\alpha^2}}{4l}\left(\cot\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi^2}\right).$$

In het vervolg zullen wij de benaming *„uitspreidingscoëfficiënt"* gebruiken voor de uitdrukkingen $\frac{\overline{\alpha^2}}{2l}$ bij straalkromming in twee afmetingen, $\frac{\overline{\alpha^2}}{4l}$ bij straalkromming in drie afmetingen.

## § 2. DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING TOEGEPAST OP EEN DAMPKRING BEGRENSD DOOR TWEE EVENWIJDIGE VLAKKEN.

*Verlichting van het Grensvlak door symmetrische, oneindig breede Bundels.*

Een der meest algemeene gevallen waarin wij de werking der onregelmatige breking hebben na te gaan, is dat van een dampkring begrensd door twee evenwijdige vlakken. Wij denken ons breede bundels evenwijdige stralen, die op het ééne grensvlak vallen, en die zulk een groote doorsnede hebben dat het geheele vlak er op dezelfde wijze door wordt verlicht (fig. 4). Daarenboven onderstellen wij dat die bestraling symmetrisch gebeurt om de normaal, die onze $x$-as is, zoodanig dat zij voor het ruimtevraagstuk onafhankelijk wordt van het azimuth $\Phi$, en dat voor het vlakke vraagstuk $f(\vartheta) = f(-\vartheta)$.

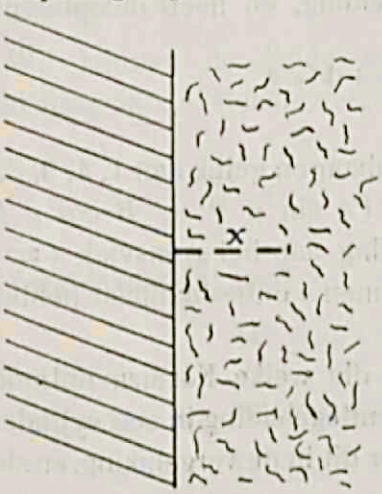


FIG. 4.

Dit geval is in zooverre bijzonder eenvoudig, dat nu alle

punten in een zelfde aan de grensvlakken evenwijdige laag op dezelfde wijze bestraald worden. Het vraagstuk wordt onafhankelijk van $y$, van $z$, van $\Phi$. De differentiaalvergelijking vereenvoudigt zich aldus:

voor het platte vlak,

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}; \tag{7}$$

voor de ruimte,

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right). \tag{8}$$

**De differentiaalvergelijking voor kleine hoeken.** —

Wanneer de hoek $\vartheta$ klein is, kunnen wij $\cos\vartheta = 1$ en $\sin\vartheta = \vartheta$ stellen. De vergelijkingen worden dan:

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}. \tag{9}$$

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right). \tag{10}$$

De eerste vergelijking heeft denzelfden vorm als de differentiaalvergelijking der warmtegeleiding, en heeft de oplossing

$$f = \sum_{a=1}^{a=\infty} c_a e^{-ak x + i\sqrt{a}\,\vartheta} \tag{11}$$

Kiest men bijvoorbeeld $a$ bestaanbaar en gelijk aan 1, 4, 9, ... dan wordt de reeks: $f = \sum e^{-n^2 k x}(A \sin n\vartheta + B \cos n\vartheta)$ en kan iedere willekeurige bestraling aan het grensvlak $x = 0$ voorstellen. In het algemeen zal men $a$ onbestaanbaar hebben te nemen.

De tweede vergelijking (10) is die welke Fourier ontmoet heeft bij de beschrijving van de warmtegeleiding in een cylinder. Schrijf $f = X(x)\cdot\Theta(\vartheta)$. Substitueer dit in de vergelijking, en stel

$$\frac{1}{k}\frac{X'}{X} = \frac{1}{\Theta}\left(\Theta'' + \frac{1}{\vartheta}\Theta'\right) = -a.$$

Hieruit volgt,

$$x = e^{-akx}$$

$$\Theta'' + \frac{1}{\vartheta}\Theta' + a\,\Theta = 0.$$

Stel nog $\frac{\vartheta}{\sqrt{a}} = y$, dan gaat de laatste vergelijking over in die van BESSEL, met de waarde 0 van den parameter:

$$\Theta'' + \frac{1}{y}\Theta' + \Theta = 0.$$

Hare algemeene oplossing luidt:

$$\Theta = Z_0(y) = c_1 J_0(y) + c_2 N_0(y),$$

waarin $J_0$ en $N_0$ de BESSELSCHE functies van de eerste en tweede soort en van de orde 0 voorstellen.

Tenslotte wordt

$$(12) \qquad f = \Sigma\, e^{-akx} \cdot \left[c_1 J_0\left(\frac{\vartheta}{\sqrt{a}}\right) + c_2 N_0\left(\frac{\vartheta}{\sqrt{a}}\right)\right];$$

$a$, $c_1$, $c_2$ kunnen bestaanbaar of onbestaanbaar zijn.

De oplossing van de ruimtevergelijking wordt dus van denzelfden vorm als van de vlakke vergelijking, alleen zijn de trigonometrische functies door BESSELSCHE vervangen.

**De differentiaalvergelijking voor hoeken van gemiddelde grootte.** —

Wij kunnen de beide eerste termen van de cosinusontwikkeling in de vlakke vergelijking opnemen:

$$(13) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 - \frac{\vartheta^2}{2}}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}.$$

Vergelijking (7) leidt nu tot:

$$\Theta'' + a\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right)\Theta = 0.$$

Een substitutie $\Theta = z\, e^{\int (\alpha + \beta\vartheta)\, d\vartheta}$ volgens LIOUVILLE geeft

$$z'' + z'\left(\sqrt{2a}\,\vartheta - 1\right) + z\left(a + 1/4\right) = 0,$$

en de methode van LAPLACE lost deze vergelijking op in den vorm van een bepaalde integraal:

$$\Theta = e^{-\frac{\vartheta}{2}+\frac{\vartheta^2}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{a+1/4}{\sqrt{2a}}-1}$$

$$e^{-\frac{u^2}{2\sqrt{2a}}}\left[B_1 \cos u\left(\vartheta - \frac{1}{\sqrt{2a}}\right) + B_2 \sin u\left(\vartheta - \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)\right] du$$

**De niet-benaderde differentiaalvergelijking.** —

Deze luidt (vgl. blz. 16):

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} \quad \text{(voor twee afmetingen);}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \quad \text{(voor drie afmetingen).}$$

Wij schrijven de oplossing als produkt van een functie van $x$ met een functie van $\vartheta$, dus $f = X(x).\ \Theta(\vartheta)$. Substitutie in de differentiaalvergelijkingen geeft

(14) $\quad X = c\,e^{-akx};\quad \Theta'' + a\cos\vartheta\,.\,\Theta = 0$

(15) $\quad X = c\,e^{-akx};\quad \Theta'' + \cot\vartheta\,.\,\Theta' + a\cos\vartheta\,.\,\Theta = 0.$

De vergelijkingen voor $\Theta$ zijn van de tweede orde met periodieke coëfficiënten; de bijzondere moeilijkheid doet zich voor dat de coëfficiënten zoowel positief als negatief worden binnen het integratiegebied. De „functies van MATHIEU" welke door deze vergelijkingen bepaald worden, komen herhaaldelijk voor in de theoretische natuurkunde; de uitgebreide literatuur is echter voor ons doel weinig bruikbaar, de oplossingen zijn onhandige reeksontwikkelingen.[1])

---

[1]) De eerste der twee vergelijkingen (14) is «de vergelijking van den elliptischen cylinder», een bijzonder geval van de «vergelijking van GYLDÉN—LINDSTEDT»: $\theta'' + (p + q\cos\vartheta)\,\theta = 0$. Zij verschijnt bij de theorie der beweging van de maan en van de wachters van Jupiter, bij de berekening van de getijden in een elliptischen vijver, van den potentiaal van een cylinder met elliptische doorsnede, en van de trillingen van een elliptisch vlies. Het geval $p = 0$ komt daarbij zelden of nooit voor.

Zeer eenvoudig is de ontwikkeling

$$\Theta = s_0 + s_1\,\vartheta + s_2\,\vartheta^2 + \ldots = \Sigma\, s_n\,\vartheta^n.$$

Substitueert men deze in de 2-dimensionale vergelijking b.v. en ontwikkelt ook cos $\vartheta$, dan vindt men voor de coëfficiënten:

$$s_{n+2} = -\frac{a}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{s_{n-2m}(-1)^m}{(2m)!}.$$

Twee bijzondere oplossingen zijn te vinden door uit te gaan van $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, of van $s_0 = 1$, $s_1 = 0$. Zoo krijgt men de reeksen

$$(16)\quad C_a = 1 - \frac{a}{2}\vartheta^2 + \frac{a^2+a}{24}\vartheta^4 - \frac{a^3+4a^2+a}{720}\vartheta^6 + \ldots.$$

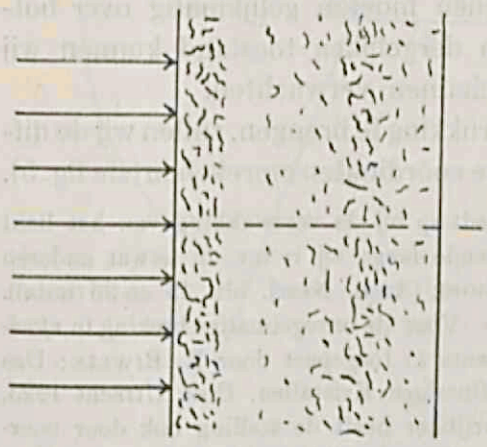
$$S_a = \vartheta - \frac{a}{6}\vartheta^3 + \frac{a^2+3a}{120}\vartheta^5 - \frac{a^3+23a^2+5a}{5040}\vartheta^7 + \ldots$$

Hieruit een algemeene oplossing:

$$(17)\quad f = \Sigma\,(A\,C_a + B\,S_a)\,e^{-akx}.$$

**Uitspreiding van evenwijdige bundels in een dampkring van laagsgewijs veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt.** —

De dampkring van de zon en van de sterren moet in het algemeen beschouwd worden als in rust; in de verschillende horizontale lagen van zulk een dampkring zal de samenstelling en de mate van roering verschillend wezen, maar in alle deelen van eenzelfde laag vrijwel dezelfde (fig. 4*a*). De uitspreidingscoëfficiënt $k$ is dan een functie van $x$ alleen.



4*a*.

In de vergelijkingen der onregelmatige breking (7) en (8) verandert $f$ niet, wanneer men de $x$-coördinaten grooter maakt, maar den uitspreidingscoëfficiënt in dezelfde mate verkleint; de wijze waarop een laagje het licht uitspreidt, hangt dus alleen af van de waarde die het produkt $kx$ voor die laag heeft.

Substitueert men in de vergelijkingen $dt = k\,dx$, dan gaan zij over in:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} \tag{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}. \tag{19}$$

Hun oplossing kan nu geschreven worden als een functie van de grootheid $t = \int_0^x k\,dx$, de „aequivalente diepte" onder de grenslaag. [1])

## § 3. DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING DER ONREGELMATIGE STRAALKROMMING TOEGEPAST OP EEN BOL.

*Bolsymmetrische Verlichting.*

De algemeene differentiaalvergelijking (6) der onregelmatige breking in de ruimte beschreef de veranderingen van de straling algemeen volgens de coördinaten $x, y, z, \vartheta, \phi$. Wij hebben gezien dat aanmerkelijke vereenvoudigingen optreden wanneer de brekende laag door evenwijdige vlakken begrensd is, en symmetrisch om de $x$-as bestraald door oneindig breede bundels.

Wij zullen thans de onregelmatige straalkromming in een bol nagaan, en zoeken welke vereenvoudigingen optreden wanneer wij *volkomen symmetrie om het middenpunt* aannemen. De uitspreidingscoëfficiënt moet dus dezelfde zijn in iedere bolschil, en de stralingsbronnen moeten gelijkmatig over bolschillen verdeeld zijn. Een dergelijken toestand kunnen wij in het algemeen bij hemellichamen verwachten.

Om deze symmetrie tot uitdrukking te brengen, zullen wij de differentiaalvergelijking op andere coördinaten omrekenen (zie fig. 5).

[1]) Een dergelijke betrekking treedt op bij de verzwakking van het licht door een opslorpende of verstrooiende laag; zij is b.v. in ietwat anderen vorm uitgesproken door Spijkerboer (Arch. Neerl. blz. 19 en 96 (nota)). Diss. Utrecht 1917, blz. 149. — Voor de onregelmatige breking in vloeibare kristallen is zij (bij constante $k$) toegepast door R. Riwlin: Das Wesen der Lichtzerstreuung in flüssigen Kristallen, Diss. Utrecht 1923, blz. 40 en hoofdstuk IV; de schrijfster heeft de stelling ook door voortreffelijke metingen proefondervindelijk gestaafd.

*In de oude coördinaten* was een bepaald *punt* gekenmerkt door $x$, $y$, $z$; *een lichtstraal* door dit punt, door:

$\vartheta$ = hoek lichtstraal — $x$-as,

$\phi$ = hoek tusschen { vlak door lichtstraal en $x$-richting / vlak evenwijdig aan $O\,x\,y$.

*In de nieuwe coördinaten* zullen wij *een punt* kenmerken door zijn afstand $r$ tot het middenpunt van den bol,

$\Theta$ = hoek tusschen voerstraal en $x$-richting;

$\Phi$ = hoek tusschen { vlak door voerstraal en $x$-richting, / vlak evenwijdig aan $O\,x\,y$;

*een lichtstraal* door het beschouwde punt zal gekenmerkt zijn door de hoeken

$\chi$ = hoek tusschen lichtstraal en voerstraal;

$\psi$ = hoek tusschen { vlak door voerstraal en lichtstraal, / vlak door voerstraal en $x$-richting.

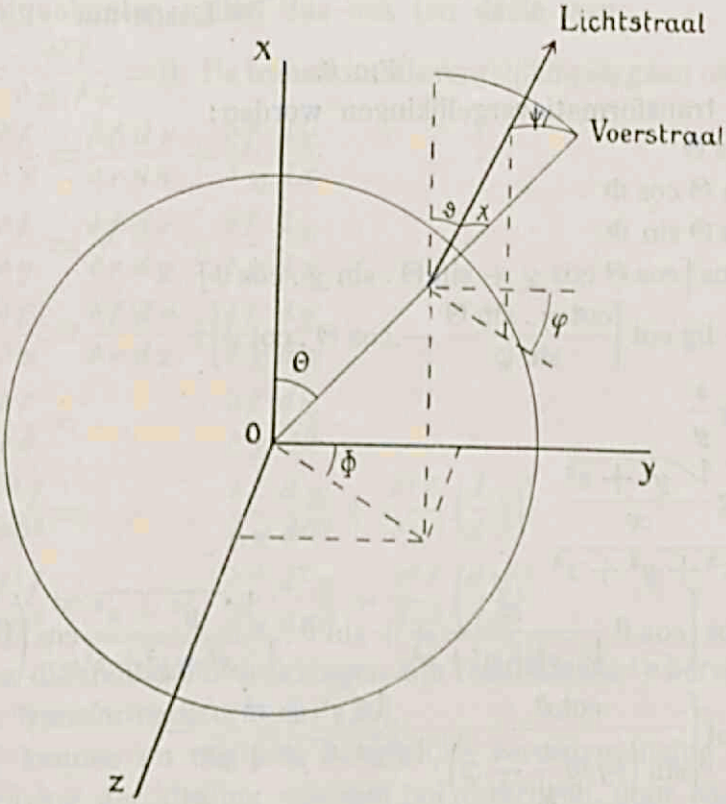



FIG. 5.

De transformatievergelijkingen zijn nu gemakkelijk op te

schrijven. Voor het omrekenen der richtingscoördinaten denke men zich den eenheidsbol om het beschouwde punt, lijnen evenwijdig aan de $x$- en $y$-richtingen door dit punt, en leide de onderlinge betrekkingen tusschen de hoeken af uit den boldriehoek (fig. 6).

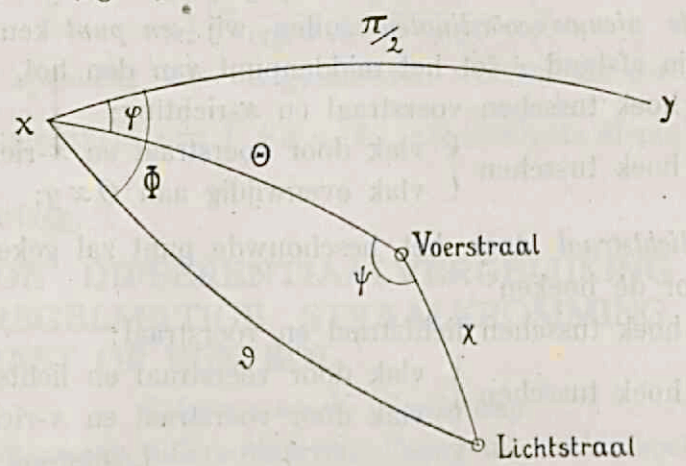



FIG. 6.

De transformatievergelijkingen worden:

(20)
$$x = r\cos\Theta$$
$$y = r\sin\Theta\cos\Phi$$
$$z = r\sin\Theta\sin\Phi$$
$$\vartheta = \text{bg}\cos\left[\cos\Theta\cos\chi + \sin\Theta\,.\,\sin\chi\,.\,\cos\psi\right]$$
$$\varphi = \Phi - \text{bg}\cot\left[\frac{\cot\chi\,.\,\sin\Theta}{\sin\psi} - \cos\Theta\,.\,\cot\psi\right]$$
$$\Phi = \text{bg}\,\text{tg}\,\frac{z}{y}$$
$$\Theta = \text{bg}\,\text{tg}\,\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\chi = \text{bg}\cos\left[\cos\vartheta\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sin\vartheta\,.\,\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\left(\text{bg}\,\text{tg}\,\frac{z}{y} - \varphi\right)\right]$$
$$\psi = bg\cot\left[\frac{\cot\vartheta}{\sin\left(bg\,tg\,\frac{z}{y} - \varphi\right)}\,\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cot\left(\text{bg}\,\text{tg}\,\frac{z}{y} - \varphi\right)\right]$$

Nu hebben wij de waarden der „oude" differentiaalquotiënten in de „nieuwe" coördinaten uit te drukken, met de formules:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \Phi}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \Theta}\frac{d\Theta}{dx} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dx}, \text{ enz.}$$

Daarbij treden echter twee belangrijke vereenvoudigingen op. 1°. Een aantal differentiaalquotiënten $\frac{d\Phi}{dx}, \frac{d\Phi}{d\vartheta}, \frac{d\Theta}{d\vartheta}$ enz. zijn nul volgens (20). 2°. Een aantal differentiaalquotiënten zijn nul wegens de symmetrie-onderstelling, die wij hier wiskundig uitdrukken. Bolsymmetrie beteekent: *a*) dat alle punten waarvoor $r$ gelijk is, dezelfde verdeeling der straling ieder rond hun voerstraal vertoonen; *b*) dat voor elk bepaald punt de straling symmetrisch is om den voerstraal. Uit (*a*) volgt:

(21) $\frac{\partial f}{\partial \Phi} = \frac{\partial f}{\partial \Theta} = 0$; uit (*b*) volgt: $\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$. De tweede differentiaalquotiënten vallen dus ook tén deele weg:

$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \chi . \partial \psi} = 0$. De transformatievergelijkingen gaan over in:

(22)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dx}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dz} + \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{d\vartheta}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi}{d\vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}\left(\frac{d\chi}{d\vartheta}\right)^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \Phi^2} = \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d^2\chi}{d\Phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}\left(\frac{d\chi}{d\Phi}\right)^2$$

Deze differentiaaluitdrukkingen zijn rechtstreeks te berekenen uit de transformatieformules (20).

Wij kunnen nu nog een belangrijke vereenvoudiging in de beschrijving der straling van den bol verkrijgen, door ons voor te stellen dat wij hem bekijken van op zeer grooten afstand in de richting der $y$-as, ongeveer zooals een aardsch waar-

nemer kijkende naar de zon. Wij zullen dan bijvoorbeeld in het schijnbare middelpunt de grootste helderheid zien, en aan alle kanten daaromheen een afnemende helderheid. Wegens de symmetrie-onderstelling is de verdeeling der straling in elken meridiaan dezelfde, en het is dus voldoende die na te gaan voor één bepaalden meridiaan, bv. voor de punten gelegen in het vlak $0\,y\,x$. Overigens krijgen wij, aardsche waarnemers, van elk dezer punten slechts den straal evenwijdig aan de $y$-as te zien. Maar voor zulke punten en zulke stralen krijgen de transformatievergelijkingen een bijzonder eenvoudigen vorm (fig. 7):

(23)
$$x = r\cos\Theta \qquad \Phi = 0$$
$$y = r\sin\Theta \qquad \Theta = \text{bg tg}\,\frac{y}{x}$$
$$z = 0 \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \qquad \chi = \frac{\pi}{2} - \Theta = \frac{\pi}{2} - \text{bg tg}\,\frac{y}{x}$$
$$\varphi = 0 \qquad \psi = \pi.$$

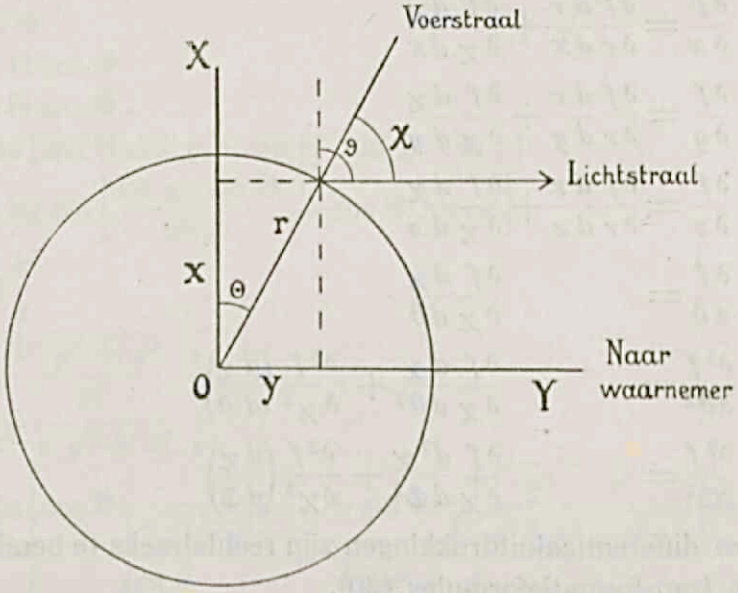



FIG. 7.

*Nadat* de differentiaaluitdrukkingen (22) uit de algemeene transformatievergelijkingen (20) berekend zijn, kunnen wij de bijzondere waarden (23) substitueeren.

Zoo krijgen wij na eenige berekening de volgende uitdrukkingen:

$$(24)\quad \frac{d\Phi}{dy}=0;\ \frac{d\Phi}{dz}=\frac{\sin\Theta}{r}.$$

$$\frac{d\Theta}{dx}=-\frac{\sin\Theta}{r};\ \frac{d\Theta}{dy}=\frac{\cos\Theta}{r};\ \frac{d\Theta}{dz}=0.$$

$$\frac{dr}{dx}=\cos\Theta;\ \frac{dr}{dy}=\sin\Theta;\ \frac{dr}{dz}=0.$$

$$\frac{d\chi}{dx}=\frac{\sin\Theta}{r};\ \frac{d\chi}{dy}=-\frac{\cos\Theta}{r};\ \frac{d\chi}{dz}=0;\ \frac{d\chi}{d\vartheta}=1;\ \frac{d^2\chi}{d\vartheta^2}=0.$$

$$\frac{d\psi}{dx}=0;\ \frac{d\psi}{dy}=0;\ \frac{d\psi}{dz}=-\frac{1}{r\sin\Theta\cos\Theta};\ \frac{d\psi}{d\vartheta}=0;\ \frac{d^2\psi}{d\vartheta^2}=0;$$

$$\frac{d\psi}{d\Phi}=\frac{1}{\cos\Theta};\ \frac{d^2\psi}{d\Phi^2}=0.$$

Het berekenen der differentiaalquotiënten $\frac{d\psi}{d\vartheta}$, $\frac{d\psi}{d\Phi}$ enz. dient slechts om ons ervan te vergewissen dat geen hunner oneindig wordt; de uitdrukkingen $\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{d\psi}{d\vartheta}$, $\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{d\psi}{d\Phi}$, enz. waarin $\frac{\partial f}{\partial\psi}=0$, vallen dus stellig weg.

Wij kunnen nu de differentiaalvergelijking in de nieuwe coördinaten opschrijven:

$$-\sin\Theta\cdot\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{\cos\Theta}{r}+k\,\mathrm{tg}\,\Theta\right)\frac{\partial f}{\partial\chi}+k\,\frac{\partial^2 f}{\partial\chi^2}=0.$$

Tenslotte bedenken wij nog dat voor den beschouwden meridiaan $\Theta=\frac{\pi}{2}-\chi$, en krijgen

$$(25)\quad \boxed{\cos\chi\cdot\frac{\partial f}{\partial r}=\left(k\cot\chi+\frac{\sin\chi}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial\chi}+k\,\frac{\partial^2 f}{\partial\chi^2}.}$$

Deze vergelijking, afgeleid voor een bepaalden meridiaan, is wegens de symmetrieonderstelling voor alle meridianen geldig.

Deze differentiaalvergelijking beschrijft de onregelmatige straalbreking in een bol (de zon), waarin de stralingsbronnen gelijkmatig over concentrische bolschalen verdeeld zijn, dus symmetrisch om

het middenpunt (bldz. 20). De straling $f$ is dié straling welke gericht is naar een bepaalden, oneindig ver geplaatsten (aardschen) waarnemer, en welke uitgaat van een punt op afstand $r$ van het middenpunt van den bol, en op een (heliocentrischen) hoekafstand $\chi$ van het punt van den bol dat naar den waarnemer gekeerd is.

De vergelijking (25) voor den bol gelijkt volkomen op de vergelijking (8) voor een door twee vlakken begrensde laag; er is echter een term bijgekomen, $\frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial f}{\partial\chi}$. Deze „krommingsterm" neemt af naarmate de straal $r$ toeneemt: op grooten afstand van het middenpunt nadert de vergelijking voor den bol tot die voor 't platte vlak. Ook in de buurt van $\chi = 0$, het naar den aardschen waarnemer gekeerde deel van den bol, wordt de krommingsterm nul, wat alweer volkomen begrijpelijk is.

Het is de moeite waard, na te gaan wat de vergelijking wordt voor $k = 0$, dus voor een bol of bolschaal waar geen onregelmatige breking heerscht. In dit geval is $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\operatorname{tg}\chi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\chi}$. Is het beschouwde gebied dus gevuld met isotrope straling $\left(\frac{\partial f}{\partial\chi} = 0\right)$, dan verandert de straling ook niet met de diepte.

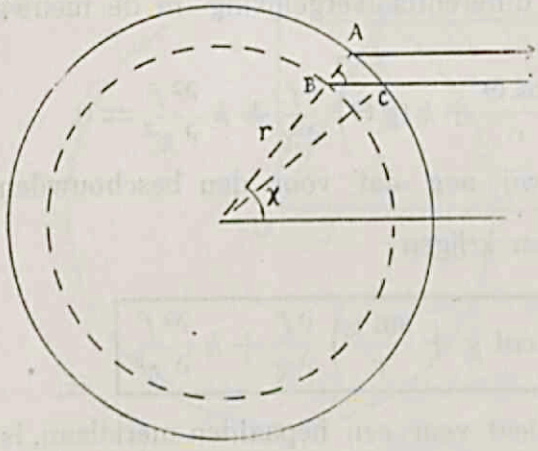



FIG. 8.

Is de straling niet isotroop, dan verandert $f$ wel degelijk met de diepte, terwijl toch geen onregelmatige breking werkzaam is. Dit is geheel een gevolg van meetkundige betrekkingen (fig. 8); klaarblijkelijk is immers $f_B = f_C$, dus: $f_B - f_A = f_C - f_A$ en $\frac{\partial f}{\partial r}\cdot AB = \frac{\partial f}{\partial\chi}\cdot\frac{AC}{r} = \frac{\partial f}{\partial\chi}\cdot\frac{AB}{r}\operatorname{tg}\chi$, wat juist is hetgeen de differentiaalvergelijking ons gegeven had.

Wij hebben gezien (bldz. 20) dat de straling in een door twee vlakken begrensde laag beschreven kan worden als functie van $\int_0^x k\,dx = t$, wanneer de uitspreidingscoëfficiënt veranderlijk is in de $x$-richting. Laten wij evenzoo beproeven voor het geval van den bol de straling voor te stellen als functie van $t$. Substitutie in de vergelijking geeft:

$$\cos\chi \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\cot\chi + \frac{\sin\chi}{k\,r}\right)\frac{\partial f}{\partial \chi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}. \tag{26}$$

*In het algemeen is het dus niet mogelijk, de straling in een onregelmatig brekenden bol voor te stellen als een functie van* $\int k\,dr$. *Alleen bij hemellichamen die voldoen aan de voorwaarde*

$$k\,r = \text{const.}$$

*zou dit het geval zijn, hemellichamen dus waarin de uitspreidingscoëfficiënt afneemt omgekeerd evenredig met den afstand tot het middenpunt.*

## HOOFDSTUK II.

### DE UITSPREIDING VAN ÉÉN ENKELEN BUNDEL.

Wij noemen: „*oneindig breede, evenwijdige bundel*", een uit evenwijdige stralen samengestelden bundel, waarvan de breedte groot is t. o. van de afmeting der vloeistofslieren, en groot t. o. van de uitspreiding die de bundel ondergaat. — Valt zulk een bundel op een dampkring begrensd door twee evenwijdige vlakken, dan gedragen al zijn stralen zich op dezelfde wijze, en de uitspreiding is te beschrijven als een verdeeling der straling over de verschillende richtingen.

Wij noemen: „*naaldvormige bundel*", een uit evenwijdige stralen samengestelden bundel, waarvan de breedte groot is t. o. van de afmetingen van de slieren, maar klein t. o. van de breedte waarover de bundel wordt uitgespreid. — Zulk een bundel wordt door de onregelmatige straalkromming penseelvormig verbreed.

Wij noemen: „*lichtstraal*", een bundel die dun is t. o. van de afmetingen der slieren. — Zulk een lichtstraal wordt door de dichtheidsverschillen in den dampkring niet uitgespreid, maar onregelmatig gekromd (fonkelen der sterren, vgl. blz. 4).

### § 4. DE ONREGELMATIGE BREKING VAN ÉÉN ENKELEN ONEINDIG BREEDEN BUNDEL, IN EEN DAMPKRING BEGRENSD DOOR TWEE EVENWIJDIGE VLAKKEN.

Waar een volledige, algemeene oplossing der differentiaalvergelijking, met de ingewikkelde grensvoorwaarden die in de natuur voorkomen, groote moeilijkheden oplevert, is het doelmatig een meer graphische of numerieke behandeling in studie te nemen. Het eenvoudigste vraagstuk dat als uitgangspunt

kan dienen, is de onregelmatige breking van één enkelen oneindig breeden, evenwijdigen bundel, in een dampkring begrensd door twee evenwijdige vlakken en overal van gelijken uitspreidingscoëfficiënt. Hebben wij eenmaal dit vraagstuk opgelost, dan kunnen wij de onregelmatige breking van willekeurig samengestelde, oneindig breede stralenbundels gemakkelijk vinden, door ze te beschouwen als de som van een aantal bundels die ieder aan één richting evenwijdig zijn (bronmatige voorstelling der straling).

### *A. Twee Afmetingen.*

**Kleine invalshoeken.** —

De benaderde differentiaalvergelijking (9) voor kleine hoeken heeft ons de oplossing (11) gegeven (blz. 16).

Evenals men gewoon is dit te doen voor de vergelijking van de warmtegeleiding, schrijven wij deze 2-dimensionale oplossing in den gelijkwaardigen vorm:[1])

$$\frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\int e^{-\frac{(\vartheta_0-\vartheta)^2}{4kx}} f_0\, d\vartheta_0.$$

Iedere bundel die oorspronkelijk bestaat uit evenwijdige stralen, invallend onder een hoek $\vartheta_0$ en met een totale sterkte gelijk aan de eenheid, wordt dus uitgespreid volgens de wet

$$(1)\qquad \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2}{4kx}}\, d\vartheta.$$

Deze functie voldoet aan de differentiaalvergelijking. Geïntegreerd van $\vartheta = -\infty$ tot $\vartheta = +\infty$, geeft zij 1; er gaat dus geen energie verloren, zij wordt alleen volgens de foutenwet van Gauss over de verschillende richtingen verdeeld.

In het belangrijke geval van een loodrecht invallenden bundel wordt de uitspreidingswet:

$$(2)\qquad \boxed{\frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{\vartheta^2}{4kx}}\, d\vartheta.}$$

[1]) Zie b.v. Riemann—Weber, Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig, 1919. II, 91.

**Groote invalshoeken.** —

Bij groote invalshoeken kan men bij wijze van benadering de uitspreidingswet schrijven:

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{\cos\vartheta_0}}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2\cos\vartheta_0}{4kx}}\, d\vartheta.$$

Dit komt daarop neer, aan te nemen dat de uitspreiding van den bundel op dezelfde wijze gebeurt wanneer de dampkring door de vlakken $A'$ en $B'$ begrensd is, als wanneer

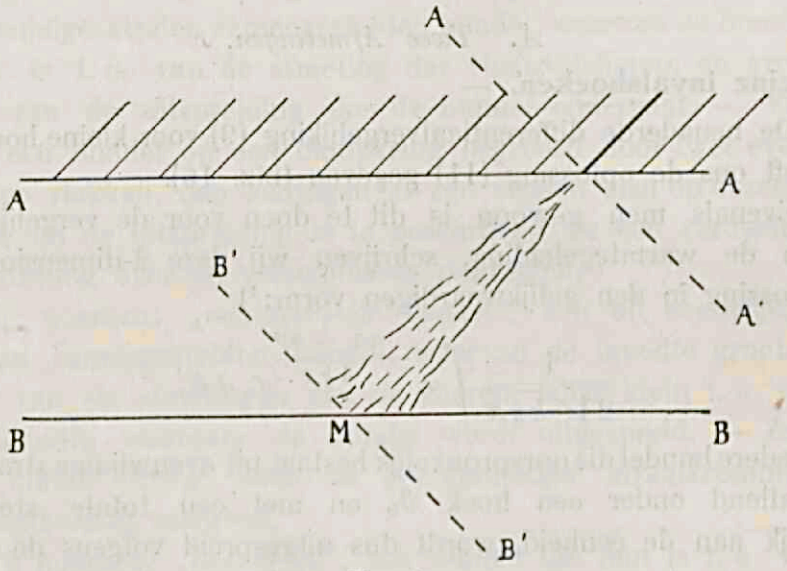



FIG. 9.

hij in $AB$ eindigt (fig. 9). Dit is een bruikbare, maar niet zeer nauwkeurige benadering. Het is duidelijk dat de stralen die uittreden onder hoeken $\vartheta > \vartheta_0$, gemiddeld langere wegen door den dampkring zullen hebben afgelegd dan de stralen die onder hoeken $\vartheta > \vartheta_0$ uittreden (in fig. 9 treden de eerste vooral links van het punt $M$ uit, de tweede rechts daarvan). Terwijl de formules dus een gelijke lichtsterkte geven voor de stralen $\vartheta - \vartheta_0$ en $\vartheta_0 - \vartheta$, zou er eigenlijk asymmetrie moeten zijn. Wij zullen zien dat, bij toenemende dikte van den dampkring, de straling die onder een hoek $\vartheta$ uittreedt eerst toeneemt, daarna een maximum bereikt en weer afneemt (blz. 33). Dit beteekent dat onze benaderde waarde van de lichtsterkte voor groote en positieve $\vartheta - \vartheta_0$ zou moeten ver-

meerderd worden, voor groote en negatieve $\vartheta - \vartheta_0$ verminderd (fig. 10). In welken zin het verschil zal zijn voor kleine waarden van $\vartheta - \vartheta_0$, is niet zonder meer te zeggen.

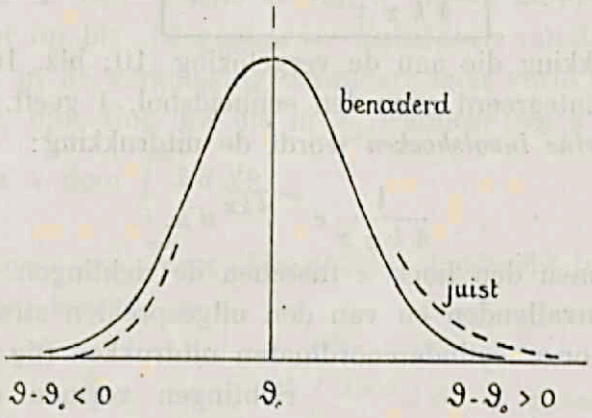



FIG. 10.

Volgende tabelletje bevat eenige numerieke gegevens over de verdeeling der straling, die bij tweedimensionale uitspreiding uit een dampkring treedt. De ruwe benaderingswet (3) is toegepast; aangenomen is: $k\,x = 0{,}01$; dus $\alpha^2 = 0{,}02$; de middelbare uitspreidingshoek is $0{,}14 = 8°$.

| $\pm(\vartheta - \vartheta_0) =$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vartheta_0 = 0$ | 2,82 | 2,18 | 1,04 | 0,299 | 0,052 | 0,006 |
| 0,2 | 2,79 | 2,18 | 1,05 | 0,310 | 0,056 | 0,006 |
| 0,4 | 2,71 | 2,16 | 1,08 | 0,342 | 0,068 | 0,008 |
| 0,6 | 2,56 | 2,08 | 1,12 | 0,402 | 0,095 | 0,015 |

Wij zullen later een geheel ander, veel nauwkeuriger middel leeren kennen om de uitspreiding van een schuinen bundel te berekenen. (§ 5).

*B. Drie Afmetingen.*

**Uitspreiding van één evenwijdigen bundel over kleine hoeken.** —

Ook voor de 3-dimensionale uitspreiding kan de straling bronmatig voorgesteld worden, en kunnen wij de uitspreidingswet van één enkelen bundel opschrijven.

Voor *loodrechten inval* wordt zij:

$$(4) \qquad \boxed{\frac{1}{4\,k\,\pi\,x}\,e^{-\frac{\vartheta^2}{4\,k\,x}}\,d\,\omega} \qquad \text{vgl. (2),}$$

een uitdrukking die aan de vergelijking (10; blz. 16) voldoet, en die, geïntegreerd over den eenheidsbol, 1 geeft.

Voor *kleine invalshoeken* wordt de uitdrukking:

$$\frac{1}{4\,k\,\pi\,x}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\,k\,x}}\,d\,\omega.$$

Wij kunnen den hoek $\alpha$ tusschen de richtingen $O\,A_0$, $O\,A$ van den invallenden en van den uitgespreiden straal gemakkelijk in onze cylindercoördinaten uitdrukken (fig. 11); deze richtingen vormen met de $x$-richting hoeken $\vartheta_0$, $\vartheta$, de vlakken door elk dier stralen en de normaal vormen hoeken $\psi_0$, $\psi$ met een vast referentievlak. Aangezien $\vartheta_0$ en $\vartheta$ klein zijn, is het boldriehoekje $O\,A\,A_0$ als een recht driehoekje te beschouwen, zoodat $\alpha^2 = \vartheta_0^2 + \vartheta^2 - 2\,\vartheta_0\,\vartheta\cos(\psi - \psi_0)$.

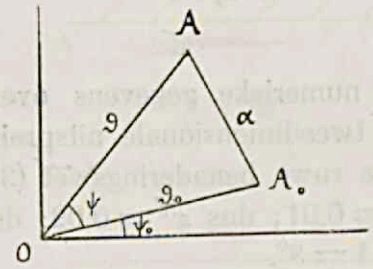



Fig. 11.

De uitspreidingswet wordt voor kleine invalshoeken:

$$(5) \qquad \frac{1}{4\,k\pi\,x}\,e^{-\frac{\vartheta^2 - 2\,\vartheta_0\,\vartheta\cos(\psi - \psi_0) + \vartheta_0^2}{4\,k\,x}}\,d\,\omega.$$

*Voor gemiddeld groote* invalshoeken schrijven wij $x \sec \vartheta$ in plaats van $x$; de boldriehoek $O\,A\,A'$ (fig. 12) heeft een korte zijde, $\alpha$, en geeft:

$$\alpha^2 = (\vartheta - \vartheta_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 \sin^2 \vartheta$$

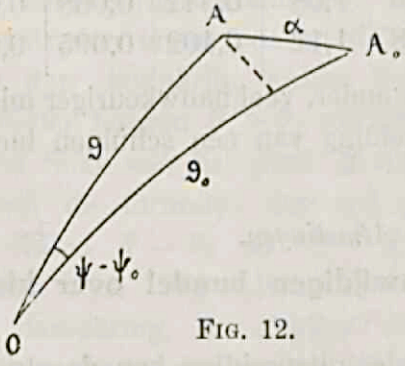



Fig. 12.

De ruw benaderde uitspreidingswet wordt:

$$(6) \qquad \frac{1}{4\,k\,\pi\,x\sec\vartheta}\,e^{-\frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 \sin^2 \vartheta}{4\,k\,x\sec\vartheta}}\,d\,\omega$$

**Uitspreiding in een dampkring van laagsgewijs veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt. —**

Wanneer $k$ een functie is van $x$ alleen, kunnen wij toepassen wat op blz. 19 gezegd is. Substitutie van de grootheid $dt = k\,dx$ in de vergelijking verandert haar vorm niet, en wij vinden de oplossing uit die in $x$, wanneer wij $k$ vervangen door 1 en $x$ door $\int_0^x k\,dx$.

Zoo krijgen wij, voor één enkelen loodrecht invallenden, evenwijdigen bundel:

$$(7)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi \int_0^x k\,dx}}\, e^{-\frac{\vartheta^2}{4\int_0^x k\,dx}}\, d\vartheta \quad \text{(2 afmetingen)}$$

$$(8)\qquad \frac{1}{4\pi \int_0^x k\,dx}\, e^{-\frac{\vartheta^2}{4\int_0^x k\,dx}}\, d\omega \quad \text{(3 afmetingen)}$$

**Maximale sterkte van het zijdelings uitgespreide licht. —**

Men denke zich een oneindig breeden evenwijdigen stralenbundel die loodrecht invalt op een onregelmatig brekenden dampkring, en een waarnemer die de straling meet welke onder een bepaalden hoek $\vartheta^*$ uittreedt. Onderstel nu dat de dampkring eerst zeer dun is, en dan langzamerhand in dikte toeneemt. Eerst vangt de waarnemer bijna geen straling op, omdat het licht nog bijna onafgeweken doorgaat. Bij toenemende dikte van den dampkring krijgt hij meer en meer straling. Tenslotte echter wordt de dampkring zoo dik dat energie over allerlei richtingen verdeeld wordt, en dan neemt de straling welke de waarnemer opvangt weer af. Voor zeer dikken dampkring nadert zij tot 0.

Bij een zeer bepaalde dikte van den dampkring krijgt de waarnemer een maximale hoeveelheid $\vartheta^*$-licht.

Van denzelfden aard zijn de verschijnselen wanneer niet

de dikte, maar de uitspreidingscoëfficiënt van den dampkring geleidelijk grooter wordt gemaakt. Het komt alleen aan op de waarde van $\int k\,dx$.

Hieruit volgt dus *dat, hoe ook een onregelmatig brekende dampkring samengesteld moge zijn, nooit meer dan een zeer bepaald breukdeel der invallende straling onder een gegeven hoek $\vartheta^*$ kan uittreden.*

De voorwaarden waaronder deze maximale straling $f_M$ optreedt, zijn gemakkelijk te berekenen uit de formules (2) en (4), door de afgeleide naar $x$ nul te stellen.

Voor 't platte vlak:

$$(9)\quad (k\,x)_M = \frac{\vartheta^{*2}}{2} \qquad f_M\,d\,\vartheta = \frac{d\,\vartheta}{\vartheta^*\sqrt{2\,\pi\,e}} = \boxed{\frac{0{,}242\,\mathrm{d}\,\vartheta}{\vartheta^*}}$$

Voor de ruimte:

$$(10)\quad (k\,x)_M = \frac{\vartheta^{*2}}{4} \qquad f_M\,d\,\omega = \frac{d\,\omega}{\vartheta^{*2}\,\pi\,e} = \boxed{\frac{0{,}12}{\vartheta^{*2}}\,d\,\omega}$$

De beteekenis dezer uitdrukkingen kan b.v. als volgt worden toegelicht. Stel dat de invallende evenwijdige bundel een totale lichtsterkte 1 bezit. Dan is de grootst bereikbare lichtsterkte van den uitgespreiden bundel binnen een ruimtehoekje van een vierkanten graad:

| | |
|---|---|
| onder een hoek van $1^0$ met de as . . . . | 0,12 |
| „ „ „ „ $2^0$ „ „ „ . . . . | 0,03 |
| „ „ „ „ $5^0$ „ „ „ . . . . | 0,005 |

## § 5. DE UITSPREIDING VAN EEN NAALDVORMIGEN BUNDEL IN EEN DAMPKRING VAN OVERAL GELIJKEN UITSPREIDINGSCOËFFICIËNT.

**Inleidende beschouwingen.** —

Onder de verschillende vraagstukken waartoe de studie der onregelmatige straalkromming aanleiding geeft, is de uitspreiding van den *naaldvormigen bundel* het echte elementairverschijnsel, en de oplossing van dit probleem is de ware grondslag

voor de behandeling van alle andere gevallen. Zoodra wij te weten zijn gekomen hoe een elementairbundeltje uitgespreid wordt, kunnen wij door eenvoudige integratie overgaan tot bundels van eindige of oneindige doorsnede, bestaande uit evenwijdige of uit convergeerende stralen.

Wij zullen nu deze uitspreiding onderzoeken in het meest typische geval, dat van een onregelmatig brekende laag die door evenwijdige vlakken begrensd is, en waarop een naaldvormige bundel loodrecht invalt (fig. 13). De lichtsterkte van dien bundel stellen wij gelijk aan de eenheid. Wij nemen aan dat de stralen bij het doorloopen van de onregelmatig brekende laag slechts geringe hoekafwijkingen ondergaan, hetzij omdat de dichtheidsgradiënten klein zijn, hetzij omdat de laag dun is. Het geheele verschijnsel denken wij ons in twee afmetingen zich afspelend (vgl. blz. 10): de lichtbundel valt in volgens de $x$-as, treedt in de onregelmatig brekende laag bij $x = 0$, en wordt daarin uitgespreid. Dat beteekent dat de bundel, nadat hij een zekeren afstand $X$ heeft doorloopen, gesplitst is in stralen die allerlei kleine *hoeken* $\vartheta$ met de $x$-as vormen, en die op allerlei kleine *afstanden* $r$ rond de $x$-as voorkomen. De richting der positieve $r$ is naar dezelfde zijde der as gekozen als de richting der positieve $\vartheta$. De lichtstralen hebben dus *hoekdraaiingen* en *verschuivingen* ondergaan volgens de wetten van het toeval; het geldt de lichtverdeeling in den bundel te berekenen.

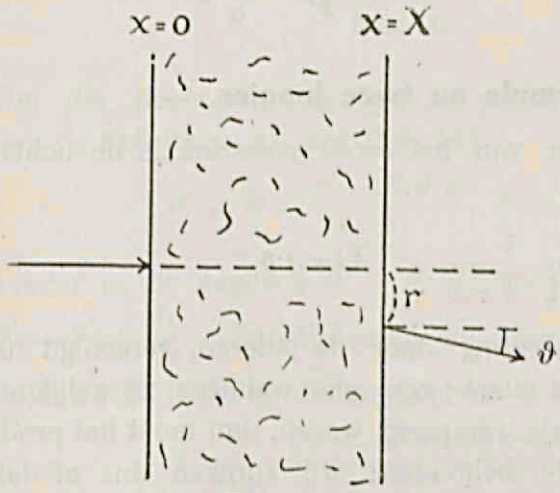


Fig. 13.

Wij denken ons de onregelmatig brekende middenstof opgebouwd uit een groot aantal laagjes van gelijke dikte $x$, evenwijdig aan de grensvlakken (fig. 14).

In elk dier laagjes denken wij ons de slieren vereenigd

nabij de scheidingsvlakken: de laagjes zelf echter homogeen en helder. Aan de scheidingsvlakken grijpt sprongsgewijs de *hoekuitspreiding* der lichtstralen plaats, in de homogene laagjes gebeurt het uiteenwijken der stralen, waardoor de zijdelingsche *verschuivingen* ontstaan. De baan van elken bepaalden lichtstraal wordt dus een gebroken lijn, die meer nadert tot de werkelijke kromme baan, naarmate wij den onregelmatig brekenden dampkring in talrijker laagjes gesplitst denken. *Deze opvatting geeft ons nu de mogelijkheid, de uitspreiding van een naaldvormigen bundel te herleiden tot uitspreidingswet van een oneindig breeden evenwijdigen bundel.* Immers naarmate de laagjes talrijker en dunner worden, wordt de dikte zeer klein tegenover de doorsnede van den bundel, en zal ook de zijdelingsche uitspreiding in één laagje klein geworden zijn tegenover deze doorsnede.

**Algemeene formule. —**

In volgend hoofdstuk zullen wij herhaaldelijk gebruik maken van de integraal

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a x^2 + b x + c}{q}} = \sqrt{\frac{\pi q}{a}}\, e^{\frac{b^2 - 4ac}{4aq}}.$$

**De uitspreidingformule na twee laagjes. —**

Na het passeeren van het *eerste grensvlak* is de lichtverdeeling:

$$(12) \qquad \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{\vartheta^2}{4kx}}\, d\vartheta.$$

Zal de hoekuitspreiding door de slieren, vereenigd nabij het grensvlak, even sterk zijn als wanneer zij gelijkmatig over geheel het laagje verspreid waren, dan moet het product $kx$ dezelfde waarde behouden; wij spreken dus af dat $x$ en $k$ hun vroegere beteekenis bewaren.

Onder dezelfde hoeken $\vartheta$ en op afstanden $r = \vartheta x$ treffen de stralen *het tweede scheidingsvlak.*

Aangezien wij hebben ondersteld dat hun hoeken met de

normaal klein zijn, gebeurt de tweede uitspreiding van elken straal geheel zooals die van een loodrecht invallenden bundel, alleen zal in formule (2) de hoek $\vartheta$ vervangen worden door $(\vartheta' - \vartheta)$. De stralen bereiken dus *het derde scheidingsvlak* onder hoeken $\vartheta'$, op afstanden $r' = r + \vartheta' x$. Even vóór dit derde scheidingsvlak is de lichtverdeeling geworden:

$$(13)\quad \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{\vartheta^2}{4kx}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{(\vartheta'-\vartheta)^2}{4kx}}\, d\vartheta \,.\, d(\vartheta' - \vartheta)$$

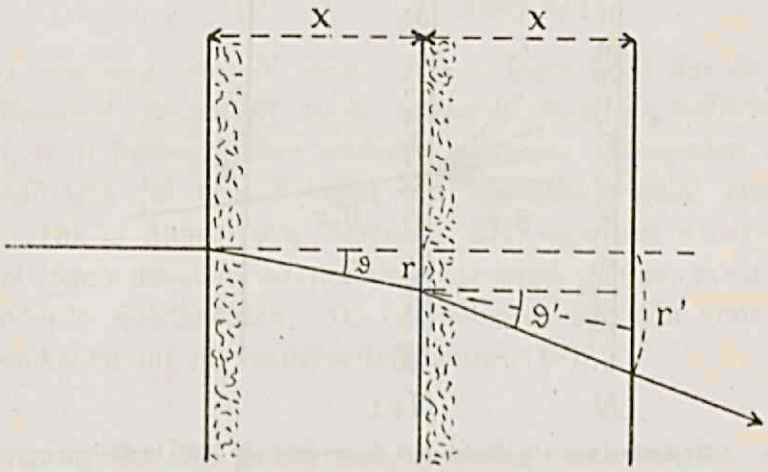



FIG. 14.

Om die lichtverdeeling uit te drukken als functie van $\vartheta'$ en $r'$, bedenken wij dat (fig. 14):

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{r' - 2\vartheta x}{x};\quad \vartheta = \frac{r' - \vartheta' x}{x}$$

Verder is, bij gegeven $\vartheta' - \vartheta$, $d\vartheta = d\vartheta'$; en, bij gegeven $\vartheta$, $d(\vartheta' - \vartheta) = \frac{dr'}{x}$. Substitueeren wij deze waarden in formule (13), dan wordt de verdeelingswet na 2 laagjes:

$$(14)\quad \frac{1}{4k\pi x^2}\, e^{-\frac{2r'^2 - 6r'\vartheta' x + 5\vartheta'^2 x^2}{4kx^3}}\, d\vartheta'\, dr'$$

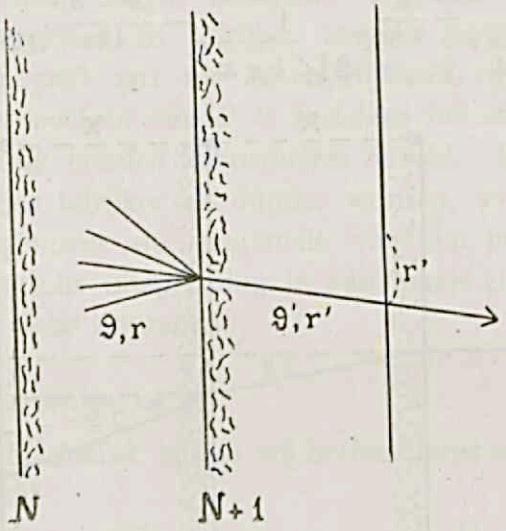
**Recurrentieformule voor N → N + 1 lagen. —**

Laten wij onderstellen dat, na $N$ laagjes van dikte $x$ te hebben

doorloopen, en bij zijn aankomst in de $(N+1)^e$ laag, de lichtbundel uitgespreid is volgens de verdeelingswet

$$(15) \qquad \frac{1}{C.k\pi x^2}\, e^{-\frac{m r^2 + n r \vartheta x + p \vartheta^2 x^2}{4 k x^3}}\, dr\, d\vartheta$$

Wij vragen ons af hoe de verdeelingswet geworden is na $N+1$ laagjes. In het punt $r$ van de $(N+1)^e$ scheidingslaag,




De hoeken van alle stralen met de normaal zijn klein te denken.

FIG. 15.

van waar de door ons beschouwde straal $r'\,\vartheta'$ uitgaat, zijn verschillende stralen bijeengekomen die allerlei waarden $\vartheta$ hadden (fig. 15). Elk dezer stralen wordt in deze scheidingslaag uiteengespreid volgens formule (1) blz. 29 en levert dus een bijdrage tot den beschouwden straal $r'\,\vartheta'$; deze krijgt een lichtsterkte

$$(16) \int_{\vartheta=-\infty}^{\vartheta=+\infty} \frac{1}{C.k\pi x^2}\, e^{-\frac{mr^2+nr\vartheta x+p\vartheta^2x^2}{4kx^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\, e^{-\frac{(\vartheta'-\vartheta)^2}{4kx}}\, dr'\, d\vartheta'.\, d\vartheta$$

Natuurlijk zijn de integratiegrenzen $-\infty$, $+\infty$ slechts fictief; alleen kleine waarden van $\vartheta$ leveren een merkbare bijdrage tot de integraal.. Wij vervangen nu $r$ door $r'-\vartheta' x$; in den exponent der $e$-functie vereenigen wij de termen in $\vartheta^2$ en $\vartheta$, en voeren de integratie naar $\vartheta$ uit volgens formule (11) blz. 36. Er komt:

$$(17)\qquad \frac{1}{C' \,.\, k\pi\, x^2}\, e^{-\frac{m' r'^2 + n' r' \vartheta' x + p' \vartheta'^2 x^2}{4 k x^3}}\, dr'\, d\vartheta',$$

waarin

$$C' = C\sqrt{p+1}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} m' = m - \dfrac{n^2}{4(p+1)} \\ n' = -2m + \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{n+2}{p+1} \\ p' = m + 1 - \dfrac{(n+2)^2}{4(p+1)}. \end{cases}$$

*Bij overgang van $N$ naar $N+1$ lagen heeft dus de uitspreidingswet denzelfden vorm bewaard, maar de coëfficiënten $C$, $m$, $n$, $p$ hebben andere waarden gekregen.* Aangezien aangetoond was dat voor 2 lagen een uitdrukking geldt van den vorm (15), is thans ook bewezen dat voor een willekeurig aantal lagen dezelfde uitspreidingswet blijft gelden, maar met veranderde coëfficiënten. De coëfficiënten zijn één voor één te berekenen uit de recurrentieformules (18).

**Overgang tot het geval van oneindig veel laagjes.** —

Willen wij overgaan tot het geval van een onregelmatig brekenden dampkring, dan moeten wij het aantal laagjes oneindig groot laten worden, maar daarbij tevens ieder laagje dunner en dunner maken, zoodat de totale dikte $X$ dezelfde blijft. Wanneer de dampkring eerst verdeeld was in $N$ laagjes, was de dikte van ieder laagje $x = \dfrac{X}{N}$; wanneer hij verdeeld is in $N+1$ laagjes, is ieder $\dfrac{X}{N+1}$ dik.

De uitspreidingswetten kunnen geschreven worden:

voor $N$ lagen: $$\frac{1}{x \,.\, k\pi X^2}\, e^{-\frac{\mu r^2 + \nu r\vartheta X + \rho \vartheta^2 X^2}{4 k X^3}}\, dr\, d\vartheta, \quad (9)$$

voor $(N+1)$ lagen: $$\frac{1}{x' \,.\, k\pi\, X^2}\, e^{-\frac{\mu' r^2 + \nu' r\vartheta X + \rho' \vartheta^2 X^2}{4 k X^3}}\, dr\, d\vartheta,$$

$$\text{met } x = \frac{C}{N^2} \qquad x' = \frac{C'}{(N+1)^2}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \mu = N^3 m \\ \nu = N^2 n \\ \rho = N p \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu' = (N+1)^3 m' \\ \nu' = (N+1)^2 n' \\ \rho' = (N+1) p' \end{cases}$$

Deze tot gelijke dikte herleide uitspreidingsformules behouden dus òok denzelfden vorm, wanneer men den dampkring in meer en meer laagjes gesplitst denkt; de coëfficiënten veranderen volgens recurrentieformules die men vindt door (20) in (18) te substitueeren:

$$x' = \left(\frac{N}{N+1}\right)^2 x \sqrt{1 + \frac{\rho}{N}}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \mu' = \left(\frac{N+1}{N}\right)^3 \left[\mu - \frac{\nu^2}{4(N+\rho)}\right] \\ \nu' = \left(\frac{N+1}{N}\right)^2 \left[-\frac{2\mu}{N} + \frac{\nu}{2N} \cdot \frac{2N^2+\nu}{N+\rho}\right] \\ \rho' = \frac{N+1}{N}\left[\frac{\mu}{N^2} + N - \frac{\left(2N + \frac{\nu}{N}\right)^2}{4(N+\rho)}\right] \end{cases}$$

Met behulp van deze recurrentie-formules zijn de coëfficiënten berekend van de uitspreidingswet, voor een dampkring dien men zich gesplitst denkt in 2, 3, ...., 8 laagjes.

| Aantal laagjes | $x$ | $\mu$ | $\nu$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | + 1 | + 16 | — 24,0 | + 10,0 |
| 3 | 1,089 | 13,5 | — 18,0 | 7,0 |
| 4 | 1,117 | 12,8 | — 16,0 | 6,0 |
| 5 | 1,131 | 12,5 | — 15,0 | 5,5 |
| 6 | 1,139 | 12,34 | — 14,4 | 5,2 |
| 7 | 1,143 | 12,23 | — 14,0 | 5,0 |
| 8 | 1,145 | 12,17 | — 13,7 | 4,86 |
| . . . . . | | | | |
| $\infty$ | 1,153 | 12,0 | — 12,0 | 4,0 |

De coëfficiënten schijnen asymptotisch te naderen tot een vaste waarde. Om die te vinden gaan wij over tot de grens

voor een oneindig aantal laagjes; de formules (21) worden voor groote $N$:

$$x' - x = \frac{x}{N}\left(\frac{\rho}{2} - 2\right)$$

$$(22)\qquad \begin{cases} \mu' - \mu = \dfrac{1}{N}\left(3\,\mu - \dfrac{\nu^2}{4}\right) \\ \nu' - \nu = \dfrac{1}{N}(-2\,\mu - \nu\,\rho + 2\,\nu) \\ \rho' - \rho = \dfrac{1}{N}(\rho - \nu - \rho^2). \end{cases}$$

Lagrange heeft geleerd hoe men de grenswaarde van dergelijke recurrentieformules vinden kan, door ze om te zetten in differentiaalvergelijkingen. Deze methode geeft ons het stelsel gelijktijdige differentiaalvergelijkingen:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \frac{d\,x}{x} &= \left(\frac{\rho}{2} - 2\right)\frac{d\,N}{N}, \\ d\,\mu &= \left(3\,\mu - \frac{\nu^2}{4}\right)\frac{d\,N}{N}, \text{ enz.} \end{aligned}$$

Het oplossen van dit stelsel is stellig niet eenvoudig. Maar wij hoeven $x, \mu, \nu, \rho$ niet te berekenen als functies van $N$, doch alleen *de grenswaarden* $x^* \mu^* \nu^* \rho^*$ dezer functies voor $N = \infty$, dus:

$$(24)\qquad \begin{aligned} \log x^* &= \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{2} - 2\right)\frac{d\,N}{N}, \\ \mu^* &= \int_0^\infty \left(3\,\mu - \frac{\nu^2}{4}\right)\frac{d\,N}{N}, \text{ enz.} \end{aligned}$$

Uit *natuurkundige* overwegingen weten wij, dat deze integralen moeten convergeeren. Volgens een bekende stelling uit de integraalrekening kan dit alleen het geval zijn, wanneer voor $N = \infty$ de integrand van hoogere orde oneindig klein wordt dan $\frac{1}{N}$; dit vereischt dus dat de haakjesvormen van

onze integranden tot nul naderen voor $N = \infty$. Aldus krijgen wij het stelsel gewone vergelijkingen:

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^*}{2} - 2 = 0 \\ 3\,\mu^* - \frac{\nu^{*2}}{4} = 0 \\ -2\,\mu^* - \nu^*\,\rho^* + 2\,\nu^* = 0 \\ \rho^* - \nu^* - \rho^{*2} = 0 \end{array} \right.$$

De drie laatste vergelijkingen geven voor $\mu$, $\nu$, $\rho$ drie stel waarden; de eerste vergelijking laat toe op volkomen scherpe wijze te beslissen welk van de drie stel oplossingen gekozen dient te worden, namelijk:

$$\left. \begin{array}{l} \mu^* = 12 \\ \nu^* = -12 \\ \rho^* = 4 \end{array} \right\}$$

De grenswaarde waartoe $\varkappa$ nadert, is door de vergelijkingen niet gegeven. Zij is echter te vinden uit den eisch, dat de totale straling die den dampkring verlaat, gelijk moet zijn aan de invallende straling. Dus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varkappa^* k \pi X^2} e^{-\frac{3r^2 - 3r\vartheta X + \vartheta^2 X^2}{k X^3}} d\vartheta\, dr = 1.$$

Voert men de integratie uit dan, komt er:

$$\frac{2}{\sqrt{3}\,\varkappa^*} = 1$$

dus $\varkappa^* = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}153.$

Tenslotte wordt de uitspreidingswet

$$(26) \qquad \boxed{f(X, \vartheta, r) = \frac{\sqrt{3}}{2 k \pi X^2} e^{-\frac{3r^2 - 3r\vartheta X + \vartheta^2 X^2}{k X^3}} dr\, d\vartheta.}$$

Een naaldvormige lichtbundel valt loodrecht in op een onregelmatig brekende laag van dikte $X$ en uitspreidingscoëfficiënt $k$ (blz. 15). De uitspreiding geschiede in een plat vlak (blz. 10), de

uitspreidingshoeken zijn klein gedacht. De formule geeft dan aan, welk breukdeel van de invallende energie uittreedt onder een hoek $\vartheta$ met de invalsrichting, en op een afstand $r$ van het punt waar de rechtdoorgaande straal uittreedt. (Zie fig. 13).

**Opmerkingen naar aanleiding van de uitspreidingswet. —**

1. De gewichtige formule (26) leert ons, dat er bij onregelmatige breking van een naaldvormigen bundel *een zeer bepaald verband* bestaat tusschen de hoekuitspreiding en de zijdelingsche verschuiving welke de stralen ondergaan.

2. Wij noemen *stralingsveld van een lichtbundel* alle punten waar deze bundel nog merkbare lichtwerkingen veroorzaakt. Bij de uitspreiding van een naaldvormigen bundel over kleine hoeken is het veld smal en langwerpig uitgestrekt. Een punt van het veld is bepaald door de coördinaten $X$, $r$; door elk punt gaat een bundeltje lichtstralen, die wij als vectoren kunnen opvatten. Onze formule beschrijft het veld volledig, en geeft voor elk punt en voor elke richting de grootte der vectoren.

Het aldus onderzochte stralingsveld strekt zich natuurlijk slechts uit van af de lijn $X = 0$ naar de positieve $X$-richting; voor negatieve waarden van $X$ heeft de formule geen zin en geeft negatieve energiewaarden.

3. In overeenstemming met wat op blz. 34 gezegd is, stelt de formule het elementair-proces der onregelmatige breking voor. Zij geeft ons dus ook den sleutel tot het oplossen van allerlei bijzondere gevallen, zooals wij door volgende voorbeelden zullen toelichten.

*A.* Beschouwen wij alleen die stralen welke evenwijdig aan de as uittreden; hoe zijn die verdeeld over de verschillende afstanden $r$? — De formule geeft, voor $\vartheta = 0$, $\frac{\sqrt{3}}{2k\pi X^2} e^{-\frac{3r^2}{kX^2}} dr\,d\vartheta$, en toont dat hiervoor een foutenwet geldt (fig. 16).

*B.* Beschouwen wij het bundeltje stralen dat uittreedt in het axiale punt $r = o$; hoe is de straling daarin verdeeld

over de verschillende richtingen? — De formule geeft

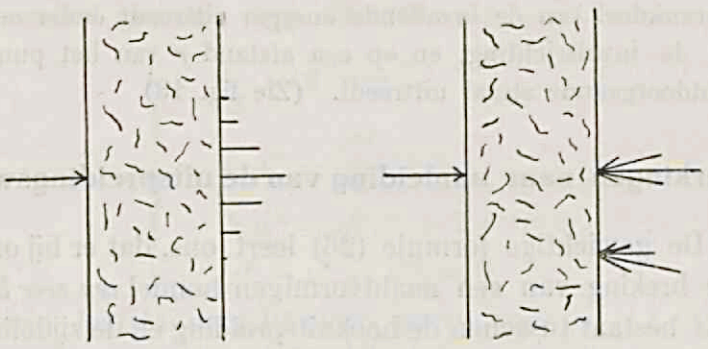


FIG. 16.

$\frac{\sqrt{3}}{2k\pi X^2} e^{-\frac{3r^2}{kX^3}} dr\, d\vartheta$, wat alweer de vorm is van de foutenwet (fig. 16).

*C.* In punten buiten de as kan men ook de samenstelling van den uittredenden bundel berekenen. De uitdrukking $3r^2 - 3r\vartheta X + \vartheta^2 X^2$ is altijd kleiner wanneer $\vartheta$ en $r$ hetzelfde teeken hebben dan wanneer zij het tegengestelde teeken hebben Dit beteekent (vgl. blz. 35) dat in een punt buiten de as de uittredende lichtbundel altijd asymmetrisch is, en wel zóó dat zijn helderste stralen voorkomen aan de zijde die van de as afgewend is — een feit dat al te voren kon worden ingezien.

*D.* Integreert men de formule over alle $r$, dan vindt men de energieverdeeling terug voor den oneindig breeden, evenwijdigen bundel, waarvan we zijn uitgegaan (formule 2). Inderdaad, in zulk een oneindigen bundel gedragen zich alle elementairbundels gelijk; gaat men voor één elementairbundeltje de verdeeling der uittredende straling na over de verschillende hoeken, dan moet deze verdeelingswet dezelfde zijn als voor den oneindigen breeden bundel in zijn geheel.

*E.* Integreert men de formule over alle $\vartheta$, dan vindt men de totale verlichting welke de verschillende punten van het stralingsveld krijgen:

$$(27) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{k\pi}\, X^{3/2}} e^{-\frac{3r^2}{4kX^3}} dr.$$

Wanneer men de dikte van een onregelmatig brekende laag laat aangroeien maar daarbij tevens den uitspreidingscoëfficiënt laat afnemen, zoo dat het product $k X$ standvastig is, dan weten wij dat de hoekuitspreiding van den uittredenden bundel onveranderd blijft. Niet aldus echter de zijdelingsche verschuiving der stralen; zij neemt voortdurend toe naarmate de onregelmatig brekende laag dikker wordt.

4. Men kan de uitspreidingswet (26) toepassen op twee opeenvolgende onregelmatig brekende lagen; de einduitkomst is dan *dezelfde* als die welke men vindt door de formule rechtstreeks op de dubbele laag toe te passen. Deze eigenschap is opzichzelf reeds voldoende om de coëfficiënten $m, n, p$ te bepalen, wanneer eenmaal bekend is dat de formule voor den naaldbundel den vorm (15) moet hebben.

5. Evenzoo zijn deze coëfficiënten te vinden, door den vorm (15) te substitueeren in de algemeene differentiaalvergelijking (2) (blz. 12). Wij hebben echter verkozen bij de afleiding der formule voor den naaldbundel alleen gebruik te maken van de uitspreidingswet voor oneindig breede bundels, die den eenvoudigen vorm heeft van de foutenwet en ook proefondervindelijk getoetst is.

**Het wegdoezelen van grenslijnen door een onregelmatig brekenden dampkring. —**

De uitspreidingswet voor een naaldbundel stelt ons in staat allerlei vraagstukken met grensvoorwaarden op te lossen. Beschouwen wij b.v. een donker halfvlak grenzend aan een halfvlak waarop de stralen loodrecht invallen (fig 17). Een straal die invalt op een afstand $\rho$ van de scheidingslijn, geeft aan de andere zijde van den dampkring, in een punt op afstand $r$ van de scheidingslijn, een totale belichting:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{k\pi X^{3/2}}} e^{-\frac{3(r-\rho)^2}{4kX^3}} d\rho\, dr. \quad \text{(vgl. 27)}$$

De verdeeling van het licht over het uittredingsvlak is gegeven door

$$(28)\qquad \frac{\sqrt{3}\,dr}{2\sqrt{k\pi}\,X^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{3(r-\rho)^2}{4kX^3}}\,d\rho = \frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2X\sqrt{kX}}\right)\right],$$

waarin $\Phi$ de waarschijnlijkheidsintegraal voorstelt in de gewone notatie (Vgl. JAHNCKE-EMDE, Funktionentafeln).

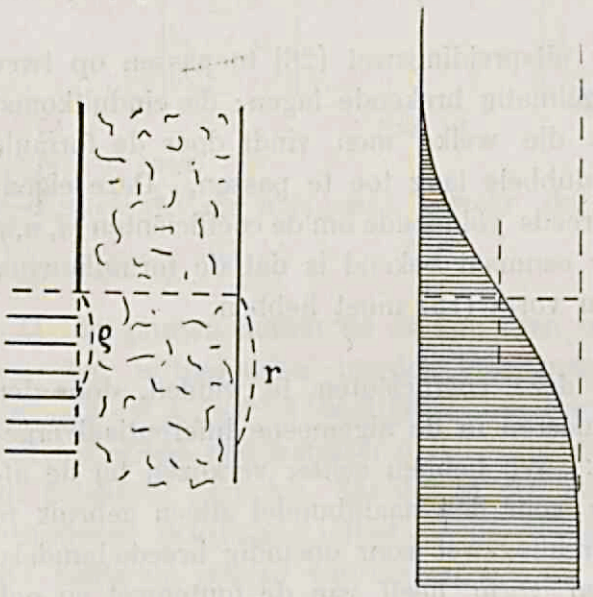



FIG. 17.

Op dezelfde wijze kunnen wij ook een ander vraagstuk oplossen: gegeven een donker halfvlak grenzend aan een halfvlak waarvan de punten in alle richtingen licht uitzenden. Gevraagd hoeveel er aan de andere zijde van den dampkring uittreedt in een richting loodrecht op het grensvlak, en in elk punt van dit vlak. Wij krijgen hiervoor volmaakt dezelfde oplossing als voor het vorige vraagstuk. Deze overeenstemming is geen toeval, zij volgt uit de wederkeerigheidsstelling (vgl. aanhangsel).

## § 6. DE UITSPREIDING VAN EEN NAALDVORMIGEN BUNDEL IN EEN LAAGSGEWIJS OPGEBOUWDEN DAMPKRING.

Voor alle beschouwingen over de onregelmatige breking in gasvormige hemellichamen, is van groot belang het geval van een dampkring waarin de uitspreidingscoëfficiënt $k$ veranderlijk is in de richting der normaal op de grensvlakken, dus alleen een functie van $x$ is (vgl. blz. 19). Wij hebben de uitspreiding van een oneindig breeden bundel in zulk een dampkring

reeds behandeld, en gaan thans over tot het geval van een loodrecht invallenden, naaldvormigen bundel, die in twee afmetingen over geringe hoeken wordt uitgespreid.

**De onregelmatige breking van een naaldvormigen bundel in 2 lagen van verschillenden uitspreidingscoëfficiënt. —**

Beschouwen wij twee aan elkander grenzende lagen van gelijke dikte $x$, met uitspreidingscoëfficiënten $k_1$ en $k_2$. Wij kiezen de $x$-as loodrecht op de richting der grensvlakken, en denken ons een naaldvormigen bundel volgens de $x$-as invallend. In de eerste laag wordt de bundel uitgespreid volgens de verdeelingswet (26); de tweede laag gaat nu deze lichtpluim aan een nieuwe uitspreiding onderwerpen (vgl. blz. 37). Nu hebben wij in rekening te brengen dat de uitspreidingscoëfficiënten van de twee lagen verschillend zijn; de straling die de tweede laag verlaat is:

$$\frac{\sqrt{3}}{2k_1\pi x^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2k_2\pi x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3r^2-3r\vartheta x+\vartheta^2x^2}{k_1x^3}-\frac{3(r'-r-\vartheta x)^2-3(r'-r-\vartheta x)(\vartheta'-\vartheta)+(\vartheta-\vartheta')^2}{k^2x^3}} dr_2\,d\vartheta_2\,dr_1\,d\vartheta_1$$

Dit geeft na uitrekening (formule 11 blz. 36):

(29)
$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi x^2\sqrt{k_1^2+k_2^2+14k_1k_2}}\,e^{-\frac{3r'^2(k_1^2+k_2^2+2k_1k_2)-3r'\vartheta'x(3k_1^2+k_2^2+4k_1k_2)+\vartheta'^2x^2(7k_1^2+k_2^2+8k_1k_2)}{x^3[k_1^3+k_2^3+15k_1k_2(k_1+k_2)]}} dr_2\,d\vartheta_2.$$

Opmerkelijk is het gebrek aan symmetrie der formule ten opzichte der grootheden $k_1$ en $k_2$. Indien men de volgorde der twee lagen verwisselde, zou dus de uittredende bundel volstrekt niet dezelfde uitspreiding vertoonen.

Wij zien hier reeds een bijzonder geval te voorschijn komen van een later te bewijzen algemeene wet: *voor de onregelmatige breking van een naaldvormigen bundel door lagen van veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt, is de volgorde dier lagen in het algemeen niet willekeurig.* Voor een oneindig breeden evenwijdigen bundel gold daarentegen wel de verwisselbaarheid der lagen (blz. 33).

Duidelijk komt dit te voorschijn wanneer we den uitspreidingscoëfficiënt van een der twee lagen *nul* maken. Wanneer $k_1 = 0$ gesteld wordt, gaat de formule (29) eenvoudig over in de uitspreidingswet (26) voor een laag van dikte $x$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi k_2 x^2} e^{-\frac{3r'^2 - 3r'\vartheta' x + \vartheta'^2 x^2}{k_2 x^3}} dr'\, d\vartheta'.$$

Wanneer daarentegen $k_2 = 0$ gesteld wordt, krijgen we een nieuwe uitdrukking:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi k_2 x^2} e^{-\frac{3r'^2 - 9r'\vartheta' x + 7\vartheta'^2 x^2}{k_1 x^3}} dr'\, d\vartheta'.$$

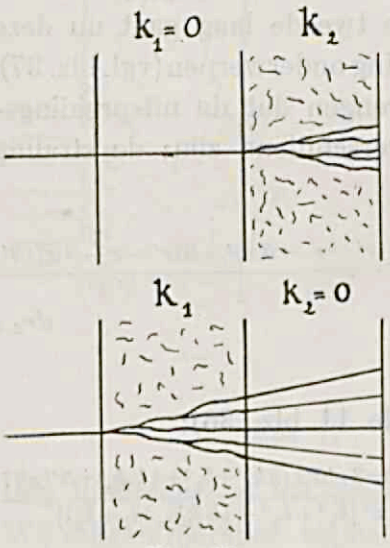


FIG. 18.

Een blik op de figuurtjes 18 verklaart onmiddellijk de oorzaak van dit verschil: terwijl in het eerste geval de laag $k_1$ heelemaal geen invloed uitoefent en even-goed weggedacht kan worden, ziet men dat in het tweede geval de reeds uitgespreide stralen blijven uiteenwijken, en weliswaar geen nieuwe hoekdraaiingen, maar wel een toenemende zijdelingsche verschuiving in de laag $k_2$ ondergaan.

In het algemeen: wanneer men de straling die een onregelmatig brekende laag verlaat, niet aan het grensvlak bestudeert, maar slechts nadat zij een tweede, *homogene* laag van dikte $y$ heeft doorloopen, dan verandert de uitspreidingswet die bij het einde der eerste laag gold nu in zooverre dat $r$ overgaat in $r' - \vartheta' y$, $\vartheta$ in $\vartheta'$. De formule wordt aldus:

$$(30)\quad \frac{\sqrt{3}}{2k\pi x^2} e^{-\frac{3r'^2 - 3r'\vartheta'(x+2y) + \vartheta'^2(x^2+3xy+y^2)}{kx^3}} dr'\, d\vartheta'.$$

**Recurrentieformule voor N → N + 1 lagen.**

Wij volgen een dergelijken gedachtengang zooals in § 5, maar gebruiken een ietwat gewijzigde notatie.

Onderstellen wij dat een naaldvormige lichtbundel, na een reeks lagen met veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt te hebben doorloopen, bij zijn uittreding een verdeelingswet volge gegeven door:

$$(31) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2\pi C} e^{(-3Mr^2 - 3Nr\vartheta + P\vartheta^2)} dr\, d\vartheta;$$

$M, N, P$ zijn functies van de doorloopen laagdikte en hangen af van de wijze waarop de uitspreidingscoëfficiënt verloopt.

Wij voegen nu aan de reeds doorloopen lagen een nieuw laagje toe, dun genoeg opdat wij den uitspreidingscoëfficiënt als gelijk in alle deelen van het laagje kunnen beschouwen. Noem dezen uitspreidingscoëfficiënt $k$, en de dikte van het laagje $x$.

Volgens dezelfde redeneeringswijze welke wij al hebben toegepast op bldz. 38 en op bldz. 47, kunnen wij nu opschrijven welke verandering in de verdeeling der straling het nieuwe laagje veroorzaakt. De uittredende bundel wordt:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi C} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi kx^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[3Mr^2 - 3Nr\vartheta + P\vartheta^2 + \frac{3}{kx^3}(r' - \vartheta x - r)^2 - \frac{3}{kx^2}(r' - \vartheta x - r)(\vartheta' - \vartheta) + \frac{1}{kx}(\vartheta' - \vartheta)^2\right]} dr'\, d\vartheta'\, dr\, d\vartheta.$$

Om symmetrischer en eenvoudiger uitdrukkingen te krijgen, stellen wij tijdelijk:

$$M \,.\, kx^3 = \boldsymbol{M},$$
$$N \,.\, kx^2 = \boldsymbol{N},$$
$$P \,.\, kx = \boldsymbol{P},$$

en krijgen dus te integreeren:

$$\frac{3}{4\,k\,C\,\pi^2\,x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{kx^3}\left\{3r^2(\boldsymbol{M}+1) + 3r[-\boldsymbol{N}\vartheta x + 2(\vartheta x - r') - x(\vartheta - \vartheta')] + \boldsymbol{P}\vartheta^2 x^2 + 3(r' - \vartheta x)^2\right\}} dr'\, d\vartheta'\, dr\, d\vartheta$$

Na een vrij uitvoerige rekening krijgen wij tenslotte een einduitkomst, waarin we $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ weer door hun waarden

vervangen, en die als volgt luidt: de straling die na toevoeging van het nieuwe laagje uittreedt, volgt de uitspreidingswet

$$(32) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2\pi C'} e^{-[3M'r'^2 - 3N'r'\vartheta' + P'\vartheta'^2]} \, dr' \, d\vartheta'$$

waarin:

$$(33) \quad C' = C\sqrt{k^2x^4(4PM - 3N^2) + k(4Mx^3 + 6Nx^2 + 4Px) + 1}$$

$$\begin{cases} M' = \dfrac{1}{x^3} \cdot \dfrac{k x^4 (4PM - 3N^2) + Mx^3}{k^2x^4(4PM - 3N^2) + k(4Mx^3 + 6Nx^2 + 4Px) + 1} \\ N' = \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{k x^4 (4PM - 3N^2) + (2Mx^3 + Nx^2)}{k^2x^4(4PM - 3N^2) + k(4Mx^3 + 6Nx^2 + 4Px) + 1} \\ P' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{k x^4 (4PM - 3N^2) + (3Mx^3 + 3Nx^2 + Px)}{k^2x^4(4PM - 3N^2) + k(4Mx^3 + 6Nx^2 + 4Px) + 1} \end{cases}$$

Aangezien bij een zeer dunne laag, waarin de uitspreidingscoëfficiënt als constant kan worden beschouwd, een verdeelingswet geldt van den vorm (32), is tevens aangetoond dat ook voor lagen van willekeurig veranderenden uitspreidingscoëfficiënt dezelfde wet geldt, doch met veranderde coëfficiënten.

De formules (33) geven ons het middel om één voor één deze coëfficiënten te berekenen voor een toenemend aantal laagjes, elk met hun eigen uitspreidingsvermogen.

**Overgang tot het geval van een willekeurig veranderenden uitspreidingscoëfficiënt.** —

Om de uitspreidingswet te vinden voor een doorloopend veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt, kunnen wij ditmaal niet meer de eenvoudige methode toepassen welke in het vorige hoofdstuk gebruikt is; wij dienen hier een algemeener methode te volgen. Men kan n.l. beproeven na te gaan hoe de stralingsverdeeling gewijzigd wordt door toevoeging van een *oneindig dun* laagje aan de reeds aanwezige lagen. Over deze oneindig kleine veranderingen is daarna te integreeren.

Wij gebruiken de laatst afgeleide uitdrukkingen (33), en gaan over tot de grens voor oneindig kleine $x$; wij ontwikkelen tot de eerste macht in $x$ en verwaarloozen alle grootheden die van hoogere orde oneindig klein worden. Er komt:

$$\begin{cases} C' = C\sqrt{1 + 4\,kx\,P} \\ M' = [M + kx\,(4\,MP - 3\,N^2)]\,[1 - 4\,kx\,P] \\ N' = (N + 2\,Mx)\,(1 - 4\,kx\,P) \\ P' = (P + 3\,Nx)\,(1 - 4\,kx\,P). \end{cases}$$

Hieruit volgt het stelsel gelijktijdige differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dx} = 2\,k\,P \tag{34}$$

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = -3\,k\,N^2 & (35) \\ \frac{dN}{dx} = 2\,M - 4\,k\,N\,P & (36) \\ \frac{dP}{dx} = 3\,N - 4\,k\,P^2 & (37) \end{cases}$$

waarin $k$ een willekeurige functie van $x$ is.

Het gelukt op het spoor te komen van de oplossing, door uit natuurkundige overwegingen een voorwaarde te halen waaraan de functies $C$, $M$, $N$, $P$ hebben te voldoen.

Wij weten immers, dat *voor een oneindig breeden, evenwijdigen bundel*, de hoekuitspreiding onafhankelijk is van de wijze waarop de uitspreidingscoëfficiënten tusschen de verschillende lagen verdeeld zijn, en dat zij alleen bepaald wordt door de integraal $\int k\,(x)\,dx$. (Vgl. blz. 33). En wij weten ook, dat voor een naaldvormigen bundel die uiteengespreid is, de stralen over de verschillende hoekrichtingen op dezelfde wijze verdeeld zijn als bij den oneindig breeden bundel. *Wanneer wij dus de uitspreidingswet* (31) *over alle r integreeren, moet het resultaat*

$$\frac{1}{2\,C\sqrt{\pi\,M}}\,e^{-\frac{4\,MP - 3\,N^2}{4\,M}\,\vartheta^2}\,d\,\vartheta \tag{38}$$

*identiek zijn met de wet van den oneindig breeden bundel:*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\int_0^x k\,dx}}\,e^{-\frac{\vartheta^2}{4\int_0^x k\,dx}}\,d\,\vartheta.$$

Vandaar de betrekkingen:

$$C = \sqrt{\frac{\int_0^x k\,dx}{M}} \tag{39}$$

$$4P - \frac{3N^2}{M} = \frac{1}{\int_0^x k\,dx}. \tag{40}$$

Een nader onderzoek toont dat het voldoen aan de differentiaalvergelijkingen en aan één dezer voorwaarden, onmiddellijk voor gevolg heeft dat ook aan de andere voorwaarde voldaan is.

De voorwaarde (30) geeft ons nu den sleutel voor de oplossing.

Immers, uit (36) en (40) volgt door elimineeren van $P$:

$$\dot{N} = 2M - \frac{Nk}{\int_0^x k\,dx} - \frac{3kN^2}{M}.$$

Uit deze laatste vergelijking en (35) wordt $N$ geëlimineerd; in geval van twijfel over het teeken der wortelvormen, kan men zich van de juistheid vergewissen door even $k = \text{const.}$ te stellen, en $M = \frac{1}{kx^3}$; aan de vergelijking moet dan voldaan zijn.

$$\ddot{M} - \frac{2\dot{M}^2}{M} + \dot{M}\left(\frac{2k}{\int_0^x k\,dx} - \frac{\dot{k}}{k}\right) + 4M\sqrt{-3k\dot{M}} = 0.$$

Stel $M = \frac{1}{y}$. Dan wordt de vergelijking ineens veel eenvoudiger.

$$\ddot{y} + \dot{y}\left(\frac{2k}{\int_0^x k\,dx} - \frac{\dot{k}}{k}\right) - 4\sqrt{3k\dot{y}} = 0.$$

De substituties $\dot{y} = z$ en $z = t^2$ herleiden deze vergelijking tot een lineaire vergelijking van de 1e orde, waarvan de oplossing luidt:

$$(41)\quad t = e^{-\int\left(\frac{k}{\int^x k\,dx}-\frac{\dot{k}}{2k}\right)dx}\left[c+2\sqrt{3}\int\sqrt{k}\,e^{\int\left(\frac{k}{\int^x k\,dx}-\frac{\dot{k}}{2k}\right)dx}\,dx\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{\int^x k\,dx}\left[c+2\sqrt{3}\iint^x k\,dx\right].$$

Dus wordt

$$M = \frac{1}{\int \frac{k}{\left(\int^x k\,dx\right)^2}\left(c+2\sqrt{3}\iint^x k\,dx\right)^2 dx}$$

De bepaling der constante $c$ en der integratiegrenzen vereischt nader overleg. Wanneer $x$ tot 0 nadert, zal $k$ naderen tot een vaste waarde; dan weten wij (blz. 42) dat $M$ nadert tot $\frac{3}{kx^3}$, dus de noemer van $M$ tot 0. Voor $k$ constant wordt echter deze noemer:

$$\frac{1}{k}\int\frac{dx}{x^2}\left(c+2\sqrt{3}\iint^x k\,dx\right)^2;$$

zal deze uitdrukking tot nul naderen voor $x=0$, dan moet de haakjesvorm ook tot nul naderen. Dit beteekent dat $c=0$, en dat de haakjesvorm moet overgaan in $2\sqrt{3}\int\int^x k\,dx$. De geheele noemer van $M$ nadert dus tot const. $\int x^2 dx$; om zeker te zijn dat hij tot nul zal naderen voor $x=0$, moeten we dus nog de grenzen der integraal aangeven: $0-x$.

Ten slotte wordt dus

$$(42)\quad M = \frac{1}{12\int \frac{k\left(\int\int k\,dx\right)^2}{\left(\int k\,dx\right)^2}\,dx}$$

Eenvoudigheidshalve zullen wij de volgende notaties invoeren:

$$(43)\quad \begin{aligned} K_1 &= \int k\,dx \\ K_2 &= \int K_1\,dx \\ K_3 &= \int K_2\,dx \end{aligned}$$

In de uitdrukking (42) voor $M$ voeren wij deze notaties in. Tevens wordt op den noemer partieele integratie toegepast.

$$M = \frac{1}{12\int \frac{k K_2^2}{K_1^2}\,dx} = \frac{1}{12\left(-\frac{K_2^2}{K_1} + 2\int \frac{K_1 K_2}{K_1}\,dx\right)} = \frac{K_1}{12\,(2 K_1 K_3 - K_2^2)}.$$

Thans zijn ook de andere onbekenden gemakkelijk op te lossen door achtereenvolgens van de vergelijkingen (35), (39) en (34) gebruik te maken.

De grenzen der integralen zijn evenals voor $M$ te vinden.

$$N = \frac{K_2}{6\,(2 K_1 K_3 - K_2^2)} \qquad P = \frac{K_3}{2\,(2 K_1 K_3 - K_2^2)}$$

$$C = 2\sqrt{3\,(2 K_1 K_3 - K_2^2)}.$$

In de algemeene uitdrukking (31) van de uitspreidingswet kunnen wij nu de verschillende functies substitueeren, en vinden tenslotte:

(44) $$f(x,\vartheta,r)\,dr\,d\vartheta = \frac{1}{4\pi\sqrt{2 K_1 K_3 - K_2^2}}\; e^{-\frac{1}{2 K_1 K_3 - K_2^2}\left(\frac{K_1}{4} r^2 - \frac{K_2}{2} r\vartheta + \frac{K_3}{2}\vartheta^2\right)}\, dr\,d\vartheta.$$

Deze formule is toepasselijk op het geval van een onregelmatig brekenden dampkring, waarvan de uitspreidingscoëfficiënt alleen afhangt van de coördinaat $x$, loodrecht op de grensvlakken, en verloopt volgens de functie $k(x)$ (Vgl. fig. 4b). Een naaldvormige lichtbundel valt loodrecht in op een der grensvlakken, en wordt in den dampkring uitgespreid over hoeken die klein worden gedacht; het vraagstuk is 2-dimensionaal behandeld (blz. 10). De formule geeft de lichtsterkte van de stralen, die een laagdikte $x$ hebben doorloopen en uittreden onder een hoek $\vartheta$ met de normaal, op een afstand $r$ van het punt waar de rechtdoorgaande straal uittreedt (fig. 14); de letters $K_1$, $K_2$, $K_3$ zijn de 1e, 2e, 3e integraalfunctie van $k$ naar $x$ (blz. 53).

1. Deze zeer gewichtige formule geeft ons, behoudens de reeds vermelde beperkingen, de oplossing van het fundamenteele vraagstuk der onregelmatige breking, toegepast op den dampkring van hemellichamen. Wij merken op, dat in deze uitdrukking de functie $k(x)$ nergens optreedt tenzij onder het integraalteeken; inderdaad zou een factor $k(x)$ beteekenen dat *het laatste* laagje een overwegend groot belang krijgt voor de uitspreiding, en zulk een overwegend belang bestaat geens-

zins. Ook de asymmetrie der formule t. o. van $r$ en $\vartheta$ is in het oog vallend.

Men kan gemakkelijk nagaan dat de uitspreidingswet (34) onder meer al de bijzondere gevallen omvat welke wij reeds hebben behandeld: inzonderheid de gevallen:

$$k = \text{const.}$$

$$\begin{cases} k = \text{const.} & \text{voor } 0 < x < X \\ k = 0 & \text{voor } X < x < 2X \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = k_1 & \text{voor } 0 < x < X \\ k = k_2 & \text{voor } X < x < 2X \end{cases}$$

Zij gaat dan over in de uitdrukkingen (26), (29), bldz. 42 en 47.

Een ander eenvoudig geval is $k = x^s$ met $s \geqq 0$ of $\leqq -4$; in dit geval is de verdeelingswet:

$$\frac{(s+2)\sqrt{(s+1)(s+3)}}{4\pi x^{s+2}} e^{-\frac{(s+2)^2(s+3)}{4x^{s+3}}r^2 + \frac{(s+2)(s+3)}{2x^{s+2}}r\vartheta - \frac{s+2}{2x^{s+1}}\vartheta^2} dr\,d\vartheta$$

Bij de toepassing der formule dient streng te worden gelet op de juiste beteekenis van $K_1$, $K_2$, $K_3$. Voor $k = \sin x$ b.v. worden

$$K_1 = 1 - \cos x,$$
$$K_2 = x - \sin x,$$
$$K_3 = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1.$$

3. Wat kan men uit de waarneming van het uittredende licht besluiten omtrent de samenstelling van de laag?

De waarnemer dient *4 metingen* uit te voeren van de uittredende lichtsterkte, voor 4 paren van waarden $r$ en $\vartheta$; *daarmee is in beginsel de uittredende straling volkomen bekend, en alles waargenomen wat er waar te nemen valt.*

De getallen $K_1$, $K_2$, $K_3$ zijn kenmerkend voor iederen bepaalden dampkring; twee onregelmatig brekende middenstoffen met gelijke $K_1$, $K_2$, $K_3$ geven dezelfde lichtuitspreiding aan een naaldvormigen bundel, maar hoeven volstrekt niet hetzelfde verloop van $k(x)$ te vertoonen. Neemt men echter aan dat de uitspreidingscoëfficiënt van de laag voorgesteld kan worden door een lineaire functie $k = k_0 + k'x$, dan volstaan de ver-

gelijkingen voor het berekenen van $k_0$, $k'$ en $x$; deze laatste grootheid komt in absolute afmeting te voorschijn, in dezelfde eenheid waarin $r$ bepaald is.

Vier waarnemingen van de uittredende straling zijn dus voldoende om te berekenen: de lichtsterkte van den naaldvormigen bundel die op de onregelmatig brekende stof is ingevallen; de laagdikte, den gemiddelden uitspreidingscoëfficiënt en den gemiddelden gradiënt ervan, in de onderstelling dat deze ongeveer lineair verloopt. *Meer kan men door studie van de uittredende straling niet te weten komen*; althans zoolang wij ons beperken tot de aangegeven omstandigheden en benaderingen.

**De graphische voorstelling van de uitspreidingswet.** — De meest kenmerkende eigenaardigheid van de uitspreidingswet voor een naaldvormigen bundel, is het vaste verband dat bestaat tusschen de hoekdraaiing en de zijdelingsche verschuiving die de uittredende lichtstralen hebben ondergaan. In ietwat gewijzigden vorm komt dit verband te voorschijn, wanneer wij de uitspreidingswet aldus schrijven [1]):

$$(47)\quad f\,dr\,d\vartheta = \frac{1}{4\pi\sqrt{2K_1K_3 - K_2^2}}\, e^{-\frac{1}{2K_1K_3 - K_2^2}\left(\frac{K_1X^2}{4}\frac{r^2}{X^2} - \frac{K_2X}{2}\cdot\frac{r}{X}\vartheta + \frac{K_3}{2}\vartheta^2\right)} dr\,d\vartheta.$$

Als twee kenmerkende coördinaten treden hier op: de hoek $\vartheta$ van den uittredenden straal met de normaal; en de hoek $\frac{r}{X}$ van den straal die rechtstreeks van het in- naar het uittredingspunt loopt (fig. 19).

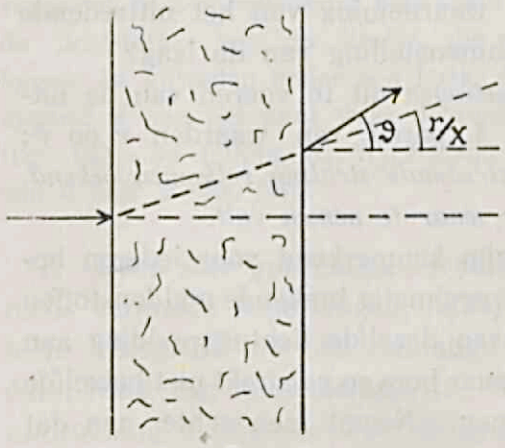


FIG. 19.

Wij kunnen nu het verband tusschen $\frac{r}{X}$ en $\vartheta$ aanschouwelijk voorstellen, door een schaar krommen te teekenen met deze coördinaten, parametrisch in $X$ en

[1]) De laagdikte is ditmaal aangegeven door $X$, ter onderscheiding van de loopende coördinaat $x$.

in de lichtsterkte; de vergelijking dezer kurven volgt uit (37):

$$(48)\quad \frac{K_1 X^2}{4}\frac{r^2}{X^2} - \frac{K^2 X}{2}\frac{r}{X}\vartheta + \frac{K_3}{2}\vartheta = -(2K_1K_3 - K_2^2)(\log f + \log 4\pi\sqrt{2K_1K_3 - K_2^2})$$

Zij is van den tweeden graad. De beschouwde kurven zijn altijd *ellipsen*, want volgens (48) is de discriminant

$$K_2^2 - 2K_1K_3 = -\int \frac{k K_2^2}{K_1^2}\,dx < 0;$$

$k$ is immers altijd positief, dus ook de geheele integraal. Deze ellipsen zijn *concentrisch* en hebben hun *middenpunt* bij $r/_X = 0$, $\vartheta = 0$. Voor een gegeven dampkring worden hun *assen* des te kleiner naarmate de procentueele lichtsterkte $f$ toeneemt; met toenemende $X$ worden zij eerst grooter, daarna weer kleiner; de helling der assen blijft daarbij echter onveranderd.

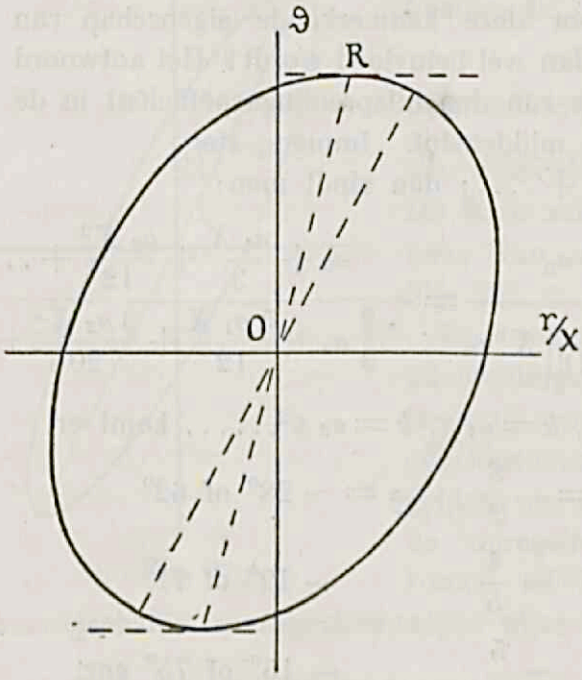


FIG. 20.

Wij kunnen gemakkelijk berekenen in welk punt $R$ de raaklijn aan de ellipsen horizontaal zal loopen. De vergelijking der kurve is van den vorm $F(r/_X, \vartheta) = C$; nu is $\frac{\partial F}{\partial r/_X} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dr/_X} = 0$, dus $\frac{d\vartheta}{dr/_X} = 0$, indien $\frac{\partial F}{\partial r/_X} = 0$, en dit is het geval wanneer tusschen de coördinaten $\vartheta^*$, $r/_X{}^*$ van het raakpunt de betrekking bestaat:

$$\frac{\vartheta^*}{r/_X{}^*} = \frac{K_1}{K_2}$$

Dit beteekent dat *de raakpunten* voor alle ellipsen op één-

zelfde schuine lijn door den oorsprong liggen; aangezien $K_1$ en $K_2$ altijd positief zijn, komen die raakpunten in het 1e en 3e kwadrant te liggen, wat slechts kan indien ook de groote as door deze kwadranten loopt,

*De hoek $\alpha$ der assen* met de $r/x$-as volgt uit de formule:

$$\text{(49)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 K_2 X}{2 K_3 - K_1 X^2}$$

Verandert dus de uitspreidingscoëfficiënt overal in de onregelmatig brekende laag, en wel in dezelfde verhouding, dan verandert de helling der assen van de ellips niet. Men kan zich afvragen waardoor deze kenmerkende eigenschap van de uitspreidingsellips dan wèl beïnvloed wordt? Het antwoord luidt: door *het verloop* van den uitspreidingscoëfficiënt in de onregelmatig brekende middenstof. Immers, stel $k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$; dan vindt men:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sum_n \frac{2}{(n+2)!} X^n a_n}{\sum_n \left[\frac{2}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] X^n a_n} = -\frac{a_0 + \frac{a_1 X}{3} + \frac{a_2 X^2}{12} + \ldots}{\frac{2}{3} a_0 + \frac{5 a_1 X}{12} + \frac{3 a_2 X^2}{20} + \ldots}$$

In de gevallen $k = a_0$, $k = a_1 x$, $k = a_2 x^2$, ..... komt er

| | | |
|---|---|---|
| $k = a_0$ | $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{2}$ | $\alpha = -28°$ of $62°$ |
| $a_1 x$ | $-\frac{4}{5}$ | $-19°$ of $71°$ |
| $a_2 x^2$ | $-\frac{5}{9}$ | $-15°$ of $75°$ enz. |

In het geval $k = a_0 + a_1 x$,

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{a_1 X}{a_0} = -1$ | $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{8}{3}$ | $\alpha = -35°$ of $55°$ |
| 0 | $-\frac{3}{2}$ | $-28°$ of $62°$ |
| 1 | $-\frac{16}{13}$ | $-25°$ of $65°$ |
| $\infty$ | $-\frac{4}{5}$ | $-15°$ of $75°$ |

De groote as der ellips gaat dus des te meer rechtop staan, naarmate de sterkst uitspreidende lagen meer naar het achterste deel van den dampkring worden geplaatst (d. i. naar het laatste gedeelte van de baan der lichtstralen).

De verdeeling der uitspreidingscoëfficiënten heeft ook invloed op de verhouding des assen van de ellips, zooals men gemakkelijk verder zou kunnen nagaan.

*Voor een laag van overal gelijken brekingsaanwijzer* heeft de uitspreidingsellips een assenverhouding $\sqrt{\frac{4-\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}}} = \boxed{\frac{1}{4{,}35}}$ en de groote as helt $\frac{1}{2}$ bg tg $\frac{3}{2} = \boxed{28°}$ ten opzichte van de verticaal. Dit is in zekeren zin *de normaalvorm* van de uitspreidingsellips (fig. 21).

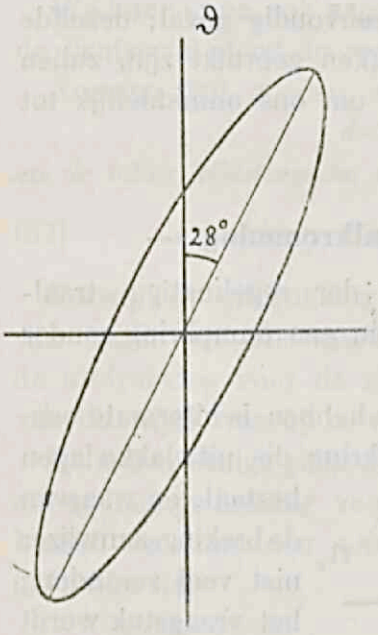


Fig. 21.

Zoo weerspiegelen zich in de uitspreidingsellipsen de verschillende uitspreidingswetten die voor een naaldvormigen bundel kunnen gelden; de eigenaardigheden van de onregelmatig brekende laag komen bij het onderzoek dezer kurvenscharen op aanschouwelijke wijze te voorschijn.

## § 7. DE SAMENWERKING VAN REGELMATIGE EN ONREGELMATIGE BREKING BIJ HET KROMMEN EN UITSPREIDEN VAN EEN NAALDVORMIGEN BUNDEL.

De tot hiertoe ontwikkelde beschouwingen hadden betrekking op een dampkring waarvan de gemiddelde brekingsaanwijzer $n$ overal dezelfde is, terwijl de uitspreidingscoëfficiënt $k$ willekeurig verandert van de eene laag tot de andere. Voor de astrophysische toepassingen dienen wij echter ook rekening te houden met het feit, dat in het algemeen de dichtheid van

den dampkring met de hoogte zal afnemen, zoodat de gemiddelde brekingsaanwijzer uit dien hoofde een stelselmatig verloop zal vertoonen.

Het vraagstuk dient thans te worden gesteld, hoe deze groote, algemeene straalkrommingen zich met de kleine onregelmatige verbinden; met andere woorden: hoe de zonnetheorieën van SCHMIDT en JULIUS in éénzelfde wiskundige betrekking vereenigd kunnen worden.

Wij zullen dit nagaan voor een eenvoudig geval; dezelfde methodes die in de vorige hoofdstukken gebruikt zijn, zullen blijken voldoende kracht te bezitten om ons onmiddellijk tot de oplossing te voeren.

**De werking der regelmatige straalkromming. —**

Laten wij vooreerst de werking der regelmatige straalkromming afzonderlijk onderzoeken, in een dampkring zonder ongelijkmatige dichtheidsgradiënten.

Het geval waarmee wij te maken hebben is uitermate eenvoudig. Wij beschouwen een dampkring die uit vlakke lagen bestaat, en waarvan de brekingsaanwijzer niet veel verandert; het vraagstuk wordt weer tweedimensionaal behandeld.

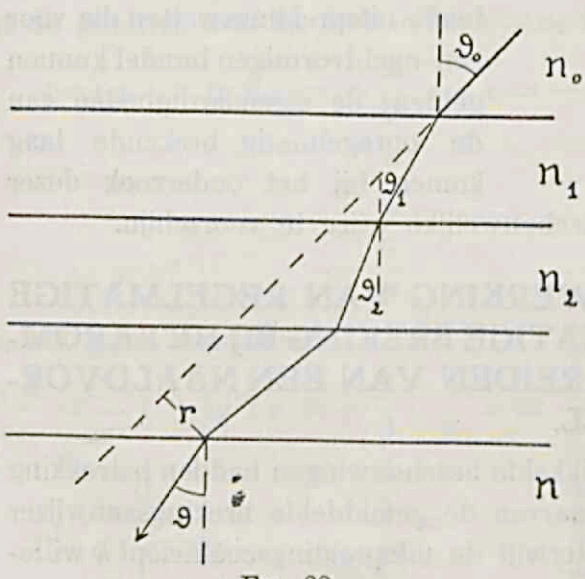


FIG. 22.

Noem $\vartheta$ den invalshoek van een straal op een der laagjes waaruit de dampkring bestaat; zij $n$ de brekingsaanwijzer van dit laagje, dan geldt voor elk grensvlak (fig. 22):

$$\sin \vartheta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1, \tag{50}$$

en algemeen is de uittredingshoek gegeven door:

$$\sin \vartheta = \frac{n_0}{n} \sin \vartheta_0. \tag{51}$$

Als de krommingen klein blijven, wordt *de totale hoekdraaiing* van een straal die den geheelen dampkring heeft doorloopen:

$$\vartheta_0 - \vartheta = \left(\frac{n - n_0}{n_0}\right) \operatorname{tg} \vartheta_0 \tag{52}$$

Wij kunnen nu ook nagaan welke zijdelingsche verschuiving $r$ de lichtstraal door de regelmatige breking ondergaat (fig. 22.)

Noemen wij $x$ den afgelegden weg, dan is klaarblijkelijk

$$dr = (\vartheta - \vartheta_0)\, dx$$

en *de totale zijdelingsche verschuiving:*

$$r = \int (\vartheta - \vartheta_0)\, dx = \operatorname{tg} \vartheta_0 \int \frac{(n - n_0)}{n_0}\, dx \tag{53}$$

Terwijl de uitdrukking voor de hoekdraaiing alleen afhing van begin- en eindwaarde van den brekingsaanwijzer, hangt de uitdrukking voor de zijdelingsche verschuiving ook nog af van de wijze waarop $n$ verloopt.

Er is hier eenige gelijkenis met de uitspreidingswetten voor de onregelmatige breking van den oneindig breeden evenwijdigen bundel en van den naaldvormigen bundel (7) blz. 34 en (44) blz. 54.

**De samenwerking van regelmatige en onregelmatige straalbreking voor een oneindig breeden evenwijdigen bundel.** —

Beschouwen wij thans een onregelmatig brekenden dampkring waarin zoowel de uitspreidingscoëfficiënt $k$ als de gemiddelde brekingsaanwijzer $n$ van laag tot laag veranderen volgens willekeurige functies van $x$. „Mirkoskopisch" beschouwd is het verloop van den brekingsaanwijzer langs een bepaalde lijn dus voorgesteld door een kurve in den aard van fig. 23 (Vgl. blz. 19).



Fig. 23.

Het zou volkomen fout zijn, wanneer men zich de samenwerking van regelmatige en onregelmatige breking zonder meer als additief ging denken; wij zullen zien dat beide verschijnselen op veel ingewikkelder wijze in elkaar grijpen. Additief is die samenwerking alleen in oneindig dunne laagjes, op dezelfde wijze zooals wij de hoekdraaiing en de zijdelingsche verschuiving der lichtstralen als samenwerkend hebben beschouwd (blz. 36); het is datzelfde belangrijke beginsel dat in de wiskundige natuurbeschrijving elk oogenblik wordt toegepast, en dat tot uitdrukking komt in de formule van TAYLOR voor twee veranderlijken.

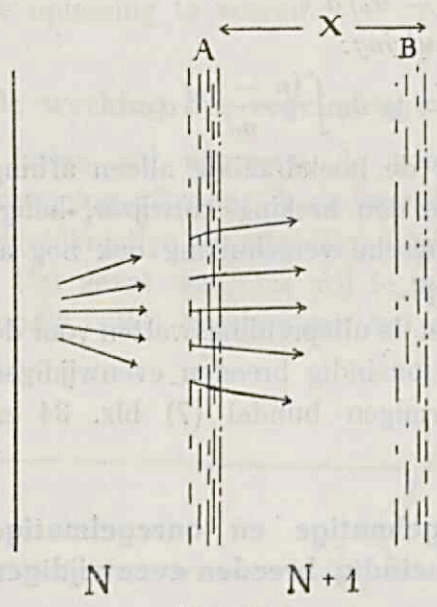


FIG. 24.

Wij kunnen ons bijvoorbeeld volgens fig. 24 aanschouwelijk voorstellen, dat de dampkring opgebouwd is uit laagjes van dikte $x$, en dat de gemiddelde brekingsaanwijzer telkens na een laagje, in een klein gebied $A$, $B$ nabij het scheidingsvlak van het volgende, een gewijzigde waarde krijgt. In het laagje $x$ wordt de aankomende bundel onregelmatig gebroken, nabij het scheidingsvlak zal nu de regelmatige breking aan de convergeerende of divergeerende bundeltjes die door de onregelmatige breking waren ontstaan een sterkere of een minder sterke con- of divergentie geven; haar werking zal des te aanzienlijker zijn, naarmate de bundels reeds een grootere hoekuitspreiding hadden ondergaan. Deze opmerking is op zichzelf al voldoende om ons eenig inzicht te geven in de ingewikkelde wijze waarop de werkingen der regelmatige en onregelmatige breking in elkaar grijpen.

Wij laten nu een oneindig breeden bundel evenwijdige stralen invallen, loodrecht op het grensvlak van den dampkring. Stel dat na het $N^e$ laagje, bij het vlak $A$, de uitspreidingswet geldt:

$$(54) \qquad \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{a\vartheta^2}{4b}} d\vartheta.$$

Nu komt de bundel in het kleine gebied waarin de *regelmatige* breking werkt; stralen die anders zouden uittreden onder een hoek $\vartheta$, treden nu uit onder een hoek $\vartheta^* = \vartheta \frac{n}{n'}$, (vgl. (51) voor kleine invalshoeken), en de uitspreidingswet wordt:

$$(55) \qquad \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi b}} \cdot \frac{n'}{n} \cdot e^{-\frac{a\vartheta^{*2}}{4b}\frac{n'^2}{n^2}} d\vartheta^*.$$

Vervolgens komt de *onregelmatige* breking in het volgende laagje $B\,C$, waarin de gemiddelde brekingsaanwijzer zijn waarde $n'$ behoudt. De verdeelingswet verandert nu aldus:

$$(56) \qquad \frac{n'}{n} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \cdot \int e^{-\frac{a\vartheta^{*2}}{4b}\frac{n'^2}{n^2}} \cdot e^{-\frac{(\vartheta^* - \vartheta')^2}{4k'x}} d\vartheta'\, d\vartheta^* =$$

$$= \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi\left(b + \frac{n'^2}{n^2} a k x\right)}} e^{-\frac{\vartheta'^2}{4\left(b + a k x \frac{n'^2}{n^2}\right)\frac{n'^2}{n^2}}} d\vartheta' = \frac{\sqrt{a'}}{2\sqrt{\pi b'}} e^{-\frac{a'\vartheta'^2}{4b'}} d\vartheta'.$$

Hieruit ziet men dat de wet haren vorm (44) behoudt, maar dat de coëfficiënten aldus veranderen:

$$a' = \frac{n'^2}{n^2} a.$$

$$b' = b + \frac{n'^2}{n^2} a k x = b + a' k x.$$

Men beschouwe nu oneindig veel laagjes en passe de formules herhaaldelijk toe; $a$ wordt

$$a = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n_x}{n_x - 1}\right)^2 = \left(\frac{n_x}{n_0}\right)^2;$$

$b$ vermeerdert telkens met $k\,x$, vermenigvuldigd met de daar ter plaatse geldende $a$, en wordt:

$$b = \int_0^x k \frac{n^2}{{n_0}^2} d\,x.$$

En de verdeelingswet krijgt den vorm:

$$(57) \qquad \boxed{\frac{n_x}{2\sqrt{\pi \int_0^x k n^2 dx}} e^{-\frac{n^2_x \vartheta^2}{4 \int_0^x k n^2 dx}}}$$

Deze formule geeft aan, hoe de lichtsterkte van een oorspronkelijk evenwijdigen bundel over de verschillende hoeken $\vartheta$ verdeeld is, nadat de bundel een afstand $x$ heeft doorloopen in den dampkring. In den dampkring zijn de uitspreidingscoëfficiënt $k$ en de brekingsaanwijzer $n$ standvastig in elke laag evenwijdig aan de grensvlakken; loodrecht daarop veranderen zij volgens willekeurige functies van $x$ (fig. 4b blz. 19 en blz. 61). De lichtbundel valt loodrecht op de grensvlakken in, en wordt slechts over kleine hoeken uitgespreid; het vraagstuk is 2-dimensionaal behandeld.

Terwijl de uitspreidingscoëfficiënt alleen onder het integraalteeken voorkomt, staat de brekingsaanwijzer ook daarbuiten; dit beteekent dat de brekingswijzer *van de laatst doorloopen laag* een grooten invloed heeft op den uittredenden bundel.

Men kan gemakkelijk inzien dat dit inderdaad zoo moet zijn. (Vgl. nog blz. 54).

**De samenwerking van regelmatige en onregelmatige straalbreking voor een naaldvormigen bundel. —**

Dit vraagstuk wordt op dergelijke wijze als het vorige behandeld, daarbij echter voortdurend aansluitend bij de rekeningen van § 6.

Laat de uitspreidingswet in het vlak A (fig. 24) na $N$ lagen gegeven zijn door

$$(58) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2\pi C} e^{-(3Mr - 3Nr\vartheta + P\vartheta^2)} \, dr \, d\vartheta.$$

In het $(N+1)^e$ laagje wordt de straling vooreerst *onregelmatig* uitgespreid [1]); de uitspreidingswet behoudt haar vorm, maar de coëfficiënten $M, N, P, C$ veranderen in $M^*, N^*$,

[1]) Het is voor deze berekening iets doelmatiger eerst de onregelmatige, daarna de regelmatige breking te beschouwen; in de vorige paragraaf is de tegenovergestelde volgorde gekozen (bldz. 62) wat natuurlijk bij overgang tot de grens op hetzelfde neerkomt.

$C^*$, $P^*$ (vgl. (33). Nu komt de *regelmatige* breking, waardoor de stralen die anders in $B$ zouden uittreden onder den hoek $\vartheta^*$, nu uittreden onder den hoek

$$(59) \qquad \vartheta' = \frac{n^*}{n'}\,\vartheta^* = \frac{n^*\,\vartheta^*}{n' + \frac{dn}{dx}\,x} = \vartheta^*\left(1 - \frac{\dot{n}}{n}\,x\right).$$

Wij vinden dus de nieuwe uitspreidingswet door in (58) overal $\vartheta^*$ te vervangen door $\vartheta'\left(1 + \frac{\dot{n}}{n}\,x\right)$. Tevens worden:

$$C' = C^*\left(1 - \frac{\dot{n}}{n}\,x\right)$$

$$(60) \qquad \begin{cases} M' = M^* \\ N' = N^*\left(1 + \frac{\dot{n}}{n}\,x\right) \\ P' = P^*\left(1 + 2\,\frac{n'}{n}\right) \end{cases}$$

De differentiaalvergelijkingen (34) — (37) worden thans vervangen door een gewijzigd stelsel:

$$\frac{1}{C}\,\frac{dC'}{dx} = 2\,P\,k - \frac{\dot{n}}{n}.$$

$$(61) \qquad \begin{cases} \frac{dM'}{dx} = -3\,k\,N^2. \\ \frac{dN'}{dx} = 2\,M - 4\,N\,P\,k + \frac{\dot{n}}{n}\,N. \\ \frac{dP'}{dx} = 3\,N - 4\,k\,P^2 + 2\,\frac{\dot{n}}{n}\,P. \end{cases}$$

Om dit stelsel op te lossen, zoeken wij naar een betrekking tusschen $M', N', P', C'$ (vgl. blz. 51); die vinden wij uit den eisch, dat de integratie over alle $\vartheta$ ons terug moet voeren tot de formule (57) voor een oneindig breeden bundel; dus is:

$$(62) \qquad 4\,P' - \frac{3\,N'^2}{M'} = \frac{n^2}{\int_0^x k\,n^2\,dx}.$$

Verder verloopt de oplossing geheel zooals in vorige paragraaf, en er komt:

$$M = \frac{1}{12\int \frac{kn^2\left[\int \frac{dx}{n}\int kn^2\,dx\right]^2}{\left(\int kn^2\,dx\right)^2}} = \frac{H_1}{12\,(2\,H_1\,H_3 - H_2^2)}$$

waarin

$$H_1 = \int_0^x kn^2\,dx$$

(63)
$$H_2 = \int_0^x \frac{H_1}{n}\,dx$$

$$H_3 = \int_0^x \frac{H_2}{n}\,dx.$$

Evenzoo worden $N$, $P$, en $C$ berekend, en tenslotte wordt de uitspreidingswet:

(64)
$$\frac{n_x}{4\pi\sqrt{2\,H_1\,H_3 - H_2^2}}\,e^{-\frac{1}{2\,H_1\,H_3 - H_2^2}\left(\frac{H_1}{4}r^2 - \frac{H_2}{2}n_x\vartheta r + \frac{H_3}{2}n_x^2\vartheta^2\right)}\,dr\,d\vartheta$$

Een naaldvormige bundel valt loodrecht in op het grensvlak van een dampkring; uitspreidingscoëfficiënt $k$ en gemiddelde brekingsaanwijzer $n$ van dezen dampkring zijn standvastig in elk vlak evenwijdig aan de twee grensvlakken, maar veranderen loodrecht daarop volgens willekeurige functies van $x$. De krommingen worden klein ondersteld en het vraagstuk is 2-dimensionaal behandeld. De formule geeft de lichtsterkte die uittreedt onder een hoek $\vartheta$, op een afstand $r$ van het uittredingspunt der rechtdoorgaande stralen. $H_1$, $H_2$, $H_3$ zijn bepaalde integralen over $k$ en $n$ (zie (63)).

Men ziet dat de uitspreidingswet aldus herleid is tot een dergelijke overzichtelijke, harmonisch opgebouwde formule, als gold voor de onregelmatige breking alleen (blz. 54). De grootheden $H$ spelen hiér dezelfde rol als de grootheden $K$ daàr; de hoek $\vartheta$ is vervangen door $n\vartheta$. Voor $n = \text{const.}$ gaat de uitdrukking (64) over in (44).

De wijze waarop uitspreidingscoëfficiënt en brekingsaanwijzer

beide tegelijk onder elk der integraalteekens voorkomen, is kenschetsend voor de innige wisselwerking tusschen regelmatige en onregelmatige breking, die zich aan dit zeer een voudige voorbeeld treffend openbaart.

## § 8. DE UITSPREIDING VAN EEN SCHUIN INVALLENDEN BUNDEL, IN EEN DAMPKRING BEGRENSD DOOR TWEE EVENWIJDIGE VLAKKEN.

(2 Afmetingen).

De kennis der uitspreidingswet voor een naaldvormigen bundel stelt ons in staat het geheele stralingsveld van zulk een bundel te beschrijven. Telkens dat wij te maken hebben met vraagstukken waarbij grensvoorwaarden een rol spelen, zullen wij uit deze uitspreidingswet partij kunnen trekken.

Een der belangrijkste gevallen van dien aard is dat van een dampkring, begrensd door twee evenwijdige vlakken, welke getroffen wordt door een schuin invallenden naaldvormigen of oneindig breeden stralenbundel. De invalshoek moge groot zijn, de uitspreidingshoeken echter worden gering ondersteld. Het vraagstuk is tweedimensionaal op te lossen. — Wij hebben reeds in paragraaf 4 de uitspreiding van een schuinen bundel geschat, maar daarbij de onnauwkeurigheid der uitkomsten doen opmerken. De werkwijze die wij thans zullen volgen is veel bevredigender.

**Groote invalshoeken** (fig. 25, 26). —

Beschouwen wij één naaldvormig onderdeel van den oneindig breeden bundel, en vragen wij welk gedeelte daarvan het grensvlak $B$ verlaat onder een hoek $\vartheta$. Stralen onder een hoek $\vartheta$ treden uit alle punten $N_1$, $N_2$, ... van het grensvlak $B$. Om de straling te vinden die bij $N_1$ uittreedt onder een hoek $\vartheta$, denken wij ons de grensvlakken $A$ en $B$ vervangen door de grensvlakken $A'$ en $B_1'$, loodrecht op den invallenden bundel, $B_1'$ gaande door het punt $N_1$. Een blik op fig. 25 overtuigt ons ervan dat de lichtpluim in $N_1$ hierdoor geen

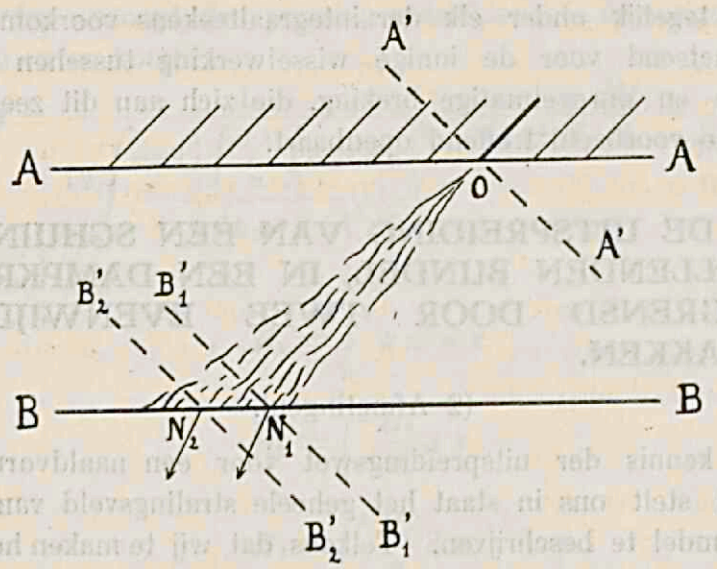



FIG. 25.

verandering in samenstelling ondergaat. Wij kunnen nu aangeven, welk gedeelte van den naaldvormigen bundel, na een afstand $X_1$ te hebben doorloopen, op een afstand $r_1$ van den

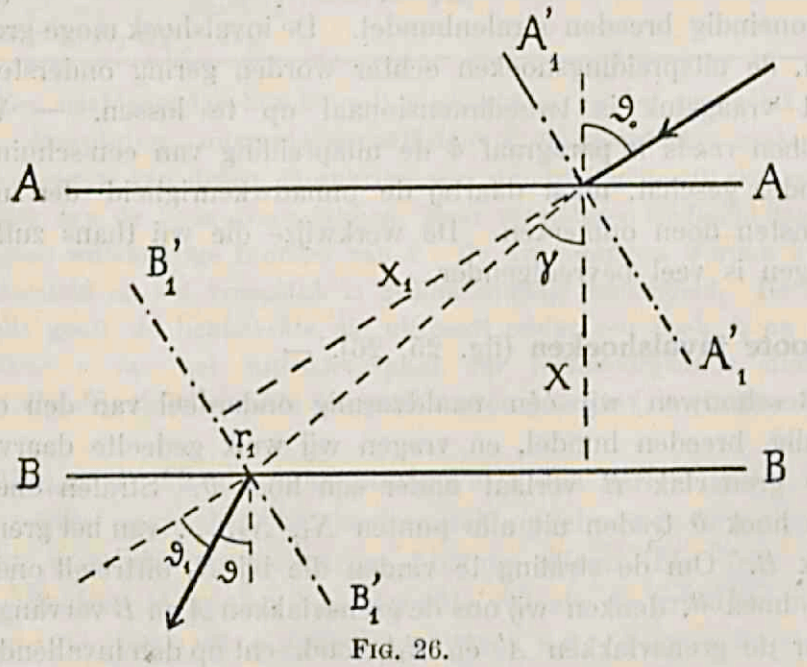



FIG. 26.

verlengden invallenden straal uittreedt onder een gegeven hoek $\vartheta_1$.

Evenzoo kunnen wij ook de straling berekenen, die in het punt $N_2$ uittreedt onder denzelfden hoek $\vartheta$ met $B$; wij hebben hiertoe slechts de grensvlakken te denken in $A' B_2'$ (fig. 25). De som van de $\vartheta$-stralen die door elk punt van het grensvlak $B$ gaan, geeft ons het breukdeel van den naaldvormigen bundel dat onder een hoek $\vartheta$ uittreedt. En aangezien alle naaldvormige bundels, waaruit de oneindig breede bundel bestaat, zich volkomen gelijk gedragen, hebben wij tevens gevonden welk gedeelte van den geheelen bundel $\vartheta_0$ onder den hoek $\vartheta$ uittreedt.

Laten wij thans deze redeneering uitwerken. Beschouw een naaldvormigen bundel die bij $O$ invalt onder een hoek $\vartheta_0$. Het punt $N_1$ bepalen wij door den hoek $\gamma$ van de hulplijn $N_1 O$ met de normaal. Uit fig. 26 kan men nu onmiddellijk de waarde der drie grootheden aflezen, welke de uitspreiding van een naaldvormigen bundel beschrijven:

$$\text{laagdikte } X_1 = X \frac{\cos(\vartheta_0 - \gamma)}{\cos\gamma}$$

$$\text{verschuiving } r_1 = X \frac{\sin(\vartheta_0 - \gamma)}{\cos\gamma}$$

$$\text{hoekverplaatsing } \vartheta_1 = \vartheta_0 - \vartheta.$$

Substitueert men deze grootheden in formule (26) dan vindt men

$$\frac{\sqrt{3}\cos^2\gamma}{2k\pi X^2\cos^2(\vartheta_0-\gamma)} e^{-\frac{3\,\mathrm{tg}^2(\vartheta_0-\gamma)3\,\mathrm{tg}(\vartheta_0-\gamma)(\vartheta_0-\vartheta)+(\vartheta_0-\vartheta)^3}{kX\cos(\vartheta_0-\gamma)\sec\gamma}} d\vartheta\, dr_1$$

Ga nog over van $dr_1$ naar $d\gamma$; eenvoudig differentieeren geeft:

$$\frac{dr_1}{d\gamma} = -X\frac{\cos\vartheta_0}{\cos^2\gamma} \tag{65}$$

Wij kennen nu de $\vartheta$-straling in het punt $N_1$ $(\gamma)$; integratie over alle punten $N$ geeft de totale uittredende $\vartheta$-straling:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2k\pi X}\frac{\cos\vartheta_0}{\cos^2(\vartheta_0-\gamma)} e^{-\frac{3\,\mathrm{tg}^2(\vartheta_0-\gamma)-3\,\mathrm{tg}(\vartheta_0-\gamma)(\vartheta_0-\vartheta)+(\vartheta_0-\vartheta)^3}{kX\sec\gamma\cos(\vartheta_0-\gamma)}} d\vartheta\, d\gamma$$

Daar wij $(\vartheta_0 - \gamma)$ als klein moeten beschouwen, wordt de integraal:

$$(66)\quad f(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\sqrt{3}\cos\vartheta_0}{2k\pi X}\int_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} e^{-\frac{3\gamma^2-3\gamma_0(\vartheta_0+\vartheta)+\vartheta_0^2+\vartheta\vartheta_0+\vartheta^2}{kX\sec\gamma}}\,d\vartheta\,d\gamma$$

Een oneindig breede, evenwijdige bundel valt schuin op een dampkring van dikte $X$, begrensd door twee evenwijdige vlakken en wordt over kleine hoeken uitgespreid. De formule geeft aan, welk gedeelte van den onder een hoek $\vartheta_0$ invallenden bundel uittreedt onder een hoek $\vartheta - \vartheta + d\vartheta$. De uitspreiding is 2-dimensionaal gedacht.

Om de bruikbaarheid der formule te laten zien, zullen wij haar toepassen op het bepaalde geval dat $kX\sec\vartheta_0 = 0{,}01$; en wel zullen wij achtereenvolgens de uitspreiding berekenen

voor een invalshoek van $0°$, een laagdikte $\frac{0{,}010}{k}$

" " " $40°$, " " $\frac{0{,}00766}{k}$

" " " $60°$, " " $\frac{0{,}005}{k}$

In de drie gevallen zijn de afstanden $X\sec\vartheta_0$ dezelfde. De benaderde formule (blz. 30), zou dus in de drie gevallen voor de uittredende straling dezelfde verdeelingswet hebben gegeven (bovenste regel van tabel I).

Wij becijferen den integrand van (66), daarbij zorg dragend den teller van den exponent op ten minste 4 decimalen nauwkeurig te berekenen. Voor iedere combinatie van $\vartheta_0$ en $\vartheta$ wordt aan $\gamma$ een reeks waarden gegeven, met 0.04 opklimmend. Vervolgens worden de bekomen getallen graphisch uitgezet, een vloeiende kurve door iedere reeks punten getrokken, en geïntegreerd met een planimeter. De resultaten vindt men in volgende tabel:

TABEL I.

| $\vartheta - \vartheta_0 =$ | $-22°,9$ $-0,4$ | $-17°,2$ $-0,3$ | $-11°,5$ $-0,2$ | $-5°,7$ $-0,1$ | 0 0 | $5°,7$ $0,1$ | $11°,5$ $0,2$ | $17°,2$ $0,3$ | $22°,9$ 0,4 rad. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Benaderde formule (3) | 0,052 | 0,299 | 1,04 | 2,18 | 2,82 | 2,18 | 1,04 | 0,299 | 0,052 |
| Betere benadering $\vartheta_0 = 0°$ | 0,058 | 0,289 | 1,035 | 2,203 | 2,83 | 2,203 | 1,035 | 0,289 | 0,058 |
| $40°$ | 0,024 | 0,209 | 0,915 | 2,14 | $2,83_5$ | 2,30 | 1,197 | 0,441 | |
| $60°$ | | 0,157 | 0,818 | 2,05 | 2,84 | 2,42 | 1,44 | 0,730 | 0,350 |

De afwijkingen tusschen de benaderde formule en de juistere berekening moesten nul zijn voor $\vartheta_0 = 0$; inderdaad zijn de verschillen tusschen de twee eerste regels klaarblijkelijk te wijten aan kleine onnauwkeurigheden in het trekken der krommen — het aantal punten waardoor zij gelegd zijn is klein — en in het graphisch integreeren.

De verschillen blijven overal beneden 1 %. Daarentegen ziet men hoe bij toenemenden invalshoek de asymmetrie in de uitspreiding grooter en grooter wordt. Zij is in de richting welke wij voorzien hebben (blz. 30).

**Zeer groote invalshoeken. —**

De redeneering van vorige paragraaf geeft uitkomsten die zeer nauwkeurig zijn, zelfs voor aanzienlijke invalshoeken van den bundel. Wanneer echter de invalshoek zóó groot wordt dat een merkbaar gedeelte der stralen bij de uitspreiding evenwijdig aan de grensvlakken gaat loopen of zelfs „terugkeert", dan treden moeilijkheden op. Beschouwen wij immers weer een naaldvormigen straal, als vertegenwoordiger van den geheelen evenwijdigen bundel (fig. 27). Wij verplaatsen de grenzen $A\,B$ naar $A'B'$, en willen weten welk breukdeel der straling bij het punt $N$ onder een gegeven hoek $\vartheta$ met de normaal uittreedt. Voor den eenvoud der notatie zullen wij deze straling in 't vervolg kenmerken door haren hoek $\zeta$

met de grensvlakken. Wanneer wij nu de uitspreidingswet voor een naaldvormigen bundel toepassen, begaan wij een

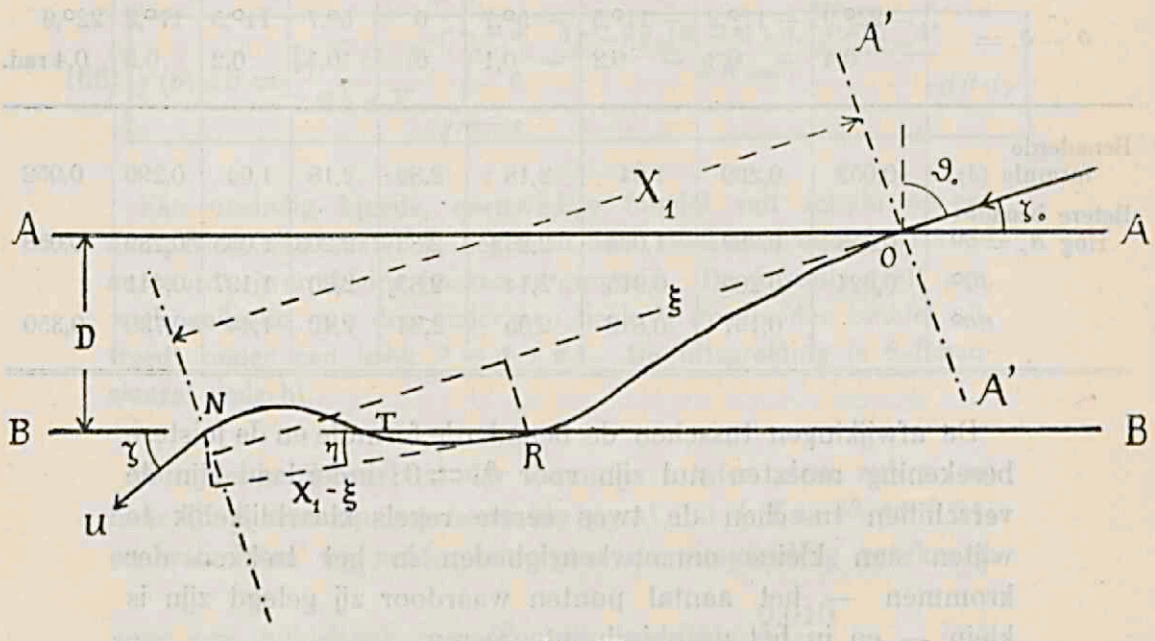



FIG. 27.

fout; die wet is immers afgeleid voor een onbegrensden dampkring; stralen zooals $O\,R\,T\,N\,U$ zijn beschouwd als mede een bijdrage leverend tot de straling $N\,U$. Nu echter in werkelijkheid $B$ de grens is van den dampkring, zal zulk een straal onmiddellijk bij $R$ rechtdoor voortloopen, en zijne deelen zullen niet door uitspreiding tot in $N$ kunnen komen. Formule (66) gaf ons in elk punt $N$ van het grensvlak de uittredende lichtsterkte $f(X, \zeta)$ voor 't geval de begrenzing weggedacht wordt.

Deze straling bestaat:

1°. uit het licht dat tot in $N$ gekomen is *zonder* de grens $B$ te passeeren: deze lichthoeveelheid is gegeven door de onbekende functie $\Phi(X, \zeta)$;

2°. uit het licht dat, evenals de straal $O\,R\,T\,N\,U$, 2 maal of 4, 6 . . . . maal door het grensvlak $B$ is gegaan vooraleer het $N$ bereikt; laat $\xi$ de dikte der laag zijn die overeenkomt met het punt $R$ waar de straal voor het eerst is uitgetreden,

$\eta$ de hoek van den voor het eerst uittredenden straal met het grensvlak, dan is zijn bijdrage tot de straling $f$: $\Phi(\xi, \eta)$ $K(X, \xi, \zeta, \eta)$. $K$ is hier op te vatten als Greensche functie of „invloedsfunctie", die dus uitdrukt welk een bijdrage de straal $\xi, \eta$ tot den straal $X, \vartheta$ levert.

Wij krijgen aldus de integraalvergelijking:

$$\Phi(X, \zeta) = f(X, \zeta) - \int_0^{X+\infty} \int_0 \Phi(\xi, \eta)\, K(X, \zeta, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{67}$$

Het zou geen zin hebben de integratie naar $\xi$ *verder* uit te strekken dan tot aan $\xi = X$; stralen waarvoor $\xi > X$ zouden zeer groote afwijkingshoeken moeten ondergaan om $N$ te bereiken (360°), en zijn dus uit de beschouwing weg te laten.

De integraalvergelijking (67) is van het type dat naar VOLTERRA genoemd wordt, en wel „van de 2e soort". [1])

Het is niet moeilijk de kern $K$ van de vergelijking nader uit te drukken, daarbij bedenkend dat alle straalkrommingen klein worden ondersteld. In fig. 27 vestigen wij onze aandacht op den straal $(\xi\, \eta)$; hij doorloopt een afstand $X_1 - \xi$; gevraagd wordt welk gedeelte op dien weg een zijdelingsche verschuiving $\eta \,.\, (X - \xi)$ heeft ondergaan, en een hoekafwijking $\eta - \zeta$. Volgens de uitspreidingswet (26) voor een naaldvormigen bundel is nu:

$$K(X_1, \zeta, \xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2k\eta(X-)^2} e^{\frac{-3\eta^2(X-\xi)^2 - 3(\eta-\zeta)(X-\xi)^2\eta + (\eta-\zeta)^2(X-\xi)^2}{k(X-\xi)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2k\eta(X-\xi)^2} e^{-\frac{\eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2}{k(X-\xi)}}. \tag{68}$$

Deze kern is symmetrisch in $\zeta$ en $\eta$, en hangt verder alleen af van het verschil $X - \xi$ [2]).

---

[1]) V. VOLTERRA: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris 1913. Hoofdstuk II. — Atti Acad. Torino 1896, XXXI, 311. Annali di Matem. 1906.

[2]) Voor de vereenvoudigingen waartoe dit aanleiding geeft, zie men b.v. VOLTERRA, Leçons ....., blz. 52, en zijn verhandelingen over de hysterese.

Ook de functie $f(\xi, \eta)$ is gemakkelijk uit te schrijven, door toepassing van dezelfde uitspreidingswet van naaldvormige bundels (26). De invallende straal doorloopt een afstand $\xi$, een bepaald breukdeel ondergaat daarbij een zijdelingsche verschuiving $D - \zeta_0 \xi$ (de afstand der grensvlakken is door $D$ aangegeven), en een hoekafwijking $\eta - \zeta_0$. Dus is

$$f(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2 k \pi \xi^2} e^{-\frac{3 (D - \zeta_0 \xi)^2 - 3 (D - \zeta_0 \xi)(\eta - \zeta_0) \xi + (\eta - \zeta_0)^2 \xi^2}{k \xi^3}} -$$

(69)

$$- \frac{\sqrt{3}}{2 k \pi \xi^2} e^{-\frac{\eta^2 \xi^2 + \eta \xi (\zeta_0 \xi - 3 D) + 3 D^2 - 3 D \zeta_0 \xi}{k \xi^2}}.$$

De klassieke methodes ter oplossing van integraalvergelijkingen zijn hier van toepassing; één hunner is echter in dit geval bijzonder aan te bevelen, omdat men hare beteekenis door aanschouwelijke natuurkundige voorstellingen gemakkelijk volgen kan.

Men ziet immers in, dat de straling $\Phi$ niet zoo heel veel verschillen zal van de straling $f$, en dat men dus kan beginnen met in de integraalvergelijking (67) onder het integraalteeken $\Phi$ door $f$ te vervangen; aldus krijgen wij een eerste benadering

$$\Phi_1 (X, \zeta) = f(X, \zeta) - \int_0^X \int_0^{+\infty} f(\xi, \eta)\, K(X, \zeta, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Deze waarde $\Phi_1$ kan nu weer in (67) onder het integraalteeken worden gesubstitueerd en geeft weer een betere waarde, enz. Dit geeft ons voor $\Phi$ de reeksontwikkeling van Neumann:

$$(0) \quad \Phi(X, \zeta) = f(X, \zeta) - \int_0^X \int_0^{+\infty} f(\xi, \eta)\, K(X, \zeta, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_0^X \int_0^{+\infty} \int_0^{\xi} \int_0^{+\infty} f(\xi, \eta)\, K(X, \zeta, \xi, \eta)\, K(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)\, d\xi\, d\eta\, d\xi_1\, d\eta_1$$

. . . . . .

De convergentie van de reeks is bij de vergelijkingen van het type van Volterra in het algemeen verzekerd en veel

gunstiger dan bij dat van FREDHOLM [1]). In het algemeen zal het dus voldoende zijn slechts enkele termen te berekenen; met de waarden van $f$ en $K$ die voor het hier behandelde geval zijn aangegeven (blz. 73), is de eerste integratie naar $\eta$ gemakkelijk uit te voeren, de tweede vereischt numerieke of graphische methodes.

De hier aangegeven werkwijze om den invloed van de begrenzingen in rekening te brengen, is zeer algemeen bruikbaar voor grenzen van allerlei verschillende vormen; zij laat zich ook toepassen op het gewichtige geval van een bundel die *evenwijdig* aan een grensvlak loopt, op een afstand $r$. Wij rekenen dan alle lengten $\xi$ en $X$ langs de grens van af het punt 0 waar de onregelmatig brekende laag begint (fig. 28).

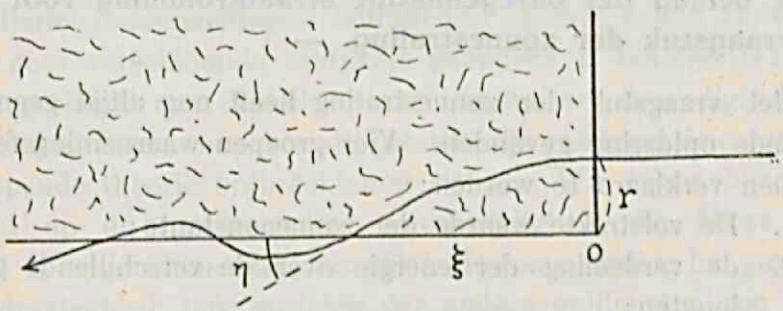



FIG. 28.

De functie $f$ wordt nu:

$$\frac{\sqrt{3}}{2k\pi\xi^2}\, e^{-\frac{3r^2 - 3r\eta\xi + \eta^2\xi^2}{k\xi^3}} \tag{71}$$

en de kern $K$ behoudt denzelfden vorm (68). Is het vraagstuk eenmaal opgelost voor een naaldvormigen bundel en voor een punt op afstand $X$, dan kan men door integratie over $r$ en $X$ gemakkelijk breedere bundels en het geheele uittredingsgebied beschrijven.

[1]) Vgl. bv. HEYWOOD-FRÉCHET: L'Equation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. — Paris 1912, blz. 47.

## HOOFDSTUK III.

## TOEPASSING VAN DE THEORIE DER ONREGELMATIGE STRAALKROMMING OP ZONNEVERSCHIJNSELEN.

### § 9. DE INVLOED DER ONREGELMATIGE STRAALKROMMING OP DE LICHTVERDEELING OVER DE ZONNESCHIJF.

**Het belang der onregelmatige straalkromming voor het vraagstuk der zonnestraling. —**

Het vraagstuk der zonnestraling heeft nog altijd geen afdoende oplossing gevonden. Vier groepen waarnemingsfeiten dienen verklaard te worden:

1. De volstrekte waarde der zonneconstante;
2. de verdeeling der energie over de verschillende golflengten;
3. de verzwakking van de straling aan den rand der zonenschijf;
4. de scherpe zonsrand.

Daarenboven dient men rekening te houden met een reeks eigenaardigheden van de Fraunhoferlijnen, die ons onrechtstreeks kunnen inlichten over de wijzigingen die de continue straling heeft ondergaan.

Het doel van het theoretisch onderzoek is, te zoeken welke eigenschappen men aan den dampkring der zon moet toeschrijven om de waargenomen verschijnselen als een samenhangend geheel te kunnen verklaren. Wij moeten ons dezen dampkring en de geheele zon als een gasvormige massa voorstellen; een andere zienswijze, de hypothese der wolken, werd in den laatsten tijd vrijwel verlaten. Wat wij dus „dampkring" der zon noemen, gaat eigenlijk vloeiend in de „kern" over.

Men verstaat thans meestal onder „dampkring" het geheel der buitenste lagen van de zon, zoo diep als nog voor ons bijzonderheden te onderscheiden zijn; tot de kern worden gerekend de lagen van dewelke wel energie, maar geen lichtstralen tot ons komen, waarvan dus de straling eerst andere atomen moet verhitten of aanslaan, of wel herhaaldelijk verstrooid moet worden vóór ons een merkbaar gedeelte ervan bereikt.

Van den dampkring moeten volgende eigenschappen nagegaan worden, welke den aard der uittredende straling zullen bepalen:

1. uitstraling;
2. opslorping;
3. verstrooiing door vrije en door gebonden electronen;
4. onregelmatige straalkromming.

Allerlei onderstellingen betreffende de drie eerste factoren zijn door verschillende schrijvers geopperd [1]). Dikwijls is men erin geslaagd een deel der verschijnselen vrij bevredigend te verklaren, maar een over de geheele lijn goed met de ervaring kloppende theorie ontbreekt nog steeds. Wij wijzen bijvoorbeeld op de merkwaardige tegenstrijdigheid die Milne het eerst is opgevallen: dat namelijk in de zonnestraling het groene spectraalgebied ten opzichte der andere golflengten een zoo bijzonder groote energie bezit, terwijl toch de kurven der randverzwakking voor het groen geen abnormaal sterke verzwakking vertoonen. Milne heeft tevens aangetoond dat deze tegenstrijdigheid met de tot hiertoe gebruikte hypothesen niet op te lossen is, ook al kiest men den opslorpingscoëfficiënt der zonnegassen geheel willekeurig veranderlijk met de golflengte. De pogingen van Lindblad om aan deze moeilijkheid te ontkomen bevredigen slechts weinig.

Zelfs de ruwe overeenstemming met de feiten is echter

---

[1]) De voornaamste verhandelingen over dit onderwerp zijn:
Schwarzschild: Sitzungsber. Akad. Berlin, 1914, **47**, 1183. —
Spijkerboer, Proefschrift, Utrecht 1917; Arch. Neerl. 1918, III, A, V, 1. —Dietzius, Sitzungsber. Akad. Wien, 1922, **131**, 15.
Milne, Philos. Trans. 1922, **223**, 201. — Lundblad, A. J. 1923, 58, 113. — Lindblad, Trans. R. Soc. Uppsala, 1923, 6, 1.

slechts verkregen door onderstellingen welke physisch moeilijk te wettigen zijn. — Een voorbeeld. Men neemt vrijwel algemeen als uitgangspunt voor de redeneeringen, dat de zonnegassen „grauwe" straling zouden uitzenden, dus straling die voor alle golflengten in dezelfde verhouding geringer is dan de straling van een zwart lichaam volgens de wet van PLANCK. Een gas dat aan deze onderstelling voldoet kennen wij echter in onze aardsche laboratoria niet, en men kan niet zonder meer inzien waarom op de zon zulk een toestand van de stof verwacht zou kunnen worden. Evenzeer blijft het een gebrek van de theorie, dat bijna altijd gerekend is alsof de zon opgebouwd was uit evenwijdige vlakke lagen. Bij de thans algemeen aangenomen lage drukkingen in den dampkring der zon, is het waarschijnlijk dat wij diep in de zonnemassa kunnen kijken, volgens schattingen van JULIUS en SPIJKERBOER tot $^1/_{10}{}^e$ van den straal. En in dit geval is het volkomen ongeoorloofd, den bolvorm der zon te benaderen door een vlakke laag [1]).

Het vraagstuk der zonnestraling kan dus geenszins als opgelost worden beschouwd, en er is nog ruime gelegenheid, zelfs noodzakelijkheid om naar den invloed te zoeken van factoren welke de theorie tot hiertoe over het hoofd heeft gezien. Nu ligt het voor de hand, te beproeven of het in acht nemen van den vierden belangrijken factor die de zonnestraling kan beïnvloeden, van de onregelmatige straalkromming, ons hier geen nieuwe gezichtspunten verschaft. Des te meer wordt men aangemoedigd in deze richting te zoeken, waar allerlei andere zonneverschijnselen den invloed der onregelmatige straalkromming verraden, en waar het bestaan der dichtheidsgradiënten en dus der straalkrommingen a priori en met stelligheid te voorspellen is. Het is dus alleen de vraag, *hoe sterk* de onregelmatige straalbreking op de zon is. En om over deze vraag te beslissen, is er geen andere weg dan haar invloed te berekenen voor verschillende uitspreidingscoëfficiënten, en te kijken welke onderstelling het best met de feiten in overeenstemming is.

[1]) SPIJKERBOER, Proefschrift, Utrecht 1917, hoofdstuk IV enz. — Versl. Akad. Amst. 1924, 33, 267.

**Algemeene Gedachtengang. —**

Bij de behandeling van den invloed der verstrooiing op de zonnestraling begint men meestal met bepaalde onderstellingen te maken omtrent de straling die de verstrooiende laag aan de binnenzijde ontvangt (bijvoorbeeld: even groote sterkte in alle richtingen: „cosinus-straling"), en berekent daarna van welken aard de straling wordt die aan de buitenlaag uittreedt.

Het schijnt ons evenwel doelmatiger, bij de studie der onregelmatige straalkromming uit te gaan van de zonnestraling die wij rechtstreeks kunnen waarnemen, en door terugrekenen uit te maken hoe de straling in de diepere lagen moet zijn geweest Aldus hoeven wij over de invallende straling geen enkele onderstelling a priori te maken.

Wij denken ons dus de massa der zon opgebouwd uit uitstralende, opslorpende, verstrooiende gassen, op de wijze van Eddington, Milne, Lindblad, Lundblad, en andere schrijvers. Maar rond deze massa onderstellen wij nog een omhulling van onbekende dikte, waarin de onregelmatige straalkromming de hoofdrol speelt. Wij zullen nu beproeven te berekenen, hoe de straling in toenemend diepere lagen is samengesteld. Het zal een bijzonder onderzoek vereischen, na te gaan of een der stralingstoestanden welke wij in de binnenlagen vinden, overeenstemt met de bestaande theorie der uitstraling, opslorping en verstrooiing van de kern. Mocht dit gelukken, dan zouden wij een goed en overzichtelijk beeld van de zon hebben gewonnen.

Aangezien wij uitgaan van de buitenlaag, waar de straling geheel bekend is, kunnen wij voor alle uittredingsrichtingen $\chi$ de waarden van $\frac{\partial f}{\partial \chi}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$ in die laag berekenen. De differentiaalvergelijking der onregelmatige straalkromming (25) blz. 25 geeft ons dan onmiddellijk $\frac{\partial f}{\partial r}$; en wij kunnen dus nagaan hoe de straling moet geweest zijn in een laag die $\Delta r$ onder het buitenoppervlak ligt. Voor deze laag kunnen wij weer de waarden van $\frac{\partial f}{\partial \chi}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$ berekenen, en weer een stapje dieper dringer. Zoo kan men van laag tot laag vooruitkomen.

**De berekening van $\frac{\partial f}{\partial \chi}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$ in de buitenlaag. —**

De waarnemingen die wij als uitgangspunt voor onze beschouwingen zullen gebruiken, zijn de gegevens welke door ABBOT en zijn medewerkers verzameld zijn in den loop der jaren 1907—1909 [1]). Wij dienen in acht te nemen dat dit materiaal stellig niet als geheel betrouwbaar beschouwd kan worden van het standpunt der meettechniek. Enkele nieuwere gegevens van ABBOT [2]) zijn evenmin bevredigend; het is voldoende een oogslag te werpen op de figuren 23 om de groote asymmetrie der geregistreerde krommen en dus de traagheid der gebruikte toestellen te bemerken. De oudere gegevens zijn in elk geval voor meer verschillende golflengten bepaald, en vormen een goed samenhangend geheel, stellig het beste waarover wij op dit oogenblik beschikken; zij schijnen voor ons doel beter geschikt dan de nieuwere, meer sporadische gegevens, die overigens met een ander doel werden verzameld (studie der *veranderlijkheid* van de zonnestraling).

Het schijnt nu gemakkelijk, de waarden van $\frac{\partial f}{\partial \chi}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$ in de buitenlaag rechtstreeks uit de gegevens dezer waarnemingen te berekenen, voor elke bepaalde golflengte en voor elken hoek $\chi$. De weg zou de volgende zijn:

Beschouw straling van een bepaalde golflengte. De tabel van ABBOT geeft $f_\lambda(\chi)$ voor een reeks van 10 onregelmatig opklimmende waarden van den uittredingshoek $\chi$. Interpoleer daartusschen, en zoek de waarden van $f_\lambda(\chi)$ voor een reeks uittredingshoeken die *op gelijke afstanden* van elkaar liggen, stel van 6° tot 6°; hiertoe gebruike men de formules van ENCKE, [3]) voor interpolatie bij ongelijke tusschenruimten van het argument. Nu kunnen de waarden der differentiaalquotiënten $\frac{\partial f}{\partial \chi}, \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$ berekend worden volgens de formules van

[1]) Ann. Smiths. Instit. 1913, III, 157 (tab. 55).
[2]) Ann. Smiths. Instit. 1922, IV.
[3]) ENCKE, Berl. astr. Jhrbuch, 1830. — Ges. Abh .Berlin 1888, Bd. 1.

EVERETT, RUNGE, en SHEPPARD [1]). Deze rekenwijze heeft het voordeel van volkomen objectiviteit en sluit rechtstreeks aan bij de waarnemingen.

Bij uitvoering van de rekening komen wij echter voor een moeilijkheid te staan: de waarden van $\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$ verloopen op hoogst onregelmatige wijze, zóó dat men ze onbruikbaar kan achten. Klaarblijkelijk zijn dus de waarnemingen onvoldoende nauwkeurig om ons toe te laten er de tweede differentiaalquotiënten door interpolatieformules uit af te leiden. Een poging om de stappen van 6° te vervangen door stappen van 12° had geen betere gevolgen.

En achteraf beschouwd hoeven ons deze moeilijkheden niet te verwonderen. De interpolatierekening geeft ons een kurve die streng door ieder waarnemingspunt gaat. Nu kan men echter uit ABBOT's tabel duidelijk afleiden dat, nog afgezien van de stelselmatige fouten waarmee zijn getallen behept zijn, ook toevallige afwijkingen van onregelmatigen aard voorkomen; om dit op te merken doorloope men b.v. de horizontale lijnen voor 0,20 $R$ en 0,40 $R$. Al deze kleine afwijkingen, op zichzelf onbelangrijk, doen hun invloed gelden op de waarde van $\frac{\partial f}{\partial \chi}$ en in verhoogde mate op die van $\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$.

Het is dus duidelijk in welken zin wij onze werkwijze moeten verbeteren. Een vloeiende kromme moet zoo goed mogelijk tusschen de waarnemingspunten door gelegd worden, zonder hun kleine onregelmatigheden te volgen, en toch getrouw bij de waarnemingen aansluitend. Door een teekening te maken bereiken wij ons doel niet, wegens de bekende onnauwkeurigheid van het graphisch differentiëeren.

In een volgende paragraaf zal getoond worden op welk een wijze de moeilijkheid overwonnen kan worden. Wij zullen eenvoudig $f$ ontwikkelen in een machtreeks naar cos $\chi$. De aldus gevonden kromme is tevens een voldoende juiste samen-

[1]) Nature, 1899, **60**, 271, 365, 390.

Deze formules zijn alleen bruikbaar voor gelijke tusschenruimten van het argument.

vatting van de metingen, en tevens voldoende vloeiend om als basis voor verdere berekeningen te dienen.

**De ontwikkeling van $f$ in een machtreeks naar cos $\chi$, en de numerieke oplossing der differentiaalvergelijking.** —

Stellen wij voor de buitengrens van den dampkring

$$f = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \cos^m \chi \tag{1}$$

Deze functie is even gekozen, daar de straling langs een bepaalden meridiaan aan beide zijden van het middenpunt symmetrisch is. De differentiaalquotiënten krijgen den vorm

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = -\sum_0^\infty a_m\, m \sin\chi \cos^{m-1}\chi; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} = \sum_0^\infty a_m \Big[ m(m-1)\cos^{m-2}\chi - m^2 \cos^m \chi \Big]. \tag{3}$$

Substitueeren wij deze uitdrukkingen in de differentiaalvergelijking (25) blz. 25 voor een onregelmatig brekenden bol.

Er komt:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial r} = \sum a^m \Big[ -m(m+1)\cos^{m-1}\chi + m(m-1)\cos^{m-3}\chi + \\ + \frac{1}{kr} m \cos^m - \frac{1}{kr} m \cos^{m-2} \Big]. \tag{4}$$

De bijzonder gunstige omstandigheid doet zich voor, dat ook deze functie den vorm aanneemt van een machtreeks in *cos* $\chi$, evenals die waarvan wij zijn uitgegaan. Schrijven wij

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_0^\infty b_m \cos^m \chi, \tag{5}$$

en stellen wij de coëfficiënten van $\cos^m \chi$ beiderzijds aan elkaar gelijk. Dan krijgen wij de betrekkingen

$$\frac{1}{k} b_m = -a_{m+1}(m+1)(m+2) + \\ + a_{m+3}(m+2)(m+3) + a_m \frac{m}{kr} - a_{m+2}\frac{m+2.}{kr} \tag{6}$$

Deze formules gaan door voor alle waarden van $m$, ook negatieve waarden treden op.

Wij hebben aldus het middel om van de buitenste laag

over te gaan tot de eerstvolgende binnenlaag $I$, die $\Delta r$ dieper ligt. De straling in deze nieuwe laag kan ook weer door een *cos*-reeks voorgesteld worden:

$$(7) \qquad f' = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_m \cos^m \chi;$$

en deze hangt aldus samen met de reeks die voor de buitenste laag gold:

$$(8) \quad a'_m = a_m + b_m \Delta r = a_m + k\Delta r\,[-a_{m+1}(m+1)(m+2) + a_{m+3}(m+2)(m+3)] + \frac{\Delta r}{r}[a_m m - a_{m+2}(m+2)].$$

Passen wij dit nu toe op de straling der zon, en stellen wij de straling die de buitengrens verlaat door een vierterm voor:

$$(9) \qquad f = a_0 + a_1 \cos\chi + a_2 \cos^2\chi + a_3 \cos^3\chi.$$

Door een gelukkig toeval heeft LUNDBLAD [1]) voor zijn theorie der verstrooiing dezelfde coëfficiënten noodig gehad, zoodat wij van de uitkomst zijner becijferingen gebruik kunnen maken. Hem is gebleken dat de 4 eerste coëfficiënten volkomen voldoende zijn om de waarnemingen binnen de grenzen der meetfouten nauwkeurig voor te stellen, en dat het geen zin heeft verdere coëfficiënten te berekenen. De reeks der vier coëfficiënten is in tabel II voor de verschillende golflengten opgegeven (blz. 90).

De coëfficiënten der eerstvolgende laag I worden nu volgens (9), en met de afkortingen $k\Delta r = c$, $\frac{\Delta r}{r} = \gamma$:

$$(10) \qquad \begin{aligned} a'_3 &= a_3(1+3\gamma). \\ a'_2 &= a_2 - 12\,a_3\,c + 2\,a_2\,\gamma \\ a'_1 &= a_1 - 6\,a_2\,c + (a_1 - 3\,a_3)\,\gamma. \\ a'_0 &= a_0 + (-2\,a_1\,c + 6\,a_3\,c)\,c - 2\,a_2\,\gamma. \\ a'_{-1} &= 2\,a_2\,c - a_1\,\gamma. \end{aligned}$$

Evenzoo kunnen wij tot de volgende laag II overgaan, door de formule (10) op de reeks van laag I toe te passen, en daarna de coëfficiënten $a_1'$, $a_2'$, $a_3'$ .... te vervangen door de uitdrukkingen in $a_1$, $a_2$, $a_3$ .... Wij nemen aan dat dit tweede stapje $k\Delta r = c$ gelijk is aan het eerste.

[1]) A. J. 1923, 58, 113.

Het verband tusschen de straling in de laag II en in de buitenlaag wordt:

$$(11)\quad a_3'' = a_3(1 + 6\gamma + 9\gamma^2).$$
$$a_2'' = a_2 - 24 a_3 c + 4 a_2 \gamma - 60 a_3 \gamma c + 4 a_2 \gamma^2.$$
$$a_1'' = a_1 - 12 a_2 c + (2 a_1 - 6 a_3)\gamma + 72 a_3 c^2 - 18 a_2 \gamma c.$$
$$a_0'' = a_0 + (-4 a_1 + 12 a_3) c - 4 a_2 \gamma + 12 a_2 c^2 + + (48 a_3 - 2 a_1)\gamma c - 4 a_2 \gamma^2.$$
$$a_{-1}'' = 4 a_2 c - 2 a_1 \gamma - 24 a_3 c^2 + 10 a_2 \gamma c - (a_1 - 3 a_3)\gamma^2.$$
$$a_{-3}'' = 8 a_2 \gamma c - 4 a_1 \gamma^2.$$
$$a_{-4}'' = 4 a_2 c^2 - 2 a_1 \gamma c.$$

Zoo kan men ook de straling der volgende lagen berekenen. Uit formule (8) ziet men onmiddellijk dat het 2e lid nul wordt voor $m = -2$. De term in $\cos^{-2}\chi$ blijft dus nul.

Stel dat wij bij een eerste berekening een bepaalden stap $c = k\,\Delta r$ hebben uitgevoerd, bij een tweede berekening twee stapjes, ieder gelijk aan $\frac{c}{2}$. De eerste uitkomst is gegeven door de formules (10), de tweede uitkomst krijgen wij door in (11) $c$ te vervangen door $\frac{c}{2}$, $\gamma$ door $\frac{\gamma}{2}$. Dan komt er

$$(12)\quad \begin{aligned}
a_3'' &= a_3(1 + 3\gamma + {}^9/_4\gamma^2).\\
a_2'' &= a_2 - 12 a_3 c + 2 a_2 \gamma - 15 a_3 \gamma c + a_2 \gamma^2.\\
a_1'' &= a_1 - 6 a_2 c + (a_1 - 3 a_3)\gamma + 18 a_3 c_2 - {}^9/_2 a_2 \gamma c.\\
a_0'' &= a_0 + (-2 a_1 + 6 a_3) c - 2 a_2 \gamma + 3 a_2 c^2 + \left(12 a_3 - \frac{a_1}{2}\right)\gamma c - a_2 \gamma^2.\\
a_{-1}'' &= 2 a_2 c - a_1 \gamma - 6 a_3 c^2 + {}^5/_2 a_2 \gamma c - \left(\frac{a_1}{4} - \frac{3}{4} a_3\right)\gamma^2.\\
a_{-3}'' &= 2 a_2 \gamma c - a_1 \gamma^2.\\
a_{-4}'' &= a_2 c^2 - \frac{a_1}{2}\gamma c.
\end{aligned}$$

Deze uitkomst verschilt slechts van de eerste (10) door de termen in $c^2$. Bij onderverdeeling van den stap $c$ in 3 deelen zouden er termen van den derden graad bijkomen. Wij krijgen aldus met willekeurige nauwkeurigheid de afhankelijk-

heid van $f$ van de diepte der laag, in den vorm van een machtreeks naar $r$.

Wij merken op, dat bij gebruik van de differentiaalvergelijking voor *vlakke* lagen, de termen $\gamma$ wegvallen, en dat dan de grootte van den stap aangegeven kan worden door het produkt $k\,\Delta r$ of eigenlijk $\int_0^{\Delta r} k\,dr$; de waarde van $k$ behoeft men niet afzonderlijk aan te geven. Voor bolvormig gekromde lagen daarentegen dient men de grootte van den stap te kenmerken niet alleen door $k\,\Delta r$, maar ook door het breukdeel $\frac{\Delta r}{r}$ van den straal der zon over hetwelk men opschuift.

**De lichtverdeeling over de zonneschijf. Keuze der dikte van de onregelmatig brekende laag. —**

Wij willen „onze formules" nu toepassen op het geval van de zon. Ons doel is, te berekenen hoe de straling verdeeld is over de zonneschijf eer ze de onregelmatig brekende laag bereikt, die volgens de dispersietheorie de buitenste deelen van den zonnebol uitmaakt. Julius schat dat een dergelijke laag ongeveer 0,1 van den straal van de zon dik is; uit de theorie van den zonsrand volgt dat de uitspreidingscoëfficiënt dezer buitenste lagen van de orde van 1 is. Hiernaar kunnen wij ons richten wanneer wij willen schatten welke uitwerkingen de onregelmatige straalkromming op de zon kan veroorzaken.

Veel dieper dan deze laag zouden wij ons onderzoek niet kunnen voortzetten. De cosinus-ontwikkeling van dewelke wij zijn uitgegaan stelt het verloop der zonnestraling vóór zooals het gemeten is, tot $0{,}95\,R$, dus tot een uittredingshoek van 72°. Tot 90° geven de machtreeksen van Lundblad een goede extrapolatie, die waarschijnlijk weinig van de werkelijkheid afwijkt. Daarentegen weten wij met stelligheid dat de reeksen verder dan 90° in strijd zijn met de waarneming; inplaats van daar scherp af te vallen, vertoonen al deze kurven een vloeiend verloop, dat niet met de werkelijk-

heid overeenstemt. Om een schatting te maken van de bereikte benadering, stellen wij ons voor dat wij aan het buitenoppervlak der zon met groote schijnwerpers lichtbundels naar haar binnenste zenden, onder verschillende hoeken met het oppervlak. Deze „terugkeerende" bundels zullen in de buitenlagen het bedrag der uittredende, echte zonnestraling niet merkbaar veranderen. Naarmate zij echter door de onregelmatige straalbreking in de diepere lagen worden uitgespreid, zal een gedeelte ervan de rechtstreeksche zonnestraling komen versterken. Eerst zijn het de rakelings uittredende stralen die erdoor worden „verontreinigd", daarna die welke onder 80°, 70°, 60° ..... uittreden. Tenslotte zou door de onregelmatige breking een merkbaar gedeelte der bijkomende stralen zelfs 90° gedraaid zijn, en op dat oogenblik zouden wij onze kurven nergens meer kunnen vertrouwen, en ware het niet zonder meer mogelijk, verder door te dringen. Dit zal ongeveer het geval zijn, wanneer $k\,\Delta r = \frac{\overline{\alpha^2}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0{,}62$. Wij zullen echter nooit verder gaan dan $k\,\Delta r = 0{,}1$, en blijven dus zeker aan de veilige zijde. De lichtverdeeling nabij den rand zal in § 10 door een geheel andere methode berekend worden.

**Lichtsterkte van het loodrecht uittredende licht in verschillend diepe lagen. —**

In tabel III blz. 91 is als eenheid genomen: de sterkte van het licht dat loodrecht uittreedt aan het buitenoppervlak der zon. Nu is voor alle golflengten berekend hoe sterk het uittredende licht was op de diepte 0,05 $R$ en op de diepte 0,1 $R$, aannemend dat in deze buitenlagen de uitspreidingscoëfficiënt overal 1 is, dus voor $c = 0{,}05$ en $\gamma = 0{,}05$; voor $c = 0{,}1$ en $\gamma = 0{,}1$.

De uitkomsten vertoonen een opvallende, zeer regelmatige golflengte-afhankelijkheid (fig. 28; tab. III, blz. 91). Alleen het eerste punt valt buiten de kurve en verraadt daardoor ineens zijn anderen oorsprong: het is het punt voor $\lambda = 323$,

de golflengte waarvoor ABBOT niet zelf heeft gemeten, maar de getallen van SCHWARZSCHILD en VILLIGER heeft overgenomen

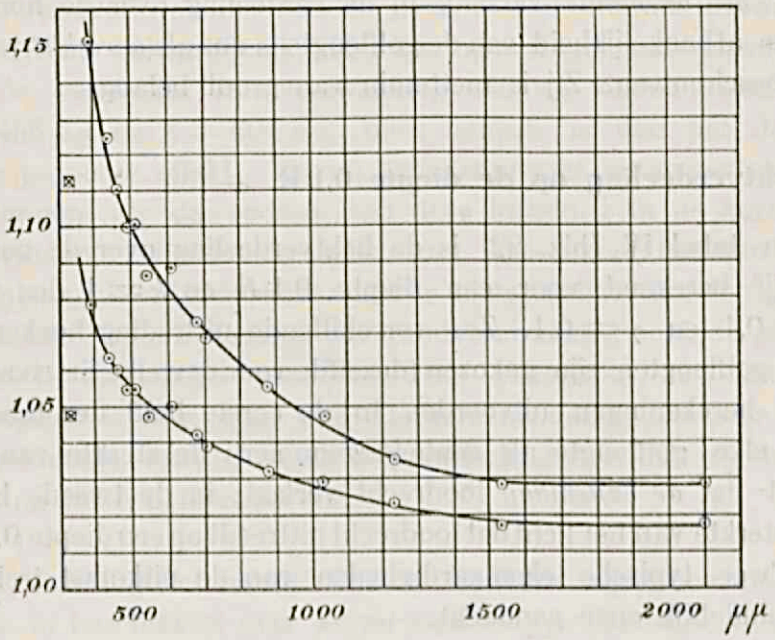



FIG. 28.

welke langs photographischen weg bepaald zijn. De andere punten wijken niet meer dan 0,005 van de gemiddelde kurve af, wat stellig merkwaardig mag heeten, gezien de groote schommelingen in de coëfficiënten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ waarvan wij zijn uitgegaan (tabel II, blz. 90).

*Voor de loodrecht uittredende stralen veroorzaakt de onregelmatige breking dus een gradiënt; de toename dezer straling naar het binnenste der zon is verreweg het grootst voor de korte golven.*

Het loont de moeite, op te merken *dat de werking der onregelmatige straalkromming voor de verschillende golflengten geheel verschillend is.* Dit is geenszins een gevolg van eenige kleurschifting: de brekingsaanwijzer van gassen is zeer weinig afhankelijk van de kleur, en wij hebben dan ook $k$ altijd als constant beschouwd. — De oorzaak is anders. In de kern hebben emissie, absorptie en verstrooiing, die wel rechtstreeks van de golflengte afhangen, de straling over de verschillende richtingen verdeeld op een wijze die ook van de golflengte

afhangt; nu komt de onregelmatig brekende laag: zij werkt alleen verschillend voor de verschillende kleuren, uit hoofde van *het bestaande* verschil in de verdeeling over de hoeken. Deze afhankelijkheid van de golflengte is dus als *onrechtstreeksch* te beschouwen. Zij is niettemin van groot belang.

**Lichtverdeeling op de diepte 0,1 R. —**

In tabel IV (blz. 92) is de lichtverdeeling over de zonneschijf berekend voor een diepte 0,1 $R$ en $k = 1$, dus voor $c = 0{,}1$ en $\gamma = 0{,}1$. Zes verschillende uittredingshoeken en zes golflengten zijn gekozen (dezelfde voor dewelke SPIJKERBOER zijn berekeningen uitvoerde). In de eerste helft der tabel is bij elke golflengte als eenheid genomen: de sterkte van het licht dat *de buitenlaag* loodrecht verlaat; in de tweede helft, de sterkte van het licht dat loodrecht uittreedt op een diepte 0,1 R.

Twee typische eigenaardigheden van de uitkomst trekken onmiddellijk onze aandacht. —

Vooreerst *is de randverzwakking aanmerkelijk sterker* dan in de tabel van ABBOT, die voor de buitenlaag gold. En dit is ook volkomen begrijpelijk; de onregelmatige breking heeft voor gevolg, de straling gelijkmatiger over de hoeken te verdeelen; de randverzwakking die aan de buitenlaag nog waarneembaar is, moet dus eerst veel aanzienlijker geweest zijn.

In de tweede plaats bemerken wij een zeer eigenaardig verloop van de betrekkelijke lichtsterkte met de golflengte (vgl. de *verticale* kolommen van tabel IV). Reeds bij hoeken van 12° en 24° is een inzinking merkbaar nabij de golflengten 456 $\mu\mu$—604 $\mu\mu$. Bij 37°, 53° en 64° is die inzinking nog veel duidelijker geworden. Bij zijn uitvoerige studie over het stralingsevenwicht in de zon, is MILNE [1]) voor het raadsel komen te staan, dat de sterke afwijkingen der energiekurve van het zonnespectrum van die van het zwarte lichaam, niet met correspondeerende veranderingen in de randverzwakking overeenkomen. Inzonderheid verwachtte hij, dat de golflengten

[1]) Phil. Trans. 1922, **223**, 203—204, 217, enz.

nabij het energiemaximum (485 $\mu\mu$), welke zulk een abnormaal groote energie hebben in het zonnespectrum, ook een abnormaal sterke randverzwakking zouden geven. Dat dit niet uitkwam scheen hem onbegrijpelijk. Het lijkt nu wel zeer waarschijnlijk, dat de versterkte randverzwakking die wij vinden tusschen $\lambda = 456\ \mu\mu$ en $\lambda = 604\ \mu\mu$, niets anders is dan het door MILNE gezochte effekt. En nu onze aandacht er op gevestigd is, kunnen wij de sporen van deze inzinking in de kurven terugvinden, zelfs in de tabel van ABBOT voor het aan de buitenlaag uittredende licht: het is niets anders dan de z.g.n. „anomalie" in het verloop der randverzwakking met de golflengte [1]). Het blijkt ons, dat deze „anomalie" het laatste overblijfsel is van een veel sterkere inzinking, die door de onregelmatige breking bijna weggewischt is, en die wij door rekening hebben teruggevonden.

Dit laatste geval bewijst ons op treffende wijze, hoe noodig het is te beschikken over *uiterst nauwkeurige metingen* van de helderheid der zonneschijf, wil men door terugrekening de straling in de diepere lagen eenigszins nauwkeurig kunnen vinden. De metingen van ABBOT laten nog in vele opzichten te wenschen over, en het is dringend noodig dat zij met zorg en in gunstige atmospherische omstandigheden worden herhaald. Voorloopig kan men slechts zeggen, dat de theorie der onregelmatige straalkromming nieuwe mogelijkheden opent, en resultaten geeft die in het algemeen zeer hoopvol schijnen.

---

[1]) Vgl. van CITTERT, Proefschrift, Utrecht 1919.

TABEL II.

**Coëfficiënten der cos-reeks voor de straling aan het buitenoppervlak der zon.**

| $\lambda$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 323 $\mu\mu$ | + 0,1269 | + 0,7625 | + 0,2109 | — 0,1283 |
| 386 | 1699 | 7553 | + 1244 | — 0525 |
| 433 | 2126 | 7002 | + 1903 | — 1108 |
| 456 | 1786 | 9939 | — 2026 | + 0292 |
| 481 | 2192 | 9638 | — 2200 | + 0350 |
| 501 | 2444 | 9507 | — 2610 | + 0641 |
| 534 | 3119 | 7694 | — 0312 | — 0525 |
| 604 | 3288 | 9794 | — 4819 | + 1749 |
| 670 | 3566 | 1,0359 | — 6133 | + 2216 |
| 699 | 3716 | 1,0215 | — 6146 | + 2216 |
| 866 | 4563 | 9499 | — 6450 | + 2391 |
| 1031 | 5163 | 8220 | — 4984 | + 1633 |
| 1225 | 5572 | 7756 | — 4972 | + 1633 |
| 1655 | 6491 | 6726 | — 5019 | + 1808 |
| 2097 | 6851 | 6322 | — 5139 | + 1983 |

TABEL III.

**Lichtsterkte van het loodrecht uittredende licht op verschillende diepten.**

$k = 1$.

| $\lambda$ | Diepte $= 0{,}05\ R.$ | Diepte $= 0{,}1\ R.$ |
|---|---|---|
| 323 $\mu\mu$ | 1,047 | 1,113 |
| 386 | 1,078 | 1,151 |
| 433 | 1,063 | 1,125 |
| 456 | 1,060 | 1,110 |
| 481 | 1,054 | 1,100 |
| 501 | 1,054 | 1,100 |
| 534 | 1,047 | 1,086 |
| 604 | 1,050 | 1,089 |
| 670 | 1,041 | 1,073 |
| 699 | 1,039 | 1,069 |
| 866 | 1,032 | 1,056 |
| 1031 | 1,029 | 1,047 |
| 1225 | 1,023 | 1,035 |
| 1625 | 1,017 | 1,028 |
| 2097 | 1,018 | 1,029 |

TABEL IV.

**De lichtverdeeling op de diepte 0,1 R voor $k = 1$.**

| $\lambda$ | $\chi = 0°$ $\sin\chi = 0$ | 12° 0,20 | 24° 0,40 | 37° 0,60 | 53° 0,80 | 64° 0,90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 386 $\mu\mu$ | 1,151 | 1,138 | 1,094 | 1,013 | 0,862 | 0,686 |
| 433 | 1,125 | 1,116 | 1,082 | 1,017 | 0,894 | 0,755 |
| 456 | 1,110 | 1,098 | 1,063 | 0,997 | 0,848 | 0,575 |
| 604 | 1,084 | 1,074 | 1,048 | 0,972 | 0,819 | 0,542 |
| 1031 | 1,047 | 1,037 | 1,015 | 0,974 | 0,864 | 0,629 |
| 2097 | 1,029 | 1,019 | 0,999 | 0,962 | 0,875 | 0,687 |

| $\lambda =$ | $\chi = 0°$ | 12° | 24° | 37° | 53° | 64° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 386 | 1 | 0,988 | 0,950 | 0,880 | 0,758 | 0,595 |
| 433 | 1 | 0,991 | 0,962 | 0,904 | 0,794 | 0,672 |
| 456 | 1 | 0,989 | 0,958 | 0,898 | 0,764 | 0,518 |
| 604 | 1 | 0,991 | 0,966 | 0,896 | 0,755 | 0,500 |
| 1031 | 1 | 0,991 | 0,970 | 0,931 | 0,825 | 0,601 |
| 2097 | 1 | 0,991 | 0,972 | 0,935 | 0,851 | 0,668 |

## § 10. HET VRAAGSTUK VAN DEN SCHERPEN ZONSRAND.

**De feiten. —**

Bij rustige lucht vertoonen onze kijkers den rand van de zon als een scherpe lijn. Hoe snel het intensiteitsverval is kan men afleiden uit de waarnemingen van „Baily's parelsnoer", dat zich bij totale zonsverduisteringen een kort oogenblik vóór en na de totaliteit vertoont; door de dalen tusschen de maanbergen, ziet men dan nog de schitterende photospheer, terwijl de toppen dezer bergen haar reeds geheel bedekken. Schat men de hoogte van tamelijk aanzienlijke maanbergen op 4 Km., en neemt men voor den afstand aarde—maan 400.000 Km. aan, dan komt het hoogteverschil tusschen bergtoppen en dalen met ongeveer 2″ overeen. De metingen van Auwers [1]) met den heliometer van de sterrewacht te Kaapstad gaven de middellijn der zon met een zoo groote nauwkeurigheid, dat de uitkomsten der verschillende reeksen waarnemingen niet meer dan 0″,1 uiteenloopen. Men mag wel aannemen dat een hoogteverschil van één boogsecunde, of 700 Km. in den dampkring der zon, moet overeenkomen met een toename van de lichtsterkte in de verhouding van tenminste 100 : 1.

**Overzicht der theorieën. —**

1. De oudere zonnetheorieën hadden geen moeite om dezen scherpen zonsrand te verklaren. Zoolang men uitging van de opvatting van Kirchhoff [2]), en de zon beschouwde als een vaste of vloeibare kern, omhuld door een gasvormigen dampkring, sprak het vanzelf dat men den scherpen rand identificeerde met de begrenzing van de zonnekern.

2. Ook de theorieën die de photospheer verklaarden als een wolkenlaag, gevormd uit kleine gloeiende korreltjes die

[1]) A. N. **123**, n°. 2935, 97.
[2]) Abh. Akad. Wiss. Berlin, 1861, 83.

zweven in een gasvormige omgeving, behoefden zich niet om de verklaring van den scherpen zonsrand te bekommeren. FAYE [1]), STONEY [2]), BALL, [3]) HASTINGS [4]), in den lateren tijd YOUNG [5]), HALM [6]), AMAFTOENSKY [7]), SCHULZ [8]) en BREWSTER [9]), beschouwden den zonsrand als de grens van de condensatielaag.

3. De moeilijkheden begonnen echter, zoodra men ertoe kwam, uitgaande van andere overwegingen, de zon als in haar geheel gasvormig te beschouwen. A. SCHMIDT stelt zich voor [10]) dat de dichtheid in de zonnemassa geleidelijk van buiten naar binnen toeneemt, en dat de lichtstralen in dezen dampkring worden gekromd. Een gezichtsstraal die van de aarde uitgaat en de zon treft op grooten afstand van het middenpunt, wordt slechts weinig gekromd en ontsnapt in de ruimte; een straal die dichter bij het middenpunt der zonneschijf loopt, wordt sterker gekromd en nadert spiraalsgewijs steeds dichter tot het binnenste van het hemellichaam. De eerste soort stralen brengt den aardschen waarnemer geen licht, de tweede brengt hem de volle straling van de kern. De overgang tusschen beide soorten stralen geschiedt volkomen plotseling, en de scherpe grens van de zonneschijf wordt dus door een zuiver optisch verschijnsel verklaard. Als argument tegen SCHMIDT's theorie wordt gewoonlijk aangehaald dat de moleculaire verstrooiing en de absorptie veel te groot zouden zijn op de lange lichtwegen welke de theorie vereischt. De moderne opvattingen over het verloop van het absorptieproces in de atomen hebben ons echter de overtuiging ge-

[1]) C. R. 1865, **60**, 89.
[2]) Proc. R. Soc. 1867, **16**, 29.
[3]) The Story of the Sun, London 1893; 136.
[4]) Americ. Journ. of Science 1881, **21**, 41.
[5]) Vgl. NEWCOMB-ENGELMANN, Populäre Astronomie, Leipzig, 1921, 6e Aufl., blz. 327.
[6]) Ann. R. Obs. Edinb. 1902, **1**, 74.
[7]) A. N. 1909, **180**, 136, N°. 4305.
[8]) A. J. 1909, **29**, 33.
[9]) Zie o. a. Le Soleil, Den Haag, 1924; blz. 21, 156 enz.
[10]) Die Strahlenbrechung auf der Sonne. Stuttgart 1891.

geven dat bij verdunde gassen echte absorptie alleen plaats grijpt in zeer smalle spectraalgebieden nabij de eigenfrequenties; en waar de drukkingen nabij de photospheer thans zooveel lager worden geschat dan vroeger, moet men erkennen dat de theorie van SCHMIDT nog aan een ernstig en onbevooroordeeld onderzoek zal moeten worden onderworpen, vooraleer men er een beslissend oordeel over kan vellen.

4. SCHWARZSCHILD [1]), BIGELOW [2]) gaan uit van de theorie der geheel gasvormige zon, en berekenen langs thermodynamischen weg dat er een laag moet zijn waarbij de dichtheid en het uitstralend vermogen der meeste zonnegassen zeer snel afneemt, voor een hoogteverschil van slechts enkele honderden kilometers. Zulk een laag ziet de aardsche waarnemer als een praktisch scherpen rand. Al deze theorieën behoeven echter herziening, daar zij geen rekening houden met den stralingsdruk, waarvan het groote belang nog niet erkend was toen zij werden opgesteld en die een dergelijk snel drukverval stellig onmogelijk maakt. De theorie van EDDINGTON, [3]) die wèl rekening houdt met den stralingsdruk, is ongelukkiglijk niet toepasselijk op de buitenste lagen van de zon, en geldt alleen voor de diepere deelen.

5. Ook ABBOT neemt de zon als gasvormig aan, [4]) maar hij beproeft den scherpen zonsrand toe te schrijven aan de moleculaire verstrooiing. Wij kunnen aan zijn verklaring geen het minste gewicht hechten; zij gaat uit van de onderstelling, dat het verstrooide licht verloren is, en vraagt niet op welke andere plaatsen deze energie weer te voorschijn komt. Een uitvoerige weerlegging van ABBOT's theorie door SPIJKERBOER is in voorbereiding.

6. De nieuwste opvatting van het randverschijnsel hebben wij te danken aan STEWART. [5]) De geïoniseerde zonnegassen bevatten vrije electronen, die straling kunnen opslorpen en in

[1]) Gött. Nachr. 1906, 41.
[2]) A treatise on the Sun's Radiation, New York 1918; 79.
[3]) A. J. 1918, 48, 205. — M. N. 1922, 83, 104.
[4]) The Sun, New York 1911; 245.
[5]) Nature 1923, **111**, 186. Physic. Rev. 1923, **22**, 324.

warmte omzetten. Het theoretisch onderzoek toont, dat deze absorptie aanzienlijk wordt voor drukkingen van de orde $10^{-2}$ atm. en meer. Rekening houdend met allerlei waarnemingsfeiten, beteekent dit dat de drukking over een afstand van 200 Km. zou moeten toenemen van $10^{-7}$ tot $10^{-2}$ atm.[1]) In die onderste laag is de opslorping al zoo groot dat men niet meer dan een paar honderd Km. diep kijken kan; de zon is van daar af als ondoorzichtig te beschouwen, en de temperatuur stijgt snel. Deze theorie heeft stellig veel voordeelen; maar het is de vraag of het zal gelukken uit een thermodynamische berekening aan te toonen dat een zóó snelle toename van de drukking mogelijk is; in dat geval zouden de opvattingen (4) en (6) elkander kunnen aanvullen.

7. Geheel onafhankelijk van vorige verklaringen is de theorie van JULIUS,[2]) welke steunt op de onregelmatige breking. De dichtheid der zonnegassen en hun uitspreidingscoëfficiënt nemen van binnen naar buiten geleidelijk af. Een gezichtsstraal die naar het punt $P$ van de zon gericht is (fig. 30), wordt pluimvormig uitgespreid; vele van zijn vertakkingen brengen licht aan uit de zeer heldere diepe deelen der zon. Een gezichtsstraal die naar $Q$ is gericht brengt veel minder licht aan: 1°. omdat hij verder van het middenpunt der zon loopt; 2°. omdat de uitspreidingscoëfficiënt van de zonnegassen in dit hoogere niveau kleiner is. De aardsche waarnemer zal het punt $P$ tot de „photospheer" rekenen, het punt $Q$ zal hij als daarbuiten liggend beschouwen. Bij het bekijken van fig. 30 voelt men dat een betrekkelijk *geringe* verandering in de uitspreiding voldoende zal zijn om een *groote* verandering in de lichtsterkte te geven. Dit is een belangrijk voordeel van de theorie van JULIUS tegenover de theorieën die reehtstreeks op de dichtheidsverandering steunen (nr. 4 en nr. 6)

**De wiskundige inkleeding van de theorie van JULIUS.** — Wij zullen nu beproeven de theorie van JULIUS uit te

[1]) RUSSELL & STEWART, A. J. 1924, **59**, 208.
[2]) Versl. Akad. Amsterdam, 1913, **22**, 68.

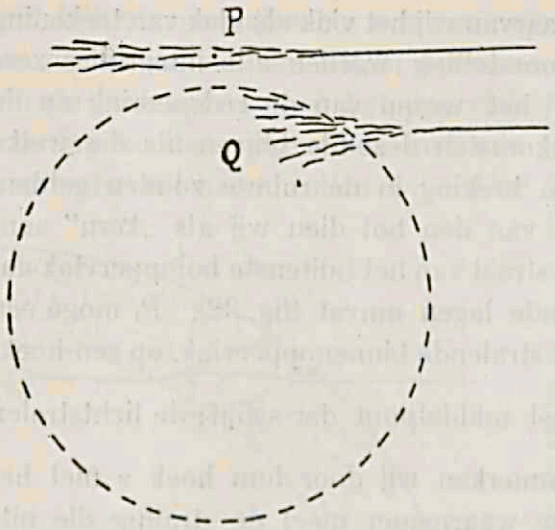


FIG. 30.

drukken in een vorm die zich leent tot de wiskundige behandeling.

*Gegeven* is een gasbol, met scherpe begrenzing, waarin lichtbronnen verdeeld zijn door de geheele massa, en waarin de verschillende deelen elkanders straling *opslorpen, verstrooien* en *breken* op de meest ingewikkelde wijze. Omhul dezen bol door een alleen *onregelmatig brekende* laag, waarvan de uitspreidingscoëfficiënt naar buiten toe snel afneemt. Een waarnemer, op grooten afstand geplaatst, zal nu de scherpe grens van den binnensten bol niet meer zien; de bol schijnt hem grooter geworden, de nieuwe grens ligt meer naar buiten en is waziger. — *Gevraagd: hoe* wazig? Hoe snel moet de uitspreidingscoëfficiënt afnemen, wil de lichtsterkte aan de nieuwe grens afnemen in de verhouding 100 : 1 over een hoogte van 700 Km.?

Deze formuleering schematiseert de opvatting van JULIUS alleen in zooverre, dat de binnenbol en de onregelmatig brekende buitenomhulling hier scherp gescheiden worden gedacht, terwijl zij in de gedachte van JULIUS natuurlijk geleidelijk in elkander overgaan.

Om dit vraagstuk op te lossen, kunnen wij met veel vrucht gebruik maken van de voorstelling der twee-dimensionale onregelmatige straalkromming, welke wij in hoofdstuk II hebben uitgewerkt. Wij denken ons dus de zon *als een cylinder* en beschouwen de onregelmatig brekende slieren als uitgerekt evenwijdig aan de richting der as. Wij hoeven nu alleen rekening te houden met de uitspreiding in een doorsnede

loodrecht op de as, waarvan wij het vlak als vlak van teekening nemen. Door deze voorstelling worden alle integraties zeer vereenvoudigd, terwijl het wezen van de redeneering en de orde van grootte der uitkomsten dezelfde blijven als die welke voor de onregelmatige breking in de ruimte zouden gelden.

Noem $R_1$ den straal van den bol dien wij als „kern" aannemen, $R_2 = h\,R_1$ den straal van het buitenste boloppervlak dat de onregelmatig brekende lagen omvat (fig. 32). $P_1$ moge een der punten zijn van het stralende binnenoppervlak, op een hoekafstand $\frac{\pi}{2} - \Theta_1$ van het middelpunt der schijf; de lichtstralen die van $P_1$ uitgaan kenmerken wij door hun hoek $\eta$ met het oppervlak. De aardsche waarnemer meet de straling die uittreedt door een punt $P_2$ van het buitenoppervlak, onder een hoekje $\omega$ met de richting zon-aarde; dit hoekje zal ongeveer 0,0046 rad. groot zijn wanneer $P_2$ nabij den rand ligt.

De straling die van $P_2$ naar de aarde gericht is, is de som der bijdragen van al de naaldvormige stralen $P_1\,S$ die van de punten $P_1$ onder de verschillende hoeken $\eta$ vertrokken zijn. Elk der bijdragen van deze bundeltjes kunnen wij berekenen met behulp van de wetten van hoofdstuk II.

Om den invloed der grenzen hoeven wij ons niet te bekommeren, dank zij de bijzondere wijze waarop wij het probleem hebben gesteld. Immers, de stralen die van het boloppervlak $R_1$ uitgaan bestaan uit twee deelen (fig. 31): die zooals $O$ welke voor de 1e maal door dit oppervlak gaan; en die zooals I welke voor de 2e, 3e . . . maal het oppervlak passeeren. De stralen die wij als oorsprong van de uittredende straling aannemen, zijn die welke de bol $R_1$ zou uitzenden indien er geen onregelmatig brekende omhulling was (vgl. blz. 97), dus de groep $O$ alleen. Wanneer wij deze stralen op hun gekromde wegen volgen, zijn wij zeker dat wij al de stralen I behoorlijk mee in rekening zullen brengen, en toch geen enkelen straal meer dan éénmaal zullen tellen. Alleen nemen wij aan, dat stralen zooals I op het korte stukje van hun weg dat zij in den binnenbol afleggen, geen merkbare opslorping of moleculaire verstrooiing zullen ondergaan; dit is des te aannemelijker,

omdat deze verschijnselen zeer zwak zijn nabij het oppervlak $R_1$ en slechts in diepere lagen toenemen. — Met den invloed van de buitengrens, het boloppervlak $R_2$, zouden wij kunnen rekening houden volgens de methode uiteengezet op blz. 71. Eenvoudigheidshalve zullen wij echter dezen invloed verwaarloozen; de bijdragen van stralen zooals $O'$ worden dus ten onrechte meegerekend, maar men ziet onmiddellijk dat de afwijkingshoeken dezer stralen zeer groot zijn en dus hun bijdragen uiterst gering.

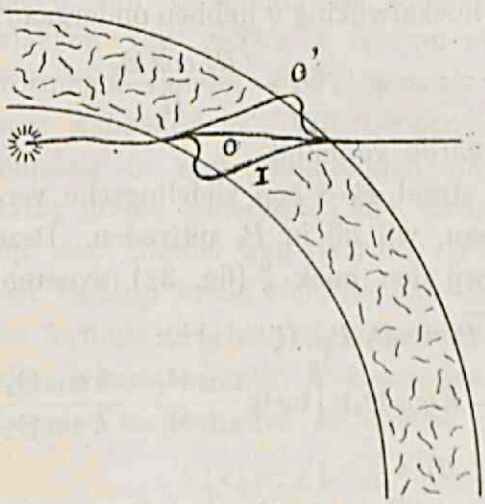


FIG. 31.

Om de theorie der uitspreiding van naaldvormige bundels te kunnen toepassen, moeten wij de drie grootheden berekenen die bepalen welk een bijdrage de straal $P_1 S$ in $P_2$ levert.

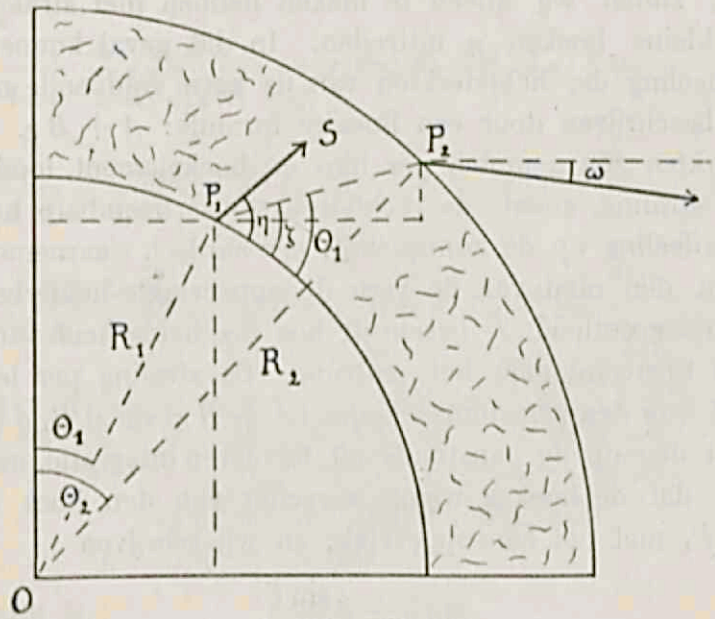


FIG. 32.

*A*) Een bepaalde, van $P_1$ uitgaande lichtstraal $P_1 S$, heeft een weg $P_1 P_2$ af te leggen door de omhulling:

$$(13)\quad x = P_1 P_2 = R_1 \sqrt{(\sin\Theta_1 - h\sin\Theta_2)^2 + (\cos\Theta_1 - h\cos\Theta_2)^2}.$$

*B*) Zal de straal $P_1 S$, die onder een hoek $\eta$ vertrokken is, na onregelmatige breking in de richting van de aarde gericht zijn, dan moet hij een hoekafwijking $\vartheta$ hebben ondergaan:

$$(14)\quad \vartheta = -\eta + \Theta_1 - \omega = -\eta + \Theta_1 - \frac{R_2 \cos\Theta_2}{R}$$

waarin $R$ den afstand zon-aarde voorstelt.

*C*) En eindelijk zal de straal $P_1 S$ een zijdelingsche verschuiving $r$ moeten ondergaan, wil hij in $P_2$ uittreden. Deze kunnen wij benaderen, als wij den hoek $\zeta$ (fig. 32) invoeren.

$$(15)\quad r = P_1 P_2 \,.\, \widetilde{S P_1 P_2} = P_1 P_2 \,.\, (\zeta - \eta) =$$
$$= R_1 \sqrt{(\sin\Theta_1 - h\sin\Theta_2)^2 + (\cos\Theta_1 - h\cos\Theta_2)^2} \left( \mathrm{bg\,tg} \frac{\cos\Theta_1 - h\cos\Theta_2}{\sin\Theta_1 - h\sin\Theta_2} + \Theta_1 - \eta \right)$$

(het teeken past bij dat van $\vartheta$).

Nu weten wij weliswaar niet hoe de straling die den bol $R_1$ verlaat, over de verschillende uittredingshoeken $\eta$ verdeeld is. Maar aangezien wij vooral het randverschijnsel willen nagaan, zullen wij alleen te maken hebben met stralen die onder kleine hoeken $\eta$ uittreden. In dat geval kunnen wij de verdeeling der lichtsterkten van de kern voldoende nauwkeurig beschrijven door een lineaire formule: $A + B\eta$. Deze lichtsterkten zijn gemeten per lijn- en hoekelement, loodrecht op de straling, zooals de rechtstreeks waarneembare helderheidsverdeeling op de zonneschijf; een aardsch waarnemer zou dus aan den rand van de kern de oppervlakte-helderheid $A$ zien; de grootheid $B$ beschrijft hoe die helderheid van den rand af toeneemt naar het centrum. De straling per lengteeenheid van den zonsomtrek is dus $(A + B\eta)\sin\eta)\, R_1\, d\Theta\, d\eta$. Met het oog op de aanstonds uit te voeren integratie, merken wij op dat de hoek $\eta$ weinig verschilt van den hoek $\zeta$ der lijn $P_2 P_1$ met het zonsoppervlak; en wij schrijven

$$(16)\quad \sin\eta = \eta \frac{\sin\zeta}{\zeta}.$$

**Het geval van een dampkring met veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt. —**

In het algemeen zal de uitspreidingscoëficiënt $k$ alleen een functie zijn van den afstand $R$ tot het middenpunt van de zon; een stralenbundel die van $P_1$ uitgaat, doorloopt dus lagen van verschillenden uitspreidingscoëfficiënt. De oppervlakken van gelijke $k$ zijn nu niet loodrecht op den naaldvormigen bundel $P_1 P_2$ gericht, zooals in hoofdstuk II § 6 was aangenomen. Wij hebben echter de uitspreiding der bundels in den omhullenden onregelmatig brekenden dampkring *gering* ondersteld; het verloop van den coëfficiënt dwars op den bundel kan daarom verwaarloosd worden tegenover het verloop in de richting van den bundel zelf, en men kan de formule (44 blz. 54) toepassen. De grootheden $K_1$, $K_2$, $K_3$ zijn integralen van $k$ langs den weg $P_1 P_2 = X$; om ze te bepalen teekent men de functie $k(R)$ over in den vorm

$$k(x) = k\sqrt{R_1^2 + x^2 + 2 R_1 x \sin\zeta}.$$

Onze algemeene uitspreidingswet voor naaldvormige bundels geeft nu de straling die van uit $P_2$ naar de aarde gericht is, als een dubbelintegraal van den vorm:

$$(17)\quad J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{A\eta + B\eta^2}{4\pi\sqrt{2 K_1 K_3 - K_2^2}}\, g(\Theta_1)\, R_1\, d\Theta_1\, d\eta.\ \mathrm{Exp.} - \frac{1}{2 K_1 K_3 - K_2^2} \times$$

$$\times \left[\frac{K_1}{4}(\alpha\eta+\beta)^2 - \frac{K_2}{2}(\alpha\eta+\beta)(\gamma\eta+\delta) + \frac{K_3}{2}(\gamma\eta+\delta)^2\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{A\eta + B\eta^2}{4\pi\sqrt{2 K_1 K_3 - K_2^2}}\, g(\Theta_1)\, .\, R_1\, d\Theta_1\, d\eta.\ \mathrm{Exp.} - \frac{1}{2 K_1 K_3 - K_2^2} \times$$

$$\times \left[\eta^2\left(\frac{K_1\alpha^2}{4} - \frac{K_2\alpha\gamma}{2} + \frac{K_3\gamma^2}{2}\right) + \eta\left(\frac{K_1\alpha\beta}{2} - \frac{K_2(\alpha\delta+\beta\gamma)}{2} + K_3\gamma\delta\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{K_1\beta^2}{4} - \frac{K_2\beta\delta}{2} + \frac{K_3\delta^2}{2}\right)\right].$$

Hierin is $$g(\Theta_1) = \frac{\sin\zeta}{\zeta}.$$

$$(18)\quad \alpha = -R_1\sqrt{1+h^2-2h\cos(\Theta_1-\Theta_2)}$$

$$\beta = R_1\sqrt{1+h^2-2h\cos(\Theta_1-\Theta_2)}\left(\operatorname{bg\,tg}\frac{h\cos\Theta_2-\cos\Theta_1}{h\sin\Theta_2-\sin\Theta_1}+\Theta_1\right)=-\alpha\zeta.$$

$$\gamma = -1$$

$$\delta = \Theta_1-\omega=\Theta_1-\frac{R_2\cos\Theta_2}{R}.$$

Wij gebruiken verder de afkortingen:

$$(19)\qquad a=\frac{K_1\alpha^2}{4}+\frac{K_2\alpha\gamma}{2}+\frac{K_3\gamma^2}{2}$$

$$b=\frac{K_1\alpha\beta}{2}-\frac{K_2(\alpha\delta+\beta\gamma)}{2}+K_3\gamma\delta$$

$$c=\frac{K_1\beta^2}{4}-\frac{K_2\beta\delta}{2}+\frac{K_3\delta^2}{2}$$

$$q=2K_1K_3-K_2^2.$$

De integratie naar $\eta$ is mogelijk; de uitdrukking $\frac{b^2-4ac}{q}$ vereenvoudigt zich bij uitrekenen, en gaat over in: $-\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{4}$.

Tenslotte wordt:

$$(20)\qquad J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_1 g(\Theta_1)}{4\pi\sqrt{q}}d\Theta_1\left\{\frac{q}{2a}\left(A-\frac{b}{2a}B\right)e^{-\frac{c}{q}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{q}{a}}\left[B\left(\frac{q}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b}{2a}A\right]e^{-\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{16a}}\int_{\frac{b}{2\sqrt{aq}}}^{\infty}e^{-y^2}dy\right\}$$

Deze integraal beschrijft behoudens vereenvoudigende onderstellingen de lichtverdeeling op een stralenden bol, omringd door een onregelmatig brekenden dampkring van veranderlijken uitspreidingscoëfficiënt.

**Het geval van een dampkring met overal gelijken uitspreidingscoëfficiënt. —**

De formules die dit geval beschrijven zijn aanmerkelijk

eenvoudiger. Wij kunnen ze vinden door in de vorige uitdrukkingen (19) te stellen: [1])

$$(21) \qquad K_1 = k\,x\,; \quad K_2 = \frac{k\,x^2}{2}\,;$$

$$K_3 = \frac{k\,x^3}{6}\,; \quad q = 2\,K_1\,K_3 - K_2^{\,2} = \frac{k^2\,x^4}{12}.$$

Dan krijgen wij dezelfde uitdrukking als (19), doch met eenvoudiger waarden van de verschillende letters.

$$(22) \qquad \frac{12\,a}{k\,x} = 3\,\alpha^2 + 3\,\alpha\,x + x^2$$

$$\frac{12\,b}{k\,x} = 6\,\alpha\,\beta - 3\,(\alpha\,\delta - \beta)\,x - 2\,\delta\,x^2.$$

$$\frac{12\,c}{k\,x} = 3\,\beta^2 - 3\,\beta\,\delta\,x + \delta^2\,x^2.$$

$$q = \frac{k^2\,x^4}{12}.$$

Bedenkt men dat nu $\alpha = -x$, $\beta = x\,\zeta$, $\gamma = -1$, dan komen er allerlei vereenvoudigingen. De formule die de lichtverdeeling geeft wordt:

$$(23) \qquad J = \int_{-8}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\,\pi} \cdot \frac{\sin\zeta}{\zeta} \cdot d\,\Theta_1 \left\{ \frac{1}{2\,\frac{x}{R_1}} \left( A + \frac{3\,\zeta - \delta}{2}\,B \right) e^{-\frac{3\,\zeta^2 - 3\,\zeta\,\delta\,\vartheta + \delta^2}{k\,x}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{x}{R_1}\sqrt{k\,x}} \left[ B \left( \frac{k\,x}{2} + \frac{(3\,\zeta - \delta)^2}{4} \right) + A \cdot \frac{3\,\zeta - \delta}{2} \right] e^{-\frac{3\,(\delta - \zeta)^2}{4\,k\,x}} \int_{-\frac{3\,\zeta - \delta}{2\sqrt{k\,x}}}^{\infty} e^{-y^2} \cdot dy \right\}$$

Deze integraal beschrijft de lichtverdeeling over een stralenden bol van straal $R_1$, omringd door een onregelmatig brekenden dampkring van overal gelijken uitspreidingscoëfficiënt $k$. De waarnemer is ver verwijderd gedacht. De integrand geeft aan hoeveel straling van een punt $P_1$ van de «kern» een punt $P_2$ van het buitenoppervlak bereikt en van daar naar den waarnemer straalt (fig. 32). De integraal sommeert over al de punten $P_1$. De letters $A$ en $B$ beschrijven de straling die de kern verlaat (blz. 100).

[1]) Wij kunnen ook uitgaan van de uitspreidingswet (26) blz. 42.

Wij zullen de volgorde aangeven waarin de integrand berekend moet worden en tevens de beteekenis der letters herhalen.

Ga uit van de bepaalde waarden

$$\Theta_1, \Theta_2, h = \frac{R_2}{R_1}, k R_1.$$

Bereken:

$\delta = \Theta_1 - 0{,}005 \cos \Theta_2$;

$s = \sin \Theta_1 - h \sin \Theta_2$; $c = \cos \Theta_1 - h \cos \Theta_2$;

$\frac{x}{R_1} = \sqrt{c^2 + s^2}$; $k x = (k R_1) \cdot \frac{x}{R_1}$;

$\zeta = \text{bg tg} \frac{c}{s} + \Theta_1$; $\frac{3\zeta^2 - 3\zeta\delta + \delta^2}{k x}$; $\frac{(\zeta - \delta)^2}{1{,}33\, k x}$;

$$\int_{-\frac{3\zeta - \delta}{2\sqrt{k x}}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{3\zeta - \delta}{2\sqrt{k x}}\right)\right]$$

(vgl. de tabellen der kansrekening).

Tenslotte verkrijgt men den totalen coëfficiënt van $A$ en dien van $B$. Daarna wordt vermenigvuldigd met den factor $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\sin \zeta}{\zeta}$.

**Numerieke Uitkomsten.** —

De uitkomsten der integraties (23) zijn medegedeeld in tabel V. De getallen omringd door het teeken □ zijn de coëficiënten der $B$-straling, al de andere zijn de coëfficiënten der $A$-straling.

Denken wij ons bijvoorbeeld een gelijkmatig stralenden bol, die over geheel zijn oppervlak een helderheid 100 vertoont, omhuld door een dampkring welke 0,1 $R$ dik is; en bekijken wij den uitersten rand van die omhulling, dan vinden wij daar een helderheid 47.3, 36.3, 8.6 .... naar gelang van den uitspreidingscoëfficiënt der omhulling. Vertoont echter de stralende bol een helderheid 100 $A$ aan den rand, $100\,A + 100\,B\eta$ op een (heliocentrischen) hoekafstand $\eta$ van den rand, dan wordt de helderheid der omhulling $47.3\,A + 40\,B$, $36.3\,A + 24.6\,B$, enz.

TABEL V.

**Straling van een bol** (cylinder) **omringd door een onregelmatig brekenden dampkring.**

Straling van de kern: $100\,A + 100\,B\,\eta$.

$h = R_2/R_1 = 1{,}1$

| $\Theta_2 =$ \ $kR_1 =$ | 2 | 1 | 0,2 | 0,05 |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 47,3 | 36,3 | 8,6 | 0,091 |
| | [40] | [24,6] | [4,0] | |
| 10° | | 45,2 | 21,2 | |
| 30° | | 61,5 | 69,7 | |
| 55° | | 90,4 | 99,5 | |
| 90° | | 98 | 102 [1] | |

$h = R_2/R_1 = 1{,}01$

| $\Theta_2 =$ \ $kR_1 =$ | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,05 | 0,01 | 0,002 | 0,0005 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 54,3 | 41,8 | 28,4 | 4,8 | 0,001 | | | |
| | [23,8] | [17,2] | [6,3] | | | | | |
| 5° | | | | | 3,03 | 0,0002 | | |
| 6° | | | | | | 0,27 | | |
| 7°18′ | | | | | 30,3 | 12,8 | 6,9 | 0,67 |
| 8°30′ | | | | | 50 | | | 0,67 |
| 9°30′ | | | | | | | | 101 [1] |

$h = R_2/R_1 = 1{,}001$

| $\Theta_2 =$ \ $kR_1 =$ | 1 | 0,1 | 0,02 | 0,01 | 0,005 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 58,1 | 25,8 | 8,9 | 1,6 | 0,04 |
| | [12,7] | [1,6] | | | |
| 4° | | | | | 89,9 |

[1]) Dat deze getallen niet **100** zijn, is te wijten aan onvermijdelijke onnauwkeurigheden bij de graphische integratie.

Uit deze tabel kunnen wij onmiddellijk het volgende besluiten:

1. Voor een dampkring van gegeven dikte doet een toename van den uitspreidingscoëfficiënt de lichtsterkte afnemen in de middenste deelen, toenemen in de randgedeelten. De onregelmatige breking verdeelt dus de straling gelijkmatiger.

2. Voor een dampkring van gegeven uitspreidingscoëfficiënt, is de lichtsterkte aan den rand des te grooter naarmate deze dampkring dunner is.

3. De invloed van de ongelijkmatige helderheid van de kern op de randgedeelten doet zich vooral gevoelen bij een dikken dampkring en sterken uitspreidingscoëfficiënt.

Bijzonder merkwaardig is de groote invloed dien een geringe verandering van den uitspreidingscoëfficiënt op de lichtsterkte hebben kan. In de tabel voor $h = 1_1 1$ en $\Theta_2 = 0$ zien wij bijvoorbeeld de lichtsterkte bijna 100 maal kleiner worden, wanneer $k R_1$ van 0,20 tot 0,05 afneemt. Juist op dit verschijnsel, dat wij hier wiskundig hebben bevestigd gevonden, berust de verklaring van den scherpen zonsrand door JULIUS.

**De opbouw van de buitenste lagen der zon en de waarde van den uitspreidingscoëfficiënt. —**

Wij gaan uit van de „kern" der zon, het gedeelte waarin verstrooiing, uitstraling, opslorping de hoofdrol spelen, en waarvan wij met JULIUS den straal schatten op 0,9 van den straal der schijnbare photospheer. Rond deze kern brengen wij nu achtereenvolgens een reeks onregelmatig brekende omhullingen aan; voor het gemak der berekeningen beschouwen wij in ieder dezer bolschalen den uitspreidingscoëfficiënt als constant.

A. Onderzoeken wij vooreerst of het mogelijk is door een onregelmatig brekende omhulling de grens van de stralende „kern" schijnbaar naar buiten te verplaatsen, tot aan den cirkel dien wij als „photospheergrens" waarnemen. Wij kiezen dus een bolschaal met $h = \frac{R_2}{R_1} = 1,1$. Haar uitspreidingscoëfficiënt moet zóó groot zijn, dat de rand nog ca. 40 %

van de centrale lichtsterkte vertoont; dit volgt immers uit de metingen van Julius tijdens de zonsverduistering van 1912 [1]), de eenige objectieve bepaling van de lichtsterkte aan den rand der zon welke ooit is uitgevoerd.

Indien wij aannemen dat de kern straalt als een zwart lichaam, moeten wij in onze formules $A = 1{,}00$; $B = 0$ stellen. Waarschijnlijker is het, dat de kern een randverzwakking vertoont zooals die bijvoorbeeld welke Spijkerboer voor verstrooiende lagen heeft berekend [2]): $A = 0{,}39$; $B = 0{,}92$; centrale lichtsterkte $= 100$.

Uit tabel V volgt nu de lichtsterkte aan den rand der onregelmatig brekende omhulling, wanneer de centrale lichtsterkte met 100 willekeurige eenheden wordt gelijkgesteld,

| | $kR_1 =$ | *2* | *1* | *0,2* | *0,05* |
|---|---|---|---|---|---|
| $A = 1{,}00$; $B = 0$ | | 47,3 | 36,3 | 8,6 | 0.091 |
| $A = 0{,}39$; $B = 0{,}92$ | | 55,2 | 36,7 | 7,0 | |

In beide gevallen voldoet een uitspreidingscoëfficiënt 1 tot 1,3 het best. De sterke randverzwakking die wij voor de kern hebben aangenomen, heeft slechts geringen invloed op onze keuze gehad.

B) Om de omstandigheden dichter nabij de schijnbare photospheergrens te onderzoeken, gaan wij rond de omhulling A een nieuwe veel dunnere bolschaal aanbrengen, waarvan de dikte $^1/_{100}{}^e$ bedraagt van den straal der schijnbare zonneschijf $\left(\frac{R_2}{R_1} = 1{,}01\right)$.

Deze laag wordt verlicht door de bolschaal A, waarvan de lichtverdeeling niet veel zal verschillen van die welke wij op aarde waarnemen; volgens de metingen van Julius: $A = 0{,}44$; $B = 67$.

De lichtsterkte aan den rand van bolschaal B wordt (in dezelfde eenheden als hierboven):

---

[1]) Versl. Akad. Amst. 1913, **21**, 1499. De metingen hebben betrekking op de totale straling van alle golflengten.

[2]) Proefschrift, blz. 144. Wij kiezen de kurve voor $H = {}^1/_2$.

| | $k R_1 =$ | *1* | *0,5* | *0,2* | *0,01* | *0,05* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A = 1{,}00$; $B = 0$ | | 54,3 | 41,8 | 28,4 | 4,8 | 0,001 |
| $A = 0{,}44$; $B = 0{,}67$; | | 40,0 | 30,0 | 16,7 | | |

Onze eisch is nu, dat de lichtsterkte tot zelfs aan den rand dezer bolschaal slechts langzaam dale. Dit wordt bereikt door $k R_1 = 1$ te kiezen; de lichtsterkte vermindert dan van 44 tot 40 over een afstand 0,01 R, toevallig precies het bedrag dat de metingen van Julius voor de verandering der straling nabij den rand opleveren. Het is dus mogelijk de onregelmatig brekende omhulling te laten dikker worden, en toch de lichtsterkte aan den rand ongeveer onveranderd te bewaren.

C) Onderzoeken wij nog het laagje dat vlak onder de photospheergrens gelegen is, voorgesteld door een nieuwe bolschaal, ter dikte van 0,001 R $\left(\frac{R_2}{R_1} = 1{,}001\right)$. De lichtsterkte aan haren rand wordt:

| | $k R_1 =$ | *1* | *0,1* | *0,02* |
|---|---|---|---|---|
| $A = 1$; | $B = 0$ | 58,1 | 25,8 | 8,9 |
| $A = 0{,}44$; | $B = 0{,}67$ | 34,2 | 12,2 | |

De coëfficiënt dient dus ook daar nog ongeveer 1 te bedragen.

D) Het nu volgende laagje, insgelijks $^1/_{1000}$ van den straal dik, ligt voor den aardschen waarnemer nauwelijks 1 boogsecunde verder naar buiten dan het vorige. De eisch is, dat zijn lichtsterkte ongeveer 100 maal zwakker weze. De tabel V bewijst dat dit voor den uitersten rand van de laag het geval zal zijn, indien haar uitspreidingscoëfficiënt ongeveer 0,008 bedraagt. Op 0,999 R ziet de waarnemer dan de scherpe grens van den binnenbol $C$; op 0,998 R heerscht reeds volle lichtsterkte. Dit laatste blijkt uit tabel V, die voor de lichtsterkte bij $\Theta_2 = 4°$ ($= 16' + \text{bg cos } 0{,}998$) ongeveer 90 eenheden opgeeft.

*Een afname van den uitspreidingscoëfficiënt van 1 tot 0,008, overeenkomend met een niveauverschil van 700 Km., is dus voldoende om de scherpe grens van de zonneschijf te verklaren.*

E) De volgende bolschalen maken wij weer grooter, en

letten alleen op de straling A, wat voldoende is bij de kleine uitspreidingscoëfficiënten die in aanmerking komen.

Een bolschaal die 0,01 R dik is vertoont geen noemenswaarde lichtsterkte meer aan haren rand, indien $kR < 0{,}01$. *Echter zou zij dan wel de scherpe grens van den binnenbol C verwazigen*, en dit te vermijden wordt nu onze hoofdvereischte. Deze scherpe grens moet gezocht worden in de buurt van $\Theta_2 = 8°\,1/2$; tabel V toont dat zij daar inderdaad verschijnt indien $kR_1 \leqslant 0{,}0001$.

Het intensiteitsverval schijnt te gebeuren over een afstand van $0{,}003\,R$, dus van ongeveer 3″; maar nadere berekening voor hoeken $\Theta_2$, gelegen tusschen 8° 30′ en 9° 30′, zou misschien aantoonen dat de breedte van de wazigheid nog geringer uitvalt. De aansluiting bij de werkelijkheid is dus vrij bevredigend voor $kR = 0{,}0001$.

F) Tenslotte beschouwen wij nog een buitenste bolschaal, $0{,}1\,R$ dik. De grens moet dan gezien worden nabij het punt $\Phi_2 = 24°\,54'$. Een voorloopige schatting wijst uit, dat de lichtsterkte even buiten die grens, bij 24° 46′, kleiner dan 1 wordt, wanneer $kR_1$ van de orde $10^{-7}$ is. Wij mogen aannemen dat de grens dan voldoende scherp zou blijven.

*De uitspreidingscoëfficiënten in de verschillende lagen der zon zijn dus ongeveer:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| van | $0{,}9\,R$ | tot $0{,}99\,R$ . . . . . | 1,3 |
| „ | $0{,}99\,R$ | „ $1\,R$ . . . . . | 1 |
| „ | $1\,R$ | „ $1{,}001\,R$ . . . . . | $< 0{,}008$ |
| „ | $1{,}001\,R$ | „ $1{,}01\,R$ . . . . . | $< 10^{-4}$ |
| „ | $1{,}01\,R$ | „ $1{,}1\,R$ . . . . . | $< 10^{-7}$ |

Nabij de schijnbare „photospheergrens" eischt de theorie van Julius dat de uitspreidingscoëfficiënt over een hoogteverschil van 700 Km. 125 maal kleiner worde; bij gelijkblijvende „roering" in den dampkring, is daartoe voldoende dat de dichtheid in de verhouding 11 tot 1 dale. Dit is heel wat aannemelijker dan de verhouding $10^4$ (over 200 Km.) van Schwarzschild en $10^5$ (over 200 Km.) van Stewart en

Russell. De grondgedachte van de theorie van Julius is aldus volkomen bevestigd.

Voor onzen aardschen dampkring kunnen wij den uitspreidingscoëfficiënt berekenen uit de waarnemingen der scintillatie. (vgl. blz. 4). Wij mogen aannemen dat de luchtlaag welke de scintillatie veroorzaakt, van de orde van 10 Km. is, dus $1.4 \times 10^{-5} R$. ($R$ = straal der zon). Een middelbare afwijdingshoek van 4″, zooals men op aarde dikwijls waarneemt, komt dan overeen met een uitspreidingscoëfficiënt van $0{,}7 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}^2}{R}$ — Dit is van dezelfde orde als de waarde die wij even buiten de photospheer hebben gevonden, in lagen die reeds zeer ijl zijn.

Bij gelijke dichtheid schijnt de dampkring der zon dus zeer veel meer gradiënten te vertoonen dan de dampkring der aarde.

## § 11. DE UITSPREIDINGSCOËFFICIËNT EN DE DICHTHEIDSGRADIËNTEN.

Het is mogelijk algemeene betrekkingen aan te geven tusschen den uitspreidingscoëfficiënt van een dampkring en de roering die in dezen dampkring heerscht.

Beschouw één bepaalden straal; denk den dampkring opgebouwd uit een groot aantal elementairgebieden, zoo dat de straal een even langen weg $l$ door elk gebied aflegt. In zulk een gebied moge de optische dichtheidsgradiënt $n$ overal gelijk en gelijkgericht zijn, zijn componente loodrecht op de straalrichting weze $\dot{\mathfrak{n}}$.

In elk gebied krijgt de lichtstraal een kromming $\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\mathfrak{n}}}{n} = \dot{\mathfrak{n}}$ (voor gassen is $n$ ongeveer 1), en ondergaat hij een afwijking $\alpha = l\,\dot{\mathfrak{n}}$; de uitspreidingscoëfficiënt wordt

(24) $k = \frac{\alpha^2}{2\,l} = \frac{\overline{l\,\dot{\mathfrak{n}}^2}}{2}$ voor uitspreiding in 't vlak,

$k = \frac{\alpha^2}{4\,l} = \frac{\overline{l\,\dot{\mathfrak{n}}^2}}{4}$ „ „ „ de ruimte.

Noem $n_0$ den brekingsaanwijzer van het gas bij een tempe-

ratuur van 0° en een drukking van 1 atmospheer, $s$ de dichtheid (t. o. van de normale), $\dot{s}$ den dichtheidsgradiënt in een gebied, $\dot{\mathfrak{s}}$ de componente daarvan welke loodrecht op den lichtstraal is gericht. Wij kunnen nu van den optischen naar den mechanischen gradiënt overgaan:

$$n - 1 = s\,(n_0 - 1)$$

$$\dot{\mathfrak{n}} = \dot{\mathfrak{s}}\,(n_0 - 1).$$

(25) $$k = {}^1/_2\, l\, \overline{\dot{\mathfrak{s}}^2}\,(n_0 - 1)^2 \quad \text{(in 't vlak)},$$

$$k = {}^1/_4\, l\, \overline{\dot{\mathfrak{s}}^2}\,(n_0 - 1)^2 \quad \text{(in de ruimte)}.$$

Een gradiënt $\dot{s}$, die een hoek $\gamma$ vormt met de richting van den straal, heeft een componente $\dot{\mathfrak{s}} = s \sin\gamma$. De kans op een hoek begrepen tusschen $\gamma$ en $\gamma + d\gamma$ is $\frac{d\gamma}{2\pi}$. Dus:

(26) $$\overline{\dot{\mathfrak{s}}^2} = \frac{\overline{\dot{s}^2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\gamma \,.\, d\gamma = {}^1/_2\, \overline{\dot{s}^2} \quad \text{(in 't vlak)}.$$

Evenzoo wordt voor het 3-dimensionale vraagstuk de kans: $\frac{\sin\gamma}{4\pi}\, d\gamma$, en

$$\overline{\dot{\mathfrak{s}}^2} = \frac{\overline{\dot{s}^2}}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\gamma \,.\, d\gamma = {}^2/_3\, \overline{\dot{s}^2} \quad \text{(in de ruimte)}.$$

De uitspreidingscoëfficiënt wordt

(27) $$\boxed{k = {}^1/_4\, l\, \overline{\dot{s}^2}\,(n_0 - 1)^2} \quad \text{(in 't vlak)}.$$

$$\boxed{k = {}^1/_6\, l\, \overline{\dot{s}^2}\,(n_0 - 1)^2} \quad \text{(in de ruimte)}.$$

De uitspreidingscoëfficiënt van een gas is dus evenredig met het vierkant van het brekend vermogen en van de dichtheidsgradiënten; hij is recht evenredig met de gemiddelde afmeting der gradiëntgebieden (bij gegeven waarde van den gradiënt).

Wanneer de gradiënt $\dot{s}$ heerscht over een afstand $l$, zal de schommeling van de dichtheid bedragen:

(28) $$\Delta s = l\, \dot{s}.$$

Invoering van deze grootheid geeft ons de twee nieuwe uitdrukkingen:

$$(29) \qquad k = \frac{\overline{\Delta \dot{s}^2}\,(n_0 - 1)^2}{4\,l} \qquad \text{(in 't vlak);}$$

$$k = \frac{\overline{\Delta \dot{s}^2}\,(n_0 - 1)^2}{6\,l} \qquad \text{(in de ruimte).}$$

Bij gegeven waarde van de amplitudo der dichtheidsschommeling, is de uitspreidingscoëfficiënt dus *omgekeerd* evenredig met de afmetingen der slieren.

Tenslotte kunnen wij nog bedenken, dat de amplitudo der dichtheidsschommeling in het algemeen kleiner zal zijn dan 2 maal de gemiddelde dichtheid. Wij schrijven dus:

$$(30) \qquad k < \frac{s^2\,(n_0 - 1)}{l}.$$

Passen wij nu deze formules toe op *den dampkring der aarde.* Uit de scintillatiewaarnemingen hebben wij gevonden:

$$k = 0{,}7 \,.\, 10^{-5}\,\frac{rad^2}{R} = 1 \,.\, 10^{-16}\,\frac{rad^2}{cm}.$$

Volgens Exner is de gemiddelde afmeting $l$ der slieren van de orde 15 cm. (vgl. blz. 4). Laboratoriumproeven geven voor het brekend vermogen van lucht bij 1 atm. en $0^0$: $n_0 - 1 = 3 \,.\, 10^{-4}$.

Hieruit berekenen wij het middelbare bedrag der gradiënten (27):

$$\bar{\dot{s}} = 2 \,.\, 10^{-5}$$

(de verandering der dichtheid per cm. is dus $\frac{1}{50.000}$ van de normale dichtheid bij $0^0$ en 1 atm.).

Volgens (28) bedraagt de amplitudo der schommelingen:

$$\Delta s = 3 \,.\, 10^{-4} \text{ (t.o. der normale dichtheid).}$$

Deze dichtheidsschommelingen worden toegeschreven aan de turbulentie der luchtstroomingen. Zij superponeeren zich op den veel zwakkeren algemeenen gradiënt van onzen dampkring, die van de orde $1{,}3 \,.\, 10^{-6}\,\frac{\text{atm}}{\text{cm}}$ is.

Passen wij onze formules toe *op de zon*, en wel op de laag vlak onder de „photospheer", waar de onregelmatige straalkromming de eigenaardigste werkingen uitoefent. Volgens onze berekeningen is $k$ daar van de orde $1\ \frac{\text{rad}^2}{R} = 1{,}4.10^{-11}$ rad²/cm. Voor een temperatuur van 6000° en een drukking van 1 atm. wordt $s$ ongeveer 0,05. Wij onderstellen voorloopig $n_0 - 1 = 3\,.\,10^{-4}$ zooals voor lucht op aarde. Uit (29) vinden wij

$$l < \mathbf{16\ cm.}$$

De afmetingen der slieren op de zon zouden dus van dezelfde orde van grootte worden als op aarde, de dichtheidsschommelingen echter honderd maal grooter.

Dit beeld van de zon zou ons afmetingen en verhoudingen vertoonen die aanzienlijk afwijken van die welke Julius zich had voorgesteld. Bij het verder uitbouwen der theorie staan wij thans voor de keuze tusschen twee mogelijkheden:

*òf* de gradiënten zijn inderdaad slechts enkele cm. groot; dit zou in overeenstemming zijn met de belangrijke rol die „microstructuur" in den dampkring der zon schijnt te spelen;

*òf* de gradiënten zijn veel uitgestrekter, maar dan is de brekingsaanwijzer der zonnegassen grooter dan wij uit de aardsche proeven hadden besloten. De hevige bestraling (resp. electronenbeschieting) waaraan hun moleculen zijn blootgesteld, maakt dit stellig niet onwaarschijnlijk.

# AANHANGSEL.

## § 12. DE ONREGELMATIGE STRAALKROMMING ALS NIET-OMKEERBAAR PROCES. MAKROSKOPISCHE EN MIKROSKOPISCHE BESCHOUWINGEN.

**Niet-omkeerbaarheid van den stralengang bij de onregelmatige straalkromming. —**

Beschouwen wij een naaldvormigen lichtbundel, die door onregelmatige straalbreking pluimvormig uitgespreid wordt. Wanneer wij omgekeerd een pluimvormigen bundel door een onregelmatig brekende massa zenden, zullen wij er geenszins in slagen hem weer te veranderen in een fijnen, naaldvormigen straal. — Laten wij echter het verschijnsel niet meer „makroskopisch", maar „mikroskopisch" beschouwen. Als het mogelijk was den dampkring geheel in rust te houden en elk van de oneindig dunne lichtstralen nauwkeurig in de uittredingsrichting terug te zenden, dan zou ook inderdaad omkeerbaarheid bestaan.

Op deze wijze beschouwd, is de onregelmatige breking geheel in overeenstemming met wat wij weten van de andere niet-omkeerbare processen.

**De wederkeerigheidsstelling. —**

Wij zullen een straal door het punt $A$ in de richting $\alpha$ aanduiden door de notatie $(A, \alpha)$, den omgekeerd loopenden straal door $(A, -\alpha)$. Nu geldt algemeen volgende stelling: *wanneer in een onregelmatig brekende middenstof de straal* $(A, \alpha)$ *van sterkte* $S_1$ *een bijdrage* $S_2$ *levert tot den straal* $(B, \beta)$, *dan zal omgekeerd de straal* $(B, -\beta)$ *van sterkte* $S_1$ *een bijdrage* $S_2$ *leveren tot den straal* $(A, -\alpha)$.

Deze wederkeerigheidswet *volgt niet uit symmetrieredenen.* In fig. 33 zijn bv. de punten $A$, $B$ en de richtingen $\alpha$, $\beta$ zóó gekozen, dat de vertrekkende straal $\alpha$ gericht is naar het punt van aankomst $B$; terwijl bij omgekeerden stralenloop $-\beta$ geenszins in de richting van $A$ loopt. Toch levert $A$ in het eerste geval een even groote bijdrage tot $B$, als $B$ in het tweede geval tot $A$ levert.

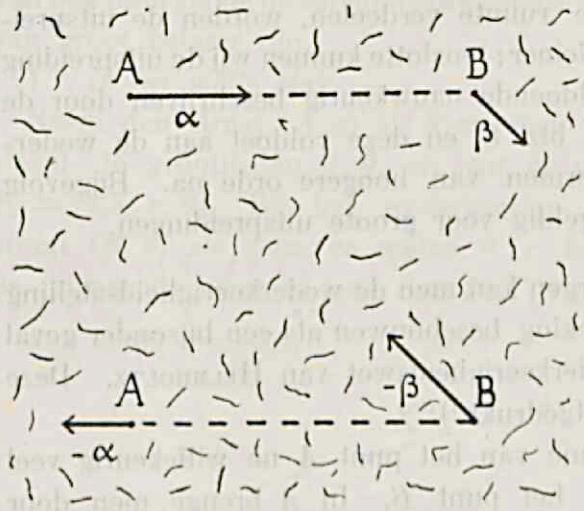



Fig. 33.

Bewijs voor de wederkeerigheidsstelling. — Teeken rond $A$ een willekeurig gesloten oppervlak, zóó dat iedere straal die van $A$ naar $B$ gaat dit oppervlak moet snijden. Noem $\left[A_\alpha C_\gamma\right]$ het breukdeel der straling dat van $A$ komt in de richting $\alpha$, en dat in $C$ uittreedt door een oppervlakte-element $d\sigma$, binnen een hoekje $d\omega$ in de richting $\gamma$. Dan is

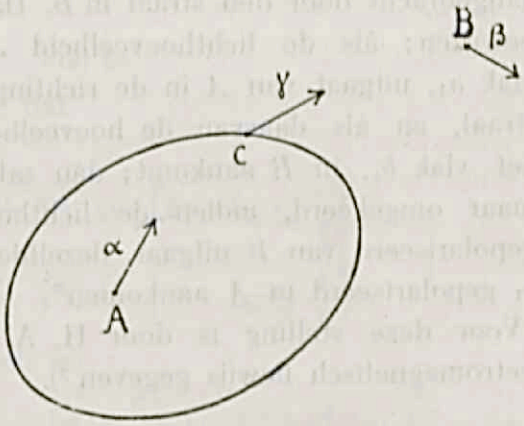



Fig. 34.

$$\left[A_\alpha B_\beta\right] = \iint \left[A_\alpha C_\gamma\right] \left[C_\gamma B_\beta\right] d\sigma \; d\omega.$$

Omgekeerd is

$$\left[B_{-\beta} \; A_{-\alpha}\right] = \iint \left[B_{-\beta} \; C_{-\gamma}\right] \left[C_{-\gamma} \; A_{-\alpha}\right] d\sigma \; d\omega.$$

Wanneer de wederkeerigheidswet gold voor elk der overgangen $A\,C$, $C\,B$, dan zou ook gelden, $\left[A_\alpha B_\beta\right] = \left[B_{-\beta} \; A_{-\alpha}\right]$.

Nu kunnen wij tusschen $A$ en $B$ meerdere elkander niet snijdende oppervlakken aanbrengen; in elk van de laagjes waarin wij aldus de ruimte verdeelen, worden de uitspreidingshoeken steeds kleiner; tenslotte kunnen wij de uitspreiding binnen één laagje voldoende nauwkeurig beschrijven door de kansfunctie $\chi(\alpha)$ van blz. 8, en deze voldoet aan de wederkeerigheidswet op termen van hoogere orde na. Bijgevolg is zij ook algemeen geldig voor groote uitspreidingen.

Mits enkele voorzorgen kan men de wederkeerigheidsstelling der onregelmatige breking beschouwen als een bijzonder geval van de optische wederkeerigheidswet van Helmholtz. Deze is door hem aldus uitgedrukt [1]):

„een lichtstraal kome van het punt $A$ na willekeurig veel „brekingen enz. naar het punt $B$. In $A$ brenge men door „de richting van dien straal twee willekeurige vlakken $a_1$ en $a_2$ „loodrecht op elkander aan, volgens dewelke men zijn trillingen „ontbonden denkt; twee dergelijke vlakken worden insgelijks „aangebracht door den straal in $B$. Dan kan men het volgende „bewijzen: àls de lichthoeveelheid $J$, gepolariseerd in het „vlak $a_1$, uitgaat van $A$ in de richting van den beschouwden „straal, en àls daarvan de hoeveelheid $K$, gepolariseerd in „het vlak $b_1$, in $B$ aankomt; dàn zal langs denzelfden weg, „maar omgekeerd, indien de lichthoeveelheid $J$ volgens $b_1$ „gepolariseerd van $B$ uitgaat, dezelfde hoeveelheid $K$ volgens „$a_1$ gepolariseerd in $A$ aankomen".

Voor deze stelling is door H. A. Lorentz een algemeen electromagnetisch bewijs gegeven [2]).

**De wiskundige uitdrukking van de wederkeerigheidsstelling. —**

De wiskundige uitdrukking van de wederkeerigheidsstelling leidt ons tot het aangeven van transformaties waarvoor de uitspreidingswetten invariant moeten zijn; voor het ontdekken

[1]) H. von Helmholtz: Physiol. Optik, 3e Aufl., I, 198. Vorles. über Theorie der Wärme, Leipzig 1903, 158.

[2]) Versl. Akad. Amsterdam, 1895, 4, 176.

van nog onbekende uitspreidingswetten kunnen deze betrekkingen van groot belang zijn.

1. *In het platte vlak.* —

Neem den straal $(A, \alpha)$ als $x$-as, meet ten opzichte van dien straal de grootheden $r, \vartheta$, en laat de uitspreidingswet zijn: $S_2 = f(X, r, \vartheta)$. Bij het wederkeerige geval kiezen we den straal $(B, \beta)$ als $x$-as, en meten $\vartheta', r'$ ten opzichte daarvan; de uitspreidingswet zij nu: $S = f(X', r', \vartheta')$.

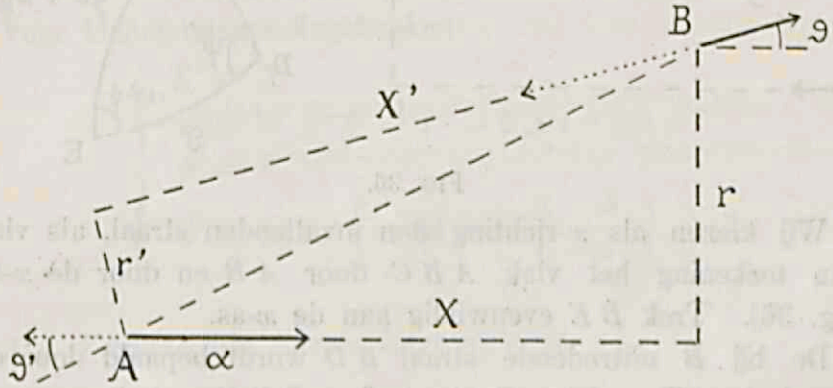



FIG. 35.

Men ziet uit de figuur, dat

(1)
$$\vartheta' = \vartheta$$
$$r' = \sqrt{r^2 + X^2} \cdot \sin\left(\vartheta - \operatorname{bg\,tg} \frac{r}{X}\right)$$
$$X' = \sqrt{r^2 + X^2} \cdot \cos\left(\vartheta - \operatorname{bg\,tg} \frac{r}{X}\right).$$

De wederkeerigheidseisch is:

$$f(X, r, \vartheta) = f\left[\sqrt{X^2 + r^2} \cdot \cos\left(\vartheta - \operatorname{bg\,tg} \frac{r}{X}\right), \sqrt{X^2 + r^2} \cdot \sin\left(\vartheta - \operatorname{bg\,tg} \frac{r}{X}\right), \vartheta\right].$$

Voor kleine uitspreidingen wordt dit:

(2)
$$\begin{cases} \vartheta' = \vartheta \\ r' = \vartheta X - r \\ X' = X \end{cases}$$

en
$$f(X, r, \vartheta) = f(X, \vartheta X - r, \vartheta).$$

Men kan onmiddellijk nagaan dat de functie

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{k\pi X}} e^{-\frac{3r^2 - 3r\vartheta X + \vartheta^2 X^2}{4kX}}$$

hieraan voldoet (vgl. blz. 42).

2°. *In de ruimte.*

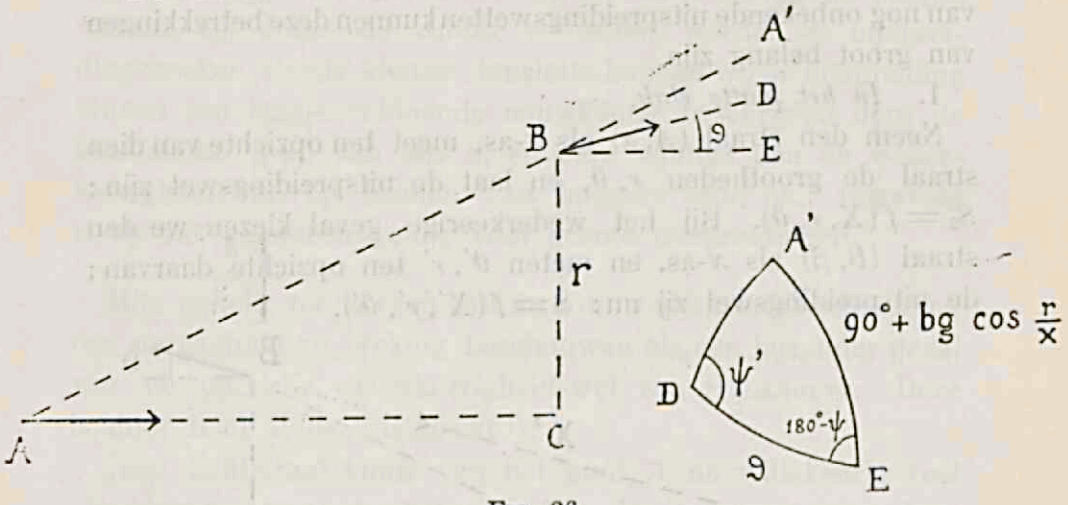



FIG. 36.

Wij kiezen als $x$-richting den invallenden straal, als vlak van teekening het vlak $A\,B\,C$ door $A\,B$ en door de $x$-as (fig. 36). Trek $B\,E$ evenwijdig aan de $x$-as.

De bij $B$ uittredende straal $B\,D$ wordt bepaald door de grootheden $X$, $r$, door zijn hoek $\vartheta = D\,B\,E$ met de $x$-as, en door den hoek $\psi$ van het vlak $A\,B\,C$ met het vlak $D\,B\,E$. Voeren wij nog een derde as $z$ in, loodrecht op de $x$-as en op de $r$-as, en door $B$ gaande.

De richtingscosinussen van den straal $B\,D$ zijn (fig. 37):

$$\cos\vartheta,\ \sin\vartheta\cos\psi,\ \sin\vartheta\sin\psi.$$

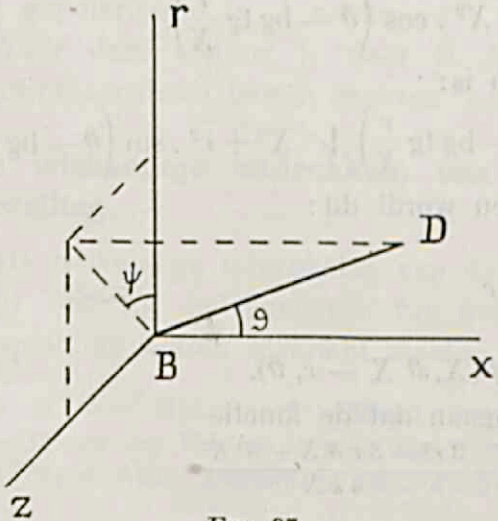



FIG. 37.

De afstand $X'$ is de projectie van $A\,B$ of $A\,B\,C$ op de richting van den uittredenden straal $B\,D$; de afstand $r'$ van het punt $A$ tot aan de lijn $B\,D$ door den oorsprong, is gegeven door $\sqrt{A\,B^2 - X'^2}$; $\psi'$ tenslotte is de hoek tusschen vlak $A\,B\,D$ en vlak $D\,B\,E$, zijn waarde is af te lezen uit fig. 36.

De transformaties worden nu:

$$(3)\quad \begin{cases} X' = X\cos\vartheta + r\sin\vartheta\cos\psi \\ r' = \sqrt{X^2 + r^2 - (X\cos\vartheta + r\sin\vartheta\cos\psi)^2} \\ \vartheta' = \vartheta \\ \psi' = \text{bg cot}\left(-\cot\psi\,.\cos\vartheta + \dfrac{X}{r}\,\dfrac{\sin\vartheta}{\sin\psi}\right) \end{cases}$$

en de wederkeerigheidsstelling eischt dat, met deze transformaties,

$$f(X, r, \vartheta, \psi) = f(X', r', \vartheta', \psi').$$

Voor kleine uitspreidingshoeken:

$$(4)\quad \begin{cases} X' = X \\ r' = \sqrt{X^2\vartheta^2 + r^2 - 2\,X\,r\,\vartheta\cos\psi} \\ \vartheta' = \vartheta \\ \psi' = \text{bg cot}\left(-\cot\psi + \dfrac{X}{r}\,\dfrac{\vartheta}{\sin\psi}\right). \end{cases}$$

3°. *Veranderlijke uitspreidingscoëfficiënt.*

Hier wordt bij uitstek duidelijk dat de wederkeerigheidsstelling geenszins vanzelfsprekend is; de opbouw van den dampkring brengt een element van asymmetrie in het vraagstuk, waarvan de gevolgen niet zonder meer zijn te overzien.

Voor $x$, $r$, $\vartheta$, $\psi$ gelden dezelfde transformaties van blz. 117. Nu gaat ook voor kleine hoeken $k$ over in $k'(x) = k(X - x)$, en

$$(5)\quad \begin{aligned} K_1 &= \int_0^X k\,dx \text{ wordt} & K_1' &= \int_0^X k(X-x)\,dx \\ K_2 &= \int_0^X dx \int_0^x k\,dx \text{ wordt} & K_2' &= \int_0^X dx \int_0^x k(X-x)\,dx \\ K_3 &= \int_0^X dx \int_0^x dx \int_0^x k\,dx \text{ wordt} & K_3' &= \int_0^X dx \int_0^x dx \int_0^x (X-x)\,dx \end{aligned}$$

Onze uitspreidingswet (blz. 54) voldoet inderdaad aan deze wederkeerigheidsbetrekking. Vereischt is:

$$\frac{K_1}{4}r^2 + \frac{K_2}{2}r\vartheta + \frac{K_3}{2}\vartheta^2 = \frac{K_1'^2}{4}(r - \vartheta X)^2 + \\ + \frac{K_2'}{2}(r - \vartheta X)\vartheta + \frac{K_3'}{2}\vartheta^2,$$

dus

$$K_1 = K_1'$$
$$K_2 = -K_2' + K_1' X$$
$$K_3 = K_3' - K_2' X + \frac{K_1' X^2}{2}$$

Schrijft men de integralen (5) uit, en past men enkele eenvoudige transformaties toe, dan kan men die betrekkingen gemakkelijk bewijzen. Tevens is dan aangetoond, dat in (44) blz. 54 de noemer van den exponent behoorlijk in zichzelf overgaat; het is daartoe voldoende in de uitdrukking $2 K_1' K_3' - K_2'^2$ de grootheden door hun waarden (5) te vervangen.

## De stelling van Malus en het golfoppervlak voor onregelmatig gebroken stralenbundels. —

Malus heeft er de aandacht op gevestigd, dat de lichtbundels algemeen behooren tot de stralenstelsels die men *orthotomisch* noemt: dit beteekent dat het altijd mogelijk is een oppervlak aan te brengen dat al hunne stralen loodrecht snijdt. Malus heeft aangetoond dat een bundel die eenmaal orthotomisch is het ook blijft *na willekeurig veel brekingen* en terugkaatsingen. [1])

Nu is het merkwaardige, dat een naaldvormige bundel door onregelmatige breking wordt opengespreid tot een lichtpluim, die een bij uitstek kenmerkend voorbeeld van *niet*-orthotomischen bundel schijnt te zijn. In die lichtpluim gaat immers door elk punt een bundeltje stralen van allerlei richtingen, en men zou meenen dat het onmogelijk moet zijn ergens een normaalvlak aan te brengen.

Om deze schijnbare tegenstrijdigheid op te lossen, moeten wij den stralengang „mikroskopisch" nagaan. Eenvoudigheidshalve behandelen wij eerst het 2-dimensionale geval. Het naaldvormige bundeltje dat door de onregelmatig brekende laag uitgespreid is, bestond oorspronkelijk uit een reeks evenwijdige stralen, die wij ons kunnen denken op regelmatige afstanden $d n$ van elkander, en die wij in hun volgorde kunnen

[1]) Zie de literatuur over de stelling van Malus in Czapski-Eppenstein: Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente. Leipzig 1924. blz. 19 en volgende.

nummeren van *1* tot *n* (fig. 38). Wanneer de bundel door de

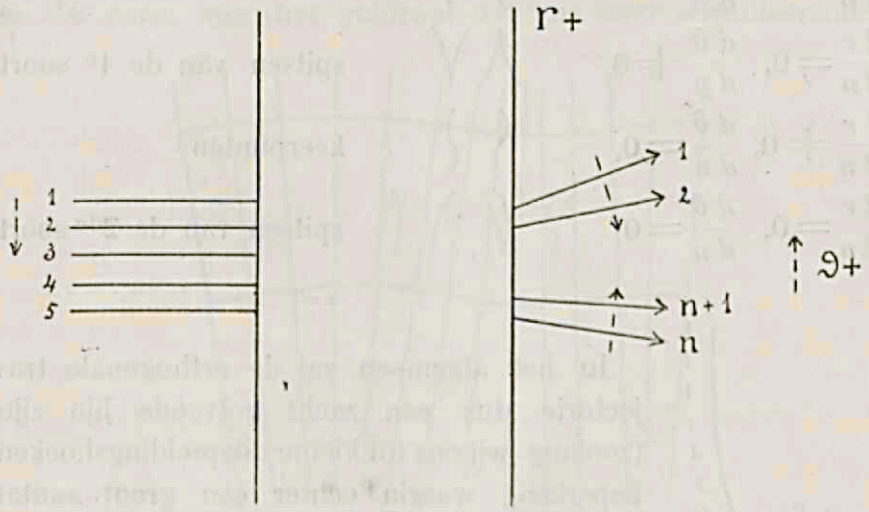



FIG. 38.

onregelmatig brekende laag is gedrongen, zoeken wij den straal op die het nummer 1 draagt, en door een zijner punten brengen wij een loodlijn aan. Die loodlijn snijdt een weinig daarnaast den straal die nummer *2* heette; in dit nieuwe snijpunt teekenen wij de loodlijn op straal *2* en volgen die tot aan straal 3. En zoo doorgaande moeten wij een orthogonale trajectorie vinden die alle stralen loodrecht snijdt; door de afstanden $dx$ waarin de stralen $1, 2 \ldots .$ op elkaar volgden oneindig klein te laten worden, is het altijd mogelijk het verloop der trajectorie zoo nauwkeurig als men wil te benaderen.

Hoe zal er nu zulk een trajectorie uitzien? Wij dienen te bedenken dat de invloed der onregelmatige breking van tweeërlei aard is: 1) hij verandert de helling $\vartheta$ der stralen; 2) hij verschuift ze heen en weer. Wanneer wij dus van den $n$-den uittredenden straal naar den $(n + 1)$-den overgaan langs de orthogonale trajectorie, zullen $\vartheta$ en $r$ onafhankelijk van elkander op grillige maar doorloopende wijze veranderen. Bij een bepaalden overgang $dn$ langs de orthogonale trajectorie kunnen zich verschillende gevallen voordoen; de kurven in de kolom rechts van onderstaand tabelletje geven aan hoe de orthogonale trajectorie in fig. 38 verloopen zou.

$\frac{dr}{dn} \neq 0, \quad \frac{d\vartheta}{dn} \neq 0$ ) (

$\frac{dr}{dn} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dn} \neq 0$ ∧ ∨ spitsen van de 1e soort

$\frac{dr}{dn} \neq 0, \quad \frac{d\vartheta}{dn} = 0,$ ) ( keerpunten

$\frac{dr}{dn} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dn} = 0$ ) ( ) ( spitsen van de 2de soort

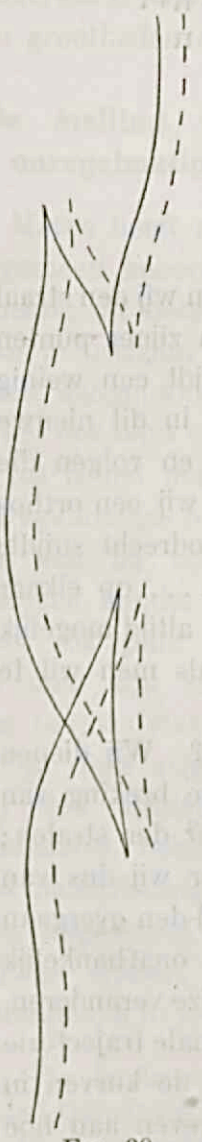


Fig. 39.

In het algemeen zal de orthogonale trajectorie dus een zacht golvende lijn zijn (zoolang wij ons tot kleine uitspreidingshoeken beperken), waarin echter een groot aantal *spitsen* voorkomen, en wel gemiddeld even veel spitsen als er *keerpunten* in de kurve zijn (fig. 39). Deze spitsen zijn in het algemeen spitsen „*van de eerste soort*"; naarmate men dichter bij het uiteinde van de spits komt, gaan de twee raaklijnen willekeurig dicht tot elkaar naderen. De gevallen ∧ en & (lus) komen niet voor. Slechts geheel uitzonderlijk kan een spits „*van de tweede soort*" voorkomen.

In de ruimte met drie afmetingen worden onze bevindingen ongeveer dezelfde. Inplaats van de orthogonale trajectorie komt er een orthogonaal oppervlak, dat een zeker aantal *terugkeerkanten* = *graatlijnen* vertoont. De graatlijnen zullen in het algemeen geen gesloten kurven zijn, maar stukjes met een begin en een einde.

De orthogonale trajectoriën zijn tevens de golfoppervlakken van het licht, volgens de trillingstheorie, en wij hebben dus gevonden hoe de algemeene vorm van het golffront na de

onregelmatige breking worden zal. Van dergelijken aard is nu de vorm van het golffront dat ons door scintilleerende

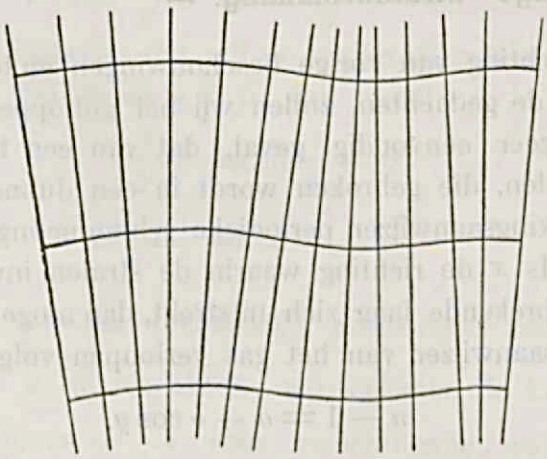


FIG. 40.

sterren wordt toegezonden; het is ietwat bevreemdend dat men in de gewone figuurtjes altijd een verloop van het golffront zonder spitsen geteekend vindt [1]) (fig. 40), terwijl deze toch onmiddellijk te voorschijn komen zoodra men het orthogonale oppervlak op een iets verder gelegen punt van de lichtstralen aanbrengt. De spitsen of graatlijnen komen trouwens ieder oogenblik te voorschijn wanneer men golfoppervlakken gaat teekenen [2]). Wanneer wij ons twee opeenvolgende golffronten voorstellen, elk met een spits, zien wij dat er snijpunten ontstaan, waar dus twee coherente golven gelijktijdig aankomen langs verschillende wegen (fig. 39). Zoo krijgen wij een aanschouwelijke voorstelling van het bekende feit, dat dubbelgekromde golfoppervlakken in het algemeen tot interferentie aanleiding geven [3]).

---

[1]) Zie b.v. PERNTER—EXNER, Meteor. Optik, 2e Aufl. 1922, blz. 225. WOOD, Physical Optics.

[2]) Zie WOOD, Physical Optics, hoofdstuk III.

[3]) Waarom deze interferentie toch bij het scintilleeren der sterren geen rol speelt, vindt men uitgelegd bij RAYLEIGH, Phil. Mag. 1893, **36**, 129 en bij EXNER, Sitzungsber. Akad. Wien 1881, **84**, 1038 (zie blz. 1075) en Sitzungsber. Akad. Wien 1901, **110**, II A, 114.

**Het golfoppervlak voor een eenvoudig geval van „onregelmatige" straalkromming. —**

Ter toelichting van vorige beschouwingen en ter nadere bepaling van de gedachten, zullen wij het golfoppervlak nagaan voor een zeer eenvoudig geval, dat van een bundel evenwijdige stralen, die gebroken wordt in een dunne laag waarvan de brekingsaanwijzer periodieke schommelingen vertoont (fig. 41). Is $x$ de richting waarin de stralen invallen, $y$ die waarin de brekende laag zich uitstrekt, dan moge bijvoorbeeld de brekingsaanwijzer van het gas verloopen volgens de wet:

$$n - 1 = a - b \cos y. \tag{6}$$

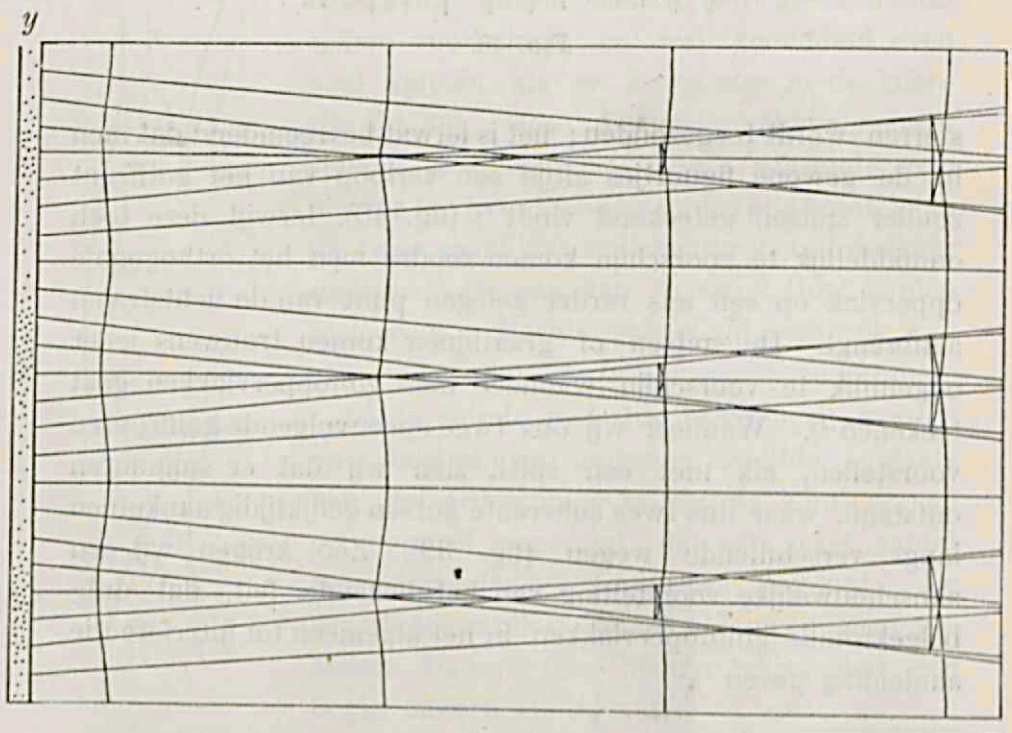



FIG. 41.

De hellingen van de uittredende stralen ten opzichte van de $x$-as worden: $c \sin y$, waarin $c$ een constante is die afhangt van $a$, $b$, en de dikte der laag.

De vergelijking dezer stralen is: $\frac{y - y_0}{x} = c \sin y_0$.

De orthogonale trajectoriën (golfoppervlakken) zijn dus gegeven door de differentiaalvergelijking:

$$y + \frac{x}{y'} + \text{bg sin}\,\frac{1}{cy'} = 0. \tag{7}$$

Laten wij afspreken dat wij de trajectoriën bestudeeren in de omgeving van de as $y = 0$; dan wordt

$$\frac{x}{y'} + \text{bg sin}\,\frac{c}{y'} = 0 \tag{8}$$

$$\text{of} \qquad \sin z = -\frac{cz}{x}$$

indien $z = \frac{x}{y'}$. In een rechthoekig assenstelsel zetten wij de waarden van $z$ uit als abscis; wij teekenen de kurve sin $z$, en de rechte lijnen $-\frac{c}{x}z$ voor verschillende waarden van $\frac{c}{x}$ (fig. 42).

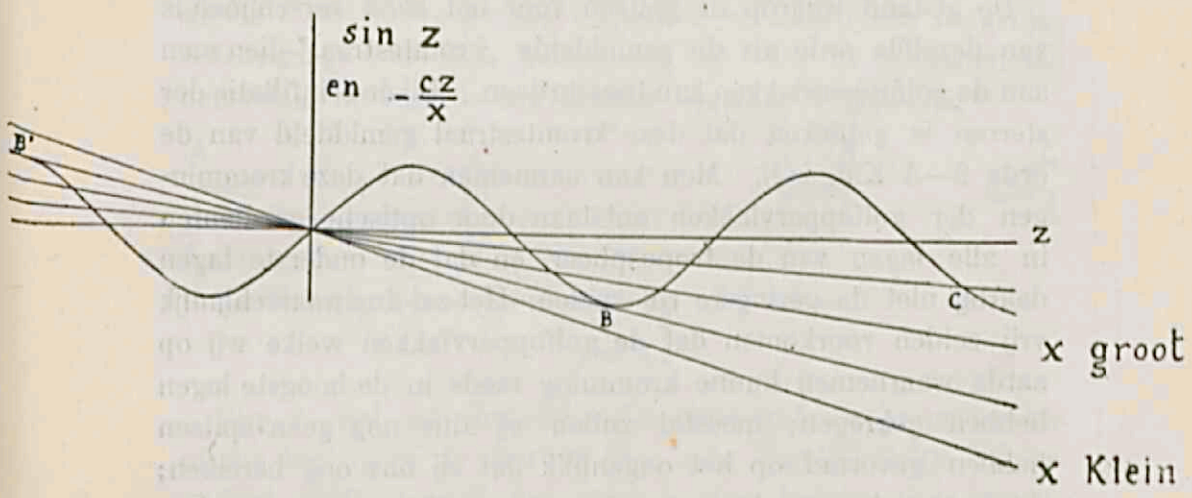



Fig. 42.

Wij vestigen nu onze aandacht op *de snijpunten van de sinuskurve met de rechte lijnen*. Voor kleine waarden van $x$ is er maar één enkel snijpunt: $z = 0$ dus $y' = \infty$; inderdaad ziet men in fig. 41 dat kort na het passeeren der brekende laag alle golfvlakken loodrecht op de $x$-as staan. Bij toenemende waarden van $x$ echter komt er een oogenblik waarop de rechte lijn aan de sinuslijn raakt in $B$ en $B'$ en ze

daarna gaat snijden; dit beteekent dat de spitsen die zich in het golfoppervlak hebben gevormd (fig. 41) zich zoover hebben uitgebreid dat zij de $x$-as hebben bereikt; voor één bepaalde waarde van $x$ kan van dan af $z$ (en dus de helling $y'$ der golfvlakken) 5 waarden hebben: de spits die van boven aankomt en door de $x$-as dringt geeft 2 verschillende hellingen, de spits die van beneden komt geeft er 2 van tegengesteld teeken, en tenslotte is daar ook het gedeelte van het golffront dat loodrecht op de $x$-as blijft doorloopen. Voor nog grootere waarden van $x$, dus op nog grooteren afstand van de brekende laag, vinden wij dat een nieuwe groep van 4 snijpunten $C\,C'$ optreedt; dit is het oogenblik waarop niet alleen de naastbijzijnde, maar ook de eerstvolgende spitsen de $x$-as hebben bereikt.

Zoo kan men alle eigenaardigheden van fig. 41 getrouw weerspiegeld vinden in de graphische voorstelling fig. 42.

De afstand waarop de spitsen voor het eerst verschijnen is van dezelfde orde als de gemiddelde „kromtestraal" dien men aan de golfoppervlakken kan toeschrijven. Bij de scintillatie der sterren is gebleken dat deze kromtestraal gemiddeld van de orde 2—4 Km. is [1]). Men kan aannemen dat deze krommingen der golfoppervlakken ontstaan door optische gradiënten in alle lagen van de troposphеer, en dat de onderste lagen daarbij niet de geringste rol spelen. Het zal dus waarschijnlijk vrij zelden voorkomen dat de golfoppervlakken welke wij op aarde waarnemen hunne kromming reeds in de hoogste lagen hebben gekregen; meestal zullen zij dus nog geen spitsen hebben gevormd op het oogenblik dat zij ons oog bereiken; dit bevestigt weer de thans algemeen aangenomen verklaring, dat interferentie geen rol speelt bij de verschijnselen der scintillatie.

**Lichtsterkte en entropie van een onregelmatig gebroken stralenbundel. —**

De vorige beschouwingen stellen ons in staat een helderder

[1]) Exner: Sitzungsber. Akad. Wien, 1881, 84, II, 1054.
Pernter & Trabert: Sitzungsber. Akad. Wien, 1888, 97, IIa, 1301.

inzicht te krijgen in een schijnbare tegenstrijdigheid die zich bij de studie der onregelmatige breking voordoet.

Beschouw een bundeltje van sterkte $s_A$, uitgezonden door het vlakje $d\sigma_A$ binnen een ruimtehoekje $d\omega_A$. Plaats op eenigen afstand $l_A$ van $A$ een bolle lens, vermijd terugkaatsingen op hare oppervlakken door de stof waaruit de lens bestaat geleidelijk te laten overgaan in de middenstof waarin wij onze proef uitvoeren. Aan de andere zijde van de lens, op een afstand $l_B$, vormt zich een beeld $d\sigma_B$ van het vlakje $d\sigma_A$. Alle lichtstralen die van $d\sigma_A$ zijn uitgegaan komen in $d\sigma_B$ tezamen: $s_A d\sigma_A d\omega_A = s_B d\sigma_B d\omega_B$; terwijl echter het oppervlakje veranderd is in de verhouding $\left(\frac{l_B}{l_A}\right)^2$, is het openingshoekje der bundels juist in de omgekeerde verhouding $\left(\frac{l_A}{l_B}\right)^2$ gewijzigd. *Dit beteekent dat* $d\sigma_A d\omega_A = d\sigma_B d\omega_B$, *en dat de sterkte s der bundeltjes niet veranderd is.* Door een dergelijke redeneering zou men aantoonen dat ook in $C$, buiten het beeldvlak, de sterkte der straling dezelfde is gebleven [1])

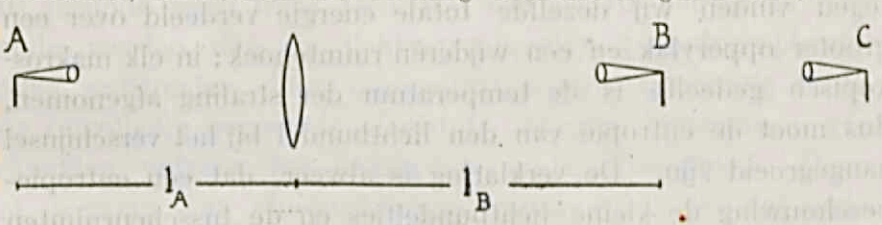



FIG. 43.

Hoe is het nu mogelijk, dat door *willekeurige* makroskopische brekingen de sterkte van een kegelbundeltje onveranderd blijft, terwijl de onregelmatige breking deze sterkte doet afnemen volgens wetten die wij hebben kunnen afleiden?

Denken wij een oogenblik aan de golffronten welke wij in een eenvoudig geval hebben geteekend (blz. 124). De straling die door een mikroskopisch oppervlakte-element uittreedt, bestaat uit een groot aantal bundeltjes, in ieder waarvan de lichtsterkte *even groot* is als vóór de lichtbundel de onregelmatig brekende laag passeerde; maar deze bundeltjes zijn ge-

[1]) Vgl. ook PLANCK, Theorie der Wärmestrahlung, blz. 30.

scheiden door mikroskopische *donkere* ruimtehoekjes (fig. 44).

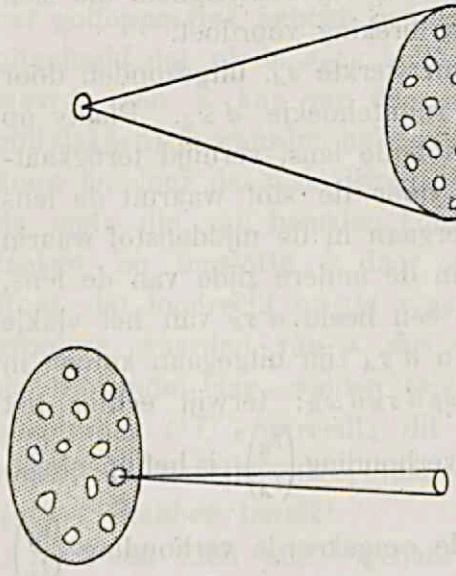


FIG. 44.

Evenzoo kan men de straling onderzoeken die binnen een mikroskopisch ruimtehoekje uittreedt, en vindt dan dat zulk een straling slechts door enkele heldere vlekjes van het makroskopisch oppervlakte-element passeert. Wanneer men nu *makroskopisch* den uittredenden lichtbundel onderzoekt, vindt men natuurlijk dat zijn „sterkte" kleiner is geworden.

Een dergelijke beschouwing geldt voor de entropie. Breking door stelsels lenzen of prisma's doet de entropie van een bundel niet veranderen. [1]) Na onregelmatige breking daarentegen vinden wij dezelfde totale energie verdeeld over een grooter oppervlak en een wijderen ruimtehoek; in elk makroskopisch gedeelte is de temperatuur der straling afgenomen, dus moet de entropie van den lichtbundel bij het verschijnsel aangegroeid zijn. De verklaring is alweer, dat een entropiebeschouwing de kleine lichtbundeltjes en de tusschenruimten *als geheel ziet*. Zoodra men mikroskopisch gaat ontleden verdwijnt de entropietoename en tevens de niet-omkeerbaarheid van het verschijnsel.

## § 13. ENKELE PROEVEN BETREFFENDE DE ONREGELMATIGE STRAALKROMMING.

Eigenlijke proeven over het verschijnsel der onregelmatige straalkromming zijn tot hiertoe niet genomen. De onregelmatige breking door glaspoeder, altijd gepaard met onregelmatige

[1]) Vgl. over de entropie van lichtbundels: H. A. LORENTZ, Stralings theorie, Leiden 1919, hoofdstuk III.

terugkaatsing, is niet zonder meer met onregelmatige straalkromming te vergelijken; de proeven met vloeibare kristallen zijn ook van ietwat anderen aard, wegens de dubbelbreking der structuurelementen (vgl. blz. 6).

Wij hebben ons daarom voorgesteld, door enkele eenvoudige proeven en metingen de voornaamste wetten der onregelmatige straalkromming te onderzoeken, in een middenstof met typisch continu verloopende en zeer grillige slieren.

**1. De vloeistofslieren in evenwijdig licht.** —

Een groot aquarium, met wanden van spiegelglas, 50 × 20 × 10 cm³. metend, werd bijna geheel gevuld met leidingwater. Van een verzadigde oplossing keukenzout werden 50—150 cm³. in dit aquarium gegoten, en wel volgenderwijs: gedurende 5 secunden werd het water in roering gebracht met behulp van een dun glazen staafje; van de 5e tot de 8e secunde werd de zoutoplossing uitgegoten, terwijl de hand snel heen en weer bewoog zoodat deze oplossing door alle deelen van het aquarium verspreid werd. Van de 8e tot de 10e secunde werd weer geroerd. Van de 10e tot de 11e secunde werden dan de lichtverschijnselen gephotographeerd welke ontstonden door onregelmatige straalkromming in de nog onvolledig gemengde vloeistof. Al deze bewerkingen geschiedden volgens het tikken van een metronoom. — Door het werken met vloeistofslieren waren wij zeker dat onze

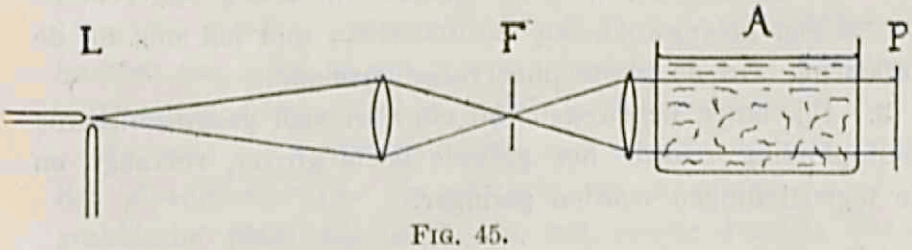



Fig. 45.

middenstof nergens discontinue overgangen vertoonde, dat de waargenomen verschijnselen aan echte straalkrommingen waren toe te schrijven; daarentegen moesten wij het nadeel op den koop toe nemen, dat alleen moment-opnamen konden worden gemaakt, en dat de geschikte toestand van de middenstof slechts kort aanhield.

De dunne, gloeiende koolspits van een booglampje (fig. 45, *L*) werd door een lens sterk verkleind afgebeeld in het brandpunt *F* van een achromatisch objectief; een tweede objectief maakt het licht evenwijdig. De wijde bundel valt door het aquarium *A* en treft een scherm waarop men de slieren die zich in de vloeistof vormen afgeteekend ziet. Photographische opnamen worden gemaakt door het scherm te vervangen door een plaat *P*, en een nauwe spleet snel voorbij het brandpunt *F* te bewegen: de belichtingstijd is dan ongeveer 0,01 sec.

De opnamen vertoonen drie verschillende typen (vgl. de plaat blz. 139, fig. 1, 2, 3).

1. Bij korte lichtwegen (10 cm.), zeer weinig en verdunde zoutoplossing, zien wij een groot aantal langwerpige slieren, die herinneren aan de figuren in vloeibare kristallen. Het verschijnsel is op verkleinde schaal een model van het ontstaan der scintillatie; bij lichtsterke sterren en planeten kan men de slieren in onzen dampkring eveneens op een scherm geprojecteerd zien, en dan spreken de waarnemers altijd van „golven", van „banden"[1]).

2. Bij meer en geconcentreerder zoutoplossing zien wij de individueele slieren niet meer. De structuurelementen van het beeld gelijken nu vrij goed op de granulatie van de zonneschijf, zij zijn vrijwel ronde puntjes. Toch is er geen twijfel aan dat iedere slier in werkelijkheid lintvormig uitgerekt is. Dit is een belangwekkende bijzonderheid met het oog op de verklaring van de photospheerverschijnselen.

3. Bij lange lichtwegen (50 cm.) en veel geconcentreerde zoutoplossing, wordt het geheele beeld grover, vervaagt, en de tegenstellingen worden geringer.

**2. De uitspreiding van een oneindig breeden bundel over de verschillende richtingen. —**

Wij zullen thans nagaan, hoe een oneindig breede even-

[1]) Vgl. de waarneming van KEPLER, Astr. pars optica, 1604; VI, 12, blz. 262. ROZET, C. R. 1908, 146, 325. — Vgl. ook de «vliegende schaduwen» bij zonsverduisteringen.

wijdige bundel over de verschillende richtingen wordt uitgespreid (fig. 46). Zulk een bundel verkrijgen wij door een nitra-

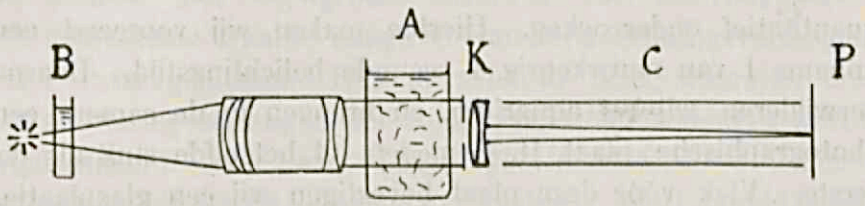



FIG. 46.

lampje met zeer korten gloeidraad te plaatsen in het brandpunt van een groot Petzval-objectief van 17 cm. opening; achter ons aquarium *A* komt een achromatisch kijkerobjectief *K* van 1 meter brandpuntsafstand, en in het brandvlak bevindt zich de photographische plaat *P*. Elk punt op de plaat is dus toegevoegd aan een bepaalde *richting* der lichtstralen die het aquarium verlaten; de verdeeling der lichtsterkte over de verschillende punten van de plaat geeft de verdeeling der lichtsterkte over de verschillende richtingen in den uitgespreiden bundel.

Het kijkerobjectief wordt gediaphragmeerd tot een opening van 3 cm. middellijn. Het is dus groot ten opzichte van de vloeistofslieren, maar toch veel kleiner dan de doorsnede van den invallenden bundel, zoodat deze als werkelijk oneindig breed kan worden beschouwd. De wanden van het aquarium worden zorgvuldig gereinigd en van luchtbelletjes bevrijd; een koker *C*, een camera en verscheidene diaphragma's beschermen de plaat tegen valsch licht van buiten.

Wanneer het aquarium alleen met water gevuld is, wordt het gloeidraadje van de nitralamp op de plaats der photographische plaat afgebeeld als een helder beeldje van ca. $1 \times 2{,}5$ mm. Zoodra wij echter zoutoplossing in het aquarium brengen en roeren, verbreedt zich dit beeldje tot een groote, wazige lichtvlek van enkele centimeters middellijn (Plaat blz. 139, fig. 6). De lichtverdeeling in die vlek is mooi gelijkmatig verloopend van het midden naar den rand; slechts een tiental secunden na het einde van het roeren krijgen

de groote vloeistofstroomen de overhand, en wordt het uitgespreide beeld gaandeweg onregelmatig en flikkerend.

Wij willen thans de lichtverdeeling in de wazige vlek quantitatief onderzoeken. Hiertoe maken wij vooreerst een opname I van nauwkeurig 1 secunde belichtingstijd. Daarna verwijderen wij het aquarium, en brengen in de camera een photographische plaat II, gesneden uit hetzelfde stuk als de eerste. Vlak vóór deze plaat bevestigen wij een glasplaatje, waarop 6 verschillende stukjes rookglas gekit zijn. De breede evenwijdige lichtbundel valt nu door deze rookglaasjes en belicht de photographische plaat gedurende 1 sekunde, evenals bij de eerste opname. Deze tweede photographie zal nu dienen als ijkingsplaat om de zwartingen in lichtsterkten om te rekenen.

De beide platen I en II worden gelijktijdig ontwikkeld, gedurende 10 minuten, met 1 deel glycine-ontwikkelaar + 3 deelen water. Na fixeeren, spoelen, drogen, worden zij doorgemeten met den microphotometer van Moll.

Aangezien beide platen even lang belicht zijn en gelijktijdig ontwikkeld, moeten punten die door even sterk licht getroffen zijn er ook even zwart uitzien. Het is voldoende, op de plaat I de zes punten te zoeken die dezelfde zwarting vertoonen als de hokjes van plaat II; wij weten dan voor zes verschillende lichtsterkten, op welken afstand $A$ van het midden der uitspreidingsvlek zij voorkomen, en de kurve der lichtverdeeling is daardoor voldoende bepaald.

Bij de uitvoering van de methode dient men enkele voorzorgen in acht te nemen. Het drijfwerk van den geïmproviseerden microphotometer loopt niet volkomen gelijkmatig; men brengt dus lichtseinen aan op de registreerkurve telkenmale dat de plaat I verplaatst is over 2 mm. (= een omwenteling van de schroef) en men meet alle afstanden $A$ op het registrogram volgens deze lichtseinen. De rookglaasjes werden onderzocht in den lichtbundel van een monochromator, en hun doorlatingsvermogen met thermozuil en galvanometer bepaald voor het geheele zichtbare spectrum tot $\lambda$ 4200; dit doorlatingsvermogen veranderde weinig met de golflengte.

Nu weten wij, dat de orthochromatische platen waarmede wij werkten vooral gevoelig zijn voor geel en voor blauw-violet; wij kunnen met vrij groote zekerheid voor elk rookglaasje een gemiddelde waarde aangeven van het doorlatingsvermogen dezer twee gebieden. Het ultraviolette licht, waarvoor ons het doorlatingsvermogen der rookglaasjes niet bekend is, wordt uitgeschakeld door een bakje geconcentreerde aesculine-oplossing, dat bij de opname der platen I en II onmiddellijk voor het nitralampje was geplaatst. (fig. 46 *B*). Het doorlatingsvermogen onzer rookglaasjes was: 92, 66, 36, 14, 7, 4, 1% (het getal 92% slaat op het doorlatingsvermogen van het glas waarop de verzwakkers waren gekit); men ziet dat deze verzwakkers toelieten de intensiteitsverhoudingen binnen wijde grenzen te bepalen.

Op deze wijze zijn twee platen doorgemeten. De uitkomsten zijn samengevat in volgende tabel:

| *Lichtsterkte f* | *Afstand tot het midden* | |
|---|---|---|
| in willekeurige maat | *plaat 1.* | *plaat 2.* |
| 92 | — | 0 mm. |
| 66 | — | 2,55 |
| 36 | 2,5 mm. | 4,05 |
| 14 | 5,9 | 5,9 |
| 7 | 7,4 | 7,45 |
| 4 | 8,8 | 7,85 |
| 1 | 10,7 | — |

Wij zullen nu deze gegevens gebruiken om de fundamenteele wet te toetsen, die theoretisch is afgeleid voor de uitspreiding van den oneindig breeden evenwijdigen bundel over kleine hoeken. Deze wet luidde (blz. 32):

$$f = \frac{1}{4\,k\,\pi\,x}\,e^{-\frac{\vartheta^2}{4\,k\,x}}.$$

Ons materiaal leent zich tot verificeering van de afhankelijkheid der straling $f$ van den hoek $\vartheta$. Met behulp van enkel logarithmisch papier, zetten wij $\log f$ uit tegen $\vartheta^2$. *Het blijkt nu dat voor de twee onderzochte platen de verkregen*

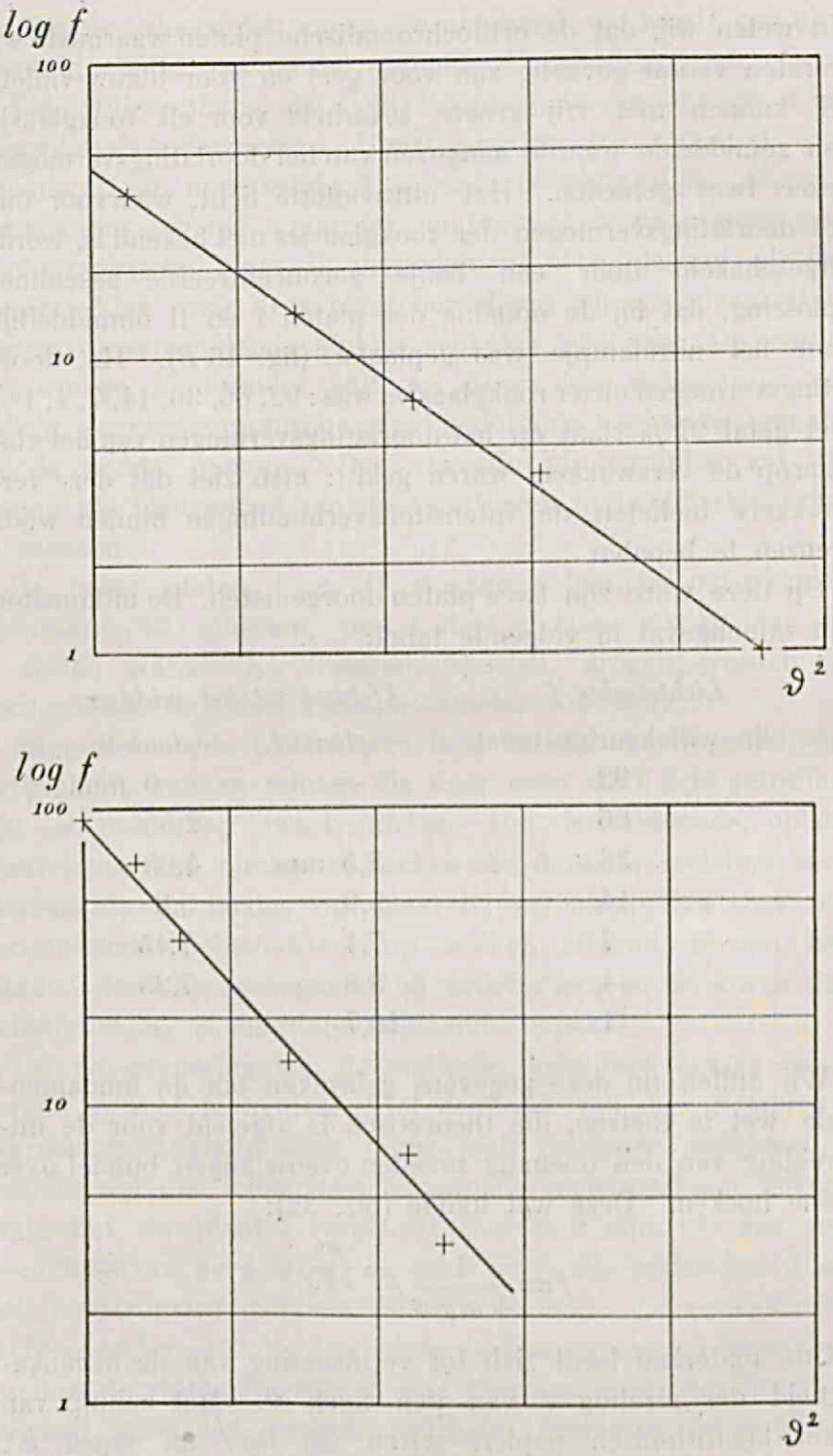



FIG. 47.

*punten vrijwel op rechte lijnen liggen; dit is een quantitatieve bevestiging van de uitspreidingswet.*

De afwijkingen blijven overal binnen 5 %; zij laten zich verklaren door: 1°. de gewone fouten van de photographische intensiteitsbepaling; 2°. de spiegelvlekken gegeven door de groote Petzval-lens, en de lichtverstrooiing door de stofjes in het water; 3°. den eindigen tijdsduur der opname en de niet volkomen onregelmatige verdeeling der vloeistofslieren.

Uit deze grafieken kan men den uitspreidingscoëffiiciënt berekenen van de vloeistof in ons aquarium. Men vindt:

$$\text{voor plaat } 1 \ldots . \; 0{,}33 \,.\, 10^{-6} \frac{rad^2}{cm} = 2{,}3 \,.\, 10^{4} \frac{rad^2}{R};$$

$$\text{voor plaat } 2 \ldots . \; 0{,}23 \,.\, 10^{-6} \frac{rad^2}{cm} = 1{,}6 \,.\, 10^{4} \frac{rad^2}{R}.$$

Deze uitspreidingscoëfficiënten zijn dus meer dan 10.000 maal zoo groot als die op de zon, $10^9$ maal zoo groot als in onzen dampkring.

### 3. De uitspreiding van naaldvormige bundels. Vergelijking tusschen de uitspreiding in richting en in afstand. —

Bij deze proeven is een groote lichtsterkte noodig. Wij vervangen het nitralampje door een kleine booglamp van Zeiss met rechtstandige kolen; het gloeiende puntje van de horizontale kool kan als een zeer heldere puntvormige lichtbron beschouwd worden (fig. 48). De stralen worden evenwijdig gemaakt door een gewoon photographisch ob-

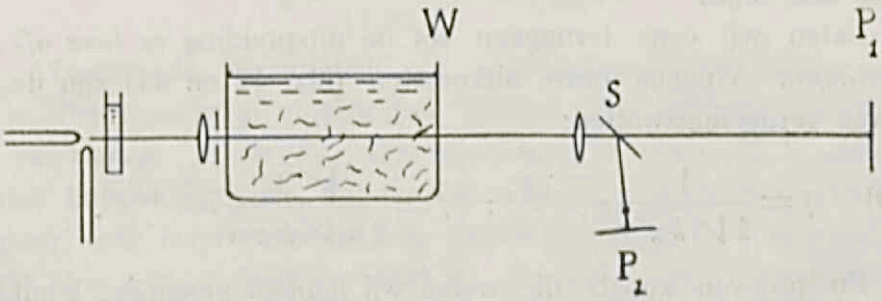



Fig. 48.

jectief van 60 cm. brandpuntsafstand, gediaphragmeerd tot

een opening van 2,5 mm. De uittredende smalle bundel doorloopt ons aquarium, ditmaal over zijn geheele lengte van 50 cm. Daarachter bevindt zich een achromatische lens van 35 cm. brandpuntsafstand, die den achtersten wand $W$ van het aquarium op het scherm $P_1$ afbeeldt. Wij kunnen nu de lichtverdeeling op twee plaatsen onderzoeken.

1) In $P_1$ is ieder punt toegevoegd aan een punt van het uittredingsvlak $W$; de lichtverdeeling op de plaat komt overeen met *de totale lichtsterkte* die door elk dezer punten is gegaan. Wij bestudeeren aldus de uitspreiding in afstand.

2) In $P_2$, het brandvlak der lens, is ieder punt toegevoegd aan een richting van de uit het aquarium tredende stralen. Wij bestudeeren aldus de uitspreiding in richting.

Bij de uitvoering der proef vinden wij dat de slierenvorming in het aquarium het lichtpuntje op de plaat tot een wazige vlek openspreidt, zoowel in $P_1$ als in $P_2$; deze vlekken vertoonen echter onregelmatige wolkerige gedeelten, omdat de bundel niet *veel* breeder meer is dan de vloeistofslieren zelf, zoodat de wet der groote getallen niet geheel opgaat (Plaat blz. 139, fig. 4, 5, 7).

Geschiedt de afbeelding in $P_1$ op ware grootte, dan is de wazige lichtvlek opvallend veel kleiner dan in $P_2$, wat men zien kan door het opvangscherm snel heen en weer te schuiven tusschen beide punten. Wij zullen nu laten zien *dat het mogelijk is aan beide lichtvlekken dezelfde intensiteitsverdeeling te geven, door het aquarium met een zeer bepaalde vergrooting op het scherm $P_1$ af te beelden,* terwijl $P_2$ in het brandpunt der lens blijft.

Laten wij eens teruggaan tot de uitspreiding *in twee afmetingen.* Volgens onze uitkomsten (blz. 42 en 44) zijn de twee verdeelingswetten:

$$(9) \qquad f = \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} e^{-\frac{\vartheta^2}{4kx}}; \quad f = \frac{\sqrt{3}}{2x\sqrt{k\pi x}} e^{-\frac{3r^2}{4kx^3}}.$$

Bij proeven zooals die welke wij hebben genomen, komt de hoek $\vartheta$ te voorschijn als een afstand $\rho = 1{,}33\,\vartheta\,F$ op het scherm $P_2$; de factor 1,33 is afkomstig van de vergrooting

der hoeken bij alle stralen die het aquarium verlaten; $F$ is de brandpuntsafstand van het achromatisch objectief. De afstand $r$ wordt op het scherm $P_1$ afgebeeld als $\rho' = r\,V$, wanneer wij aquarium en scherm op zoodanige afstanden van de lens plaatsen dat de vergrooting $V$ bedraagt. Men ziet uit (9), dat de uitgespreide lichthoeveelheid dezelfde zal zijn voor een punt $r$ en voor een richting $\vartheta$ indien $\vartheta^2 = \frac{3\,r^2}{x^2}$; zij wordt op beide schermen even ver uit het centrum aangetroffen, indien $\rho = \rho'$. De voorwaarde voor gelijke lichtverdeeling in $P_1$ en $P_2$ is dus: $V = \frac{1{,}33\,.\sqrt{3}\,F}{x} = 1{,}61$ bij de omstandigheden van onze proef.

In werkelijkheid hebben wij te maken met een uitspreiding in de ruimte, en daarvan is de wet ons onbekend. Wel weten wij, dat de uitspreiding in richting beantwoordt aan de formule $f = \frac{1}{4\,k\,\pi\,x}\,e^{-\frac{\vartheta^2}{4\,k\,x}}$ (blz. 32), en wij kunnen veilig aannemen dat de uitspreiding in plaats eveneens door een foutenwet wordt weergegeven van den vorm

$$f = \frac{\sqrt{c}}{4\,k\,\pi\,x^2}\,e^{-\frac{c\,r^2}{4\,k\,x^3}}.$$

*De factor c kan nu proefondervindelijk bepaald worden.* Door dezeltde redeneering als tevoren vinden wij, dat indien de lichtuitspreiding in $P_1$ bij een vergrooting $V$ dezelfde is als in $P_2$, dan moet

$$c = \left(\frac{V\,x}{1{,}33\,F}\right)^2 = 1{,}15\,V^2.$$

Wegens de vluchtigheid en niet-reproduceerbaarheid van de sliervorming in vloeistoffen, maken wij *gelijktijdige momentopnamen* in $P_1$ en $P_2$. Een glasplaatje $S$ kaatst 22 % van den bundel zijwaarts, het rechtstreeks doorgaande licht wordt door een Ica-verzwakker op dezelfde lichtsterkte verzwakt; de ééne bundel treft de plaat $P_1$, de andere $P_2$. De slieren worden zoo gelijkmatig mogelijk door het geheele aquarium geroerd, en beide platen 1 secunde belicht.

Voorloopige dergelijke opnamen, bij allerlei vergrootingen $V$, gaven volkomen met elkander kloppende uitkomsten: opdat de lichtvlekken dezelfde intensiteitsverdeeling zouden vertoonen, moet $V$ begrepen zijn tusschen $2{,}15$ en $2{,}9$; de juiste waarde ligt dichter bij het eerste getal dan bij het tweede. Wij besluiten dat, bij uitspreiding van een naaldbundel in de ruimte, de constante $c$ grooter zal zijn dan voor uitspreiding in het platte vlak, en wel ongeveer $6$ zal bedragen.

---

## Toelichting bij de Plaat.

Fig. 1, 2, 3. Vloeistofslieren in evenwijdig licht. Drie typische stadia, met toenemenden uitspreidingscoëfficiënt (blz. 130)

Fig. 4. Uitspreiding van een naaldvormigen bundel door vloeistofslieren. Deze opname dient alleen ter demonstratie; een tamelijk breede bundel is gebruikt, die rakelings langs een wit geverfde ruit loopt.

Fig. 5. Dezelfde naaldvormige bundel nadat de slieren verdwenen zijn.

Fig. 6. Uitspreiding van een oneindig breeden evenwijdigen bundel in richting (blz. 131).

Fig. 7. Uitspreiding van een naaldvormigen bundel in afstand (blz. 136).

---

h. 4477.

# ERRATA.

Blz. 13, fig. 3. — Lees $\Phi' - \Phi$ i. p. v. $\Phi - \Phi'$.

68, fig. 26. — Lees $A'$ i. p. v. $A_1'$.

72, fig. 27. — Lees $X'$ i. p. v. $X_1'$.

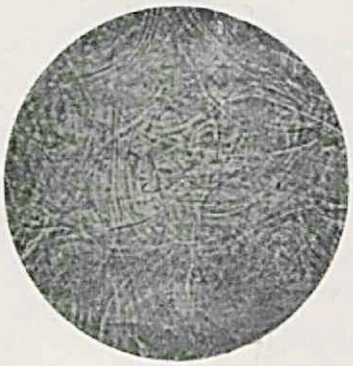
Zet $B'$ bij de punt-streeplijn door $N$.

99, fig. 32. — Het boogje $\Theta_1$ mag niet boven de horizontale stippellijn doorloopen.

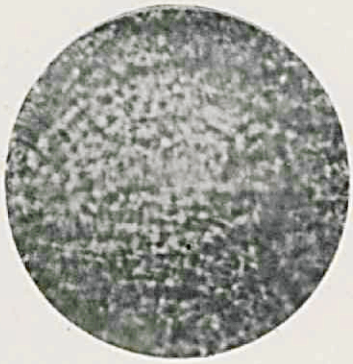
118, fig. 36. — Lees $\psi$ i. p. v. $180° - \psi$.

Lees $\text{bg tg} \frac{r}{X}$ i. p. v. $90° + \text{bg cos} \frac{r}{X}$.

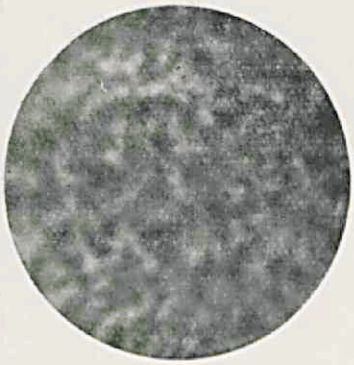
1.



2.

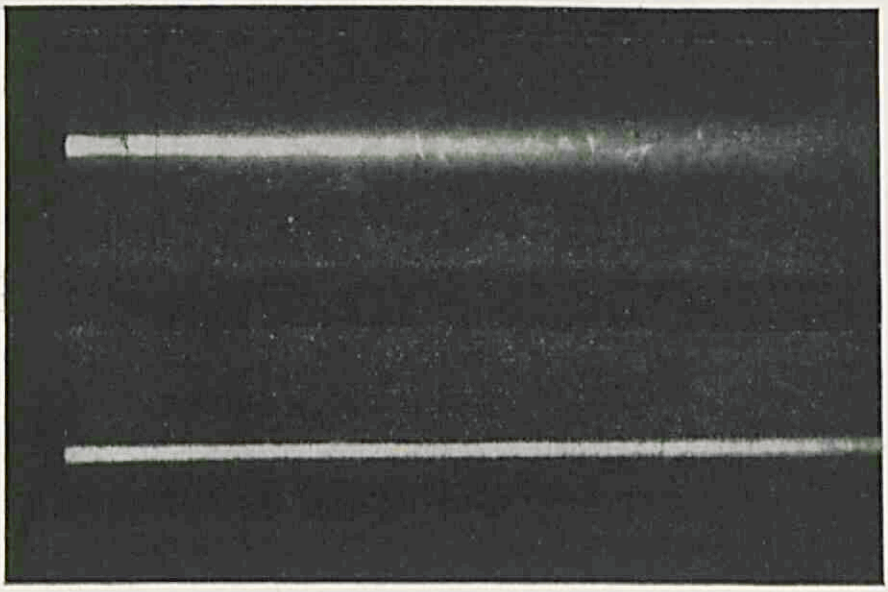


3.



4.

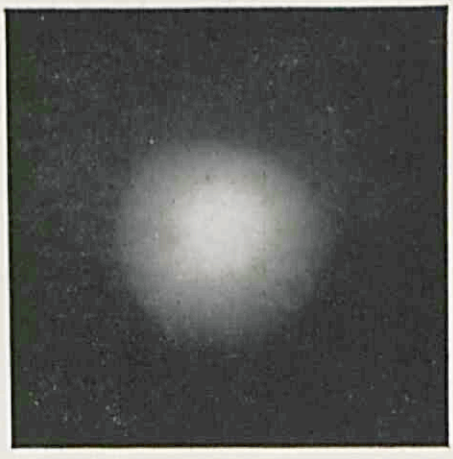
5.

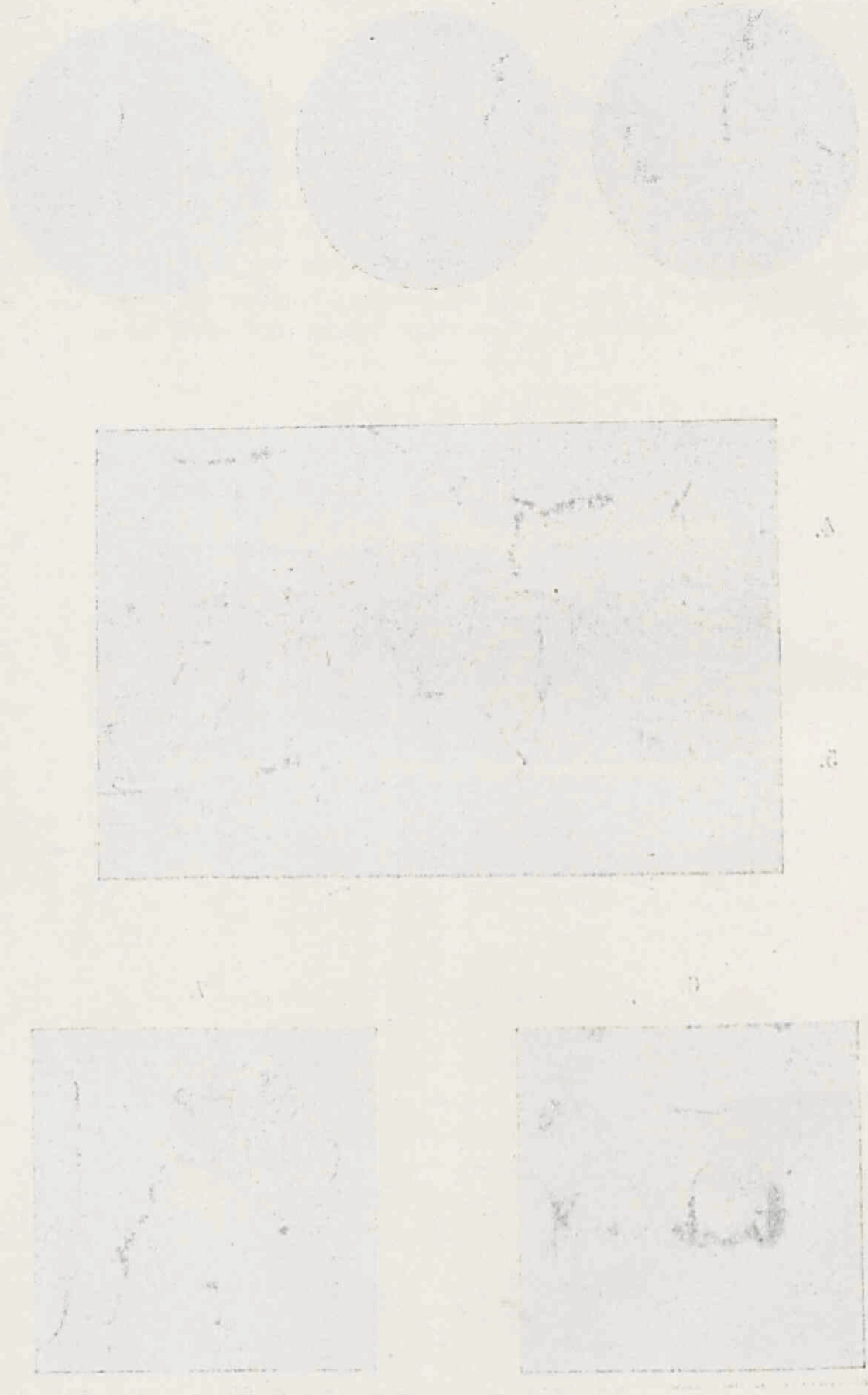


6.



7.





# STELLINGEN.

1.

De stralingsdruk in de corona is niet omgekeerd evenredig met den afstand tot het middenpunt van de zon. De juiste wet kan aangegeven worden.

MILLER, A. J. 1911, 33, 303.

2.

Het zoeken naar polarisatieverschijnselen van het photospheerlicht dient in ultraviolet licht te geschieden.

3.

De bruikbaarheid en het oplossend vermogen van den massaspectrograaf kunnen aanzienlijk vermeerderd worden, door gebruik te maken van de ontwikkelmethodes van GERLACH en STERN.

4.

De wet van den constanten lichtweg mag uitgebreid worden tot virtueele lichtpunten, door de virtueele lichtstralen te beschouwen als zich bevindend in een middenstof van negatieven brekingsaanwijzer.

5.

De bewering van STÖBER over het richten van kristaldeeltjes door een warmtestroom, kan proefondervindelijk getoetst worden.

Zs. f. Krist. 1925, 61, 299.

6.

De weerstand van een differentiaalgalvanometer kan met voordeel in de brug van WHEATSTONE bepaald worden, mits van een bijzondere schakeling gebruik worde gemaakt.

7.

De „onzichtbare massa's" van HERTZ zijn wel degelijk gedacht als bestaande stoffelijke voorwerpen, niet als rekensymbolen.

8.

De demonstratieproef van ROSENBERG over de schaduwbeelden gevormd door holle spiegels, is fout in de uitvoering en in de redeneering.

Zs. phys. chem. U. 1900, **13**, 27. — Experimentierbuch, 1913, II, 427.

9.

BROUWER's voorbeeld van een stelling die ontsnappen zou aan de wet van het uitgesloten derde, is niet overtuigend.

Versl. Akad. Amsterdam, 1923, **32**, 877. — Jhresber. d. d. Math. Ver. 1925, **33**, 252.

10.

De theorie der bolfunctie's dient in het onderwijs ingeleid te worden door aanschouwelijke voorstellingen, niet door formeele bepalingen.

11.

De interpolatiemethode van TSJEBYSJEF houdt slechts onvoldoende rekening met de gewichten der waarnemingen, ook indien men de graphische werkwijze volgt die HARZER daartoe aanbeveelt.

Mém. Acad. St. Pétersbourg, 1859, **1**, N°. 5. — A. N. 1886, **115**, 337.

12.

VEGARD's verklaring van het fonkelen der sterren is onhoudbaar.

Phil. Mag. 1923, 577.

13.

Om uit te maken in hoeverre de verschillende luchtlagen bijdragen tot het fonkelen der sterren, zijn de methodes van EXNER onvoldoende. Waarnemingen in een luchtballon kunnen hier de oplossing geven.

14.

Het waarnemen van natuurkundige en weerkundige verschijnselen in de vrije natuur, moet een belangrijker rol spelen bij het onderwijs dan tot hiertoe het geval was.

15.

Het anagram, gegrift in de lens van Huygens, is ontleend aan Ovidius, Fasti, Lib. I, 305, en is waarschijnlijk ter kennis van Huygens gekomen door het 3e titelblad van Scheiner, Rosa Ursina.

Felices animae, quibus haec cognoscere primis
Inque domus superas scandere cura fuit.
Credibile est illos pariter vitiisque jocisque
Altius humanis exeruisse caput.
Non Venus aut vinum sublimia pectora fregit,
Officiumve fori, militiaeve labor;
Nec levis ambitio, perfusaque gloria fuco,
Magnarumque fames sollicitavit opum.
*Admovere oculis distantia sidera nostris,*
Aetheraque ingenio supposuere suo.

O, heil de geesten, die voor 't eerst, naar kennis strevend,
Opstegen in het sterbezaaide hemelruim!
Verheven moeten zij geweest zijn boven 't leven,
En menschelijke vreugd, en menschelijke feil.
Noch Venus noch de wijn beheerschte hunne harten,
Noch 't politiek gedoe, noch 't ruw soldatenwerk,
Lichtzinnige eerzucht niet, en niet de ijdle glorie,
Zij kenden niet den dorst naar geld en rijkdom groot.
Zij brachten dichter bij ons oog de verre sterren,
't Heelal omvattend door de macht van hun genie.