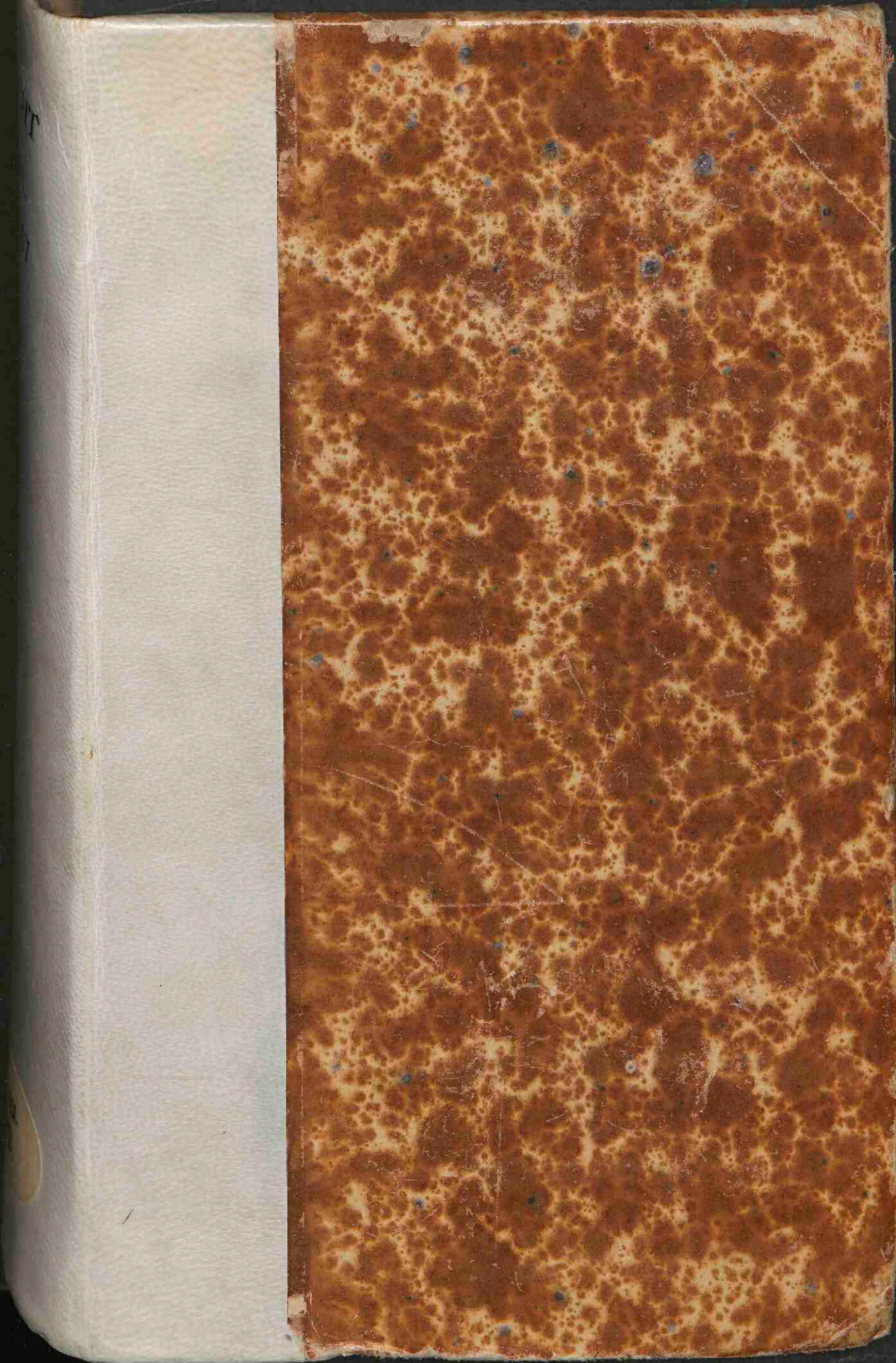


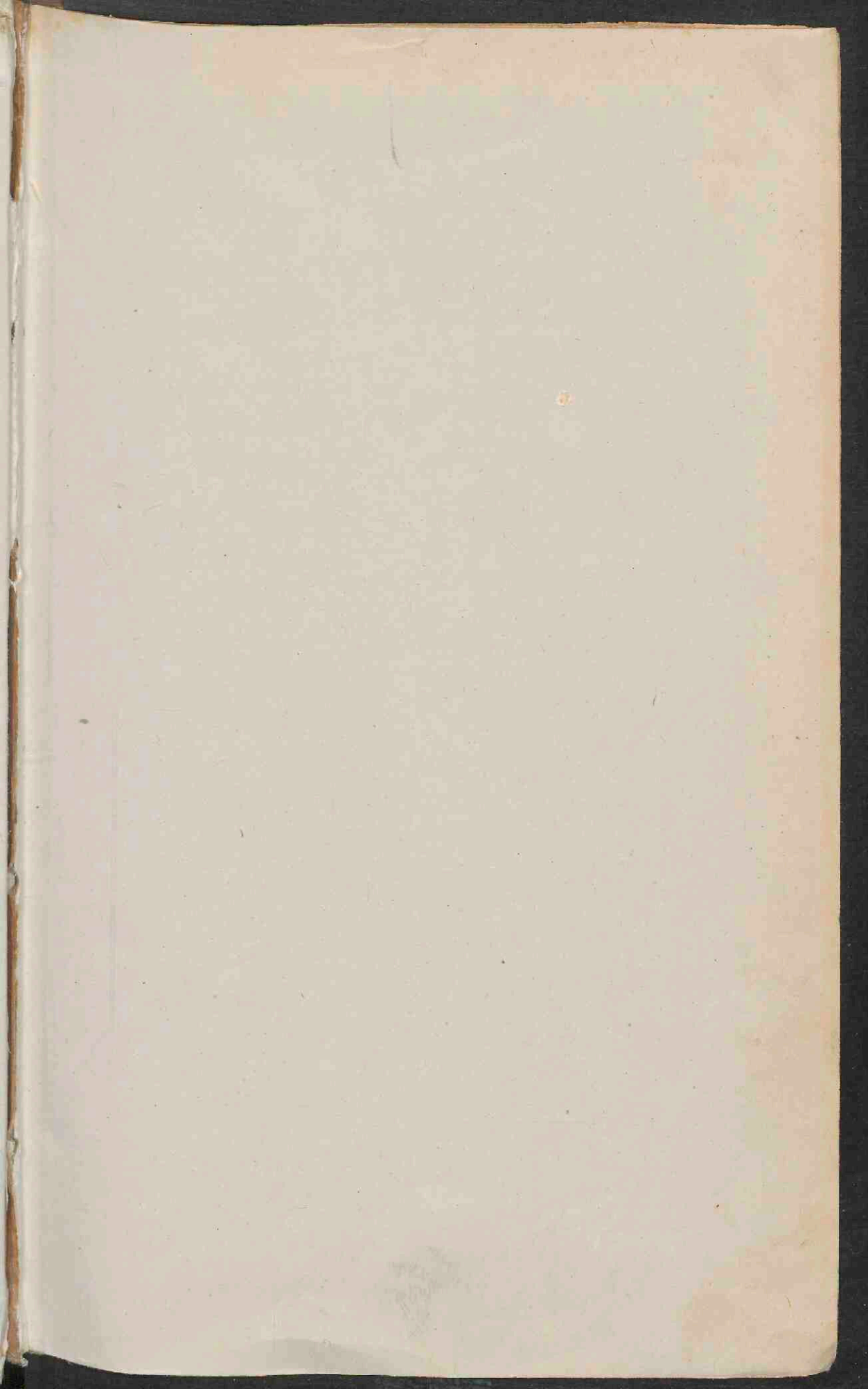


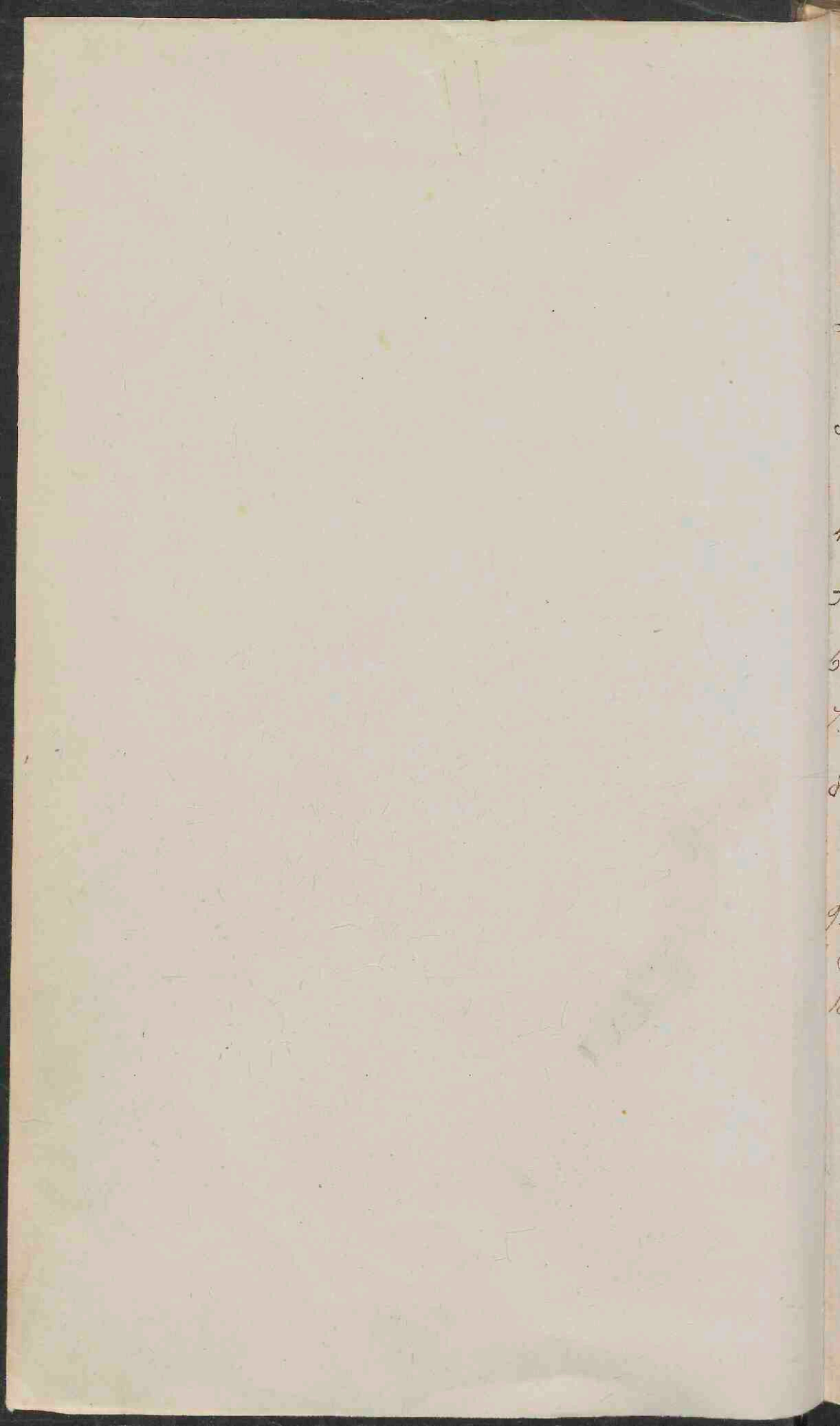
De omgekeerde kegelsneden

<https://hdl.handle.net/1874/286587>



A. qu.
192



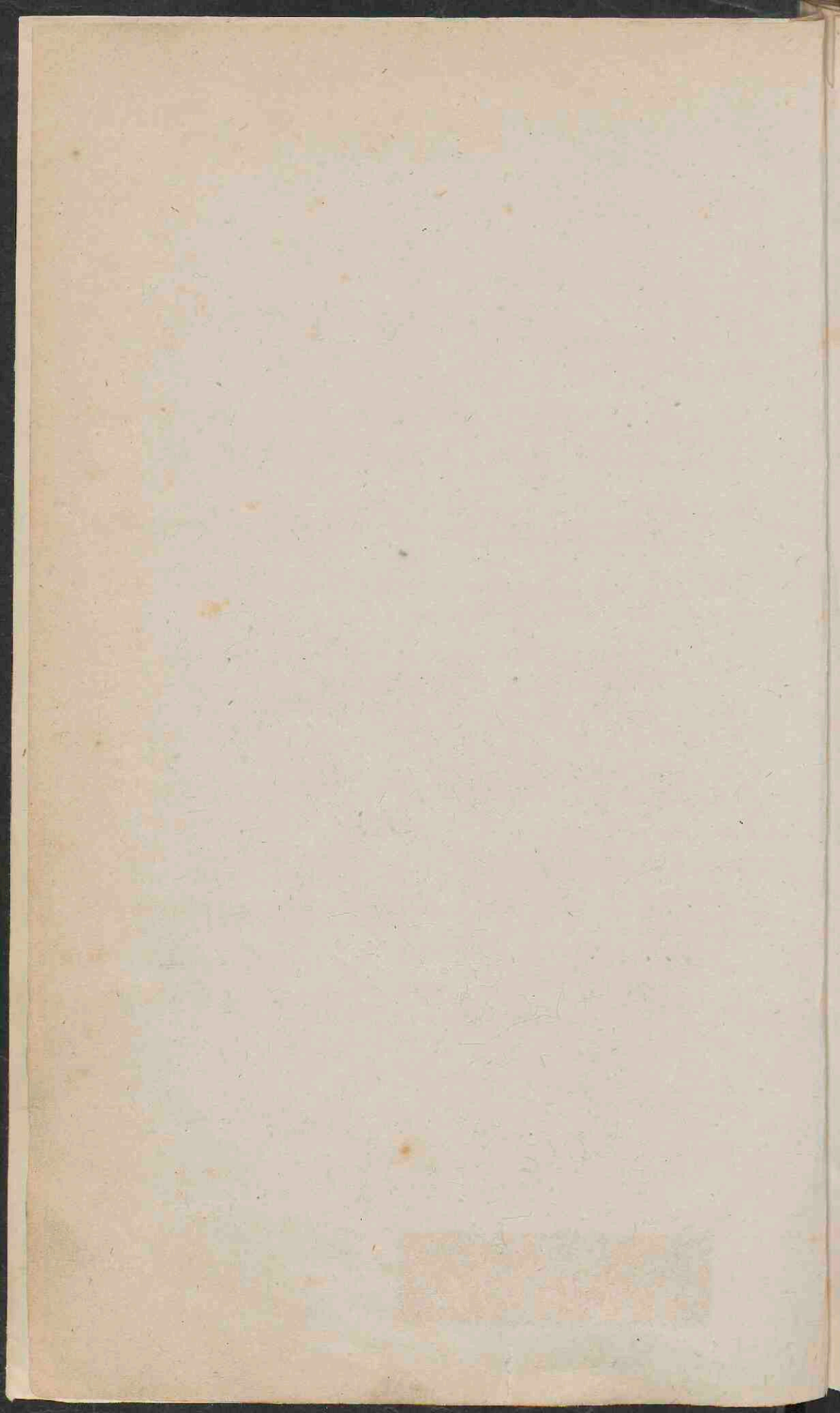


1866/67 III

1. K. D. Schönfeld. De omgekeerde Kegelmiddend.
2. E. W. van Raalte. Over de magt van den president van het Hof in Strafsaken.
3. F. H. van Notten. De Eerste Kamer in het licht der geschiedenis. I. Engeland en Frankryk.
4. N. J. Bethaan Abacare'. De leer der assignation I. 2^{de}.
5. J. W. vanden Biesen. Besch. over art 2014. B. W. B.
6. A. G. C. Doodt. Spec. hist. de Philopoemene.
7. P. de Boer. De Coniferis Archipelagi Indici. (Gf. Hist. nat 4: 638)
8. J. Koell. Histor. - staatsk. onderzoek naar het algem. en het byz. bestuur van den Waterstaat in Nederland. van 1795 - 1848.
9. J. P. Kloos. De Cholera onder het garnizoen te Utrecht.
10. C. H. Thibout. Chém. De Waterstof in statu nascenti.

134

dit voor de mee



1866-67

1

III

DE
OMGEKEERDE KEGELSNEDEN.

Gebruikt bij de berekening van de



111

OMGEEFENDE KUNSTEN

Gedrukt bij P. S. BARGHOORN, Groningen.

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT



1417 5024

DE
OMGEKEERDE KEGELSLEDEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. H. C. MILLIES,
GEWOON HOOGLEERAAR IN DE LETTERKUNDIGE FACULTEIT,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAI

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE

HOOGESCHOOL TE UTRECHT

TE VERDEDIGEN

OP WOENSDAG DEN 27^{en} JUNIJ 1866, DES NAMIDDAGS TE 1 UUR,

DOOR

KAREL DIEDERIK SCHÖNFELD,

GEBOREN TE NIETAP.



GRONINGEN,
P. VAN ZWEEDEEN.
1866.

ONGEKEERDE KEGELSNEDEN.

ALANSONI PROPOSUIT

DE WEGE VAN DEN WETENSCHEP

DR. H. G. MILLER

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

18

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

19

DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN



DE WETENSCHEP VAN DE NEDERLANDEN

20

AAN

MIJNEN VADER

EN AAN DE NAGEDACHTENIS

MIJNER MOEDER.

MILLEN VADIA

IN THE

MILLEN VADIA

VOORREDE.



De vele sierlijke eigenschappen van de kegelsneden en hare menigvuldige toepassingen in de natuurwetenschappen maken hare studie boeiend en belangrijk. Zeer welkom was mij om die reden, vooral met het oog op mijn academisch proefschrift, het voorstel van den Hoogleeraar VAN REES, ze nog uit een geheel ander oogpunt te beschouwen en na te gaan, welke krommen ontstonden door omkeering van de voerstralen der kegelsneden. Ik ontveinsde mij echter de bezwaren niet aan eene dergelijke taak verbonden, daar er zoo weinig door de wiskundigen aan gewerkt was. Het eenige toch, wat ik over dit onderwerp heb kunnen vinden, was eene verhandeling van geometrischen aard van DANDELIN (Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, Tom. IV, 1827). Het onderlinge verband van de verschillende krommen, die alsdan ontstaan, en hare opmerkelijke constructien deden mij evenwel spoedig besluiten, deze studie te ondernemen. Hiervan bied ik den lezer in de volgende bladzijden het resultaat aan.

Er blijft mij nog een aangename pligt te vervullen over. Ik gevoel er behoefte aan U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, mijn innigen dank te betuigen voor de lessen, die ik van U heb ontvangen, en de belangstelling, die Gij mij steeds hebt betoond.

Bovenal ben ik aan U veel verpligt, Hoog Geachte Promotor, Hoog Geleerde BUYS BALLOT! Uw onderwijs, Uwe welmeenende raadgevingen, de bereidvaardigheid, waarmede Gij mij steeds, ook bij het bewerken van dit proefschrift, hebt bijgestaan, het zijn alle weldaden, die steeds eene dankbare herinnering bij mij levendig zullen houden.

Ontvangt ook Gij Hoog Geleerde Heeren VAN REES en HOEK de bijzondere betuiging van mijne erkentelijkheid! Ofschoon ik slechts korten tijd onder Uwe leiding heb kunnen doorbrengen, zal toch de aangename indruk van Uw onderwijs en Uwe welwillendheid mij onveranderlijk bijblijven.

Ik kan niet eindigen, zonder ook U Hoog Geleerde Heeren der Wis- en Natuurkundige Faculteit der Groninsche Hoogeschool mijne dankbaarheid te betuigen. Weest verzekerd, dat ik nimmer de weldaden zal vergeten, die Gij mij bewezen hebt!

Inzonderheid Gij, Hoog Geleerde Heer ERMERINS, hebt mij altijd met raad en daad in mijne studien bijgestaan. Gij hebt tijd noch moeite gespaard om mij lust en ijver voor de natuurwetenschappen in te boezemen. Ontvang daarvoor mijnen welgemeenden dank en blijf voortdurend voor mij, wat Gij zoo lang voor mij geweest zijt!



INHOUD.



HOOFDSTUK I.

	Blz.
ALGEMEENE VERGELIJKING DER OMGEKEERDE KEGELSNEDE. BESCHOUWING VAN EENIGE BIJZONDERE GEVALLEN	1.

HOOFDSTUK II.

ANDERE METHODEN TER VERKRIJGING VAN DE OMGEKEERDE KEGELSNEDE. VERBAND DER GEVORMDE KROMMEN ONDERLING EN MET DE VOORTBRENGENDE	7.
---	----

HOOFDSTUK III.

CIRCULAIRE CONCHOÏDEN	25.
---------------------------------	-----

—

HOOFDSTUK IV.

	Blz.
LEMNISCATEN	37.

HOOFDSTUK V.

CISSOÏDEN. VERBAND DER BESCHOUWDE OMGE- KEERDEN. FOCALÉ	42.
--	-----

HOOFDSTUK VI.

HET MEEST ALGEMEENE GEVAL VAN OMKEERING.	58.
--	-----



HOOFDSTUK I.



Algemeene vergelijking der omgekeerde kegelsneden. Beschouwing van eenige bijzondere gevallen.



§ 1. De algemeene vergelijking der kegelsneden is:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (1).$$

De vorm van deze wordt eenvoudiger door aan te nemen, dat de coördinaat-assen evenwijdig zijn aan de hoofdassen der kegelsnede. Het is duidelijk, dat alsdan de term in xy wegvalt, waardoor men geraakt tot de uitdrukking:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0. \quad (2).$$

In deze is de beteekenis der constanten blijkbaar eene andere, dan in vergelijking (1).

Uit de vergelijking (2) laat zich die in polaire coördinaten gemakkelijk afleiden. Is b. v. A (fig. 1) de oorsprong van het stelsel, AX de as der abscissen, AY die der ordinaten en M eenig punt der kromme, dan wordt de vergelijking (2) door substitutie van

$$x = AM \cos. MAX = r \cos. \varphi$$

$$\text{en } y = AM \sin. MAX = r \sin. \varphi:$$

$$(A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) r^2 + 2(C \sin. \varphi + D \cos. \varphi) r + E = 0 \quad (3).$$

Nemen wij nu op elken voerstraal een punt M' , zoodanig dat

$$AM' = r' = \frac{a^2}{r}$$

is (a^2 eene willekeurige standvastige grootheid, de constante van omkeering, zijnde), dan zal de vereeniging van al de punten M' eene nieuwe kromme opleveren, welke wij *omgekeerde kegelsnede* zullen noemen. Hare analytische uitdrukking in polaire coördinaten wordt verkregen door in vergelijking (3)

voor r in de plaats te stellen $\frac{a^2}{r'}$. Zij is deze:

$$a^4(A \cos.^2\varphi + B \sin.^2\varphi) + 2a^2(C \cos.\varphi + D \sin.\varphi)r' + Er'^2 = 0 \quad (4).$$

Van deze vergelijking kunnen wij wederom tot die in regthoekige coördinaten terugkeeren door substitutie van

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos.\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{en } \sin.\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wij verkrijgen aldus voor de omgekeerde kegelsneden de vergelijking:

$$a^4(Ax^2 + By^2) + 2a^2(Cx + Dy)(x^2 + y^2) + E(x^2 + y^2)^2 = 0 \quad (5).$$

Zij zijn dus in 't algemeen van den vierden graad.

Wij dienen bij de beschouwing van deze vergelijking in acht te nemen, dat er in den loop der bewerking tweemaal eene vermenigvuldiging met den factor $(x^2 + y^2)$ heeft plaats gehad, en dat zij dus behalve de kromme nog het punt $x = 0, y = 0$ in zich bevat.

§ 2. Ligt de oorsprong A (fig. 1) op de kegelsnede, zoo wordt $E = 0$, omdat alsdan $x = 0$ en $y = 0$ aan de vergelijking (2) moeten voldoen. De voorgaande bewerking

levert in dit geval voor de omgekeerde krommen eene vergelijking van den derden graad. Deze hebben alle twee asymptotische armen, hetgeen men gemakkelijk inziet door op te merken, dat de oneindig dicht bij A gelegene punten bij de omkeering oneindig ver daarvan verwijderd worden.

Ligt de oorsprong niet op de kegelsnede, zoo heeft E altijd eene zekere waarde. Uit vergelijking (4) blijkt terstond, dat r' dan niet oneindig groot kan worden, d. i. deze krommen kunnen geene asymptotische armen hebben. Men ziet dit bovendien uit de wijze van ontstaan van de omgekeerde kegelsneden aldus: de eindige voerstralen blijven bij de omkeering eindig; de oneindig groote, zoo zij er zijn, worden oneindig klein; oneindig kleine voerstralen heeft de oorspronkelijke kromme volgens de onderstelling niet, dus zal de omgekeerde ook geene oneindig groote kunnen hebben.

§ 3. Wanneer $A=B$ is, zoo is de vergelijking (2) die van den cirkel. De analytische uitdrukking van de omgekeerde kromme wordt dan, als wij $A=B=1$ stellen,

$$a^4 + 2a^2 (Cx + Dy) + E (x^2 + y^2) = 0.$$

Hieruit volgt: de omgekeerde van den cirkel is eveneens een cirkel.

§ 4. Onderstellen wij den oorsprong op de kromme gelegen, d. i. $E=0$, en bovendien $A=B=1$, zoo wordt vergelijking (2):

$$x^2 + y^2 + 2Cx + 2Dy = 0 \dots (1)$$

en die der omgekeerde:

$$a^4 + 2a^2 (Cx + Dy) = 0 \dots (2).$$

Wij besluiten hieruit: de omgekeerde eens cirkels, welks oorsprong op de kromme gelegen is, is eene regte lijn.

De coördinaten van het middelpunt van den cirkel, voorgesteld door vergelijking (1), zijn $x = -C$ en $y = -D$. Hieruit volgt, dat de middellijn, die door den oorsprong gaat, uitgedrukt wordt door:

$$y = \frac{D}{C}x.$$

De vergelijking van de omgekeerde kan gebragt worden onder den vorm:

$$y = -\frac{C}{D}x - \frac{a^2}{2D},$$

waaruit terstond blijkt, dat de genoemde middellijn en de omgekeerde loodregt op elkander staan.

Geometrisch kan men dit nog eenvoudiger aantoonen. Zij PQ' (fig. 2) die middellijn, zoo volgt uit de symmetrische ligging van de oorspronkelijke kromme ten opzichte van PQ' en de plaats van de pool, dat de omgekeerde symmetrisch moet zijn ten opzichte van die middellijn en bovendien eene regte is. Hieruit volgt onmiddellijk, dat de omgekeerde en de genoemde middellijn loodregt op elkander staan.

§ 5. Wederkeurig ontstaat uit de omkeering eener regte lijn, als de pool daar buiten gelegen is, een cirkel, die door de pool gaat en tot middellijn heeft de omgekeerde loodlijn, uit de pool op de regte neêrgelaten.

Immers is $A=B=0$, dan wordt de vergelijking (2) van § 1:

$$2Cx + 2Dy + E = 0,$$

en die der omgekeerde kromme:

$$2a^2(Cx + Dy) + E(x^2 + y^2) = 0.$$

Van deze stelt de eerste eene regte lijn, de tweede

een' cirkel voor, die klaarblijkelijk door de pool gaat. Uit de symmetrie van de rechte ten opzichte van de uit de pool op haar neêrgelaten loodlijn wordt verder duidelijk, dat de cirkel de omgekeerde loodlijn tot middellijn heeft, hetgeen te bewijzen was.

§ 6. Uit het voorgaande volgt, dat elke raaklijn van de oorspronkelijke kromme bij de omkeering rakende cirkel wordt van de omgekeerde kromme. Deze cirkel gaat door de pool, terwijl zijn middelpunt gelegen is op de loodlijn, uit de pool op de raaklijn neêrgelaten.

Men heeft hierbij slechts in 't oog te houden, dat de raaklijn met de oorspronkelijke kromme twee oneindig dicht bij elkander liggende punten gemeen heeft, die uit den aard der zaak ook op de omgekeerde kromme en de omgekeerde raaklijn oneindig dicht bij elkander komen te liggen, zoodat de omgekeerde raaklijn *rakende* cirkel aan de omgekeerde kromme wordt.

Men merke hierbij evenwel op, dat die raaklijnen, welke door de pool gaan, raaklijnen aan de omgekeerde kromme blijven.

§ 7. De osculerende cirkel der oorspronkelijke kromme blijft in 't algemeen cirkel en wordt osculerende cirkel der omgekeerde kromme, hetgeen met inachtneming van het bovenvermelde en het begrip van „osculerende cirkel” zonder meer wordt ingezien.

Opmerkelijk is het geval, waarin een der oorspronkelijke osculerende cirkels door de pool gaat, daar die in dat bijzonder geval bij de omkeering eene rechte lijn wordt. Met

betrekking tot de omgekeerde kromme is zij te beschouwen als osculerende cirkel van oneindig grooten kromtestraal en oneindig kleine kromming. De omgekeerde kromme heeft alsdan een buigpunt. Dit laatste wordt meer duidelijk, als men bedenkt, dat de kromtecirkel tevens raakt en snijdt. De regte lijn, in welke zij bij de omkeering overgaat, moet dus mede raken en snijden. Zij heeft een contact eener hoogere orde. Er moet dus een buigpunt zijn.

Uit de enkele gevallen in het voorgaande bijgebracht, blijkt reeds ten duidelijkste, dat de stand van de pool grooten invloed op den vorm der omgekeerde kegelsnede uitoefent. De wijze van ontstaan der omgekeerde krommen duidt dit ook reeds aan. Verder kan de stand der coördinaat-assen daarop volstrekt geen invloed hebben en is dus de vergelijking der kegelsneden met betrekking tot assen, die evenwijdig zijn aan de hoofdassen, om hare meerdere eenvoudigheid boven die met den term in xy te verkiezen. Bovendien leidt de eerstgenoemde tot eene minder ingewikkelde uitdrukking voor de omgekeerde kegelsneden, dan de laatstgenoemde zou doen. Wij zijn dus gerechtigd vergelijking (2) van § 1 als punt van uitgang voor onze volgende algemeene beschouwingen te nemen.

HOOFDSTUK II.



Andere methoden ter verkrijging van de omgekeerde kegelsneden. Verband der gevormde krommen onderling en met de voortbrengende.

§ 1. De omgekeerde kegelsneden kunnen ook beschouwd worden als de aaneenschakeling van de voetpunten der loodlijnen, uit eenig punt op de raaklijnen eener kegelsnede neêrgelaten. Het bewijs hiervan zullen wij laten volgen.

Uit de algemeene vergelijking der kegelsneden:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

volgt door eene eenvoudige transformatie deze:

$$B(Ax + C)^2 + A(By + D)^2 + ABE - BC^2 - AD^2 = 0 \quad (2).$$

De vergelijking van de tangens in het punt (x,y) is:

$$Y - y = - \frac{Ax + C}{By + D} (X - x) \quad . \quad . \quad (3),$$

en die der loodlijn uit de pool, welke wij in den oorsprong van het coördinaat-stelsel plaatsen, op haar neêrgelaten:

$$Y = \frac{By + D}{Ax + C} X \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

waarin Y en X de loopende coördinaten zijn.

Door de eliminatie van x en y uit de vergelijkingen (2), (3) en (4) geraken wij tot de analytische uitdrukking voor de vereeniging van de voetpunten der loodlijnen. Gaan wij derhalve hiertoe over.

Uit de vergelijking (4) volgt:

$$By + D = \frac{Y}{X} (Ax + C) \quad \text{en} \quad y = -\frac{D}{B} + \frac{1}{B} \frac{Y}{X} (Ax + C).$$

De eerste grootheid in de vergelijking (2) gesubstitueerd geeft:

$$\left(B + A \frac{Y^2}{X^2} \right) (Ax + C) + ABE - BC^2 - AD^2 = 0 \quad (5),$$

terwijl men door substitutie van $By + D$ en y in vergelijking (3) verkrijgt:

$$BXY^2 + DXY - Y^2 (Ax + C)^2 = -BX^2 (X - x) \quad (6).$$

Uit vergelijking (5) volgt:

$$(Ax + C) = \pm \sqrt{\frac{-Q X^2}{AY^2 + BX^2}}$$

en

$$x = -\frac{C}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{\frac{-Q X^2}{A Y^2 + B X^2}},$$

waarin kortheidshalve $ABE - BC^2 - AD^2 = Q$ gesteld is.

Uit deze formules en de vergelijking (6) verkrijgt men na eenige herleidingen de uitdrukking:

$\pm \sqrt{Q (AY^2 + BX^2)} = (ABY^2 + ADY + ABX^2 + BCX)$,
welke door verdrijving van het wortelteeken en eenige vereenvoudigingen overgaat in de vergelijking:

$$AB (X^2 + Y^2)^2 + 2 (ADY + BCX) (X^2 + Y^2) + (AE - C^2) Y^2 + (BE - D^2) X^2 + 2 CDXY = 0 \quad (7).$$

Hieraan voldoen $X=0$ en $Y=0$. Dit laat zich daardoor verklaren, dat er tijdens de bewerking de factor XY is ingeslopen.

Wanneer wij deze uitkomst in verband beschouwen met de algemeene vergelijking der omgekeerde kegelsneden, zoo zien wij, dat zij denzelfden vorm hebben, uitgenomen dat de laatste den term in xy mist. Wij zijn evenwel in staat het coördinaat-stelsel, met betrekking waartoe de vergelijking (7) is uitgedrukt, ten bedrage van eenigen hoek ω te doen draaijen. Deze neemt dan ten opzichte van het nieuwe stelsel eenen anderen vorm aan, welke verkregen wordt door substitutie van

$$\begin{aligned} X &= x \cos. \omega - y \sin. \omega \\ Y &= x \sin. \omega + y \cos. \omega. \end{aligned}$$

Wel bevat de aldus getransformeerde vergelijking nog de termen in $(x^2 + y^2)^2$, $(x^2 + y^2)$, y^2 , x^2 en xy , maar den laatsten kunnen wij doen verdwijnen door over ω zoodanig te beschikken, dat de coëfficiënt van xy nul wordt. Zij is alsdan wel teruggebragt tot den vorm van de algemeene vergelijking der omgekeerde kegelsneden, maar zij is er volstrekt niet identisch mede, daar de constanten A , B , C enz. in beide op geheel verschillende wijze met elkaâr verbonden zijn.

Wij kunnen zelfs het bewijs leveren, dat het onmogelijk is het punt, waaruit de loodlijnen neêrgelaten worden, zoodanig ten opzichte van de kegelsnede te plaatsen, dat beide omgekeerden zamenvallen.

Te dien einde verplaatsen wij den oorsprong in het punt (p, q) . De vergelijking der kegelsnede wordt dan:

$$Ax^2 + By^2 + 2(C + Ap)x + 2(D + Bq)y + E + Ap^2 + Bq^2 = 0,$$

en die der omgekeerde, door neêrlating van loodlijnen verkregen,

$$\begin{aligned} &AB(x^2 + y^2)^2 + 2\{A(D + Bq)y + B(C + Ap)x\}(x^2 + y^2) \\ &+ \{A(E + Bq^2) - (C^2 + 2ACp)\}y^2 + \{B(E + Ap^2) - \\ &(D^2 + 2BDq)\}x^2 + 2(C + Ap)(D + Bq)xy = 0. \end{aligned}$$

Uit deze kunnen wij den term in xy verdrijven door het coördinaat-stelsel ten bedrage van eenen hoek ω , welke bepaald wordt door de vergelijking

$$\operatorname{tg.} 2\omega = \frac{2(C + Ap)(D + Bq)}{(C + Ap)^2 - (D + Bq)^2 + (B - A)(E + Ap^2 + Bq^2)},$$

te draaijen. Zal de vergelijking, die aldus te voorschijn komt, identisch worden met die der regtstreeks omgekeerden, zoo wordt hiertoe vercischt, dat de coëfficiënten van de overeenkomstige termen in beiden gelijk worden. Men ziet terstond in, dat het onmogelijk is hieraan te voldoen, daar men vier vergelijkingen zou verkrijgen met slechts twee grootheden p en q , waarover men naar willekeur kan beschikken. Zelfs door de constante van omkeering als beschikbaren factor te beschouwen, zou men niet tot identiteit kunnen geraken.

Bij elke kegelsnede behooren derhalve, naarmate men de methode van regtstreeksche omkeering of die van deze § toepast, karakteristiek verschillende omgekeerden. Bovendien geeft de eerstgenocnde methode voor elke oorspronkelijke kromme, terwijl de pool dezelfde blijft, oneindig vele omgekeerden, de laatstgenoemde slechts één.

§ 2. De omhullende van de lijnen, die loodregt staan op de voerstralen eener omgekeerde kegelsnede en door hunne uiteinden gaan, is eene kegelsnede.

Zij om dit te bewijzen in fig. 3 P de pool, M eenig punt der kegelsnede, M' het uiteinde van den omgekeerden voerstraal, $M'Q$ loodregt op $M'P$. Zoeken wij nu de omhullende van al deze loodlijnen.

De vergelijking van den omgekeerden voerstraal kunnen wij brengen onder den vorm:

$$y - y' = \operatorname{tg} \varphi (x - x') \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin y en x de loopende coördinaten, y' en x' de coördinaten van M' zijn en $\varphi = \angle MPX$ is.

De vergelijking der loodlijnen $M'Q$ is derhalve:

$$y - y' = -\operatorname{cot} \varphi (x - x') \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Stellen wij $PM' = r'$, zoo is

$$y' = r' \sin \varphi \quad \text{en} \quad x' = r' \cos \varphi.$$

Door substitutie van deze waarde in de vergelijking (2) verkrijgen wij:

$$y - r' \sin \varphi = -\operatorname{cot} \varphi (x - r' \cos \varphi),$$

of

$$x' \cos \varphi + y' \sin \varphi = r'.$$

Met $PM = r$ vermenigvuldigende en in 't oog houdende dat

$$r \cos \varphi = x, \quad r \sin \varphi = y \quad \text{en} \quad rr' = a^2$$

is, zoo wordt de vergelijking der loodlijn:

$$xx' + yy' = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Al deze loodlijnen verschillen slechts door eene constante of parameter, welke hare standen bepaalt. Immers men gaat van de eene loodlijn tot de andere over door x en y te doen variëren, en door de enkele inzage van de vergelijking der kegelsnede blijkt het terstond, dat x de eenige onafhankelijk veranderlijke en y functie van x is.

Volgens de algemeene methode vindt men de uitdrukking voor de omhullende door de willekeurige constante uit de oorspronkelijke vergelijking en hare afgeleide ten opzichte van den parameter te elimineren.

Het is evenwel in ons geval niet verkieselijk den algemeenen regel te volgen; want dan zouden wij uit de vergelijking (1) van de voorgaande § en (3) van deze § y moeten

eliminieren. Deze bewerking voerde noodwendig wortelgrootheden in, de differentiatie werd daardoor meer omslagtig en de verdere verwijdering van den parameter meer ingewikkeld. Wij zullen langs eenen korteren weg tot ons doel geraken door de eliminatie van y later te bewerkstelligen en bij de differentiatie y als functie van x mede te doen variëren. Hierdoor wordt de vergelijking (3):

$$x' + y' \frac{dy}{dx} = 0 \dots \dots \dots (4).$$

Verder hebben wij de vergelijking (1) der voorgaande §, waaruit men door differentiatie verkrijgt:

$$(Ax + C) + (By + D) \frac{dy}{dx} = 0 \dots \dots (5).$$

Uit de drie laatst vermelde vergelijkingen en die der kegelsnede eliminieren wij nu x , y en $\frac{dy}{dx}$. Broughten wij deze bewerking voor $\frac{dy}{dx}$ ten uitvoer met behulp van de vergelijkingen (4) en (5), dan hebben wij:

$$(Ax + C) y' - (By + D) x' = 0.$$

Verder schrijven wij de vergelijking (3) onder den vorm:

$$(Ax + C) Bx' + (By + D) Ay' = ABa^2 + BCx' + ADy'.$$

De oplossing van $(Ax + C)$ en $(By + D)$ uit de beide laatsten geeft:

$$Ax + C = \frac{(ABa^2 + BCx' + ADy') x'}{Bx'^2 + Ay'^2},$$

en
$$By + D = \frac{(ABa^2 + BCx' + ADy') y'}{Bx'^2 + Ay'^2}.$$

Door substitutie van deze waarden in de vergelijking der kegelsnede, na haar in de volgende:

$B (Ax + C)^2 + A (By + D)^2 + ABE - BC^2 - AD^2 = 0$
getransformeerd te hebben, zal men tot resultaat verkrijgen:

$$\frac{(ABa^2 + BCx' + ADy')^2}{Bx'^2 + Ay'^2} + ABE - BC^2 - AD^2 = 0,$$

waaruit na eenige herleidingen de analytische uitdrukking

$$ABa^4 + 2a^2 (BCx' + ADy') + (BE - D^2) x'^2 + 2 CD x'y' + (AE - C^2) y'^2 = 0 \dots (6)$$

voor de omhullende der loodlijnen wordt afgeleid.

Men ziet, dat zij eene kegelsnede voorstelt en in vergelijking (7) van § 1 overgaat door substitutie van $a^2 = x^2 + y^2$.

Ter opheldering kiezen wij het voorbeeld van den cirkel, voorgesteld door de vergelijking:

$$x^2 + y^2 - 2px = 0.$$

Door regtstreeksche omkeering gaat deze over in de regte lijn:

$$x = \frac{a^2}{2p}$$

De uitdrukking van de omhullende voor het geval dezer regte vinden wij door substitutie van

$$A = B = 1, \quad C = -p \quad \text{en} \quad D = E = 0$$

in de vergelijking (6). Zij is

$$a^4 - 2a^2 px - p^2 y^2 = 0.$$

De omhullende is dus eene parabola.

Aanmerking. Uit deze § volgt, dat de omgekeerde kegelsneden kunnen beschouwd worden als de geometrische plaatsen van de voetpunten der loodlijnen uit een zelfde punt op de raaklijnen eener kegelsnede neêrgelaten. Deze

kegelsnede immers is de omhullende van de loodlijnen, op de omgekeerde voerstralen opgericht en door hunne uiteinden gaande, en die loodlijnen zijn de raaklijnen der omhullende kegelsnede.

In verband hiermede stellen wij ons de oplossing der volgende vraag voor. Gegeven zijnde eene omgekeerde kegelsnede, vraagt men naar de ligging van de pool en den aard van die kegelsnede, welke de eigenschap heeft, dat de vereeniging van de voetpunten van de uit de pool op hare raaklijnen neêrgelaten loodlijnen de gegevene kromme oplevert.

Om tot dit doel te geraken, dienen wij ons te herinneren, dat de vergelijking (6) en die der regtstreeks omgekeerde de bij elkander behoorende krommen voorstellen. Wij hebben de gegevene aan vergelijking (5) van § 1 van Hoofdstuk I te toetsen en de coëfficiënten van de overeenkomstige termen gelijk te stellen. Dit geeft ons een voldoende aantal vergelijkingen om de constanten A, B, C enz. te bepalen. Door deze eindelijk te substituëren in vergelijking (6) wordt het voorgestelde doel bereikt.

Nog eene enkele opmerking over de vergelijkingen (3) en (4).

De geometrische beteekenis van deze geeft een eenvoudig middel aan de hand om voor elk punt M (fig. 4) eener kegelsnede het overeenkomstige punt N der omhullende, volgens deze § ontstaan, te vinden. Dit punt toch ligt vooreerst op de loodlijn door vergelijking (3) voorgesteld, d. i. volgens fig. 4 op MN, en ten tweede op de lijn door vergelijking (4) voorgesteld, d. i. op de loodlijn uit de pool op de raaklijn MQ in het punt M neêrgelaten en is dus het door-

snijdingspunt dezer beide lijnen. Men heeft derhalve slechts uit de pool P op de raaklijn MQ eene loodlijn PN' neêr te laten en deze te verlengen, tot zij de loodlijn MN snijdt. Het snijpunt N is het gezochte punt.

In het voorbijgaan merken wij nog op, dat de gelijkvormige regthoekige driehoeken PMN' en PNM' geven:

$$PN \cdot PN' = PM \cdot PM' = a^2.$$

Hieruit volgt onmiddellijk, dat PN de omgekeerde van de loodlijn PN' is.

§ 3. Stellen wij ons thans voor de omhullende te zoeken van de cirkels, beschreven op de voerstralen eener kegelsnede, die van een willekeurig punt als pool uitgaan, en die voerstralen als middellijnen hebbende.

Daar al deze cirkels door de pool gaan, kunnen zij analytisch voorgesteld worden door de vergelijking:

$$x^2 - 2bx + y^2 - 2cy = 0 \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin b en c de coördinaten van het middelpunt zijn.

Om de betrekking, die tusschen b en c bestaat te vinden, nemen wij onze toevlugt tot de polaire vergelijking der kegelsneden:

$$(A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) r^2 + 2(C \cos. \varphi + D \sin. \varphi) r + E = 0 \quad (2).$$

Door in aanmerking te nemen, dat telkens $r = 2r'$ is, als r' de voerstraal van het middelpunt voorstelt, geeft de substitutie van $r = 2r'$ in vergelijking (2) de volgende uitdrukking:

$$4(A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) r'^2 + 4(C \cos. \varphi + D \sin. \varphi) r' + E = 0$$

voor de geometrische plaatsen der middelpunten.

Overgaande tot het regthoekige coördinaat-stelsel verkrijgen wij voor de betrekking tusschen b en c de vergelijking:

$$4 Ab^2 + 4 Bc^2 + 4 Cb + 4 Dc + E = 0 \dots (3).$$

Lossen wij hieruit c op, dan hebben wij:

$$c = -\frac{1}{2} \frac{D}{B} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \frac{D^2}{B^2} - \frac{A}{B} b^2 + \frac{C}{B} b - \frac{E}{4B} \right)}.$$

De substitutie van deze grootheid in de vergelijking (1) geeft:

$$\frac{x^2 - 2bx + y^2}{2y} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{D}{B} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \frac{D^2}{B^2} - \frac{A}{B} b^2 - \frac{C}{B} b - \frac{E}{4B} \right)} \right\} = 0 \quad (4),$$

eene uitdrukking, waarin slechts ééne willekeurige constante voorkomt.

Het zoeken van de omhullende vereischt de differentiatie van deze vergelijking ten opzichte van b .

Brengen wij deze ten uitvoer, dan vinden wij:

$$2x + 2y \left\{ \frac{-2 \frac{A}{B} b - \frac{C}{B}}{\pm 2 \sqrt{\left(\frac{1}{4} \frac{D^2}{B^2} - \frac{A}{B} b^2 - \frac{C}{B} b - \frac{E}{4B} \right)}} \right\} = 0 \quad (5).$$

Om de constante b uit de beide laatste vergelijkingen te elimineren, zullen wij ze aldus schrijven:

$$\frac{x^2 - 2bx + y^2}{2y} + \frac{1}{2} \frac{D}{B} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \frac{D^2}{B^2} - \frac{A}{B} b^2 - \frac{C}{B} b - \frac{E}{4B} \right)},$$

$$\frac{2y \left(2 \frac{A}{B} b + \frac{C}{B} \right)}{4x} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \frac{D^2}{B^2} - \frac{A}{B} b^2 - \frac{C}{B} b - \frac{E}{4B} \right)}.$$

Dit geeft onmiddellijk:

$$\frac{x^2 - 2bx + y^2}{2y} + \frac{1}{2} \frac{D}{B} = 2y \frac{\left(2 \frac{A}{B} b + \frac{C}{B} \right)}{4x}.$$

Das is:

$$b = \frac{Bx(x^2+y^2) + Dxy - Cy^2}{2(Ay^2 + Bx^2)} \dots (6).$$

De substitutie van deze waarde in de vergelijking (4) geeft na een tal van herleidingen, waarmede wij den lezer niet lastig zullen vallen, voor de omhullende der cirkels de analytische uitdrukking:

$$AB(x^2+y^2)^2 + 2(ADy + BCx)(x^2+y^2) + (AE-C^2)y^2 + (BE-D^2)x^2 + 2CDxy = 0 \dots (7).$$

Deze vergelijking is identisch met de in § 1 van Hoofdstuk II gevondene (7). Hieruit mogen wij besluiten, dat de omhullende van de cirkels, beschreven op de voerstralen eener kegelsnede als middellijnen, eene omgekeerde kegelsnede is en dat de beide laatst behandelde wijzen van vorming (neêrlating van loodlijnen en omhulling), voor eene bepaalde kegelsnede en denzelfden stand der pool, identische krommen opleveren.

Ook aan de vergelijking (7) wordt voldaan door $x = 0$ en $y = 0$ te stellen, daar er in den loop der bewerking eene vermenigvuldiging met den factor xy heeft plaats gevonden.

§ 4. Het voorafgaande stelt ons in staat een geometrisch bewijs te geven van de stelling in § 3 bevat. Wij voegen dit bewijs hier des te eerder bij, omdat het ons bij groote eenvoudigheid te gelijk gelegenheid geeft om op het verband van het vroeger behandelde te wijzen.

Zij M (fig. 4) enig punt eener kegelsnede, MQ de raaklijn in M en N' het overeenkomstige punt der omgekeerde kromme, volgens § 1 ontstaan, en laten verder M' en N punten van de omgekeerden van de respectieve krom-

men M en N' zijn. Elke raaklijn MQ van de oorspronkelijke kegelsnede wordt bij de omkeering rakende cirkel der omgekeerde kromme en wel in het punt M' . Deze cirkels gaan bovendien alle door de pool en hebben tot middellijnen de omgekeerde loodlijnen PN uit P op MQ neêrgelaten. De omgekeerde kromme M' is dus de omhullende van al de cirkels op de omgekeerde voerstralen van de kromme N' als middellijnen beschreven. Deze omgekeerde voerstralen bepalen echter juist de kegelsnede N . Hiermede is onze stelling op nieuw bewezen.

Ook uit deze bewijsvoering ziet men onmiddellijk, dat men door toepassing van de methode door neêrlating van loodlijnen en van die door omhulling op dezelfde kegelsnede, een bepaald punt als pool genomen zijnde, tot dezelfde omgekeerden geraakt.

Bij iedere kegelsnede behooren alzoo twee omgekeerden, de eene ontstaan door regtstreeksche omkeering, de andere door neêrlating van loodlijnen op de raaklijnen der oorspronkelijke kromme. Die beiden hebben onderling dit verband, dat de regtstreeks omgekeerde van de tweede door neêrlating van loodlijnen op hare raaklijnen de eerste doet te voorschijn komen. Bovendien is deze kromme de omhullende van de cirkels, welke de voerstralen van de regtstreeks omgekeerde der tweede tot middellijnen hebben.

Aanmerking. Wil men volgens de in deze § betoogde stelling de constructie eener omgekeerde kegelsnede ten uitvoer brengen, dan ligt zij onmiddellijk voor de hand. Het zal evenwel verkieselijk zijn haar aldus te wijzigen: men neme het dubbele van elken voerstraal als middellijn, waardoor het middelpunt van elken cirkel op de kegelsnede zelve te liggen

komt. Alsdan worden echter alle voerstralen van de omgekeerde kromme het dubbel van hetgeen zij werkelijk behooren te zijn, zoodat men ze later moet halveren. Deze wijze van constructie heeft natuurlijk dit voordeel, dat de punten der omhullende aldus met grootere nauwkeurigheid kunnen bepaald worden.

§ 5. Twee bundels van regten, wier anharmonische verhoudingen ten opzichte van de twee paren regten

$$Ax + By + C = 0, A'x + B'y + C' = 0$$

en $A''x + B''y + C'' = 0, A'''x + B'''y + C''' = 0$

gelijk zijn, kunnen analytisch voorgesteld worden door de vergelijkingen:

$$Ax + By + C \pm \mu (A'x + B'y + C') = 0$$

en $A''x + B''y + C'' \pm \mu (A'''x + B'''y + C''') = 0,$

waarin μ alle waarden kan aannemen, terwijl met gelijke waarden van μ homologe stralen overeenstemmen. Door eliminatie van μ uit beide vergelijkingen verkrijgen wij de uitdrukking

$$Ax + By + C - \frac{A''x + B''y + C''}{A'''x + B'''y + C'''} (A'x + B'y + C') = 0$$

voor de achtereenvolgende snijpunten der homologe stralen.

Deze is van den tweeden graad en stelt eene kegelsnede voor, welke door de polen der bundels gaat.

Op gelijksoortige wijze kan men de homologe punten, genomen op twee homographisch verdeelde lijnen, die men als assen der x en der y kan beschouwen, voorstellen door de vergelijkingen:

$$y = 0, x = a + \mu b$$

en $x = 0, y = a' + \mu b'.$

De vergelijking van de rechte, die door twee zoodanige homologe punten gaat, is

$$\frac{x}{a + \mu b} + \frac{y}{a' + \mu b'} = 1,$$

en die van de omhullende van al deze lijnen

$$(b'x + by)^2 - 2b(a'b - ab')y + 2b'(a'b - ab')x + (ab' - a'b)^2 = 0.$$

Deze is de voorstelling eener kegelsnede, welke de beide assen raakt. Deze stellingen nu, die langs analytischen weg gevonden zijn, zijn dezelfde, welke Chasles in zijn *Traité des Sections Coniques* voorgedragen heeft als de omgekeerde van die, welke hij tot grondslagen voor zijne beschouwingen genomen heeft. Zij zijn door hem aldus uitgedrukt:

De kromme, welke ontstaat door de vereeniging van de snijpunten van de homologe stralen van twee homographische bundels, is eene kegelsnede, die door de middelpunten der beide bundels gaat.

De omhullende van de regten, die de homologe punten van twee homographische verdeelingen van twee lijnen verbinden, is eene kegelsnede, welke die twee regten raakt.

Maken wij van deze gebruik ter opsparing van een paar constructien voor onze omgekeerde krommen.

Laten volgens de eerste stelling (fig. 5) O (A, B, C...) en O' (A, B, C...) twee homographische bundels, A, B, C enz. de snijpunten der homologe stralen en dus punten eener

kegelsnede voorstellen. Passen wij nu de beginselen van omkeering toe, terwijl wij het punt P als pool nemen. Alle stralen van de beide bundels worden cirkels, gaande door P en het omgekeerde punt O of O' , naarmate zij ontstaan zijn door omkeering van den eerst- of laatstgenoemden bundel. De door P gaande middellijnen van de cirkels, die behooren bij den bundel O ($A, B, C \dots$), vormen eenen homographischen bundel met de eveneens door P gaande middellijnen van de cirkels, die behooren bij den tweeden omgekeerden bundel. Dit leidt als van zelf tot de volgende constructie voor onze omgekeerden.

Men neme (fig. 6) drie vaste punten, P, O en O' , verbindende een hunner P met de beide anderen en beschrijve uit P als middelpunt twee homographische bundels $P(A, B, C \dots)$ en $P(A', B', C' \dots)$. Uit de punten a, b, c, d enz. en a', b', c', d' enz., waarin de lijnen, die PO en PO' recht-hoekig midden door deelen, de stralen der respectieve bundels snijden, als middelpunten beschrijve men cirkels, waarvan de eersten PO en de laatsten PO' tot koorde hebben, dan zullen de snijpunten van die cirkels, welker middelpunten op homologe stralen gelegen zijn, punten eener omgekeerde kegelsnede zijn.

Om tot eene constructie te geraken door middel van de tweede stelling keeren wij (fig. 7) om. Hierin stellen OA en $O'A'$ twee lijnen voor, waarop a, b, c enz., en a', b', c' enz. homologe punten zijn, terwijl P de pool is. Bij de omkeering worden OA en $O'A'$ twee cirkels, gaande door P ; de lijnen, welke de pool met de homologe punten verbinden, blijven twee homographische bundels vormen, en die, welke de homologe punten vereenigen, worden cirkels,

welke door de pool gaan en door de punten, waarin twee homologe stralen b. v. Pa en Pa' de omgekeerde lijnen OA en $O'A'$ snijden. Wij besluiten hieruit tot deze constructie.

Men beschrijve twee eikander snijdende cirkels en trekke uit een der snijpunten in elk van deze eenen bundel van lijnen, zoodanig, dat de anharmonische verhoudingen van den eenen gelijk zijn aan die van den anderen. Door de op elkander volgende snijpunten van de homologe stralen met de beide cirkels legge men verder eene reeks van cirkels, welke alle door de pool gaan, dan zal de omhullende van deze eene omgekeerde kegelsnede zijn.

Uit het weinige, door ons in deze § bijgebracht, zal men zonder twijfel reeds vermoeden, dat men langs geometrischen weg tot eene menigte constructien voor onze krommen kan geraken. Wij achten het daarom overbodig de stellingen van Newton, Maclaurin en anderen, zooals men ze in bovengenoemd werk van Chasles vindt, hier op gelijke wijze te behandelen.

§ 6. Daar de leer der kegelsneden in de natuurkundige wetenschappen zulk eene ruime toepassing vindt, schijnt het ons niet ondoelmatig er op te wijzen, dat ook onze omgekeerde krommen bij physische beschouwingen van dienst kunnen zijn. Tot staving hiervan willen wij de volgende stelling bijbrengen.

De omhullende van al de cirkels, welke door een lichtgevend punt gaan en welker middelpunten op eene kegelsnede gelegen zijn, is de regthoekige trajectoria van de door de terugkaatsende kromme teruggekaatste stralen.

Nemen wij om dit te bewijzen op de terugkaatsende kegelsnede (fig. 8) twee punten M en M' . Zij verder P de pool, MMS een secans en laten PNP' en $PP'N'$ de cirkels zijn, uit M en M' als middelpunten met de stralen MP en $M'P$ beschreven. De beide punten, waarin zij elkander snijden, zijn dan P en P' , terwijl zij van de omhullende twee punten N en N' bevatten. De secans MMS staat volgens de constructie loodregt op PP' en $\angle PM'S$ is $\equiv \angle P'M'S$. Hoe kleiner de afstand van de punten M' en M wordt, des te meer naderen ook de punten N' en P' tot N , terwijl toch onophoudelijk de hoeken $PM'S$ en $P'M'S$ gelijk blijven. Bij den overgang van de secans MMS in de raaklijn in het punt M vallen de punten N' en P' met N zamen. Wij besluiten hieruit, dat de hoeken, welke PM en NM met de raaklijn in M maken, gelijk zijn, zoodat NM kan beschouwd worden als de rigting van den straal, die in het punt M teruggekaatst en van het lichtgevend punt P uitgegaan is. MN is de straal van den cirkel PN en is dus loodregt op de omhullende in het punt N . Deze staat derhalve loodregt op de rigting der teruggekaatste stralen en is om die reden de regthoekige trajectoria van de laatsten.

Wanneer wij ons hierbij herinneren, dat de catacaustica of brandlijn der gereflecteerde stralen de omhullende is van de teruggekaatste stralen, zoo zien wij gemakkelijk in, hoe onze omhullende of trajectoria met de catacaustica zamen hangt. Zij verhouden zich als ontwikkelende en ontwikkelde. Immers MN is de normaal der trajectoria in het punt N en te gelijk als rigting van den teruggekaatsten straal raaklijn der catacaustica.

Ofschoon Quetelet deze stelling meer algemeen heeft

bewezen , scheen het ons verkieselijk haar hier alleen in betrekking tot de kegelsneden te beschouwen. Daar de analytische beschouwingen der causticae dikwijls zeer ingewikkeld zijn , zal men met behulp van het hier behandelde soms langs een' meer eenvoudigen weg hetzelfde doel kunnen bereiken.

HOOFDSTUK III.



Circulaire Conchoïden.

Wij kunnen thans overgaan tot de behandeling van de afzonderlijke omgekeerde kegelsneden. Voor eene geregelde voordragt is het echter noodzakelijk eerst eene klassificatie te vormen. Werpen wij om daartoe te geraken een' terugblik op het voorafgaande. Wij hebben gezien, dat de omgekeerde krommen langs verschillende wegen konden ontstaan. De onderscheidene wijzen van wording waren:

- a die door regtstreeksche omkeering,
- b „ „ neêrlating van loodlijnen,
- c „ „ omhulling,
- d en e de op de leer der anharmonische verhoudingen gegronde.

Elk van deze zou ons tot ons doel kunnen leiden. Immers wij zouden de vraag kunnen stellen: welke omgekeerde kegelsneden behooren bij de ellips, de hyperbola enz., als de pool in eenig punt van het vlak der kegelsnede gelegen is en men de methode van regtstreeksche omkeering toepast?

Hetzelfde zou men kunnen doen ten opzichte van ieder der overige methoden. Wij dienen ons hierbij evenwel te herinneren, dat de tweede en derde methode telkens dezelfde groepen van omgekeerden te voorschijn brengen.

Wij achten het echter verkieselijk een' geheel anderen weg in te slaan. Wij zullen alle kegelsneden in óéne vergelijking met betrekking tot een' bepaalden oorsprong zamenvatten. Door regtstreeksche omkeering komen wij alsdan tot eene bepaalde groep van omgekeerden. Door vervolgens den oorsprong te verplaatsen komen wij op gelijksoortige wijze tot de voorstelling van andere groepen van omgekeerden.

In overeenstemming hiermede zullen wij achtereenvolgens de pool plaatsen:

- a in het brandpunt,
- b „ „ middelpunt,
- c op den omtrek,
- d in eenig punt.

§ 1. De polaire vergelijking der kegelsneden is:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos. \varphi} \quad (1),$$

wanneer de oorsprong verondersteld wordt in het brandpunt gelegen te zijn.

Substitueert men hierin $r = \frac{a^2}{r'}$, zoo verkrijgt men na eene kleine herleiding:

$$r' = m + n \cos. \varphi \quad (2),$$

waarin $m = \frac{a^2}{p}$ en $n = \frac{a^2 e}{p}$ is. Deze vergelijking is die

der omgekeerde kegelsneden voor het brandpunt als pool.

Door φ alle waarden van 0° tot 360° doorloopt en

$\cos. \varphi$ en $\cos. (180 + \varphi)$ in grootte gelijk, maar in teeken verschillend zijn, vinden wij gemakkelijk voor de vergelijking (2) de uitdrukking:

$$r = n \cos. \varphi \pm m \dots \dots \dots (3),$$

waarin men φ slechts van 0° tot 180° behoeft te doen variëren.

Deze vergelijking leidt ons tot eene eenvoudige constructie voor onze omgekeerden. Wanneer men namelijk (fig. 9) eene lijn $PQ = n$ neemt en daarop als middellijn eenen cirkel beschrijft, zijn de koorden (PU, PT, PV enz.), uit P getrokken, gelijk aan $n \cos. \varphi$, als φ de hoeken voorstelt, welke de koorden met PQ maken. De uiteinden eener lijn van de lengte m , ter weerszijden van T, U, V enz. op de koorden en hare verlengden uitgezet, bepalen de omgekeerde kegelsnede.

De conchoïde van Nicomedes wordt op gelijksoortige wijze geconstrueerd, met dit onderscheid echter, dat bij haar de regte lijn dezelfde dienst doet, als de cirkel bij onze omgekeerden. Van daar voor dezen de naam circulaire conchoïden.

§ 2. Dat de omgekeerden, welker pool in het brandpunt gelegen is, circulaire conchoïden zijn, kan men bovendien bewijzen met behulp van deze eigenschap der kegelsneden: de verhouding van de afstanden van elk punt eener kegelsnede tot het brandpunt en de directrix is eene standvastige grootheid.

Zij c (fig. 10) het brandpunt eener kegelsnede, ae de directrix, b eenig punt der kromme en bd de loodlijn uit b op ae neêrgelaten, zoo hebben wij:

$$\frac{bc}{bd} = \text{eene constante} = C \quad . \quad . \quad (1).$$

Is nu a het snijpunt van den verlengden voerstraal cb met de directrix, dan verkrijgen wij uit vergelijking (1), $\angle dba = \varphi$ stellende:

$$bc = C ab \cos. \varphi = C (ac - bc) \cos. \varphi \quad . \quad . \quad (2).$$

Door deeling door de constante van omkeering volgt hieruit:

$$s'' = C (s' - s'') \cos. \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

waarin s'' en s' de omgekeerde lijnen bc en ac voorstellen.

Daar s'' als voerstraal van de omgekeerde directrix gelijk is aan het product van den omgekeerden afstand van het brandpunt tot de directrix met $\cos. \varphi$, zal $s' - s''$ eene constante grootheid zijn. Dit laatste leidt onmiddellijk tot de in § 1 vermelde constructie.

§ 3. De polaire vergelijking der circulaire conchoïden laat zich gemakkelijk in het rechthoekige coördinaat-stelsel overbrengen door substitutie van

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \text{ en } \cos. \varphi = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Wij verkrijgen alsdan:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = m + \frac{nx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

en na verdrijving van het wortelteeken:

$$(x^2 + y^2 - nx)^2 = m^2 (x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad (1).$$

Laten wij deze vergelijking in verband beschouwen met de algemeene uitdrukking der omgekeerde kegelsneden, welke beschouwd kunnen worden als ontstaan door toepassing van de methode door neêrlating van loodlijnen op de krommen

door vergelijking (6) van § 2 van het voorgaande Hoofdstuk voorgesteld. In deze en de algemeene vergelijking der omgekeerden komen dezelfde constanten voor, zoodat de oplossing van de vraag voor de hand ligt: welke is de kegelsnede, waarbij volgens de methode door neêrlating van loodlijnen de circulaire conchoiden behooren.

Om hiertoe te geraken, brengen wij vergelijking (1) onder den vorm:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2nx(x^2 + y^2) - (m^2 - n^2)x^2 - m^2y^2 = 0 \quad (2),$$

en stellen de coëfficiënten van de termen van deze gelijk aan die van de overeenkomstige der vergelijking:

$$E(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(Cx + Dy)(x^2 + y^2) + a^4(Ax^2 + By^2) = 0 \quad (3).$$

Wij verkrijgen alsdan:

$$A = -\frac{E}{a^4}(m^2 - n^2), \quad B = -\frac{E}{a^4}m^2, \quad C = -\frac{E}{a^2}n \quad \text{en} \quad D = 0.$$

De substitutie van deze waarden van A, B, C en D in de vergelijking (6) van § 2 van Hoofdstuk II geeft:

$$x^2 + y^2 - 2nx - (m^2 - n^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Deze uitdrukking stelt eenen cirkel voor, weshalve wij tot deze eigenschap besluiten: de aaneenschakeling van de voetpunten der loodlijnen, uit eenig punt van het vlak eens cirkels op zijne raaklijnen neêrgelaten, is eene circulaire conchoïde.

Aanmerking. Langs geometrischen weg kan men op eene eenvoudige wijze aantoonen, dat de in deze § opgeslotene constructie dezelfde krommen oplevert, als de in § 1 vermelde.

Zij QRS (fig. 11) de cirkel voorgesteld door vergelijking (4), P de pool en Q het middelpunt, dan is $PQ = n$ en $QR = m$ en beschrijven wij verder op PQ als middellijn den

cirkel OQU. Van de loodlijn PT, uit P op de raaklijn in S neêrgelaten, wordt door den cirkel OQU een stuk $UT = m$ afgesneden. Door de neêrlating der loodlijn PT en door een stuk $UT = m$ op het verlengde van PU uit te zetten wordt derhalve hetzelfde punt T bepaald.

§ 4. De identiteit van de vergelijkingen, die de krommen, verkregen door de methode door neêrlating van loodlijnen en die door omhulling, voorstellen, leidt onmiddellijk tot de analoge stelling: de omhullende van de cirkels, beschreven op de voerstralen eens cirkels als middellijnen, is eene circulaire conchoïde.

§ 5. Uit de analytische geometrie is het bekend, dat de vereeniging van de voetpunten der loodlijnen, uit het brandpunt op de raaklijnen eener ellips of hyperbola neêrgelaten, eenen cirkel en, op die eener parabola neêrgelaten, eene regte lijn geeft. (*)

Laten wij ons die cirkels bij de ellips en de hyperbola voorstellen. Bij de omkeering worden deze beide krommen hare omgekeerden, en tevens zijn zij de omhullenden van hare omgekeerde raaklijnen, welke cirkels zijn, beschreven op

(*) De vergelijking (7) van § 1 van het voorgaande Hoofdstuk bevat deze eigenschap als een bijzonder geval in zich. Immers zoo wij den oorsprong in het brandpunt plaatsen, hebben wij voor de kegelsneden de uitdrukking:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2pex - p^2 = 0,$$

weshalve in dit geval die van de omgekeerde krommen, ontstaan door neêrlating van loodlijnen, wordt:

$$(1 - e^2)(x^2 + y^2) + 2pex - p^2 = 0.$$

Deze stelt in 't algemeen een' cirkel voor; voor de parabola echter is $e = 1$, weshalve zij alsdan de uitdrukking eener regte wordt.

de omgekeerde afstanden van het brandpunt tot de raaklijnen der kegelsneden als middellijnen. De cirkels blijven bij de omkeering cirkels en hebben tot voerstralen de pas vermelde middellijnen. Dezelfde redencring is toepasselijk op de parabola, omdat daarbij de rechte lijn bij de omkeering in eenen cirkel overgaat. In elk geval zijn wij dus gerechtigd te besluiten tot de stelling in de voorgaande § vermeld.

§ 6. De quadratuur van onze krommen laat zich gemakkelijk ten uitvoer brengen door de integratie van de formule $\int \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, waarin

$$r^2 = m^2 + n^2 \cos^2 \varphi + 2mn \cos \varphi$$

is. Wij hebben dan voor den inhoud:

$$I = \frac{1}{2} \int (m^2 + n^2 \cos^2 \varphi + 2mn \cos \varphi) d\varphi$$

of
$$I = \frac{1}{2} m^2 \varphi + \frac{1}{4} n^2 \varphi + mn \sin \varphi + \frac{1}{4} n^2 \sin \varphi \cos \varphi + C.$$

De grenzen gelijk 0 en $\frac{\pi}{2}$ stellende, verkrijgen wij voor de helft van den inhoud:

$$I = \frac{1}{8} (n^2 + 2m^2) \pi.$$

Wij merken hierbij op, dat deze halve inhoud voor de omgekeerde hyperbola (fig. 14) uit twee stukken (CDE en CBA), ter weerszijde van CE gelegen, bestaat.

§ 7. De rectificatie der circulaire conchoïden geschiedt niet zoo gemakkelijk. Wij verkrijgen hier voor de lengte de formule:

$$S = \int d\varphi \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \cos \varphi)}.$$

Door $\cos. \varphi = x$ te stellen laat deze integraal zich brengen onder den vorm :

$$S = - a \int \frac{\sqrt{(b + x)}}{\sqrt{(1 - x^2)}} dx,$$

waarin a en b van m en n afhankelijke constanten zijn. Men ziet, dat deze integratie niet dan door ontwikkeling in eene reeks ten uitvoer gebragt kan worden.

In het bijzondere geval van de omgekeerde parabola echter heeft men:

$$S = \int d\varphi \sqrt{2n^2 (1 + \cos. \varphi)} = 4n \int \cos. \frac{1}{2} \varphi d \frac{1}{2} \varphi$$

of
$$S = 4n \sin. \frac{1}{2} \varphi + C.$$

De halve lengte dezer omgekeerde kromme is dus :

$$S = n \pi.$$

§ 8. Naar gelang $m > =$ of $< n$ is, zal de circulaire conchoïde eene omgekeerde ellips, parabola of hyperbola zijn. (*) Laat ons thans nagaan, hoe men bij de constructie door neêrlating van loodlijnen en bij die door omhulling de pool ten opzichte van den cirkel moet plaatsen om deze verschillende krommen te verkrijgen.

De omgekeerden, in vergelijking (1) van § 3 bevat, kunnen, zoo als gebleken is, beschouwd worden als ontstaan te zijn door neêrlating van loodlijnen op de raaklijnen der cirkels, door vergelijking (4) van § 3 voorgesteld. Brengen wij deze nu onder den vorm:

$$(x - n)^2 + y^2 = m^2,$$

zoo zien wij onmiddellijk, dat men de omgekeerde ellips, parabola of hyperbola verkrijgt door de pool achtereenvolgens binnen, op of buiten den omtrek des cirkels te plaatsen.

(*) Deze krommen zijn voorgesteld door fig. 12, 13 en 14.

§ 9. Wij zullen onze algemeene beschouwingen besluiten met een onderzoek in het werk te stellen naar de bijzondere punten onzer krommen. Gaan wij eerst na, of zij buigpunten hebben.

Zooals bekend is, zijn de analytische kenmerken van de aanwezigheid van een buigpunt, dat de tweede afgeleide $f''(x) = 0$ of ∞ is en $f''(x+h)$ en $f''(x-h)$, h eene oneindig kleine grootte zijnde, in teeken verschillen. Daar de beschouwing van de vergelijking in het regthoekige coördinaat-stelsel zeer omslagtig zou worden, is het verkieselijk voor ons doel van de polaire vergelijking

$$r = m + n \cos. \varphi \dots \dots \dots (1)$$

gebruik te maken.

Dewijl

$$x = r \cos. \varphi \text{ en } y = r \sin. \varphi$$

is, zijn y en x als functien van φ te beschouwen en kan men door de bekende formule

$$f''(x) = \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{dx^3} \dots \dots \dots (2)$$

de tweede afgeleide van y ten opzichte van x , met inachtneming van vergelijking (1), in functie van de onafhankelijk veranderlijke φ uitdrukken. Te dien einde hebben wij in vergelijking (2) te substituëren:

$$dx = dr \cos. \varphi - r \sin. \varphi \, d\varphi,$$

$$dy = dr \sin. \varphi + r \cos. \varphi \, d\varphi,$$

$$d^2x = d^2r \cos. \varphi - 2 \, dr \, d\varphi \sin. \varphi - r \cos. \varphi \, d\varphi^2,$$

$$d^2y = d^2r \sin. \varphi + 2 \, dr \, d\varphi \cos. \varphi - r \sin. \varphi \, d\varphi^2,$$

waardoor wij verkrijgen:

$$f''(x) = \frac{\sin.^2 \varphi (2n \cos. \varphi + m) (4n \cos. \varphi + m)}{-\sin. \varphi (2n \cos. \varphi + m)} + \frac{(n \sin.^2 \varphi - n \cos.^2 \varphi - m \cos. \varphi)(2n \sin.^2 \varphi - 2n \cos.^2 \varphi - m \cos. \varphi)}{-\sin. \varphi (2n \cos. \varphi + m)} \quad (3).$$

Na substitutie van $m = \frac{a^2}{p}$ en $n = \frac{a^2 e}{p}$ en eenige herleidingen vindt men hiervoor:

$$f''(x) = -\frac{a^2}{p} \left(\frac{1 + 2e^2 + 3e \cos. \varphi}{\sin. \varphi (2e \cos. \varphi + 1)} \right) \quad (4).$$

Bij onderzoek blijkt, dat bij de waarden van φ , welke den noemer nul maken, geene buigpunten behooren. Wij hebben dus slechts na te gaan, of dit wèl het geval is voor die waarden van φ , welke den teller nul maken. Hieraan wordt voldaan door

$$\cos. \varphi = -\frac{1 + 2e^2}{3e} \dots \dots \dots (5)$$

te stellen.

Daar $\cos. \varphi < 1$ en > -1 moet zijn, zullen de grenzen van e 1 en $\frac{1}{2}$ zijn, en zullen dus die omgekeerde ellipsen alleen, wier excentriciteit grooter dan $\frac{1}{2}$ is, buigpunten kunnen opleveren. Onderzoeken wij nu vergelijking (4) verder door daarin voor $\cos. \varphi$ te substituëren $\left(h - \frac{1 + 2e^2}{3e} \right)$, h eene oneindig kleine grootheid zijnde. Zij wordt dan:

$$f''(x) = -\frac{a^2}{p} \left\{ \frac{1 + 2e^2 + 3e \left(h - \frac{1 + 2e^2}{3e} \right)}{\sqrt{1 - \left(h - \frac{1 + 2e^2}{3e} \right)^2} \left\{ 2e \left(h - \frac{1 + 2e^2}{3e} \right) + 1 \right\}} \right\}$$

Wij zien, dat de teller van teeken verwisselt met h , terwijl de noemer hetzelfde teeken behoudt. De bedoelde om-

gekeerde ellipsen hebben dus buigpunten en wel twee, welke, uit hoofde van de symmetrie van de figuur ten opzichte van de as der x , symmetrisch met betrekking tot deze gelegen zijn.

§ 10. De vergelijking in het regthoekige stelsel,

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - nx)^2 - m^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (1),$$

levert ons een geschikt uitgangspunt tot het zoeken van de veelvoudige punten. Het bestaan van deze vereischt, dat

$$\frac{dF}{dx} = 2(x^2 + y^2 - nx)(2x - n) - 2m^2x = 0$$

en

$$\frac{dF}{dy} = (x^2 + y^2 - nx)4y - 2m^2y = 0$$

wordt. Hieraan wordt voldaan door $x = 0$ en $y = 0$ te stellen. (*)

De bepaling van de waarden van $\frac{dy}{dx}$ geschiedt door de vergelijking:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2 \frac{d^2F}{dx dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (2).$$

In ons geval hebben wij met inachtneming van de gevondene waarden $x = 0$ en $y = 0$:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 4(x^2 + y^2 - nx) + 2(2x - n)^2 - 2m^2 = 2n^2 - 2m^2,$$

$$\frac{d^2F}{dx dy} = (2x - n)4y = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dy^2} = 4(x^2 + y^2 - nx) + 8y^2 - 2m^2 = -2m^2,$$

en na substitutie van deze in vergelijking (2):

(*) Dit was te voorzien, daar er bij het tot stand komen van verg. (1) eene vermenigvuldiging met $(x^2 + y^2)^2$ heeft plaats gehad. Op het verder onderzoek heeft dit echter geen invloed.

$$(n^2 - m^2) - m^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

of

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{m^2}}.$$

Deze wortelgrootheid is bestaanbaar voor de omgekeerde parabola en hyperbola, weshalve deze ieder een veelvoudig punt hebben. Bij de eerstgenoemde kromme echter wordt dit punt tevens keerpunt, daar beide waarden van $\frac{dy}{dx}$ dan gelijk nul zijn. Hieruit volgt, dat de gemeenschappelijke raaklijn met de as der x zamenvalt.

§ 11. Geven wij ten slotte nog eenige opmerkingen over de omgekeerde parabola. Zij is dezelfde kromme, die door Castilliani (*Phil. trans.* 1741) Cardioïde genoemd is en die door Cramer (*Analyse des lignes courbes*) beschouwd is als eene epicycloïde, van welke de voortbrengende en de rigtende cirkel denzelfden straal hebben. Hiervan laten wij het betoog volgen.

Laat DPS (fig. 15) de cirkel zijn, die over den cirkel NCP rolt, en het punt P, gelegen op de verbindingslijn van de beide middelpunten, het beschrijvende punt. Is nu D'RM een stand van DPS op een gegeven oogenblik en M daarop de plaats van P, dan zal de lijn PM, die den cirkel CPN in N snijdt, evenwijdig zijn aan de lijn CD', welke de beide middelpunten vereenigt. Hieruit volgt klaarblijkelijk, dat MN gelijk is aan de middellijn van ieder der genoemde cirkels. De epicycloïde, door de punten M bepaald, is dus niets anders, dan de omgekeerde parabola.

HOOFDSTUK IV.



Lemniscaten.



§ 1. Nemen wij de algemeene vergelijking der kegelsneden,

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \quad . \quad . \quad (1),$$

als uitgangspunt, zoo is, gelijk wij gezien hebben, die der omgekeerde krommen:

$$a^4(Ax^2 + By^2) + 2a^2(Cx + Dy)(x^2 + y^2) + E(x^2 + y^2)^2 = 0 \quad (2).$$

Overeenkomstig ons vroeger gemeld plan van behandeling zullen wij thans overgaan tot de beschouwing der krommen, die door omkeering der kegelsneden ontstaan, als de pool in het middelpunt geplaatst is. Hierbij kan uit den aard der zaak slechts sprake zijn van de omgekeerde ellips en hyperbola.

Alsdan wordt de vergelijking (1)

$$Ax^2 + By^2 + E = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

en de laatstvermelde (2)

$$a^4(Ax^2 + By^2) + E(x^2 + y^2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

In de eerste plaats merken wij hierbij op, dat de waarden $x = 0$ en $y = 0$ hieraan voldoen. Dit punt is de pool

zelve en kan, daar geene van de voerstralen der ellips bij omkeering nul wordt, onmogelijk aan de omgekeerde van deze eigen zijn. Dit laat zich daaruit verklaren, gelijk wij vroeger gezien hebben, dat reeds in vergelijking (2) een factor $(x^2 + y^2)^2$ is ingevoerd, welke zich eveneens in vergelijking (4) bevindt. Deze wordt daardoor te algemeen en bevat behalve de twee omgekeerden nog een geïsoleerd punt voor de omgekeerde ellips. Voor het geval van de omgekeerde hyperbola is de vergelijking geheel juist; want het middelpunt moet een punt der omgekeerde kromme zijn ten gevolge van het omkeeren van de oneindige voerstralen der oorspronkelijke.

Vervolgens blijkt zoowel uit vergelijking (4) als ook uit de ligging van de coördinaat-assen in de oorspronkelijke krommen, dat de omgekeerden symmetrisch moeten zijn ten opzichte van de assen der x en der y .

§ 2. Welke zijn nu de kegelsneden, die door de methode door neêrlating van loodlijnen de omgekeerde ellips en hyperbola geven?

Op overeenkomstige wijze als in § 3 van Hoofdstuk III te werk gaande vinden wij, dat in de meer vermelde vergelijking,

$$AB a^4 + 2a^2 (BCx + ADy) + (BE - D^2) x^2 + 2CD xy + (AE - C^2) y^2 = 0 \quad (1),$$

$C = 0$ en $D = 0$ gesteld moet worden. Zij neemt dan den eenvoudigen vorm

$$Bx^2 + Ay^2 + \frac{AB a^4}{E} = 0 \quad (2)$$

aan.

Door neêrlating van loodlijnen uit het middelpunt op de

raaklijnen eener ellips en hyperbola verkrijgen wij dus hare omgekeerden.

De krommen, voorgesteld door de vergelijking (3) van de voorgaande § en de laatstvermelde dezer §, hebben hetzelfde middelpunt en ook dezelfde rigting der assen, terwijl de grootte van deze in 't algemeen verschilt, zooals uit de constanten blijkt.

Opmerklijk is het, dat, wanneer de vergelijkingen (3) van § 1 en (2) van deze § twee hyperbola's voorstellen, hare asymptoten hoeken met de assen maken, die elkanders complementen zijn. Immers wij hebben voor de asymptoten van de beide krommen de uitdrukkingen:

$$y = \pm \sqrt{-\frac{A}{B}x} \text{ en } y = \pm \sqrt{-\frac{B}{A}x}.$$

De tangenten van de hoeken, welke zij met de as der x maken, zijn dus $\pm \sqrt{-\frac{A}{B}}$ en $\pm \sqrt{-\frac{B}{A}}$ en geven een product = 1.

§ 3. Wanneer $A = -B$ is, is de oorspronkelijke kromme eene gelijkzijdige hyperbola. De omgekeerden zijn in dit geval begrepen in de vergelijking:

$$(x^2 + y^2)^2 = C(x^2 - y^2),$$

welke eene lemniscaat voorstelt. (*)

Deze kromme ontstaat dus uit de gelijkzijdige hyperbola door regtstreeksche omkeering en, daar voor $A = -B$ vergelijking (2) der voorgaande § ook eene gelijkzijdige hyperbola voorstelt, tevens door neêrlating van loodlijnen. De pool is hierbij in het middelpunt geplaatst.

(*) Om deze reden zullen wij onze tweede afdeeling van omgekeerden in 't algemeen lemniscaten noemen.

§ 4. Ten gevolge van de identiteit van de formules, gevonden door de methode door neêrlating van loodlijnen en die van omhulling, moet deze gelijksoortige uitkomsten leveren. Zonder de daarvoor gegevene bewijsvoering voor ons bijzonder geval te herhalen, mogen wij besluiten, dat, als het middelpunt de pool is, de omhullende van de cirkels, beschreven op de voerstralen eener ellips of hyperbola als middellijnen, eene omgekeerde ellips of hyperbola is, en dat voor de gelijkzijdige hyperbola de omhullende de gewone lemniscaat is.

§ 5. Het bestaan van een veelvoudig punt vereischt, dat

$$F(x,y) = a^4 (\Delta x^2 + B y^2) + E (x^2 + y^2)^2 = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} = 2\Delta a^4 x + 4Ex (x^2 + y^2) = 0$$

en $\frac{dF}{dy} = 2Ba^4 y + 4Ey (x^2 + y^2) = 0$

wordt.

Hieraan wordt voldaan door $x=0$ en $y=0$ te stellen. Deze waarden van x en y substituërende in

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2\Delta a^4 + 4E(x^2 + y^2) + 8Ex^2,$$

$$\frac{d^2F}{dy^2} = 2Ba^4 + 4E(x^2 + y^2) + 8Ey^2$$

en $\frac{d^2F}{dx dy} = 8Exy,$

verkrijgt men ter bepaling van $\frac{dy}{dx}$ de vergelijking:

$$A + B \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

waaruit volgt :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{A}{B}} \dots \dots \dots (1).$$

Daar voor de ellips A en B hetzelfde teeken hebben, wordt deze waarde van $\frac{dy}{dx}$ voor hare omgekeerde imaginair. Bij de hyperbola daarentegen hebben A en B verschillende teekens, weshalve alleen de omgekeerde hyperbola een veelvoudig punt heeft.

Ten opzichte van de asymptoten volgt hieruit verder nog, dat zij raaklijnen zijn aan de omgekeerde kromme. Dit blijkt onmiddellijk daaruit, dat de waarde van de tangens (1) dezelfde is, als die van de tangens van den hoek der asymptoten met de as der x.

§ 6. Voor de quadratuur maken wij ook hier gebruik van de polaire vergelijking. Deze is :

$$a^4 (A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) + Er^2 = 0.$$

Ter bepaling van den inhoud hebben wij dus de formule

$$I = -\frac{1}{2} \frac{a^4}{E} \int (A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) d\varphi$$

te integreren. Deze bewerking geeft ons :

$$I = -\frac{1}{4} \frac{a^4}{E} (A + B) \varphi - \frac{1}{4} \frac{a^4}{E} (A - B) \sin. \varphi \cos. \varphi.$$

Voor den inhoud van de gewone lemniscaat vinden wij hieruit :

$$I = -\frac{A}{E} a^4.$$

HOOFDSTUK V.



Cissoïden. Verband der beschouwde omgekeerden. Focale.



§ 1. De krommen, welke door de omkeering eener kegelsnede ontstaan, welk punt van den omtrek ook de pool zij, zijn zoo vele in getal en leiden daarbij tot zulke ingewikkelde vergelijkingen, dat ons bestek niet toelaat ze afzonderlijk te behandelen. Daarom beperken wij de beschouwingen over deze tot slechts twee gevallen. Vooreerst zullen wij de pool in den top der kegelsnede plaatsen en vervolgens op eenig punt van den omtrek eener gelijkzijdige hyperbola.

Nemen wij te dien einde de vergelijking der kegelsnede in het rechthoekige coördinaat-stelsel voor den top als oorsprong,

$$y^2 = 2m x - nx^2 \quad (1),$$

welke de ellips, parabola of hyperbola voorstelt, naar mate n positief, nul of negatief is.

De polaire vergelijking vinden wij door de bekende substitutie van:

$$x = r \cos. \varphi \text{ en } y = r \sin. \varphi.$$

Zij is:

$$(n \cos.^2 \varphi + \sin.^2 \varphi) r - 2m \cos. \varphi = 0 \quad . \quad . \quad (2).$$

Door hierin r door $\frac{a^2}{r'}$ te vervangen verkrijgen wij voor onze omgekeerden in het polaire stelsel de uitdrukking:

$$r' = \frac{a^2 (n \cos.^2 \varphi + \sin.^2 \varphi)}{2m \cos. \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

en in het regthoekige

$$2mx (x^2 + y^2) = a^2 (n x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Stellen wij hierin $n = 0$, zoo neemt zij den volgenden vorm aan:

$$x^3 = \left(\frac{a^2}{2m} - x \right) y^2.$$

Deze is de vergelijking van de cissoïde van Diocles, weshalve wij de krommen begrepen in vergelijking (4) cissoïden zullen noemen en wel elliptische, parabolische of hyperbolische, naar mate zij door omkeering van de ellips enz. ontstaan zijn. Deze drie soorten van omgekeerden zijn voorgesteld door fig. 16, 17 en 18.

§ 2. De polaire vergelijking (3) laat zich brengen onder den vorm:

$$r = \frac{a^2}{2m \cos. \varphi} - \frac{a^2 (1 - n)}{2m} \cos. \varphi \quad . \quad . \quad (1),$$

en geeft alsdan aanleiding tot eene eenvoudige constructie voor de cissoïden.

Men neme (fig. 19) eene lijn $AB = \frac{a^2}{2m}$ en trekke door B eene lijn BK loodregt op AB. Vereenigt men nu A met eenig punt K van de lijn BK, zoo is:

$$AK = \frac{a^2}{2m \cos \varphi} = \frac{a^2}{2m \cos \varphi}.$$

Nemen wij vervolgens op AB van A af eene lijn $AC = \frac{a^2(1-n)}{2m}$ en beschrijven wij hierop als middellijn den cirkel AQC. Deze snijdt AK in het punt L, en men heeft:

$$AL = \frac{a^2(1-n)}{2m} \cos \varphi = \frac{a^2(1-n)}{2m} \cos \varphi.$$

Deze waarden van $\frac{a^2(1-n)}{2m} \cos \varphi$ en $\frac{a^2}{2m \cos \varphi}$ in de vergelijking (1) substituërende, verkrijgt men:

$$r = AK - AL = KL.$$

Op deze wijze laat zich elke voerstraal bepalen. Wij hebben dus voor de constructie der cissoïden niets meer noodig, dan van het punt A af op de lijnen AK de voerstralen KL uit te zetten.

Aanmerking. Deze methode is volstrekt algemeen en bevat dus ook eene constructie voor de cissoïde van Diocles in zich.

Diocles zelf gaf voor deze de volgende: op eene willekeurige lijn AB (fig. 20) als middellijn beschrijve men eenen cirkel ACB en trekke eene lijn CC', loodregt op AB en gaande door het middelpunt. Ter weerszijden van het snijpunt C van deze met den cirkelomtrek zette men gelijke bogen CD en CE uit. Eindelijk trekke men de koorden AD, AE en de loodlijnen DD', EE'; dan zullen de snijpunten P en Q van dezen en hare verlengden punten der cissoïde zijn.

Wij kunnen niet nalaten nog de geniale constructie, die Newton (*Arith. univ. de aequationum constructione lineari*,

p. 231) gegeven heeft, te vermelden. Hij laat dezelfde cissoïde door eene beweging ontstaan.

Zij AB (fig. 21) eene regte lijn en MF eene onbepaalde loodlijn, gaande door het midden M van AB. Men neme op het verlengde van BA een punt C, zoodanig, dat $MC = AB$ is. CGF is een beweegbare regte hoek, waarvan $FG = AB$ is. Bij de beweging beschrijft het midden H van FG de cissoïde.

Wij kunnen volstaan met de beschrijving van beide constructiën, daar de vergelijking der kromme zich uit beide gemakkelijk laat vinden en dezelfde blijkt te zijn, als de reeds vermelde van de omgekeerde parabola.

§ 3. Gaan wij thans na, van welken aard de omhullende van de lijnen is, die loodrecht staan op de voerstralen der cissoïde en door hunne uiteinden gaan.

Wij hebben vroeger bewezen, dat zij in 't algemeen eene kegelsnede is, begrepen in de vergelijking:

$$ABa^4 + 2a^2(BCx + ADy) + (BE - D^2)x^2 + 2CDxy + (AE - C^2)y^2 = 0 \dots \dots (1).$$

Het is dus slechts noodig de constanten van deze te bepalen voor het geval, dat wij thans beschouwen, d.i. als de oorspronkelijke kegelsnede voorgesteld wordt door de vergelijking:

$$nx^2 + y^2 - 2mx = 0.$$

Wij hebben derhalve:

$$A = n, B = 1, C = -m \text{ en } D = E = 0,$$

weshalve wij voor de vergelijking (1) de uitdrukking

$$na^4 - 2a^2mx - m^2y^2 = 0,$$

of

$$y^2 = -\frac{2a^2}{m} \left(x - \frac{na^2}{2m} \right)$$

verkrijgen.

Deze stelt eene parabola voor, welker top tot coördinaten heeft $y = 0$ en $x = \frac{na^2}{2m}$. Daar de coëfficiënt van x negatief is, kunnen alleen negatieve en die positieve waarden van x , welke $< \frac{na^2}{2m}$ zijn, bestaanbare waarden voor y geven.

De as der parabola is dus in tegengestelde rigting van die der oorspronkelijke kegelsnede gelegen. Tevens ziet men, dat de pool binnen, op of buiten de parabola gelegen is, naar mate de omgekeerde kromme de elliptische, de parabolische of hyperbolische cissoïde is.

Bij de circulaire conchoïden en de lemniscaten hebben wij reeds opgemerkt, dat de methode door omhulling tot dezelfde uitkomst leidt, als die door neêrlating van loodlijnen. Het is om die reden overbodig in ons bijzonder geval wederom in eene bewijsvoering van dezelfde stelling te treden.

§ 4. De cissoïden hebben, daar de pool op den omtrek gelegen is, twee in 't oneindige voortloopende takken en kunnen dus asymptoten hebben. Stellen wij daarom in dit opzigt een onderzoek in het werk op vergelijking (4) van § 1.

De homogeniteit van elk harer leden valt terstond in het oog. Zij laat zich dus brengen onder den vorm:

$$y^3 \left(2m \frac{x^3}{y^3} + 2m \frac{x}{y} \right) - y^2 \left(a^2 n \frac{x^2}{y^2} + a^2 \right) = 0 \quad (1).$$

Daar de analytische uitdrukking voor de asymptoten

$$y = kx + l \quad (2)$$

is, hebben wij slechts de constanten k en l te bepalen met behulp van de vergelijking (1).

Te dien einde stellen wij:

$$2m \frac{x^3}{y^3} + 2m \frac{x}{y} = 0,$$

of

$$2m k^3 + 2m k = 0,$$

waaruit volgt:

$$k = 0 \text{ en } k = \pm \sqrt{-1}.$$

Verder is:

$$l = \frac{a^2 n \frac{x^2}{y^2} + a^2}{d \left(2m \frac{x^3}{y^3} + 2m \frac{x}{y} \right)} = \frac{a^2 n k^2 + a^2}{6m k^2 + 2m} \\ d \frac{x}{y}$$

en voor $k = 0$:

$$l = \frac{a^2}{2m}.$$

Er is dus eene asymptoot, en hare vergelijking is:

$$l = \frac{a^2}{2m} \dots \dots \dots (3),$$

waaruit blijkt, dat zij evenwijdig aan de as der y is.

De lengte van den kromtestraal eener kegelsnede wordt in 't algemeen uitgedrukt door de formule:

$$e = \frac{y^3 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{m^2}.$$

Voor den top heeft men dus:

$$e = m.$$

Wij zien hieruit, dat de omgekeerde middellijn van den kromtecirkel in den top gelijk is aan den afstand van de pool tot de vermelde asymptoot.

Aanmerking. Langs analytischen weg kan men op eene eenvoudige wijze aantoonen, dat ook deze omgekeerden bijzondere punten hebben. Het blijkt bij onderzoek, dat de hyperbolische cissoïde een veelvoudig punt en de parabolische een keerpunt heeft.

§ 5. Over de quadratuur zullen wij kort zijn en alleen de cissoïde van Diocles in dit opzigt beschouwen. Deze berekening is weinig ingewikkeld en geeft voor den inhoud eene uitdrukking, welke in een opmerkelijk verband staat met den inhoud van den cirkel, dien wij gebezigd hebben bij de constructie van de cissoïden (§ 2).

Om de integratie van de formule

$$I = \int_0^x y \, dx = \int_0^x \frac{x \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{p-x}}$$

waarin (fig. 17) $p = \frac{a^2}{2m} =$ de middellijn AB is, ten uitvoer te brengen, schrijven wij deze uitdrukking aldus:

$$I = \int_0^x \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{px-x^2}} = -\int_0^x \sqrt{px-x^2} \, dx + p \int_0^x \frac{x \, dx}{\sqrt{px-x^2}}$$

Den eersten term zullen wij niet integreren. Hij stelt in ons geval blijkbaar het halve cirkelsegment ADE voor. De tweede term laat zich door ontbinding uitdrukken, als volgt:

$$-p \sqrt{px-x^2} + \frac{1}{2} p^2 \frac{dx}{\sqrt{px-x^2}}$$

Nu is:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{px-x^2}} = \text{arc. sin. vers. } \frac{2x}{p},$$

weshalve wij hebben:

$$I = -\int_0^x \sqrt{px-x^2} \, dx - p \sqrt{px-x^2} + \frac{1}{2} p^2 \text{arc. sin. vers. } \frac{2x}{p},$$

en voor de grenzen $x = 0$ en $x = p$:

$$I = \frac{3}{8} \pi p^2.$$

Het dubbele van dezen inhoud stelt de vlakteuitgebreidheid voor, die begrepen is tusschen de cissoïde en de asymptoot, en is dus het drievoud van den inhoud van den cirkel ADB.

§ 6. Hetgeen door ons is bijgebracht over de circulaire conchoïden, de lemniscaten en de cissoïden geeft ons gercede aanleiding in eene onderlinge vergelijking van deze omgekeerde kegelsneden te treden. Beginnen wij met de omgekeerde hyperbola.

Deze was eene circulaire conchoïde met een knoop, eene lemniscaat met een knoop en eene cissoïde met een knoop (fig. 14, 22 en 18), naar mate de pool geplaatst was in het brandpunt, in het middelpunt of in een der toppen. Geeft men aan de pool elken stand in het beloop van de as tusschen het brandpunt en het middelpunt, zoo moeten de opeenvolgende overgangsvormen te voorschijn komen. Gaan wij uit van de conchoïde. Bij deze omvatten de beide knoopen elkander. Hoe meer de pool tot den top nadert, des te grooter worden de beide knoopen. Er is evenwel blijkbaar verschil in de wijze van verandering van beide. De voerstralen toch van den verstverwijderden tak der hyperbola worden alle kleiner, de kleinste knoop zal derhalve in alle rigtingen in uitgestrektheid toenemen. De grootste knoop, welke ontstaat door omkeering van den naastbijgelegen tak, wijzigt zich in een geheel anderen zin, daar sommige voerstralen en wel bepaaldelijk die, welke op de punten in de omgeving van den top betrekking hebben, bij omkeering grooter worden

en alle overige kleiner. Het noodwendig gevolg hiervan is, dat deze knoop uitgerekt wordt in de rigting van de as. Wanneer wij met de verplaatsing van de pool oneindig dicht bij den top gekomen zijn, wordt de buitenste knoop oneindig lang. Zoodra de pool met den top zamenvalt, opent hij zich, en wij zien de niet gesloten cissoïde ontstaan. Verschuiven wij de pool nog verder naar het middelpunt, zoo zal de niet gesloten tak der cissoïde zich onmiddellijk weer beginnen te sluiten, maar in tegengestelden zin komen te liggen. Deze knoop wordt nu steeds korter, terwijl de straks vermelde binnenste knoop in grootte toeneemt. Voor het middelpunt als pool worden beide knopen gelijk, daar beide takken van de hyperbola symmetriek ten opzichte van dit punt gelegen zijn.

Tot gelijksoortige opmerkingen geeft de onderlinge vergelijking van de krommen, die ontstaan door omkeering van de ellips, aanleiding, als de pool alle punten van de hoofdas doorloopt van het brandpunt af tot den top. Voor het brandpunt als pool is de omgekeerde eene circulaire conchoïde, gelijk wij gezien hebben. Deze is gesloten en als het ware ingedrukt aan die zijde, welke naar den verst verwijderden top ziet. Bij de verplaatsing van de pool naar den naastbij gelegenen top blijft dit bestaan, terwijl dit gedeelte te gelijk den top nadert. Het tegenovergestelde deel der conchoïde wordt bij de verschuiving al meer en meer uitgerekt. Zoodra de pool op een oneindig kleinen afstand van den top gekomen is, wordt de as op een oneindig grooten afstand door de kromme gesneden. Op het oogenblik van den overgang in den top scheidt de kromme zich plotseling in twee in 't oneindige voortloopende takken, en de elliptische cissoïde treedt te voorschijn. Als de pool buiten den top komt op het ver-

lengde van de as, worden die beide takken als het ware omgeslagen en sluiten zij zich weder.

Na al het voorafgaande achten wij het overbodig nog eens dezelfde redenering op de omgekeerde parabola's toe te passen en gaan derhalve over tot de beschouwing van de omgekeerde gelijkzijdige hyperbola.

§ 7. De algemeene vergelijking van de gelijkzijdige hyperbola is:

$$x^2 - y^2 + 2Cx + 2Dy = 0 \dots (1),$$

en de omgekeerde van deze, die wij om later te vermelden reden focale zullen noemen, is begrepen in de vergelijking:

$$a^2 (x^2 - y^2) + 2(Cx + Dy)(x^2 + y^2) = 0 \dots (2),$$

welke verkregen wordt door in de algemeene vergelijking der omgekeerden $A = 1$, $B = -1$ en $E = 0$ te stellen.

Het beloop van deze krommen (zie fig. 23) laat zich ook zonder discussie van hare vergelijking gemakkelijk aanwijzen. Het zijn in het algemeen lijnen, die op de hyperbolische cissoïde gelijken. Alle bestaan zij uit een knoop en twee in tegengestelden zin in 't oneindige voortlopende takken. Deze ontstaan door omkeering van dat deel der hyperbola, waarop de pool gelegen is. De knoop daarentegen bestaat uit eene vereeniging van de uiteinden der omgekeerde voerstralen van den anderen tak der hyperbola.

Ten gevolge van deze gedaante der focale is het te verwachten, dat zij een of meer asymptoten heeft. Wij zullen de vergelijking (2) in dit opzigt gaan onderzoeken.

Zij wederom de vergelijking der te zoeken asymptoten

$$y = kx + l,$$

zoo hebben wij ter bepaling van k en l de formules:

$$2(C + Dk)(1 + k^2) = 0$$

en

$$1 = - \frac{a^2(1 - k^2)}{4k(C + Dk) + 2D(1 + k^2)} .$$

De bestaanbare waarden voor k en l zijn dus:

$$k = - \frac{C}{D} \text{ en } l = - \frac{a^2(D^2 - C^2)}{2D(D^2 + C^2)} .$$

De focale heeft dus slechts ééne asymptoot.

§ 8. Wanneer wij de redenering, die wij in § 2 van Hoofdstuk II gegeven hebben, hier gaan toepassen, vinden wij voor de omhullende van de loodlijnen, op de voerstralen eener focale opgericht en door hunne uiteinden gaande, de vergelijking:

$$a^4 + 2a^2(Cx - Dy) + (Dx - Cy)^2 = 0 \quad . \quad . \quad (1).$$

Deze is de uitdrukking eener parabola, hetwelk men inziet door op te merken, dat het product der coëfficiënten van x^2 en y^2 juist het vierkant is van den halven coëfficiënt van xy . Het valt niet zoo terstond in het oog, hoe de parabola ten opzichte van de pool geplaatst is. Het is evenwel van belang dit te weten. Gaan wij derhalve na, of de pool buiten, binnen of op de kromme gelegen is. De raaklijnen, die door de pool gaan, geven ons een geschikt middel aan de hand om hierover te beslissen. De coördinaten van de raakpunten toch wijzen dit als van zelf aan. Vindt men, dat de waarden van x en y voor beide raakpunten bestaanbaar zijn, zoo ligt de pool buiten de parabola, verkrijgt men onbestaanbare waarden, dan ligt zij er binnen. Bestaat er eindelijk slechts een raakpunt, dan ligt zij op den omtrek.

Laat nu de vergelijking

$$y = px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

eene lijn voorstellen, die door de pool gaat, en beschouwen wij haar ter bepaling van de coördinaten van het raakpunt in verband met de vergelijking (1), zoo verkrijgen wij:

$$a^4 + 2a^2(C - Dp)x + (D - Cp)^2 x^2 = 0.$$

De waarden van x , die hierin opgesloten zijn, worden dezelfde, in geval de vergelijking (2) eene raaklijn voorstelt. Alsdan moet derhalve

$$(D - Cp)^2 = (C - Dp)^2$$

zijn, waaruit volgt:

$$p = \pm 1.$$

De coördinaten der raakpunten zijn dus bestaansbare grootheden. Er zijn twee raaklijnen, weshalve de pool buiten de parabola gelegen is. Buitendien maakt elk der beide raaklijnen een hoek van 45° met de as der x ; zij staan derhalve loodrecht op elkander. Daar dit alleen plaats heeft, als het punt, waaruit de raaklijnen getrokken worden, op de directrix ligt (*), is ook de pool steeds daarop gelegen. De

(*) Het betoog hiervan is aldus: de vergelijking eener parabola is:

$$y^2 = 2px,$$

wanneer de oorsprong in den top ligt en de hoofdas de as der x is; die van de raaklijn in het punt (x, y) , welke door het punt (a, b) gaat, is:

$$y_1 - b = \frac{p}{y}(x_1 - a).$$

Uit dezen verkrijgt men voor de ordinaten der raakpunten:

$$y = b \pm \sqrt{(b^2 - 2pa)}.$$

De beide raaklijnen zijn dus begrepen in de vergelijking:

$$y_1 = \frac{p}{b \pm \sqrt{(b^2 - 2pa)}}(x_1 - a).$$

Zullen deze eenen rechten hoek met elkander maken, zoo moet $a = -\frac{p}{2}$ zijn, terwijl b onbepaald blijft, d. i. het punt (a, b) moet op de directrix gelegen zijn.

stand der parabola blijft echter nog onbepaald wegens de twee willekeurige constanten C en D.

Wij mogen uit het voorgaande tot deze stelling besluiten: wanneer men uit eenig punt van de directrix eener parabola loodlijnen neêrlaat op hare raaklijnen, dan liggen de voetpunten der loodlijnen op eene focale.

In het bijzondere geval, dat de pool het doorsnijdingspunt is van de as en de directrix, wordt de focale de hyperbolische cissoïde.

§ 9. De gevondene formules geven ons geene gemakkelijk uitvoerbare constructie aan de hand. In dit opzigt zijn zij dus niet belangrijk voor ons. De toepassing van de beginsels van omkeering zal ons daartoe langs een meer eenvoudigen weg leiden.

Wij nemen tot grondslag de volgende constructie der gelijkzijdige hyperbola: men deele de lijn PP' (fig. 24) door de lijn KAL regthoekig midden door en trekke eene lijn FG , die met PP' eenen willekeurigen hoek maakt. Uit eenig punt K van KAL beschrijve men verder met KP als straal eenen cirkel PQP' en late uit K eene loodlijn KM op FG neêr. De punten M en M' , waarin zij en haar verlengde den omtrek snijden, behooren tot eene gelijkzijdige hyperbola, waarvan PP' eene middellijn, FG eene raaklijn in het punt P en A het middelpunt is (*).

(*) Wij laten het analytische bewijs hiervan volgen.

Stellen wij (fig. 24) $PP' = 2a$ en dus $AP = a$ en $AK = c$, dan wordt de cirkel PQP' door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2cy = a^2$$

uitgedrukt, als AP en AK de assen der x en der y zijn.

De vergelijking van de loodlijn KM is:

Wij keeren nu, het punt P als pool beschouwende, de verschillende deelen van fig. 24 om en nemen daarbij PP' als constante van omkeering aan. Het punt P' blijft op zijne plaats en de cirkel PQP' wordt eene regte lijn, gaande door P' en het omgekeerde punt Q. De loodlijn KM wordt een cirkel, die door P gaat en de omgekeerde halve koorde PE tot middellijn of de omgekeerde koorde PQ tot straal heeft. Het omgekeerde punt van Q is derhalve het middelpunt van dezen cirkel. Deze opmerkingen zijn voldoende om ons eene constructie (PP' steeds gelijk de constante van omkeering zijnde) te verschaffen. Zij komt hierop neêr: men neme op FG (fig. 25) een willekeurig punt Q, beschrijve hieruit als middelpunt een cirkel PMM' met PQ als straal en trekke door de punten P' en Q eene lijn $P'M$. De snijpunten M en M' zullen punten der focale zijn.

Men kan hierbij het beschrijven van den cirkel PMM' vermijden. Het is voldoende door P' en elk punt Q van FG eene onbepaalde lijn $P'M$ te trekken en daarop van Q af gelijke stukken $QM, QM' = PQ$ uit te zetten.

§ 10. Wanneer men (fig. 24) aan de cirkels PQP' enz. raaklijnen trekt evenwijdig aan FG , dan zijn de raakpunten

$$y - c = bx.$$

De eliminatie van de willekeurige constante uit deze beiden geeft voor de plaats van de punten M, M' enz. de uitdrukking:

$$x^2 - y^2 + 2bxy = a^2.$$

Wij erkennen hierin de gelijkzijdige hyperbola met betrekking tot een regthoekig stelsel, welks oorsprong met het middelpunt zamenvalt. Buiten dien gaat zij door de punten P en P' , want $x = \pm a$ en $y = 0$ voldoen aan de vergelijking. Voor het punt P is $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{b}$. De raaklijn in P staat dus loodrecht op MM' en valt zamen met FG .

klaarblijkelijk punten van de gelijkzijdige hyperbola. Dit in acht nemende kan men tot eene andere hoewel niet zoo gemakkelijk uitvoerbare constructie voor de focale geraken. Gaan wij even na, wat er zoo al ontstaat bij de omkeering van de verschillende deelen dezer figuur. De raaklijnen worden cirkels, die door de pool P gaan en welker middelpunten gelegen zijn op de loodlijn uit P op vermelde raaklijnen neêrgelaten. De cirkels PQP' worden raaklijnen aan de zoo even genoemde cirkels en wel in de omgekeerde punten van M, M' enz. Dit geeft aanleiding tot deze constructie.

Zij P (fig. 26) een willekeurig punt, PQR enz. eene reeks van cirkels en KL de lijn der middelpunten. Wanneer wij nu uit het punt P' raaklijnen trekken aan de cirkels PQR enz., dan zal de vereeniging van de raakpunten de focale opleveren.

§ 11. De constructie, die Quetelet gegeven heeft, luidt aldus:

Men neme eenen regten kegel (fig. 27), waarvan ZZ de as en KK en LL twee tegenover elkander liggende generatrices zijn. Door een willekeurig punt A van eene der beide laatste legge men eene reeks van vlakken loodregt op het vlak der drie genoemde lijnen. De doorsneden van deze met het kegelvlak zijn achtereenvolgens een cirkel, eene ellips, eene parabola en eene hyperbola, welker hoofdassen $AC, \Delta MM'$ enz. gelegen zijn in het vlak der lijnen KK en LL . De lijn BM , evenwijdig aan KK getrokken door het middelpunt B , bevat de middelpunten der verschillende kegelsneden, welker brandpunten op afstanden BM enz. ter weerszijden van de punten M op de hoofdassen gelegen zijn. De aaneenschakeling van

deze brandpunten bepaalt eene kromme, die door *Quetelet* focale genoemd is en dezelfde is, als de omgekeerde gelijkzijdige hyperbola.

Om deze identiteit aan te toonen hebben wij slechts te verwijzen naar de constructie van § 9 en er opmerkzaam op te maken, dat de lijnen *AB* en *BM* hier dezelfde beteekenis hebben, als de lijnen *PP'* en *FG* bij de constructie, in § 9 bevat.

HOOFDSTUK VI.



Het meest algemeene geval van omkeering.

§ 1. Aan het einde van onze taak gekomen zullen wij nog even van een zeer algemeen standpunt uit ons onderwerp overzien. Wij zullen daarbij gelegenheid hebben de belangrijkste uitkomsten van ons onderzoek, die in de verschillende Hoofdstukken verspreid liggen, terug te vinden, terwijl wij tevens nog melding zullen maken van eene wijze van wording der omgekeerde kegelsneden, welke veel overeenkomst heeft met die der circulaire conchoïden.

In het voorgaande hebben wij de woorden pool en oorsprong als van dezelfde beteekenis steeds door elkander heen gebruikt. Wij hadden daartoe het regt, daar wij werkelijk oorsprong en pool van omkeering lieten zamenvallen. In het volgende zal dit echter niet altijd plaats vinden en hebben wij beiden dus scherp te onderscheiden.

Gaan wij, na dit weinige voorop gesteld te hebben, tot het meest algemeene geval van omkeering over, waarbij eenig punt (p,q) als pool genomen wordt.

Zij wederom de vergelijking

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \quad (1)$$

ons uitgangspunt. Door hierin x door $x' + p$ en y door $y' + q$ te vervangen verkrijgen wij :

$$Ax'^2 + By'^2 + 2(C + Ap)x' + 2(D + Bq)y' + E + Ap^2 + Bq^2 = 0 \quad (2),$$

d. i. de uitdrukking eener kegelsnede met betrekking tot een stelsel, dat evenwijdig aan het oude verplaatst is en welks oorsprong p en q tot coördinaten heeft.

De omgekeerde van deze heeft, als wij den nieuwen oorsprong als pool beschouwen, tot vergelijking :

$$a^4(Ax'^2 + By'^2) + 2a^2\{(C + Ap)x' + (D + Bq)y'\}(x'^2 + y'^2) + (E + Ap^2 + Bq^2)(x'^2 + y'^2)^2 = 0 \quad (3),$$

welke tot het oude stelsel teruggebracht door substitutie van $x' = x - p$ en $y' = y - q$ wordt :

$$a^4\{A(x-p)^2 + B(y-q)^2\} + 2a^2\{(C + Ap)(x-p) + (D + Bq)(y-q)\}\{(x-p)^2 + (y-q)^2\} + E'\{(x-p)^2 + (y-q)^2\}^2 = 0 \quad (4),$$

waarin korthedshalve $E' = E + Ap^2 + Bq^2$ gesteld is.

Deze laatste vergelijking eindelijk is de meest algemeene voorstelling van de omgekeerden van de kegelsneden, in de vergelijking (1) begrepen, daar het punt (p, q) als pool van omkeering genomen is.

Het ligt voor de hand, dat de methode door neêrlating van loodlijnen en die door omhulling evencens tot dergelijke meer algemeene vergelijkingen zouden kunnen leiden.

§ 2. Uit de vergelijking (4) der voorgaande § kunnen wij die der circulaire conchoiden, der lemniscaten, der cissoïden en der focale terug vinden. Wij moeten alsdan over p en q zoodanig beschikken, dat de pool achtereenvolgens in het brandpunt, in het middelpunt, in den top der kegelsnede of op eenig punt der gelijkzijdige hyperbola komt te liggen,

en den oorsprong eveneens met deze punten laten zamenvallen. Brengen wij deze bewerking voor een paar gevallen ten uitvoer.

De coördinaten van het middelpunt eener kegelsnede zijn :

$$p = -\frac{C}{A} \text{ en } q = -\frac{D}{B}.$$

Deze waarden in vergelijking (4) van § 1 substituërende vinden wij, in aanmerking nemende dat voor het middelpunt als oorsprong $C = D = 0$ wordt :

$$a^4 (Ax^2 + By^2) + E(x^2 + y^2) = 0,$$

d. i. de vergelijking der lemniscaten.

Door voor p en q de coördinaten van den top, welke

$$-\frac{C}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{C^2}{A^2} + \frac{D^2}{AB} - \frac{E}{A}\right)} \text{ en } -\frac{D}{B}$$

zijn, te substituëren en den oorsprong nu met den top te laten zamenvallen, neemt genoemde algemeene vergelijking den volgende vorm aan :

$$a^4 (Ax^2 + By^2) + 2a^2 Cx (x^2 + y^2) = 0.$$

Deze stelt de cissoïden voor.

§ 3. De leer der anharmonische verhoudingen, waarop wij vroeger een tweetal constructiën gegrond hebben, geeft ons een middel aan de hand om te doen zien, dat het eigenaardige van de wijze van ontstaan der circulaire conchoïden voor een deel ook toekomt aan alle omgekeerde kegelsneden; zelfs hebben wij hier slechts op eene zuiver harmonische verhouding te letten.

Laat om dit te bewijzen adb (fig. 28) eene kegelsnede, het punt P de pool en de lijn Pb , die door de pool gaat, eenige snijlijn zijn. De punten c , die harmonisch geconjugeerd zijn met P ten opzichte van de snijpunten a en b , bepalen

de poollijn van P. Wij hebben nu, als wij $Pc = r_2$, $Pa = r_1$ en $Pb = r_3$ stellen, steeds:

$$r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3} \quad \dots \quad (1),$$

waaruit volgt:

$$s'' = \frac{1}{2} (s' + s''') \quad \dots \quad (2),$$

waarin $s'' = \frac{a^2}{r_2}$, $s' = \frac{a^2}{r_1}$ en $s''' = \frac{a^2}{r_3}$ is.

Wij besluiten hieruit, dat de voerstraal van de omgekeerde poollijn steeds het arithmetisch midden is van de beide voerstralen der omgekeerde kegelsnede, welke ook de stand der pool moge zijn. Om deze reden kan men alle omgekeerden op gelijksoortige wijze als de circulaire conchoïden constrüeren.

De polaire vergelijking der omgekeerde kegelsneden leidt tot dezelfde uitkomst. Immers deze is:

$$a^4 (A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) + 2a^2 (C \cos. \varphi + D \sin. \varphi) r + E r^2 = 0 \quad (\S),$$

waaruit volgt:

$$r = - \frac{a^2}{E} (C \cos. \varphi + D \sin. \varphi)$$

$$\pm \sqrt{\left\{ \frac{a^4}{E^2} (C \cos. \varphi + D \sin. \varphi)^2 - \frac{a^4}{E} (A \cos.^2 \varphi + B \sin.^2 \varphi) \right\}} \quad (4).$$

In acht nemende, dat de vergelijking

$$r = - \frac{a^2}{E} (C \cos. \varphi + D \sin. \varphi) \quad \dots \quad (5)$$

de omgekeerde poollijn van den oorsprong voorstelt en dus eenen cirkel, welke door de pool gaat (pool en oorsprong vallen hier weder zamen), zoo zien wij terstond, dat de vergelijkingen (2) en (4) dezer § tot dezelfde gevolgtrekking leiden.

Met het oog op het voorgaande zouden wij het niet

ondoelmatig oordeelen alle omgekeerde kegelsneden circulaire conchoïden te noemen.

§ 4. Wanneer wij den oorsprong in het brandpunt plaatsen en de excentriciteit en den parameter door e en p voorstellen, wordt de vergelijking van den pas vermelden cirkel:

$$r = \frac{a^2 e}{p} \cos. \varphi,$$

en de waarde van hetgeen in vergelijking (4) onder het wortelteeken voorkomt:

$$\frac{a^4}{p^2}.$$

Wij zien dus hier weder de vroeger vermelde constructie van de circulaire conchoïden te voorschijn komen.

Is de oorsprong in het middelpunt geplaatst, zoo is $C = D = 0$, weshalve in dit geval de vergelijking (5) van § 3 den oorsprong voorstelt. Zet men dus ter weerszijden van dit punt stukken uit, welke waarden bepaald worden door het tweede lid van de vergelijking (4) der voorgaande §, zoo ontstaan de lemniscaten, welke, gelijk reeds vroeger gebleken is, symmetrisch zijn ten opzichte van den oorsprong.

Bij de cissoïden en de focale kan geen sprake zijn van de toepassing dezer constructie, daar hare poollijnen, als raaklijnen in de pool, bij omkeering overgaan in cirkels van oneindig grooten straal.



STELLINGEN.

I.

Ten onregte zegt DUHAMEL (Eléments de calcul infinitésimal 2^{de} ed. Tom. I. n^o. 247.): „Lorsque la concavité se change en convexité, $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit changer de signe et, par conséquent, passer par zéro ou l'infini; les points, où s'opère ce changement, se nomment points d'inflexion. Si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est infini, il faudra s'assurer, s'il change de signe en passant par cette valeur.”

II.

De mathematische axiomata zijn denkwenen.

III.

Te regt zegt DURÈGE (Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse): „Die Ansicht von der Unmöglichkeit der imaginären Grössen ist eigentlich von einem Verkennen des Wesens der negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen ausgegangen.”

IV.

In de proefondervindelijke electriciteitsleer behoort aan het woord *spanning* geene andere beteekenis gegeven te worden, dan die van potentiaal in de wiskundige theorie.

V.

De geleiding van een galvanischen stroom door een zamengesteld vocht gaat steeds van electrolyse vergezeld.

VI.

De getalswaarden, verkregen voor de weerstanden, die de zamengestelde vochten aan den galvanischen stroom bieden, verdienen geen vertrouwen.

VII.

Men behoort de temperatuur niet te bepalen naar gelijke vermeerdering, maar naar gelijke verhouding van volumina.

VIII.

Er loopt een ring van asteroïden om de zon, tusschen haar en Mercurius.

IX.

Bij de berekening van de eclipsen, door de ouden waargenomen, moet wel degelijk gelet worden op de verschillende oorzaken, welke de lengte van den dag wijzigen.

X.

De molecule van het ozon bestaat uit drie atomen zuurstof.

XI.

Als desinfecteermiddel moet men chlorkalk boven zwavelzuur-ijzeroxydul stellen.

XII.

Ten onregte zegt MOLESCHOTT (Kreislauf des Lebens, 4te Auflage, p. 246): Zu allen diesen Wärmequellen gesellt sich noch eine sehr wichtige, die Verdichtung des Kohlenstoffs. .

.

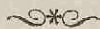
Bei dieser Festlegung ereignet sich die Verdichtung eines luftförmigen Körpers. Gasförmige Kohlensäure und tropfbar flüssiges Wasser verdichten sich zu Stärkmehl und Zellstoff.

XIII.

De mensch heeft reeds in het diluviale tijdperk bestaan.

XIV.

Het lager worden van onze zeeleibezinkingen geeft hoe genaamd geen regt om een algemeen dalen van den Nederlandschen bodom aan te nemen.



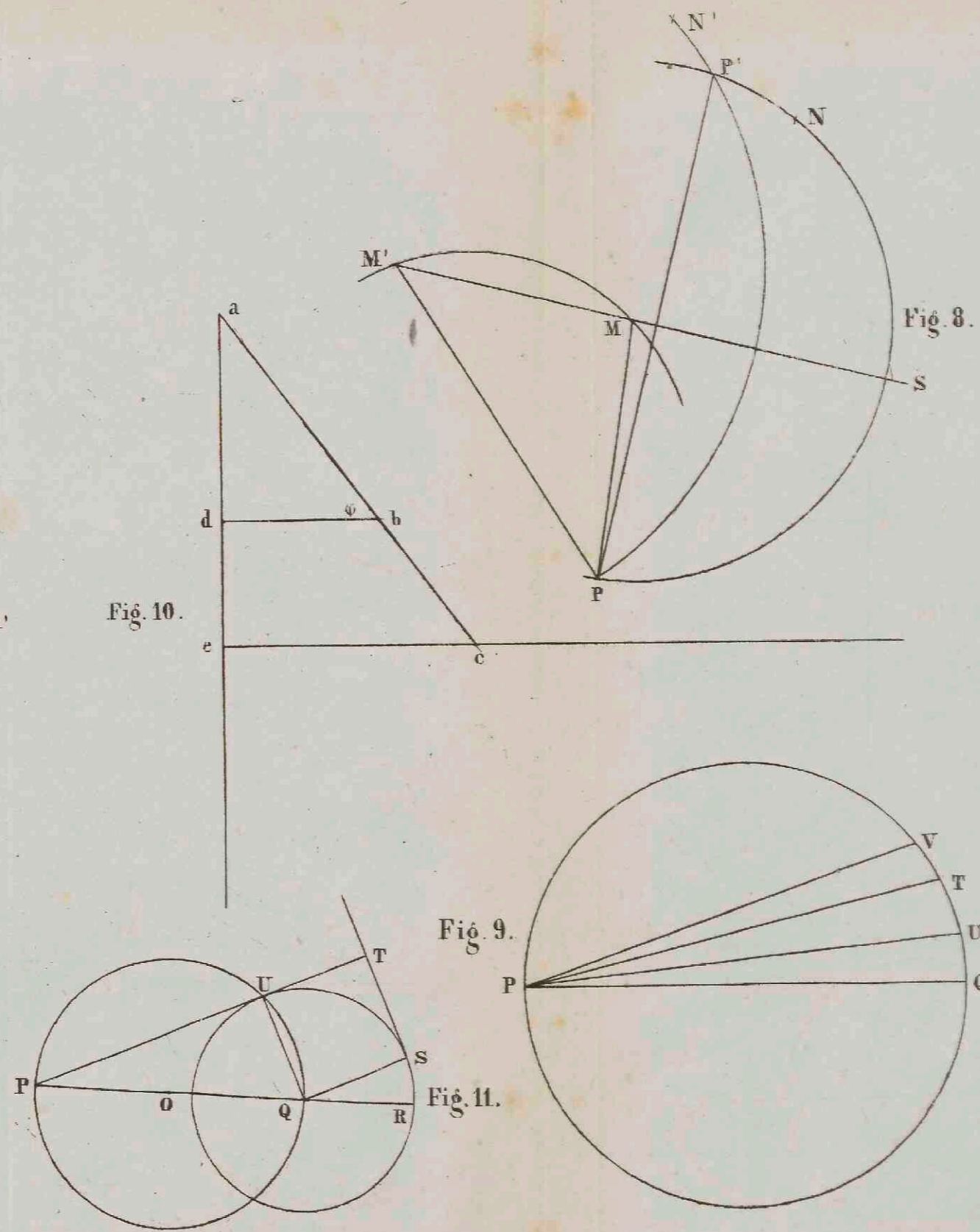
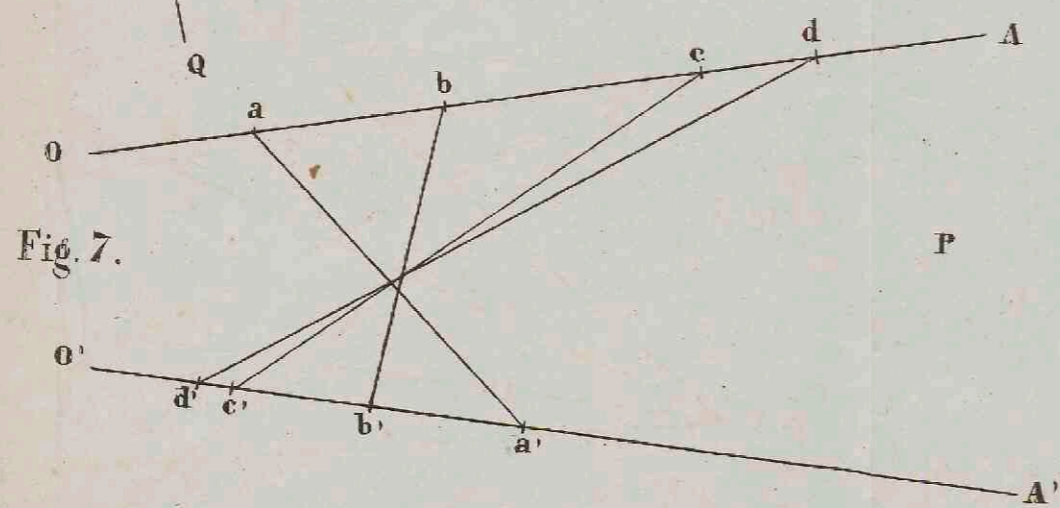
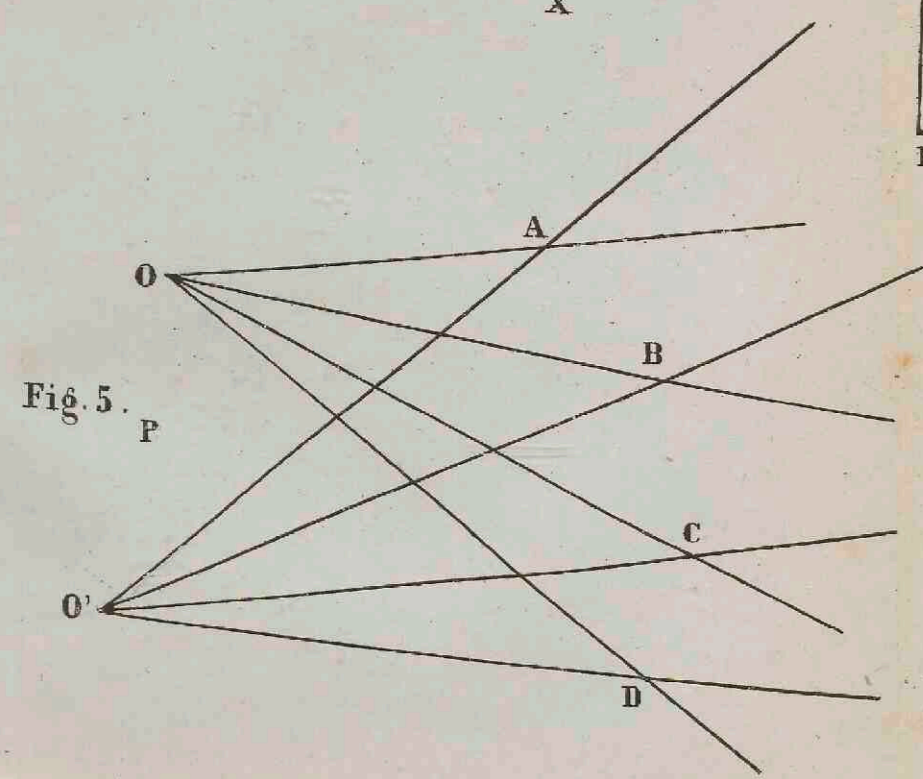
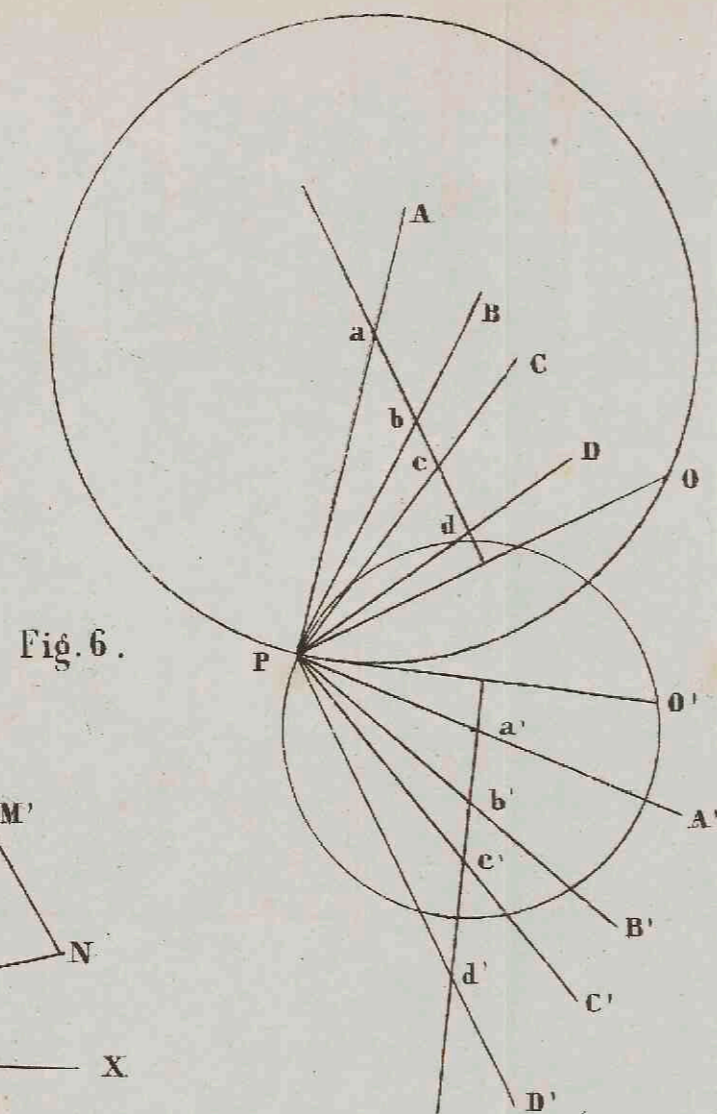
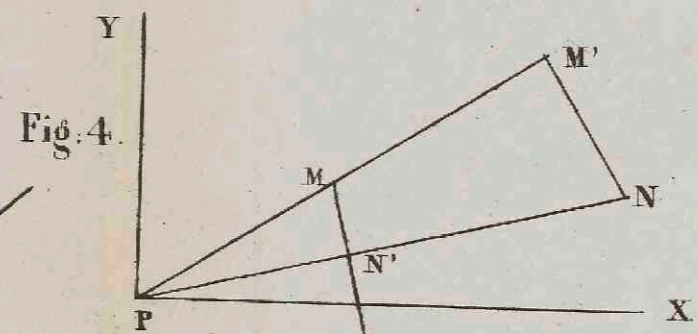
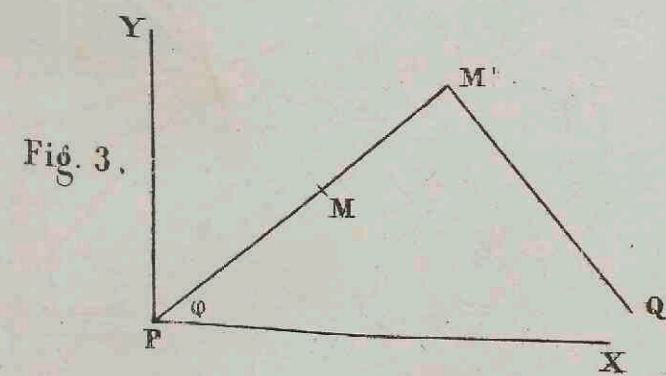
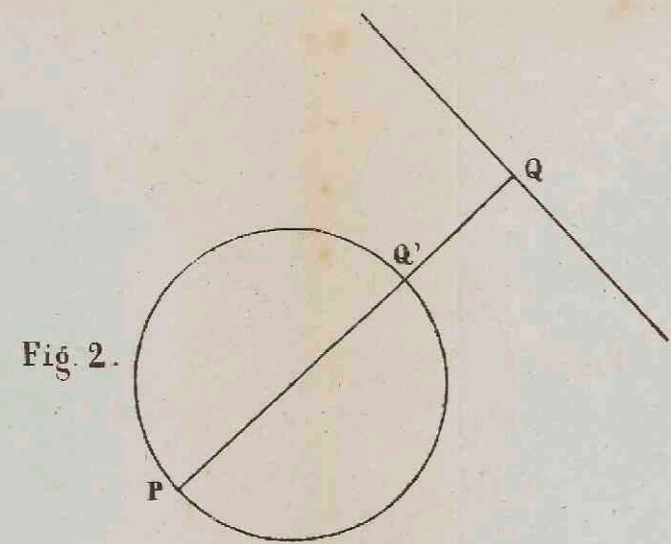
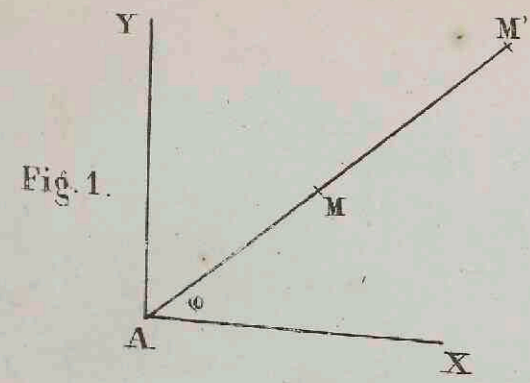


Fig. 12.

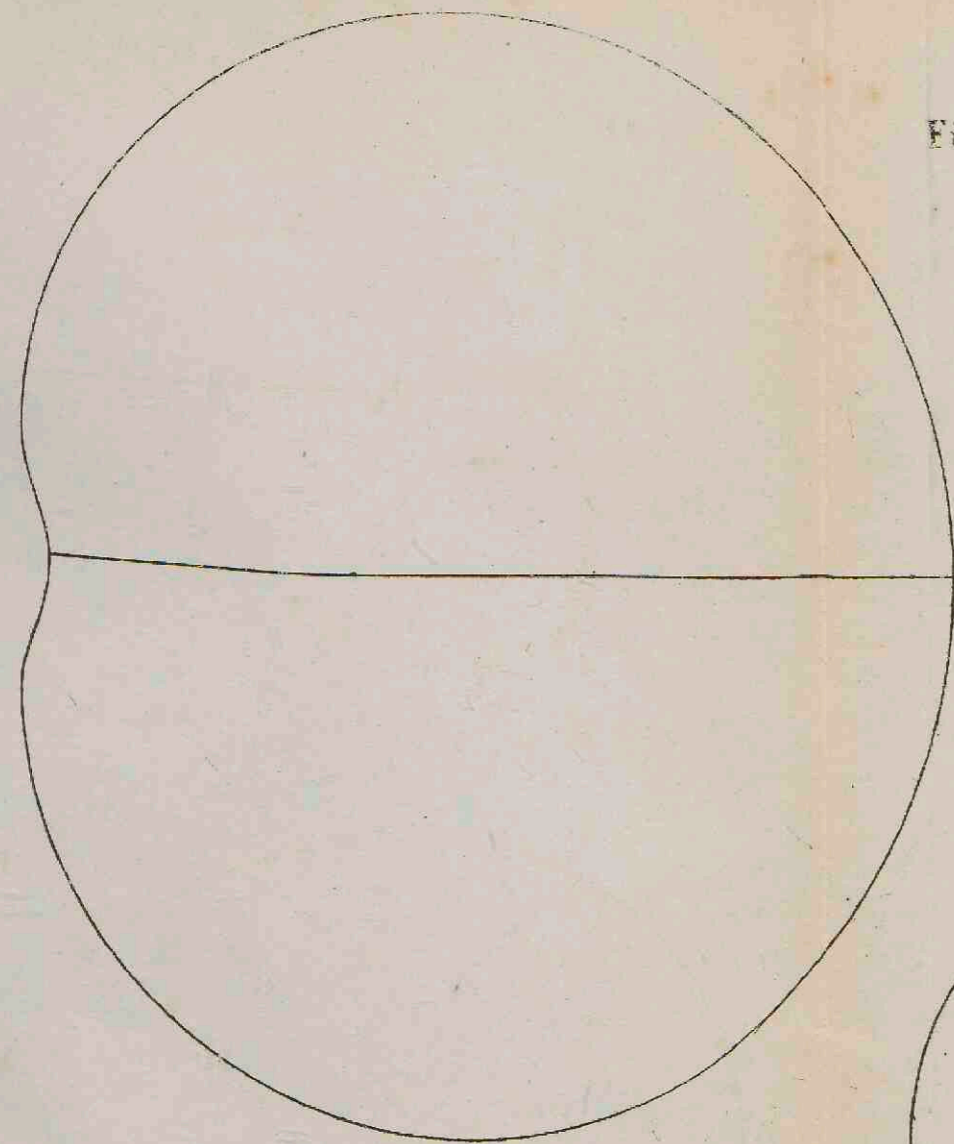


Fig. 11.

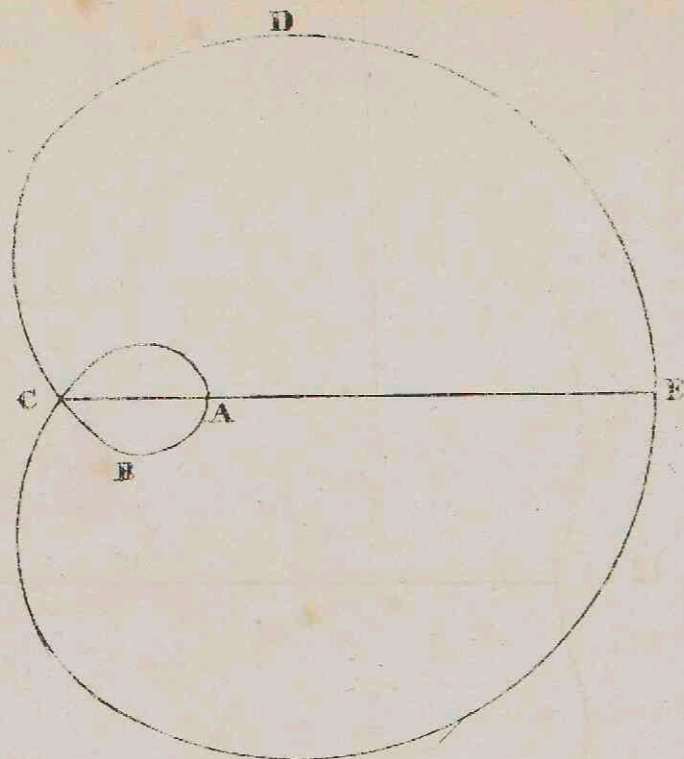


Fig. 13.

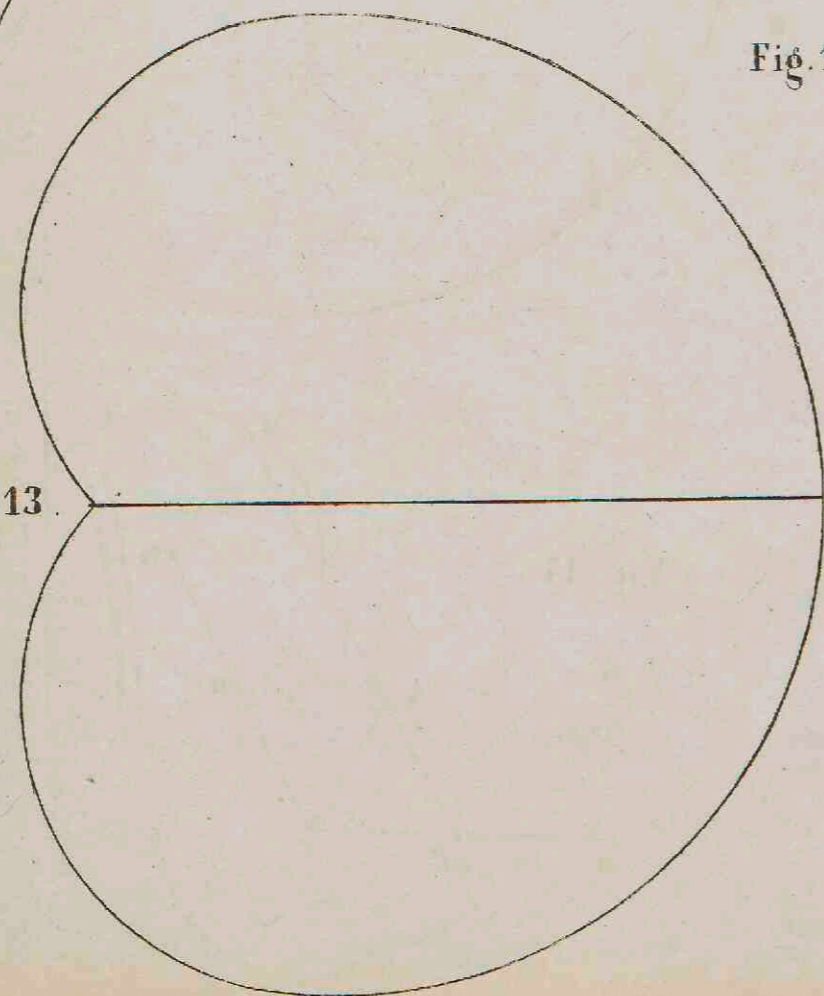


Fig. 15.

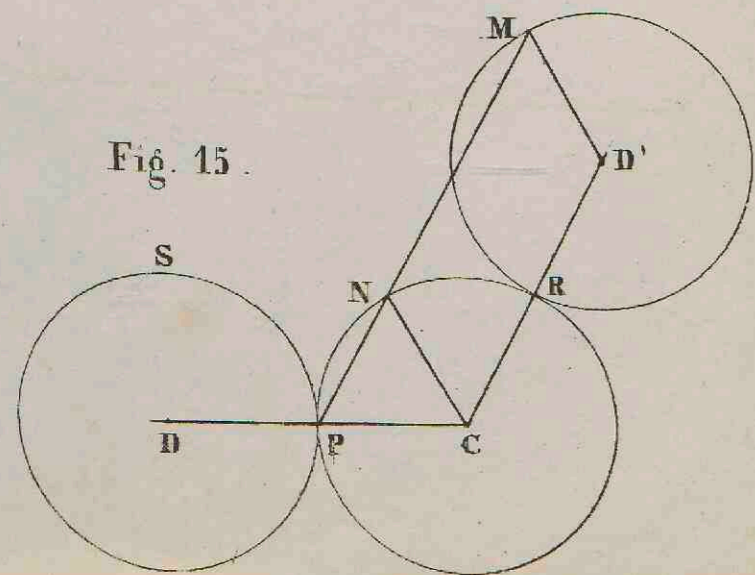


Fig. 16.

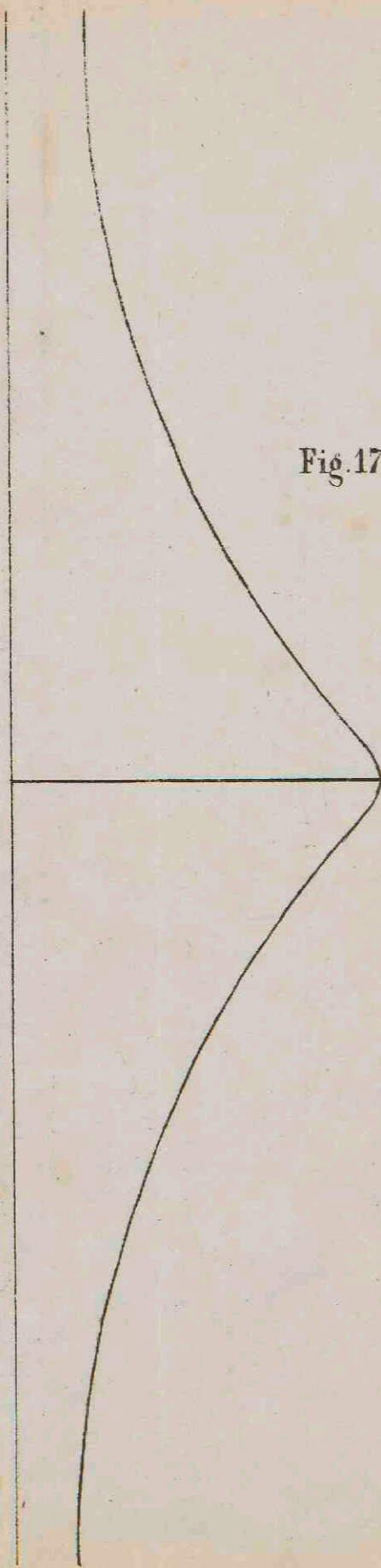


Fig. 17.

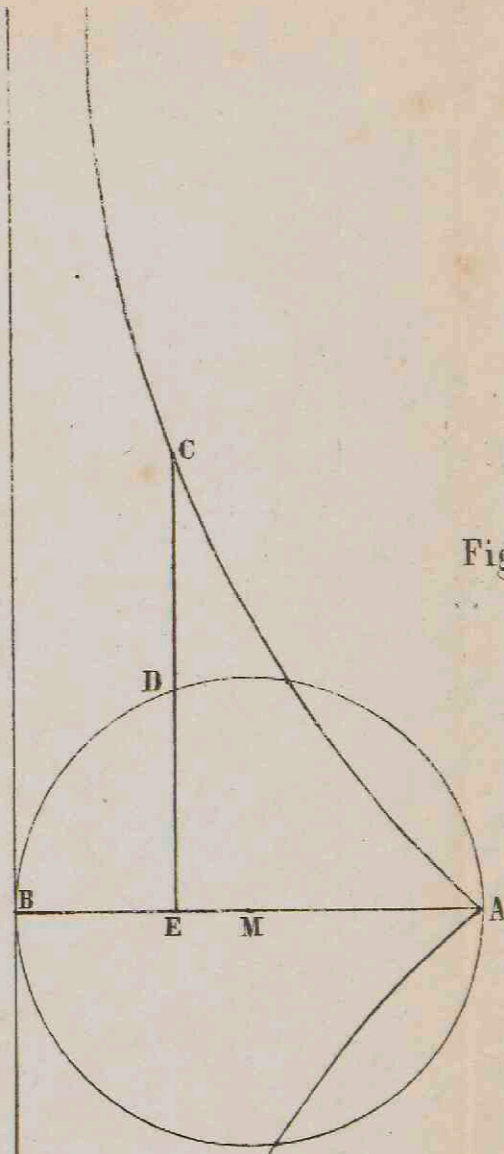


Fig. 18.

