



Oppervlakken die door een lineaire stralencongruentie kunnen worden afgebeeld op een plat vlak

<https://hdl.handle.net/1874/287185>

Agm 192, 1927

OPPERVLAKKEN DIE DOOR EEN LINEAIRE
STRALENCONGRUENTIE KUNNEN WORDEN
AFGEBEELD OP EEN PLAT VLAK

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Diss.
Utrecht

1927

H. HYLKEMA

OPPERVLAKKEN DIE DOOR EEN LINEAIRE
STRALENCONGRUENTIE KUNNEN WORDEN
AFGEBEELD OP EEN PLAT VLAK.

ORIGINEEL EN DOOR EEN LIBRAIRIE
STEL WERKTELIJKE LITTELEN WORDEN
AANKOOP OF EEN PLAT / 121

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



3481 5229

Diss. Utrecht 1927

**OPPERVLAKKEN DIE DOOR EEN LINEAIRE
STRALENCONGRUENTIE KUNNEN WORDEN
AFGEBEELD OP EEN PLAT VLAK**

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT,
OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS
DR. A. NOORDT ZIJ, HOOGLEERAAR IN
DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID,
VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER
UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN
VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG
4 JULI 1927, DES NAMIDDAGS TE DRIE UUR,
DOOR

HINKE HYLKEMA

GEBOREN TE ZUTPHEN

DRUKKERIJ ZUIDAM — UTRECHT

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Met groote vreugde grijp ik deze gelegenheid aan om U, Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde, te danken voor het vele goede dat ik gedurende mijne studiejaren van U mocht ontvangen.

In het bijzonder geldt dit U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor. Het is mij een groot voorrecht dat ik U van het begin mijner studie af onder mijne leermeesters heb mogen tellen, en dat gij nu ook mijn proefschrift met uwe altijd beschikbare hulp en belangstelling hebt willen leiden.

Als mathematica zij het mij vergund ook U, Hooggeleerde WOLFF, speciaal te danken voor de toewijding waarmee gij ons hebt willen wegwijs maken in de door U gedoceerde vakken; ik heb buitengewoon van Uw onderwijs genoten.

Ook Uwe lessen, Hooggeleerde ORNSTEIN en NIJLAND, zullen, naast de persoonlijke belangstelling die ik van U mocht ondervinden, mij steeds in dankbare herinnering blijven.

INHOUD

	Blz.
Inleiding, litteratuur.	1

HOOFDSTUK I.

Oppervlakken van den graad n met $(n-1)$ -voudig punt (monoïden)	2
De hyperboloïde	7
De kubische monoïde.	9
Het oppervlak van Steiner.	14

HOOFDSTUK II.

Oppervlakken van den graad $m + n + 1$ met m -voudige rechte en n -voudige rechte	16
Het kubisch oppervlak	21

HOOFDSTUK III.

Oppervlakken van den graad $n + p + 1$ met n -voudige kromme α^q en p -voudige rechte β welke α in $(q-1)$ punten snijdt	27
Het kubisch oppervlak	31
Het vierdegraadsoppervlak, $n = 1$ $p = 2$ $q = 2$	31
Het vierdegraadsoppervlak, $n = 2$ $p = 1$ $q = 2$	40
Het vierdegraadsoppervlak met twee dubbelrechten $n = 2$ $p = 1$ $q = 2$	47

HOOFDSTUK IV.

Oppervlakken van den graad $2n + 1$ met n -voudige kubische ruimtekromme.	52
Het kubisch oppervlak	54
Het vijfdegraadsoppervlak	54

INLEIDING.

Het doel van dit proefschrift is de bewerking en rangschikking van de gevallen waarin een oppervlak door middel van een stralencongruentie $[1, n]$ kan worden afgebeeld op een plat vlak. Hierbij zijn te vermelden de mededeelingen die voor verschillende van deze gevallen gedaan zijn door:

- GUCCIA, Sur une classe de surfaces représentables point par point sur un plan (Ass. française pour l'avancement des sciences, 1880).
- MINEO, Sopra una classe di superficie unicursali (Le matematiche pure ed applicate, volume I, p. 220).
- STURM, Geometrische Verwandtschaften IV.
- J. DE VRIES, Oppervlakken welke door een lineaire stralencongruentie op een vlak kunnen worden afgebeeld (Versl. K. A. v. W., deel 25, p. 1414).
-

INDEELING.

De gevallen waarin een oppervlak door middel van een stralencongruentie $[1, n]$ kan worden afgebeeld op een plat vlak, zijn in te deelen als volgt:

- I. Oppervlakken van den graad n , Φ_n , met $(n-1)$ -voudig punt, de *monoïden*; de afbeelding geschiedt door de stralen door den top.
- II. Oppervlakken van den graad $m+n+1$, Φ_{m+n+1} , met m -voudige rechte a en n -voudige rechte b ; afbeelding door de transversalen over a en b .
- III. Oppervlakken van den graad $n+p+1$, Φ_{n+p+1} , met n -voudige kromme α^q van den graad q en p -voudige rechte β , welke α in $(q-1)$ punten snijdt; afbeelding door de transversalen over α en β .
- IV. Oppervlakken van den graad $2n+1$, Φ_{2n+1} , met n -voudige kubische ruimtekromme α^3 ; afbeelding door de koorden.

HOOFDSTUK I.

Φ_n

§ 1. In het algemeen heeft een straal door den top T van de monoïde Φ_n , buiten den top nog één punt met het oppervlak gemeen, geeft dus van dat ééne punt een beeld in zijn doorgang met een gegeven tafereel τ . Alle punten van het oppervlak tezamen leveren dus een afbeelding op τ door middel van ∞^2 stralen door T , een ster. Deze is een bijzonder geval van een lineaire congruentie, namelijk een congruentie $[1, 0]$.

Terwijl zoo in het algemeen een punt van Φ^n één projecteerende lijn bezit, en wel zijn verbindingslijn met den top, wordt T zelf afgebeeld door alle ribben van den $(n-1)^e$ graads raaklijnenkegel in T, en vindt zijn beeld derhalve in den doorgang van dezen, ∞^{n-1} .

Indien er uitzonderingspunten H in τ zijn, die namelijk niet één maar meer punten van Φ^n afbeelden, dan zal HT meer dan n punten met het oppervlak gemeen hebben, dus er op liggen. H beeldt dan alle punten van HT af, en een bundel vlakken om een as a zal een reeks doorsneden leveren, waarvan de beelden alle door H gaan. Zoeken wij, om tot de rechten door T op Φ^n gelegen te komen, dus de gemeenschappelijke punten van die beeldkrommen.

De afbeelding van een vlakke doorsnede c^n geschiedt blijkbaar door een kegel van den graad n ; het beeld is dus een c'^n . De beelden der ∞^1 doorsneden van den bundel vormen ook een bundel: een willekeurig punt X in τ bepaalt één punt P als origineel, P levert één vlak door a , dus één doorsnede c^n door P en één c'^n door X. Het aantal basispunten bedraagt n^2 . Hiertoe behooren n collineaire punten, de beelden der n snijpunten van a met het oppervlak die immers aan alle c^n gemeen zijn. De overige $n^2 - n$ basispunten zijn dan punten H, hoofdpunten der afbeelding, doorgangen van evenzoovele rechten a_k op het oppervlak, wier beelden zij zijn. Derhalve: de monoïde bevat $n^2 - n$ rechten door den top.

De projecties van de ∞^3 vlakke krommen c^n zijn dus krommen c'^n door de $n(n-1)$ hoofdpunten. Omgekeerd is iedere c'^n door de hoofdpunten beeld van een vlakke doorsnee. Immers, indien wij op onze c'^n 3 punten P' Q' R' aannemen, dan bepalen deze op het oppervlak P, Q en R,

door welk drietal een vlak, en hiermee een vlakke doorsnee bepaald is. Het beeld van deze laatste zal een c^n zijn door de hoofdpunten en P', Q', R' , en indien wij nu kunnen aantoonen dat dit beeld met de c^n waarvan we uitgingen minstens $\frac{1}{2}n(n+3)$ punten gemeen heeft, dan vallen die twee samen en hebben wij het gestelde bewezen. Dus gevraagd te bewijzen:

$$\begin{aligned} n(n-1) + 3 &\geq \frac{1}{2}n(n+3) \\ \text{of } n^2 - 5n + 6 &\geq 0 \\ \text{of } (n-2)(n-3) &\geq 0, \text{ hetgeen inderdaad het} \\ \text{geval is, daar } n, \text{ geheel getal, } &\geq 2 \text{ is.} \end{aligned}$$

§ 2. Uit het aantal, $3(n-1)^2$, nodale krommen van den bundel in τ kunnen wij de klasse van de *monoïde* aflezen. Immers, een nodale c^n zal in het algemeen het beeld zijn van een nodale c^n , dus van een, in een raakvlak door a gelegen doorsnede. Echter zal vlak (aT) als doorsnede leveren een c^n met in T een $(n-1)$ -voudig punt, waarvan het beeld is het samenstel van a' (doorgang van vlak Ta door τ) en κ^{n-1} (doorgang van den raakkegel in T). Dit beeld bevat $n-1$ dubbelpunten, die niet op een raakvlak door a wijzen.

Derhalve bedraagt de klasse van de *monoïde*:

$$3(n-1)^2 - (n-1) = (n-1)(3n-4).$$

§ 3. Bijzonderheden van het oppervlak veroorzaken nu ook bijzonderheden in den bundel (c^n) in τ .

Stel dat Φ^n een rechte b bevat die niet door T gaat. De vlakkenbundel om b levert nu doorsneden, die ontaard zijn in $b + c^{n-1}$, terwijl in vlak (Tb) de c^{n-1} met haar $(n-1)$ -voudig punt T blijkbaar uit $(n-1)$ rechten door T bestaat. Deze laatsten snijden de verschillende c^{n-1} niet;

alle andere rechten door T , $n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2$ in aantal, doen dat wel en vormen in hunne doorgangen met τ de basispunten van den bundel (c'^{n-1}). In dezen bundel zijn $3(n-2)^2$ nodale exemplaren; dus gaan nu door b $3(n-2)^2$ vlakken, die Φ^n buiten b raken.

Stel dat Φ^n een k -voudige rechte r^k door T bevat. De vlakke doorsneden van den bundel hebben dan alle een k -voudig punt op r . In den doorgang R van r hebben dat hunne beelden evenzeer; in R vallen dan k^2 basispunten samen en het aantal overblijvende enkelvoudige rechten door T bedraagt n^2-n-k^2 .

Stel dat Φ^n een torsale rechte t door T bevat met doorgang T' . De raaklijnen aan twee krommen c^n uit den bundel, in de snijpunten met t , liggen dan in één vlak, het langs t aan het oppervlak rakende vlak, welks doorgang met τ dan gemeenschappelijke raaklijn is in T' aan de twee c'^n van den bundel in τ . Deze laatste heeft nu twee samenvallende basispunten; dan is er één bundlexemplaar dat in T' een dubbelpunt heeft, en evenzoo één c^n met een dubbelpunt op t . Derhalve: op t ligt een dubbelpunt D van Φ^n .

De omgekeerde redeneering gaat ook op: als Φ^n een dubbelpunt D bevat, is DT torsale rechte. Of algemeen: heeft Φ^n een p -voudig punt, D , dan is TD een $(p-1)$ -voudig torsale rechte. We zouden dit weer kunnen aantoonen als boven door middel van $(p-1)$ gemeenschappelijke raaklijnen in den bundel van beeldkrommen, maar ook als volgt direct: een vlak π door $TD \equiv l$ geeft als doorsnee met Φ^n een kromme k^n , die met $l(n-1+p)$ punten gemeen heeft, dus ontaard is in $l+k^{n-1}$, welke kromme k^{n-1} T tot $(n-2)$ -voudig punt, D tot $(p-1)$ -voudig punt bezit. k^{n-1} zal dan weer ontaard zijn in $l+k^{n-2}$ ($T^{n-3}D^{p-2}$), $p > 2$ onder-

steld, enz. Zoo zullen zóóveel, x , rechten zijn afgevallen, dat

$$\begin{aligned} n-x &\geq p-x + n-x-1 \\ \text{graad van } k &\quad \text{aantal snijpunten} \quad \text{aantal snijpunten} \\ &\quad (l, k) \text{ in } D. \quad (l, k) \text{ in } T. \\ \text{of } x &\geq p-1 \\ x &= p \text{ of } x = p-1 \end{aligned}$$

Indien $x = p$, dan zou k^{n-p} niet door D gaan, evenmin l ergens anders buiten T snijden, daar dit een $(p+1)$ -voudig punt voor het oppervlak zou beteekenen, hetgeen niet ondersteld is. l zou dan slechts $(n-p-1)$ punten met k^{n-p} gemeen hebben, wat onmogelijk is. Derhalve is $x = p-1$. Daar nu l met k^{n-p+1} alleen T^{n-p-2} en D gemeen heeft, is ons vlak π geen raakvlak, waaruit blijkt dat de $(p-1)$ rechten TD geen gewone beschrijvenden maar torsalen zijn, hetgeen te bewijzen was.

Daar de beeldkrommen c'^n nu $(p-1)$ gemeenschappelijke raaklijnen hebben in T' , blijven er nog slechts $n(n-1) - p(p-1)$ basispunten over als doorgangen van enkelvoudige rechten door T .

Nemen wij $p = n-1$, dan heeft Φ^n twee toppen, T_1 en T_2 , en heet *dimonoïde*. $T_1 T_2$ is $(n-2)$ -voudig torsaal, en een vlak door $T_1 T_2$ geeft als restdoorsnee een kegelsnede door T_1 en T_2 . Verder zijn nog $n(n-1) - (n-1)(n-2) = 2(n-1)$ enkelvoudige rechten door T_1 aanwezig, en $2(n-1)$ door T_2 .

Bij een *trimonoïde*, met toppen T_1, T_2, T_3 , zijn er drie $(n-2)$ -voudige torsale rechten. Het vlak $T_1 T_2 T_3$ geeft dan als restdoorsnee een kromme van den graad $n-3(n-2) = 6-2n$. Daar $6-2n \geq 0$ moet $n \leq 3$. Afgezien van het geval $n=2$ waar de toppen enkelvoudige punten worden, is een trimonoïde dus een *kubisch oppervlak*. Het zelfde geldt voor een *quadrmonoïde*.

§ 4. Keeren wij terug tot de gewone monoïde Φ^n en vragen eens naar hare krommen, die aan gegeven beeldfiguren zijn toegevoegd. Daartoe hebben wij in het algemeen slechts zoo'n beeldfiguur uit T terug te projecteeren op het oppervlak, d.i. de snijfiguur te bepalen van den projecteerenden kegel met Φ^n .

Nemen wij b.v. een willekeurige rechte l' in τ . De projecteerende kegel is het vlak (Tl') en snijdt als oorspronkelijke figuur op de monoïde uit een vlakke kromme c^n met $(n-1)$ voudig punt in T . Anders wordt het, als het beeld door een hoofdpunt gaat. Voor een punt H_1 namelijk is het snijpunt van $H_1 T$ met Φ^n onbepaald; we kunnen dan dus alleen concludeeren dat het origineel een punt van a_1 bezit. Intusschen heeft dit tengevolge dat de bovengenoemde snijfiguur met Φ^n de lijn a_1 bevat, zoodat de graad van het eigenlijke origineel, d.i. de figuur op Φ^n die noodig en voldoende is om de gegeven beeldfiguur door H_1 te geven, één lager is geworden. Wij zullen hiervan geen voorbeelden geven bij het oppervlak Φ^n in 't algemeen, maar ons nu bepalen tot speciale waarden van n .

§ 5. Zij $n = 2$, dan is onze monoïde een *hyperboloïde*. Hare twee regelscharen noemen we (a) en (b). De projectie geschiedt nu uit een willekeurig punt T op het oppervlak, daar elk punt er van $(n-1)$ -voudig is.

De doorgangen A' en B' van de twee beschrijvenden a_1 en b_1 door T leveren de *twee hoofdpunten*. Daar alle beschrijvenden van de regelschaar (b) a_1 snijden, gaan hare beelden alle door A' en vormen daar een waaier. Evenzoo is de projectie van de regelschaar (a) de waaier door B' .

Een vlakke doorsnee geeft als beeld een kegelsnede c'^2 door de twee hoofdpunten A' en B' ; en omgekeerd: een

 Φ^2 /lakke c^2

kegelsnede c'^2 door A' en B' moet geprojecteerd zijn door een quadratischen kegel, die met de hyperboloïde behalve de rechten a_1 en b_1 nog een kegelsnede gemeen heeft, waarvan c'^2 dus het beeld is.

q^n Om de afbeelding van een ruimtekromme q^n op de hyperboloïde te beschouwen dienen wij te weten hoeveel punten q^n gemeen heeft met de a -lijnen en met de b -lijnen. Heeft zij b.v. α snijpunten met een a -rechte a_1 , dan heeft zij er $(n - \alpha)$ met iedere b -rechte, daar q^n een vlak $(a_1 b_k)$ in n punten van de monoïde snijdt, d.i. in n punten op a_1 en b_k gelegen. Hieruit volgt weer dat het aantal snijpunten van q^n met iedere a -rechte α bedraagt.

Stel nu, dat de q^n niet door T gaat; dan is $n = \alpha + \beta$, waar α en β zijn de aantallen snijpunten buiten T met respectievelijk een a en een b lijn. De projecteerende n^e graadskegel zal dan in τ een kromme c'^n uitsnijden, die α maal door A' , β maal door B' gaat. En omgekeerd levert de projecteerende kegel van een c'^n met α -voudig punt A' en β -voudig punt B' , zóó dat $\alpha + \beta = n$, als snijfiguur met de hyperboloïde een q^n als boven beschreven.

Stel echter eens dat q^n x -maal door T gaat, en α en β snijpunten met de a - en b -lijnen buiten T heeft; dus $n = \alpha + \beta + 2x$. De x punten T van q^n zullen geprojecteerd worden door de x raaklijnen in T aan de kromme; deze zijn x stralen van den waaier T in vlak $(a_1 b_1)$. De beeldkromme c' heeft dan buiten A' en B' nog x snijpunten S met de lijn $A'B'$, en haar graad is $\alpha + \beta + x = n - x$. In het bijzondere geval dat één der raaklijnen in T aan q^n de lijn a_1 is, valt één der punten S in A' en één der α snijpunten ($q^n a_1$) in T . Er gaan dan evenzeer α takken van $c' a + \beta + x$ door A' , maar één van de takken heeft $A'B'$ tot raaklijn.

Omgekeerd, gaat een kromme $c' a + \beta + x$ in τ a maal door A' , β maal door B' en snijdt zij $A'B'$ daarbuiten nog in x punten, dan is zij het beeld van een $q^a + \beta + 2x$ die x maal door T gaat en buiten T nog a punten met iedere a -lijn, β punten met iedere b -lijn gemeen heeft. Is c' een willekeurige rechte, dan is $a = 0, \beta = 0, x = 1$, en het origineel dus een kegelsnede.

Evenzoo is een willekeurige kegelsnede in τ het beeld van een q^4 , die in T een dubbelpunt bezit.

We zien dus dat op de hyperboloïde krommen van elken graad mogelijk zijn; $n = a + \beta$ in het eenvoudigste geval, uit welke betrekking wij voor iedere gegeven n minstens één stel waarden (a, β) kunnen vinden, zóó dat $c' a + \beta$ het beeld is van een q^n . Echter kunnen wij $n = 7$ b.v. splitsen in $a = 4, \beta = 3$ of in $a = 5, \beta = 2$, in welke twee gevallen wij ruimtekrommen op de hyperboloïde krijgen, die weliswaar van denzelfden graad zijn, maar verschillend ten opzichte van haar aantal schijnbare dubbelpunten. De eerste namelijk heeft er $h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 9$, het aantal dubbelpunten dat gelijkwaardig is met één viervoudig en één drievoudig punt; de tweede $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 11$. Voor een willekeurige waarde van h zullen uit de formule $h = \frac{1}{2} a(a-1) + \frac{1}{2} \beta(\beta-1)$ dan ook niet steeds twee geheele waarden voor a en β gevonden kunnen worden, zoodat wel krommen van iederen graad, maar niet van iedere h -waarde op de hyperboloïde zullen voorkomen.

Φ^3 § 6. Nemen wij thans $n = 3$, de *kubische monoïde*. In verband met het algemeen geval zien we dan: er liggen zes rechten a_k door T op Φ^3 , die door de zes hoofdpunten H worden afgebeeld. Het vlak door a_k en a_l snijdt Φ^3 nog

volgens een derde rechte, c_{k1} , die niet door T gaat, en beeldt deze c_{k1} in zijn doorgang $H_k H_1$ met τ af. Het aantal combinaties kl bedraagt $\frac{6.5}{1.2} = 15$, zoodat wij vinden: *De kubische monoïde bevat 15 rechten die niet door T gaan.*

Vlakke c^3 De ∞^3 vlakke doorsneden c^3 hebben kubische krommen door de 6 hoofdpunten tot beelden, en omgekeerd is elke kubische kromme van den complex, door de 6 H_k bepaald, het beeld van een vlakke doorsnee. Tot de c^3 door de zes punten H behoort de driezijde $(H_1 H_2, H_3 H_4, H_5 H_6)$; daar zij de drie rechten c_{12}, c_{34}, c_{56} afbeeldt, liggen deze in één vlak, een *drievoudig raakvlak* aan de monoïde. Deze heeft er zoo 15. Immers, één zijde van een driezijde $p q r$, door de zes punten H , kan gekozen worden op $\frac{6.5}{1.2} = 15$ wijzen, daarbij de 2e zijde op $\frac{4.3}{1.2} = 6$ manieren; echter kunnen drie verschillende keuzen van de eerste zijde voeren tot een zelfde driezijde, terwijl elk van die drie weer twee wegen opent naar eenzelfde exemplaar bij de keuze van de tweede zijde. Ieder is dus zes maal geteld en het totaal aantal drievoudige raakvlakken bedraagt $\frac{15.6}{6} = 15$.

Nemen wij eens een rechte l' in τ . Zij is het beeld van de nodale c^3 , die het vlak $(l' T)$ op Φ^3 uitsnijdt. Gaat l' door H_1 , dan bestaat de doorsnede uit de rechte a_1 en een kegelsnede door T die a_1 snijdt.

Gaan we uit van een willekeurige c'^2 in τ , en passen wij een andere methode toe om het origineel te vinden, n.l. de snijding met een c'^3 door de hoofdpunten en met den doorgang κ^2 van den raakkegel in T . De eerste snijding levert zes gemeenschappelijke punten, de tweede vier, waaruit blijkt dat onze c'^2 een kromme afbeeldt,

die met een vlakke doorsnee zes punten gemeen heeft en volgens vier verschillende raakribben door den top T heengaat. Deze kromme is dus een ϱ^6 met viervoudig punt T. De doorsnede van den projecteerenden quadratischen kegel met Φ^3 zou ons dezelfde ϱ^6 geleverd hebben.

Laat men echter c'^2 door H_1 gaan, dan leidt ons dit niet tot de conclusie van een gemeenschappelijk punt van c^3 en c^x , maar van een snijding van deze beide krommen met a_1 in verschillende punten. Voor de gemeenschappelijke punten van c^3 en c^x hebben we dus slechts te letten op de snijpunten der beelden buiten de hoofdpunten. Dit zijn er vijf, terwijl c'^2 buiten H_1 nog maar drie punten met κ^2 gemeen heeft. Derhalve is het origineel een ϱ^5 met een drievoudig punt in T, rustend op a_1 .

Evenzoo geeft een c'^2 door H_1 en H_2 een ϱ^4 over a_1 en a_2 met dubbelpunt T.

Ook geeft een c'^2 door H_1, H_2, H_3 een ϱ^3 over a_1, a_2, a_3 , door T gaand en een c'^2 door H_1, H_2, H_3, H_4 een ϱ^2 over a_1, a_2, a_3, a_4 ; deze laatste kegelsnede is in een vlak door c_{56} gelegen, omdat $H_5 H_6 c'^2$ in twee punten buiten de hoofdpunten snijdt, dus c_{56} koorde is van ϱ^2 .

 ϱ^3

We zagen de afbeelding van een ϱ^3 door T op drie a-lijnen rustend. Stel nu dat ϱ^3 niet door den top gaat; uit T is dan één koorde van ϱ^3 te trekken, welke, daar zij vier punten met Φ^3 gemeen heeft, op de monoïde ligt. Wij kunnen haar a_1 noemen, zoodat de projectie van ϱ^3 een dubbelpunt krijgt in H_1 . Of zij ook nog andere hoofdpunten zal bevatten, of ϱ^3 dus nog andere a-rechten zal snijden, is gemakkelijk na te gaan. Immers, snijding met een c'^3 door de hoofdpunten zal buiten deze laatsten drie snijpunten moeten leveren als beelden van de drie gemeenschappelijke punten

$(c^3 \varrho^3)$; derhalve zes snijpunten in H_k waarvan twee al in H_1 zijn gelegen. Wij zien dus dat een ϱ^3 op Φ^3 die niet door T gaat, een a -rechte, b.v. a_1 , tot koorde zal hebben, op a_2, a_3, a_4, a_5 éénmaal zal rusten, a_6 niet zal snijden. Wat betreft de rechten c_{kl} , heeft $c'_{12} \equiv H_1 H_2$ al drie punten met de beeldkromme gemeen in de twee hoofdpunten, er buiten dus geen meer; ϱ^3 zal dus c_{12} niet snijden, en evenmin c_{13}, c_{14}, c_{15} ; daarentegen $c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{45}, c_{16}$ éénmaal, en $c_{26}, c_{36}, c_{46}, c_{56}$ tweemaal.

Dat er altijd krommen ϱ^3 , die niet door T gaan, op Φ^3 gevonden kunnen worden, blijkt als we omgekeerd te werk gaan: neem een ϱ'^3 in τ aan, met dubbelpunt H_1 , door H_2, H_3, H_4, H_5 , waarmee slechts zeven punten bepaald zijn. Zij snijdt een c'^3 , door de hoofdpunten, buiten deze laatste driemaal, is dus het beeld van een ruimtekromme ϱ^3 . Aangezien deze geen trisecanten kan bezitten, kan zij ook niet uit één harer punten als nodale kromme geprojecteerd worden; het dubbelpunt in H_1 wijst er dus op dat ϱ^3 niet door T gaat.

ϱ^m Algemeen: afbeelding van een ϱ^m die x maal door T gaat en de rechten a_k in nog α_k punten snijdt, geeft een ϱ'^{m-x} ; want de projecteerende kegel is van den graad $m-x$, omdat een vlak door den top nog slechts zoovele punten met ϱ^m gemeen heeft. Snijding van ϱ'^{m-x} met een c'^3 door de hoofdpunten geeft $3(m-x)$ snijpunten, verdeeld in m buiten de hoofdpunten en $\Sigma \alpha_k$ er in, zoodat $3(m-x) = m + \Sigma \alpha_k$. Ter contrôle snijden wij ϱ' ook nog met κ^2 , hetgeen geeft $2(m-x) = x + \Sigma \alpha_k$. In beide gevallen vinden wij

$$2m - 3x = \Sigma \alpha_k.$$

Dimonoïde § 7. Nemen we het bijzondere geval dat Φ^3 een *dimonoïde* is, met toppen T_1 en T_2 . Door elk van deze beide

gaan dan nog $3.2 - 2.1 = 4$ rechten behalve de torsale t die de toppen verbindt, zoodat het aantal hoofdpunten tot vijf gereduceerd is. Zijn a_3, a_4, a_5, a_6 de rechten door T_1 , b_3, b_4, b_5, b_6 die door T_2 ; het vlak $(t a_3)$ bevat dan, daar de doorsnee in T_2 een dubbelpunt moet bezitten, in de doorsnede nog een rechte door T_2 , b.v. b_3 . Evenzoo mogen elkaar snijden a_4 en b_4 , a_5 en b_5 , a_6 en b_6 , terwijl de projectie uit T_1 moge geschieden.

We vinden dan in den doorgang H_{12} van t tevens hare afbeelding, in H_3, H_4, H_5, H_6 de beelden van a_3, a_4, a_5, a_6 , terwijl projectie van b_3, b_4, b_5, b_6 de doorgangen geeft van de vlakken $(t a_3), (t a_4)$ enz.; derhalve $H_{12} H_3, H_{12} H_4$, enz. De raaklijn r_{12} in H_{12} aan de raaklijnenkegelsnede is de projectie van de lijn r , restdoorsnee met de monoïde van het raakvlak door t ; en tenslotte is $H_3 H_4$ het beeld van c_{34} , restdoorsnee van vlak $(a_3 a_4)$, $H_3 H_5$ van c_{35} , enz.

Het is duidelijk dat b_5 en b_6 het vlak $(a_3 a_4)$ in twee punten van c_{34} doorboren, zoodat deze laatste de snijlijn is van vlak $(a_3 a_4)$ met vlak $(b_5 b_6)$. Evenzoo de overige c_{kl} .

Van de vijftien driezijdigen door de basispunten zijn hier, met de twee in H_{12} samengevallen basispunten, slechts negen overgebleven, waarvan drie nog drievoudige raakvlakken afbeelden, de overige 6 tweevoudige. Immers beschouw de driezijde $H_{12} H_3, H_{12} H_4, H_5 H_6$; zij beeldt de vlakke doorsnee $b_3 b_4 c_{56}$ af, van wier drie hoekpunten twee als raakpunt dienst doen, terwijl het derde het dubbelpunt T_2 is.

Trimonoïde § 8. Bij een *trimonoïde* vinden we door elken top buiten de twee torsalen nog $3.2 - 2.2.1 = 2$ rechten, a_5 en a_6 door T_1 , b_5 en b_6 door T_2 , c_5 en c_6 door T_3 , terwijl het aantal *hoofdpunten*, evenals het aantal rechten door T_1 ,

vier bedraagt. Vlak $(a_5 \ t_{12})$ geeft als restdoorsnee een rechte door T_2 ; zij dit b_5 . Dan liggen a_6 , t_{12} , b_6 ook weer *complanair*, enz. Wij krijgen dan als beeld van

$$\begin{aligned} t_{12} &\longrightarrow H_{12} \\ t_{13} &\longrightarrow H_{34} \\ t_{23} &\longrightarrow H_{12} \ H_{34} \\ a_5 \text{ en } a_6 &\longrightarrow H_5 \text{ en } H_6 \\ b_5 \text{ en } b_6 &\longrightarrow H_5 \ H_{12} \text{ en } H_6 \ H_{12} \\ c_5 \text{ en } c_6 &\longrightarrow H_5 \ H_{34} \text{ en } H_6 \ H_{34} \\ c_{56} &\longrightarrow H_5 \ H_6 \end{aligned}$$

waar c_{56} de restdoorsnee van vlak $(a_5 \ a_6)$ is. Verder is er nog β_{56} die het paar (b_5, b_6) tot volledige vlakke doorsnee aanvult. Haar beeld moet zijn de raaklijn in H_{34} aan de raaklijnenkegelsnede, die immers met $H_{12} \ H_5$ en $H_{12} \ H_6$ de totale doorsnee van vlak $(b_5 \ b_6)$ met de *monoïde* afbeeldt. Deze raaklijn is echter tevens projectie van de rechte r volgens welke het raakvlak door t_{13} het oppervlak nog snijdt, en inderdaad is deze rechte identiek met β_{56} . Want t_{13} heeft met vlak $(b_5 \ b_6)$ één punt der *monoïde* gemeen, een punt van β_{56} , aangezien zij noch b_5 noch b_6 snijdt; β_{56} vormt dan met t_{13} een vlak, in hun snijpunt rakend aan de *monoïde*, dan echter langs de geheele torsale t_{13} rakend, waarmee de genoemde identiciteit aangetoond is.

Quadri-
monoïde Bij een *quadrimonoïde* M^3 gaan door de toppen geen rechten behalve de drie torsalen. We hebben hier nog maar drie *hoofdpunten* overgehouden en vinden gemakkelijk als boven de verschillende afbeeldingen.

Φ^4

§ 9. Voor $n=4$ vermelden wij het bijzonder geval van het oppervlak van Steiner, de vierdegraadsmonoïde Φ^4 met drie dubbelrechten door den top S . Dan is S dus triplanair

punt, daar een kubische raaklijnenkegel alleen drie dubbelrechten kan bevatten wanneer hij ontaard is.

De *vlakke doorsneden* hebben tot *beelden rationale* c'^4 , wier drie dubbelpunten gelegen zijn in de doorgangen D_1, D_2, D_3 der dubbelrechten.

Niet iedere c'^4 door de 3 hoofdpunten D_k is hier echter het beeld van een vlakke c^4 . Want in D_k zijn negen bepalende punten gelegen, waarmee dus ∞^5 exemplaren bepaald zijn. Hiervan beelden ∞^3 de vlakke doorsneden af; de overigen ruimtekrommen q^4 die de dubbelrechten tot koorden hebben.

Een bundel vlakke doorsneden om een as a levert behalve de drie punten D_k nog vier collineaire basispunten K , de beelden der snijpunten van a met het oppervlak. Voor het bepalen van de klasse van Φ^4 hebben wij noodig het aantal c'^4 in den bundel die ontaard zijn in twee kegelsneden, daar het raakvlak aan de doorsnee nog een vierde dubbelpunt, het raakpunt, als eisch oplegt. Ieder der twee c'^2 der ontaarde figuur moet door D_1, D_2, D_3 en twee punten K gaan; het aantal combinaties twee aan twee der punten K bedraagt zes en het aantal kegelsnedenparen dus drie. Hieruit volgt: de *klasse* van Φ^4 is *drie*.

HOOFDSTUK II.

ϕ_{m+n+1}

§ 1. Een oppervlak ϕ_{m+n+1} met m -voudige rechte a en n -voudige rechte b kan afgebeeld worden op een plat vlak τ door de bilineaire congruentie der transversalen over a en b , daar dezen in het algemeen behalve de snijpunten met a en b nog slechts één punt P met het oppervlak gemeen hebben. De doorgang P' door τ van de transversaal uit P is dan beeld van P . We noemen dus projecteerende lijn van P de lijn die behalve dit punt nog m punten met het oppervlak op a en n op b gemeen heeft. Voor P op a wordt dit een raaklijn in P aan het oppervlak die op b rust, daar er dan $(m+1)$ gemeenschappelijke punten in P gelegen zijn. Evenzoo voor een punt van b .

Zij A^* doorgang van a door τ , B^* van b .

Vlakke
doorsnee

Willen we het beeld van een vlakke doorsnee c_{m+n+1} zoeken, dan bedenken we dat de projecteerende lijnen een regelvlak vormen met richtkrommen c_{m+n+1} , a en b . Het beeld c' zal zeker door A^* en B^* gaan, daar uit deze twee punten als behoorende tot de richtlijnen één of meer beschrijvenden vertrekken, wier doorgangen zij dan vormen. Om te zien hoe vaak zij zoo een punt van c projecteeren, hoe vaak dus c' door A^* en B^* zal gaan, zoeken wij den graad van het regelvlak en de veelvoudigheid der richtlijnen.

In het vlak van de doorsnee ligt als eenige op a en b rustende rechte de verbindingslijn van de doorgangen A en

B van a en b , die $cm + n + 1$ in één punt buiten A en B snijdt. Slechts bij dit ééne punt behoort AB als beschrijvende van het regelvlak. Want om A b.v. af te beelden hebben we als projecteerende lijn noodig een raaklijn in A aan het oppervlak; elk der m raakvlakken in A bevat één raaklijn die op b rust en derhalve projecteerende van A is, en tot die m behoort niet de lijn AB in een willekeurige vlakke doorsnee door A . Evenzoo voor B . Daar nu AB enkelvoudige beschrijvende van het regelvlak is en $cm + n + 1$ enkelvoudige richtlijn, is de graad van het regelvlak $m + n + 2$; dit is tevens de graad van de beeldkromme.

Verder zien we dat b den kegel, die $cm + n + 1$ uit een punt X van a projecteert, in $m + 1$ punten buiten B snijdt. Ieder van die $m + 1$ geeft, verbonden met X , een beschrijvende van het regelvlak, zoodat a $(m + 1)$ -voudige richtlijn is. Evenzoo is b $(n + 1)$ -voudige richtlijn en derhalve is de beeldkromme van $cm + n + 1$ een $c'm + n + 2$ ($A^*m + 1, B^*n + 1$).

§ 2. De snijding van twee zulke beeldkrommen brengt ons, evenals bij de monoïden, op de rechten van het oppervlak: een projecteerende lijn, die met twee vlakke doorsneden twee verschillende punten gemeen heeft, ligt op het oppervlak. Singuliere punten, *hoofdpunten* der afbeelding, zijn hier echter niet alleen de voetpunten H_k dier rechten, maar ook de doorgangen door τ van a en b , namelijk A^* en B^* . Immers, vlak (B^*a) snijdt ϕ^{m+n+1} nog in een kromme $k^n + 1$, waarvan alle punten in B^* worden afgebeeld. Evenzoo is A^* beeld van een $k^m + 1$. Een gaan door B^* van de beeldfiguur beteekent dus slechts voor het origineel een ontmoeting met $k^n + 1$, en twee krommen, wier beelden elkaar in B^* snijden, zullen in het algemeen twee verschillende punten van $k^n + 1$ bevatten wier projecteerende lijnen ook verschillend

zijn en niet op het oppervlak liggen. De berekening voor p , het aantal rechten op Φ^{m+n+1} wordt dan aldus:

$$(m+n+2)^2 = m+n+1 + (m+1)^2 + (n+1)^2 + p.$$

Waaruit volgt $p = 2mn + m + n + 1$.

Het oppervlak bevat dus $2mn + m + n + 1$ rechten, die op a en b rusten.

Wij noemen deze rechten h_k , waar $k = 0 \dots (p-1)$.

Nog dient gewezen te worden op de rechte A^*B^* als singulariteit: zij is in haar geheel de afbeelding van het ééne snijpunt D dat A^*B^* met het oppervlak oplevert buiten A^* en B^* .

Rechte a § 3. Het beeld van a krijgen we blijkbaar door het regelvlak der rechten die Φ^{m+n+1} in punten van a aanraken. Daar elk der m raakvlakken in zoo'n punt één raaklijn, op b rustend, geeft, is a m -voudige richtlijn. Verder bevat een vlak π door a $(n+1)$ beschrijvenden van het regelvlak; de restdoorsnee met Φ^{m+n+1} is namelijk een kromme k^{n+1} , die a in $n+1$ punten snijdt, en de beschrijvenden zijn de verbindingslijnen dier snijpunten met den doorgang B_1 van b door π . We vinden dus voor den graad van het regelvlak het getal $m+n+1$ en zien tevens dat door een willekeurig punt B_1 van b $(n+1)$ beschrijvenden gaan, zoodat b $(n+1)$ -voudige richtlijn is. Bedenken we nog dat a de p rechten op het oppervlak snijdt, dan is duidelijk dat het beeld a van a is een kromme α^{m+n+1} (A^{*m} , B^{*n+1} , p H_k).

Rechte b Evenzoo is het beeld van b een β^{m+n+1} (A^{*m+1} , B^{*n} , p H_k).

Contrôle: Snijding van α en β moet alleen in de hoofdpunten gemeenschappelijke punten geven, daar a en b niets gemeen hebben, maar beide de p rechten en de bovengenoemde restkrommen k^{n+1} en k^{m+1} snijden; b snijdt

namelijk k^{n+1} in het n -voudige punt B^* en k^{m+1} in $m+1$ punten; analoog a .

De contrôle geeft dan:

$(m+n+1)^2 = (2mn + m + n + 1) + m(m+1) + n(n+1)$,
hetgeen inderdaad juist is.

$c'r$ in τ § 4. Om te zien welke krommen op ons oppervlak kunnen voorkomen, beschouwen wij in τ een *willekeurige kromme* $c'r$. Evenals bij de monoïden kunnen wij ook hier in het algemeen terugprojecteeren om het origineel te vinden, hetgeen als projecteerende figuur hier het regelvlak levert der lijnen, die op a , b en c' rusten en de figuur op het oppervlak afbeelden die noodig en voldoende is om $c'r$ tot beeld te geven. Wij dienen echter te bedenken dat niet alleen, evenals bij de monoïden, de p rechten tot de doorsnee van regelvlak en oppervlak kunnen behooren (namelijk als $c'r$ door de punten H_k gaat) zonder dat zij van het origineel deel uitmaken, maar dat dit met de richtlijnen a en b van het regelvlak altijd het geval is. Immers, een willekeurige kromme in τ , $c'r$, zal in het algemeen tot projecteerende lijnen geen raaklijnen aan het oppervlak in punten van a of b leveren, dus zal a of b ook niet tot het origineel behooren ofschoon zij wel deel uitmaakt van de doorsnee.

Van onze willekeurige $c'r$ vormen de projecteerende lijnen een regelvlak van den graad $2r$; τ bevat namelijk behalve de enkelvoudige richtlijn $c'r$ de rechte A^*B^* , die voor elk van haar r snijpunten met $c'r$ beschrijvende, alzoo r -voudige beschrijvende is. Verder is a r -voudige richtlijn: vlak (Ab) , waar A een willekeurig punt van a is, snijdt $c'r$ in r punten, waaruit evenzoovele beschrijvenden over b naar A gaan. Evenzoo is b r -voudige richtlijn. Derhalve is het *origineel* een ruimtekromme van den graad $2r(m+n+1) - rm - rn = r(m+n+2)$

Zij rust in $r(m+n+1)$ punten op a , zooals blijkt uit de $r(m+n+1)$ gemeenschappelijke punten van c^r met a , terwijl zij in D , het eenige snijpunt van A^*B^* met Φ buiten A^* en B^* , een r -voudig punt bezit vanwege de r snijpunten van A^*B^* met c^r .

Gaat c^r door A^* , dan beteekent dit voor de ruimtekromme een snijpunt met k^{m+1} , voor ons regelvlak dus één beschrijvende door A^* . A^*B^* is dan ook niet als beschrijvende door het punt A^* te rekenen, is derhalve $(r-1)$ -voudige beschrijvende, zoodat de graad van het regelvlak wordt $r+r-1=2r-1$. Zoeken wij nu het aantal beschrijvenden, uit een willekeurig punt B van b , dan mogen we hiertoe ook niet BA^* rekenen, zoodat vlak (Ba) ons brengt tot slechts $(r-1)$ beschrijvenden, n.l. behoorende bij de $(r-1)$ snijpunten met c^r buiten A^* . Wanneer c^r a -maal gaat door A^* geeft dit dus een vermindering van de veelvoudigheid van richtlijn b met a . In het algemeen krijgen we dan als graad van de ruimtekromme wier beeld c^r a -maal door A^* , β -maal door B^* , λ_k -maal door het hoofdpunt H_k gaat,

$$(2r - a - \beta)(m + n + 1) - m(r - \beta) - n(r - a) - \sum \lambda = \\ = r(m + n + 2) - a(m + 1) - \beta(n + 1) - \sum \lambda$$

welke ruimtekromme dan λ_k maal op h_k rust.

Snijding met de beelden van a en b geeft ons nog het aantal snijpunten der ruimtekromme met deze twee lijnen.

Dit resultaat is eenvoudiger te verkrijgen door snijding met een vlakke doorsnee. In τ geeft dat $r(m+n+2)$ snijpunten, waarvan degenen die in de hoofdpunten liggen weer niet de afbeelding zijn van snijpunten in het origineel. We vinden dan onmiddellijk buiten de hoofdpunten het aantal $r(m+n+2) - a(m+1) - \beta(n+1) - \sum \lambda$, als graad der ruimtekromme.

door h_0 . § 5. De afbeelding wordt eenigszins vereenvoudigd door τ te leggen door één der rechten h_k , h_0 bijvoorbeeld. h_0 wordt dan A^*B^* , terwijl er verder nog $2m + n + n$ andere transversalen over a en b op Φ^{m+n+1} liggen.

Daar h_0 tot het regelvlak van den graad $m + n + 2$ behoort dat een vlakke doorsnee c^{m+n+1} afbeeldt, wordt de rest van de doorsnee van het regelvlak met τ , het beeld van c^{m+n+1} dus, gevormd door een kromme c'^{m+n+1} met een m -voudig punt A^* en n -voudig punt B^* en gaande door de $2m + n + n$ overige hoofdpunten.

Ook het beeld van a wordt eenvoudiger: een kromme van den graad $(m + n)$, die $(m - 1)$ -maal door A^* , n -maal door B^* en éénmaal door de andere hoofdpunten gaat.

Analoog voor b .

§ 6. Nemen wij als voorbeeld van deze afbeelding het geval $m = 1$, $n = 1$, het *kubisch oppervlak*.

Het is bekend dat dit 27 rechten bevat. Dezen kunnen elkaar niet allen snijden, want: zij (l, m) een paar snijdenden, dan ligt in haar vlak nog een derde rechte, n . Denken wij ons nu door l nog zoo'n drievoudig raakvlak dat behalve l nog m' en n' moge bevatten, dan zal m' de rechte m moeten kruisen of haar snijden op l . Dit laatste zou een kegelpunt voor het oppervlak beteekenen, buiten de onderstelling. Dus kruisen m en m' elkaar.

De 27 rechten Zij (b_1, b_2) een stel kruisende rechten op Φ^3 , dan kan de afbeelding geschieden door de transversalen over deze twee. Stellen wij nu in het voorheen gevonden aantal rechten $m = 1$, $n = 1$, dan vinden wij het getal 5, van welk vijftal, op b_1 en b_2 rustend, wij ons één in het tafereel denken; wij noemen deze laatste c_{12} . De andere vier noemen wij a_3, a_4, a_5, a_6 , met doorgangen en beelden H_3, H_4, H_5, H_6 .

De doorgang van b_1 beeldt de rechte a_1 af, restdoorsnee van vlak $(c_{12} b_2)$ met het oppervlak; de doorgang van b_2 analoog een rechte a_2 . Wij kunnen nu deze doorgangspunten H_1 en H_2 noemen in aansluiting aan de andere punten H die rechten afbeelden. Van de 27 rechten hebben wij zoo al zeven in de beeldfiguur teruggevonden, zes in de punten H_k en als zevende c_{12} , waarvan ieder punt wordt afgebeeld in de geheele c_{12} . Nu de overige twintig. Waartoe leidt ons in het tafereel b.v. de lijn b_1 ? Uit het algemeene geval, waar deze lijn a heette, volgt terstond, voor m en $n = 1$, dat het beeld een kegelsnede zal zijn, gaande door H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 . Evenzoo leidt b_2 tot de kegelsnede $(H_1 H_3 H_4 H_5 H_6)$.

We vragen ons af of ook de kegelsneden bepaald door vijf andere hoofdpunten een dergelijke beteekenis hebben. Daartoe bedenken we eerst dat een vlakke doorsnee, volgens het algemeen geval, in τ een c'^3 levert door de zes punten H_k . Deze wordt door elk der genoemde kegelsneden in vijf hoofdpunten gesneden, dus in nog één punt daarbuiten, zoodat alle zes kegelsneden door vijf punten H_k inderdaad rechten voorstellen.

We hebben nu nog veertien lijnen thuis te brengen, en vinden die afgebeeld in de verbindingslijnen $H_k H_l$. Immers, ook dezen hebben buiten de hoofdpunten nog slechts één punt met c'^3 gemeen. De combinatie kl is op $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ manieren mogelijk, doch daar wij $H_1 H_2 \equiv c_{12}$ al gerekend hadden, vinden we hier inderdaad de veertien overige rechten c_{kl} .

We vonden dus:

- | | | | |
|----|-----------------|----------------|--|
| 6 | $a_1 \dots a_6$ | afgebeeld door | $H_1 \dots H_6$ |
| 6 | $b_1 \dots b_6$ | „ „ | kegelsneden $(H_2 H_3 H_4 H_5 H_6)$ enz. |
| 15 | c_{kl} | „ „ | $H_k H_l$ |

Uit de beeldfiguur lezen we dat elkaar kruisen:

a_k en a_l , b_k en b_l , a_k en b_k ; dat a_k en b_l elkaar snijden. Ook snijdt c_{kl} de rechten b_k , b_l , a_k , a_l , zoodat zij de doorsnee is der vlakken $(a_k b_l)$ en $(a_l b_k)$, en tevens de rechten c_{pq} , waaruit volgt dat de c -lijnen drie aan drie in *vijftien* *driedvoudige raakvlakken* liggen.

De a - en b -lijnen, twaalf in getal, vormen een *bisextupel* $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ dat zóó georiënteerd is, dat alleen twee elementen uit verschillende rij én verschillende kolom elkaar snijden. Daar, zooals gemakkelijk is na te gaan, elke der 27 rechten tien andere snijdt en dus zestien kruist, zijn er $\frac{27 \cdot 16}{1 \cdot 2}$ paren kruisende lijnen, zooals (a_1, b_1) er één is. Bij elk stel behoort slechts één bisextupel. Want van a_1 en b_1 , boven elkaar gezet, uitgaande kunnen wij geen b -lijnen in de bovenste rij krijgen, daar nooit zes a 's en b 's door elkaar onderling kruisend kunnen zijn, en ook geen c -lijnen, daar deze de index 1 zouden moeten bezitten om b_1 te snijden en die zouden moeten missen om a_1 te kruisen. Het ééne, bij (a_1, b_1) behorende bisextupel behoort echter evenzeer bij ieder stel (a_k, b_k) , zoodat wij in het geheel vinden $\frac{27 \cdot 16}{2 \cdot 6} = 36$ bisextupels.

Q^3 § 7. Gaan wij na deze indeeling der 27 rechten eens na hoe verschillende krommen op het oppervlak op τ worden afgebeeld.

Nemen wij in τ een willekeurige rechte l' . Zij snijdt een c'^3 door de hoofdpunten in drie punten buiten H_k , is dus het beeld van een Q^3 op het oppervlak. Daar verder de kegelsneden $(H_1 H_2 H_3 H_4 H_5)$ enz. elk twee snijpunten met l' leveren, de rechten $H_k H_l$ één snijpunt, heeft de Q^3 de zes b -lijnen tot bisecanten, de c -lijnen tot unisecanten, terwijl zij, daar l' niet door de punten H_k gaat, de a -rechten niet snijdt.

Bij een andere afbeelding van het kubisch oppervlak

zullen we zien dat iedere ϱ^3 op Φ^3 zes der 27 rechten, zij het dan ook niet het zestal b -lijnen, tot bisecanten heeft. Dat er inderdaad zulke krommen ϱ^3 op Φ^3 zijn, die andere dan de b -lijnen tot koorden hebben, blijkt dadelijk als wij bij de afbeelding van twee andere kruisende rechten uitgaan en τ weer leggen door één der op Φ^3 gelegen transversalen over dit tweetal. Iedere rechte in dit nieuwe tafereel is dan beeld van een ϱ^3 , die behalve de twee gegeven kruisende rechten nog vier andere tot koorden heeft; waarmee het gestelde aangetoond is.

Deze laatste ϱ^3 zal echter in ons oorspronkelijk tafereel niet als rechte afgebeeld worden. Hoe dan wel? Dat zal van de oriëntatie t.o.v. de verschillende lijnen afhangen, van het feit welk zestal hare bisecanten zijn. Wij willen daarom nu verband zoeken tusschen den graad r van haar beeldkromme en het aantal snijpunten, a_k , met de lijnen a_k b.v. Snijden wij daartoe de beeldkromme met het beeld van een vlakke doorsnee, dan is

$$3r = 3 + \sum_6 a_k$$

$$\text{of } \sum_6 a_k = 3(r - 1) \quad 1)$$

Verder vinden wij uit het feit dat ruimtekromme en beeld wegens de (1,1) afbeelding hetzelfde geslacht hebben

$\frac{1}{2} (3 - 1) (3 - 2) - h = \frac{1}{2} (r - 1) (r - 2) - \frac{1}{2} \sum_6 a_k (a_k - 1)$
 waar de laatste term voorstelt het aantal dubbelpunten dat gelijkwaardig is met de a_k -voudige punten der beeldkromme, en h = aantal schijnbare dubbelpunten der ruimtekromme. Voor een ϱ^3 is $h = 1$, zoodat

$$r^2 - 3r + 2 = \sum a_k^2 - \sum a_k$$

of, in verband met 1)

$$\sum_6 a_k^2 = r^2 - 1 \quad 2)$$

Aan de betrekkingen 1) en 2) moet voldaan zijn bij de afbeelding van een ϱ^3 op het kubisch oppervlak. Daar deze

hoogstens bisecanten kan hebben is $\alpha_k \leq 2$, $r^2 - 1 \leq 24$, $r \leq 5$. Het beeld is dus hoogstens een c'^5 . Wij zullen nagaan of de gevallen $r = 5, 4, \dots, 1$, inderdaad alle kunnen voldoen aan 1) en 2) bij eenige rangschikking van α_k .

$r = 5$. Dan zou moeten zijn $\sum_6 \alpha_k^2 = 24 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ als eenige mogelijke verdeling der zes quadraten. Dat wil zeggen: indien het mogelijk is een ϱ^3 door een c'^5 af te beelden in ons aangenomen tafereel, dan moet ϱ^3 de zes a -lijnen tot koorden hebben, c'^5 de hoofdpunten alle tot dubbelpunten; c'^5 ($6 H_k^2$) dus. Maken wij nu de som $\sum \alpha_k$ op, dan komt ook formule 1) uit; zoodat inderdaad zoo'n c'^5 beeld van een ϱ^3 op het oppervlak is. De ligging der andere rechten, t.o.v. ϱ^3 volgt uit snijding van hare beelden met c'^5 . In het overzicht hieronder is zij voor elke r -waarde aangegeven.

$r = 4$ $\sum_6 \alpha_k^2 = 15 = 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1$. 3 der a -lijnen zijn koorden, 3 unisecanten. $\sum \alpha_k = 9 = 3(r-1)$. Het beeld is $c'^4 (H_1^2 H_2^2 H_3^2 H_4 H_5 H_6)$.

$r = 3$ $\sum_6 \alpha_k^2 = 8 = 4 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0$.

$\sum \alpha_k = 4 \neq 3(r-1)$. Dus zóó n ϱ^3 bestaat niet op Φ^3 .

$\sum_6 \alpha_k^2 = 8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0$. Eén a -koorde, 4 a -unisecanten, 1 a -nulsecante. $\sum \alpha_k = 6 = 3(r-1)$. Het beeld is $c'^3 (H_1^2 H_2 H_3 H_4 H_5)$.

$r = 2$ $\sum_6 \alpha_k^2 = 3 = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0$.

$\sum \alpha_k = 3 = 3(r-1)$. 3 a -unisecanten, 3 a -nulsecanten.

Het beeld is $c'^2 (H_1 H_2 H_3)$.

$r = 1$ $\sum_6 \alpha_k^2 = 0$.

$\sum \alpha_k = 0$. 6 a -nulsecanten.

Ieder dezer r -waarden vertegenwoordigt bij bepaalde in-deeling der a -lijnen een stelsel van ∞^2 krommen ϱ^3 op Φ^3 , zooals blijkt uit het aantal bepalende punten der beeld-krommen, in de hoofdpunten gelegen: dit is telkens twee

minder dan benodigd is voor het bepalen van één kromme c' .
 Echter kan bij $r=4$ bv., het drietal a -lijnen dat als koorde
 dienst doet op $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ manieren gekozen worden, zoodat
 er 20 stelsels van deze ϱ^3 zijn. Analoog voor $r=3$ enz.

Overzicht der krommen ϱ^3 op Φ^3 .

Beeld	6 koorden	15 unisecanten	6 nulsecanten	stelsels
c'^5	$a_1 \dots a_6$	c_{kl}	$b_1 \dots b_6$	1
c'^4	$a_1 a_2 a_3 c_{45} c_{46} c_{56}$	$b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6$ en overige c_{kl}	$c_{23} c_{13} c_{12} b_6 b_5 b_4$	20
c'^3	$a_1 b_1 c_{26} c_{36} c_{46} c_{56}$	$a_2 \dots a_5 b_2 \dots b_5$ en overige c_{kl}	$a_6 b_6 c_{12} c_{13} c_{14} c_{15}$	30
c'^2	$b_3 b_2 b_1 c_{56} c_{46} c_{45}$	$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6$ en overige c_{kl}	$c_{12} c_{13} c_{23} a_4 a_5 a_6$	20
c'	$b_1 \dots b_6$	c_{kl}	$a_1 \dots a_6$	1

In het geheel 72

De twee zestallen koorden en nulsecanten van elk stelsel
 vormen een bisextupel. Ieder bisextupel hoort bij 2 stelsels,
 zoodat wij hier weer het getal 36 terugvinden

HOOFDSTUK III.

Φ_{n+p+1} § 1. De afbeelding van een Φ_{n+p+1} met n -voudige kromme α^q en p -voudige rechte β die α^q $(q-1)$ -maal snijdt, geschiedt door de rechten die in verschillende punten op α en β rusten, in dier voege dat de projecteerende lijn van een punt P is de lijn die behalve P nog n punten op α en nog p op β met het oppervlak gemeen heeft. Voor P op α of β wordt zij raaklijn.

Deze projecteerende lijnen vormen een congruentie $(1, q)$: door een willekeurig punt P is het vlak $(P\beta)$ te leggen dat met α buiten β nog slechts één punt U gemeen heeft, zoodat PU de eenige projecteerende lijn is door P ; een willekeurig vlak snijdt β in een punt V , α in q punten, die, verbonden met V , q projecteerende lijnen geven.

Singuliere punten in τ van deze $(1, 1)$ afbeelding zijn weer, behalve de voetpunten der op het oppervlak nog te vinden rechten, de q doorgangen van α^q , A_k^* , en de doorgang B^* van β , welke alle beelden zijn van ∞^1 punten op het oppervlak.

Vlakke doorsnee § 2. Zij c^{n+p+1} een vlakke doorsnee die β in F , α in de q punten G_k moge snijden. De projecteerende figuur is het regelvlak der rechten die in twee verschillende punten op α en β en tevens op c rusten en dit snijpunt met c afbeelden. Gaan wij den graad en de veelvuldigheid der richtlijnen na. Uit een punt A van α wordt c centraal geprojecteerd

volgens een kegel van den graad $n + p + 1$, die β in $(n + 1)$ punten buiten c snijdt. Deze $(n + 1)$ geven, verbonden met A , evenzoo vele beschrijvenden van ons regelvlak, het punt F daarentegen niet. Want dan zou $A F$ het punt F moeten afbeelden; maar als punt van β wordt F afgebeeld door p raaklijnen aan Φ^{n+p+1} , n.l. in elk der p raakvlakken in F door de raaklijn die op a rust; en voor een willekeurig punt A op a zal in het algemeen $A F$ niet tot die p raaklijnen behooren; a is derhalve $(n + 1)$ -voudige richtlijn. Evenzoo vinden we dat richtlijn β $(p + q)$ -voudig is: de c projecteerende kegel, met top B op β , snijdt a in

$$q(n + p + 1) - qn - p(q - 1) = (p + q)$$

punten buiten β en c , die elk een beschrijvende leveren. De punten G_k tellen weer niet mee, om dezelfde reden als boven F ; de punten $A_1 \dots A_{q-1}$ waarin β de kromme a^q snijdt evenmin, daar β dan projecteerende lijn zou moeten wezen van F ; voor een willekeurige vlakke doorsnee nu zijn de projecteerende lijnen van haar snijpunt met β de p raaklijnen, boven reeds genoemd, waartoe in het algemeen β niet behoort. Dus β is $(p + q)$ -voudige richtlijn. Merken wij nog op dat in het vlak van c de punten G_k , verbonden met F , q beschrijvenden leveren, projecteerende lijnen van hun eenig snijpunt met c buiten a en β , dan volgt voor den graad van het regelvlak dat c^{n+p+1} afbeeldt het getal $n + p + q + 1$, en het beeld is een

$$c'^{n+p+q+1} (q A^{*n+1}, B^{*p+q}).$$

Twee zulke krommen, c'_1 en c'_2 , hebben buiten A^* en B^* $(n + p + q + 1)^2 - q(n + 1)^2 - (p + q)^2$ gemeenschappelijke punten. Hiertoe behooren nog de $(n + p + 1)$ beelden der snijpunten van c_1 en c_2 , terwijl de overigen rechten op het oppervlak, rustend op a en β , afbeelden. Derhalve:

$$\text{Het aantal rechten bedraagt } s = n^2 + 2pn + n + p + q - n^2q.$$

Hare voetpunten geven s hoofdpunten H_k .

Nemen we $q = 1$, dan vinden we het aantal in hoofdstuk II gevonden.

Verder is uit deze formule te lezen dat voor $n = 1$ het aantal rechten op α en β rustend onafhankelijk van q is. Een oppervlak Φ_{p+2} met p -voudige rechte heeft er $3p + 2$.

§ 3. Zoeken wij het beeld van β , dan is de projecteerende figuur het regelvlak der raaklijnen in punten van β . Om na te gaan hoevele beschrijvenden van dit regelvlak uit een willekeurig punt B van β vertrekken, bedenken we dat in elk der p raakvlakken in B al vast één raaklijn ligt die op α rust, n.l. BQ_k , als Q_k ($k = 1 \dots p$) het eenige snijpunt van zoo'n raakvlak met α buiten β is. De p raaklijnen zijn de projecteerende lijnen van het punt B ; β zelf echter is ook raaklijn aan het oppervlak en rust ook op α ; kan zij niet ook beschrijvende van het regelvlak zijn, dus een punt van β , zij het dan niet B , projecteeren? In dat geval moet er voor een vlak π , wentelend om β , een stand zijn waarin ook zijn laatste snijpunt met α op β is terechtgekomen, en dat geschiedt inderdaad voor $(q-1)$ standen. Terwijl π gewoonlijk als restdoorsnee geeft een $cn+1$ met n -voudig punt Q en $(n+1)$ snijpunten $X, Y, Z, \dots$ met β , zoodat $QX, QY, \dots$ respectievelijk de punten $X, Y, \dots$ afbeelden, ligt in deze $(q-1)$ gevallen Q op β , zoodat van $X, Y, Z, \dots$ er n in Q zijn gevallen en nog slechts één, Y b.v., er buiten ligt. De projecteerende lijnen van $X, Z, \dots$ zijn nu de n raaklijnen aan $cn+1$ in Q , terwijl β van Y de projecteerende lijn, alzoo beschrijvende van het regelvlak is. Daar ieder punt van β snijpunt is van richtlijn en beschrijvende, is π raakvlak langs de geheele β . We zien dus dat β torsale rechte op het regelvlak is, en wel $(q-1)$ -voudig torsale, derhalve $(p+q-1)$ voudige richtlijn.

Voor den graad van het regelvlak volgt dan meteen, daar $QX, QY, \dots (n+1)$ beschrijvenden vormen in π , het getal $p+q-1+n+1=p+q+n$. Ook is duidelijk dat uit een punt Q van $\alpha (n+1)$ beschrijvenden vertrekken, zoodat $\alpha (n+1)$ -voudige richtlijn is en het *beeld* van β luidt:

$$\beta'^{n+p+q} (q A^{n+1}, B^{p+q+1}, s H_k)$$

Contrôle: voor het aantal gemeenschappelijke punten van β' met $c'^{n+p+q+1}$ vinden we buiten A^*, B^* en H_k :
 $(n+p+q+1)(n+p+q)-q(n+1)^2-(p+q)(p+q-1)-n^2-2pn-np-q+n^2q=p$
 hetgeen inderdaad het aantal snijpunten van β en c is.

α^q § 4. Het regelvlak dat α^q afbeeldt, heeft α tot n -voudige richtlijn: elk der n raakvlakken in een punt A van α snijdt β in een punt dat verbonden met A een beschrijvende geeft.

Stel het aantal beschrijvenden uit een punt B van β is y , of wel stel β is y -voudige richtlijn. Een vlak door β bevat als restdoorsnee met het oppervlak, zooals we reeds zagen, een $cn+1$ met n -voudig punt Q op α . In de n raaklijnen in Q bezit het vlak n beschrijvenden van het regelvlak dat α afbeeldt, zoodat de graad hiervan is: $y+n$, en het beeld van α een α'^y+n ($q A^{*n}, B^{*y}, s H_k$). Combinatie met $c'^{n+p+q+1}$ levert:

$$(n+p+q+1)(y+n) = qn(n+1) + y(p+q) + s + qn$$

waaruit volgt, na invulling van de waarde voor s ,

$$y = p+q.$$

Zoo wordt het *beeld* van α^q een α'^{n+p+q} ($q A^{*n}, B^{*p+q}, s H_k$).

c'^r in τ § 5. Zij nu c'^r een kromme in τ die α_k maal door H_k gaat, α^* maal door de q punten A^* , β^* maal door B^* , dan wordt de graad der ruimtekromme die zij afbeeldt gegeven door de vergelijking

$$r(n+p+q+1) = \sum \alpha_k + q\alpha^*(n+1) + \beta^*(p+q) + m$$

welke uit snijding van $c'r$ met het beeld van een vlakke doorsnee volgt.

Combinatie met de beelden van α^q en β geeft ons evenzoo het aantal snijpunten van deze twee lijnen met de ruimtekromme.

Φ^3
= $1p=1q=3$ § 6. Beschouwen wij nu het geval van een kubisch oppervlak met enkelvoudige kubische kromme en enkelvoudige rechte, koorde der kromme. Dus $n=1, p=1, q=3$. De kubische kromme moge er één zijn die de zes a -lijnen van Φ^3 tot koorden heeft, en zij dan a_1 degene, waarop alle projecteerende lijnen moeten rusten. Tot deze laatsten behooren vijf rechten van Φ^3 , n.l. c_{1k} , $k=2 \dots 6$. Hare doorgangen H_k zijn 5 hoofdpunten.

Uit het algemeene geval lezen wij nu verder af dat het beeld van een vlakke c^3 is een c'^6 ($A_1^{*2} A_2^{*2} B_3^{*2} B^{*4} 5 H_k$). a_1 levert in het tafereel een α^5 ($A_1^{*2} A_2^{*2} A_3^{*2} B^{*3} 5 H_k$) en ϱ^3 een r^5 ($A_1^* A_2^* A_3^* B^{*4} 5 H_k$).

Combineeren wij ter contrôle r^5 met α^5 , dan moeten wij twee snijpunten vinden buiten de hoofdpunten.

Nu is $25 = 3.2 + 4.3 + 5 + x$, waaruit $x=2$.

Φ^4
= $1p=2q=2$ § 7. Stel nu $n=1, p=2, q=2$; dit is dus het geval van een 4e-gradsoppervlak met een enkelvoudige kegelsnede en een dubbelrechte die de kegelsnede in één punt snijdt. Wij behoeven nu slechts uit te gaan van het Φ^4 met de dubbelrechte d , en kunnen aantoonen dat er dan altijd kegelsneden op Φ^4 liggen, die d in één punt snijden en dat elk dezer op 8 rechten van het oppervlak rust. Daartoe beschouwen we eerst de verschillende vlakken om d en hunne restdoorsneden met Φ^4 , kegelsneden, en we willen nagaan voor hoeveel van die vlakken die kegelsnede uit een lijnen-

paar bestaat. Telkens wanneer dit het geval is ligt het centrum op Φ^4 , en wij hebben dus het aantal snijpunten te zoeken van ons oppervlak met de meetkundige plaats dier centra, μ ; allereerst dus den graad dezer meetkundige plaats, het aantal centra dat vlak V^∞ bevat namelijk.

Zij π een vlak door d dat als restdoorsnee met Φ^4 een parabool geeft, en zij ψ^4 de vlakke doorsnee van V^∞ met Φ^4 . De parabool moet dan twee samenvallende punten met ψ^4 gemeen hebben, waarin tevens haar centrum gelegen is; en de gemeenschappelijke raaklijn, doorsnee van vlak π met V^∞ , zal ook het oneindig verre punt D^∞ van d moeten bevatten, d.i. dubbelpunt van ψ^4 . Omgekeerd wijst iedere raaklijn, uit D^∞ aan ψ^4 te trekken, op een parabool als restdoorsnee in één van de vlakken om d , dit is op een centrum in V^∞ . En aangezien uit D^∞ zoo $4 \cdot 3 - 6 = 6$ raaklijnen te trekken zijn, snijdt μV^∞ in 6 punten en is haar graad 6. Van de zes punten die zij met ieder vlak om d gemeen heeft, ligt er altijd maar één buiten d , dus vijf er op. Letten wij nu op de gemeenschappelijke punten van μ^6 met Φ^4 , dan zijn er van de 24 zes in V^∞ gelegen en 5×2 op d . Deze laatsten kunnen niet dienst doen als dubbelpunten van lijnenparen, daar zij dan tevens viervoudige punten voor het oppervlak zouden beteekenen, zoodat er slechts acht overblijven. Derhalve:

Er zijn acht lijnenparen op het oppervlak in vlakken om d gelegen.

Zal er nu een kegelsnede δ_1 bestaan op Φ^4 , in één punt X rustend op d , dan zal het vlak door δ_1 nog een kegelsnede δ_2 , door X gaande, als restdoorsnee, geven. De acht lijnenparen (a_k, b_k) zullen deze twee kegelsneden moeten ontmoeten, en, aangezien geen twee snijdende rechten op d en δ kunnen

rusten, brengt a_k als snijlijn van δ_1 noodzakelijk mee b_k als snijlijn van δ_2 ; zoodat δ_1 en δ_2 elk acht der rechten a_k, b_k ontmoeten, 8 kruisenden.

Wij zien dus dat als een kegelsnede δ_1 te vinden is op Φ^4 , in één punt rustend op d , dan heeft zij acht kruisenden der rechten a_k, b_k tot unisecanten; en omgekeerd als een kegelsnede bestaat in één punt d snijdend en welke die acht rechten tot unisecanten heeft, dan heeft zij tien punten met het oppervlak gemeen en ligt er dus op. Wij kiezen nu dus uit a_k, b_k acht kruisenden uit en willen nagaan of het mogelijk is, een δ^2 te vinden die één punt met d gemeen heeft en verder op dat achttal rust, of liever op zeven er van, daar δ^2 dan reeds negen punten met Φ^4 gemeen heeft, dus er op ligt en noodzakelijk, volgens het bovenstaande, een achtste rechte tot secante bezit.

Beginnen wij eens met drie rechten a_k , en beschouwen de meetkundige plaats M der kegelsneden door twee gegeven punten P en Q , rustend op de drie a_k ; PQ zij l . Tot deze kegelsneden behooren de twee lijnenparen lc_1 en lc_2 , waar c_1 en c_2 de transversalen van l, a_1, a_2, a_3 zijn. Op de meetkundige plaats is l dus dubbelrechte, terwijl in elk vlak door l nog één kegelsnede door P en Q ligt. De graad van M is dus vier, en daar iedere rechte door P , en evenzoo door Q , daar drie punten van M bevat, zijn P en Q twee driedvoudige punten. We vinden dus een dimonoïde, D^4 , met toppen P en Q . a_4 snijdt deze D^4 in vier punten, zoodat vier kegelsneden door P en Q op a_1, a_2, a_3, a_4 rusten.

Laten we nu Q over l loopen, dan zal de enkelvoudige oneindigheid van kegelsneden die daarbij behoort een oppervlak vormen dat l viervoudig bevat, en, daar in een vlak door l nog slechts één exemplaar gelegen is, n.l. dat bepaald is door P en de vier snijpunten met a_1, a_2, a_3, a_4 , zal de graad

van het oppervlak zes zijn. Er zijn dus zes kegelsneden door P die l tot koorde hebben en op a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , rusten.

Door P nu ook loopend te nemen over l vinden we een oppervlak van den graad acht als meetkundige plaats der kegelsneden die op a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , rusten en l tot koorde hebben. Is er een rechte d , die de 5 rechten a snijdt, dan treft zij dit oppervlak in nog drie punten daarbuiten, zoodat er in drie vlakken door l een kegelsnede ligt die in verschillende punten a_k en d snijdt. Het oppervlak omhuld door alle vlakken, die elk zulk een c^2 bevatten, is dus van de klasse drie; wij noemen het Σ_1 .

Zij Σ_2 evenzoo omhuld door vlakken met kegelsneden, rustend op $d, a_1, a_2, a_3, a_4, a_6$, en Σ_3 door die op $d, a_1, a_2, a_3, a_4, a_7$, dan zullen in het algemeen in een gemeenschappelijk raakvlak de drie c^2 , die achtereenvolgens bij Σ_1, Σ_2 en Σ_3 behooren, samenvallen, omdat zij de vijf snijpunten met d, a_1, a_2, a_3, a_4 gemeen hebben. En in die ééne gemeenschappelijke kegelsnede vinden wij dan één zooals we zoeken, n.l. een c^2 , die $d, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ snijdt. De vraag is dus nu: hoeveel gemeenschappelijke raakvlakken bezitten Σ_1, Σ_2 en Σ_3 ?

Beter echter kunnen we het duale geval nemen; een kegelsnede heeft tot duale figuur een kegel en in plaats van Σ_1 vinden wij dus de meetkundige plaats S_1 der punten, waaruit een quadratische kegel gaat die in zes van zijn raakvlakken respectievelijk de rechten $d, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ bevat. Haar graad is drie. Analoog S_2 en S_3 , en wij zoeken nu het aantal snijpunten van deze drie. Uit zoo'n snijpunt n.l. gaat één quadratische kegel behoorend bij S_1 , één bij S_2 , één bij S_3 , welke drie kegels vijf raakvlakken gemeen hebben, dus samenvallen tot zoo'n kegel als we zochten. Echter moeten we bedenken dat d, a_1, a_2, a_3, a_4 en dus ook de tweede transversaal t over a_1, a_2, a_3, a_4 , op alle drie de opper-

vlakken gelegen zijn. Immers: met een willekeurig punt Y van a , bepalen a_2, a_3, a_4, a_5 en d 5 vlakken als raakvlakken van den quadratischen kegel uit Y die aan de eischen voor S_1 voldoet. Y ligt dus op S_1 , en evenzoo alle punten van a_1 , terwijl t.o.v. S_2 en S_3 hetzelfde geldt.

Nu vallen echter voor een punt P van één dier zes lijnen de kegels respectievelijk behoorend tot S_1, S_2 en S_3 niet samen tot een gezochten, daar zij slechts vier raakvlakken gemeen hebben. Wij hebben dus de gemeenschappelijke punten van S_1, S_2 en S_3 buiten a_1, a_2, a_3, a_4, d en t op te zoeken. S_1 snijdt dan S_2 daarbuiten nog in een ϱ^3 welke negen punten met S_3 gemeen heeft. Hoevele van deze negen liggen nu op a_1 b.v.? Leggen wij een vlak door a_1 , dan snijdt dit op S_1 en S_2 elk nog een kegelsnede uit. Drie van de vier snijpunten dier kegelsneden zijn de doorgangen van a_2, a_3 en a_4 , het vierde moet een punt van ϱ^3 zijn, zoodat de overige twee snijpunten van ϱ^3 met het vlak op a_1 moeten gelegen zijn. Evenzoo zijn a_2, a_3 en a_4 koordeën van ϱ^3 , en van bovengenoemde negen gemeenschappelijke punten liggen dus acht op a_k , slechts één er buiten; zoodat wij tenslotte één kegel vinden die in acht van zijn raakvlakken de lijnen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, d$ bevat. Of dual: er is één kegelsnede die in acht van hare punten de rechten $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, d$ ontmoet. Zij snijdt dan noodzakelijkerwijs als achtste rechte a_8 of b_8 .

Aangezien uit de zestien rechten a_k, b_k op 128 manieren een stel van zeven kruisenden te vinden is, zijn er 128 van die kegelsneden; zij zijn twee aan twee gelegen in 64 *driedvoudige raakvlakken*, waarbij het 4e snijpunt der twee c^2 , als dubbelpunt, de doorgang van d is.

Dat getal 128 vinden we aldus: de eerste rechte kunnen

we op 16 wijzen kiezen, daarna de tweede op 14 wijzen, de derde op 12, enz. Het aantal zeventallen zou dan zijn 16. 14. 4. Maar elk zevental, aangevuld door de noodzakelijke achtste tot achttal, kan door acht verschillende keuzen van No. 1 veroorzaakt zijn, daarna nog door zeven keuzen van No. 2, enz., zoodat het juiste aantal kegelsneden is

$$\frac{16. 14. 4}{8. 7. 2} = 128.$$

§ 8. Nu de afbeelding zelf door de congruentie (1, 2) der transversalen over d en δ . d moge τ snijden in D^* , δ in A^* en B^* . Zij verder D_0 het snijpunt (d , δ).

Vlakke c^4 Een vlak, χ , dat een c^4 uitsnijdt op het oppervlak, bevat van het regelvlak dat deze c^4 afbeeldt twee beschrijvende lijnen, de verbindingslijnen der twee doorgangen van δ^2 met den doorgang van d . De graad van het projecteerende regelvlak en van de projectie wordt dus al vast zes. Verder heeft de kegel die δ^2 uit een punt van d projecteert, met c^4 8 punten gemeen, waarvan twee in D , twee in A en B , als D , A en B zijn de doorgangen van d en δ . Er blijven dus van de acht vier over, die vier beschrijvenden uit het punt van d bepalen, zoodat deze viervoudige richtlijn is.

Een punt van δ^2 levert evenzoo twee beschrijvenden, waaruit volgt dat δ^2 als dubbele richtlijn optreedt en het beeld van onze vlakke doorsnee wordt: $c'^6 (D^{*4} A^{*2} B^{*2})$.

Snijding van twee zulke c'^6 brengt ons tot de acht rechten a_k op het oppervlak, die, naar we al wisten, op δ en d rusten. Hare doorgangen, H_k , door τ zijn hare beelden, hoofdpunten der afbeelding evenals D^* , A^* , B^* .

Voor een punt B van b_1 vinden we als projecteerende

lijn BT, als T het punt (δa_1) is; de verschillende punten van b_1 leveren zoo den waaier T in het vlak (a, b_1) en de doorgang door τ van dit vlak, $D^* H_1$, is dan *beeld* van b_1 . Evenzoo $D^* H_k$ van b_k .

Dubbel-
rechte d .

§ 9. Voor afbeelding van d treedt weer het regelvlak der raaklijnen in punten van d op. δ blijkt dubbele richtlijn te zijn: een punt S van δ bepaalt met d een vlak dat nog een kegelsnede uitsnijdt; de twee snijpunten van deze laatste met d geven met S verbonden de twee beschrijvenden uit S.

Zoo geeft ieder vlak door d twee beschrijvenden t . Eén stand echter brengt S op d in D_0 , en in dien stand valt t_1 langs d , terwijl t_2 raaklijn is aan de restkegelsnede; d geldt dus als enkelvoudig beschrijvende. De twee raakvlakken in een punt D van de dubbelrechte aan het oppervlak bevatten buiten deze elk nog één ribbe van kegel (D, δ) , hetgeen twee beschrijvenden uit D beteekent. Dus is d drievoudige richtlijn, en de graad van het regelvlak *vijf*. Zoo vinden we voor het *beeld* van d een kromme d'^5 ($D^{*3}, A^{*2}, B^{*2}, 8 H_k$).

δ^2

§ 10. Bij de afbeelding van δ zien we: in een punt Z van δ is één raakvlak aan te brengen; dit geeft met d één snijpunt, dus één beschrijvende door Z van het regelvlak dat de kegelsnede afbeeldt; δ is enkelvoudige richtlijn. In haar vlak ligt als restdoorsnee nog een kegelsnede door D_0 , het snijpunt van de dubbelrechte met δ . D_0 verbonden met de drie overige snijpunten dier twee kegelsneden geeft drie beschrijvenden, waaruit voor den graad van het regelvlak het getal vijf volgt.

Een vlak π door de dubbelrechte bevat slechts één beschrijvende: het snijdt δ in nog één punt buiten D_0 , waar het raakvlak in de snijlijn met π de beschrijvende levert.

Derhalve is d viervoudige richtlijn en het beeld van δ een δ'^5 ($D^4, A^*, B^*, 8 H_k$).

§ 11. Door nu het aantal snijpunten te bepalen in τ met de beelden van d , δ en c^4 kunnen wij van verschillende figuren in het tafereel het origineel leeren kennen. Zoo is *Rechte in τ* in het algemeen een rechte in τ het beeld van een ϱ^6 die d vijfmaal en δ vijfmaal snijdt, terwijl twee zulke krommen slechts één punt gemeen hebben.

Een rechte door D^* echter heeft nog slechts twee punten met c'^6 gemeen buiten de hoofdpunten en eveneens met d' twee, beeldt dus een c^2 af die d tot koorde heeft. Zoo correspondeert de waaier om D^* met de restdoorsneden van vlakken om d .

Ook zien we hier terug dat de acht verbindingslijnen $D^* H_k$ acht rechten afbeelden, die alle de dubbelrechte snijden, doch δ niet, n.l. de acht b -lijnen.

c'^m in τ In het algemeen: stel in τ gegeven een c'^m , a_k maal door H_k gaand, β^* -maal door A^* en B^* , γ^* -maal door D^* , en zij deze het beeld van een ϱ^n die de rechten a_k dan in a_k punten snijdt, δ in β punten en d in γ , dan wordt het verband tusschen die verschillende grootheden aangegeven door de vergelijkingen

$$6 m = 4 \gamma^* + 4 \beta^* + \sum a_k + n$$

$$5 m = 4 \gamma^* + 2 \beta^* + \sum a_k + \beta$$

$$5 m = 3 \gamma^* + 4 \beta^* + \sum a_k + \gamma$$

waaruit n , β en γ zijn te bepalen.

§ 12. Wij zagen dat een vlakke c^4 afgebeeld wordt in een c'^6 . Leggen wij omgekeerd in τ een c'^6 viermaal door D^* , tweemaal door elk der punten A^* en B^* en tevens door de acht punten H_k , dan is zij het beeld van een vlakke

doorsnee. Immers, in de hoofdpunten liggen dan

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + 8 = 24$$

bepalende punten voor de c'^6 ; nemen wij er nog drie aan, P' , Q' en R' , dan leveren dezen ons P , Q en R op het oppervlak, wier verbindingsvlak een c^4 uitsnijdt die haar beeld k'^6 ook door de 24 bepalende punten en P' , Q' , R' laat gaan. De 27 genoemde punten zijn echter voldoende om een zesdegraadskromme te bepalen, er kunnen geen twee verschillende exemplaren doorgaan; dus $c'^6 \equiv k'^6$, waarmee het gestelde bewezen is.

Iedere c'^6 (D^{*4} , A^{*2} , B^{*2} , $8 H_k$) is dus beeld van een vlakke c^4 . Stel nu dat in τ de c'^6 is ontaard in 2 krommen c'^3 (D^{*2} , A^* , B^* , $4 H_k$). Dezen zijn natuurlijk afbeeldingen van twee kegelsneden op het oppervlak, in één vlak gelegen, die elkaar o.a. op d snijden. Het aantal dier *complanaire tweetallen* bedraagt evenveel als het aantal combinaties van vier punten H_k die wij uit de acht maken kunnen, gedeeld door twee, dus 35. Snijding met het beeld van δ doet ons zien dat elk dezer kegelsneden in slechts één punt rust op δ .

Stel c'^6 is samengesteld uit c'^4 (D^{*3} , A^* , B^* , $6 H_k$) en c'^2 (D^* , A^* , B^* , $2 H_k$). Deze c'^4 en c'^2 snijden beide, buiten de hoofdpunten, nog twee punten uit op een willekeurige c'^6 door de hoofdpunten, zoodat ook zij wijzen op een vlakke doorsnede die uit twee kegelsneden bestaat. Het aantal van deze *complanaire tweetallen* is het aantal combinaties twee aan twee der zes H -punten, dus 28. Van elk tweetal rust de ééne in twee punten, de andere niet op δ ; want $c'^4 \times \delta'^5$ geeft 20 snijpunten alle in de hoofdpunten gelegen; en $c'^2 \times \delta'^5$ geeft er tien, waarvan acht in de hoofdpunten.

Φ^4

 $n=2, p=1, q=2$

§ 13. Wij willen nu geraken tot het geval $n=2, p=1, q=2$, derhalve tot een vierdegraadsoppervlak Φ^4 met *dubbele kegelsnede* δ welke door een enkelvoudige rechte op het oppervlak eenmaal gesneden wordt. We gaan daartoe uit van het Φ^4 met dubbele kegelsnede. Om één of meer rechten te vinden van Φ^4 die op δ rusten, beschouwen we twee vlakke doorsneden, χ^4 en ψ^4 en vervolgens het regelvlak M der rechten die in verschillende punten deze beide en δ snijden. Zijn D_1 en D_2 de dubbelpunten van χ^4 , doorgangen van δ^2 dus, en D_3 en D_4 die van ψ^4 . Wanneer we nu uit een punt P van δ de beide vlakke doorsneden centraal projecteeren, snijden de zoo gevormde vierdegraadskegels elkaar volgens zestien ribben, waarvan vier het punt P verbinden met de vier snijpunten van χ^4 en ψ^4 . Er blijven dus nog twaalf over die χ^4 en ψ^4 in verschillende punten treffen en dus als beschrijvenden van ons regelvlak dienst doen; waaruit volgt dat δ op dit laatste twaalfvoudige richtlijn is. Evenzoo zien we dat door een punt Q van ψ^4 van den quadratischen en den vierdegraadskegel die respectievelijk δ en χ^4 projecteeren, acht gemeenschappelijke ribben gaan, waarvan QD_1 en QD_2 niet aan de eischen voor beschrijvende van het regelvlak voldoen. Zij zijn beide dubbel te tellen ribben, zoodat er nog slechts vier andere door Q gaan en ψ^4 , evenals χ^4 , viervoudige richtlijn is. Denken wij ons nu in het vlak van χ^4 de vier doorgangen van ψ^4 verbonden met D_1 en D_2 , dan rusten deze acht rechten al op ψ^4 en δ , terwijl elk daarbuiten nog een vierde snijpunt heeft met χ^4 . Deze acht zijn dus beschrijvenden van M en de graad daarvan is $8 + 4 \times 4 = 24$.

We snijden M nu met een derde vlakke doorsnee, φ^4 , niet behoorende tot den bundel (χ, ψ) en vinden van de 96 gemeenschappelijke punten 4×8 gelegen in de snijpunten

met ψ^4 en χ^4 en $2 \times 2 \times 12$ in de dubbelpunten D_5 en D_6 van φ^4 . De overige zestien liggen buiten de richtlijnen van het regelvlak, zij bepalen dus zestien beschrijvenden van M die óók nog op φ^4 rusten, derhalve vijf punten met Φ^4 gemeen hebben dus er op liggen.

Φ^4 bevat 16 rechten die de dubbele kegelsnede snijden.

§ 14. Kiezen wij nu één dier zestien uit, a_x , dan is Φ^4 af te beelden op een plat vlak τ door middel van de congruentie (1,2) der rechten, die δ en a_x in verschillende punten snijden. *Hoofdpunten* daarbij zijn al vast D_1^* , D_2^* en A_x^* , doorgangen door τ van δ en a_x .

Vlakke c^4 Beginnen wij met een vlakke c^4 die a_x in A_x , δ in de dubbelpunten D_1 en D_2 moge treffen. De projecteerende lijnen vormen een regelvlak N met richtlijnen δ , a_x en c^4 . Een punt D op δ bepaalt met a_x een vlak dat c^4 in vier punten, o.a. A_x , snijdt; $A_x D$ beeldt echter niet het punt A_x af maar haar vierde snijpunt met Φ^4 , buiten c^4 gelegen. Zij doet dus geen dienst als beschrijvende van N en uit D vertrekken drie beschrijvenden, δ is drievoudige richtlijn.

De vierdegraadskegel, die c^4 centraal uit een punt A van a_x projecteert, snijdt den quadratischen kegel (A, δ) volgens acht ribben; hiertoe behooren $A D_1$ en $A D_2$ dubbel en a_x enkel, welk drietal geen punten van c^4 afbeeldt, zoodat slechts drie uit A vertrekkende beschrijvenden overblijven en ook a_x drievoudige richtlijn blijkt. Verder bevat het vlak van c^4 de twee beschrijvenden $A_x D_1$ en $A_x D_2$, zoodat de graad van N zes wordt en het beeld van c^4 een c'^6 (D_1^{*3} , D_2^{*3} , A_x^{*3}).

De 16 rechten § 15. Twee zulke beeldkrommen hebben buiten D_1^* , D_2^* en A_x^* negen punten gemeen, waarvan vier met de snij-

punten der twee vlakke doorsneden correspondeeren en de overige vijf als nieuwe *hoofdpunten* optreden, doorgangen en beelden van vijf rechten b_k van Φ^1 . Wij noemen ze B_k . De rechten b_k , δ in één punt ontmoetend, behooren tot de bovengenoemde zestien.

Uit het bovenstaande blijkt: *Van de zestien rechten op Φ^1 die δ in één punt snijden, wordt ieder door vijf andere dier zestien gesneden.*

Bij onze afbeelding over a_x zijn de vijf b -lijnen degenen die door een punt worden afgebeeld. De projectie van a_x zelf zullen wij straks behandelen. Blijven nog over tien rechten, die wij voorloopig c_x zullen noemen.

Een c_x heeft tot projecteerende figuur een regelvlak met enkelvoudige richtlijnen δ , a_x en c_x . Een vlak door c_x bevat één beschrijvende, zoodat de graad van het afbeeldende regelvlak twee wordt, het beeld van c_x dus een c'^2 gaande door D_1^* , D_2^* en A_x^* . Echter moet deze c'^2 , als zijnde projectie van een rechte, slechts één punt met het beeld van een vlakke doorsnee gemeen hebben, buiten de hoofdpunten. Vergelijken wij daarom de c'^2 met een c'^6 (D_1^{*3} , D_2^{*3} , A_x^{*3} , $5 B_k$), dan liggen negen gemeenschappelijke punten in D_1^* , D_2^* en A_x^* ; er moeten dus nog twee in B_k gelegen zijn, en bijgevolg moet c_x twee lijnen b_k snijden en tot beeld hebben c'^2 (D_1^* , D_2^* , A_x^* , B_k , B_l). We noemen haar nu c_{kl} ; de tien rechten c_{kl} geven zoo de tien kegelsneden μ_{kl} .

Ter verdere oriëntatie, wat de zestien rechten betreft, merken wij nog op dat twee rechten c elkaar snijden als beide indices verschillend zijn, daar dan hare beelden μ in de hoofdpunten slechts drie gemeenschappelijke punten be-

zitten. We kunnen ons nu de volgende indeeling in twee biquadрупels voorstellen:

$$\begin{array}{ccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & c_{45} & & b_4 & c_{15} & c_{25} & c_{35} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & a_x & & b_5 & c_{14} & c_{24} & c_{34} \end{array}$$

waarvan alleen twee elementen die in verschillende kolom én verschillende rij staan elkaar snijden.

We kunnen zoo tien paren biquadрупels samenstellen. Want: de keuze van a_x kan op zestien manieren geschieden. Daarna de keuze van drie, haar en δ snijdende rechten (hier b_1 , b_2 en b_3) op $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ manieren. Dan is het achttal bepaald, doch elk der acht elementen, als uitgangspunt genomen, zou ons op één wijze tot hetzelfde stel gevoerd hebben, zoodat we $\frac{16 \cdot 10}{8} = 20$ biquadрупels vinden, verdeeld in tien tweetallen.

Denken wij in dit verband even aan de 27 rechten van het kubisch oppervlak, waarvan ieder door zestien andere gekruist wordt, dan vinden wij nauwkeurige overeenkomst door de zestien op te schrijven die daar b_6 kruisen, en in het hierboven gevonden biquadрупel x te vervangen door 6.

§ 16. Wij hebben nog niet bepaald de afbeeldingen van δ en a_x .

Rechte a_x Voor a_x hebben wij noodig het regelvlak der raaklijnen in punten van a_x , rustend op δ . Een vlak π door a_x snijdt δ in nog één punt S, het oppervlak in nog een kromme c^3 die in S een dubbelpunt heeft en a_x in drie punten snijdt, één doorgang van δ , T, en twee raakpunten R. Deze laatste twee, verbonden met S, geven twee beschrijvenden, afbeeldende lijnen respectievelijk van R_1 en R_2 ; π bevat er dus twee en δ blijkt dubbele richtlijn te zijn. Voor één stand van π echter valt S in T, het snijpunt van a_x en δ ; in dat geval heeft de c^3 twee samenvallende snijpunten met a_k in

$T \equiv S \equiv R_1$, terwijl het derde snijpunt R_2 met S verbonden nu a_x geeft als afbeeldende lijn. Uit een punt A van a_x gaan dus als beschrijvende a_x zelf en de ééne raaklijn in A die op δ rust, zoodat a_x dubbele richtlijn is en haar *beeld* wordt een a'_x (D_1^{*2} , D_2^{*2} , A_x^{*2} , $5 B_k$).

Wij merken nog op dat in den stand van π , waarin a_x beschrijvende is geworden, de lijnen TS en $R_1 S$ als dubbelpuntsraaklijnen optreden, terwijl a_x als verbindende twee nu samenvallende punten van verschillende takken der c^3 , een gewone snijlijn blijft. T , als punt van a_x , wordt blijkbaar geprojecteerd door één der dubbelpuntsraaklijnen TR_1 , terwijl het als punt van δ nog een afbeeldende lijn moet bezitten: de andere dubbelpuntsraaklijn TS . We kunnen dit dadelijk gebruiken bij de afbeelding van δ die nu aan de beurt komt.

δ^2

De projecteerende lijnen van δ vormen het regelvlak der raaklijnen in punten dier kegelsnede die a_x snijden. We zoeken allereerst de veelvuldigheid der richtlijn a_x en stellen derhalve de vraag: hoeveel ribben van den kegel (A, δ) , waar A willekeurig op a_x is genomen, zijn raaklijnen aan het oppervlak in haar ontmoetingspunt met δ ? Bedenken we dat deze kegel met Φ^4 gemeen heeft δ dubbel, a_x enkel, en dus verder nog een ϱ^3 , dan is duidelijk dat een willekeurige kegelribbe AX haar vierde snijpunt met Φ^4 op ϱ^3 moet hebben. Zij dit Y . Voor die kegelribben nu, waarvoor $X \equiv Y$, wordt AX raaklijn in X , en daar ϱ^3 drie punten bezit op δ zal dit driemaal het geval zijn; zoodat uit A al vast drie beschrijvende van het regelvlak vertrekken. Kan echter a_x zelf ook niet beschrijvende worden, n.l. van het eenige punt dat zij met δ gemeen heeft, T ? Neen, dit gaat niet, daar wij straks zagen dat T afgebeeld wordt door de twee

daar genoemde dubbelpuntsraaklijnen, terwijl a_x als beschrijvende van een ander punt optreedt.

Een willekeurig vlak door a_x bevat nu behalve deze drievoudige richtlijn de twee dubbelpuntsraaklijnen in S als beschrijvenden, terwijl wij hieruit meteen zien dat δ dubbele richtlijn is. Volgt dus voor het beeld van δ een $\delta'^5 (D_1^{*2}, D_2^{*2}, A_x^{*3}, 5 B_k)$.

Contrôle: Snijdt men deze δ'^5 met $a_x'^4$ dan vindt men 19 snijpunten in de hoofdpunten, dus één er buiten; dit is het beeld van het snijpunt (δ, a_x) .

§ 17. Nu eenmaal de beelden van δ , d en een vlakke doorsnee bepaald zijn, kunnen wij deze weer gebruiken bij het zoeken naar andere krommen op het oppervlak. Nemen we b.v. in τ een $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_x^*)$, dan wordt deze buiten de hoofdpunten nog driemaal gesneden door het beeld van een vlakke c^4 , is dus projectie van een ϱ^3 . Combinatie met δ'^5 en $a_x'^4$ toont dat deze ϱ^3 driemaal δ ontmoet, tweemaal a_x ; verder elke c_{kl} tweemaal en de overige rechten niet.

egelsneden
Laten wij echter c'^2 ook gaan door B_1 b.v., dan is het origineel een *kegelsnede* κ^2 die δ in twee punten, a_x en b_1 in één punt snijdt, en tevens de rechten c_{kl} voor k en $l \neq 1$. Het vlak dier κ^2 snijdt Φ^4 nog volgens een tweede *kegelsnede*, λ^2 , wier beeld met de c'^2 waarvan wij uitgingen een $c'^6 (D_1^{*3}, D_2^{*3}, A_x^{*3}, 5 B_k)$ moet vormen, derhalve een $c'^4 (D_1^{*2}, D_2^{*2}, A_x^{*2}, B_2, B_3, B_4, B_5)$ is. Zij moet met κ^2 twee dubbelpunten vormen, waarin δ haar vlak doorboort, heeft dus die twee punten met δ gemeen; daarentegen niets met a_x , die immers haar vlak al in een punt van κ^2 treft. Verder snijdt zij b_2, b_3, b_4, b_5 , en de rechten c_{1k} .

Omgekeerd is ook iedere c'^4 als boven beeld van een λ^2 .

Er zijn er zoo ∞^1 bepaald door de punten $D_1^{*2}, D_2^{*2}, A_x^{*2}, B_2 \dots B_5$, en ook ∞' kegelsneden κ^2 door D_1^*, D_2^*, A_x^*, B_1 . Terwijl zooeven vergeleken werden een κ^2 en λ^2 die complanair waren, kunnen wij t.o.v. een willekeurige dezer κ^2 en een willekeurige λ^2 besluiten dat zij nog twee punten gemeen hebben: in de hoofdpunten hebben hare beelden er slechts zes. Eén λ^2 wordt blijkbaar gevormd door het lijnenpaar (c_{23}, c_{45}) , want de projecties dezer twee rechten, μ_{23}^2 en μ_{45}^2 , vormen juist samen een c'^4 ($D_1^{*2}, D_2^{*2}, A_x^{*2}, B_2 \dots B_5$). Haar vult ook een κ^2 tot vierdegraadsdoorsnee aan en evenzoo (c_{24}, c_{35}) en (c_{25}, c_{34}) .

Tenslotte vinden wij nog *kegelsneden* σ op Φ^4 door een doorsnede te maken met b.v. vlak (c_{12}, b_1) . Het snijpunt $(c_{12} b_1)$ moge U heeten. Daar μ_{12}^2 reeds door $D_1^*, D_2^*, A_x^*, B_1, B_2$ gaat, wordt de projectie van deze σ -kegelsnede die μ_{12}^2 tot c'^6 moet aanvullen een c'^4 ($D_1^{*2}, D_2^{*2}, A_x^{*2}, B_1, B_3, B_4, B_5$). Dat ook B_1 hierin genoemd moet worden blijkt aldus: σ snijdt c_{12} en b_1 in vier punten, waarvan G en L de doorgangen van δ , dus dubbelpunten van Φ^4 voorstellen, terwijl F en K evenals U raakpunten zijn. Door G b.v. lopen twee bladen van Φ^4 , waarvan het ééne door b_1 gaat, het andere door σ . Het raakvlak in G aan het eerste blad zal dus een raaklijn, op a_x rustend, bevatten, die G als punt van b_1 projecteert, terwijl een raaklijn in het andere raakvlak G als punt van σ projecteert. Derhalve zal in τ het punt G zich niet als gemeenschappelijk punt van b_1 en σ voordoen. Wél K daarentegen, daar dit enkelvoudig op het oppervlak is; zoodat het beeld van σ éénmaal door B_1 moet gaan en de projectie van de geheele vlakke doorsnee in dit bijzondere geval dus een dubbelpunt B_1 bezit.

Evenzoo zal moeten blijken dat μ_{12} slechts in één punt

het beeld van σ ontmoet buiten de hoofdpunten, n.l. in de projectie van F. Dit klopt inderdaad: $\mu_{12}^2 (D_1^*, D_2^*, A_x^*, B_1, B_2)$ heeft van haar acht gemeenschappelijke punten met de $c'^4 (D_1^{*2}, D_2^{*2}, A_x^{*2}, B_1, B_3, B_4, B_5)$ zeven gelegen in de hoofdpunten.

Bijzonder
 Φ^4 § 18. Veronderstellen wij nu als bijzonder geval van een oppervlak Φ^4 met dubbele kegelsnede dat deze laatste ont-
2p=1 q=2aard is tot twee dubbelrechten, d_1 en d_2 .

Gaan wij in denzelfden trant door van het algemeene geval, dan zou dit dubbel lijnenpaar als ééne richtlijn van de beeldende congruentie moeten dienst doen, terwijl de tweede een rechte a_x moet zijn, rustend op d_1 of d_2 . Stel a_x snijdt d_2 in het punt T. Ieder punt van Φ^4 levert nu evenals ginds één vlak door a_x , hetwelk de dubbelkegelsnede buiten T in nog één punt treft, n.l. één van d_1 . We zien dus dat de afbeeldende figuur wordt de congruentie [1,1] der transversalen over d_1 en a_x en we zouden de afbeelding van dit oppervlak ook hebben kunnen beschouwen als bijzonder geval van het in hoofdstuk II behandelde.

Om aan te toonen dat er inderdaad zoo'n rechte a_x die d_2 snijdt op Φ^4 te vinden is, laten we een vlak om d_2 wentelen en beschouwen het stelsel van ∞^1 kegelsneden k^2 dat zich daarbij vormt als restdoorsneden met het oppervlak. In de formule $r + \delta = 2\varrho$ welke bij zulke stelsels dienst doet, is r , het aantal k^2 rustend op een gegeven rechte, en ϱ , het aantal k^2 rakend aan een gegeven vlak, gemakkelijk te bepalen: een willekeurige rechte snijdt Φ^4 in vier punten buiten d_2 , waarvan ieder een vlakke doorsnee door d_2 bepaalt en dus een kegelsnede k^2 die het bevat. Derhalve is $r = 4$. Verder geeft een willekeurig vlak tot doorsnee een c^4 met twee dubbelpunten D_1 en D_2 respectievelijk op d_1 en d_2 ; raaklijnen in dit vlak

aan eenige kegelsnede zullen op d_2 moeten rusten, dus door D_2 gaan en c^4 aanraken. Daar het aantal raaklijnen aan een vlakke kromme uit een dubbelpunt in het algemeen $n(n-1)-6$ bedraagt, terwijl ieder ander dubbelpunt dit aantal nog met twee vermindert, vinden we hier $\varrho = 4$. Zoodat volgt voor het aantal lijnenparen: $\delta = 4$. In vier vlakken om d_2 is de kegelsnede ontaard in een lijnenpaar (a_k, a_k) , $k = 1, 2, 3, 4$. Evenzoo zijn er acht rechten b_k, β_k paarsgewijs gelegen in vier vlakken om d_1 ; samen 16 rechten.

§ 19. We nemen nu a_1 als tweede richtlijn der congruentie, als a_x dus, en de afbeelding geschiedt verder gewoon. Noemen we D_1^*, D_2^* en A_1^* , de doorgangen van d_1, d_2 en a_1 door het tafereel. Zij zijn alle drie *hoofdpunten*: D_1^* beeldt alle punten der c^3 af volgens welke vlak $(D_1^* a_1)$ het oppervlak nog snijdt, D_2^* de punten van d_2 en A_1^* de c^2 die restdoorsnee is van vlak $(A_1^* d_1)$.

Vlakke c^4 Een vlakke c^4 wordt nu geprojecteerd door een regelvlak van den graad vijf; haar vlak bezit n.l., als D_1, D_2 en A_1 de snijpunten zijn met d_1, d_2 en a_1 , in $D_1 A_1$ zijn eenige beschrijvende. Wij vinden nu weer op dezelfde wijze als vroeger dat d_1 drievoudige richtlijn is, a_1 tweevoudige, terwijl d_2 twee verschillende punten van c^4 bevat, n.l. de twee op verschillende takken gelegen punten D_2 . Het beeld der c^4 wordt dus een c'^5 ($D_1^{*3}, D_2^{*2}, A_1^{*2}$).

Twee dier c'^5 hebben buiten de hoofdpunten en de beelden harer vier snijpunten om nog vier gemeenschappelijke punten B_1, B_2, B_3, B_4 , de projecties van vier der rechten welke we al gelegen wisten in vlakken om d_1 . We noemen ze b_1, b_2, b_3, b_4 ; de met hen complanaire rechten zijn dan $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. We zien dus dat een willekeurige der bovengevonden zestien rechten vijf andere er van snijdt.

De 16
rechten

De afbeelding der a -, b -, α - en β -lijnen wordt als volgt: a_1 wordt geprojecteerd door het regelvlak der raaklijnen in punten van a_1 , rustend op d_1 ; uit een punt P van a_1 vertrekt slechts één beschrijvende, n.l. de eenige raaklijn in P die d_1 ontmoet; verder bevat een vlak π door a_1 nog een vlakke c^3 met dubbelpunt D'_1 , die drie snijpunten met a_1 levert, twee raakpunten R_1 en R_2 en één dubbelpunt D'_2 van de vierdegraadsdoorsnee. $R_1 D'_1$ en $R_2 D'_1$ zijn de twee in π gelegen beschrijvenden van het regelvlak, dat dus den graad drie heeft, terwijl tevens blijkt dat d_1 dubbele richtlijn is. Het is duidelijk dat de projectie van a_1 dan zal zijn een $a_1'^3 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, 4 B_k)$.

De met haar complanaire rechte a_1 heeft al hare projecteerende lijnen gelegen in vlak $(a_1 d_2)$, in een waaier gerangschikt wiens top op d_1 ligt. In τ geeft dit als beeld van a_1 de rechte $D_2^* A_1^*$.

Voor de overige a -lijnen vinden we kegelsneden in τ : hare projecteerende figuren zijn hyperboloïden. Die voor a_2 b.v. heeft met Φ^4 behalve de drie richtlijnen en d_2 nog een figuur van den tweeden graad, twee rechten, gemeen; daar dezen o.a. op d_1 rusten moeten het b -lijnen zijn, b.v. b_3 en b_4 . a_2 ontmoet dus deze b -lijnen, de anderen niet en haar beeld wordt de $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_3, B_4)$.

Evenzoo levert a_3 de $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_2, B_4)$.

Evenzoo geeft a_4 de $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_2, B_3)$.

Voor de α -lijnen vinden we eveneens kegelsneden: de hyperboloïde met richtlijnen d_1, a_1 en a_2 b.v. heeft met Φ^4 nog twee rechten gemeen, twee b -lijnen; en wel, daar a_2 door b_3 en b_4 gesneden wordt, moet dit a_1 -snijdend tweetal b_1, b_2 zijn. Het beeld van a_2 is dus de $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_1, B_2)$.

Evenzoo van a_3 de $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_1, B_3)$.

En van a_4 de $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_1, B_4)$.

De b -lijnen geven de B -punten in τ , terwijl de β -rechten weer worden afgebeeld door een waaier in vlak $\beta_k d_1$, wiens doorgang $B_k D_1$ het *beeld* vormt.

Door combinatie der beelden van al deze lijnen is nu te verifieeren dat ieder vijf andere snijdt, en na te gaan welke dat zijn.

Dubbel-
rechte d_1

§ 20. Bepalen we nog het beeld van d_1 . De raaklijnen in punten a_1 van, voor zoover ze a_1 snijden, vormen een regelvlak van den graad vier; want de twee raakvlakken in een punt D_1' leveren elk één beschrijvende, terwijl een vlak φ door d_1 nog een kegelsnede als restdoorsnee bevat, wier twee snijpunten met d_1 , verbonden met den doorgang van a_1 , twee beschrijvenden in φ leveren. d_1 en a_1 blijken beide dubbele richtlijnen te zijn, terwijl d_2 twee punten van Φ^4 op verschillende bladen gelegen, met d_1 gemeen heeft. Als beeld vinden we dus een d_1^4 (D_1^{*2} , D_2^{*2} , A_1^{*2} , $4 B_k$).

Kegel-
sneden

§ 21. Beschouwen wij nu eens een *dubbelraakvlak* aan Φ^4 dat het oppervlak volgens twee kegelsneden r^2 en s^2 snijdt. Zij r^2 degene die a_1 ontmoet. De eenige beschrijvende van het r^2 afbeeldende regelvlak, die in het dubbelraakvlak gelegen kan zijn, zou de doorgangen van a_1 en d_1 moeten verbinden; doch deze rechte beeldt niet een punt van r^2 af, maar haar tweede snijpunt Q met s^2 . Derhalve is het regelvlak van den graad twee; het heeft a_1 en d_1 tot enkelvoudige richtlijnen, terwijl d_2 en r^2 elkaar in één punt snijden. Ook heeft het met Φ^4 buiten de richtlijnen nog één b -rechte, b_1 bijvoorbeeld, gemeen, zoodat het *beeld* van r^2 wordt een c'^2 (D_1^* , D_2^* , A_1^* , B_1).

Hieruit volgt meteen voor het *beeld* van de aanvullende s^2 : c'^3 (D_1^{*2} , D_2^* , A_1^* , B_2 , B_3 , B_4).

Ook heeft ieder der $\infty^1 c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_1)$ een kegelsnede r^2 op Φ^4 tot origineel en eveneens heeft zoo iedere $c'^3 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_2, B_3, B_4)$ een s^2 . Uit het tweetal vrije snijpunten van deze twee beelden blijkt dat een r^2 niet alleen haar bijbehorende s^2 snijdt buiten de dubbelpunten, n.l. in de twee raakpunten, maar tevens elke s^2 ; en omgekeerd iedere s^2 elke r^2 . Vergelijken wij verder de afbeeldingen der zestien rechten met die der kegelsneden r^2 en s^2 , dan vinden we dat elke r^2 gesneden wordt door $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}$ en tevens dat elke s^2 gesneden wordt door $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$.

Evenals de bundel $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_1)$ ons een stelsel dubbelraakvlakken leverde, doet dat iedere bundel $c'^2 (D_1^*, D_2^*, A_1^*, B_k)$. Er zijn dus vier van die *stelsels dubbelraakvlakken*.

HOOFDSTUK IV.

Φ^{2n+1}

§ 1. De afbeelding van het oppervlak Φ^{2n+1} met n -voudige kubische ruimtekromme α^3 geschiedt door de congruentie [1, 3] der koorden over α^3 . Zijn de doorgangen der kromme door τ A_1^* , A_2^* en A_3^* , dan vormen dezen al een drietal *hoofdpunten*; A_1^* beeldt af de doorsnede van den quadratischen kegel, die α^3 uit A_1^* centraal projecteert, met Φ^{2n+1} , derhalve een kromme van den graad $2(2n+1) - 3n = n+2$. Evenzoo A_2^* en A_3^* .

Vlakke
doorsnee

Zij nu weer c^{2n+1} een vlakke doorsnee die α^3 in A_1^* , A_2^* en A_3^* snijdt. Het regelvlak dat haar afbeeldt heeft in het vlak der doorsnede behalve c^{2n+1} nog drie beschrijvenden liggen, $A_k^*A_l^*$, en is dus van den graad $2n+4$. Verder snijdt de quadratische kegel, die α^3 uit één harer punten A projecteert, c^{2n+1} in $4n+2$ punten, waaronder $3n$ in de doorgangen (α^3, c^{2n+1}) , die verbonden met A geen beschrijvenden van het regelvlak leveren. Derhalve is $\alpha^3(n+2)$ -voudige richtlijn en het *beeld der vlakke doorsnee* een $c'^{2n+4}(3A^{n+2})$.

Het aantal snijpunten van twee zulke krommen c'^{2n+4} buiten de hoofdpunten bedraagt $(2n+4)^2 - 3(n+2)^2$, waaronder dan nog de $2n+1$ beelden der gemeenschappelijke punten van de twee vlakke doorsneden. Er blijven dus nog $n^2 + 2n + 3$ in τ over als doorgangen H_k en projecties van evenzoo vele rechten a_k op het oppervlak, koorden van α^3 . Wij noemen dit aantal m .

Het oppervlak bevat $n^2 + 2n + 3$ rechten die koorden van α^3 zijn.

§ 2. Het regelvlak B dat α^3 afbeeldt, dat gevormd wordt dus door de koorden van α^3 die het oppervlak in één van hare steunpunten aanraken, moge α^3 tot y -voudige richtlijn hebben. Nu kan een koorde het regelvlak alleen treffen op α^3 ; want indien ze dat b.v. deed in een punt P er buiten, dan ging door P een beschrijvende van B, d.i. een koorde die raaklijn is; dus een tweede koorde, hetgeen bij een α^3 onmogelijk is. Hieruit volgt, aangezien α^3 y -voudig is, dat de graad van het regelvlak $2y$ bedraagt; en daar ieder der m rechten twee punten van α^3 bevat, zal het beeld van deze laatste worden een c'^{2y} ($3A^{*y}, mH_k^2$). Combinatie met de projectie eener vlakke doorsnee, waarbij $3n$ gemeenschappelijke punten in het origineel optreden, geeft dan de vergelijking:

$$(2n + 4)2y = 3(n + 2)y + 2(n^2 + 2n + 3) + 3n$$

waaruit volgt $y = 2n + 3$. Het beeld α^3 is dus een α'^{4n+6} ($3A^{*2n+3}, mH_k^2$).

§ 3. Van α^3 is nog de volgende bijzonderheid te vermelden:

Nemen wij een punt R aan op α^3 , dan behooren daarbij n punten S waarin de n raakvlakken in R de kromme nog snijden. Eveneens gaan door S n koorden die Φ^5 in S raken. Daar verder het regelvlak dat α^3 afbeeldt deze kromme zelf tot $(2n + 3)$ -voudige richtlijn heeft, gaan van S in het geheel $2n + 3$ koorden uit die Φ^5 in één harer steunpunten raken; n hiervan hebben haar raakpunt in S gelegen, dus $n + 3$ hebben het in het andere steunpunt. Beschouwen wij nu de verwantschap tusschen twee punten S die aan een zelfde punt R zijn toegevoegd, dan brengt ons een punt S tot $n + 3$ punten R, en elk dezer tot $(n - 1)$ andere punten S;

zoodat het kenmerkend getal van deze involutorische verwantschap is $(n-1)(n+3)$. Het aantal coïncidenties, $2(n-1)(n+3)$, levert ons het aantal punten R waar twee raakvlakken samenvallen, d.i. het aantal *cuspidaalpunten* van α^3 .

c^r in τ

§ 4. Bepalen wij nog het origineel van een kromme c^r in τ , die α_k^* maal door A_k^* gaat en α_k maal door H_k . Het aantal harer snijpunten met het beeld eener vlakke doorsnee bedraagt buiten de hoofdpunten $r(2n+4) - (n+2)\Sigma\alpha_k^* - \Sigma\alpha_k$ of $(n+2)(2r - \Sigma\alpha_k^*) - \Sigma\alpha_k$

en dit is tevens de graad m der kromme ϱ^m waarvan c^r het beeld is.

Snijding met α'^{4n+6} toont aan dat ϱ^m met α^3 gemeen heeft $(2n+3)(2r - \Sigma\alpha_k^*) - 2\Sigma\alpha_k$ punten.

Φ^3

$n=1$

§ 5. Nemen we het bijzonder geval $n=1$, dan komen wij terecht bij het kubisch oppervlak met enkelvoudige kubische kromme. Een vlakke doorsnee geeft ons in τ een c'^6 ($3A^3, 6H_k$), en er zijn zes rechten op het oppervlak, die koorden vormen van de α^3 . Wij vinden hier dus het resultaat waarop wij boven doelden, n.l. dat iedere kubische ruimtekromme op een Φ^3 zes van diens rechten tot koorden heeft. Zij vormen een sextupel van kruisenden als daar beschreven, terwijl bleek dat altijd een ander sextupel als nulsecanten optreedt en de overige vijftien rechten als uniseccanten.

Φ^5

$n=2$

§ 6. $n=2$ geeft een Φ^5 met dubbelkromme α^3 , waarop elf koorden h van deze laatste gelegen zijn.

De beelden der vlakke doorsneden zijn c'^8 ($3A^4, 11H_k$); de projectie van α^3 een c'^{14} ($3A^7, 11H_k^2$).

In τ bepalen de drie punten A^* met H_1 een bundel kegel-

sneden, waarvan elk exemplaar nog drie vrije snijpunten heeft met een c'^8 . Zij beelden dus een *bundel ruimtekrommen* ϱ^3 af. Daar zij verder met c'^{14} ($3 A^{*7}, 11 H_k^{*2}$) nog vijf vrije snijpunten hebben, rust elke ϱ^3 van den bundel in vijf punten op a^3 .

Tot den bundel kegelsneden behooren ook tien c^2 ($3 A^*, H_1, H_k$).

Voor dezen is de bijbehorende ϱ^3 uiteengevallen in (h_k, ϱ^2) , $k \neq 1$. Daar h_k koorde van a^3 is, heeft ϱ^2 nog drie punten met a^3 gemeen.

Evenzoo vinden wij tien ϱ^2 afgebeeld door c^2 ($3 A^* H_2 H_k$), $k \neq 2$, enz.; in het geheel $\frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55$ *kegelsneden* ϱ^2 op Φ^5 .

Daar c^2 ($3 A^* H_k H_l$) en c^2 ($3 A^* H_p H_q$) alleen dan een punt buiten de hoofdpunten gemeen hebben als k en $l \neq p$ of q , *snijdt ieder der 55 ϱ^2 36 andere*, n.l. zooveel als het aantal combinaties $p q$ bedraagt uit negen indices.

IV.

STELLINGEN.

I.

Het bewijs van W. van der Woude dat een eikromme een ellips is, wanneer zij aan zekere gestelde voorwaarden voldoet, is onvolledig.

Nieuw Arch. voor Wisk. Deel XIV. 4e stuk.

II.

Het bewijs van G. Schaake van zijne uitbreiding der stelling van Poncelet is overbodig.

Nieuw Arch. voor Wisk. XV, 1e stuk.

III.

De Methode van Gauss voor de numerieke berekening van bepaalde integralen laat zich met vrucht uitbreiden tot gevallen, waar de integrand bezwaarlijk door polynomia kan worden benaderd.

IV.

Bij het beoordeelen van het normaal-zijn van een statistische frequentieverdeeling (Y_k = frequentie van de klasse met bovenste grens x_k , $k = 1, \dots, n$, $\sum_1^n Y_i = N$) make men bij voorkeur gebruik van het kenmerk, dat de punten

$$(x_k, z_k) \left(z_k \text{ bepaald uit } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z_k} e^{-z^2} dz = \frac{1}{N} \sum_1^k Y_i \right)$$

collineair moeten zijn.

V.

De transversalen van twee onderling loodrechte lijnelementen kunnen niet de stralen zijn van een astigmatischen lichtbundel.

VI.

Ten onrechte spreekt Zernike van een „natuurlijke grens” van de stroomsterkte die met een galvanometer gemeten kan worden.

VII.

Het karakter van de lichtwisseling der Mira-veranderlijken is onbekend.

