



Convexe functies

<https://hdl.handle.net/1874/287184>

A. 4^o. 192, 1927.

CONVEXE FUNCTIES

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

J. HOEKSTRA

s.
cht

7

CONVEXE FUNCTIES

CONVEXE FUNCTIES

JOHANNES VAN KESTRA

AMSTERDAM 1954

WOLFFENBUTTEL
STADT

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



3969 3381

Diss. Utrecht 1927

CONVEXE FUNCTIES.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS-
EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-
UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG
VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. A.
NOORDTZIJ, HOOGLEERAAR IN DE FA-
CULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOOR
DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG
14 FEBRUARI 1927, DES NAMIDDAGS TE
4 UUR, DOOR

JOHANNES HOEKSTRA,

GEBOREN TE BRED A.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

De slachgevoeligheden, die in het verleden van
de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van
de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van

In de eerste plaats van de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van
de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van

Waarom is het niet de een en ander van de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van
de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van

Maar de DE VRIJHEID, die in de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van
de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van

De geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van
de geschiedkundige lieden, was de niet de een en ander van

AAN MIJN OUDERS

INHOUD.

De gunstige gelegenheid, die mij het verschijnen van dit proefschrift biedt, grijp ik aan om een woord van diepgevoelde dankbaarheid uit te spreken.

In de eerste plaats aan U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor, voor de hulp en voorlichting mij bij het samenstellen van dit proefschrift zoo welwillend verstrekt.

Wees er van overtuigd, dat de liefde voor de Analyse, die Gij door Uwe heldere en hoogstaande colleges bij mij wist op te wekken, van groote invloed is geweest op de keuze van mijn studierichting.

Hooggeleerde DE VRIES, als een buitengewoon voorrecht zal ik het steeds blijven waardeeren, dat ik gedurende vijf jaren Uw leerling mocht wezen.

Ten slotte een woord van erkentelijkheid aan U Hooggeleerde Heeren ORNSTEIN en NIJLAND, wier lessen ik het voorrecht had te mogen volgen.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Convexe en concave functies. Voorbeelden.
Eerste eigenschappen. 1

HOOFDSTUK II.

De convexe functie in het bijzonder. Begrensd-
heid. Continuïteit. 13

HOOFDSTUK III.

Afgeleiden. Verband tusschen monotone en
convexe functies. Aanvulling en uitbreiding
van hoofdstuk II. 36

HOOFDSTUK IV.

Functies samengesteld uit convexe, concave,
lineaire functies. Functies van twee of meer
veranderlijken. 48

HOOFDSTUK V.

Convexe en concave functies gegeven op
een verzameling van reële getallen. 57

Litteratuur. 77

HOOFDSTUK I.

Convexe en Concave functies. Voorbeelden.

Eerste eigenschappen.

§ 1. Definitie convexe functie.

Als op een *interval* (a, b) voor iedere $a < x < b$ een eenwaardige en reële functie $f(x)$ van de reële veranderlijke x gedefinieerd is, zoodat voor elke twee punten x_1 en x_2 waarvoor tegelijk

$$a < x_1 < b \text{ en } a < x_2 < b$$

geldt, voldaan wordt aan

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

dan noemen we $f(x)$ *convex* op het interval (a, b) .

Is de functie gegeven op het *segment* (a, b) d. w. z. met inbegrip van de punten a en b dan worden in de definitie alleen de eerste twee ongelijkheden veranderd in

$$a \leq x_1 \leq b \text{ en } a \leq x_2 \leq b.$$

Als in het bijzonder overal op (a, b) dus voor elk paar (x_1, x_2) het $=$ teken geldt, dan noemen we de functie *lineair* op (a, b) .

§ 2. Definitie concave functie.

Als op een interval (a, b) voor iedere $a < x < b$ een eenwaardige en reële functie $f(x)$ van de reële veranderlijke x

gedefinieerd is, zoodat voor elke twee punten x_1 en x_2 waarvoor tegelijk

$$a < x_1 < b \text{ en } a < x_2 < b$$

geldt, voldaan wordt aan

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

dan noemen we $f(x)$ concaaf op het interval (a, b) .

Voor $f(x)$ gegeven op het segment (a, b) geldt dezelfde opmerking als in § 1.

§ 3. Verband.

Uit de §§ 1 en 2 volgt onmiddellijk, dat lineaire functies te beschouwen zijn als gemeenschappelijke grensgevallen van convexe en concave functies.

Is $f(x)$ convex op (a, b) dan is volgens def. 1

$$2 f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq f(x_1) + f(x_2),$$

of:

$$- 2 f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq - f(x_1) - f(x_2).$$

Stelt men nu $\varphi(x) = - f(x)$, dan wordt:

$$2 \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$

en is volgens def. 2, $\varphi(x)$ concaaf op (a, b) .

Omgekeerd als $f(x)$ concaaf is, zal $\varphi(x) = - f(x)$ convex zijn. Uit een eigenschap der convexe functies vloeit dus onmiddellijk een analoge eigenschap der concave functies voort.

Dit zal een reden zijn, waarom we ons dikwijls tot de convexe functies zullen beperken.

§ 4. Stelling.

De som van n convexe of lineaire functies is een convexe functie als minstens één hunner convex is.

Geg.: $f_k(x)$ is convex of lineair voor $k = 1, 2, \dots, n$ op (a, b) .
 Voor minstens één waarde $k = k_1$, ($1 \leq k_1 \leq n$) is $f_{k_1}(x)$ convex.

$$\text{Te bew.: } F(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

is convex op (a, b) .

Bewijs: Volgens def. 1 is:

$$2 f_k\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq f_k(x_1) + f_k(x_2),$$

waarbij het $<$ teeken voor de waarde(n) $k = k_1$ geldt.

Gesommeerd:

$$2 \sum_{k=1}^n f_k\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x_1) + \sum_{k=1}^n f_k(x_2)$$

of

$$2 F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq F(x_1) + F(x_2),$$

waaruit volgens def. 1 de convexiteit van $F(x)$ op (a, b) volgt.

§ 5. Stelling.

Als $f(x)$ convex is op (a, b) en $c > 0$ constant, dan is $F(x) = c \cdot f(x)$ convex op (a, b) .

Bewijs: Volgens def. 1 is:

$$2 f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

Dus:

$$2 c f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq c f(x_1) + c f(x_2),$$

waaruit volgens def. 1 de convexiteit van $F(x)$ volgt.

Analoog bewijst men:

Als $f(x)$ convex is op (a, b) en $c < 0$ constant, dan is $F(x) = c \cdot f(x)$ concaaf op (a, b) .

Als $f(x)$ concaaf is op (a, b) en $c > 0$ constant, dan is $F(x) = c \cdot f(x)$ concaaf op (a, b) .

Als $f(x)$ concaaf is op (a, b) en $c < 0$ constant, dan is $F(x) = c \cdot f(x)$ convex op (a, b) .

§ 6. Voorbeelden.

1. $f(x) = x^2$ is convex in ieder interval.

Volgens def. 1 moet dan:

$$2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \leq x_1^2 + x_2^2,$$

of

$$(x_1 + x_2)^2 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2,$$

of

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2.$$

Aan dit laatste is voor reële x steeds voldaan, waaruit de convexiteit van $f(x) = x^2$ volgt.

2. $f(x) = a + bx$, a en b constant, is lineair in ieder interval. Volgens def. 1 of def. 2 is hier:

$$2 \left(\frac{a + bx_1 + a + bx_2}{2} \right) = (a + bx_1) + (a + bx_2).$$

3. $f(x) = a + bx + cx^2$; a , b en c constant, is convex of concaaf al naar mate $c > 0$ of < 0 is.

Dit volgt direct uit de stellingen § 4 en § 5.

4. $f(x) = |x|$ is lineair in ieder interval dat $x=0$ niet bevat, anders convex.

5. $f(x) = \sum_{v=1}^n c_v \cdot |x - x_v|$, alle $c_i > 0$, is lineair in ieder interval

dat geen der argumenten $x_1, x_2, \dots, x_n$ bevat, anders convex.

§ 7. De functie x^p .

1. $x > 0, p > 1$.

Gaan we uit van het bekende quotient:

$$\frac{a^p - b^p}{a - b} = a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + a^{p-k}b^{k-1} + \dots + b^{p-1}.$$

Stel $a > b > 0$. Het rechter lid is dan $< p \cdot a^{p-1}$, maar $> p \cdot b^{p-1}$. We hebben dan de ongelijkheid:

$$p \cdot a^{p-1} \cdot (a - b) > a^p - b^p > p \cdot b^{p-1} \cdot (a - b).$$

Neemt men nu twee argumenten x en y , zoodat

$$x > y > 0,$$

en

$$a = x, \quad b = \frac{x+y}{2} < x,$$

dan volgt hieruit:

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > p \left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{x-y}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p$$

of

$$x^p + y^p > 2 \left(\frac{x+y}{2}\right)^p \dots\dots\dots (1)$$

Volgens def. 1 is dus x^p convex voor $x > 0$, $p > 1$.

2. Voer nu in (1) de substituties uit:

$$x \rightarrow \frac{1}{x}, \quad y \rightarrow \frac{1}{y},$$

dan wordt (1):

$$x^{-p} + y^{-p} > 2 \left(\frac{x+y}{2xy}\right)^p \geq 2 \left(\frac{2}{x+y}\right)^p = 2 \left(\frac{x+y}{2}\right)^{-p}$$

Volgens def. 1 is dus x^{-p} convex voor $x > 0$, $p > 1$.

3. Voer in (1) de substituties uit:

$$x \rightarrow x^{1/p}, \quad y \rightarrow y^{1/p},$$

dan wordt (1):

$$x + y > 2 \left(\frac{x^{1/p} + y^{1/p}}{2}\right)^p,$$

of:

$$2 \left(\frac{x+y}{2}\right)^{1/p} > x^{1/p} + y^{1/p} \dots\dots\dots (2)$$

Volgens def. 2 is dus x^p concaaf voor $x > 0$, $0 < p < 1$.

4. Uit (2) volgt:

$$\frac{2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{1/p}} < \frac{4}{x^{1/p} + y^{1/p}} \leq \frac{x^{1/p} + y^{1/p}}{(xy)^{1/p}} = \frac{1}{x^{1/p}} + \frac{1}{y^{1/p}}$$

Dit is nog waar voor $p = 1$. Dus volgens def. 1 is x^{-p} convex voor $x > 0$, $0 < p \leq 1$.

Deze vier stellingen geven nu het middel om voor elke waarde van p tot de convexiteit of concaviteit van x^p te besluiten.

Namelijk:

x^p is convex voor $x > 0$ en $p < 0$ volgens stelling 2 en 4.

x^p is concaaf voor $x > 0$ en $0 < p < 1$ volgens stelling 3.

x^p is lineair voor $x > 0$ en $p = 1$ volgens def. 1.

x^p is convex voor $x > 0$ en $p > 1$ volgens stelling 1.

§ 8. De functie $\sqrt{a + b x^2}$.

Volgens de def. 1 en 2 moeten we onderzoeken de ongelijkheid

$$\sqrt{a + b x^2} + \sqrt{a + b y^2} \gtrless 2 \sqrt{a + b \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$

Stel nu

$$a > 0 \text{ en } b > 0.$$

Quadrateeren geeft

$$\sqrt{(a + b x^2)(a + b y^2)} \gtrless a + b x y$$

of

$$ab(x - y)^2 \gtrless 0$$

Dus zal $\sqrt{a + b x^2}$ convex zijn voor $a > 0$ en $b > 0$. Is echter $ab < 0$ en blijft het binomium onder het $\sqrt{}$ teeken > 0 , dan is de functie concaaf.

§ 9. De exponentieele en logarithmische functies.

We zullen aantoonen dat de functie e^{cx} convex is in ieder interval. Stel dat dit zoo is, dan moet

$$e^{cx} + e^{cy} \geq 2 e^{\frac{cx + cy}{2}}$$

of

$$e^{cx} + e^{cy} \geq 2 e^{\frac{cx}{2}} \cdot e^{\frac{cy}{2}}$$

of

$$\frac{e^{cx} + e^{cy}}{e^{\frac{cx}{2}} \cdot e^{\frac{cy}{2}}} = \frac{e^{\frac{cx}{2}}}{e^{\frac{cy}{2}}} + \frac{e^{\frac{cy}{2}}}{e^{\frac{cx}{2}}} \geq 2.$$

Het is bekend, dat de som van een positieve breuk en haar omgekeerde minstens 2 is. Dus is $f(x) = e^{cx}$ convex en wel in ieder interval.

De functie $f(x) = \log x$ is concaaf in het interval $(0, +\infty)$. De ongelijkheid

$$\log x + \log y \leq 2 \log \frac{x+y}{2}$$

is gelijkwaardig met

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Omdat $x > 0$, $y > 0$, volgt deze weer uit

$$0 \leq (x-y)^2,$$

waaruit de concaviteit volgt.

§ 10. Is $f(x)$ eindig, continu en differentieerbaar tot en met de tweede orde, is het dus een „gewone” functie, dan geeft de reeksontwikkeling van Taylor een eenvoudig kenmerk voor de convexiteit of concaviteit.

Neemt men n.l. de argumenten $x-h$, x , en $x+h$, dan is:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x_1)$$

en

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x_2),$$

waarbij

$$x < x_1 < x+h \text{ en } x-h < x_2 < x.$$

Opgeteld

$$f(x-h) + f(x+h) - 2f(x) = h^2 f''(x'),$$

waarbij

$$x-h < x' < x+h.$$

Stelt men nu $x-h = x_1$, $x+h = x_2$, dus $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; brengt men def. 1 en 2 op de vorm

$$f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0,$$

dan volgt uit

$$f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = h^2 f''(x'),$$

dat $f(x)$ convex is als $f''(x) > 0$, concaaf als $f''(x) < 0$.

Meetkundig beschouwd zegt de definitie van convexe functie, dat de ordinaat of de functiewaarde van het punt dat midden tusschen x_1 en x_2 ligt, niet grooter is dan de halve som der functiewaarden in die 2 punten of dat de functiewaarde in het midden niet boven de lijn uitkomt, die de functiewaarden in de uiteinden verbindt.

Uit de differentiaalrekening is ook bekend dat het positief zijn van de tweede afgeleide een waarborg is, dat de kromme, die de functie voorstelt, haar bolle zijde keert naar de x -as, gezien vanuit de negatieve y -as.

In de gevallen van de in deze § beschouwde „gewone” functies krijgen onze begrippen convex en concaaf de beteekenis, die men er gewoonlijk aan geeft.

Nemen we de functie $f(x) = \sin x$.
Voor

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

is $-\sin x < 0$, dus de functie concaaf; voor

$$(2k-1)\pi < x < 2k\pi \quad (k=1, 2, \dots)$$

is $-\sin x > 0$, dus de functie convex.

§ 11. Definitie bovenste grens en onderste grens.

1. Een verzameling reële getallen $\{a\}$ heeft een eindige bovenste grens G , als voor ε gegeven en willekeurig klein positief:

1^e geen der getallen $\{a\}$ grooter is dan $G + \varepsilon$,

2^e minstens één getal uit $\{a\}$ te vinden is grooter dan $G - \varepsilon$.

Is daarentegen voor ieder getal N positief een a te vinden grooter dan N , dan zegt men: De bovenste grens der getallen $\{a\}$ is $+\infty$.

2. Een verzameling reële getallen $\{a\}$ heeft een eindige onderste grens g , als voor ε gegeven en willekeurig klein positief:

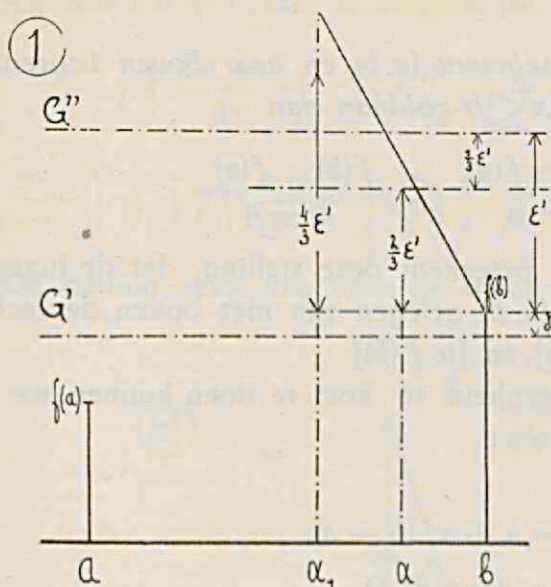
1^e geen der getallen $\{a\}$ kleiner is dan $g - \varepsilon$,

2^e minstens één getal uit $\{a\}$ te vinden is kleiner dan $g + \varepsilon$.

Is daarentegen voor ieder getal n negatief een a te vinden kleiner dan n , dan zegt men: de onderste grens der getallen $\{a\}$ is $-\infty$.

§ 12. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) en naar boven begrensd, dan is het grootste der getallen $f(a)$ en $f(b)$ bovenste grens op (a, b) .



Zonder aan de algemeenheid te kort te doen mogen we stellen

$$f(b) \geq f(a).$$

Stel dat de bovenste grens $G' < f(b)$ is.

Noem

$$f(b) - G' = \delta.$$

$f(b)$ overschrijdt dan $G' + \frac{\delta}{2} = G' + \varepsilon$, hetgeen in strijd is met def. § 11 — 1.

Stel de bovenste grens $G'' > f(b)$.

Noem

$$G'' - f(b) = \varepsilon'.$$

Dan is er een punt a , waarvoor

$$f(a) > G'' - \frac{\varepsilon'}{3} = G'' - \varepsilon.$$

Wegens de convexiteit van $f(x)$ geldt voor $a - a > b - a$ in het punt a_1 , gegeven door

$$a - a_1 = b - a \quad (\text{fig. 1})$$

de ongelijkheid

$$f(a_1) \geq 2f(a) - f(b) = 2\{f(a) - f(b)\} + f(b) > \frac{2}{3}\varepsilon' + f(b).$$

Of

$$f(a_1) > G'' + \frac{\varepsilon'}{3} = G'' + \varepsilon,$$

hetgeen in strijd is met de definitie van bovenste grens § 11 — 1.

Als $a - a < b - a$, dan zoeken we a_2 , zoodat

$$a_2 - a = a - a$$

Dan is

$$f(a_2) \geq 2f(a) - f(a) \geq 2f(a) - f(b)$$

en zoo teruggebracht tot het vorige geval.

Is juist $a - a = b - a$, dan wordt $a_1 \equiv a$ en zou

$$f(a) > f(b).$$

In de 3 gevallen komen we dus in strijd met de onderstelling dat G'' de bovenste grens is. Dus is de bovenste grens $= f(b)$.

§ 13. Stelling 1.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) en naar boven begrensd, dan is voor iedere $a \leq x \leq b$ voldaan aan

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Meetkundig beschouwd beteekent deze stelling, dat de functie-waarden op het segment (a, b) gelegen zijn niet boven de rechte tusschen de punten $[a, f(a)]$ en $[b, f(b)]$.

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen kunnen we de $f(x)$ als volgt transformeeren:

Stel

$$x = a + x'(b - a),$$

dan wordt (a, b) vervangen door $(0, 1)$.

Stel

$$f(x') = f(0) + f(x'')$$

en vervang dan x'' weer door x .

Dan is te bewijzen dat voor $0 \leq x \leq 1$, $f(x) \leq x f(1) = c x$ ($c > 0$)

Bewijzen we de stelling eerst voor de duale punten met argumenten

$$x = \frac{a}{2^a}, \quad a \leq 2^a \text{ en geheel positief.}$$

Uit def. 1 volgt

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} c.$$

Verder

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4} c.$$

en

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f(1) \leq \frac{3}{4} c.$$

Onderstel voor $a = 1, 2, \dots, (a - 1)$

$$f\left(\frac{a}{2^a}\right) \leq \frac{a}{2^a} c.$$

Bewijzen we dan deze ongelijkheid voor $a = a$.

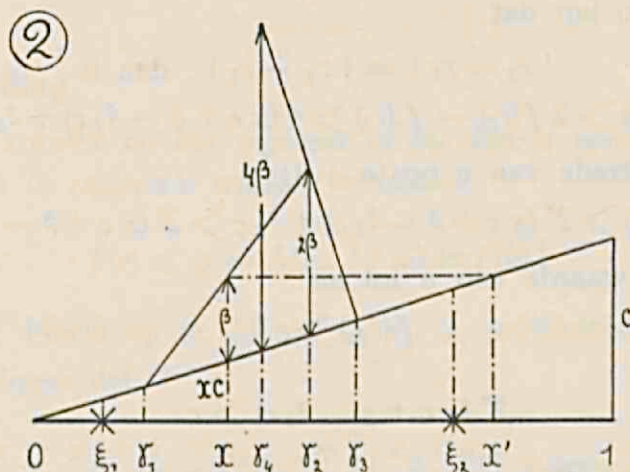
Als $a = 2n$, dan is

$$\frac{a}{2^a} = \frac{n}{2^{a-1}}$$

Als $a = 2n + 1$, dan is volgens de convexiteit

$$f\left(\frac{2n+1}{2^a}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{2n}{2^a}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{2n+2}{2^a}\right) = \\ \frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2^{a-1}}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{n+1}{2^{a-1}}\right) \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{2^{a-1}} \cdot c + \frac{n+1}{2^{a-1}} \cdot c\right\} = \frac{2n+1}{2^a} c.$$

De stelling geldt dus voor de duale punten.



Stel nu $x \neq \frac{a}{2^a}$ en

$$f(x) > xc.$$

Volgens de stelling § 12 is zeker

$$c \geq f(x).$$

Noem

$$f(x) = xc + \beta.$$

Op $(0,1)$ is er een x' waarvoor

$$x' = \frac{xc + \beta}{c}. \quad (\text{fig. 2})$$

Neem een interval (ξ_1, ξ_2) met eindpunten van den vorm $\frac{a}{2^a}$ zoodat

$$0 \leq \xi_1 < x < \xi_2 < x'.$$

Neem dan het duale punt r_1 op (ξ_1, ξ_2) . Dan is

$$f(r_1) \leq r_1 c \leq \xi_2 c.$$

Als nu r_2 zoo ligt dat

$$|x - r_1| = |r_2 - x|, \text{ dan is}$$

$$f(r_2) \geq 2f(x) - f(r_1) \geq 2xc + 2\beta - \xi_2 c = 2(xc + \beta - \xi_2 c) + \xi_2 c.$$

Kies nu het duale punt r_3 op (ξ_1, ξ_2) . Dan is

$$f(r_3) \leq r_3 c \leq \xi_2 c.$$

Als nu r_4 zoo ligt dat

$$|r_2 - r_3| = |r_4 - r_2|, \text{ dan is}$$

$$f(r_4) \geq 2f(r_2) - f(r_3) \geq 4(xc + \beta - \xi_2 c) + \xi_2 c.$$

Door de sluitrede van n op $(n+1)$:

$$f(r_{2n}) \geq 2^n (xc + \beta - \xi_2 c) + \xi_2 c > 2^n (xc + \beta - \xi_2 c).$$

Voor welke waarde van n zal nu:

$$f(r_{2n}) > c?$$

Dan moet

$$2^n (xc + \beta - \xi_2 c) > c \quad \text{of}$$

$$2^n > \frac{c}{xc + \beta - \xi_2 c} = A > 0 \quad \text{of}$$

$$n > \frac{\log A}{\log 2}.$$

Vanaf zekere eindige n zal dan $f(r_{2n}) > c$ hetgeen in strijd is met de stelling § 12.

De hierboven bewezen stelling zegt dus, dat de begrensdsheid naar boven voor een convexe functie, gegeven op het segment (a, b) , voldoende is om te maken, dat de functiewaarden niet boven de lijn $l \equiv \{ a, f(a) - b, f(b) \}$ uitkomen.

De begrensdsheid naar boven is echter ook noodig. Want liggen de functiewaarden nergens boven l , dan is de functie naar boven begrensd of als de functie niet naar boven begrensd is, dan moet ergens de functiewaarde boven l komen.

Eindelijk volgt uit de stelling nog:

Stelling 2.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) en komt de functiewaarde in één punt van (a, b) boven de lijn $\{ a, f(a) - b, f(b) \}$ uit, dan is $f(x)$ niet naar boven begrensd.

HOOFDSTUK II.

De convexe functie in het bijzonder. Begrensdheid. Continuïteit.

§ 14. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) , dan is voor alle punten r , die (a, b) in rationale stukken verdeelen

$$f(r) \leq g = \text{Max} \{ f(a) \text{ en } f(b) \}.$$

Bewijs: Neem op (a, b) x_1, x_2, x_3, x_4 willekeurig.
Dan is volgens def. 1

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{4} f(x_1) + \frac{1}{4} f(x_2) + \frac{1}{4} f(x_3) + \frac{1}{4} f(x_4). \end{aligned}$$

Stel deze formule geldt voor 2^m punten. Wij zullen dan aantoonen, dat hij ook voor 2^{m+1} punten geldt.

Zeker is

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^m+1}}{2^{m+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^m}}{2^m} + \frac{x_{2^m+1} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m}}{2}\right)$$

en volgens def. 1 is dit

$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^m}}{2^m}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{2^m+1} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{v=1}^{2^m} f(x_v) + \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{v=2^m+1}^{2^{m+1}} f(x_v) = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{v=1}^{2^{m+1}} f(x_v).$$

We krijgen dus de algemeene formule, geldend voor $m > 0$ geheel:

$$2^m f \left[\frac{1}{2^m} \sum_{v=1}^{2^m} x_v \right] \leq \sum_{v=1}^{2^m} f(x_v) \dots \dots \dots (1)$$

Stel nu $n > 0$ geheel en $< 2^m$. Kies dan

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \dots \dots \dots = x_{2^m} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Dan wordt (1):

$$2^m f \left[\frac{1}{2^m} \left\{ \sum_{v=1}^n x_v + \frac{2^m - n}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right\} \right] \leq \sum_{v=1}^n f(x_v) + (2^m - n) f \left[\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right].$$

$$2^m f \left[\frac{1}{2^m n} \left\{ n \sum_{v=1}^n x_v + (2^m - n) \sum_{v=1}^n x_v \right\} \right] \leq \sum_{v=1}^n f(x_v) + (2^m - n) f \left[\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right].$$

$$2^m f \left[\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right] \leq \sum_{v=1}^n f(x_v) + (2^m - n) f \left[\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right].$$

$$f \left[\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n f(x_v) \dots \dots \dots (2)$$

Deze formule geldt dus voor n willekeurige punten x_i van (a, b) en zegt dat de functiewaarde voor het gemiddelde van die n punten hoogstens gelijk is aan het gemiddelde der n functiewaarden.

Om tot het bewijs van de stelling te komen, zullen we eerst een kleine transformatie uitvoeren.

Stel $x = a + x' (b - a)$

Dan is voor $x' = 0$, $x = a$

en voor $x' = 1$, $x = b$.

Vervang dan x' weer door x .

De rationale deelpunten van het interval $(0, 1)$ hebben dan rationale coördinaten

$$x = r = \frac{m}{n}$$

m en n geheel; $0 \leq m \leq n$.

Substitueer nu in (2):

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \dots = x_{n-m} &= 0 \\ \text{en } x_{n-m+1} = \dots = x_n &= 1. \end{aligned}$$

Dan gaat (2) over in:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \left\{ (n-m) f(0) + m f(1) \right\}.$$

Is g het maximum van $f(0)$ en $f(1)$ dan

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) \leq \frac{1}{n} n g = g.$$

§ 15. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) , dan is voor alle punten r , die (a, b) in rationale stukken verdeelen

$$\frac{f(r) - f(a)}{r - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Door een eenvoudige lineaire transformatie kunnen we het segment (a, b) door $(0, 1)$ vervangen en $f(0) = 0$ doen worden. (Zie § 13). Dan is te bewijzen, voor

$$x = r = \frac{p}{q}, \quad 0 \leq p \leq q, \quad p \text{ en } q \text{ geheel,}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \leq \frac{p}{q} \cdot f(1) = \frac{p}{q} c.$$

Stel eens
$$f\left(\frac{1}{q}\right) > \frac{1}{q} c.$$

Dan zou volgens def. 1

$$f(0) + f\left(\frac{2}{q}\right) \geq 2 f\left(\frac{1}{q}\right) > \frac{2}{q} c.$$

En

$$f\left(\frac{3}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q}\right) \geq 2 f\left(\frac{2}{q}\right)$$

of

$$f\left(\frac{3}{q}\right) \geq 2f\left(\frac{2}{q}\right) - f\left(\frac{1}{q}\right) = 2\left\{f\left(\frac{2}{q}\right) - f\left(\frac{1}{q}\right)\right\} + f\left(\frac{1}{q}\right).$$

Volgens de def. 1 kan men schrijven

$$f\left(\frac{2}{q}\right) - f\left(\frac{1}{q}\right) \geq f\left(\frac{1}{q}\right) - f(0) \dots\dots\dots (1)$$

Dus

$$f\left(\frac{3}{q}\right) \geq 3f\left(\frac{1}{q}\right) > \frac{3}{q} c.$$

Zoo voortgaande komt men tot

$$f\left(\frac{q-1}{q}\right) > \frac{q-1}{q} c$$

en

$$f(1) > c,$$

hetgeen tegen het onderstelde is.

Opmerkingen.

1. Voor naar boven begrensde functies vallen de stellingen van de §§ 14 en 15 onder die van de §§ 12 en 13.

In het algemeen kan men dus zeggen, dat de grafische voorstelling van een convexe functie overal dicht (n.l. in de rationale deelpunten) niet boven de rechte

$$\{a, f(a) - b, f(b)\} \quad \text{komt.}$$

2. De ongelijkheid (1) geldt in het algemeen voor 3 punten gegeven door de argumenten

$$x, \frac{x+y}{2}, y \quad (x < y).$$

De definitie der convexiteit geeft namelijk

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \leq f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)}{\frac{x+y}{2} - x} \leq \frac{f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{y - \frac{x+y}{2}}.$$

In woorden: De richtingscoëfficiënten van de zijden van een convexe polygoon, wier zijden zich als gelijke stukken op (a, b) projecteeren, nemen monotoon naar rechts toe.

§ 16. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) dan is ze op de verzameling der rationale deelpunten r van (a, b) continu.

Bewijs: De overal dichte verzameling r geeft aanleiding tot $f(r)$, een deelfunctie van $f(x)$. Stel $a = 0$, $b = 1$. (Zie § 14).

Zij r rationaal, $0 \leq r \leq 1$, verder $n \geq 2$ en geheel. Kies een rationaal getal h , zoodat $r \pm nh$ nog in $(0, 1)$ ligt.

Gebruik nu formule § 14 — (2) en stel:

$$x_1 = r \pm nh, \quad x_2 = x_3 = \dots = x_n = r.$$

Dan wordt

$$f(r \pm h) \leq \frac{1}{n} f(r \pm nh) + \frac{n-1}{n} f(r)$$

of tegelijk

$$\begin{cases} f(r+h) - f(r) \leq \frac{f(r+nh) - f(r)}{n} \\ f(r) - f(r-h) \geq \frac{f(r) - f(r-nh)}{n} \end{cases}$$

Wegens de convexiteit van $f(x)$ is

$$f(r+h) - f(r) \geq f(r) - f(r-h).$$

Dus

$$\frac{f(r) - f(r-nh)}{n} \leq f(r) - f(r-h) \leq f(r+h) - f(r) \leq \frac{f(r+nh) - f(r)}{n}.$$

Maar $r, h, r \pm nh$ zijn rationaal. Dus volgens stelling § 14

$$f(r-nh) \text{ en } f(r+nh) \leq g = \text{Max. } \{ f(0), f(1) \}.$$

Dus

$$\frac{f(r) - g}{n} \leq f(r) - f(r-h) \leq f(r+h) - f(r) \leq \frac{g - f(r)}{n} \dots (1)$$

Neem r vast. Laat n onbegrensd toenemen en h overeenkomstig naderen tot 0, dan is

$$\lim_{h=0} \{ f(r \pm h) - f(r) \} = 0,$$

als h door de rationale deelpunten tot 0 nadert.

§ 17. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment $(0, 1)$ en $0 \leq r \leq 1$ een rationaal deelpunt, dan is de deelfunctie $f(r)$ op $(0, 1)$ naar onderen begrensd.

Bewijs:

We gebruiken de grondformule (2) van § 14 en stellen

$$x_1 = r, x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{1}{2}.$$

Dan wordt

$$n f \left[\frac{r + (n-1) \frac{1}{2}}{n} \right] \leq f(r) + (n-1) f\left(\frac{1}{2}\right),$$

of

$$f(r) \geq n \left\{ f \left[\frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}}{n} \right] - f\left(\frac{1}{2}\right) \right\} + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

of

$$f(r) \geq -n \left| f \left[\frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}}{n} \right] - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Volgens de stelling van § 15 is $f(x)$ voor $x = \frac{1}{2}$ ten opzichte van de rationale punten continu. Dus is er een $\varepsilon > 0$, zoodat wanneer s rationaal en $|s| \leq \varepsilon$, ook

$$\left| f\left(\frac{1}{2} + s\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < 1$$

is.

Stel nu speciaal:

$$n = \frac{1}{\varepsilon} + 1,$$

dan is voor alle

$$0 \leq r \leq 1$$

$$\left| \frac{r - \frac{1}{2}}{n} \right| < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} < \varepsilon.$$

Dus

$$\left| f\left(\frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < 1$$

en ook

$$f(r) \geq -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + f\left(\frac{1}{2}\right) = u.$$

Q. E. D.

§ 18. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment $(0, 1)$, dan is zij op het deel-segment $\eta \leq r \leq 1 - \eta$ ($\eta < \frac{1}{2}$) op de verzameling der rationale deelpunten gelijkmatig continu.

Bewijs:

Volgens de stelling § 15 is $f(r)$ op $(0, 1)$ continu.

Volgens de stelling § 16 is $f(r)$ op $(0, 1) \geq u$.

We moeten aantoonen, dat bij gegeven $\delta > 0$ er één

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta, \eta) > 0$$

is, dat voor elke r_1 en r_2 rationale deelpunten en

$$|r_1 - r_2| < \varepsilon$$

voldaan is aan

$$|f(r_1) - f(r_2)| < \delta.$$

We gebruiken nu de formule § 15 — (1). Dan is

$$\frac{u - g}{n} \leq f(r) - f(r - h) \leq f(r + h) - f(r) \leq \frac{g - u}{n}$$

of
$$|f(r + h) - f(r)| \leq \frac{g - u}{n}.$$

(Hierbij moet $r \pm nh$ nog in $(0, 1)$ liggen. Vergelijk § 15.)

Kies nu $n \geq 2$ zoodat

$$\frac{g - u}{n} < \delta.$$

Maar r_1 en r_2 liggen in het interval

$$\eta \leq r \leq 1 - \eta$$

en is nu:

$$|r_2 - r_1| < \frac{\eta}{n} = \varepsilon.$$

Omdat

$$\eta + n(r_2 - r_1) \leq r_1 + n(r_2 - r_1) \leq 1 - \eta + n(r_2 - r_1)$$

is ook

$$\eta - n\varepsilon \leq r_1 + n(r_2 - r_1) \leq 1 - \eta + n\varepsilon$$

of

$$0 \leq r_1 + n(r_2 - r_1) \leq 1$$

De formule

$$|f(r+h) - f(r)| < \delta,$$

die we boven

hebben afgeleid passen we nu toe voor

$$r = r_1 \text{ en } h = r_2 - r_1.$$

Dat geeft

$$|f(r_2) - f(r_1)| < \delta.$$

Q. E. D.

§ 19. Stelling.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) en niet naar boven begrensd, dan is ze in geen deelsegment naar boven begrensd.

Bewijs:

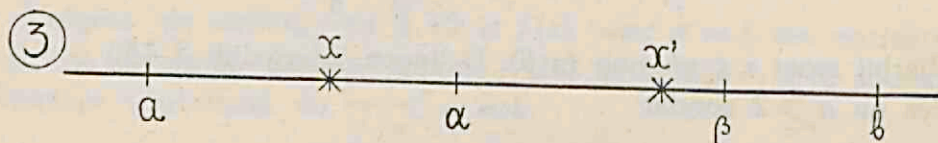
Stel eens $f(x)$ begrensd op een deelsegment (a, β) , dus voor

$$a \leq x \leq \beta \leq b,$$

$$f(x) \leq g.$$

Noem

$$\text{Max. } \{g, f(a), f(b)\} = G.$$



Bij elke x van (a, b) behoort een x' van (a, β) zoodat x een rationaal deelpunt is van (a, x') respectiefflijk (x', b) . (fig. 3)

Om een bepaalde rekenwijze aan te geven, kunnen we als volgt te werk gaan:

Hoe klein (a, β) is, steeds is er een $n > 0$ geheel zoodat

$$\beta - a > \frac{1}{n} (x - a).$$

Verdeel dan (a, x) in $2n$ gelijke deelen en zet die voort tot het eerste deelpunt, dat in (a, β) valt. Dat deelpunt zij dan x' .

Ligt x in (β, b) dan verdeelt men vanuit b naar a .

Nu gebruiken we de stelling van § 14.

$$f(x) \leq \text{Max. } \{f(a), f(x')\}, \text{ resp. Max. } \{f(x'), f(b)\}.$$

Dus steeds

$$f(x) \leq G.$$

Maar dan zou $f(x)$ op (a, b) begrensd zijn hetgeen in strijd is met de onderstelling.

§ 20. Stelling.

Is $f(x)$ convex op (a, b) en niet naar beneden begrensd, dan is ze in geen deelinterval naar beneden begrensd.

Bewijs:

Stel dat op het deelinterval (a, β) de functie begrensd was. Dus voor

$$a < a < x < \beta < b, f(x) > u.$$

Vervang $f(x)$ door $f(x) - f(a)$. Dan wordt

$$f(a) = 0.$$

Is $f(x)$ op (a, β) begrensd, dan is ze het op (β, γ) niet.

Kies $n \geq 2$, geheel, zoodat

$$\gamma - a < n(\beta - a).$$

In (β, γ) is er een ξ te vinden, waarvoor

$$f(\xi) < nu.$$

We gebruiken nu de formule § 14 — (2).

Stel $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = a; x_n = \xi$.

Dan is

$$f\left(\frac{(n-1)a + \xi}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \left[(n-1)f(a) + f(\xi) \right] = \frac{1}{n} f(\xi) < u.$$

Maar

$$\xi - a < \gamma - a < n(\beta - a).$$

Dus

$$\frac{(n-1)a + \xi}{n} < \beta.$$

Ook is

$$\frac{(n-1)a + \xi}{n} = a + \frac{\xi - a}{n} > a.$$

De ongelijkheid

$$f\left(\frac{(n-1)a + \xi}{n}\right) < u$$

strijdt dus met de

aanname, dat $f(x) > u$ is op (a, β) .

§ 21. Stelling.

Is $f(x)$ convex op (a, b) en naar boven begrensd, dan is ze er ook naar beneden begrensd.

Bewijs:

Stel dat op (a, b) , $f(x) < g$ volgens het gegevene.

Was $f(x)$ niet naar onderen begrensd, dan was voor

$$x = \frac{a+b}{2} + h, h > 0,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) < 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g \dots \dots (1)$$

Nu is echter wegens de convexiteit (def. § 1):

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - h\right).$$

Dus
$$f\left(\frac{a+b}{2} - h\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} + h\right)$$

en dit volgens (1)

$$f\left(\frac{a+b}{2} - h\right) > g.$$

Dit strijdt met de aanname $f(x) < g$.

§ 22. Stelling.

Is $f(x)$ convex op (a, b) en niet naar beneden begrensd, dan is ze ook niet naar boven begrensd.

Bewijs:

Volgens de stelling van § 19 zou de onderstelling van wel naar boven begrensd zijn voeren tot tevens naar onderen begrensd zijn, hetgeen in strijd is met het gegevene.

Opmerkingen.

1. We zullen aantoonen dat in § 18 het weglaten van een eindpunt de geheele stelling kan te niet doen.

Nemen we de functie

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

voor

$$0 < x \leq 1.$$

Deze is convex volgens de stelling van § 7 — (4.)

Maar de functie is ook onbegrensd op het interval $(0, 1)$. Toch is ze begrensd in ieder deelinterval

$$\eta < x \leq 1, \eta > 0.$$

De stelling gaat dus alleen door voor functies gegeven op een segment.

2. Uit de stellingen van de §§ 18—21 volgt nog dat de waarden

$$f(x) = \pm \infty,$$

niet in geïsoleerde inwendige punten van (a, b) kunnen voorkomen. Is er één waarde $+\infty$ of $-\infty$, dan is overal dicht op (a, b) die waarde te vinden.

Meetkundig zijn deze stellingen direct in te zien als men de punten met functiewaarden $\pm \infty$ spiegelt om punten met eindige functiewaarden.

De punten a en b maken hierop een uitzondering. De functie kan bijv. voor $a < x < b$ eindig convex zijn en in $x=a$ en $x=b$, $+\infty$ zonder aan de convexiteit afbreuk te doen.

3. Maken we nu een voorbeeld van een convexe functie die in a en in b eindig is en op (a, b) overal dicht $+\infty$.

Daartoe splitsen we de getallen van (a, b) in 2 klassen (p) en (q) met de eigenschap, dat de klasse (p) door spiegeling tegen ieder getal van (q) overgaat in de klasse (q) . Verder zullen a en b bij (p) behooren.

We hebben dus het volgende schema :

x_1	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	x_2
p	p	p
q	p	q
q	q	q
p	q	q

Is de verdeeling klaar, dan stellen we

$$f(p) = 0 \text{ en } f(q) = +\infty.$$

Nemen we b.v.

$(p) \equiv$ de rationale deelpunten van (a, b)

$(q) \equiv$ de irrationale deelpunten van (a, b) .

Volgens het schema zijn er dan 4 gevallen voor de functiewaarden:

0	0	0
∞	0	∞
∞	∞	∞
0	∞	∞

Hieruit volgt, dat volgens def. 1 de functie convex is.

§ 23. Definitie Onderste Grensfunctie.

Zij $f(x)$ op (a, b) naar onderen begrensd.

Dus voor

$$a \leq x \leq b,$$

$$f(x) \geq u.$$

Een punt ξ van (a, b) heeft een omgeving

$$\xi - \delta \leq x \leq \xi + \delta$$

waarvoor geldt:

$$f(x) \geq m(\xi, \delta).$$

De waarde m is dan de onderste grens van $f(x)$ op $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en hangt natuurlijk van de keuze van ξ en δ af. Daarom is op het zelfde interval voor iedere $\varepsilon > 0$ ook één punt minstens waarvoor

$$f(x) < m(\xi, \delta) + \varepsilon$$

(def. § 11 — 2.)

Neem ξ vast. Laat $\delta \rightarrow 0$. Dan zal $m(\xi, \delta)$ niet kleiner worden, m. a. w. monotoon stijgen, maar altijd $\leq f(\xi)$ blijven. Dus convergeert $m(\xi, \delta)$ tot een limiet $m(\xi)$.

Voor gegeven ξ is nu $m(\xi)$ de onderste grens van $f(x)$ in de buurt van ξ .

De functie $m(\xi)$ bij veranderlijke ξ is de onderste grensfunctie van $f(x)$.

§ 24. Stelling.

De onderste grensfunctie $m(x)$ van een naar onderen begrensde convexe functie is een continue convexe functie.

Bewijs der convexiteit van $m(x)$:

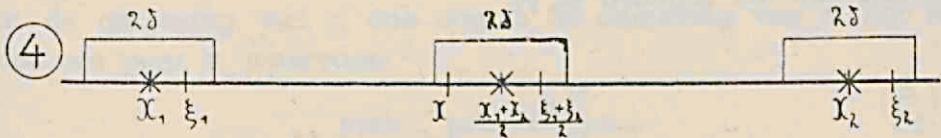
Zijn ξ_1 en ξ_2 willekeurige argumenten in het gedefinieerde interval van $f(x)$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Volgens de definitie van onderste grens (§ 11 — 2) bestaat er een

$$\delta = \delta(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) > 0,$$

zoodat voor

$$\left| x - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right| < \delta,$$

$$f(x) > m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (1)$$



Kies x_1 en x_2 (fig. 4) zoo dat

$$\begin{cases} |x_1 - \xi_1| < \delta \text{ en } f(x_1) < m(\xi_1) + \frac{\varepsilon}{2}. \\ |x_2 - \xi_2| < \delta \text{ en } f(x_2) < m(\xi_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Dus

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right| < \delta$$

en

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pas (1) toe op $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

dan

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maar volgens de convexiteit is

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Hieruit volgt

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

of

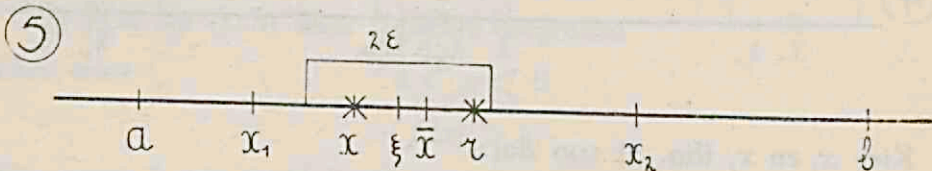
$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \varepsilon.$$

Dit geldt voor alle $\varepsilon > 0$. Dus

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \leq \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2},$$

waarmee de convexiteit van $m(x)$ is bewezen.

Bewijs van de continuïteit van $m(x)$, uitgezonderd voor de eindpunten van het segment (a, b) .



Om ieder inwendig punt ξ van (a, b) kan men een interval leggen, (x_1, x_2) zoodat ξ een rationaal deelpunt van (x_1, x_2) is. (fig. 5.)

Beschouwen we nu de deelfunctie $m(r)$ van de convexe functie $m(x)$. Volgens de stelling § 15 is $m(r)$ op de inwendige rationale deelpunten van (x_1, x_2) continu.

Er is dus een $\varepsilon > 0$, zoodat voor

$$|r - \xi| < \varepsilon \text{ en binnen } (x_1, x_2)$$

$$|m(r) - m(\xi)| < \frac{\delta}{2}.$$

In dit geval mogen we schrijven

$$m(r) < m(\xi) + \frac{\delta}{2},$$

want een deelverzameling kan zeker geen kleinere onderste grens hebben dan de verzameling, dus $m(r) \geq m(\xi)$.

Verder beweren we nu dat voor

$$|x - \xi| < \varepsilon,$$

$$m(x) < m(\xi) + \delta.$$

Daartoe moeten we laten zien, dat in ieder interval om x een punt $\bar{x}$ ligt, waar

$$f(\bar{x}) < m(\xi) + \delta.$$

Want dan moet ook

$$m(x) < m(\xi) + \delta.$$

Zeker ligt in iedere omgeving van x een rationaal deelpunt van (x_1, x_2) dat ook nog in

$$|r - \xi| < \varepsilon$$

ligt en waarvoor dus

$$m(r) < m(\xi) + \frac{\delta}{2}.$$

In de omgeving van r , ook nog in de omgeving van x , ligt er dus een punt $\bar{x}$, waarvoor

$$f(\bar{x}) < m(r) + \frac{\delta}{2}.$$

Maar dan is ook

$$f(\bar{x}) < m(\xi) + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = m(\xi) + \delta.$$

Dus in een omgeving van ξ is:

$$m(x) < m(\xi) + \delta.$$

Er is echter ook een omgeving van ξ , waarvoor

$$f(x) > m(\xi) - \frac{\delta}{2}$$

(def. ond. grens)

Dus daar is ook

$$m(x) \geq m(\xi) - \frac{\delta}{2} > m(\xi) - \delta.$$

Dus is $m(x)$ continu voor de inwendige punten van (a, b) .

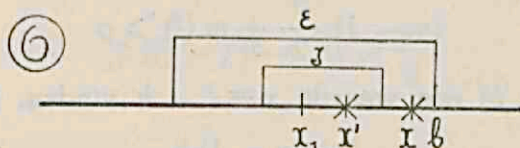
Bewijs van de continuïteit van $m(x)$ in b .

In het interval $b - x < \varepsilon$ is (fig. 6)

$$f(x) > m(b) - \frac{\delta}{2}.$$

Dus zeker

$$m(x) > m(b) - \delta.$$



In dat interval ligt ook een punt x_1 waar:

$$f(x_1) < m(b) + \frac{\delta}{2}.$$

dus

$$m(x_1) < m(b) + \frac{\delta}{2}.$$

Maar $m(x)$ is continu in x_1 dus in een interval δ om x_1 :

$$|m(x) - m(x_1)| < \frac{\delta}{2}$$

of

$$m(x) < m(x_1) + \frac{\delta}{2} < m(b) + \delta.$$

Bij ieder punt x tusschen x_1 en b behoort nu een x' in δ , zoodat x een rationaal deelpunt van (x', b) is. (Zie § 19).

We gebruiken nu de stelling van § 14.

$$m(x) < \text{Max. } \{ m(x'), m(b) \} < m(b) + \delta.$$

In het interval ε is dus:

$$m(x) > m(b) - \delta$$

en

$$m(x) < m(b) + \delta.$$

Dus $m(x)$ is continu in b .

Analoog wordt de continuïteit in a bewezen.

§ 25. Stelling.

Komt de functie $f(x)$, die convex is op het segment (a, b) in minstens één inwendig punt van (a, b) niet overeen met haar onderste grensfunctie, dan is ze niet naar boven begrensd.

Bewijs:

Zij voor $x = \xi$, $f(x) \neq m(x)$. ($a < \xi < b$).

Stel $f(\xi) - m(\xi) = p > 0$.

We zullen aantoonen, dat ergens op (a, b) , $f(x) > g$ is.

Kies $n > 0$ geheel zoodat:

$$(n-1) \frac{p}{2} + m(\xi) > g \quad (g \text{ gegeven})$$

Men kan op (a, b) een waarde $x = \xi - h$ vinden, dat

$$\xi + (n-1)h$$

nog in (a, b) ligt en tevens

$$|f(x) - m(\xi)| < \frac{p}{2}.$$

Dus

$$f(x) < m(\xi) + \frac{p}{2}.$$

Omdat echter

$$m(\xi) = f(\xi) - p,$$

is dus

$$f(x) < f(\xi) - \frac{p}{2}$$

of

$$f(\xi) - f(\xi - h) > \frac{p}{2}.$$

We gebruiken nu formule § 14 - 2, en wel:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \xi - h, x_n = \xi + (n-1)h.$$

Dan is

$$n f(\xi) \leq (n-1) f(\xi - h) + f\{\xi + (n-1)h\}$$

of

$$f\{\xi + (n-1)h\} \geq n\{f(\xi) - f(\xi - h)\} + f(\xi - h).$$

Maar

$$|f(\xi - h) - m(\xi)| < \frac{p}{2},$$

dus tegelijk

en

$$\begin{cases} f(\xi - h) < m(\xi) + \frac{p}{2} \\ f(\xi - h) > m(\xi) - \frac{p}{2} \end{cases}$$

Dus zeker

$$f(\xi - h) > m(\xi) - \frac{p}{2}.$$

Verder is

$$f(\xi) - f(\xi - h) > \frac{p}{2},$$

waaruit volgt

$$f\{\xi + (n-1)h\} > n \cdot \frac{p}{2} + m(\xi) - \frac{p}{2} = (n-1) \frac{p}{2} + m(\xi) > g.$$

Q. E. D.

§ 26. Definitie half continu naar boven, half continu naar beneden.

Volgens de definitie van de onderste grens $m(x)$ in een punt x (§ 23) kunnen we zeggen:

De onderste grens van $f(x)$ in een punt x is de bovenste grens van de onderste grenzen van functiewaarden in intervallen om x .

Een functie heet *half continu naar beneden* in een punt x als daar de functiewaarde samenvalt met de onderste grens, als dus

$$f(x) = m(x).$$

Is $f(x)$ voor alle $a < x < b$ half continu naar beneden, dan zegt men dat $f(x)$ half continu naar beneden is in het interval (a, b) .

Geheel overeenkomstig zijn de volgende definities:

De bovenste grens van $f(x)$ in een punt x is de onderste grens van de bovenste grenzen van functiewaarden in intervallen om x .

Een functie heet *half continu naar boven* in een punt x als daar de functiewaarde samenvalt met de bovenste grens, als dus

$$f(x) = M(x).$$

Voor

$$m(x) = f(x) = M(x)$$

is de functie continu in het punt x .

Nu kunnen we de stelling van § 25 ook als volgt formuleeren:

Is $f(x)$ convex op het interval (a, b) en naar boven begrensd, dan is $f(x)$ in dat interval half continu naar beneden.

Was n.l. in een punt

$$f(x) \neq m(x)$$

dan zou $f(x)$ niet naar boven begrensd kunnen zijn.

§ 27. Stelling 1.

Is $f(x)$ convex op (a, b) en naar boven begrensd, dan is ze continu binnen (a, b) .

Bewijs:

Volgens de stelling § 21 is $f(x)$ op (a, b) naar beneden begrensd en heeft dus een onderste grensfunctie, die begrensd is op (a, b) .

Volgens de stelling § 25 of § 26 is $f(x)$ in het inwendige van (a, b) met $m(x)$ identisch.

Volgens de stelling § 24 is $m(x)$ in dit geval een continue convexe functie, maar hier is voor

$$a < x < b,$$

$$m(x) \equiv f(x),$$

dus $f(x)$ continu op het inwendige van (a, b) .

Opmerking 1. We zien dus bij een convexe functie, dat de begrensdsheid naar boven voldoende is voor de continuïteit.

Noodzakelijk is die begrensdsheid niet als de functie op een interval is gegeven, zooals uit het voorbeeld van § 22. Opm. 1 blijkt. Is de functie op een segment gegeven, dan is natuurlijk de begrensdsheid noodzakelijk voor de continuïteit.

We hebben dus

Stelling 2.

De noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de continuïteit van een convexe functie op het segment (a, b) is het naar boven begrensd zijn.

Hieruit volgt weer, dat een discontinue convexe functie niet naar boven begrensd kan zijn. Het is ook daarom dat we in § 22 Opm. 3 een discontinue convexe functie zochten onder die met functiewaarden ∞ .

Stelling 3.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) en naar boven begrensd, dan is $f(x)$ daar half continu naar boven.

Bewijs:

Voor het interval (a, b) is de stelling reeds bewezen door stelling 1.

Stel nu b.v. in a :

$$f(a) > M(a).$$

Dit kan niet, want dan zou $f(a)$ zelf de bovenste grens zijn.

Stel dan

$$f(a) < M(a).$$

Dan zou er een reeks van punten a_n zijn, met de voorwaarde, als

$$a_n \rightarrow a,$$

dan

$$f(a_n) \rightarrow M(a) > f(a).$$

Uit de definitie van convexiteit volgen nu voor de argumenten $a, a + a, a + 2a, \dots, a + pa$, ($p > 0$, geheel) de betrekkingen

$$f(a + 2a) \geq 2f(a + a) - f(a) = f(a) + 2\{f(a + a) - f(a)\},$$

$$f(a + 3a) \geq 3f(a + a) - 2f(a) = f(a) + 3\{f(a + a) - f(a)\},$$

$$\dots \dots \dots f(a + pa) \geq pf(a + a) - (p - 1)f(a) = f(a) + p\{f(a + a) - f(a)\}.$$

Is μ_n het aantal geheelen van de breuk

$$\frac{b - a}{a_n - a},$$

dan zou dus

$$f\{a + \mu_n(a_n - a)\} \geq f(a) + \mu_n\{f(a_n) - f(a)\}.$$

Als

$$n \rightarrow +\infty,$$

dan

$$\mu_n \rightarrow +\infty,$$

en

$$f(a) + \mu_n\{f(a_n) - f(a)\} \rightarrow +\infty,$$

wegens

$$f(a_n) - f(a) \rightarrow M(a) - f(a) > 0.$$

Dan zou dus $f(x)$ niet naar boven begrensd zijn. Dus moet

$$M(a) = f(a)$$

zijn.

Het bewijs der stelling voor het punt b is geheel analoog.

Opmerking 2.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) en naar onderen begrensd dan behoeft niet $f(a) = m(a)$ te zijn.

Men neme slechts het voorbeeld:

$$f(x) = 0, \text{ als } a < x < b.$$

$$f(a) = 1$$

$$f(b) = 1.$$

We zien hier de convexe functie op het segment (a, b) , terwijl

$$m(a) = 0$$

en

$$f(a) = 1$$

en $f(x)$ naar onderen begrensd is.

§ 28. Stelling.

Is $f(x)$ convex op (a, b) en is $f(x)$ niet identiek met $m(x)$ in het inwendige van (a, b) , dan is de functiewaardenverzameling overal dicht op het interval: onderste grens tot $+\infty$.

Bewijs:

We stellen

$$a \leq \xi \leq b$$

en

$$\eta > m(\xi).$$

We zullen aantonen: Voor elke $\delta > 0$ is er een x , zoodat

$$|x - \xi| < \delta$$

en

$$|f(x) - \eta| < \delta.$$

Volgens de stelling van § 24 is $m(x)$ continu. Er is dus een $\Delta > 0$, zoodat voor

$$|x - \xi| < \Delta,$$

$$\eta - \frac{\eta - m(\xi)}{2} > m(x).$$

We kunnen ons tot de δ 's bepalen, die kleiner zijn dan

$$\text{Min.} \left(\Delta, \frac{\eta - m(\xi)}{2} \right).$$

Dan is voor

$$|x - \xi| < \delta, \quad \eta - \delta > m(x).$$

Volgens de stelling van § 25 is $f(x)$ niet naar boven begrensd, omdat ze op het inwendige van (a, b) niet met $m(x)$ identisch is.

Volgens de stelling van § 19 geldt hetzelfde voor het interval

$$|x - \xi| < \delta.$$

We kunnen dus x_1 zoo kiezen, dat

$$|\xi - x_1| < \delta$$

en

$$f(x_1) > \eta + \delta.$$

Kies verder x_2 zoodat

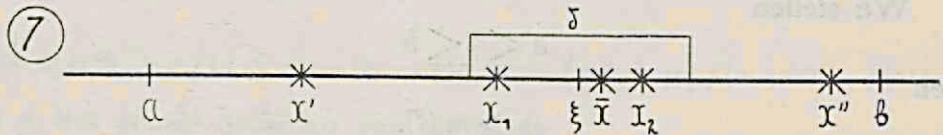
$$|\xi - x_2| < \delta$$

en

$$f(x_2) < \eta - \delta.$$

Dit kan omdat voor $|x - \xi| < \delta$ voor de onderste grens geldt
 $m(x) < \eta - \delta$

en in willekeurige nabijheid van de onderste grens functiewaarden liggen.



*Men kan nu x' en x'' op (a, b) zoo kiezen, dat x_1 en x_2 inwendige rationale deelpunten van het interval (x', x'') zijn. (fig. 7)

Volgens de stelling van § 18 is er dan een continue functie $F(x)$, die met $f(x)$ in de rationeele deelpunten van (x', x'') samenvalt, dus ook in x_1 en x_2 .

Deze $F(x)$ is voor x_1 grooter dan $\eta + \delta$ en voor x_2 kleiner dan $\eta - \delta$. Zij neemt in een tusschenpunt $\bar{x}$ dus de waarde η aan en in voldoende kleine omgeving van $\bar{x}$, waarden die minder dan δ van η verschillen. (continuïteit!)

In die omgeving liggen ook rationale deelpunten van (x', x'') , waar $F(x) = f(x)$ is.

Dus zijn er zeker tusschen x_1 en x_2 , d. w. z. in

$$|x - \xi| < \delta$$

punten waar

$$|f(x) - \eta| < \delta$$

is. Q. E. D.

§ 29. Stelling.

Is $f(x)$ convex op (a, b) en niet naar onderen begrensd, dan is de functiewaardenverzameling overal dicht op het vak $(-\infty, +\infty)$.

Bewijs:

Volgens de stelling van § 22 is $f(x)$ niet naar boven begrensd op (a, b) .

Is dus $a \leq \xi \leq b$ en η willekeurig, dan is bij gegeven $\delta > 0$ de functie $f(x)$ op

$$|x - \xi| < \delta$$

niet naar boven en niet naar beneden begrensd volgens de stellingen van de §§ 19–20.

Men kan dus x_1 en x_2 vinden, zoodat

$$|\xi - x_1| < \delta$$

en

$$f(x_1) > \eta + \delta,$$

en tegelijk

$$|\xi - x_2| < \delta$$

en

$$f(x_2) < \eta - \delta.$$

Maken we nu dezelfde redeneering als in § 28 vanaf het teeken *, dan kan men ook hier aantonen, dat $f(x)$ tusschen x_1 en x_2 dus op

$$|x - \xi| < \delta$$

een waarde tusschen $\eta - \delta$ en $\eta + \delta$ moet aannemen.

HOOFDSTUK III.

Afgeleiden. Verband tusschen monotone en convexe functies.

Aanvulling en uitbreiding van hoofdstuk II.

§ 30. De stelling 1 van § 27, welke in het vorige hoofdstuk gevonden is door bestudeering van de onderste grensfunctie, kan ook direct worden afgeleid uit de formule (2) van § 14.

Stel dus:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right).$$

Als

$$n > m, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_m = x + n\delta, \quad x_{m+1} = \dots = x_n = x,$$

dan is

$$f(x + m\delta) \leq \frac{m}{n} f(x + n\delta) + \frac{n-m}{n} f(x),$$

of

$$\frac{f(x + n\delta) - f(x)}{n} \geq \frac{f(x + m\delta) - f(x)}{m}.$$

Vervang δ door $-\delta$ en stel

$$a < x - n\delta < x + n\delta < b,$$

dan is

$$\frac{f(x) - f(x - m\delta)}{m} \geq \frac{f(x) - f(x - n\delta)}{n}.$$

Uit de convexiteit volgt

$$f(x + m\delta) - f(x) \geq f(x) - f(x - m\delta).$$

Dus

$$\frac{f(x+n\delta) - f(x)}{n} \geq \frac{f(x+m\delta) - f(x)}{m} \geq \frac{f(x) - f(x-m\delta)}{m} \geq \frac{f(x) - f(x-n\delta)}{n} \dots (1).$$

Onderstellen we $f(x)$ begrensd naar boven,

$$f(x) \leq M.$$

stel

$$m = 1,$$

dan gaat (1) over in:

$$\frac{M - f(x)}{n} \geq f(x + \delta) - f(x) \geq f(x) - f(x - \delta) \geq \frac{f(x) - M}{n}.$$

Laat nu $\delta \rightarrow 0$, tegelijk $n \rightarrow \infty$, zoodat

$$a < x \pm n\delta < b$$

blijft. Dan is

$$\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \{f(x + \delta) - f(x)\} = 0.$$

Voor de punten a en b bestaan de grenswaarden

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ en } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

Volgens de convexiteit kan de functiewaarde in elk dier punten niet kleiner zijn dan genoemde limiet.

Geheel analoog komt men tot de volgende

Stelling. Is $f(x)$ concaaf en naar beneden begrensd op het interval (a, b) , dan is ze op het interval (a, b) continu.

Een lineaire functie is dus continu als ze of naar boven of naar beneden begrensd is. Volgens de opmerking 1 van § 15 en de daarmee analoog voor concave functies, komt een lineaire functie overal dicht op de rechte $\{a, f(a) - b, f(b)\}$. Maar de functie is continu, dus wordt een begrensde lineaire functie door een rechte lijn voorgesteld.

§ 31. Stelling 1.

Is $f(x)$ convex op het interval (a, b) en naar boven begrensd, dan heeft ze in elk punt een rechter- en een linker afgeleide. Tevens geldt

$$f'_+(x) - f'_-(x) \geq 0.$$

Bewijs. Substitueer in de formule § 30 — (1), $\frac{\delta}{n}$ in plaats van δ ; stel $\delta > 0$, dan:

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \geq \frac{f(x + \frac{m}{n}\delta) - f(x)}{\frac{m}{n}\delta} \geq \frac{f(x) - f(x - \frac{m}{n}\delta)}{\frac{m}{n}\delta} \geq \frac{f(x) - f(x - \delta)}{\delta}.$$

Laat nu

$$\frac{m}{n} \rightarrow a,$$

als

$$1 > a > 0.$$

Dan is

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \geq \frac{f(x + a\delta) - f(x)}{a\delta} \geq \frac{f(x) - f(x - a\delta)}{a\delta} \geq \frac{f(x) - f(x - \delta)}{\delta}.$$

Men ziet dat bij afnemende δ , het differentiequotient

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

nooit groeit en dat het niet kleiner kan worden dan

$$\frac{f(x) - f(x - \delta')}{\delta'}$$

voor $\delta' > 0$ willekeurig. Dus

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \geq \frac{f(x) - f(x - \delta')}{\delta'}.$$

Ieder rechter differentiequotient is eindig vanwege de begrensdheid van $f(x)$. De rechter afgeleide als limiet van niet toenemende eindige differentiequotienten is dus $< +\infty$.

Analoog is

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(x - \delta)}{\delta} \leq \frac{f(x + \delta') - f(x)}{\delta'}.$$

Ieder linker differentiequotient is eindig, neemt niet af bij afnemende δ , en is hoogstens gelijk aan een rechter differentiequotient voor dezelfde waarde van x . Dus is

$$-\infty < L \leq R < +\infty.$$

Verder zullen we aantoonen, dat L en R monotoon niet afnemende functies zijn bij toenemende x .

Beschouw twee argumenten x_1 en x_2 ,

$$x_1 < x_2.$$

Maak de differentiequotienten

$$\frac{f(x_1 + \delta) - f(x_1)}{\delta} \quad \text{en} \quad \frac{f(x_2 + \delta) - f(x_2)}{\delta}.$$

In verband met Opm. 2 § 15 mogen we zeggen, dat het eerste quotient hoogstens gelijk is aan het tweede. Gebruiken we in beide dezelfde δ dan is bij de limiet ook

$$f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2).$$

Analoog vinden we dat

$$f'_-(x_1) \leq f'_-(x_2).$$

Als we nu bedenken

1°. Een monotone functie heeft hoogstens aftelbaar veel discontinuïteitspunten;

2°. Is in een punt x één der afgeleiden continu, dan zijn ze het allen en hebben dezelfde waarde zoodat de functie daar dus differentieerbaar is;

dan hebben we de stelling:

Stelling 2.

De rechter- en linker afgeleide van een convexe naar boven begrensde functie zijn eindige monotone functies, die hoogstens in aftelbaar veel punten verschillen.

§ 32. Stelling 1.

Een naar boven begrensde convexe functie is gelijk aan de integraal van een eindige monotone functie.

De rechter afgeleide van een convexe functie is als monotone functie Riemann integreerbaar.

Stel nu

$$\int_a^x f'_+(x) = F(x) \quad , \quad a \leq x \leq b.$$

Volgens de eigenschappen der integralen zal de rechter afgeleide van $F(x)$ gelijk zijn aan

$$f'_+(x+0),$$

welke waarde eindig is voor $a < x < b$. De functies F en f hebben daar dus overal dezelfde eindige rechter afgeleide. Dus $F - f$ heeft daar overal nul tot rechter afgeleide, derhalve is $F - f$ constant voor $a < x < b$. Omdat nu voor

$$\begin{aligned} x &= a \\ F - f &= 0, \end{aligned}$$

is zal ook

$$F - f = 0 \quad \text{voor} \quad a \leq x \leq b.$$

Stelling 2.

De integraal van een eindige monotone functie is een (continue) convexe functie van de bovenste grens.

Neem de argumenten

$$x_1, \quad x_2, \quad \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dan hebben we afs $f(x)$ de bedoelde monotone functie is:

$$\int_a^{x_1} f(x) dx = \int_a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} f(x) dx - \int_{x_1}^{\frac{x_1 + x_2}{2}} f(x) dx$$

en

$$\int_a^{x_2} f(x) dx = \int_a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{x_1 + x_2}{2}}^{x_2} f(x) dx$$

Opgeteld:

$$\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_a^{x_2} f(x) dx = 2 \int_a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{x_1 + x_2}{2}}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{\frac{x_1 + x_2}{2}} f(x) dx$$

Uit de monotonie van $f(x)$ volgt echter :

$$\int_{\frac{x_1 + x_2}{2}}^{x_2} - \int_{x_1}^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \geq 0.$$

Dus

$$\int_a^{x_1} + \int_a^{x_2} \geq 2 \int_a^{\frac{x_1 + x_2}{2}},$$

waaruit volgt dat de $\int$ een convexe functie van x is.

Uit de twee laatste stellingen volgt dus de identiteit van continue convexe functies en integralen van monotone functies.

Zij $f(x)$ een functie op (a, b) met een eindige monotone rechter afgeleide $f'_+(x)$.

Dan heeft de functie

$$f(x) - \int_a^x f'_+(x)$$

nul tot rechter afgeleide in alle continuïteitspunten van f'_+ , dus overal uitgezonderd hoogstens in aftelbaar veel punten, terwijl de rechter afgeleide nergens $\pm \infty$ is. De functie is dus constant. Derhalve is $f(x)$ convex volgens stelling 2.

Omgekeerd heeft iedere naar boven begrensde convexe functie een eindige monotone rechter afgeleide; we hebben dus:

Stelling 3.

De noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor een naar boven begrensde functie om convex te zijn op een interval (a, b) is het bezitten van een eindige monotone rechter afgeleide.

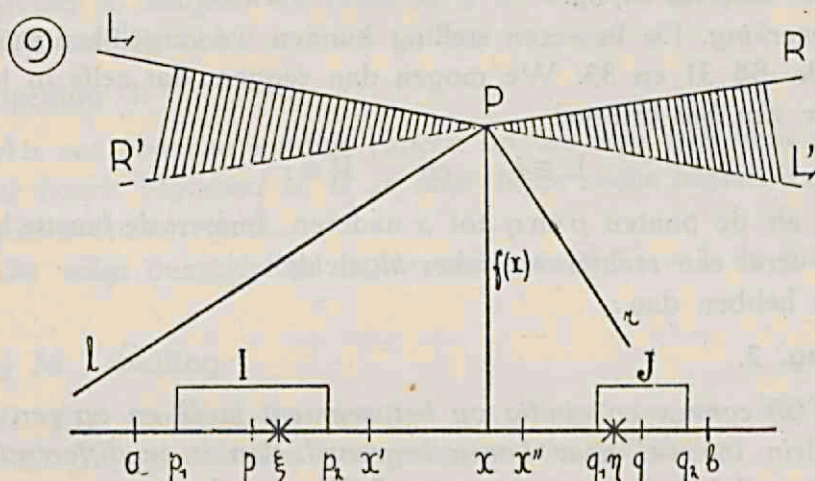
Opmerking. In stelling 3 mag rechter afgeleide door linker afgeleide worden vervangen.

Stelling 2.

Is $f(x)$ convex en eindig op het segment (a, b) en op een nog zoo klein interval naar boven begrensd, dan is ze continu op het interval (a, b) .

§ 34. Stelling 1.

Is $f(x)$ convex en eindig op het segment (a, b) en op een nog zoo klein interval naar boven begrensd, dan heeft ze binnen (a, b) overal eindige afgeleide getallen.



Vofgens § 33 stelling 2 is $f(x)$ continu binnen (a, b) . Neem een punt x , zoodat

$$a < x < b.$$

Neem 2 punten p en q zoodat

$$a < p < x < q < b.$$

Leg om de punten p en q segmenten I en J zoodat

$$a < p_1 < p < p_2 < x \text{ en } x < q_1 < q < q_2 < b.$$

De rechten van $P \equiv (x, f(x))$ naar de eindpunten der ordinaten op I hebben twee extreme standen l en L , die kunnen samenvallen (nl. als $f(x)$ lineair is op I en P juist op de rechte ligt die de functie op I voorstelt). Analoog r en R voor J .

Kies x' zoodat

$$p_2 < x' < x,$$

dan bevat I een punt ξ , zoodat x' een rationaal deelpunt is van (ξ, x) . Volgens de stelling van § 15. ligt $f(x')$ niet boven de lijn

$$\{x, f(x) - \varepsilon, f(\xi)\},$$

dus zeker niet boven L.

Verder bevat J een punt η , zoodat x een rationaal deelpunt is van (x', η) . Dus ligt $f(x')$ niet onder de lijn R' , het verlengde van R.

Eenzoo kies x'' zoodat

$$x < x'' < q_1,$$

dan bewijzen we op de zelfde manier, dat $f(x'')$ niet boven R en niet onder L' , het verlengde van L, ligt.

Dus heeft de functie eindige afgeleide getallen voor alle punten van het interval (a, b) .

Opmerking. De bewezen stelling kunnen we vergelijken met die van de §§ 31 en 33. We mogen dan zeggen, dat zelfs in ieder punt x van het interval

$$L \equiv l \quad \text{en} \quad R \equiv r$$

wordt als de punten p en q tot x naderen. Immers de functie heeft zelfs overal een rechter en linker afgeleide.

We hebben dan:

Stelling. 2.

Is $f(x)$ convex en eindig op het segment (a, b) en op een nog zoo klein interval naar boven begrensd, dan is ze differentieerbaar overal behalve misschien in aftelbaar veel punten.

§ 35. Stelling 1.

Is $f(x)$ convex op het segment (a, b) , continu en eindig op het interval (a, b) , dan heeft $f(x)$ een eindige onderste grens op het segment (a, b) .

Was namelijk de onderste grens $-\infty$, dan moest die wegens de continuïteit bereikt worden in a of in b .

Onderstel in b . Neem x_0 willekeurig, dan is:

$$2 f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \leq f(x_0) + f(x),$$

of

$$2 f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - f(x_0) \leq f(x).$$

Dan was

$$\lim_{x=b} 2 f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - f(x_0) \leq \lim_{x=b} f(x).$$

Het linker lid is eindig. Dus was het rechter lid ook $> -\infty$, waarmee de stelling is bewezen.

Geheel analoog bewijst men:

Stelling 2.

Is $f(x)$ concaaf op het segment (a, b) , continu en eindig op het interval (a, b) , dan heeft $f(x)$ een eindige bovenste grens op het segment (a, b) .

Verder volgt nu uit de stellingen van § 27 — 1 en § 35 1, dat een naar boven begrensde convexe functie ook naar onderen begrensd is, hetgeen we reeds in § 21 afgeleid hebben.

We hebben ook:

Stelling 3.

Als een convexe eindige functie op een nog zoo klein interval naar boven begrensd is, is ze naar beide zijden begrensd op ieder segment binnen (a, b) .

Dit volgt onmiddellijk uit de stellingen § 33 — 1 en § 21.

§ 36. Stelling.

Is $f(x)$ convex en continu en neemt ze in drie punten $x_1 < x_2 < x_3$, waarden aan waarvoor de gelijkheden

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \lambda$$

gelden, dan is ze op het segment (x_1, x_3) lineair.

Beschouw de lineaire functie

$$F(x) = f(x_2) + \lambda(x - x_2).$$

Volgens de stelling van § 13 — 1 zal voor

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

voldaan zijn aan

$$f(x) \leq F(x).$$

Neem 2 punten: $x_2 - h$ en $x_2 + h < x_3$.

Dan moet

$$f(x_2 - h) + f(x_2 + h) \geq 2f(x_2)$$

zijn. Maar

$$F(x_2 - h) + F(x_2 + h) = 2F(x_2) = 2f(x_2).$$

Omdat

$$x_1 < x_2 - h < x_2$$

is

$$F(x_2 - h) \geq f(x_2 - h)$$

en dus

$$f(x_2 + h) \geq F(x_2 + h).$$

Maar $f(x)$ is ook op het segment (x_2, x_3) convex, dus daar geldt

$$f(x_2 + h) \leq F(x_2 + h).$$

Voor het segment (x_2, x_3) is dus voldaan aan

$$f(x) = F(x).$$

Buiten het segment (x_2, x_3) moeten de functiewaarden van $f(x)$ grooter zijn dan (of gelijk zijn aan) die van $F(x)$. Op (x_1, x_2) geldt dus

$$f(x) \leq F(x) \text{ en } f(x) \geq F(x),$$

dus is $f(x)$ lineair op het geheele segment (x_1, x_3) .

Opmerkingen. Meetkundig beschouwd zegt de stelling dat de grafische voorstelling van een continue convexe functie, die 3 punten met een rechte lijn gemeen heeft, er tusschen de uiterste punten mee samenvalt.

Men ziet direct in dat deze stelling ook voor een continue concafe functie geldt.

Is $f(x)$ convex en overal $\geq$ een lineaire functie $F(x)$, en neemt ze in x_1 en x_2 de waarden $F(x_1)$ en $F(x_2)$ aan, dan is ze op (x_1, x_2) lineair.

Is $f(x)$ concaaf en overal $\leq$ een lineaire functie $F(x)$, en neemt ze in x_1 en x_2 de waarden $F(x_1)$ en $F(x_2)$ aan, dan is ze op (x_1, x_2) lineair.

§ 37. Stelling 1.

Een monotoon toenemende (d. w. z. niet afnemende) eindige convexe functie is in ieder punt rechts continu.

Uit de convexiteit volgt:

$$2f\left(x + \frac{h}{2}\right) \leq f(x) + f(x + h) \quad (h > 0)$$

of

$$2 \left\{ f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x) \right\} \leq f(x+h) - f(x).$$

Vervang h door $\frac{h}{2}$:

$$2 \left\{ f\left(x + \frac{h}{4}\right) - f(x) \right\} \leq f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)$$

of

$$4 \left\{ f\left(x + \frac{h}{4}\right) - f(x) \right\} \leq f(x+h) - f(x).$$

Door de sluitrede van m op $m+1$ vinden we:

$$f\left(x + \frac{h}{2^m}\right) - f(x) \leq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{2^m}.$$

Daar $f(x)$ monotoon toeneemt is voor elke $\delta > 0$

$$f(x+\delta) - f(x) \geq 0.$$

Dus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ f\left(x + \frac{h}{2^m}\right) - f(x) \right\} = 0.$$

Geheel op dezelfde wijze ziet men in:

Stelling. 2.

Een monotoon toenemende eindige concave functie is in ieder punt links continu.

Stelling. 3.

Een monotoon afnemende eindige convexe functie is in ieder punt links continu.

Stelling 4.

Een monotoon afnemende eindige concave functie is in ieder punt rechts continu.

Opmerking. In stelling 1 volgt uit de eindigheid en de monotonie, dat $f(x)$ begrensd is op ieder interval van het gegeven segment (a, b) en kunnen we door gebruik te maken van de stellingen van § 33 direct tot de continuïteit binnen (a, b) besluiten, dus zeker tot de continuïteit naar rechts in ieder punt binnen (a, b) .

HOOFDSTUK IV.

Functies samengesteld uit convexe, concave,
lineaire functies.

Functies van twee of meer veranderlijken.

§ 38. Stelling.

Als $f(x)$ convex is in het interval (a, b) en niet afnemend als x toeneemt; als $\varphi(x)$ convex is in zeker interval (a, β) , terwijl haar waardenvoorraad ligt in het interval (a, b) , dan is $f\{\varphi(x)\}$ ook convex op (a, b) .

Bewijs. Uit

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$$

volgt in verband met de monotonie van f :

$$f\left\{\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\} \leq f\left\{\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right\}$$

en in verband met de convexiteit van f :

$$f\left\{\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\} \leq f\left\{\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right\} \leq \frac{1}{2}\left\{f[\varphi(x)] + f[\varphi(y)]\right\}.$$

Voorbeeld. Neem $f(x) = e^{cx}$. Deze functie is volgens § 9 convex in ieder interval. Neem voor $\varphi(x)$ een willekeurige eindige convexe functie.

Dan is

$$F(x) = e^{c \cdot \varphi(x)}$$

convex in ieder interval.

Andere gevallen worden op dezelfde manier bewezen en geven aanleiding tot het volgende schema:

$f(x)$	$\varphi(x)$	$f\} \varphi(x)\}$
convex toenemend	convex	convex
concaaf afnemend	convex	concaaf
convex afnemend	concaaf	convex
concaaf toenemend	concaaf	concaaf

Als $f(x)$ en $\varphi(x)$ inverse functies zijn, dan krijgen we:

$f(x)$	$\varphi(x)$
convex toenemend	concaaf toenemend
convex afnemend	convex afnemend
concaaf afnemend	concaaf afnemend

Voorbeeld. Neem $f(x) = \lg x$. Deze functie is volgens § 9 concaaf op $(0, +\infty)$.

Neem voor $\varphi(x)$ een willekeurige positieve eindige concave functie. Dan is

$$F(x) = \lg \varphi(x)$$

concaaf op $(0, +\infty)$.

§ 39. Producten van Convexe en Concave functies.

We onderstellen $f(x)$ en $g(x)$ beide convex op eenzelfde interval (a, b) . Voor

$$a < x_1 < b \text{ en } a < x_2 < b$$

geldt dan:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ en } g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}.$$

Onderstel nu f en g niet negatief op (a, b) . Dan is:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{4} \left[f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1) \right].$$

We zullen afkorten en schrijven

$$f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, \text{ enz.}$$

Onderstel nog f en g tegelijk niet afnemend bij toenemende x . Dus voor

$$x_2 > x_1$$

is tegelijk

$$f_2 \geq f_1 \text{ en } g_2 \geq g_1.$$

Dan is

$$f_2 g_2 - f_2 g_1 \geq f_1 g_2 - f_1 g_1$$

of

$$\frac{1}{4}(f_1 g_1 + f_2 g_2) \geq \frac{1}{4}(f_1 g_2 + f_2 g_1).$$

Tel bij beide leden het linker lid op, dan is

$$\frac{1}{2}(f_1 g_1 + f_2 g_2) \geq \frac{1}{4}(f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_1 g_2 + f_2 g_1).$$

We zien dus dat

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2)}{2}.$$

De convexiteit van de functie $f \cdot g$ is hiermede bewezen.

Analoog het bewijs als f en g afnemend (niet toenemend) zijn.

We laten nu een overzicht volgen van de verschillende gevallen, die zich hierbij kunnen voordoen.

1^e f en g tegelijk toenemend of afnemend.

f	g	$f \cdot g$
convex positief	convex positief	convex
„ negatief	concaaf „	„
concaaf „	„ negatief	„
convex positief	lineair positief	„
„ negatief	„ „	„
concaaf positief	„ negatief	„
„ negatief	„ „	„
lineair	lineair	„

2^e f en g , één toenemend één afnemend.

f	g	$f \cdot g$
convex positief	concaaf negatief	concaaf
„ negatief	convex „	„
concaaf positief	concaaf positief	„
convex „	lineair negatief	„
„ negatief	„ „	„
concaaf positief	„ positief	„
„ negatief	„ „	„
lineair	lineair	„

Bijzondere gevallen: De n^e macht van een lineaire functie is convex evenals de n^e macht van een convexe positieve functie. Een even macht van een convexe negatieve functie is concaaf.

De n^e macht van een concave negatieve functie is convex of concaaf al naarmate de functie even of oneven is.

Opmerking. Voor niet genoemde gevallen behoort de functie onderzocht te worden. x^2 en x^{-2} zijn positief convex. Hun product is lineair.

§ 40. Definitie convexe functie voor meerdere veranderlijken.

We beschouwen een eenwaardige reële functie van n reële veranderlijken $x, y, z, \dots$. Het punt met de coördinaten $x_1, y_1, z_1, \dots$ noemen we X_1 .

Het gebied G waarin de functie $f(X)$ gedefinieerd wordt moet de volgende eigenschap hebben: Behooren

$$P = (x_p, y_p, z_p, \dots)$$

en

$$Q = (x_q, y_q, z_q, \dots)$$

tot G , dan moet R ook tot G behooren als haar coördinaten voldoen aan

$$\frac{x - x_p}{x_p - x_q} = \frac{y - y_p}{y_p - y_q} = \frac{z - z_p}{z_p - z_q} = \dots$$

Meetkundig: Als de punten P en Q tot het gebied G behooren, dan behoort het segment PQ der n -dimensionale ruimte er ook toe. Het gebied wordt dan *convex* genoemd.

We kunnen nu ook hier spreken van het punt $\frac{X_1 + X_2}{2}$ dat midden tusschen X_1 en X_2 ligt. Dan is

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}, \dots \right).$$

De convexiteit van G is voldoende om te waarborgen, dat $f(X)$ in $\frac{X_1 + X_2}{2}$ bepaald is, als ze het in X_1 en X_2 is.

We noemen nu de functie $f(X)$ in het convexe gebied G convex, als

$$f\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(X_1) + \frac{1}{2}f(X_2).$$

Voorbeeld.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

is convex voor positieve waarden van x en y . Er is te bewijzen

$$2 \sqrt{\left\{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2\right\}} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

of

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

welke ongelijkheid na eenige herleiding wordt

$$0 \leq (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2$$

waaraan voldaan is.

Verder volgt nog uit de definitie, dat een convexe functie van n veranderlijken ook convex is voor iedere veranderlijke als men de $(n - 1)$ overige constant neemt.

§ 41. Stelling 1.

Als $f(z)$ convex is in het interval (a, b) en niet afnemend als z toeneemt; als $\varphi(x, y)$ convex is in een convex gebied G , terwijl haar waardevoorraad ligt in het interval (a, b) , dan is $f\{\varphi(x, y)\}$ convex in G .

Bewijs. Uit

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)}{2}$$

volgt in verband met de monotonie van f :

$$f\left[\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right] \leq f\left[\frac{\varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)}{2}\right],$$

en in verband met de convexiteit van f :

$$f\left[\frac{\varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)}{2}\right] \leq \frac{1}{2} \left[f\{\varphi(x_1, y_1)\} + f\{\varphi(x_2, y_2)\} \right],$$

waaruit de convexiteit van de functie $f\{\varphi(x, y)\}$ volgt.

Andere gevallen worden op dezelfde manier bewezen en geven aanleiding tot het schema:

$\varphi(x, y)$	$f(z)$	$f\{\varphi(x, y)\}$
convex	convex toenemend	convex
"	concaaf afnemend	concaaf
concaaf	" toenemend	convex
"	convex afnemend	concaaf

Stelling 2.

Als $f(x)$ en $g(x)$ beide convex zijn op (a, b) met eindige bovenste grenzen L_f, L_g en eindige onderste grenzen l_f, l_g ; als $F(u, v)$ convex is en zoowel bij constante u een niet afnemende functie van v , als bij constante v een niet afnemende functie van u , in het interval

$$l_f < u < L_f, \quad l_g < v < L_g,$$

dan is de functie

$$F\{f(x), g(x)\}$$

convex op (a, b) .

Bewijs. Uit de convexiteit van f en g volgt

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}.$$

Dit in verband met de monotonie en de convexiteit van F geeft

$$\begin{aligned} F\left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right] &\leq F\left[\frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}, \frac{1}{2}\{g(x_1) + g(x_2)\}\right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[F\{f(x_1), g(x_1)\} + F\{f(x_2), g(x_2)\} \right], \end{aligned}$$

waaruit de convexiteit van $F\{f(x), g(x)\}$ volgt.

Andere gevallen worden op dezelfde manier bewezen en geven aanleiding tot het volgende schema:

$f(x)$	$g(x)$	$F(u, v)$	bij toen. u	bij toen. v	$F(f, g)$
convex	convex	convex	toenemend	toenemend	convex
"	concaaf	"	"	afnemend	"
concaaf	convex	concaaf	"	"	concaaf

§ 42. Stelling.

Als $f(x)$ een convexe continue functie is op een interval; de n getallen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

behooren tot dat interval en alle

$$a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

doch overigens willekeurig, dan is

$$f \left[\frac{\sum_{v=1}^n a_v x_v}{\sum_{v=1}^n a_v} \right] \leq \frac{\sum_{v=1}^n a_v f(x_v)}{\sum_{v=1}^n a_v} \dots \dots \dots (1).$$

Bewijs. Stel

$$n = n_1 + n_2 + \dots \dots \dots n_m,$$

alle $n_i > 0$ en geheel.

We gebruiken nu de formule (2) van § 14, welke dan wordt

$$f \left\{ \frac{1}{n} (n_1 x_1 + \dots + n_m x_m) \right\} \leq \frac{1}{n} \{ n_1 f(x_1) + \dots + n_m f(x_m) \}.$$

Stel

$$a_1 + \dots \dots \dots a_m = a,$$

alle $a_i > 0$.

Laat

$$n \rightarrow \infty$$

zoodat

$$\lim. \frac{n_1}{n} = \frac{a_1}{a}, \quad \lim. \frac{n_2}{n} = \frac{a_2}{a}, \dots \dots \lim. \frac{n_{m-1}}{n} = \frac{a_{m-1}}{a}.$$

Hieruit volgt

$$\lim. \frac{n_m}{n} = 1 - \frac{a_1 + \dots + a_{m-1}}{a} = \frac{a_m}{a}.$$

Omdat $f(x)$ continu is mogen we nu schrijven

$$f \left\{ \frac{\sum_{v=1}^m a_v x_v}{a} \right\} \leq \frac{\sum_{v=1}^m a_v f(x_v)}{a},$$

waaruit de formule (1) volgt.

§ 43.

Het is duidelijk, dat de stelling van § 42 ook voor concave en lineaire functies geldt, mits we in de formule (1) het teken $\leq$ door $\geq$ resp. $=$ vervangen.

Passen we de stelling toe op het geval

$$f(x) = \log x,$$

welke functie volgens § 9 concaaf is. We krijgen dan

$$\log \frac{\sum_{v=1}^n a_v x_v}{\sum_{v=1}^n a_v} \geq \frac{\sum_{v=1}^n a_v \log x_v}{\sum_{v=1}^n a_v}$$

of

$$\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{a_1 + \dots + a_n} \geq \left(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}$$

Dit is een generalisatie van de eigenschap van het meetkundig gemiddelde.

Stel maar

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$$

$$n = 2$$

dan vereenvoudigt zich de formule tot

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

of voor $n = 4$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

§ 44.

Passen we de stelling van § 42 toe op het geval van de convexe functie

$$f(x) = x^{\frac{p+q}{p}} \quad (p \text{ en } q > 0, \text{ geheel}),$$

vervang verder x_v door x_v^p , dan krijgen we

$$\left(\frac{a_1 x_1^p + \dots + a_n x_n^p}{a_1 + \dots + a_n} \right)^{\frac{p+q}{p}} \leq \frac{a_1 x_1^{p+q} + \dots + a_n x_n^{p+q}}{a_1 + \dots + a_n}.$$

Breng beide leden tot de p^e macht, dan krijgt men na herleiding

$$(a_1 x_1^p + \dots + a_n x_n^p)^{p+q} \leq (a_1 x_1^{p+q} + \dots + a_n x_n^{p+q})^p (a_1 + \dots + a_n)^q.$$

Stel nu

$$n = 2,$$

$$a_1 = \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{p+q},$$

$$a_2 = 1.$$

Vervang x_1 door $\frac{x_1}{y_1}$ en x_2 door $\frac{x_2}{y_2}$, dan krijgen we:

$$\left\{ \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{p+q} \cdot \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^p + \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^p \right\}^{p+q} \leq \left\{ \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{p+q} \cdot \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{p+q} + \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{p+q} \right\}^p.$$

Trek de $(p+q)^e$ wortel en vermenigvuldig met

$$\frac{(p+q)!}{p! q!} y_2^{p+q} \cdot \left(\frac{y_1}{x_2}\right)^p,$$

dan gaat de ongelijkheid over in:

$$\frac{(p+q)!}{p! q!} \left\{ x_1^p x_2^q + y_2^q y_1^p \right\} \leq \frac{(p+q)!}{p! q!} \left\{ x_1^{p+q} + y_1^{p+q} \right\}^{\frac{p}{p+q}} \cdot \left\{ x_2^{p+q} + y_2^{p+q} \right\}^{\frac{q}{p+q}}.$$

Geef p en q alle waarden ≥ 0 die voldoen aan

$$p+q = m \text{ (} m \text{ geheel);}$$

sommeer de zoo verkregen vormen, trek de m^e machts wortel, deel door 2 dan komt er:

$$\sqrt[m]{\left\{ \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^m \right\}} \leq \frac{1}{2} \sqrt[m]{x_1^m + y_1^m} + \frac{1}{2} \sqrt[m]{x_2^m + y_2^m}.$$

Dan is volgens def. § 40 de functie

$$f(x, y) = \sqrt[m]{x^m + y^m}$$

convex voor m geheel.

HOOFDSTUK V.

Convexe en Concave functies gegeven op een verzameling van reële getallen.

§ 45. Definitieën.

Neem een verzameling E van reële getallen en een rekenvoorschrift, waardoor aan ieder getal x van E een getal y wordt toegevoegd. Het rekenvoorschrift zij zoo gekozen, dat de verkregen functie $y = f(x)$ reëel eindig en eenwaardig is.

Neem een rechthoekig assenstelsel en beeld E af als punten op de X -as. Met een punt x van de X -as, dat tot E behoort, zal dan één punt (x, y) correspondeeren. De verzameling der punten (x, y) die met E correspondeeren, noemen we Σ , de grafische voorstelling der functie.

De meetkundige definitie van convexe functie wordt nu:

De functie $y = f(x)$ heet *convex* op de verzameling E van punten der X -as, als alle punten van de grafische voorstelling Σ met abscissen begrepen tusschen twee punten x_1 en x_2 van E , niet boven de rechte $\{(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\}$ liggen, gezien vanuit de negatieve Y -as.

Is dus

$$x_1 < x_2 < x_3$$

en

$$A \equiv (x_1, y_1) \quad , \quad B \equiv (x_2, y_2) \quad , \quad C \equiv (x_3, y_3)$$

dan zal B niet boven AC liggen (t.o.v. de $-Y$ -as) als A, B, C punten zijn van de grafische voorstelling van een convexe functie.

De vergelijking van de lijn AC is:

$$y - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Dus zal:

$$y_2 - y_1 \leq \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1)$$

zijn of
de functie $y = f(x)$ is convex op E , als voor x_1, x_2, x_3 behoorend tot E en

$$x_1 < x_2 < x_3$$

voldaan is aan

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \dots\dots\dots (1)$$

De determinantenongelijkheid is gelijkwaardig met elk der volgende 3 ongelijkheden, die dus eveneens als definitie voor een convexe functie kunnen dienen:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \geq \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \dots\dots\dots (4)$$

De functie $y = f(x)$ heet *concaaf* op E , als alle punten van $\mathcal{L}$ met abcissen begrepen tusschen twee punten x_1 en x_2 van E , niet beneden de rechte $\{(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\}$ liggen, gezien vanuit de negatieve y -as.

In de ongelijkheden (1), (2), (3) en (4) wordt dan het teeken $\geq$ door $\leq$ vervangen en omgekeerd.

De functie $y = f(x)$ heet *lineair* op E , als alle punten van $\mathcal{L}$ met abcissen begrepen tusschen twee punten x_1 en x_2 van E , op de rechte $\{(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\}$ liggen.

In de ongelijkheden (1), (2), (3) en (4) worden dan de teekens $\geq$ of $\leq$ door het $=$ teeken vervangen.

Opmerking. Evenals in § 3 kan men lineaire functies beschouwen als gemeenschappelijke grensgevallen van convexe en concave functies. Als $f(x)$ convex, concaaf, lineair is dan zal $\varphi(x) = -f(x)$ respectiefflijk concaaf, convex, lineair zijn, hetgeen uit de teekenverandering der vier ongelijkheden direct volgt.

§ 46. Is $f(x)$ convex op E en behooren x_1, x_2, x_3 tot E zoodat

$$x_1 < x_2 < x_3,$$

dan geldt de ongelijkheid (2) van § 45, die we als volgt kunnen schrijven :

$$y_3 - y_1 \geq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_3 - x_1).$$

Als nu

$$A \equiv (x_1, y_1) \quad , \quad B \equiv (x_2, y_2) \quad , \quad C \equiv (x_3, y_3),$$

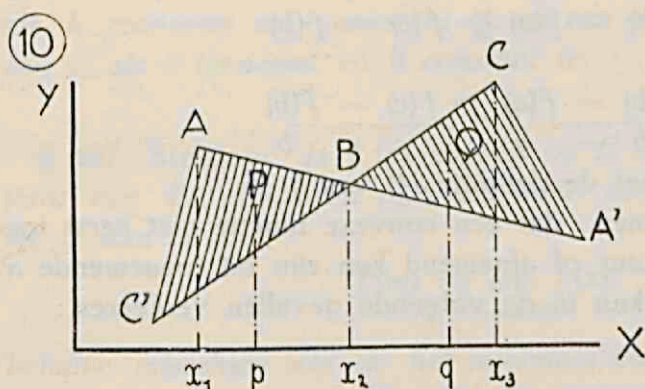
dan is de vergelijking van de rechte AB .

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

We zien dus : Als $f(x)$ convex is op E , zullen alle punten van Δ met abcissen niet begrepen tusschen x_1 en x_2 van E , niet liggen beneden de rechte $\{ (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \}$ (gezien vanuit de negatieve y -as).

Neem nu nog de punten p en q van E , zoodat

$$x_1 < p < x_2 < q < x_3.$$



Stel $P \equiv \{ p, f(p) \}$
 en $Q \equiv \{ q, f(q) \}$.
 Volgens de def. van
 convexe functie § 45
 moet P niet boven
 AB liggen (fig. 10)
 en volgens het juist
 afgeleide niet onder
 BC' , het verlengde
 van BC .

P ligt dus niet buiten de hoek ABC' en evenzoo ligt Q niet buiten de hoek CBA' .

Nemen we 4 punten van E , zoodat

$$a < b < c < d.$$

§ 48. Stel $f(x)$ convex op E . Neem a, b, c, d, e op E zoodat:

$$a < b < c < d < e.$$

In verband met de ongelijkheden (2), (3), (4) van § 45 kunnen we dan schrijven:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq \frac{f(e) - f(c)}{e - c} \dots \dots (5).$$

Maak nu differentiequotienten $R(c, h)$, zoodat alle $c + h$ tot E behooren ($h > 0$).

$$R(c, h) = \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \frac{f(c) - f(c + h)}{-h}.$$

Volgens (5) is dan $R(c, h)$ een niet afnemende functie van h , als h toeneemt, bij gegeven constante c .

Maar als $c < c_1$, zal

$$R(c, h) \leq R(c_1, c + h - c_1) \leq R(c_1, h).$$

Dus is $R(c, h)$ ook een niet afnemende functie van c , als c toeneemt, bij gegeven constante h .

Omgekeerd leidt men uit (5) direct de betrekkingen (2), (3), (4) van § 45 af die tot de definitie van convexe functie voeren.

We hebben dus de volgende

Stelling. De noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat $y = f(x)$ convex is op E , is dat $R(c, h)$ een niet afnemende functie is van h , als h toeneemt en c constant is, en een niet afnemende functie van c , als c toeneemt en h constant is.

§ 49. **Stelling.** Is $f(x)$ convex op E en m een verdichtingspunt van E , dan heeft $f(x)$ een limiet als $x \rightarrow m$. Behoort m tot E dan is

$$f(m) = \lim_{x \rightarrow m} f(x),$$

behalve misschien als m het minimum (maximum) van E is en $f(x)$ niet toeneemt (niet afneemt) bij toenemende x .

Bewijs. Volgens het afgeleide in § 47 is er een omgeving van m links en rechts, waar $f(x)$ monotoon is. Dus bestaan

$$\lim_{x \rightarrow m-} f(x) = \mu_1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow m+} f(x) = \mu_2.$$

Projecteer de segmenten van AM en BM tot de snijpunten met de twee rechten evenwijdig aan de X as op de X as. Dan zal voor x in die projectie gelegen, voldaan zijn aan

$$|f(x) - f(m)| < \varepsilon$$

of

$$\lim_{x=m} f(x) = f(m).$$

Stel eindelijk m het maximum of minimum van E . Dan kan niet $f(m) < \mu$. Want als

$$\varepsilon < \mu - f(m)$$

is, dan bestaat er een

$\sigma > 0$, zoodat voor

$$|a - m| < \sigma,$$

ook

$$|f(a) - \mu| < \varepsilon.$$

De rechte MA snijdt dan de lijn

$$y = \mu - \varepsilon$$

in C , zoodat

$$a < c < m \text{ of } m < c < a$$

is.

Neem p tusschen c en m . Dan zal

$$f(p) > \mu - \varepsilon$$

zijn

of P boven AM liggen, hetgeen tegen de convexiteit is.

Wel kan $f(m) > \lim_{x=m} f(x)$ zijn.

We hebben dus:

Alle verdichtingspunten van E die tot E behooren zijn continueitspunten van $f(x)$, behalve misschien het maximum en het minimum van E .

Is $f(x)$ niet afnemend, dan zal het minimum m van E een continueitspunt zijn, immers

$$f(m) < \lim_{x=m} f(x)$$

en

$$f(m) > \lim_{x=m} f(x)$$

zijn beide onmogelijk.

Is $f(x)$ niet toenemend, dan zal het maximum m van E een continuïteitspunt zijn.

§ 50. Stelling.

Is $f(x)$ convex op E , dan is hoogstens alleen in de onderste grens x_1 en de bovenste grens x_2 van E

$$\lim_{x=x_1} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x=x_2} f(x) = +\infty.$$

Bewijs. Volgens de definitie van § 45 is $f(x)$ eindig op E . Uit

$$\lim_{x=m} f(x) = +\infty$$

volgt dus, dat m niet tot E behoort.

Stel

$$x_1 < m < x_2.$$

Neem a en b ter weerszijden van m . Dan moet ook volgens de definitie van § 45 overal op (a, b) de functie niet boven AB komen, dus kan ook de limiet voor $x = m$ niet $+\infty$ zijn.

Stel

$$a < p < m < q < b$$

en

$$\lim_{x=m} f(x) = -\infty.$$

Uit het besprokene van § 46 volgt dat overal op (p, q) de functie-waarden niet beneden het verlengde van AP en BQ komen; dus kan de limiet voor $x = m$ niet $-\infty$ zijn.

Stel

$$m = x_2$$

en

$$\lim_{x=x_2} f(x) = -\infty.$$

Neem p en q zoodat

$$p < q < m,$$

dan is volgens § 47

$$f(p) > f(q)$$

De rechte PQ zal niet evenwijdig aan $x = m$ zijn, maar haar in een punt snijden met ordinaat k . Neem r , zoodat

$$q < r < m$$

en bovendien

$$f(r) < k.$$

R ligt dan beneden PQ hetgeen in strijd is met de convexiteit. Analoog vinden we, dat voor $m = x_1$,

$$\lim_{x=x_1} f(x) = -\infty$$

onmogelijk is.

§ 51.

Zij $f(x)$ convex op E en m een verdichtingspunt van E. Neem de punten

$$m + h_1, m + h_2, \dots, m + h_n, \dots \quad (h_i > 0)$$

alle tot E behoorend, terwijl

$$\lim_{n=\infty} h_n = 0.$$

Maak de differentiequotienten

$$R(m, h_1), R(m, h_2), \dots, R(m, h_n), \dots$$

Volgens § 48 is deze rij niet toenemend. Ze nadert echter ook tot een limiet, als m niet de onderste grens van E is. Is namelijk

$$a < m,$$

dan zullen alle

$$R(m, h_n)$$

niet kleiner zijn dan

$$R(m, a - m) = \frac{f(a) - f(m)}{a - m}.$$

Alleen als m de onderste grens van E is, kan de rechter afgeleide daar $-\infty$ zijn.

We komen dan tot de volgende

Stelling 1.

In alle continuïteitpunten van E zijn de rechter- en linker-afgeleide der convexe functie $f(x)$ eindig, behalve misschien in de onderste grens van E, waar de rechter afgeleide $-\infty$, en in de bovenste grens van E, waar de linker afgeleide $+\infty$ kan zijn.

In verband met § 48 volgt nog, dat bij bestaan der afgeleiden

$$f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

is.

Voor lineaire functies volgt uit de constantheid van het differentiequotient dat

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x).$$

Nemen we nu 2 punten m en n , zoodat

$$m < n.$$

Dan is

$$f'_-(m) < f'_+(m) \text{ en } f'_-(n) < f'_+(n).$$

Maar

$$f'_+(m) \leq \frac{f(n) - f(m)}{n - m} = \frac{f(m) - f(n)}{m - n} \leq f'_-(n).$$

Dus

$$f'_+(m) \leq f'_+(n).$$

Stelling 2.

Is $f(x)$ convex op E , dan voldoen de afgeleiden voor zoover zij bestaan, aan de ongelijkheden

$$f'_-(m) \leq f'_+(m) \leq f'_-(n) \leq f'_+(n)$$

als

$$m < n.$$

De definitie der convexiteit § 45 (1) laat zich op den vorm brengen:

$$\begin{vmatrix} x-h, & f(x-h), & 1 \\ x, & f(x), & 1 \\ x+k, & f(x+k), & 1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

als

$$h > 0, k > 0,$$

en

$$x-h, x, x+k$$

punten van E zijn.

Of

$$f(x) \leq f(x-h) + \frac{h}{h+k} \{f(x+k) - f(x-h)\},$$

of

$$k f(x - h) + h f(x + k) - (h + k) f(x) \geq 0 \dots\dots\dots (1).$$

Uit het voorgaande volgt nu de

Stelling 3.

Is $f(x)$ reeel, eindig en eenwaardig op E , terwijl ze voldoet aan de ongelijkheid (1), dan zal ze een rechter- of linker afgeleide hebben in die verdichtingspunten van E , die tot E behooren en in wier omgeving rechts of links de punten van E zich verdichten.

§ 52.

Gaan we nu aan de verzameling E bijzondere voorwaarden opleggen, dan zullen de afgeleide eigenschappen blijven doorgaan, maar eveneens in bijzondere eigenschappen overgaan.

Is E *perfekt* en $f(x)$ convex op E , dan is volgens § 49 ieder punt van E continuïteitspunt voor $f(x)$, van minstens één kant, hoogstens de onderste en bovenste grens van E uitgezonderd.

Is E een *interval* dan is elk punt van E naar beide zijden continuïteitspunt voor $f(x)$.

Is E *perfekt* dan is volgens § 51 in ieder punt van E de functie afleidbaar aan minstens één kant, behalve misschien in de grenzen.

Is E een *interval* dan is er in elk punt van E een rechter- en linker afgeleide.

§ 53. Stelling.

Is $f(x)$ convex op de perfecte verzameling E , zijn de afgeleiden in elk punt waar ze bestaan aan elkaar gelijk, dan is $f'(x)$ continu in E .

Bewijs. Neem m in E . Stel in elke omgeving rechts van m , punten van E . Toon aan, dat

$$\lim_{n = m +} f'(n) = f'(m).$$

Neem $h > 0$ en $m + h$ in E . Dan zal

$$\frac{f(m + h) - f(m)}{h} \geq f'(m)$$

zijn. Stel

$$\varphi(x) = f(m) + (x - m) \frac{f(m + h) - f(m)}{h} - f(x).$$

Dan is $\varphi(x)$ op $(m, m+h)$ niet negatief. Er is verder een punt w in de omgeving waarvan de bovenste grens van $\varphi(x)$ gelijk is aan de bovenste grens van $\varphi(x)$ op $(m, m+h)$.

Nu is

$$\varphi(m) = 0.$$

Er is een n zoodat

$$m < n < w,$$

dus

$$\varphi(n) < \varphi(w)$$

of

$$(n - w) \frac{f(m+h) - f(m)}{h} + f(w) - f(n) < 0$$

of

$$\frac{f(m+h) - f(m)}{h} > \frac{f(w) - f(n)}{w - n}.$$

Maar

$$\frac{f(w) - f(n)}{w - n} > f'(n) \geq f'(m)$$

Dus

$$\frac{f(m+h) - f(m)}{h} > f'(n) \geq f'(m).$$

Maar volgens definitie is

$$\lim_{h=0+} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = f'(m).$$

Dus

$$\lim_{n=m+} f'(n) = f'(m).$$

§ 54. Stelling.

Is $f(x)$ convex op E , met eindige grenzen a en b , dan is er steeds een functie $\varphi(x)$ te maken, die op E met $f(x)$ identiek is en op het interval (a, b) eindig, continu en convex.

Is E dicht in het interval (a, b) dan is $f(x)$ continu in alle punten van (a, b) die tot E behooren volgens § 49. Noem E' het complement van E in (a, b) . Dan is ieder punt x van E' verdichtingspunt van E .

Maak $\varphi(x) = f(x)$ als x tot E behoort en

$$\varphi(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x),$$

als $\bar{x}$ tot E' behoort. Dan is $\varphi(x)$ continu en eindig binnen (a, b) .
Stel

$$\begin{aligned} p_1 &< \bar{x} \pm \varepsilon_1 < q_1, \\ p_2 &< \bar{x} \pm \varepsilon_2 < q_2, \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &< \bar{x} \pm \varepsilon_n < q_n, \end{aligned}$$

alle punten van E , zoodat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x} \pm \varepsilon_n) = \bar{x}.$$

Dan ligt $f(\bar{x} \pm \varepsilon_n)$ beneden $P_n Q_n$, waaruit de convexiteit van $\varphi(x)$ volgt volgens de definitie van § 45.

Is E *eindig*, dan is $\varphi(x) = f(x)$ op E en

$$\varphi(x) = f(p) + \frac{x-p}{q-p} \{f(q) - f(p)\}$$

in de punten x tusschen 2 opvolgende punten p en q van E .

De grafische voorstelling van $\varphi(x)$ is dan een convexe polygoon.

Is E *willekeurig*, dan stellen we:

$$\varphi(x) = f(x)$$

in alle punten van E ;

$$\varphi(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$$

als $\bar{x}$ een verdichtingspunt van E is, dat er niet toe behoort;

$$\varphi(x) = f(p) + \frac{x-p}{q-p} \{f(q) - f(p)\}$$

als x niet tot E behoort en ligt tusschen 2 opvolgende punten p en q van de verzameling $\{E + \text{verdichtingspunten van } E\}$.

§ 55. Vergelijking der twee definitien der convexiteit.

De definitiën, welke in § 1 en § 45 van een convexe functie gegeven zijn, zullen blijken gelijkwaardig te worden in een bijzonder geval. Geven we hieronder een overzicht:

Definitie 1:

$f(x)$ reëel, eenwaardig, op een interval (segment) gegeven is convex als voor x en y in het interval (segment) voldaan wordt aan:

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Definitie 2.

$f(x)$ reëel, eenwaardig, eindig, op een verzameling E gegeven is convex als voor

$$x, x + \theta h, x + h$$

behoorend tot E ,

$$0 < \theta < 1, h > 0,$$

voldaan wordt aan:

$$f(x + \theta h) \leq f(x) + \theta \{f(x + h) - f(x)\}.$$

Deze ongelijkheid leidt men direct af uit de formule § 45 — (2). Terwijl volgens def. 1 uit het bestaan van $f(x)$ en $f(y)$ ook het bestaan van $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ volgt, is dit volgens def. 2 afhankelijk van de keuze van E .

Def. 1 is minder beperkend dan def. 2 daar zij volgens de stelling van § 15. aan de rationale deelpunten van (a, b) oplegt de functiewaarden beneden de lijn AB of er op te houden, terwijl dit door def. 2 aan alle punten van (a, b) wordt opgelegd.

Daarentegen is def. 2 weer algemeener, daar ze spreekt van een willekeurige E , en def. 1 het over een bijzondere E heeft.

Eindelijk behoeven de convexe functies volgens def. 1 niet naar boven begrensd te zijn, terwijl ze dit volgens def. 2 wel zijn.

Stelling.

Def. 1 en def. 2 zijn gelijkwaardig als $f(x)$ gegeven is op een interval en continu is.

Bewijs:

Stel $f(x)$ continu op het interval (a, b) en convex volgens def. 1. Dan zal voor

$$a < \alpha < x < \beta < b$$

en α, x, β rationale deelpunten van (a, b) de functiewaarden $f(x)$ niet gelegen zijn boven de rechte

$$\{\alpha, f(\alpha) - \beta, f(\beta)\}.$$

Deze deelfunctie $f(r)$ is dan convex volgens def. 2.

Ze is echter ook continu op de rationale punten. Maak nu een functie $\varphi(x)$, die met $f(r)$ samenvalt op de rationale punten en op de andere punten voldoet aan

$$\varphi(x) = \lim_{r=x} f(r).$$

Dan is $\varphi(x)$ convex op (a, b) volgens def. 2, hetgeen uit § 54 volgt. Maar $\varphi(x)$ kan niet verschillen van $f(x)$ omdat ze met $f(x)$ samenvalt in een dichte verzameling en evenals $f(x)$ continu is.

Stel $f(x)$ convex op het interval (a, b) volgens def. 2. Volgens § 52 is ze dan in ieder punt van (a, b) continu.

Stel nu

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad h = y - x,$$

dan geeft def. 2

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{f(x) + f(y)\},$$

waarmee de gelijkwaardigheid der twee definitiën voor het geval van continue functies bewezen is.

Opmerking. In § 27 is reeds gewezen, dat het geven van de begrenstheid naar boven een convexe functie continu maakt. Dit is geheel in overeenstemming met § 52, daar reeds in def. 2 de begrenstheid op ieder segment gegeven is. Daarom vonden we in dit hoofdstuk alleen continue convexe functies op een interval.

§ 56. Voorbeelden.

1 De functie

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)!$$

is convex op de verzameling E der getallen tusschen 0 en 1 van de omgekeerden der geheele positieve getallen.

$f(x)$ is eindig op E , maar niet naar boven begrensd.

Neem 3 opvolgende waarden van x :

$$\frac{1}{p+1} < \frac{1}{p} < \frac{1}{p-1}.$$

Nu is

$$f\left(\frac{1}{p+1}\right) = (p+1)! = (p-1)! + (p-1)!(p-1) + (p-1)!p^2.$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = p! = (p-1)! + (p-1)!(p-1).$$

$$f\left(\frac{1}{p-1}\right) = (p-1)!$$

Dus

$$\frac{f\left(\frac{1}{p}\right) - f\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}} = \frac{-(p-1)!p^2}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}} = -(p-1)!p^3(p+1),$$

en

$$\frac{f\left(\frac{1}{p-1}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)}{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}} = \frac{-(p-1)!(p-1)}{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}} = -(p-1)!(p-1)^2 p.$$

Maar

$$-(p-1)!(p-1)^2 p > -(p-1)!p^3(p+1),$$

dus is $f(x)$ convex volgens de ongelijkheid (4) van § 45.

2. Is $f(x)$ de functie van Dirichlet, $f(x) = 0$ voor de rationale punten, $f(x) = 1$ voor de irrationale punten, dan zal

$$\varphi(x) = \frac{A}{f(x)}, \quad (A = \text{constant})$$

voor x rationaal geen beteekenis hebben. Volgens def. 1 (§ 55) is $\varphi(x)$ dus niet convex; volgens def. 2 is ze zelfs lineair op de irrationale punten.

3. Stel

$$\varphi(x) = u(x) + \frac{0}{f(x)},$$

waarbij $f(x)$ de functie van Dirichlet voorstelt en $u(x)$ een convexe functie volgens def. 1 of 2.

Dan heeft $\varphi(x)$ geen beteekenis voor de rationale punten, terwijl ze op E als irrationale punten convex is volgens def. 2.

§ 57. Nog een voorbeeld van een convexe functie.

Gegeven:

$$c_1, c_2, \dots, c_p, \dots, c_i \geq 0.$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v = A \text{ (eindig).}$$

$x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$, alle x_i reëel en tusschen 2 eindige waarden a en b .

Te bew.:

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \cdot |x - x_v|$$

is convex op (a, b) volgens def. 2. (§ 55) (dus ook volgens def. 1).

Bewijs. Neem

$$a < p < q < r < b.$$

Dan bestaat (a, b) uit 4 intervallen: (a, p) , (p, q) , (q, r) , (r, b) .

$f(x)$ vervalt dan in 4 deelen, die we zullen noemen

$$\sum^1, \sum^2, \sum^3, \sum^4.$$

Volgens § 45 — (4) is dan te bewijzen:

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq \frac{f(r) - f(q)}{r - q}$$

of

$$\Delta = (r - q) \{ f(q) - f(p) \} - (q - p) \{ f(r) - f(q) \} \leq 0.$$

Nu is:

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= \sum c_v \{ |q - x_v| - |p - x_v| \} = \\ &= \sum^1 c_v (q - p) + \sum^2 c_v (p + q - 2x_v) + \sum^3 c_v (p - q) + \sum^4 c_v (p - q). \end{aligned}$$

En:

$$f(r) - f(q) = \sum^1 c_v (r - q) + \sum^2 c_v (r - q) + \sum^3 c_v (r + q - 2x_v) + \sum^4 c_v (q - r).$$

Dus:

$$\begin{aligned} \Delta &= (r - q) \sum^2 c_v (p + q - 2x_v) + (r - q) \sum^3 c_v (p - q) - (q - p) \sum^2 c_v (r - q) \\ &\quad - (q - p) \sum^3 c_v (r + q - 2x_v). \end{aligned}$$

$$\Delta = \left\{ 2p(r - q) \sum^2 c_v - 2(r - q) \sum^2 c_v x_v \right\} + \left\{ 2(q - p) \sum^3 c_v x_v - 2r(q - p) \sum^3 c_v \right\}.$$

Het eerste verschil tusschen $\} \{$ is ≤ 0 , omdat $p \leq$ iedere x_v van (p, q) is.

Het tweede verschil tusschen $\} \{$ is ≤ 0 , omdat alle x_v van (q, r) kleiner dan of gelijk zijn aan r . Dus $\Delta \leq 0$.

Bepalen we de afgeleiden in een punt $x = x_v$.

$$f'_+(x_v) = c_v + \sum c_j - \sum c_k$$

en

$$f'_-(x_v) = -c_v + \sum c_j - \sum c_k,$$

als $\sum c_j (\sum c_k)$ bestaat uit alle termen c_j met indices kleiner dan die van x_v (resp. grooter). Dus:

$$f'_+(x_v) - f'_-(x_v) = 2c_v.$$

Voor ξ van $(a, b) \neq x_v$ is:

$$f'(\xi) = \sum c_j - \sum c_k.$$

Stel η en $\zeta \neq x_v$, en $\eta < \zeta$; duidt met

$$\sum c_i, \sum c_j, \sum c_k$$

de sommen aan met waarden van c_v respectieffelijk kleiner dan η , tusschen η en ζ , en grooter dan ζ , dan is:

$$f'(\eta) = \sum c_i - \sum c_j - \sum c_k.$$

$$f'(\zeta) = \sum c_i + \sum c_j - \sum c_k.$$

Dus:

$$f'(\zeta) \geq f'(\eta)$$

en

$$f'(\zeta) - f'(\eta) = 2 \sum c_j.$$

De toename van $f'(x)$ op het interval (η, ζ) is dus gelijk aan de som van de sprongen in de discontinuïteitspunten op (η, ζ) .

§ 58. Is $f(x)$ convex op (a, b) en is voor elke x op (a, b)

$$f'_+(x) = f'_-(x),$$

dan noemen we de functie een „gewone” functie.

Volgens de stelling 2 van § 31 zijn er hoogstens aftelbaar veel punten x_v , waar

$$f'_+(x) \neq f'_-(x)$$

is.

Stel

$$2c_v = f'_+(x_v) - f'_-(x_v).$$

Maak evenals in § 57 de convexe functie

$$\varphi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v |x - x_v|.$$

Dan zijn $f'(x)$ en $\varphi'(x)$ niet afnemende functies bij toenemende x en in de punten x_v discontinu met gelijke sprong.

Voor

$$a < \xi < b$$

zal de toename van a tot ξ van $f'(x)$ minstens gelijk zijn aan de toename van a tot ξ van $\varphi'(x)$, omdat de toename van $\varphi'(x)$ bestaat uit de som der sprongen van a tot ξ en die van $f'(x)$ behalve die som nog andere toenamen kan hebben, omdat $f(x)$ niet stuksgewijze lineair is.

Dus is $f(x) - \varphi(x)$ een continue niet afnemende functie bij toenemende x dus $f(x) - \varphi(x)$ een gewone convexe functie.

We hebben dus de

Stelling:

Van een gegeven convexe functie kan men steeds een convexe functie aftrekken zoodat er een gewone convexe functie overblijft.

§ 59. Een continue convexe functie is volgens § 31 gekarakteriseerd door het niet afnemend en continu zijn op een aftelbare verzameling na van de afgeleide.

Stel dat $f(x)$ eindig is op (a, b) en afgeleiden heeft tot en met de n^e orde. Zij $f^{(n)}(x)$ niet afnemend en continu op een aftelbare verzameling na. Dan is $f^{(n-1)}(x)$ convex.

$f^{(n-1)}(x)$ heeft al of niet een minimum al naar mate $f^{(n)}(x)$ van teeken verandert op (a, b) of niet.

Is $f^{(n-1)}(x)$ niet afnemend, dan zal $f^{(n-2)}(x)$ convex zijn.

Is $f^{(n-1)}(x)$ niet toenemend, dan zal $f^{(n-2)}(x)$ concaaf zijn.

Heeft $f^{(n-1)}(x)$ een minimum voor $x = d$, dan is $f^{(n-2)}(x)$ concaaf in (a, d) , convex in (d, b) , met een maximum in (a, d) en een minimum in (d, b) als $f^{(n-1)}$ een nulwaarde β_1 heeft in (a, d) en een nulwaarde β_2 in (d, b) .

Dus maximaal heeft $f^{(n-2)}$ op (a, b) 3 intervallen van verschillende monotonie.

In 't algemeen krijgen we dan:

Heeft $f(x)$ afgeleiden tot en met de n^e orde; is $f^{(n)}(x)$ continu hoogstens op een aftelbare verzameling na, dan kan $f(x)$ op (a, b) worden verdeeld in n deelen, die afwisselend convex en concaaf zijn en in $(n+1)$ deelen van tegengestelde monotonie.

Dit aantal zal verminderd worden als $f^{(n-i)}(x)$ niet haar maximaal aantal wortels $(i+1)$ heeft op (a, b) , d. w. z. als in 1 punt 2 of meer wórtels van verschillende afgeleiden samenvallen.

LITTERATUUR.

J. L. W. V. JENSEN. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.
Acta Mathematica. 30. (1906).

F. SIBIRANI. Intorno alle funzioni convesse.
Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. 40 (1907).

F. BERNSTEIN und G. DOETSCH. Zur Theorie der Konvexen Funktionen.
Mathematische Annalen. 76. (1915).

L. GALVANI. Sulle funzioni convessi di una o due variabili.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
41. (1916).

H. BLUMBERG. On convex functions.
Transactions of the American Mathematical Society.
20. (1919).

STELLINGEN.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

1.

De stelling van § 42 kan worden opgevat als een eigenschap van het zwaartepunt van een stelsel van n stoffelijke punten met positieve massa, die gelegen zijn in de hoekpunten van een convexe polygoon.

2.

Iedere discontinue oplossing der functionaalvergelijking

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

is niet-meetbaar.

3.

De stelling van O. BLUMENTHAL (Jahresber. der Deutschen Math. Ver. Band 16. 1907. blz. 108),

Voor geheele transcendente functiën is de uitdrukking

$$r \frac{d \lg M}{d r}$$

een toenemende functie van r , leidt onmiddellijk tot de convexiteit van $\lg. M$ ten opzichte van $\lg. r$ en kan uitgebreid worden voor iedere holomorfe functie.

4.

De bewering van FATOU (Acta Mathematica Band 30. 1906. bl. 395),

Als q_n een rij geheele getallen is waarvoor

$$q_{n+1} \geq 2 \cdot q_n,$$

x irrationaal,

$$\frac{p_n}{q_n} < x < \frac{p_{n+1}}{q_n},$$

dan neemt $\frac{p_n}{q_n}$ niet af, $\frac{p_{n+1}}{q_n}$ niet toe bij toenemende n , is onjuist.

5.

De definitie van verdichtingspunt, die Dr. F. SCHUH geeft in Lessen over de Hoogere Algebra in toepassing 389 is te verkiezen boven die van blz. 286 en die van toepassing 396.

6.

De bewering van Dr. J. G. RUTGERS (Inleiding Anal. Meetkunde deel 1, blz. 292), dat door isogonale transformatie een rechte die door een hoekpunt van den coördinatendriehoek, gaat, overgaat in een rechte door hetzelfde hoekpunt, is onjuist.

7.

De opvatting van Dr. J. G. RUTGERS (Inleiding Anal. Meetkunde deel 1, bl. 16), dat een getallenpaar, waarvan een of twee der getallen imaginair is, geen punt van het vlak kan voorstellen, is niet aan te bevelen.

8.

In tegenstelling met STURM (Liniengeometrie Band 1 bl. 51) kan een kubisch regelvlak door middel van een projectieve verwantschap worden verkregen zonder daarbij van de richtlijnen gebruik te maken.

9.

De stelling, dat de twee krachten van een koppel niet door een enkele kracht zijn te vervangen, wordt door PLANCK (Einführung in die allgemeine Mechanik II Teil. 1 Kap.) niet voldoende bewezen.

10.

Er is veel voor te zeggen de Mechanica op de H. B. S. niet als alzonderlijk leervak maar als onderdeel van de Natuurkunde te behandelen.

11.

De foutenwet van GAUSZ wordt door het toetsen aan de waarnemingen voldoende bewezen.

U

1