Een involutorische transformatie der stralenruimte bepaald door twee quadratische involuties

EEN INVOLUTORISCHE TRANSFORMATIE DER STRALENRUIMTE, BEPAALD DOOR - TWEE QUADRATISCHE INVOLUTIES -

A. T. M. KRAMER

EEN INVOLUTORISCHE TRANSFORMATIE DER STRALENRUIMTE, BEPAALD DOOR TWEE QUADRATISCHE INVOLUTIES.

Een involutorische transformatie der stralenruimte, bepaald door twee quadratische involuties.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. J. PH. SUYLING

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 19 April 1926, des namiddags te 4 uur

DOOR

ANGELA TECLA MARIA KRAMER

geboren te GRONINGEN.

Electr. drukkerij „de Industrie" J. VAN DRUTEN — Utrecht

1926

AAN MIJNE OUDERS

Bij het voltooien van mijn proefschrift is het mij een aangename taak om hier mijn dank te betuigen aan allen, die door hun onderwijs tot mijn ontwikkeling hebben bijgedragen.

In het bijzonder geldt mijn dank U, Hoogleeraren en Oud-Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde voor Uw interessante colleges, die ik steeds in dankbare herinnering zal houden.

Maar bovenal U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, dank ik, behalve voor Uw duidelijke en boeiende colleges, voor de voortdurende belangstelling, de hulpvaardigheid en den grooten steun, welke ik bij het bewerken van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

INLEIDING.

In een vlak α kan men zich een *involutorische quadratische transformatie* denken met A_1, A_2 en A_3 als hoofdpunten, in een vlak β een dergelijke quadratische involutie met hoofdpunten B_1, B_2 en B_3.

Een willekeurige lijn t zal vlak α in een punt P, vlak β in een punt Q snijden. Door de transformatie in vlak α zal daar aan het punt P één punt P' worden toegevoegd, eveneens in vlak β aan Q één punt Q'. Wanneer we nu aan dezen straal $t \equiv P\,Q$ toevoegen als t' den straal $P'Q'$, dan zal daardoor een *involutie in de stralenruimte* ontstaan die we nader willen gaan onderzoeken.

Dat we hier te doen hebben met een involutorische transformatie tusschen de stralen der ruimte blijkt direct als we bedenken dat in vlak α het beeld van P' weer het punt P is, in vlak β de transformatie voor Q' ons Q teruggeeft; van den straal $P'\,Q'$ uitgaande zullen we dus $P\,Q$ terugkrijgen.

Zooals bekend is heeft een algemeene quadratische transformatie slechts één involutorisch puntenpaar, kan het echter op 2 manieren voorkomen dat de geheele transformatie involutorisch wordt.

Onder een *involutorische transformatie van de eerste soort* zullen we het geval verstaan waarbij de hoofdpunten zóó zijn samengevallen dat $A_1 \equiv A'_1$; $A_2 \equiv A'_2$; $A_3 \equiv A'_3$.

Hierbij treden dus slechts 4 coïncidentiepunten D_1, D_2, D_3 en D_4 op, terwijl het punt A_1 overeenkomt met de lijn $a_1 \equiv A_2 A_3$, het punt A_2 met $a_2 \equiv A_1 A_3$ en A_3 met $a_3 \equiv A_1 A_2$.

Bij een *involutorische transformatie van de tweede soort* zijn de hoofdpunten zóó samengevallen dat $A_1 \equiv A'_2$; $A_2 \equiv A'_1$ en $A_3 \equiv A'_3$.

Hierbij treden dan oneindig vele coïncidentiepunten op die alle liggen op een kegelsnede k^2_α die in A_1 en A_2 raakt aan $A_1 A_3$ en $A_2 A_3$.

Het punt A_1 komt in dit geval overeen met $A_1 A_3$, dus met de lijn a_2, evenzoo A_2 met a_1, terwijl A_3 weer afgebeeld wordt door a_3.

Verder weten we ook dat in dit laatste geval de punten op elke lijn door A_3 een involutie vormen waarbij de beide snijpunten van die lijn met k^2_α de coïncidenties zijn.

We kunnen nu dus 3 verschillende gevallen onderscheiden:

1°. de vlakken α en β bevatten elk een involutie van de 1e soort.

2°. de vlakken α en β bevatten elk een involutie van de 2e soort.

3°. de involuties in α en β zijn ongelijksoortig.

HOOFDSTUK I.

De transformatie bepaald door twee involuties van de eerste soort.

§ 1. Zoowel in vlak α als in vlak β denken we ons een involutie van de 1e soort, dus met 4 coïncidentiepunten.

In het algemeen zullen 2 homologe stralen t en t' elkaar kruisen. Beschouwen we echter een willekeurig vlak μ, dan zullen μ en α elkaar snijden volgens een lijn p, μ en β volgens een lijn q. De kegelsnede p'^2, die het beeld is van de lijn p in α, zal daar door p gesneden worden in twee punten P en P' die een paar vormen van de involutie in α. Eveneens zullen in β de rechte q en haar beeld q'^2 elkaar snijden in de involutorische punten Q en Q'.

Bij $t \equiv P\,Q$ behoort nu als t' de lijn $P'\,Q'$, terwijl $P'\,Q$ homoloog is met $P\,Q'$. In een willekeurig vlak μ liggen dus steeds *vier rechten* die twee paren t, t' van elkaar snijdende homologe stralen vormen.

Nemen we een willekeurig punt M op $P\,Q$ en verbinden we M met P' in α, dan zal $M\,P'$ vlak β snijden in een punt R'. Tusschen de punten R' en Q' zal een verwantschap moeten bestaan, en zoo dikwijls als daarbij een coïncidentie $R' \equiv Q'$ optreedt zullen we 2 homologe stralen t en t' hebben, die elkaar in M snijden.

Doorloopt R' een rechte r' in β, dus $M\,R'$ een waaier, dan beschrijft P' in α ook een rechte, dus P een kegelsnede door de 3 hoofdpunten A_k; in β zal Q dan echter een kegelsnede beschrijven, die getransformeerd wordt in een kromme van den 4^{en} graad, waarop de punten Q' zullen liggen. We krijgen hier dus tusschen de punten R' en Q' in β een birationale verwantschap van den vierden graad.

Daar een birationale (1,4) 6 coïncidenties heeft, zal het in β 6 maal voorkomen dat $R' \equiv Q'$; dus door een willekeurig punt van de ruimte gaan 6 paren homologe stralen t, t'.

De stralen t, die door den homologen straal t' gesneden worden, vormen dus een congruentie [6,4].

§ 2. Met het hoofdpunt A_1 komt overeen de geheele lijn a_1, het punt A_2 wordt afgebeeld door de lijn a_2, A_3 door a_3; eveneens is de lijn b_k het beeld van het hoofdpunt B_k.

Beschouwen we $A_1 B_1$ als een straal t, dan komt daarmee dus overeen *elke* lijn die rust op a_1 en b_1; eveneens komen met $A_1 B_2$ overeen alle lijnen die behooren tot de bilineaire congruentie welke a_1 en b_2 tot richtlijnen heeft en de straal $A_1 B_3$ wordt afgebeeld door de lijnen die rusten op a_1 en b_3. Zoo vinden we hier dus *9 singuliere stralen* $A_k B_l$ waarvan het beeld een *bilineaire congruentie* is met *richtlijnen* a_k en b_l.

Verbinden we A_1 met een willekeurig punt van b_1, en beschouwen we die verbindingslijn als een straal t, dan zal hiermee *elke* straal uit den waaier $B_1(a_1)$ overeenkomen; dus met *elken* straal uit den waaier $A_1(b_1)$ is homoloog elke straal uit $B_1(a_1)$. (Hiertoe behooren de stralen $A_1 B_2$ en $A_1 B_3$, $B_1 A_2$ en $B_1 A_3$, die we al vonden als singulier.) Evenzoo correspondeert met *elken* straal van den waaier $A_1(b_2)$, *elke* straal die behoort tot den waaier $B_2(a_1)$.

Uitgaande van de 9 waaiers $A_k(b_l)$ krijgen we de 9 waaiers $B_l(a_k)$, die alle geheel uit singuliere stralen bestaan.

Zoo hebben we dus *18 waaiers* die 2 aan 2 involutorisch aan elkaar zijn toegevoegd.

§ 3. Wat is nu het beeld van een ster met top A_k (B_k)?

Een straal t door A_k snijdt vlak β in een punt Q; met Q komt in β overeen één punt Q', maar het punt A_k wordt getransformeerd in de lijn a_k.

Elke straal $A_k\,Q$ wordt dus omgezet in een waaier Q' (a_k).

Een ster met top A_k (B_k) bestaat dus geheel uit singuliere stralen en het beeld van deze ster is een *lineaire axiale complex* met as a_k (b_k).

Wij vonden voor het beeld van den hoofdstraal $A_k\,B_l$ de bilineaire congruentie met richtlijnen a_k en b_l. Nu hebben de sterren om A_k en B_l den straal $A_k\,B_l$ gemeenschappelijk; zijn beeld moet dan de doorsnede van twee lineaire axiale complexen zijn, dus een bilineaire congruentie die de assen der complexen tot richtlijnen heeft; dit komt dus overeen met het vroeger gevonden resultaat.

§ 4. Een punt P op de snijlijn c van de vlakken α en β kunnen we evengoed als een punt Q beschouwen.

In α wordt c getransformeerd in een kegelsnede c_α^2 door de 3 punten A_k; evenzoo wordt c in β omgezet in een kegelsnede c_β^2 door de 3 punten B^k.

Een lijn die c snijdt in een willekeurig punt P, beschouwd als straal t, wordt dus getransformeerd in een straal t' die rust op c_α^2 en c_β^2. Met de geheele ster $[P]$ komt dus overeen één straal t', en nog het beeld van c zelf, daar c behoort tot elke ster $[P]$.

De geheele *axiale lineaire complex* met c tot as wordt dus afgebeeld door een *regelvlak* met c_α^2 en c_β^2 tot richtlijnen.

De rechte c snijdt c_α^2 in twee punten P_1 $(\equiv Q)$ en P_2 $(\equiv R)$. In vlak β liggen nu de beschrijvende lijnen $P_2\,Q'$ en $P_1\,R'$ benevens de richtkromme c_β^2 van het regelvlak. Het regelvlak is dus van den vierden graad. Daar het rationaal is, heeft het een kubische dubbelkromme; deze snijdt het vlak β in de punten S_1 en S_2, welke $P_1 R'$ en $P_2 Q'$ nog met $\overset{2}{c}_\beta$ gemeen hebben, en in het punt $S_3 \equiv P_1 R', P_2 Q'$. (Door S_1 gaat nl. ook de beschrijvende, die S_1 met het overeenkomstige punt van $\overset{2}{c}_\alpha$ verbindt.)

Dit regelvlak $(R)^4$ bestaat uit *hoofdstralen*, want met elken van zijn stralen correspondeert een geheele ster $[P]$.

Verbinden we echter een willekeurig punt C_α op $\overset{2}{c}_\alpha$ met een willekeurig punt C_β op $\overset{2}{c}_\beta$, dan zal C'_α in het algemeen niet hetzelfde punt zijn als C_β.

Het beeld van dien straal $C_\alpha\ C_\beta$ is dus de lijn c zelf; maar dan is c zelf een *hoofdstraal* en wordt afgebeeld door een *congruentie* [4, 4].

Immers: een willekeurig vlak μ zal zoowel $\overset{2}{c}_\alpha$ als $\overset{2}{c}_\beta$ in twee punten snijden, dus 4 stralen bevatten die we als beeld van c kunnen beschouwen; en projecteeren we $\overset{2}{c}_\beta$ uit een willekeurig punt M op vlak α, dan zal de projectie van $\overset{2}{c}_\beta$ daar $\overset{2}{c}_\alpha$ in 4 punten snijden; dus uit een willekeurig punt M vertrekken 4 stralen, die zoowel $\overset{2}{c}_\alpha$ als $\overset{2}{c}_\beta$ snijden, derhalve als beeld van c beschouwd kunnen worden.

Daar $\overset{2}{c}_\alpha$ de lijn c in twee punten P_1 en P_2 snijdt, en P_1 (evenals P_2) met elk punt van $\overset{2}{c}_\beta$ een lijn bepaalt die tot deze [4, 4] behoort, liggen in vlak β twee waaiers met toppen P_1 en P_2 die geheel tot deze [4, 4] behooren. Elke waaierstraal zal $\overset{2}{c}_\beta$ in 2 punten snijden en is daarom als beeld van c dubbel te tellen. We vinden dus dat α een *singulier vlak* is van deze congruentie [4, 4].

Precies hetzelfde geldt dan ook voor vlak β daar ook $\overset{2}{c}_\beta$ de lijn c in 2 punten snijdt.

Singuliere punten van deze [4, 4] zijn alle punten van de beide richtkrommen $\overset{2}{c}_\alpha$ en $\overset{2}{c}_\beta$.

§ 5. De involutie in vlak α bevat 4 coïncidenties, de punten D_1, D_2, D_3 en D_4, evenals de involutie in vlak β de 4 coïncidentiepunten E_k.

De rechte die een coïncidentie van α verbindt met een coïncidentie van β is een straal die in zichzelf getransformeerd wordt. Wij vinden zoo dus de *16 stralen* $D_k E_l$ als *dubbelstralen* voor onze involutie.

Met $D_1 B_1$ correspondeert *elke* straal uit den waaier $D_1 (b_1)$, evenzoo met $D_1 B_2$ *elke* straal uit den waaier $D_1 (b_2)$.

Dit geeft ons dus *12 singuliere stralen* $D_k B_l$, en eveneens *12 singuliere* stralen $E_k A_l$, die elk correspondeeren met een geheelen waaier.

De sterren om D_k (E_k) worden in zichzelf getransformeerd, echter zóó dat elke waaier uit de oorspronkelijke ster [D_k] (resp. [E_k]) afgebeeld wordt door een kegel met top D_k (E_k).

Een waaier in vlak α met top D_k wordt afgebeeld door den quadratischen kegel $D_k (c^2_\beta)$; evenals een waaier met top E_k in vlak β getransformeerd wordt in $E_k (c^2_\alpha)$.

§ 6. Wat is het beeld van een rechte t_a gelegen in vlak α?

P kan nu zijn *elk* punt van t_a, terwijl Q steeds is het snijpunt van t_a met c.

In α wordt t_a getransformeerd in een kegelsnede t'^2_a door de drie hoofdpunten A_k, terwijl in β bij Q slechts één punt Q' behoort. In onze transformatie is het beeld van een willekeurigen straal t_a dus een quadratische regelschaar met Q' tot top, terwijl de richtlijn in α een kegelsnede is door de 3 punten A_k.

Alle lijnen van vlak α zijn dus *singulier*.

Precies hetzelfde geldt voor alle lijnen van vlak β; deze worden ook alle omgezet in quadratische kegels met top op c^2_a, terwijl hun richtlijn in β een kegelsnede is door de 3 punten B_k.

§ 7. Draait t_a in α om een punt R op c dan wordt t'^2 telkens een andere kegelsnede uit den bundel die tot basispunten heeft de 3 hoofdpunten A_k en het punt R'_a dat in de transformatie α met R overeenkomt. In β blijft de top van den kegel die het beeld is van de beschouwde straal t steeds het punt R'_β dat in de transformatie β met R overeenkomt.

De waaier van stralen t_a met top R op c wordt dus omgezet in een verzameling van kegels, alle met top R'_β en die alle de 3 stralen $R'_\beta A_k$ en nog den straal $R'_\beta R'_a$ gemeen hebben.

Als de waaierstraal t_a door een der hoofdpunten A_k gaat, dan wordt $R A_k$ getransformeerd in het lijnenpaar $(R'_a A_k, a_k)$, en de kegel valt dus uiteen in de beide waaiers $R'_\beta (R'_a A_k)$ en $R'_\beta (a_k)$. Evenals we een lijnenpaar kunnen beschouwen als een ontaarde kegelsnede, zoo zullen we deze beide waaiers kunnen beschouwen als een ontaarde regelschaar.

De straal t_a die R verbindt met een der coïncidentiepunten D_k, wordt getransformeerd in een kegelsnede door A_1, A_2, A_3, R'_a en D^k; hier is de kegelsnede uit den bundel door deze 5 punten volkomen bepaald.

Samenvattend kunnen we zeggen dat een *waaier in α met top R op c* getransformeerd wordt in een *ster met top R'_β*.

Ook omgekeerd is in te zien dat elke straal t uit die ster $[R'_\beta]$ zijn beeld heeft in α. Een willekeurige straal uit R'_β zal vlak α in een punt S' snijden; S' is het beeld van een punt S in α, terwijl R'_β het beeld is van een punt R op c. De verbindingslijn RS ligt dus in vlak α.

De lijn c kunnen we ook beschouwen als een straal uit den waaier met top R, en vinden dan als beeld van c een kegel $R'_\beta (c^2_a)$; deze bevat echter slechts een deel van alle stralen die we reeds vonden als vormend het volledige beeld van c.

Laten we nu den top R van den waaier zich bewegen langs c, dan verplaatst R'_β zich langs de kegelsnede c^2_β, terwijl R'_a de kegelsnede c^2_a doorloopt.

Met het stralenveld $[t_\alpha]$ van vlak α komt dus overeen het stelsel der sterren die hun centra hebben op $\overset{2}{c}_\beta$, d. w. z. het beeld van het *stralenveld* $[t_\alpha]$ is de *quadratische stralencomplex* die gevormd wordt door de stralen die $\overset{2}{c}_\beta$ snijden.

Evenzoo vinden we als het beeld van het stralenveld $[t_\beta]$ van β den quadratischen stralencomplex gevormd door de stralen die $\overset{2}{c}_\alpha$ snijden.

De doorsnee van deze complexen is een congruentie met richtlijnen $\overset{2}{c}_\alpha$ en $\overset{2}{c}_\beta$.

Iedere straal die een punt van $\overset{2}{c}_\alpha$ verbindt met een punt van $\overset{2}{c}_\beta$ vonden we echter reeds als beeld van de snijlijn c der vlakken α en β. We vinden hier dus nogmaals dat de snijlijn c getransformeerd wordt in een congruentie $[4, 4]$ met richtlijnen $\overset{2}{c}_\alpha$ en $\overset{2}{c}_\beta$.

§ 8. Beschrijft t_α in α een waaier met willekeurigen top T, dan doorloopt weer het snijpunt S van t_α en c de geheele lijn c; dus S' in β doorloopt de kegelsnede $\overset{2}{c}_\beta$.

De waaier om T wordt dus zóó getransformeerd dat bij elken straal t behoort een kegel met top op $\overset{2}{c}_\beta$, terwijl die kegel vlak α snijdt volgens een exemplaar t'^2 uit den bundel (t'^2) met basispunten A_1, A_2, A_3 en T'. De punten van de kegelsnede $\overset{2}{c}_\beta$ komen dus projectief met de exemplaren van den bundel (t'^2) overeen. Dat er een verwantschap één aan één bestaat blijkt direct; immers bij elk punt S' op $\overset{2}{c}_\beta$ behoort één punt S op c, en dit bepaalt een exemplaar van den waaier met top T, waardoor weer één exemplaar uit den bundel (t'^2) volkomen bepaald wordt.

Projecteeren we nu de puntenreeks $\overset{2}{c}_\beta$ uit een willekeurig centrum M op α, dan krijgen we in α een kegelsnede μ^2 waarvan de punten één aan één toegevoegd zijn aan de punten op $\overset{2}{c}_\beta$, dus ook één aan één toegevoegd aan de exemplaren van den bundel (t'^2). Zoo dikwijls nu een kegelsnede t'^2 uit dien bundel de kegelsnede μ^2 in een overeenkomstig punt snijdt, gaat door het centrum van projectie M een straal t' die het beeld is van een straal t uit den waaier T.

Om dit aantal te vinden kunnen we als volgt redeneeren. Met elk punt P op μ^2 komt overeen één kegelsnede uit den bundel (t'^2), die μ^2 in 4 punten R_k snijdt; bij één punt P behooren dus 4 punten R_k.

Een willekeurig punt R van μ^2 bepaalt één exemplaar uit den bundel (t'^2) dus één punt P op μ^2. Tusschen de punten op μ^2 bestaat dus een verwantschap (4,1), die, daar μ^2 een rationale kromme is, op een rechte kan worden afgebeeld; er zijn dus 5 coïncidenties $P \equiv R$.

Wij vinden dus dat het beeld van een waaier met top T in α *vijf* stralen door een willekeurig punt M zendt.

Een willekeurig vlak μ zal c_β^2 in 2 punten Q snijden, daarbij behooren dan 2 punten, Q_1' en Q_2', op c. Elk van die beide punten geeft, verbonden met T, een straal uit den waaier (t_a). Deze straal wordt omgezet in een kegelsnede α^2 die den doorgang van μ met α in 2 punten snijdt. Deze punten bepalen met de punten Q vier stralen t' die beelden zijn van stralen uit den waaier (t_a).

Een willekeurig vlak bevat dus *vier* stralen t' die homoloog zijn met 2 stralen uit den waaier (t_a^2).

Wij komen dus tot de slotsom dat een *willekeurige waaier* met top T in vlak α omgezet wordt in een *congruentie* [5, 4].

Analoog wordt natuurlijk een willekeurige waaier (t_β) in vlak β getransformeerd in een congruentie [5, 4].

Verbinden we T' met een willekeurig punt van c_β^2, dan behoort deze t' altijd bij een straal t door T in α; de geheele kegel $T'(c_\beta^2)$ behoort dus tot deze congruentie [5, 4], zoodat T' een singulier punt is.

Wij zagen reeds dat zich niets bijzonders voordoet wanneer we T verbinden met een der 3 hoofdpunten A_k. Evenmin is dit het geval wanneer we T verbinden met een der coïncidenties D_k. De kegelsnede t'^2 die het beeld is van den straal $T\,D_k$, gaat door A_1, A_2, A_3 T' en D_k; maar een kegelsnede is door 5 punten bepaald, zij is dus een der kegelsneden uit den bundel (t'^2). Gaat een kegelsnede t'^2 door A_1, A_2, A_3, T' en 2 coïncidentiepunten dan beteekent dat alleen dat T' op de verbindingslijn der beide coïncidenties gekozen is.

§ 9. Als de straal t in een willekeurig vlak μ een waaier $T(m)$ doorloopt, dan liggen de doorgangen P en Q van t steeds op de doorgangen p en q van vlak μ met α en β.

In vlak α wordt p afgebeeld door een kegelsnede p'^2 door de 3 hoofdpunten A_k; eveneens wordt q in β getransformeerd in een kegelsnede q'^2 door de 3 punten B_k.

De puntenreeksen, die P' en Q' op p'^2 en q'^2 beschrijven zijn dus projectief, en een willekeurige waaier $T(m)$ in μ wordt dus afgebeeld door een verzameling lijnen die de punten van p'^2 met de homologe punten van q'^2 verbinden. Vlak β snijdt dit regelvlak, behalve volgens de kegelsnede q'^2, nog volgens de beide lijnen die de 2 snijpunten van p'^2 met c met hun overeenkomstige punten op q'^2 verbinden; de doorsnee met vlak β is dus van den vierden graad.

Het blijkt dus dat een *waaier in een willekeurig vlak* μ getransformeerd wordt in een *rationale biquadratische regelschaar*.

Daar de stralen die de snijpunten van p'^2 met c verbinden met hun homologe punten op q'^2, behalve elkaar, ook elk de kromme q'^2 nog in een 2e punt snijden, vinden we dus in β 3 punten waardoor twee stralen gaan die het beeld zijn van stralen uit den beschouwden waaier. Het regelvlak heeft dus een dubbelkromme van den derden graad.

§ 10. Een straal die een willekeurig punt van p'^2

met een punt van q'^2 verbindt, zal wel het beeld t' zijn van een straal t in vlak μ, maar deze straal t zal in het algemeen niet door T gaan, dus geen straal van den boven beschouwden waaier $T(m)$ zijn.

Als echter t het geheele stralenveld $[\mu]$ beschrijft, dan zullen de doorgangen P en Q ook steeds op de doorgangen p en q van het vlak μ met α en β blijven, en de homologe punten P' en Q' beschrijven de beide kegelsneden p'^2 en q'^2.

Het stralenveld $[\mu]$ wordt dus afgebeeld door een congruentie, waarvan wij de kenmerkende getallen zullen bepalen.

Om den veldgraad van deze congruentie te vinden moeten we zien hoeveel stralen t van μ hun beeld t' in een willekeurig vlak hebben. Nu snijdt een willekeurig vlak p'^2 en q'^2 elk in 2 punten P'_1 en P'_2, Q'_1 en Q'_2; er zijn dus 4 stralen t' ($\equiv P'_k\, Q'_l$) waarmee in μ 4 stralen t overeenkomen.

Om den stergraad te krijgen projecteeren we q'^2 uit een willekeurig centrum M op vlak α. De projectie van q'^2 zal daar p'^2 in 4 punten snijden; dit beteekent dat 4 stralen uit M zoowel p'^2 als q'^2 snijden.

Deze snijpunten op p'^2 en q'^2 zijn beelden van punten op p en q, dus de 4 hiermee correspondeerende stralen liggen in vlak μ.

We vinden dus zoowel voor den veldgraad als voor den stergraad 4; een *willekeurig stralenveld* $[\mu]$ wordt getransformeerd in een *congruentie* $[4, 4]$.

Het vlak μ zal de rechte c snijden in een punt C.

De waaier in μ met top C wordt in zijn geheel afgebeeld door één straal van de congruentie $[4, 4]$, nl. door den straal die het beeld van C op $\overset{2}{c}_\alpha$ verbindt met het beeld van C op $\overset{2}{c}_\beta$. Nu weten we dat $\overset{2}{c}_\alpha$ en p'^2 beide gaan door de 3 hoofdpunten A_k, evenals $\overset{2}{c}_\beta$ en q'^2 de 3 punten B_k gemeenschappelijk hebben. Zoowel $\overset{2}{c}_\alpha$ en p'^2 als ook $\overset{2}{c}_\beta$ en q'^2 zullen elkaar nog in een

4e punt snijden; het beeld van den waaier met top C zal dus de straal zijn die deze 4e snijpunten verbindt.

De doorgang p snijdt c_α^2 in 2 punten, evenals q ook c_β^2 in 2 punten snijdt. Daar alle punten op c_α^2, zoowel als op c_β^2, afgebeeld worden door punten op c, vinden we dus dat 4 lijnen t in μ de lijn c tot beeld hebben.

Tot ditzelfde resultaat komen we als we bedenken dat c zoowel door p'^2 als door q'^2 in 2 punten gesneden wordt, dus een *viervoudige* straal is van de congruentie [4,4].

De kegelsnede p'^2 snijdt p in de beide involutorische punten R en R'.

De waaier $R(q)$ in μ wordt afgebeeld door de quadratische regelschaar met top R' die in β als richtlijn heeft q'^2, evenals de waaier $R'(q)$ afgebeeld wordt door den kegel $R(q'^2)$. Elk punt van p kunnen we als top van een waaier in μ nemen; het beeld is steeds een kegel met top op p'^2, terwijl de doorsnede met vlak β steeds q'^2 is. Evenzoo is het beeld van een waaier in μ met top op q een kegel waarvan de top op q'^2 ligt en die vlak α volgens p'^2 snijdt. De kegelsneden p'^2 en q'^2 bestaan dus geheel uit *singuliere punten* van deze congruentie [4, 4]. Anders gezegd: de congruentie [4, 4] die het beeld is van een willekeurig stralenveld [μ], heeft tot singuliere krommen de beide kegelsneden p'^2 en q'^2 die de beelden zijn van de doorsneden p en q van vlak μ met de vlakken α en β.

Beschouwen we nog eens de beide snijpunten P_1 en P'_2 van p'^2 met de snijlijn c. P'_1 verbonden met ieder punt van q'^2 geeft telkens een straal t' waarvan de homologe straal t ligt in μ; eveneens geeft P'_2 verbonden met een willekeurig punt van q'^2 een straal t' waarbij een t behoort in μ.

Zoo vinden we dus dat vlak β een *singulier vlak* is van de congruentie [4,4]; hetzelfde geldt natuurlijk voor vlak α.

Daar elke waaierstraal t' in α de kegelsnede p'^2 (resp.

in β de kegelsnede q'^2) in twee punten snijdt, moet elke straal t' in α (β) geteld worden als beeld van twee stralen t in μ.

In het vlak μ zelf zullen ook 4 stralen t' van deze congruentie [4,4] moeten liggen. Bedenken we dat p'^2 den doorgang p in 2 involutorische punten R en R' snijdt, evenals q'^2 de lijn q volgens het involutorische puntenpaar S en S', dan zien we dat in μ de 4 verbindingslijnen tusschen deze punten twee involutorische stralenparen (t, t') vormen.

§ 11. Wij willen nu nagaan wat het beeld is van een ster $[M]$, en onderzoeken daartoe eerst hoeveel stralen uit $[M]$ hun beeld hebben in een willekeurig vlak σ. Dat vlak σ snijdt α volgens een rechte p, β volgens een lijn q. De rechten p en q worden weer getransformeerd in kegelsneden, p in p'^2 door de 3 punten A_k en q in q'^2 door de 3 punten B_k. Omgekeerd worden deze kegelsneden p'^2 en q'^2, omdat ze door de 3 hoofdpunten gaan, weer afgebeeld door de beide rechten p en q. Beschouwen we nu dus de stralen van de congruentie, die p'^2 en q'^2 tot richtlijnen heeft, als stralen t, dan liggen de beeldstralen t' in vlak σ. Projecteeren we uit het centrum M de kegelsnede p'^2 op vlak β, dan zal de projectie van p'^2 de kegelsnede q'^2 in 4 punten snijden; dit beteekent dat er 4 stralen zijn uit M die én p'^2 én q'^2 snijden, dus hebben 4 stralen uit M hun beelden in het vlak σ.

Wij vinden dus dat het beeld van een ster $[M]$ een congruentie is met *veldgraad* 4.

Wij moeten nu nog den stergraad van die congruentie bepalen en ons daartoe dus afvragen hoeveel beeldstralen het centrum M der te beschouwen ster bevatten. De rechten der ster snijden de vlakken α en β in punten P en Q, de puntenvelden $[P]$ en $[Q]$ zijn dus projectief. Nu wordt $[P]$ omgezet in het collocale veld $[P']$ en eveneens $[Q]$ in het collocale veld $[Q']$. Projecteeren we nu het veld $[Q']$ uit M op α dan krijgen we daar nog een veld $[R']$ in α. Wij moeten trachten de verwantschap tusschen de puntenvelden $[R']$ en $[P']$ te vinden; een coïncidentie $R' \equiv P'$ beteekent immers dat de straal $P'\,Q'$ zijn beeld $P\,Q$ in M snijdt.

Doorloopt R' in α een rechte r', dus $M\,R'$ een waaier, dan beweegt Q' zich in β langs een rechte l'. Deze l' wordt in vlak β getransformeerd in een kegelsnede l^2 door de 3 hoofdpunten B_k, maar P in α doorloopt dan een kegelsnede ρ^2 die getransformeerd wordt in een kromme ρ'^4 waarop het punt P' zich bevindt. De verwantschap tusschen de velden $[R']$ en $[P']$ is dus een $(1, 4)$, waardoor we 6 coïncidenties $R' \equiv P'$ vinden. Zoo vinden we dus dat 6 beeldstralen t' hun overeenkomstigen straal t in een willekeurig punt snijden, de *stergraad* is dus 6.

In het algemeen is dus het beeld van een *ster* $[M]$ een *congruentie* $[6, 4]$.

Hierbij kunnen we echter de volgende bijzonderheden opmerken.

In een willekeurig vlak μ liggen de beelden van 4 stralen uit de ster $[M]$; omgekeerd verwachten we dus dat 4 stralen uit μ hun beeld door een willekeurig punt M zenden, dit zullen juist de 4 stralen zijn die het beeld van een willekeurig vlak μ (immers een $[4,4]$) door een punt M zendt.

Iedere willekeurige ster $[M]$ bevat steeds een waaier waarvan de stralen op de snijlijn c rusten; deze wordt afgebeeld door het biquadratisch regelvlak met richtlijnen c_α^2 en c_β^2. Tot de congruentie $[6,4]$ behooren dus steeds alle stralen van dat regelvlak.

De ster $[M]$ bevat ook een kegel van stralen die op c_β^2 rusten. Deze kegel snijdt vlak α volgens een kegelsnede α^2 waarop de doorgangen van de stralen een puntenreeks bepalen van punten P, waarvan de homologe punten P' liggen op een kromme α'^4 in α. De punten Q', die de beelden zijn van de punten Q op $\overset{2}{c_\beta}$, liggen alle op de snijlijn c; de stralen $P'\,Q'$, die de beelden zijn van de stralen van den hier beschouwden kegel $M(\overset{2}{c_\beta})$, liggen dus alle in α. Elke waaier in α met top op c bevat dus één straal die het beeld is van een straal uit de ster $[M]$. Daar in α de doorgang α^2 van den hier beschouwden kegel $M(\overset{2}{c_\beta})$ de kegelsnede $\overset{2}{c_\alpha}$ in 4 punten snijdt, moeten 4 punten P hun beeld P' op de rechte c hebben. Daar de punten Q' alle op c liggen, telt de rechte c 4 maal als een verbindingslijn $P'\,Q'$; dus is de rechte c het beeld van 4 stralen uit de ster $[M]$.

De beelden van de stralen van den kegel $M(\overset{2}{c_\beta})$ liggen dus alle in vlak α en omhullen daar een kromme van de 5e klasse.

Dezelfde overweging geldt natuurlijk voor den kegel $M(\overset{2}{c_\alpha})$ en dan vinden we dat de beelden van alle stralen van dien kegel in β liggen en een kromme van de 5e klasse omhullen.

Zoo vinden we dus α en β als *singuliere vlakken* van onze congruentie [6,4]. De ster $[M]$ bevat een waaier $M(a_1)$, die dus vlak α volgens a_1, vlak β volgens een willekeurige rechte r snijdt. Met a_1 komt in vlak α overeen het hoofdpunt A_1, in β wordt de rechte r getransformeerd in een kegelsnede r'^2. De waaier $M(a_1)$ wordt dus afgebeeld door een kegel $A_1(r'^2)$; A_1 is een punt waardoor oneindig vele stralen van deze congruentie [6,4] gaan, het is dus een *singulier punt* van den 2en graad. Daar de ster $[M]$ 3 waaiers $M(a_k)$ én 3 waaiers $M(b_k)$ bevat, vinden we hier dat de 3 hoofdpunten A_k evenals de 3 hoofdpunten B_k *singuliere punten* van de [6, 4] zijn.

De straal $M\,A_1$ snijdt vlak β in een punt R. Daar het punt A_1 in α getransformeerd wordt in de rechte a_1, vinden we dat het beeld van den straal $M\,A_1$ de geheele waaier $R'(a_1)$ is. Zoowel de 3 stralen $M\,A_k$ als de 3 stralen $M\,B_k$ zullen getransformeerd worden in waaiers; zoo vinden we dus nog *6 singuliere punten* van onze congruentie [6, 4], nl. de beelden van de 3 punten R volgens welke de stralen $M A_k$ vlak β snijden en de beelden van de 3 punten S waarin de stralen $M B_k$ vlak α snijden, terwijl de vlakken, waarin die waaiers $R'(a_k)$ of $S'(b_k)$ liggen, *6 singuliere vlakken* zijn.

§ 12. Beschouwen we nu eens de *bilineaire congruentie* [1, 1] die tot richtlijnen heeft twee willekeurige rechten d_1 en d_2.

Het beeld van een vlak μ is steeds een congruentie [4, 4], deze heeft met de [1, 1] 8 stralen gemeen. Deze 8 transversalen t van de [1, 1] die dus tot de [4, 4] behooren, hebben hun beelden t' in vlak μ.

Voor den *veldgraad* van het gezochte beeld vinden we dus 8.

Om den *stergraad* te vinden bedenken we weer dat de doorgangen van de transversalen $P\,Q$ van de [1, 1] twee projectieve velden vormen, die getransformeerd worden in de velden [P'] en [Q']. Doorloopt het punt P' in α een rechte lijn l, dan zal P een kegelsnede l'^2 beschrijven; de transversalen $P\,Q$ van d_1, d_2 en l'^2 vormen dan een regelschaar van den 4^{en} graad, dus doorloopt Q een q^4; haar beeld in β is een q'^8. De verwantschap tusschen de punten op q'^8 en de punten Q' is dus een (1,8) en deze heeft 10 coïncidenties. Het gebeurt dus 10 maal dat het beeld van een punt Q samenvalt met een punt van q'^8; in een willekeurig punt snijden elkaar dus 10 paren homologe stralen t, t'. De *stergraad* is dus 10.

Dit laatste kunnen we ook vinden door te bedenken dat het beeld [6, 4] van een ster met een willekeurige [1, 1] 10 stralen gemeen heeft. Dit beteekent dat 10 stralen van de [1, 1] hun beeld door een willekeurig punt zenden, dus de stergraad van het beeld 10 is.

Het beeld van een willekeurige *bilineaire congruentie* is dus een *congruentie* [10,8].

Dit resultaat mochten we ook verwachten; immers als een [1, 1] ontaardt in een ster en een veld, d. w. z. in een [1, 0] en een [0, 1], dan bestaat het beeld uit een [6, 4] (nl. het beeld van de ster) en een [4, 4] (het beeld van een veld μ), is dus een ontaarde [10, 8].

Omtrent het beeld [10, 8] van een [1, 1] kunnen we nog het volgende opmerken.

De lijnen over d_1, d_2 en c worden getransformeerd in het regelvlak $(t')^4$ dat c_α^2 en c_β^2 tot richtlijnen heeft; dit regelvlak behoort dus in zijn geheel tot de [10, 8].

De straal uit A_1 over d_1 en d_2 snijdt vlak β in een punt S; het beeld van S is een punt S', maar A_1 is weer homoloog met de geheele lijn a_1, dus het beeld van die transversaal uit A_1 is een waaier $S'(a_1)$.

Zoo vinden we dus in vlak β 3 *singuliere punten*, evenals in vlak α, nl. de beelden van de snijpunten van de stralen uit de 3 punten $A_k\,(B_k)$ over d_1 en d_2 met vlak $\beta\,(\alpha)$ zijn toppen van waaiers die in hun geheel tot de [10, 8] behooren; tevens zijn de 6 vlakken waarin die waaiers liggen ook 6 *singuliere vlakken*.

De regelschaar met richtlijnen a_1, d_1 en d_2 snijdt β volgens een kegelsnede l^2. Daar het beeld van a_1 het punt A_1, van l^2 echter een 4e graadskromme l'^4 is, wordt deze regelschaar getransformeerd in een kegel van den 4en graad met top A_1. Dit geldt voor de 3 regelscharen a_k, d_1, d_2, evenals voor de 3 regelscharen b_k, d_1, d_2. De 6 *hoofdpunten* $A_k\,(B_k)$ van de quadratische involuties zijn dus ook alle *singuliere punten* van den 4en graad van de [10, 8], ze zijn nl. alle 6 toppen van de 4e graadskegels die in hun geheel tot de [10, 8] behooren.

Eén transversaal van de [1, 1] ligt in vlak α en deze heeft tot beeld een quadratischen kegel met top op c_β^2, evenzoo ligt in vlak β één transversaal van de [1, 1] die afgebeeld wordt door een kegel met top op c_α^2. Dit geeft dus nog 2 *singuliere punten* van den 2^{en} graad van de [10,8].

Van den kegel met top A_1 en richtlijn l'^4 in β liggen in vlak α 4 stralen; evenzoo bevat vlak α 4 stralen van de [10, 8] uit den kegel met top A_2 en 4 stralen van den kegel met top A_3; maar dan moet α een *singulier vlak* van de [10, 8] zijn. Dit is ook direct in te zien als we bedenken dat iedere straal uit een punt van $\overset{2}{c}_\beta$ over d_1 en d_2 zijn beeld heeft in vlak α; want dan bevat elke waaier in α met top op c één straal van de [10, 8]. De transversalen over $\overset{2}{c}_\beta$, d_1 en d_2 vormen een regelvlak van den 4^{en} graad, dus α wordt gesneden volgens een α^4; deze heeft met $\overset{2}{c}_a$ 8 punten P gemeen, die hun beelden P' op de snijlijn c hebben. Ook de homologe punten Q van die snijpunten van α^4 met $\overset{2}{c}_a$ hebben hun beeld Q' op c, dus c telt 8 maal voor een verbindingslijn $P' Q'$. Daar c zelf dus een 8voudige raaklijn is, en uit elk punt op c nog één straal van de in α gelegen beeldstralen gaat, omhullen die stralen een kromme van de *9e klasse in* α.

Door uit de [1, 1] het regelvlak te beschouwen met richtlijnen $\overset{2}{c}_a$, d_1 en d_2 vinden we op dezelfde manier dat ook β een *singulier vlak* is van deze [10, 8].

We vonden vroeger dat met c overeenkomt een congruentie [4, 4] die $\overset{2}{c}_a$ en $\overset{2}{c}_\beta$ tot singuliere krommen heeft. Deze congruentie [4, 4] heeft 8 stralen met de [1, 1] gemeen, waaruit nog eens volgt dat c een 8voudige straal is van de [10, 8].

§ 13. Een willekeurige *quadratische regelschaar* zal vlak α snijden volgens een kegelsnede α^2, vlak β volgens een kegelsnede β^2.

Nu wordt α^2 getransformeerd in een kromme α'^4 met dubbelpunten in de 3 hoofdpunten A_k, en β^2 in vlak β in een β'^4 met de 3 punten B_k als dubbelpunten.

De projectieve puntenreeksen op α^2 en β^2 bepalen nu dus op α'^4 en β'^4 twee puntenreeksen waartusschen een verband één aan één bestaat, en het beeld van de quadratische regelschaar zal dus het regelvlak zijn dat beschreven wordt door de lijnen die de punten op α'^4 verbinden met de homologe punten op β'^4. De doorsnede van dit regelvlak met β zal bestaan, behalve uit β'^4, ook nog uit de 4 lijnen die de 4 snijpunten van α'^4 en c verbinden met de overeenkomstige punten op β'^4 en waarmee ze dus samen in vlak β liggen. Daar we zoo voor de doorsnede van het regelvlak met β vinden dat deze van den 8^en graad is, kunnen we hieruit besluiten dat het beeld van een willekeurige *quadratische regelschaar* een *regelvlak van den 8^en graad* is.

We kunnen nu in β 21 dubbelpunten aanwijzen.

Verbinden we de 4 snijpunten S'_k van α'^4 met c maar eens met hun homologe punten R'_k op β'^4. De straal $R'_1\,S'_1$ snijdt immers β'^4 nog in 3 andere punten K'_k en door zoo'n punt K'_k gaat ook de straal t' die K'_k verbindt met het overeenkomstige punt op α'^4. Ook wordt $R'_1\,S'_1$ nog gesneden door de 3 andere lijnen $R'_k\,S'_k$, dus de lijn $R'_1\,S'_1$ bevat 6 dubbelpunten. Op elk der 4 lijnen $R'_k\,S'_k$ liggen 6 dubbelpunten, maar dan tellen we de 6 hoekpunten van de vierzijde die de stralen $R_k\,S_k$ vormen tweemaal, dus in het geheel vinden we hier $4 \times 6 - 6 = 18$ dubbelpunten. Bovendien snijdt elk der 3 lijnen b_k de kegelsnede β^2 in 2 punten, die beide getransformeerd worden naar B_k; dit geeft dus telkens weer 2 stralen van de regelschaar die hun beeld door hetzelfde punt van vlak β zenden; de 3 hoofdpunten B_k in vlak β zijn dus ook dubbelpunten op het regelvlak dat het beeld is van de quadratische regelschaar.

Dit regelvlak van den 8^en graad bevat dus een *dubbelkromme van den 21^en graad.*

De lijn c snijdt de hyperboloïde in 2 punten, en de stralen van de regelschaar, die door deze beide punten gaan, worden afgebeeld door stralen van het regelvlak met richtlijnen $\overset{2}{c}_\alpha$ en $\overset{2}{c}_\beta$. Nu snijdt $\overset{2}{c}_\alpha$ in α de α'^4, die daar de doorsnede is met het beeldregelvlak, in 8 punten. Daar de 3 punten A_k dubbelpunten zijn van de α'^4 tellen deze dus voor 6 snijpunten en blijven er nog 2 snijpunten van α'^4 en $\overset{2}{c}_\alpha$ over. Evenzoo snijden in β de $\overset{2}{c}_\beta$ en de β'^4 elkaar in 8 punten waarvan er 6 in de punten B_k vallen, zoodat er nog 2 punten overblijven. De verbindingsstralen van die 2 punten op $\overset{2}{c}_\alpha$ met die 2 punten op $\overset{2}{c}_\beta$ moeten dan de beelden zijn van de stralen van de regelschaar op de hyperboloïde die c snijden.

Een bijzonder geval krijgen we als we een quadratische regelschaar beschouwen die β volgens $\overset{2}{c}_\beta$ snijdt, maar α volgens een willekeurige kegelsnede α^2. Nu liggen dus de punten P op een willekeurige kegelsnede α^2 in α, en de punten Q in β op c'_β. De overeenkomstige punten P' zullen nu in α op een kromme van den 4^{en} graad α'^4 liggen, terwijl de punten Q' op de lijn c, die immers het beeld is van $\overset{2}{c}_\beta$, zullen liggen. De beeldstralen $P'\,Q'$ liggen nu dus steeds in α, en daar de puntenreeks P' op α'^4 projectief is met de puntenreeks Q' op c, zullen dus de stralen $P'\,Q'$ in α een kromme van de 5^e klasse omhullen.

§ 14. Wanneer we het beeld van een *lineairen stralencomplex* gaan zoeken, verwachten we natuurlijk als beeld ook een verzameling van ∞^3 rechten, dus weer een complex, te zullen vinden. Wat is nu de graad van dien beeldcomplex?

We vonden dat een waaier afgebeeld wordt door een regelvlak $(t')^4$; wanneer we dus nagaan hoeveel stralen onze complex gemeen heeft met een $(t')^4$, dan weten we ook hoeveel stralen van den complex hun beeld in één waaier hebben, waardoor ons dus de graad van den beeldcomplex gegeven wordt. Nu zal het aantal gemeenschappelijke stralen van een lineairen complex en een regelschaar niet veranderen als we den complex vervangen door een axialen lineairen complex, met as d. In dat geval zullen dan 4 stralen van een regelvlak $(t')^4$ rusten op de as d van den complex; dus 4 stralen van den complex hebben hun beeld in één waaier. We vinden dus dat het beeld van een willekeurigen *lineairen complex een complex van den 4^{en} graad is.*

Wanneer we het beeld van een *lineairen axialen complex* nader gaan bekijken, vallen er verschillende bijzonderheden op te merken.

Tot den axialen complex zal behooren de geheele [1, 1] waarvan de richtlijnen zijn de as d van den complex en de snijlijn c van de vlakken α en β. In het algemeen is het beeld van een [1, 1] een [10, 8], maar die [10, 8] zal hier uiteenvallen. Tot deze [1, 1] immers behoort de geheele waaier in vlak α die daar tot top heeft het snijpunt $D_\alpha^{\prime\prime}$ van d met α en het beeld van elken waaier in α is een congruentie [5, 4]. Evenzoo bevat de [1, 1] een waaier in β die dus ook afgebeeld wordt door een [5, 4]. Deze beide waaiers snijden elkaar volgens de puntenreeks op c, de beide congruenties [5, 4] hebben dus gemeen het regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen $\overset{2}{c_\alpha}$ en $\overset{2}{c_\beta}$, dat het beeld is van *alle* lijnen die c snijden. Bovendien zijn alle stralen van de [1, 1], die niet in α of β liggen, toch lijnen die c snijden en dus afgebeeld worden door dat regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen $\overset{2}{c_\alpha}$ en $\overset{2}{c_\beta}$.

Deze [1, 1] wordt dus afgebeeld door 2 congruenties [5, 4], waarbij de stralen van het regelvlak $(t')^4$ singuliere stralen van het beeld zijn, daar elke straal van deze $(t')^4$ een geheelen waaier uit den complex afbeeldt.

Ook behoort tot den axialen complex een bilineaire congruentie met richtlijnen d en a_1. Het beeld van deze [1, 1] moet weer een [10, 8] zijn, waarover het volgende valt op te merken.

Ook nu behoort tot de [1, 1] een waaier in α met top D_α die dus wordt afgebeeld door een [5, 4]; verder bevat β één straal t van deze [1, 1] die getransformeerd wordt in een kegel met top A_1, die in β tot richtlijn heeft de kegelsnede t'^2 die het beeld is van dien straal t. Ten slotte behoort tot dit beeld de geheele ster A_1. Immers een straal t'_1 door A_1 snijdt β in een punt S', dat het beeld is van een punt S van β, en de straal t_1 uit S over a_1 en d heeft den straal t'_1 door A_1 tot beeld.

Het punt A_1 is dus een *hoofdpunt* van den beeldcomplex. Daar elke axiale complex 6 congruenties [1,1] bevat met richtlijnen d en a_k (d en b_k) zal elke beeldcomplex $\{t'\}^4$ de 3 punten A_k en de 3 punten B_k tot *hoofdpunten* hebben.

Elke straal in vlak α wordt getransformeerd in een kegel die door de as d van den complex in 2 punten gesneden wordt, dus *elke* straal van vlak α kan beschouwd worden als het beeld van 2 stralen van den complex; dan is dus vlak α een *dubbel te tellen hoofdvlak* van den beeldcomplex $\{t'\}^4$.

Hetzelfde geldt natuurlijk voor vlak β.

Verder bevat de complex nog den waaier A_1 (d), deze zal vlak β snijden volgens een lijn l. Het beeld van dien waaier zal dus zijn een verzameling stralen die alle in α de lijn a_1 snijden, en in β een kegelsnede l'^2. Daar ieder punt van a_1 verbonden met ieder punt van l'^2 het beeld is van een straal van den waaier $A_1\,d$, zal deze verzameling een congruentie met richtlijnen a_1 en l'^2 moeten zijn, waarvan we de kenmerkende getallen kunnen bepalen. Een willekeurig vlak snijdt a_1 in één punt, l'^2 in 2 punten, de veldgraad is dus 2. Projecteeren we a_1 uit een willekeurig punt van de ruimte op vlak β, dan zal de projectie van a_1 daar l'^2 in 2 punten snijden; door een willekeurig punt van de ruimte gaan dus ook 2 stralen, de stergraad is derhalve ook 2. Het blijkt dus een congruentie [2, 2] te zijn. Deze congruentie heeft weer als *singulier vlak* het vlak α, want l'^2 zal ook c in 2 punten S'_1 en S'_2 snijden, en de verbindingslijnen van S'_1 en S'_2 met de punten van a_1 behooren alle tot de [2, 2]. *Singuliere punten* zijn natuurlijk alle punten van de richtlijnen a_1 en l'^2.

Daar dit alles geldt zoowel voor de 3 waaiers $A_k(d)$, als voor de 3 waaiers $B_k(d)$ die de complex bevat, zullen tot den beeldcomplex 6 dergelijke congruenties [2, 2] behooren.

Dan bevat elke complex ook nog de 8 waaiers $D_k(d)$ (resp. $E_k(d)$). (Met D_k en E_k worden weer bedoeld de coïncidentiepunten van de quadratische involuties in de vlakken α en β.) De waaier $D_k(d)$ snijdt vlak β volgens een lijn m, die daar getransformeerd wordt in een kegelsnede m'^2. Die waaier $D_k(d)$ zal dus afgebeeld worden door een kegel $D_k(m'^2)$ én door den kegel die het beeld is van den straal van $D_k(d)$ in α. Wij vinden dus dat tot den beeldcomplex $\{t'\}^4$ nog 8 quadratische kegels behooren, nl. 4 kegels met top D_k en 4 kegels met top E_k. Daar de complexkegel van een punt van den vierden graad is, zal hij voor D_k ontaarden in $D_k(m'^2)$ en het dubbel te tellen vlak α.

§ 15. Voor het bepalen van de stralen, die de beelden van 2 stralenvelden $[\mu]$ en $[\mu']$ gemeenschappelijk hebben, kunnen we zeggen: het beeld van een veld $[\mu]$ wordt een congruentie [4, 4], evenals het beeld van veld $[\mu']$; we verwachten dus $16 + 16 = 32$ gemeenschappelijke stralen.

Tot deze gemeenschappelijke stralen behoort natuurlijk in de eerste plaats het beeld van den straal volgens welken de vlakken μ en μ' elkaar snijden.

Zij nu p de snijlijn van μ en α, q de snijlijn van μ en β, verder r de snijlijn van μ' en α, s ten slotte van iμ' en β. We weten dat p en q getransformeerd worden n de kegelsneden p'^2 en q'^2 die singuliere krommen zijn voor de [4, 4] die het beeld is van μ, evenals r'^2

en s'^2, de beelden van r en s, richtkrommen zullen zijn voor de [4, 4] die μ' afbeeldt.

In vlak α zullen p'^2 en r'^2 elkaar in 4 punten snijden, hiertoe behooren de 3 punten A_k, waardoor immers zoowel p'^2 als r'^2 moet gaan, en nog één punt S_α. Evenzoo zullen in vlak β ook q'^2 en s'^2 elkaar behalve in de 3 punten B_k nog in een 4e punt S_β snijden. Uit elk der 3 punten A_k én uit S_α kunnen we dus 4 stralen trekken, nl. naar de 3 punten B_k én naar S_β, deze 16 stralen behooren zoowel tot de congruentie met richtlijnen p'^2 en q'^2 als tot de congruentie met richtlijnen r'^2 en s'^2, ze zullen dus tot de gezochte gemeenschappelijke stralen behooren.

Nu zal echter S_α het beeld moeten zijn van het snijpunt van p en r in vlak α, evenals S_β homoloog zal moeten zijn met het snijpunt van q en s in β.

De straal $S_\alpha S_\beta$, die tot deze 16 stralen behoort, is dus het al genoemde beeld van de snijlijn van de beide vlakken μ en μ'. De stralen $A_k B_l$, $A_k S_\beta$, $B_k S_\alpha$ zijn ieder het beeld van 2 verschillende stralen, waarvan de eene tot $[\mu]$, de andere tot $[\mu']$ behoort.

Nu is de snijlijn c een viervoudige straal, zoowel in het beeld van $[\mu]$ als in het beeld van $[\mu']$ en telt dus voor $4 \times 4 = 16$ gemeenschappelijke stralen, maar dan hebben we juist de 32 doorsnijdingsstralen die we verwachtten.

§ 16. Wat hebben nu het beeld van een ster $[M]$ en een ster $[M']$ gemeenschappelijk?

Als beeld van een ster $[M]$ vonden we een congruentie [6, 4] waarvan α en β singuliere vlakken zijn. Tot deze [6, 4] behoort steeds het regelvlak met richtlijnen c_α^2 en c_β^2 dat het beeld is van den waaier $M(c)$. Ook bevat deze [6, 4] steeds 12 singuliere punten, want de 6 punten A_k (B_k) zijn toppen van kegels die in hun geheel tot de [6, 4] behooren, terwijl de 6 stralen $M A_k$ $(M B_k)$ afgebeeld worden door waaiers.

Dezelfde beschouwing geldt ook voor het beeld van de ster $[M']$; daar ook deze ster een waaier $M'(c)$ bevat behoort het regelvlak met richtlijnen c_α^2 en c_β^2 ook tot haar beeld.

De beelden van 2 sterren $[M]$ en $[M']$ hebben dus oneindig veel stralen, nl. het *geheele regelvlak* met richtlijnen c_α^2 en c_β^2, gemeenschappelijk.

Verder hebben ze nog gemeen den straal die homoloog is met de verbindingslijn der toppen, MM'; terwijl c in beide beelden een viervoudige lijn is, dus voor 16 gemeenschappelijke stralen telt. Voor beide beelden is A_1 de top van een quadratischen kegel die tot de $[6, 4]$ behoort; de beide kegels met A_1 tot top hebben 4 stralen gemeenschappelijk, waaronder de 3 stralen $A_1 B_k$. Dit geldt voor de 3 hoofdpunten A_k en zoo vinden we dus 12 gemeenschappelijke stralen. De hoofdpunten B_k zijn ook toppen van kegels die in hun geheel tot de $[6, 4]$ behooren, en ook uit ieder punt B_k vertrekken 4 stralen die het beeld zijn zoowel van een straal uit $[M]$ als van een straal uit $[M']$; we tellen dan echter de stralen $B_k A_l$ dubbel. Wij vinden dus nog slechts 3 nieuwe gemeenschappelijke stralen, nl. de stralen t' die uit elk punt B_k vertrekken naar het 4e snijpunt dat de beide kegelsneden, behalve de 3 punten A_k, in vlak α nog hebben.

Behalve het regelvlak dat de beelden van de beide sterren gemeenschappelijk hebben, kunnen we hier dus nog $1 + 16 + 15 = 32$ gemeenschappelijke stralen aanwijzen.

§ 17. Hoe vinden we de stralen die gemeenschappelijk zijn aan het beeld van een ster $[M]$ en dat van een stralenveld $[\mu]$?

Voor beiden zijn α en β singuliere vlakken; de stralen t', die in α het beeld vormen van stralen uit de ster $[M]$, omhullen daar een kromme van de 5e klasse, echter zóó dat elke waaier met top op c één straal t' bevat, terwijl c een viervoudige straal t' is. De stralen t' in α die homoloog zijn met stralen van $[\mu]$ vormen er 2 waaiers met toppen op c, waarbij echter elke straal t' een dubbel te tellen beeldstraal bleek te zijn, en ook nu is c zelf een viermaal te tellen beeldstraal.

De snijlijn c telt dus voor 16 stralen die gemeenschappelijk zijn zoowel aan het beeld van $[M]$ als aan dat van $[\mu]$.

In vlak α bevat elk der beide waaiers, die daar tot het beeld van $[\mu]$ behooren, dus ook één straal die homoloog is met een straal van $[M]$. Daar deze echter als beeldstralen van $[\mu]$ dubbel geteld moeten worden, hebben we dus in vlak α 4 van de gezochte gemeenschappelijke stralen; hetzelfde geldt natuurlijk voor vlak β, ook daar vinden we 4 gemeenschappelijke beeldstralen.

Het beeld van $[\mu]$ snijdt de vlakken α en β volgens de beide kegelsneden p'^2 en q'^2, de richtkrommen van de congruentie [4, 4], die $[\mu]$ afbeeldt.

Het regelvlak met richtlijnen c_α^2 en c_β^2 dat tot het beeld van de ster $[M]$ behoort zal in het algemeen geen stralen gemeenschappelijk hebben met die congruentie [4, 4].

Letten we eens op den kegel met top A_1 die behoort tot het beeld [6, 4] van de ster. Deze kegel zal vlak β snijden volgens een kegelsnede r'^2 die de kegelsnede q'^2 behalve in de 3 punten B_k nog in een 4^e punt S_β zal snijden. Uit A_1 gaan dus 4 stralen die tot de gezochte gemeenschappelijke stralen behooren.

Dit geldt weer voor elk der 3 punten A_k, en zoo krijgen we hier 12 gemeenschappelijke stralen.

Wanneer we evenzoo redeneeren uitgaande van de punten B_k dan vinden we ook hier dat uit elk punt B_k 4 gemeenschappelijke stralen vertrekken, maar dan tellen we de 9 stralen $B_k A_l \equiv A_l B_k$ dubbel; uit ieder punt B_k gaat dus nog slechts één straal, nl. de straal naar het 4e snijpunt van de kegelsneden s'^2 met p'^2. Wij vinden dus nog 15 van de gemeenschappelijke stralen uit de punten A_k (B_k).

In vlak α snijden c_α^2 en p'^2 elkaar, behalve in de 3 punten A_k, nog in een 4e punt C_α^2, evenals in β c_β^2 en q'^2 behalve de punten B_k nog een punt C'_β gemeen zullen hebben. Ook de lijn $C'_\alpha C'_\beta$ zal tot de gemeenschappelijke stralen behooren; zij is nl. voor $[M]$ het beeld van den straal die M verbindt met het snijpunt C van μ en c, terwijl $C'_\alpha C'_\beta$ voor $[\mu]$ het beeld is van den geheelen waaier met top C.

Zoo vinden wij dus $16 + 8 + 15 + 1 = 40$ stralen die gemeenschappelijk zijn aan de beelden van een ster $[M]$ en een stralenveld $[\mu]$.

Daar nu het beeld van een ster $[M]$ een congruentie $[6, 4]$ is, en $[\mu]$ afgebeeld wordt door een congruentie $[4, 4]$ mochten we ook $24 + 16 = 40$ gemeenschappelijke stralen verwachten.

§ 18. Op dezelfde manier kunnen we het beeld van een bilineaire congruentie $[1, 1]$ met dat van een stralenveld $[\mu]$ combineeren.

Wij vonden voor het beeld van de $[1, 1]$ een congruentie $[10, 8]$; het beeld van $[\mu]$ is natuurlijk weer een congruentie $[4, 4]$. Zoowel voor de $[10, 8]$ als voor de $[4, 4]$ zijn α en β singuliere vlakken; de stralen der $[10, 8]$ in α omhullen daar een kromme van de 9e klasse, echter zóó dat c een 8voudige raaklijn van deze kromme is, en iedere waaier met top op c dus nog slechts één straal van de $[10, 8]$ bevat. De beide waaiers in α, die daar tot het beeld van $[\mu]$ behooren, bevatten dus elk één straal van de $[10, 8]$, die echter, daar alle stralen in α voor de congruentie $[4, 4]$ dubbel geteld moeten worden, samen voor 4 van de gezochte gemeenschappelijke stralen tellen. In de vlakken α en β liggen dus 8 gemeenschappelijke stralen.

De lijn c is een 8voudige straal van [10, 8] en 4voudig voor de [4, 4], vertegenwoordigt dus 32 gemeenschappelijke stralen.

Tot de [10,8] behooren nog 6 kegels van den 4en graad met toppen A_k (B_k). De kegel A_k snijdt vlak β volgens een kromme ρ'^4, en deze ρ'^4 snijdt de q'^2, volgens welke de [4, 4] vlak β snijdt, in 8 punten. De 3 hoofdpunten B_k, die dubbelpunten zijn voor de ρ'^4 tellen hierbij voor 6 snijpunten, bovendien zijn er dan nog 2 enkelvoudige snijpunten S_1 en S_2. Uit elk punt A_k vertrekken dus 3 dubbel te tellen gemeenschappelijke stralen én nog 2 enkelvoudige, uit de 3 punten A_k dus samen 24 gemeenschappelijke stralen. Uit de 3 punten B_k zouden we dus ook 24 gemeenschappelijke stralen vinden, dan tellen we echter de stralen $B_k A_l$, die elk nog wel dubbel tellen, tweemaal; uit de punten B_k vertrekken dus nog slechts 6 stralen behalve de 18 stralen die we al geteld hebben.

Van de [1, 1] ligt ook één straal in [μ]; het beeld van dezen straal hebben de [10, 8] en de [4, 4] natuurlijk ook gemeen, evenals het beeld van den straal die de [1, 1] door het snijpunt C van c en μ zendt.

Nu hebben wij dus $8 + 32 + 24 + 6 + 2 = 72$ gemeenschappelijke stralen, juist zooveel als wij bij de doorsnijding van een [10, 8] met een [4, 4] in het algemeen mochten verwachten.

§ 19. Combineeren we de beelden van 2 bilineaire congruenties, dan worden beide getransformeerd in congruenties [10, 8]. Tot deze congruenties behoort echter het regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen c_α^2 en c_β^2 zoodat de beide beelden oneindig veel gemeenschappelijke stralen hebben.

Voor beide beelden is de snijlijn c een 8voudige straal; deze telt dus al voor 64 gemeenschappelijke stralen, terwijl de 6 punten A_k (B_k) toppen zijn van

4e graadskegels die tot de [10, 8] behooren. De kegel met top A_1 uit het beeld van de eerste [1, 1] snijdt β volgens ρ'^4, de kegel A_1 die tot de tweede [1, 1] behoort, snijdt β volgens σ'^4. Nu snijden ρ'^4 en σ'^4 elkaar, behalve in de 3 dubbelpunten B_k dus nog in 10 enkelvoudige punten; uit A_1 vertrekken derhalve, behalve de 3 dubbel te tellen gemeenschappelijke stralen $A_1 B_k$, nog 10 enkelvoudige; totaal dus uit de 3 punten A_k $3 \times 6 + 30 = 48$ gemeenschappelijke stralen. Van de 48 gemeenschappelijke stralen uit de punten B_k hebben we dan echter de 18 stralen $B_k A_l$ weer dubbel geteld; uit de punten B_k vertrekken dan nog 30 gemeenschappelijke stralen.

Zoo kunnen we dus bij de beelden van 2 bilineaire congruenties, behalve het geheele regelvlak $(t')^4$, nog $64 + 48 + 30 = 142$ gemeenschappelijke stralen aanwijzen.

§ 20. Ten slotte gaan we nog eens na wat de beelden van lineaire axiale complexen met assen d_1 en d_2 gemeenschappelijk zullen hebben.

De beide complexen doorsnijden elkaar volgens een [1, 1] met richtlijnen d_1 en d_2. Tot het gemeenschappelijk beeld behoort dus de [10, 8] die het beeld is van deze [1, 1]. Verder behooren tot beide beelden de 6 sterren met toppen A_k (B_k), wat dus 6 maal een [1, 0] voor de doorsnijding geeft. Het vlak α is een dubbel te tellen hoofdvlak voor beide $\{t'\}^4$, dit telt dus bij de doorsnijding voor een [0, 4], evenals vlak β.

Wij krijgen dus dat de beide beelden gemeenschappelijk hebben: [10, 8] + [6, 0] + [0,8] = [16,16], juist wat we voor de doorsnijding van twee complexen $\{t'\}^4$ ook mochten verwachten.

Wij kunnen een aantal gemeenschappelijke stralen aanwijzen.

Tot beide beeldcomplexen behoort al weer het biquadratisch regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen c_α^2, c_β^2; dit regelvlak behoort echter al tot de [10, 8]. De [10, 8] is immers het beeld van de [1, 1] met richtlijnen d_1 en d_2, en tot deze [1, 1] behoort de regelschaar met richtlijnen d_1, d_2 en c waarvan het regelvlak $(t')^4$ het beeld is.

Beide complexen hebben een waaier in vlak α, maar de lijn in α, die deze waaiers gemeen hebben, is de verbindingslijn van de snijpunten van de beide assen der complexen met vlak α, dus een lijn die behoort tot de [1, 1] met assen d_1 en d_2, en de [10, 8] die het beeld is van deze [1, 1] telden we al in haar geheel mee.

Hetzelfde geldt voor de beide waaiers, die de complexen in vlak β hebben, terwijl de stralen, die de beelden dezer waaiers verder nog gemeen hebben, alle op het regelvlak $(t')^4$, met richtlijnen c_α^2 en c_β^2, liggen.

Tot elk beeld $|t'|^4$ behooren 6 congruenties [2, 2]. Nemen we uit den complex met as d_1 den waaier $A_1(d_1)$, uit den complex d_2 den waaier $A_1(d_2)$, dan hebben de beide beelden de richtlijn a_1 in α gemeenschappelijk, terwijl de kegelsneden $l_1'^2$ en $l_2'^2$ in β elkaar in 4 punten zullen snijden; de beelden van deze beide waaiers $A_1(d_1)$ en $A_1(d_2)$ hebben dus 4 waaiers gemeenschappelijk. Daar dit geval zich driemaal voordoet voor waaiers $A_k(d)$ en driemaal voor waaiers $B_k(d)$ hebben de beide beeldcomplexen $|t'|^4$ dus 24 waaiers gemeenschappelijk. Bedenken we echter dat $l_1'^2$ en $l_2'^2$ in β beide door de 3 punten B_k gaan, dan behooren 3 van de 4 waaiers welke de beelden van $A_1(d_1)$ en $A_1(d_2)$ gemeen hebben tot de sterren met top B^k en brachten we die stralen dus al in rekening. Er rest alleen nog het snijpunt S' van $l_1'^2$ en $l_2'^2$ dat homoloog is met het snijpunt S van l_1 en l_2 en S' is de top van een waaier die de beide beeldcomplexen $|t'|^4$ gemeenschappelijk hebben. Deze waaier behoort tot de [10, 8] die de [1, 1] met richtlijnen d_1 en d_2 afbeeldt. Immers de lijn die het snijpunt S van l_1 en l_2 in β verbindt met A_1 is een straal zoowel van den waaier $A_1(d_1)$ als van den waaier $A_1(d_2)$, maar is dan tevens een lijn die d_1 en d_2 snijdt.

De waaiers $A_1(d_1)$ en $A_2(d_2)$ snijden β volgens l_1 en m_2; $l_1'^2$ en $m_2'^2$ snijden elkaar behalve in de 3 punten B_k nog in één punt dat het beeld is van het snijpunt van l_1 en m_2; maar in α snijden a_1 en a_2 elkaar in A_3, de gemeenschappelijke straal behoort dus tot de ster $[A_3]$, is dus geen nieuwe straal der doorsnede.

De beide beeldcomplexen $\{t_1'\}^4$ en $\{t_2'\}^4$ bezitten een quadratischen kegel met top D_1; deze beide kegels zullen β snijden volgens kegelsneden die behalve de 3 punten B_k nog één snijpunt S' gemeen hebben. Dit snijpunt S' is homoloog met het punt S waarin de doorgangen van de waaiers $D_1(d_1)$ en $D_1(d_2)$ elkaar in β snijden, de straal $S'D_1$ is dus het beeld van den straal die uit D_1 de beide assen d_1 en d_2 snijdt. $S'D_1$ behoort tot de $[10, 8]$ die de $[1, 1]$ met richtlijnen d_1 en d_2 afbeeldt.

HOOFDSTUK II.

De transformatie bepaald door twee involuties van de tweede soort.

§ 1. We denken ons nu in vlak α zoowel als in vlak β een quadratische involutorische transformatie van de tweede soort, waarbij dus oneindig veel coïncidentiepunten optreden die alle op een kegelsnede liggen. De hoofdpunten in α noemen we weer A_1, A_2 en A_3; de coïncidenties liggen op een kegelsnede k^2_α die in A_1 en A_2 raakt aan a_2 en a_1. In vlak β zijn de hoofdpunten weer B_1, B_2, B_3, de coïncidentiekegelsnede k^2_β raakt in B_1 en B_2 aan b_2 en b_1.

Ook nu zullen een paar homologe stralen t en t' elkaar in het algemeen kruisen. Daar hier echter P en P' op één lijn liggen met A_3 evenals Q' en Q met B_3, zal, wanneer t en t' elkaar snijden, dus in één vlak liggen, dat vlak ook de punten A_3 en B_3 bevatten; of anders gezegd: een vlak, dat één paar aan elkaar toegevoegde stralen bevat, zal α en β snijden volgens 2 lijnen p en q, die door A_3 en B_3 gaan. Hier vormen echter de punten op de lijnen door A_3 (B_3) een involutie, en zal dus een vlak dat één paar toegevoegde stralen bevat, ∞^2 vele paren stralen bevatten, want *ieder* punt van de lijn p door A_3 verbonden met *ieder* punt van de lijn q door B_3 zal correspondeeren met een straal t' in hetzelfde vlak.

Projecteeren we de involutie op p uit een willekeurig punt M van het vlak (p, q) op q, dan zal de nieuwe involutie met de involutie op q één paar gemeenschappelijk hebben; dus door een willekeurig punt M van het vlak gaat één paar stralen t, t'.

Daar nu p k_α in 2 punten snijdt, evenals q k_β^2, zal elk vlak (p, q) 4 dubbelstralen K_m K_n bevatten.

Een punt K_m in dat vlak is de top van een waaier van aan elkaar toegevoegde stralen, d. w. z. aan elken straal uit dien waaier is een andere straal uit dienzelfden waaier toegevoegd. Immers: de verbindingslijn t van K_m met een punt van q geeft telkens een lijn t' die vlak α weer in K_m snijdt.

Anders gezegd: die vier waaiers met top K zijn in involutie.

Nemen we nu een willekeurig punt M en trekken we hierdoor een lijn P Q, dan zal P' Q' in het algemeen niet door M gaan. De rechte, die M verbindt met P', zal vlak β snijden in een punt R'. Wanneer R' samenvalt met Q' in β hebben we 2 correspondeerende stralen die elkaar in M snijden. We moeten dus de verwantschap tusschen R' en Q' beschouwen.

Doorloopt R' een rechte r' in β, dus M R' een waaier, dan doorloopt P' in α ook een rechte l', dus P een kegelsnede l^2 om de 3 hoofdpunten A_k. De kegel $M(l^2)$ snijdt β volgens een kegelsnede ρ^2 waarop Q ligt; het punt Q' beschrijft dan een ρ'^4. De verwantschap tusschen de punten R' en Q' is dus een $(1, 4)$, er moeten dan 6 coïncidenties $R' \equiv Q'$ zijn. Een willekeurig punt M zal dus 6 stralenparen t, t' dragen. Echter beteekent elk paar stralen t, t' die elkaar in M snijden weer dat het geheele vlak (t, t') de vlakken α en β snijdt volgens 2 lijnen door A_3 en B_3, dus dat door dat punt M een vlak gaat dat ∞^2 vele paren stralen t, t' bevat. Door M zelf gaat hiervan echter slechts dat eene stralenpaar t, t' dat het vlak bepaalt.

Door een willekeurig punt M van de ruimte gaan dus 6 stralenparen t, t', tevens echter ook 6 vlakken, die ∞^2 vele stralenparen dragen.

§ 2. Met het punt A_1 correspondeert nu de lijn a_2; in β wordt het punt B_1 afgebeeld door de lijn b_2. De straal $A_1 B_1$ wordt dus nu omgezet in de *bilineaire congruentie* met richtlijnen a_2 en b_2; $A_1 B_1$ zelf behoort dus ook nogeens tot het beeld, is dus een *dubbelstraal*.

We vinden hier dus 4 singuliere stralen, $A_1 B_1$, $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ en $A_2 B_2$, die *dubbelstralen* zijn, maar wier beeld bovendien een *bilineaire congruentie* is. De overige 5 stralen $A_k B_l$ zijn geen dubbelstralen; ze worden echter wel afgebeeld door een bilineaire congruentie, zijn dus singulier.

Een straal die A_1 verbindt met een punt van b_2 heeft tot beeld alle stralen uit den waaier met top B_1 en richtlijn a_2; hierbij is weer $A_1 B_1$ dubbellijn. Evenzoo bestaat de waaier met top A_1 en richtlijn b_2 geheel uit stralen die alle beschouwd kunnen worden als beelden van één straal uit den waaier B_1 (a_2).

Evenals in het eerste geval vinden we dus hier 18 waaiers die geheel uit singuliere stralen bestaan, terwijl ze 2 aan 2 verwisselbaar aan elkaar zijn toegevoegd.

§ 3. Geheel anders wordt het nu echter als we op de coïncidenties gaan letten en dus gaan zoeken hoeveel dubbelstralen er zijn.

Snijdt een straal t vlak α in een punt op k^2_α, dan snijdt de homologe straal t' vlak α in datzelfde punt, evenals alle stralen van den quadratischen complex, die β volgens k^2_β snijdt, getransformeerd worden in stralen die β in datzelfde punt op k^2_β snijden. De *dubbelstralen* blijken nu een *congruentie* [4, 4] te vormen. Daar nl. in α alle punten van de kegelsnede k^2_α coïncidenties zijn, evenals in β alle punten van k^2_β, zal ieder punt van k^2_α verbonden met elk willekeurig punt van k^2_β, een dubbelstraal geven. Een willekeurig vlak μ snijdt zoowel k^2_α als k^2_β in 2 punten, dus een willekeurig vlak μ bevat 4 dubbelstralen. Projecteeren we k^2_β uit een willekeurig punt M op vlak α, dan zal de projectie van k_β^2 daar k_α^2 in 4 punten snijden, dus door M zullen 4 stralen gaan die zoowel k_α^2 als k_β^2 snijden, dus 4 dubbelstralen.

Het blijkt dus dat de dubbelstralen een congruentie [4, 4] vormen met richtlijnen k_α^2 en k_β^2.

Wij kunnen deze congruentie ook nog anders vinden. Wij zagen dat alle stralen van den complex $|t|^2$, die vlak α op k_α^2 snijden, afgebeeld worden door andere stralen tot dienzelfden complex behoorend, evenals de complex $|t|^2$ die β volgens k_β^2 snijdt in zichzelf getransformeerd wordt. De [4, 4] die deze beide complexen $|t|^2$ gemeen moeten hebben, en die dus een congruentie [4, 4] met richtlijnen k_α^2 en k_β^2 is, moet dus uit stralen bestaan wier beelden ook tot beide complexen behooren; zij moeten dus alle dubbelstralen zijn.

§ 4. De snijlijn c van de vlakken α en β snijdt zoowel k_α^2 als k_β^2 in 2 punten, c is dus een *viervoudige dubbelstraal*. De snijlijn c wordt in vlak α afgebeeld door een kegelsnede c_α^2 die gaat door de 3 punten A_k én door de beide snijpunten van c met k_α^2; evenzoo wordt c in vlak β in een kegelsnede c_β^2 omgezet.

Een willekeurige lijn die c snijdt in een punt P wordt dus weer een lijn die een punt P'_α van c_α^2 verbindt met een punt P'_β van c_β^2. Evenals in het eerste geval wordt dus de ster $[P]$ afgebeeld door één straal t'. Ook nu wordt dus de lineaire axiale complex met as c omgezet in een regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen c_α^2 en c_β^2.

Dit regelvlak bestaat echter weer uit *hoofdstralen*; want, evenals vroeger, correspondeert immers met elken straal van $(t')^4$ een ster $[P]$ waarvan het centrum P een punt op c is.

De stralen, die een willekeurig punt van c_α^2 met een punt van c_β^2 verbinden, zullen tot beelden hebben de lijn c zelf; dus ook nu is c weer een hoofdstraal waaraan toegevoegd is de congruentie [4, 4] met richtlijnen c_α^2 en c_β^2.

Van deze congruentie [4, 4] zijn α *en* β *singuliere vlakken.* Immers $\overset{2}{c_\beta}$ zal c in 2 punten S_1 en S_2 snijden, en van den waaier met S_1 (S_2) tot top en gelegen in vlak α zullen alle stralen $\overset{2}{c_\alpha}$ in 2 punten snijden; dus al die waaierstralen zullen dubbel te tellen stralen van de [4, 4] zijn. De vlakken α en β bevatten elk 2 dergelijke waaiers.

Alle punten van de *richtkrommen* $\overset{2}{c_\alpha}$ en $\overset{2}{c_\beta}$ zijn natuurlijk *singuliere punten.*

Eigenlijk is c zelf een straal die behoort tot elke ster [P] met top P op c. Wij vonden dat de geheele ster [P] afgebeeld wordt door één straal t' van het regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen $\overset{2}{c_\alpha}$ en $\overset{2}{c_\beta}$; maar we zien hier dat het volledige beeld van die ster [P] bestaat uit den hoofdstraal t' én de congruentie [4, 4] die c afbeeldt.

§ 5. Verbinden we A_3 met een willekeurig punt van $\overset{2}{k_\beta}$, dan blijft bij de transformatie dat punt onveranderd, maar A_3 wordt afgebeeld door de lijn a_3. Alle stralen van den *kegel* A_3 ($\overset{2}{k_\beta}$) zijn dus *singulier* en correspondeeren met een waaier, die zijn top op $\overset{2}{k_\beta}$ heeft, en vlak α volgens a_3 snijdt. Evenzoo zijn natuurlijk alle stralen van den kegel B_3 ($\overset{2}{k_\alpha}$) singulier.

De kegel A_3 ($\overset{2}{k_\beta}$) wordt dus getransformeerd in een verzameling stralen die vlak α volgens de rechte a_3, vlak β volgens de kegelsnede $\overset{2}{k_\beta}$ snijdt.

Een willekeurig vlak μ snijdt a_3 in één punt, de kegelsnede $\overset{2}{k_\beta}$ in 2 punten, bevat dus 2 stralen van deze verzameling. Projecteeren we a_3 uit een willekeurig punt M op vlak β, dan zal de projectie van a_3 daar $\overset{2}{k_\beta}$ in 2 punten snijden; door M gaan dus 2 stralen van het beeld van den kegel. Het blijkt dus dat de kegels A_3 ($\overset{2}{k_\beta}$) en B_3 ($\overset{2}{k_\alpha}$) getransformeerd worden in *congruenties* [2, 2].

Als we A_1 verbinden met een punt van $\overset{2}{k_\beta}$, dan zijn die verbindingslijnen altijd dubbelstralen, evenals alle stralen, die A_2 met een punt van k^2_β verbinden; maar behalve met zichzelf zijn deze stralen ook telkens nog homoloog met een waaier die weer zijn top op k^2_β heeft en vlak α volgens $a_2 (a_1)$ snijdt. Daar dit natuurlijk evenzoo geldt voor de beide kegels $B_1 (k^2_a)$ en $B_2 (k^2_a)$ krijgen we hier dus ook nog 6 kegels die geheel uit singuliere stralen bestaan.

§ 6. Een lijn t_a in α wordt, evenals vroeger, getransformeerd in een quadratische kegelschaar met top op c^2_β en die vlak α snijdt volgens de kegelsnede t'^2_a die in α het beeld van den straal t_a is.

Iedere lijn zoowel in vlak α als in vlak β is dus weer *singulier*, terwijl ook nu een waaier in vlak α met top P op c getransformeerd wordt in een ster waarvan het centrum is het punt P' op c^2_β, dat in vlak β het beeld van P is.

Het beeld van het stralenveld in α is ook nu weer de quadratische complex met richtlijn c^2_β, evenals ook de complex $|t|^2$ met richtlijn c^2_a alle stralen in vlak β afbeeldt.

Evenmin komt er verandering als we het beeld zoeken van een waaier in α met een willekeurigen top T. Immers elke straal t van dien waaier zal wel k^2_a in 2 punten snijden, die dan dus ook punten van het beeld t'^2 zullen zijn, maar daar elke straal k^2_a in 2 andere punten snijdt, beteekent dit niets bijzonders voor de afbeelding van den waaier die dus een congruentie [5, 4] is.

§ 7. Elk willekeurig vlak μ bevat 4 dubbelstralen daar de doorgangen $p (\equiv \mu\,\alpha)$ en $q (\equiv \mu\,\beta)$ k^2_a en k^2_β elk in 2 punten zullen snijden.

De doorgang p wordt in vlak α getransformeerd in een kegelsnede p'^2 die met k^2_a dezelfde punten gemeen moet hebben als p, evenals in vlak β de kegelsnede q'^2, die daar het beeld is van q, ook k^2_β in dezelfde punten snijdt als q. Daar p'^2 en q'^2 verder ook geen snijpunten met p en q kunnen hebben, bevat vlak μ van zijn beeld ook niets anders dan die 4 dubbelstralen.

Geheel dezelfde redeneering als in het eerste geval geeft ook hier voor het beeld van een willekeurig vlak μ een congruentie [4, 4], waarvan p'^2 en q'^2 singuliere krommen zijn, en α en β singuliere vlakken, waarin de stralen t' telkens 2 waaiers vormen die geheel uit dubbel te tellen stralen bestaan. Daar tot een willekeurigen waaier in μ de dubbelstralen in het algemeen niet zullen behooren, wordt het beeld van een waaier weer de biquadratische regelschaar met richtlijnen p'^2 en q'^2.

§ 8. Wanneer we gaan onderzoeken wat het beeld wordt van een ster $[M]$, dan zien we dat dit ook weer een congruentie [6, 4] wordt.

We vonden immers dat ook bij deze transformatie in het algemeen 6 stralen hun beeld door een willekeurig punt zenden, terwijl ook nu een willekeurig vlak μ een congruentie [4, 4] wordt, die dus 4 stralen door den top M zendt; omgekeerd hebben dan die 4 stralen uit $[M]$ hun beeld in een willekeurig vlak μ.

Tot elke ster zullen 4 dubbelstralen behooren, nl. de 4 stralen die de congruentie [4, 4] der dubbelstralen door $[M]$ zendt.

De waaier $M(c)$ wordt afgebeeld door het regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen c_α^2 en c_β^2 en bevat in het algemeen geen dubbelstralen.

Daar de kegel met top M en richtlijn c_β^2 gewoonlijk geen dubbelstralen zal bevatten, zal bij de afbeelding daarvan zich niets bijzonders voordoen en zal deze geheele kegel getransformeerd worden naar vlak α waar de stralen t' weer een kromme van de 5^e klasse zullen omhullen met c als viervoudige raaklijn.

Tot de ster $[M]$ behoort nu ook de kegel $M(k_\beta^2)$ die vlak α volgens een kegelsnede μ^2 snijdt. Bij de transformatie blijven alle punten van k_β^2 op hun plaats; maar μ^2 in α wordt daar omgezet in een μ'^4 met dubbelpunten in de 3 hoofdpunten A_k^α, en natuurlijk moet μ'^4 ook gaan door de 4 snijpunten van μ^2 met k_α^2. Daar dus een hoofdpunt A_k het beeld is van 2 punten van μ^2 zullen door de 3 punten A_k twee beeldstralen gaan.

De doorsnee van het beeld van dezen kegel $M(k_\beta^2)$ met vlak α zal nu bestaan uit μ'^4 en de 2 rechten die de snijpunten van k_β^2 met c, als punten van α beschouwd, met hun homologe punten verbinden. De doorsnee van het beeld met vlak β bestaat uit k_β^2 en de 4 rechten die de snijpunten P'_k van μ'^4 en c met de overeenkomstige punten Q'_k op k_β^2 verbinden. Het beeld van den kegel $M(k_\beta^2)$ is dus een *regelschaar van den 6en graad*. Dit regelvlak bevat een dubbelkromme die vlak β in 10 punten snijdt; één straal $P'\,Q'$ wordt nl. gesneden door de 3 andere stralen $P'_k\,Q'_k$ en bovendien snijdt $P'Q'$ k_β^2 nog in een punt behalve in Q'. Rekenen we echter dat elk der 4 stralen $P'_k\,Q'_k$ 4 dubbelpunten draagt, dan tellen we de 6 hoekpunten van de volledige vierzijde der stralen $P'_k\,Q'_k$ dubbel, er zijn dus $16 - 6 = 10$ dubbelpunten.

De kegel $M(k_\beta^2)$ wordt dus getransformeerd in een regelschaar van den 6en graad met een dubbelkromme van den 10en graad.

Dezelfde redeneering opgezet voor den kegel $M(k_\alpha^2)$ geeft ook daar als beeld een regelvlak van den 6en graad met een dubbelkromme van den 10en graad.

Evenals in het eerste geval zijn de 6 punten $A_k\,(B_k)$ singuliere punten van deze $[6, 4]$, en eveneens krijgen wij ook nu nog 6 singuliere punten als we de beelden gaan zoeken van de stralen $M\,A_k\,(M\,B_k)$ daar $A_k\,(B_k)$ bij de transformatie ieder een geheele lijn $a\,(b)$ tot beeld hebben.

Een ster met top $A_k\,(B_k)$ bestaat weer geheel uit singuliere stralen en de beeldstralen vormen samen den axialen complex waarvan de as is de lijn die $A_k\,(B_k)$ afbeeldt.

Nemen we als top van de ster een punt M op $k^2_\alpha\,(k^2_\beta)$ dan blijft bij de transformatie de top onveranderd, en wordt de ster dus in zichzelf getransformeerd. Tot haar beeld behoort evenwel nog de kegel $M\,(k^2_\beta)$, of $M\,(k^2_\alpha)$, die geheel uit dubbelstralen bestaat.

§ 9. Beschouwen wij een willekeurige [1, 1], dan zal die [1, 1] met de [4, 4] der dubbelstralen 8 stralen gemeen hebben, dus het beeld van de [1, 1] bevat die 8 dubbelstralen. Elk punt van $k^2_\alpha\,(k^2_\beta)$ draagt één straal der [1, 1] die haar beeld dus in dat punt op $k^2_\alpha\,(k^2_\beta)$ snijdt, maar verder krijgen we hier niets bijzonders.

Evenals in het eerste geval zal een congruentie [1, 1] getransformeerd worden in een [10, 8], met α en β als singuliere vlakken, waarin de beeldstralen t' een kromme van de 9e klasse omhullen en c een 8-voudige raaklijn is.

De singuliere punten zijn ook dezelfde als in het eerste geval, en ook nu behoort het regelvlak $(t')^4$ met richtlijnen c^2_α en c^2_β tot het beeld.

§ 10. Een willekeurige quadratische regelschaar, die vlak α snijdt volgens een kegelsnede α^2 en vlak β volgens een kegelsnede β^2, zal in het algemeen geen dubbelstralen bevatten; dus de afbeelding zal zich hier in niets onderscheiden van die in het eerste geval.

§ 11. Beschouwen we een lineairen complex met as d dan zal die, daar ook nu evenals vroeger een willekeurige waaier getransformeerd wordt in een regelvlak $(t')^4$, weer afgebeeld worden door een complex $|\,t'\,|^4$.

Door elk punt van de as gaan nu 4 dubbelstralen die dus in zichzelf getransformeerd worden.

Nemen we uit den complex de stralen die rusten op

d en k_α^2 dan vormen die een congruentie [2, 2] evenals de stralen die rusten op d en k_β^2. Deze beide congruenties [2, 2] zullen 8 stralen gemeenschappelijk hebben. Deze 8 stralen zijn ook nog dubbelstralen, zij verbinden immers een punt van k_α^2 met een punt van k_β^2.

Wij vinden dus dat tot den complex 12 dubbelstralen behooren. Verder komt de afbeelding van den complex geheel overeen met het beeld van den complex dat we in het eerste geval kregen.

HOOFDSTUK III.

De transformatie bepaald door twee ongelijksoortige involuties.

Ten slotte kunnen we ons nog denken dat de vlakken α en β ongelijksoortige involutorische transformaties bevatten, zoodat bijv. in vlak α de transformatie van de eerste soort is, dus met 4 coïncidentiepunten D_k, in vlak β van de tweede soort, dus met oneindig vele dekpunten die alle op de kegelsnede k_β^2 liggen.

Ook nu zullen 2 homologe stralen t en t' elkaar als regel niet snijden; is dit wel het geval dan zal het vlak t, t' de vlakken α en β snijden volgens 2 lijnen, zóó dat $q\,(\equiv \beta\,\mu)$ bevat het puntenpaar Q, Q' én B_3, dus weer oneindig vele involutorische puntenparen draagt, terwijl vlak α gesneden wordt volgens een willekeurige lijn p waarop alleen het involutorische puntenpaar P, P' ligt. Als dus twee stralen t en t' elkaar snijden, dan bevat het vlak $\mu\,(\equiv t, t')$ oneindig vele involutorische stralenparen, nl. de stralen van de beide waaiers, waarvan P en P' de toppen zijn, zijn involutorisch aan elkaar toegevoegd.

Het voortbrengsel van die beide waaiers in μ zal een kegelsnede zijn die q snijdt in de beide coïncidentiepunten K op q, d. w. z. in dezelfde punten K_1 en K_2 waarin q ook k_β^2 snijdt. Met $P\,K_1$ is nl. homoloog $P'K_1$; dus dubbelstralen bevat zoo'n vlak in het algemeen niet. Dubbelstralen kan een vlak alleen bevatten als p in vlak α toevallig door een der 4 coïncidentiepunten D_k gaat.

§ 2. Wanneer we het puntenveld $[P]$ in α op β projecteeren uit een willekeurig centrum M, dan kunnen we ook nu weer als volgt redeneeren.

Laten we MP een waaier doorloopen, dus P een rechte l in α, dan doorloopt Q in β een rechte m. Deze lijn m wordt getransformeerd in een kegelsnede m'^2 door de 3 hoofdpunten B_k. De kegel $M(m'^2)$ snijdt vlak α volgens een willekeurige kegelsnede r'^2 waarop dus P' moet liggen. Deze r'^2 in α wordt getransformeerd in een r^4 door de 3 punten A_k.

Tusschen de punten P op p en de punten R op r^4 bestaat dus een verwantschap $(1, 4)$, waarbij dus 6 coïncidenties optreden. In geval van een coïncidentie $P \equiv R$ zullen PQ en $R'Q'$ $(\equiv P'Q')$ elkaar in M snijden.

In een willekeurig punt in de ruimte snijden elkaar dus ook nu weer 6 involutorische stralenparen t en t', maar dat beteekent dan ook weer dat door zoo'n punt 6 vlakken gaan die 2 projectieve waaiers bevatten.

§ 3. De *dubbelstralen* vormen nu samen de 4 kegels $D_k(k^2_\beta)$.

De *quadratische complex* met richtlijn k^2_β wordt in zichzelf getransformeerd, evenals elke der 4 *sterren* $[D_k]$ bij transformatie *dezelfde ster* terug geeft.

Evenals in het eerste geval hebben we hier 9 *singuliere stralen* $A_k B_l$ die getransformeerd worden in *bilineaire congruenties*; en 18 *waaiers* $A_k(b_l)$, $B_k(a_l)$, die 2 *aan 2 involutorisch* aan elkaar zijn toegevoegd.

Een straal $D_k B_l$ wordt getransformeerd in een waaier $D_k(b_l)$, we hebben zoo dus 12 *singuliere stralen* die door waaiers worden afgebeeld. Elke straal die een punt A_k verbindt met een willekeurig punt K van k^2_β wordt afgebeeld door een waaier $K(a_k)$. Wij hebben dus ook nog 3 kegels $A_k(k^2_\beta)$ die *geheel* uit *singuliere stralen* bestaan, daar elke straal uit zoo'n kegel homoloog is met een waaier.

Daar $\overset{2}{k_\beta}$ de lijn c in 2 punten snijdt, zal vlak α 8 dubbelstralen bevatten. Daarentegen liggen in vlak β geen dubbelstralen, in dat geval moet op c een der punten D_k liggen, wat in het algemeen niet het geval is.

§ 4. Beschouwen we een willekeurig vlak μ, of een ster $[M]$, of een bilineaire congruentie $[1, 1]$, dan zullen die in het algemeen geen dubbelstralen bevatten. Hun afbeelding zal zich in niets onderscheiden van die in het eerste geval, waarbij zoowel in vlak α als in vlak β een quadratische involutie van de eerste soort lag.

STELLINGEN.

I.

Het bewijs dat K. DOEHLEMANN geeft voor de eigenschap, dat op een algemeen kubisch oppervlak 27 rechte lijnen liggen, is onvolledig.

KARL DOEHLEMANN. Geometrische Transformationen. Deel II blz. 303.

II.

Ten onrechte vindt P. H. SCHOUTE bij het bepalen van de beide hoeken van 2 vlakken eener R_4, die bovendien in een R_3 gelegen zijn, behalve den stereometrischen hoek nog een rechten hoek.

P. H. SCHOUTE. Die lineaire Räume. Deel I blz. 75.

III.

De wijze waarop W. F. MEYER een getal voorstelt door een eindige fundamentaalreeks is in strijd met de bepalingen voor de grondbewerkingen met fundamentaalreeksen.

W. F. MEYER. Differential- und Integralrechnung. Deel I blz. 326.

IV.

De grondbeginselen der klassieke Mechanica zijn even moeilijk te begrijpen als die van de Quantentheorie.

V.

Bij energie of absorptiemetingen met behulp van een monochromator en thermozuil (of photocel) moeten de spleten van de monochromator een, uit den aard van het probleem te bepalen, onderling gelijke wijdte hebben.

VI.

Bij de intensiteitsmetingen met de Lummer Gehrckeplaat is door interpolatie uit de intensiteitsverdeelingen in de verschillende orden een intensiteitsverdeeling overeenkomend met hooger oplossend vermogen te vinden.

VII.

De bepaling van de spectrale intensiteitsverdeeling, in het zichtbaar en ultraviolet, geschiedt het best en het eenvoudigst met ballonwaarnemingen.

VIII.

Dat de zoogen. Laboratoriumuren voor Natuur- en Scheikunde niet meer gehonoreerd worden, is tegenover de betrokken leeraren onbillijk.

Electrische drukkerij - -
„de Industrie" - Utrecht.