Een afbeelding van de lijnelementen van een monoïde op de puntenruimte

https://hdl.handle.net/1874/288455

Een Afbeelding van de Lijn-elementen van een Monoïde op de Puntenruimte

W. J. PONSEN

EEN AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN VAN EEN MONOÏDE OP DE PUNTENRUIMTE

Diss. Utrecht 1927

EEN AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN VAN EEN MONOÏDE OP DE PUNTENRUIMTE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN **DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE** AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. A. NOORDTZIJ, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 4 JULI 1927, DES NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR

WILLEM JOHANNES PONSEN

GEBOREN TE DORDRECHT

ELECTR. DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE" J. VAN DRUTEN — UTRECHT
1927

AAN MIJN OUDERS.

AAN MIJN VROUW.

Bij het verschijnen van mijn proefschrift rust op mij de aangename taak, mijn oprechten dank te betuigen aan alle Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

Op de eerste plaats geldt deze dank U, Hooggeleerde De Vries, Hooggeachte Promotor, voor de belangstelling die Gij getoond hebt bij het tot stand komen van dit proefschrift, maar meer nog voor Uwe colleges, waar Gij met Uw logische, geestige betoogtrant mij geleerd hebt, hoe men zijn leerlingen liefde voor de Wiskunde kan bijbrengen.

Verder past mij een bizonder woord van dank aan U, Hooggeleerde Heeren Nijland en Ornstein, voor Uwe altijd leerzame colleges.

Ook U, Zeergeleerde Moll, ben ik dank verschuldigd voor het onderwijs, dat ik van U genoten heb.

INHOUD.

INLEIDING.

Het is als volgt mogelijk, de lijnelementen van een *monoïde* af te beelden op de puntenruimte.

Zij Φ een vast vlak, a een vaste rechte, O het $(n-1)$-voudige punt der monoïde M^n, P een punt van M^n, r een raaklijn in P, dus $e = (P, r)$ een lijnelement.

Zij $R = (r, \Phi)$, $\alpha = (a, R)$, S het snijpunt van vlak α met OP, dan kan S beschouwd worden als beeld van e.

Omgekeerd is P het snijpunt van SO met M^n, $\alpha = (S, a)$, s de snijlijn van α en Φ. Het raakvlak in P aan M^n snijdt s in een punt R, en nu is S het beeld van het lijnelement, gevormd door P met PR.

Zoo is in 't algemeen aan ieder lijnelement e één punt S toegevoegd, terwijl omgekeerd aan het punt S hetzelfde lijnelement e beantwoordt.

In het volgende wordt eerst de afbeelding van de lijnelementen van een *hyperboloïde* behandeld. Ieder punt van een hyperboloïde is $(n-1)$-voudig, zoodat een willekeurig punt als top O gebruikt wordt. Vervolgens wordt de afbeelding van de lijnelementen van een algemeene monoïde van den n^{den} graad besproken, terwijl de uitkomsten van dat onderzoek ten slotte toegepast worden op de kubische monoïde.

HOOFDSTUK I.

Afbeelding van de lijnelementen van een hyperboloïde M^2 op de puntenruimte.

§ I. *Uitzonderingselementen.* Er zijn lijnelementen, die ∞^1 beelden hebben.

1. Zij ϕ^2 de doorsnede van ϕ en M^2, P een punt van ϕ^2, r de raaklijn in P aan ϕ^2. Het snijpunt R van r met ϕ is onbepaald, dus het vlak α door a ook. Ieder punt van OP is dus te beschouwen als beeld van het lijnelement (P, r).

2. Zij $\alpha_0 \equiv (a, O)$ en λ^2 de doorsnede van α_0 en M^2. α_0 is vlak α voor alle lijnelementen van λ^2. Als P op λ^2 ligt, is het snijpunt van OP met α_0 onbepaald, zoodat een lijnelement (P, r) van λ^2 alle punten van OP tot beelden heeft.

3. Zij A_φ het snijpunt van a met ϕ. Voor iedere raaklijn door $R \equiv A_\varphi$ aan M^2 is α onbepaald, zoodat het beeld van een lijnelement, bestaande uit zoo'n raaklijn r en haar raakpunt P de heele rechte OP is. Al die raaklijnen r vormen een kwadratischen kegel met top A_φ, de punten P liggen op een kegelsnede α^2 in het poolvlak van A_φ ten opzichte van M^2, terwijl de beelden van het stelsel (P, r) den kwadratischen kegel (O, α^2) vormen.

4. Zij ω het raakvlak in O aan M^2, o een raaklijn in O, A_ω het snijpunt van a met ω. Iedere straal o van den waaier (O, ω) is te beschouwen als verbindingslijn van O met zichzelf, zoodat het beeld van een lijnelement (O, o) een rechte wordt als snijlijn van ω met het bij o behoorende vlak α. Alle lijnelementen (O, o)

hebben dus tot beelden de stralen van den waaier (A_ω, ω).

§ II. *Uitzonderingspunten.* Er zijn punten, die oneindig vele lijnelementen afbeelden.

1. Een punt P van Φ^2 is beeld van ∞^1 lijnelementen, ieder bestaande uit P en een raaklijn in P aan M^2.

2. Een punt A van a is beeld van ∞^1 lijnelementen (P, r), waarbij P het snijpunt is van AO met M^2 en r een willekeurige raaklijn in P aan M^2.

3. Door O gaan twee beschrijvenden o_1 en o_2 van M^2, die Φ resp. in O_1 en O_2 snijden. O_1 is beeld van ∞^1 lijnelementen (P, o_1), waarbij P elk punt van o_1 kan zijn. Zoo is O_2 beeld van ∞^1 lijnelementen (P, o_2).

4. Een punt U_1 van o_1 is beeld van een stelsel (P, r) van lijnelementen, waarbij de punten P de rechte o_1 beschrijven, terwijl de raaklijnen r rusten op o_1 en op de snijlijn van Φ met $\alpha = (U_1, a)$, een kwadratische regelschaar U_1^2 vormende. U_1^2 doorsnijdt M^2 volgens o_1 (2 maal geteld) en twee lijnen van de regelschaar, waartoe o_2 behoort; deze gaan door de snijpunten van α met Φ^2.

Zoo beantwoordt aan ieder punt van o_2 een regelschaar U_2^2.

5. Zij P een punt van de in § I, 3 genoemde kegelsnede α^2. Bij het stelsel lijnelementen (P, r), bestaande uit P en alle raaklijnen in P aan M^2, behoort één vlak α, dit stelsel heeft dus één punt S tot beeld. De punten S, die men verkrijgt als P zich langs α^2 verplaatst, vormen een ruimtekromme, waarvan de graad als volgt bepaald wordt.

Zij f een rechte door A_φ in Φ. Door f kan men 2 raakvlakken aan M^2 aanbrengen, π met raakpunt P en π' met raakpunt P'. Het vlak (a, f) bevat dus 2 punten S en S' als beelden van de waaiers van lijnelementen (P, π) en (P', π'). Van den kegel (O, α^2) rusten 2 beschrijvenden op a, zoodat a 2 punten S bevat, die ieder het beeld zijn van een waaier van lijnelementen (P, π). Aangezien een willekeurig vlak (a, f) 4 punten van de m. p. van S bevat, vormen de punten S een ruimtekromme van den 4^en^ graad, σ^4.

6. Het punt O is *hoofdpunt* van de afbeelding, en beeld van een ∞^2 stelsel lijnelementen (P, r) waarbij ieder punt P van M^2 éénmaal in aanmerking komt. De raaklijnen r vormen een congruentie, met M^2 als richtoppervlak en de snijlijn s_0 van α_0 en Φ als richtlijn. Het is dus een congruentie [2, 2].

§ III. *Stelsels van lijnelementen en hun beelden.*

1. Een waaier (P, r) van lijnelementen heeft tot beeld de punten van OP. Eén van die lijnelementen zal dus O tot beeld hebben. Laat men P zich verplaatsen langs een beschrijvende r_1 van M^2, en beschouwt men het stelsel (P, r) van alle lijnelementen die O tot beeld hebben, dan vormt het stelsel raaklijnen (r) een kwadratische regelschaar R^2, die beschouwd kan worden als het voortbrengsel van twee projectieve vlakkenbundels, die r_1 en $s_0 = (\alpha_0, \Phi)$ tot assen hebben.

R^2 snijdt Φ volgens s_0 en de raaklijn aan Φ^2 in het snijpunt van r_1 met Φ.

R^2 snijdt M^2 volgens r_1 (2 maal geteld) en de beschrijvenden van de regelschaar (r_2), die gaan door de snijpunten van s_0 en M^2.

Op deze wijze correspondeert met iedere beschrijvende r_1 van M^2 een regelschaar R^2. Alleen voor de twee lijnen r_1, die gaan door de snijpunten van s_0 en M^2, ontaardt R^2 in de bewuste r_1 zelf, die dan ∞^1 maal geteld moet worden, en de waaier van raaklijnen in het vlak (s_0, r_1).

Zoo is ook aan iedere beschrijvende r_2 van de andere regelschaar van M^2 een R^2 toegevoegd, terwijl alle regelscharen R^2 samen de in § II, 6 besproken congruentie [2, 2] vormen.

2. Alle lijnelementen, die een beschrijvende r_1 van M^2 tot drager hebben, bepalen hetzelfde vlak α, zoodat hun beelden een rechte b_1 vormen, die de snijlijn is van het vlak (O, r_1) met het vlak α door a en het snijpunt R_1 van r_1 met ϕ. (O, r_1) snijdt M^2 volgens r_1 en de beschrijvende o_2 door O van de schaar (r_2). Het vlak α snijdt ϕ^2 in R_1 en nog een punt R_1', waardoor een beschrijvende r_1' van de schaar (r_1) gaat. De lijnelementen waarvan r_1' drager is, hebben tot beelden de punten van een rechte b_1', die in hetzelfde vlak α ligt als b_1. b_1 en b_1' moeten elkaar op o_2 snijden. Dit snijpunt is beeld van:

1^e^ één lijnelement bestaande uit het snijpunt van r_1 en o_2, met r_1 als drager.

2^e^ één lijnelement bestaande uit het snijpunt van r_1' en o_2, met r_1' als drager.

3^e^ ∞^1 lijnelementen, waarvan de punten zich op o_2 bevinden, terwijl de dragers een kwadratische regelschaar U_2^2 vormen, als beschreven in § II, 4.

Ieder vlak α bevat 2 rechten b_1 en b_1', die o_2 in eenzelfde punt en a in 2 verschillende punten snijden. Het stelsel (b_1) vormt dus een kubisch regelvlak B_1^3, met o_2 als dubbele en a als enkele richtlijn.

B_1^3 snijdt ϕ volgens ϕ^2 en de rechte $A_\varphi O_2$, als O_2 het snijpunt van o_2 en ϕ is.

B_1^3 snijdt M^2 volgens ϕ^2, o_2 (2-maal geteld), en de twee beschrijvenden a_1' en a_1'' van de schaar (r_1), die gaan door de snijpunten A' en A'' van a met M^2.

Er zijn twee raaklijnen door A_φ aan ϕ^2. Ieder vlak door zoo'n raaklijn en a levert maar één rechte b_1, hetgeen dan klaarblijkelijk een torsale rechte van B_1^3 is.

Zoo correspondeert met de schaar (r_2) van M^2 een kubisch regelvlak B_2^3 met O_1 als dubbele en a als enkele richtlijn. Elk punt van B_2^3 is dan beeld van een lijnelement (P, r_2) waarbij P een punt van M^2 en r_2 de beschrijvende van de schaar (r_2) is, die door P gaat.

Het vlak α_0 bevat van B_1^3 de rechte a en de rechten, die O verbinden met de snijpunten van α_0 en Φ^2, als beelden van de beschrijvenden der (r_1)-schaar door die punten. α_0 bevat van B_2^3 dezelfde lijnen, de twee laatste thans te beschouwen als beelden van de beschrijvenden der (r_2)-schaar door de snijpunten van α_0 en Φ^2.

De doorsnijding van B_1^3 en B_2^3 bestaat uit:

1e a.

2e de lijnen, die O verbinden met de snijpunten van α_0 en Φ^2.

3e Φ^2.

4e de 4e graads-ruimtekromme σ^4, die in § II, 5 genoemd is. Deze kromme moet o.a. gaan door het snijpunt van a_1' en a_2'' en door dat van a_2' en a_1''. Dat deze kromme werkelijk σ^4 moet zijn, blijkt uit het volgende:

Een willekeurig punt S van die kromme is beeld van 2 lijnelementen (P, r_1) en $P, r_2)$, waarbij P het snijpunt is van SO met M^2, r_1 en r_2 de beschrijvenden door P zijn. Dit kan alleen als r_1 en r_2 hetzelfde vlak α hebben, maar dan is S ook beeld van ∞^1 lijnelementen bestaande uit P en een raaklijn in P aan M^2, die ook datzelfde vlak α bepalen. Ieder raakvlak aan M^2, dat hierbij in beschouwing komt, bevat één raaklijn door $A\varphi$. Al deze raaklijnen vormen den raakkegel met top $A\varphi$, terwijl de raakpunten P op de in § II, 5 genoemde kegelsnede α^2 liggen. De verzameling der punten S moet dus wel σ^4 zijn.

3. Zij μ een willekeurig vlak, m zijn snijlijn met Φ en μ^2 de kegelsnede, volgens welke μ M^2 snijdt. Zij (P, r) het stelsel lijnelementen, dat ontstaat als P langs μ^2 beweegt en r steeds aan μ^2 raakt. Ieder punt R van m levert een vlak $\alpha = (a, R)$, behoorende bij 2 lijnelementen (P, r) en (P', r'), als r en r' de raaklijnen door R aan μ^2 voorstellen. De beelden S van (P, r) en S' van (P', r') liggen in α. De kegel (O, μ^2) snijdt a in 2 punten, zoodat 2 lijnelementen van μ^2 hun beeld op a hebben. Daar in een willekeurig vlak α 4 beeld-

punten liggen, is het beeld van het stelsel (P, r) van lijnelementen in het vlak μ een ruimtekromme van den 4^{en} graad, ρ^4.

De snijpunten van ρ^4 met M^2 zijn:

1°. de snijpunten van μ^2 en Φ,

2°. de raakpunten op de raaklijnen door A_μ aan μ^2 (2 maal raakt α aan μ^2).

3°. een dubbelpunt in O; het vlak α_0 bevat O als beeld van 2 lijnelementen, want ook door het snijpunt van α_0 en m gaan 2 raaklijnen aan μ^2.

4°. één punt op o_1 en één op o_2.

ρ^4 raakt Φ in de snijpunten van μ^2 en Φ.

ρ^4 heeft dus a tot koorde, O tot dubbelpunt en Φ tot dubbelraakvlak.

Als het vlak μ bizondere standen inneemt, kan het gebeuren dat ρ^4 ontaardt.

Als μ^2 door O gaat, ontaardt ρ^4 in een rechte en een vlakke kubische kromme. Zij nl. o de raaklijn in O aan μ^2, R_0 het snijpunt van o en Φ, ω het raakvlak in O aan M^2, A_ω het snijpunt van a en ω dan wordt als beeld van (O, o) gevonden de rechte $A_\omega R_0$ (volgens § I, 4). Wat de overige elementen van μ^2 betreft, een punt R van m geeft het aanzijn aan een vlak $\alpha = (a, R)$ dat μ volgens $A_\mu R$ doorsnijdt. Door R gaan twee raaklijnen aan μ^2, met raakpunten P' en P''. De beelden van deze lijnelementen zijn de snijpunten van OP' en OP'' met $A_\mu R$. Er onstaat dus een verwantschap (2, 1) tusschen de stralen der waaiers (A_μ, μ) en (O, μ). Het voortbrengsel daarvan is een vlakke kubische kromme, die 2 maal door O en 1 maal door A_μ gaat, als beeld van de lijnelementen van μ^2.

Als μ de rechte a bevat, dan is μ het vlak α voor alle lijnelementen van μ^2. Een element (P, r) van μ^2 heeft dan P tot beeld. Laat P' en P'' de raakpunten zijn op de raaklijnen p' en p'' uit A_φ aan μ^2. De lijnelementen (P', p') en (P'', p'') hebben dan de rechten OP' en OP'' tot beelden. ρ^4 is nu ontaard in een kegelsnede en 2, haar snijdende, rechten door O.

4. Zij M de pool van het vlak μ ten opzichte van M^2. De ribben van den kegel (M, μ^2) raken dan aan M^2 in de punten van μ^2. De beelden van het aldus verkregen stelsel van ∞^1 lijnelementen vormen een 4^e graads-ruimtekromme, τ^4, met koorde a en dubbelpunt O. Immers, de kegel (M, μ^2) snijdt op Φ een kegelsnede μ^2_M in, die door een willekeurig vlak door a in 2 punten gesneden wordt, zoodat dit vlak het vlak α is voor 2 lijnelementen van het stelsel. Bovendien rusten twee beschrijvenden van den kegel (O, μ^2) op a, zoodat een willekeurig vlak α *vier* beeldpunten van lijnelementen van het stelsel bevat.

De snijpunten van τ^4 met M^2 zijn:

1^0. de snijpunten van μ^2 en Φ.

2^0. de snijpunten van μ^2 en het vlak (a, M).

3^0. een dubbelpunt in O; er rusten twee raaklijnen door M aan M^2 op de lijn $s_0 = (\alpha_0, \Phi)$.

4^0. één punt op o_1 en één op o_2.

Zij μ^2_0 de centrale projectie van μ^2 uit O op Φ; de vier snijpunten van μ^2_0 en μ^2_M zijn de snijpunten van τ^4 en Φ.

Als μ^2 door O gaat, ontaardt de kegel (O, μ^2) in twee waaiers (O, μ) en (O, ω). MO raakt in O aan M^2. Zij R het snijpunt van MO en Φ, dan is elk punt van $A_\omega R$ te beschouwen als beeld van het lijnelement (O, MO). Een willekeurig vlak α door a bepaalt één straal van den waaier (A_μ, μ), terwijl zijn snijlijn met Φ μ^2_M in twee punten snijdt. α behoort dus bij twee lijnelementen (P', p') en (P'', p'') van het stelsel. Als de genoemde waaierstraal door A_μ OP' en OP'' resp. in T' en T'' snijdt, dan zijn T' en T'' beelden van (P', p') en (P'', p''). Er bestaat dus weer een verwantschap (2, 1) tusschen de stralen van den waaier (A_μ, μ) en die van den waaier (O, μ), en het voortbrengsel daarvan, de m. p. der punten T, is een vlakke kubische kromme, die 2 maal door O en 1 maal door A_μ gaat. τ^4 is dus nu ontaard in een rechte en een vlakke kubische kromme.

Als μ de rechte a bevat, is geen ontaarding van τ^4 te constateeren.

5. In 't algemeen zal een ruimtekromme van den 4^{en} graad gevonden worden als beeld van een enkelvoudig oneindig stelsel van lijnelementen (P, r), zoodanig gekozen dat de m. p. van P een kegelsnede van M^2 is, terwijl de m. p. van r op Φ een kegelsnede insnijdt. Immers, dan zal een willekeurig vlak door a het vlak α zijn voor 2 lijnelementen uit het stelsel, terwijl de kegel met top O en richtlijn $(P)^2$ a in 2 punten snijdt. Als m. p. van r kan b.v. een der regelscharen van M^2 dienen.

6. Als μ aan M^2 raakt, ontaardt μ^2 in een lijnenpaar m_1, m_2, terwijl de pool M van μ in het snijpunt van m_1 en m_2 komt. De in 3 en 4 genoemde stelsels van lijnelementen zijn identiek geworden, en bestaan uit:

1^0. de lijnelementen, waarvan m_1 drager is. Deze hebben een rechte b_1 van B_1^3 tot beeld (§ III, 2).

2^0. de lijnelementen, waarvan m_2 drager is. Deze hebben een rechte b_2 van B_2^3 tot beeld.

3^0. het stelsel (M, m), als m een willekeurige raaklijn in M aan M^2 is. Deze waaier moet dubbel geteld worden, en heeft MO tot beeld.

7. Zij $\delta^{\beta+\gamma}$ een op M^2 gelegen ruimtekromme, die de beschrijvenden van de schaar (r_1) in β punten snijdt. en die van de schaar (r_2) in γ punten. Een willekeurig raakvlak aan M^2 snijdt $\delta^{\beta+\gamma}$ dan in $\beta + \gamma$ punten. Projecteert men $\delta^{\beta+\gamma}$ centraal uit een willekeurig punt van M^2 op een willekeurig vlak, dan ontstaat in dat vlak een kromme van den graad $\beta + \gamma$ met een β-voudig en een γ-voudig punt. De klasse van deze kromme, en dus ook die van $\delta^{\beta+\gamma}$, is derhalve

$(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-1)-2\{{}^1\!/_2\,\beta(\beta-1)+{}^1\!/_2\,\gamma(\gamma-1)\}=$ $=2\beta\gamma$. Dit getal geeft dus den graad aan van het raaklijnenregelvlak van $\delta^{\beta+\gamma}$.

Beschouwt men nu de lijnelementen van $\delta^{\beta+\gamma}$, dan blijkt dat door een willekeurige rechte door A_φ $2\beta\gamma$ raakvlakken aan $\delta^{\beta+\gamma}$ aan te brengen zijn, dat dus het vlak door die rechte en a het vlak α is voor $2\beta\gamma$ lijnelementen van $\delta^{\beta+\gamma}$. Bovendien snijdt a den kegel met top O en richtkromme $\delta^{\beta+\gamma}$ in $\beta+\gamma$ punten, zoodat $\beta+\gamma$ lijnelementen van het stelsel hun beeld op a hebben. De beeldkromme θ van dit stelsel heeft dus tot graad $2\beta\gamma+\beta+\gamma$. Ook α_0 is α voor $2\beta\gamma$ lijnelementen, die dan O tot beeld hebben, zoodat θ in O een $2\beta\gamma$-voudig punt heeft, en a in $\beta+\gamma$ punten snijdt.

In het bizonder, als δ van den 3^{en} graad is, wordt het stelsel lijnelementen van δ afgebeeld op een kromme θ^7 met 4-voudig punt in O en a als trisecante.

Als $\beta=\gamma=1$ genomen worden, krijgt men het geval, dat onder n^0. 3 in deze paragraaf behandeld is.

§ IV. *Stelsels van beelden met bijbehoorende lijnelementen.*

1. Een willekeurige rechte b der ruimte is beeld van een stelsel (P, r) van lijnelementen, waarbij de m. p. der punten P een kegelsnede β^2 is, die door het vlak $\beta=(b, O)$ op M^2 wordt ingesneden. De raaklijnen r van dit stelsel vormen een regelvlak, waarvan de graad als volgt bepaald wordt:

De rechte b snijdt de in § III, 2 genoemde regelvlakken B_1^3 en B_2^3, ieder in 3 punten. Het komt dus 6-maal voor, dat een r van het stelsel samenvalt met een beschrijvende van M^2. Verder raken de lijnen r de hyperboloïde M^2 in de punten van β^2, zoodat deze kegelsnede bij de doorsnijding van het regelvlak met M^2 dubbel geteld moet worden. Deze doorsnijding bestaat nu uit 6 rechten en $2\times\beta^2$, is dus van den graad 10, zoodat het gezochte regelvlak van den 5den graad is, en B^5 genoemd zal worden.

Het vlak β bevat als beeld van de lijnelementen van β^2 een kubische kromme γ^3 (§ III, 3). b snijdt γ^3 in 3 punten C_1, C_2 en C_3. Als nu OC_1, OC_2 en OC_3 β^2 resp. in de punten B_1, B_2 en B_3 snijden, dan zullen de raaklijnen in B_1, B_2 en B_3 aan β^2 tot B^5 behooren. Deze drie raaklijnen vormen met β^2 de doorsnede van B^5 en β.

Het vlak Φ snijdt B^5 volgens de raaklijnen aan Φ^2 in de snijpunten van Φ^2 met β, en een kubische kromme, die o. a. gaat door de 6 punten van Φ^2, ingesneden door de 6 beschrijvenden die B^5 en M^2 gemeen hebben.

Bizondere standen van b:

a) Als b *door* O gaat, snijdt zij M^2 in nog een punt P, en is nu beeld van de lijnelementen (P, r) waarbij r iedere raaklijn in P aan M^2 kan voorstellen. De rechte b snijdt in O zoowel o_1 als o_2. O, beschouwd als punt van o_1, is dan beeld van een stelsel, waarvan de raaklijnen een kwadratische regelschaar $U_1{}^2$ vormen, als genoemd in § II, 4. Voor O beschouwd als punt van o_2 valt hetzelfde op te merken. Deze twee kwadratische regelscharen vormen met den waaier (P, r) het thans ontaarde regelvlak B^5.

b) b *ligt in* Φ. De regelvlakken $B_1{}^3$ en $B_2{}^3$ uit § III, 2 hebben o. a. Φ^2 gemeen, en bezitten ieder nog een rechte in Φ. Een willekeurige rechte b in Φ snijdt $B_1{}^3$ en $B_2{}^3$ dus samen in 4 punten, waarvan er 2, F_1 en F_2, op Φ^2 liggen. Deze punten zijn ieder beeld van een stelsel van ∞^1 lijnelementen (F_1, r) resp. (F_2, r), waarvan de dragers r een waaier vormen in het raakvlak in F_1 resp. F_2 aan M^2 (§ II, 1). Voor een rechte in Φ valt B^5 dus uiteen in een kubisch regelvlak en twee waaiers.

c) b *is een rechte van* M^2. Laat b samenvallen met een rechte van de schaar (r_1). Een punt P van b is dan beeld van een lijnelement (P, r) waarbij r een van de raaklijnen in P aan M^2 is. Verplaatst men P langs b, dan vormen de r's van dit stelsel een kwadratische regelschaar R_1^2, die beschouwd kan worden als voortbrengsel van twee projectieve vlakkenbundels met assen a en b. R_1^2 en M^2 snijden elkaar volgens b (2 maal geteld) en de op a rustende beschrijvenden van M^2 a_2' en a_2''. Het snijpunt R_1 van b en Φ is weer beeld van een waaier. Het snijpunt van b en o_2 is beeld van kwadratische regelschaar U_2^2. Daarmee is de bij deze b behoorende B^5 compleet.

2. Voor een rechte b', die samenvalt met een beschrijvende van de schaar (r_2) vindt men een dergelijk stel van twee kwadratische regelscharen R_2^2, U_1^2 en een waaier met top R_2 in het raakvlak in R_2 aan M^2. Een ontaarde kegelsnede van M^2 is dus beeld van een stelsel van ∞^1 lijnelementen, waarvan de dragers een figuur van den 10$^{\text{den}}$ graad vormen.

Een willekeurige kegelsnede β^2 van M^2 is beeld van een stelsel (P, r), waarbij de punten P op de kegelsnede β^2 liggen, terwijl de raaklijnen r een regelvlak vormen, waarvan te verwachten is, dat het van den graad 10 zal zijn. Het blijkt te ontaarden. Immers, de snijpunten B_1 en B_2 van β^2 en Φ zijn singulier, en ieder beeld van een waaier van lijnelementen. Het snijpunt van β^2 en o_1 is beeld van een kwadratische regelschaar U_1^2, dat van β^2 en o_2 is beeld van een U_2^2. Blijft dus over een regelvlak van den 4$^{\text{en}}$ graad, dat de overige punten van β^2 tot beelden heeft. Dit blijkt ook nog uit de volgende redeneering:

Behalve de snijpunten van β^2 met Φ, o_1 en o_2 heeft β^2 met ieder van de kubische regelvlakken B_1^3 en B_2^3 nog 2 punten gemeen, n.l. die op B_1^3 liggen op a_1' en en a_1'', die op B_2^3 liggen op a_2' en a_2''. Het komt dus vier maal voor, dat een beschrijvende van het gezochte regelvlak samenvalt met een rechte van M^2. Bovendien raken het regelvlak en M^2 elkaar in de punten van β^2, zoodat deze kegelsnede bij de doorsnijding dubbel geteld moet worden. Aangezien de doorsnede met M^2 van den graad 8 is, moet het bewuste regelvlak van den 4den graad zijn.

3. De punten van een willekeurig vlak δ zijn beelden van ∞^2 lijnelementen (P, r), zoodanig dat bij ieder punt P van M^2 één r behoort. De raaklijnen r van dit stelsel vormen een congruentie [4, 4]. Immers de kromme τ^4 uit § III, 4 snijdt δ in 4 punten, die ieder het beeld zijn van een lijnelement, waarvan de raaklijn door het aldaar genoemde punt M gaat. De stergraad van de congruentie is dus *vier*. Eveneens snijdt de kromme ρ^4 uit § III, 3 δ in 4 punten, die ieder het beeld zijn van een lijnelement van de t.a.p. genoemde kegelsnede μ^2. De veldgraad der congruentie is dus ook *vier*.

Het vlak δ bevat 9 singuliere punten:

1°. het snijpunt met a is het beeld van een waaier.

2°. de snijpunten met Φ^2 zijn, ieder, beeld van een waaier.

3°. de snijpunten met o_1 en o_2 zijn, ieder, beeld van een kwadratische regelschaar.

4°. de snijpunten met σ^4 (§ II, 5) zijn, ieder, beeld van een waaier.

Als δ door O gaat, zullen de krommen ρ^4 en τ^4, die ieder een dubbelpunt in O hebben, δ buiten O nog slechts in 2 punten snijden. De punten van δ zijn dan beelden van een stelsel van lijnelementen, waarvan de raaklijnen een congruentie [2, 2] vormen. Bovendien is O zelf beeld van een stelsel, waarvan de raaklijnen een congruentie [2, 2] vormen (§ II, 6).

HOOFDSTUK II.

Afbeelding van de lijnelementen van een algemeene monoïde M^n op de puntenruimte.

§ I. *Uitzonderingselementen.*

1. Zij φ^n de doorsnede van φ met de algemeene monoïde van den graad n, M^n. Ieder lijnelement (P, r) van φ^n heeft dan alle punten van PO tot beeld.

2. Zij $\alpha_0 = (a, O)$, en λ^n de doorsnede van α_0 en M^n; λ^n heeft in O een $(n-1)$-voudig punt, zoodat een rechte door O λ^n nog in één punt snijdt. Een lijnelement (P, r) van λ^n heeft ieder punt van OP tot beeld.

3. α_0 bevat $n-1$ raaklijnen in O aan λ^n, dus aan M^n. Voor ieder van deze lijnelementen (O, r) is α_0 het vlak α. Als verbindingslijn van O met O is te beschouwen elke beschrijvende van den raakkegel K^{n-1} in O aan M^n. De doorsnede van K^{n-1} met α_0 bestaat uit de $n-1$ juist genoemde raaklijnen, die dus samen de afbeelding vormen van elk van die raaklijnen afzonderlijk.

4. Iedere andere raaklijn r in O vormt met O een lijnelement (O, r) dat tot beeld heeft elk punt van een vlakke kromme $\varkappa^{n-1}$, te verkrijgen als de doorsnede van het bij dat lijnelement behoorende vlak α met den raakkegel K_{n-1} in O.

5. Voor elke raaklijn uit $A\varphi$ aan M^n is α onbepaald. Zij r zoo'n raaklijn en P het raakpunt, dan is ieder punt van OP beeld van het lijnelement (P, r). Het 1e pooloppervlak van $A\varphi$ ten opzichte van M^n is een monoïde M^{n-1} met top O. Hun doorsnede, d. i. de m. p. van de raakpunten P op alle raaklijnen r uit $A\varphi$ aan M^n, is dus een kromme $\alpha^{n(n-1)}$ met O als

$(n-1)(n-2)$-voudig punt. Het stelsel lijnelementen, waarvan de raaklijnen door A_φ gaan, heeft dus tot beeld een kegel $K^{2(n-1)}$ met top O en richtkromme $\alpha^{n(n-1)}$.

§ II. *Uitzonderingspunten.*

1. Een willekeurig punt F van Φ^n is beeld van ∞^1 lijnelementen, ieder bestaande uit F en een raaklijn in F aan M^n.

2. Een willekeurig punt A van a is beeld van ∞^1 lijnelementen, ieder bestaande uit het snijpunt L van OA met M^n en een raaklijn in L aan M^n.

3. Het in § I, 4 genoemde vlak α behoort bij $n-1$ raaklijnen in O aan M^n, zoodat ieder punt van $\varkappa^{n-1}$ beeld is van $n-1$ lijnelementen.

4. Zij P een punt van de in § I, 5 genoemde kromme $\alpha^{n(n-1)}$. Alle raaklijnen r in P aan M^n leveren hetzelfde vlak α, zoodat het stelsel (P, r) één punt S tot beeld heeft. De punten S vormen een ruimtekromme, waarvan de graad als volgt bepaald wordt:

Zij f een rechte in Φ door A_φ. De klasse van een algemeene monoïde is $(n-1)(3n-4)$, zoodat men door f $(n-1)(3n-4)$ raakvlakken aan M^n kan brengen. Het vlak (a, f) is dus α voor $(n-1)(3n-4)$ stelsels (P, r). Van den kegel $K^{2(n-1)}$ die O tot top en $\alpha^{n(n-1)}$ tot richtkromme heeft, rusten $2(n-1)$ beschrijvenden op a. In een willekeurig vlak door a liggen dus

$$(n-1)(3n-4) + 2(n-1) = (n-1)(3n-2)$$

punten S, zoodat de m. p. van S een ruimtekromme $\sigma^{(n-1)(3n-2)}$ is.

5. Een monoïde M^n bevat $n(n-1)$ rechten o_k door den top O. Alle lijnelementen, waarvan zoo'n rechte o_k drager is, hebben het snijpunt O_k van o_k en Φ tot beeld.

6. Een willekeurig punt U van o_k is beeld van ∞^1 lijnelementen, zoodanig dat bij ieder punt van o_k één raaklijn behoort. Deze raaklijnen rusten alle op de

snijlijn s van het vlak $\alpha = (U, a)$ met Φ, en bepalen op die snijlijn en op o_k twee projectieve puntenreeksen, vormen dus een kwadratische regelschaar U^2.

7. O is *hoofdpunt* der afbeelding. Bij ieder punt P van M^n is een raaklijn r te vinden, zoodat O beeld is van (P, r). De raaklijnen r uit het aldus verkregen stelsel vormen een congruentie, waarvan M^n richtoppervlak en $s = (\alpha_0, \Phi)$ richtlijn is. De omhullingskegel van een willekeurig punt Q der ruimte is van den graad $n(n-1)$, zoodat door Q $n(n-1)$ raaklijnen gaan, die op s rusten. Een willekeurig vlak ξ der ruimte snijdt s in een punt X en M^n volgens een kromme ξ^n. Door X kunnen $n(n-1)$ raaklijnen aan ξ^n in ξ getrokken worden. Hieruit volgt, dat de raaklijnen van het stelsel lijnelementen, dat O tot beeld heeft, een congruentie $[n(n-1), n(n-1)]$ vormen.

§ III. *Stelsels van lijnelementen met hun beelden.*

1. Zij δ^n de doorsnede van een willekeurig vlak δ met M^n, en d de snijlijn van δ met Φ. Uit een punt D van d kunnen $n(n-1)$ raaklijnen aan δ^n getrokken worden; het vlak (a, D) is dus het vlak α voor $n(n-1)$ lijnelementen van δ^n. Bovendien rusten van den kegel met top O en richtkromme δ^n n beschrijvenden op a, zoodat een willekeurig vlak α $n(n-1) + n = n^2$ punten bevat, die ieder het beeld zijn van een lijnelement van δ^n. Het beeld van het stelsel lijnelementen van M^n in een willekeurig vlak is dus een ruimtekromme ρ van den graad n^2. De snijpunten van ρ met M^n zijn:

1°. de n snijpunten van δ^n en Φ.

2°. $n(n-1)$ punten op δ^n, want het gebeurt $n(n-1)$ maal dat een vlak α aan δ^n raakt.

3°. $n(n-1)^2$ punten in O. Het vlak α_0 snijdt d in een punt D, waardoor $n(n-1)$ raaklijnen aan δ^n gaan, die alle O tot beeld hebben; ρ gaat dus met $n(n-1)$ takken door O.

4°. $n(n-1)$ punten op de rechten o_k, op iedere rechte één. Iedere o_k snijdt δ^n in één punt; de raaklijn in dat snijpunt aan δ^n hoort thuis in een onder § II, 6 genoemde kwadratische regelschaar U^2, heeft dus één punt van o_k tot beeld.

Ter contrôle zij opgemerkt:

$n + n(n-1) + n(n-1)^2 + n(n-1) = n^3$.

Als het vlak δ bizondere standen inneemt, kan het gebeuren dat ρ ontaardt.

a) δ *bevat* a. Uit het punt $A\varphi$ kunnen $n(n-1)$ raaklijnen δ^n getrokken worden, zoodat voor $n(n-1)$ lijnelementen van δ^n het vlak α onbepaald wordt. Deze hebben dus ieder tot beeld de rechte die O met hun raakpunt verbindt. Voor de overige lijnelementen van δ^n is δ het vlak α, zoodat die elementen δ^n tot beeldkromme hebben. ρ ontaardt in dit geval in $n(n-1)$ rechten door O en de vlakke kromme δ^n.

b) δ *gaat door* O. δ^n heeft in O dan een $(n-1)$-voudig punt. Zij r een van de $n-1$ raaklijnen in O aan δ^n, en $R = (r, \Phi)$. Het beeld van (O, r) is dan een vlakke kromme $\varkappa^{n-1}$, door den raakkegel K^{n-1} van O op het vlak $\alpha = (a, R)$ ingesneden. De klasse van δ^n is nu $n(n-1) - (n-1)(n-2) = 2(n-1)$. Door een willekeurig punt D van d gaan nu $2(n-1)$ raaklijnen aan δ^n, zoodat $\alpha = (a, D)$ dienst doet voor $2(n-1)$ lijnelementen van δ^n. Als beeld van de lijnelementen van δ^n vindt men nu het voortbrengsel van de verwantschap tusschen de stralen der waaiers $(A\delta\ \delta)$ en (O, δ). Aangezien dit een verwantschap $\{2(n-1), 1\}$ is, wordt het voortbrengsel een kromme van den graad $2(n-1) + 1 = 2n - 1$. ρ is nu ontaard in $n-1$ vlakke kromme $\varkappa^{n-1}$, en een vlakke kromme ρ^{2n-1}.

c) δ *bevat een rechte* o_k. δ^n ontaardt dan in o_k en een kromme δ^{n-1} met $(n-2)$-voudig punt in O. De lijnelementen, waarvan o_k drager is, hebben het snijpunt O_k van o_k en Φ tot beeld. Alleen het element (O, o_k) heeft tot beeld een vlakke kromme $\varkappa^{n-1}$, zooals genoemd in § I, 4. Hetzelfde valt op te merken voor de $n-2$ lijnelementen (O, r)

als r een raaklijn in O aan δ^{n-1} voorstelt. Door een willekeurig punt D van d kunnen $2(n-2)$ raaklijnen aan δ^{n-1} getrokken worden. Het beeld van δ^{n-1} wordt dus een kromme van den graad $2(n-2)+1=2n-3$, verkregen op de in *b*) beschreven wijze. o_k en δ^{n-1} snijden elkaar buiten O nog in een punt P. De ∞^1 lijnelementen, die ontstaan door P te combineeren met alle raaklijnen in P aan M^n, moeten ook geacht worden te behooren tot de lijnelementen van δ^n, en wel ieder 2 maal geteld. Als beeld van dezen waaier vindt men dus de punten van o_k 2 maal geteld. ρ is nu ontaard in $n-1$ vlakke krommen $\varkappa^{n-1}$, een vlakke kromme ρ^{2n-3} en 2 maal o_k.

d) *δ bevat 2 rechten* o_k en o_l. δ^n is nu uiteengevallen in o_k, o_l en een kromme δ^{n-2} met $(n-3)$-voudig punt in O. Op geheel analoge wijze vindt men nu:

1°. De lijnelementen van o_k hebben O_k tot beeld, die van o_l O_l.

2°. De lijnelementen (O, o_k), (O, o_l) en (O, r), als r een van de $n-3$ raaklijnen in O aan δ^{n-2} is, hebben ieder een kromme $\varkappa^{n-1}$ tot beeld.

3°. De beeldpunten van de overige lijnelementen van δ^{n-2} vormen een vlakke kromme ρ^{2n-5}.

4°. De snijpunten P en Q van o_k en o_l met δ^{n-2} behooren ieder bij een waaier van raaklijnen, die tot beeld hebben de punten van o_k resp. o_l, ieder 2 maal geteld.

e) *δ raakt M^n in D.* δ^n heeft nu D als dubbelpunt. Daardoor wordt de klasse van δ^n $n(n-1)-2=$ $=n^2-n-2$. Een willekeurig vlak door a is nu het vlak α voor n^2-n-2 lijnelementen van δ^n, terwijl de kegel (O, δ^n) a in n punten snijdt. Het beeld van δ^n wordt nu een ruimtekromme van den graad $n^2-n-2+n=$ $=n^2-2$. Zij r een willekeurige straal van den waaier (D, δ), dan moet OD als beeld van het stelsel van ∞^1 lijnelementen (D, r) dubbel geteld worden.

2. Zij h een hoofdraaklijn van M^n, die M^n in H 3-puntig aanraakt. De hoofdraaklijnen van een monoïde vormen een congruentie $[3(n-1)(n-2), 3n(n-2)]$. Het beeld van het stelsel (H, h) is een oppervlak, waarvan de graad als volgt bepaald wordt:

Een willekeurig vlak α door a snijdt Φ volgens een rechte f. Alle hoofdraaklijnen, waarbij dit vlak α behoort, moeten f snijden en vormen dus een axiaal regelvlak uit de congruentie, dat tot graad heeft

$$3(n-1)(n-2) + 3n(n-2) = 3(n-2)(2n-1).$$

De m. p. der punten H op de rechten h van dit axiaal regelvlak is een ruimtekromme, die Φ snijdt

1° in de $3n(n-2)$ buigpunten van Φ^n,

2° in de n snijpunten van f en Φ^n, maar ieder van deze laatste punten is H voor 2 rechten h van het regelvlak. De kromme (H) is dus van den graad

$$3n(n-2) + 2n = n(3n-4)$$

$(H)^{n(3n-4)}$ gaat in het algemeen niet door O, omdat alleen de $n(n-1)$ rechten o_k als eigenlijke hoofdraaklijnen te beschouwen zijn, en deze rusten in het algemeen niet op f. De kegel met top O en richtkromme $(H)^{n(3n-4)}$ zal dus op α een kromme $\sigma^{n(3n-4)}$ insnijden die beeld is van alle rechten h, die op f rusten. Bovendien is ieder punt A van a beeld van ∞^1 lijnelementen, waarvan de raaklijnen een waaier vormen om het snijpunt L van OA en M^n (§ II, 2). Hieronder bevinden zich twee hoofdraaklijnen; a is dus een dubbelrechte op het beeldoppervlak. De congruentie der hoofdraaklijnen heeft dus tot beeld een oppervlak S van den graad $n(3n-4)+2$, omdat dit de graad is van de doorsnijding van S met een willekeurig vlak α.

Een willekeurige rechte door O, die M^n in H snijdt, bevat 2 punten, in 't algemeen buiten O, die beelden zijn van (H, h_1) en (H, h_2) als h_1 en h_2 de hoofdraaklijnen in H voorstellen. Daaruit volgt dat OH en S in O $n(3n-4)$ gemeenschappelijke punten hebben. S heeft dus in O een $n(3n-4)$-voudig punt.

3. Zij Q een willekeurig punt der ruimte. Alle raaklijnen uit Q aan M^n vormen een kegel van den graad $n(n-1)$, met QO als $(n-1)(n-2)$-voudige rechte. Immers, de raakpunten P op deze raaklijnen vormen een kromme $\pi^{n(n-1)}$ met O als $(n-1)(n-2)$-voudig punt. Hieruit volgt dat de kegel (O, π) van den graad $n(n-1)-(n-1)(n-2)=2(n-1)$ is, zoodat $2(n-1)$ beschrijvenden op a rusten. De kegel (Q, π) snijdt Φ volgens een kromme van den graad $n(n-1)$, zoodat een willekeurig vlak door a het vlak α is voor $n(n-1)$ lijnelementen van het stelsel (P, r). Als beeld van dit stelsel vindt men dus een ruimtekromme τ van den graad $2(n-1)+n(n-1)=(n-1)(n+2)$.

De $n(n-1)(n+2)$ snijpunten van τ en M^n zijn als volgt verdeeld:

1⁰. de $n(n-1)$ punten van $\pi^{n(n-1)}$ in Φ;

2⁰. de $n(n-1)$ punten van $\pi^{n(n-1)}$ in het vlak (a, Q);

3⁰. $n(n-1)^2$ punten in O; er rusten $n(n-1)$ raaklijnen door Q op de rechte $s_0 = (\alpha_0, \Phi)$.

4⁰. $n(n-1)$ punten op de rechten o_k, op iedere rechte één.

§ IV. *Stelsels van beelden met bijbehoorende lijnelementen.*

1. De punten van een willekeurige rechte b der ruimte zijn beeld van een stelsel lijnelementen (P, r), zoodanig dat de m. p. der punten P de kromme β^n is, volgens welke het vlak $\beta = (O, b)$ en M^n elkaar snijden. De raaklijnen r vormen een regelvlak, waarvan de graad bepaald wordt door na te gaan, wat de doorsnede met β is. Tot die doorsnede behoort β^n in de eerste plaats. In § II, 1b bleek, dat de lijnelementen van β^n tot beelden hebben de punten van een vlakke, in β gelegen, kromme van den graad $2n-1$. Daar deze b in $2n-1$ punten snijdt, bevat β nog $2n-1$ rechten van het regelvlak. Dit is dus van den graad $n+2n-1=3n-1$, en zal genoemd worden B^{3n-1}.

Als b bizondere standen inneemt, kan het gebeuren dat B^{3n-1} ontaardt.

a) *b rust op a*. Zijn snijpunt A_b met a is dan beeld van een stelsel lijnelementen, ieder bestaande uit het snijpunt L van OA_b met M^n en een raaklijn in L aan M^n. B^{3n-1} ontaardt dan in een waaier en een B^{3n-2}.

b) *b in* Φ. Ieder van de n snijpunten F van b met Φ^n is dan beeld van ∞^1 lijnelementen, ieder bestaande uit F en een raaklijn in F aan M^n, zoodat B^{3n-1} in dit geval ontaardt in n waaiers en een regelvlak B^{2n-1}.

2. Zij δ een willekeurig vlak, dat M^n volgens een kromme δ^n snijdt. De punten van δ^n zijn beelden van een stelsel (P, r), waarbij δ^n de m. p. van P is, terwijl de raaklijnen r een regelvlak D vormen, dat met δ in de eerste plaats δ^n gemeen heeft. Verder blijkt uit § II, 1 dat de lijnelementen van δ^n tot beelden hebben de punten van een ruimtekromme ρ, die δ in n^2 punten snijdt, alle op δ^n gelegen. Hiervan moeten de n snijpunten van δ^n met Φ, die singulier zijn, en dadelijk afzonderlijk genoemd worden, afgetrokken worden. Het regelvlak D bevat dus $n^2 - n$ beschrijvenden, die in δ gelegen zijn. De graad van D is dus $n^2 - n + n = n^2$. Daarbij komt, dat ieder van de snijpunten van δ^n en Φ singulier is, en beeld van ∞^1 lijnelementen, waarvan de raaklijnen een waaier vormen. Bovendien snijdt δ^n ieder van de $n(n-1)$ rechten o_k in één punt, dat beeld is van ∞^1 lijnelementen, waarvan de raaklijnen een kwadratische regelschaar U^2 vormen. Bij D voegen zich dus n waaiers en $n(n-1)$ kwadratische regelscharen.

3. De punten van een willekeurig vlak β zijn beelden van een stelsel (P, r), zoodanig dat aan ieder punt P van M^n één raaklijn r is toegevoegd; deze raaklijnen vormen een congruentie.

Alle raaklijnen uit een willekeurig punt Q aan M^n

hebben tot beeld de punten van een ruimtekromme $\tau^{(n-1)(n+2)}$, die β in $(n-1)(n+2)$ punten snijdt. Dus $(n-1)(n+2)$ raaklijnen door een willekeurig punt hebben hun beeld in β.

De lijnelementen van een willekeurige vlakke doorsnede δ^n hebben tot beelden de punten van een ruimtekromme ρ die β in n^2 punten snijdt. Dus in een willekeurig vlak liggen n^2 lijnelementen van M^n, die hun beelden in β hebben.

Het bovengenoemde stelsel van raaklijnen r vormt dus een congruentie $[(n-1)(n+2), n^2]$.

Als β door O gaat, valt deze congruentie uiteen in twee andere.

Zoowel $\tau^{(n-1)(n+2)}$ als ρ hebben in O een $n(n-1)$-voudig punt, en snijden dus β buiten O nog in $n(n-1)(n+2) - n(n-1) = 2(n-1)$, respectievelijk $n^2 - n(n-1) = n$ punten. Terwijl O zelf beeld is van een congruentie $[n(n-1), n(n-1)]$, behoort bij de overige punten van β dus een congruentie $[2(n-1), n]$.

HOOFDSTUK III.

Afbeelding van de lijnelementen van een kubische monoïde M^3 op de puntenruimte.

Als toepassing worden hier de resultaten vastgelegd voor een kubisch oppervlak M^3 met een kegelpunt O. Dit oppervlak bevat 6 rechten o_k door den top O, terwijl ieder vlak door 2 van die rechten o_l en o_m M^3 nog volgens een buiten O gelegen rechte p_{lm} snijdt. M^3 bevat dus 15 rechten p_{lm}.

§ I. *Uitzonderingselementen.*

1. Voor een lijnelement (P, r) van de doorsnede ϕ^3 van ϕ en M^3 is het snijpunt met ϕ onbepaald, dus het vlak α ook. Het beeld van (P, r) is dus de puntenreeks op OP.

2. Zij λ^3 de doorsnede van M^3 met het vlak $\alpha_0 = (a, O)$. α_0 is α voor ieder lijnelement (L, l) van λ^3 en het snijpunt van α_0 en OL is onbepaald. Het beeld van (L, l) is dus de puntenreeks OL.

3. α_0 bevat 2 raaklijnen l_1 en l_2 in O aan λ^3. Als verbindingslijn van O met zichzelf moet beschouwd worden iedere beschrijvende van den raakkegel K^2 in O aan M^3. K^2 snijdt α_0 volgens l_1 en l_2. Als beeld van (O, l_1) moet dus ieder punt van l_1 en l_2 beschouwd worden; als beeld van (O, l_2) eveneens.

4. Iedere andere raaklijn r in O aan M^3 vormt met O een lijnelement (O, r) dat tot beeld heeft elk punt van een kegelsnede $\varkappa^2$, door het bij die raaklijn behoorende vlak α op K^2 ingesneden.

5. Voor elke raaklijn r uit A_φ aan M^3 is α onbe-

paald. Als P het raakpunt op r is, dan is ieder punt van OP beeld van (P, r). De m. p. van P is een ruimtekromme α^6 met dubbelpunt in O, als doorsnede van M^3 met het pooloppervlak van $A\varphi$ ten opzichte van M^3. De kegel (O, α^6) is dus van den 4^{en} graad.

§ II. *Uitzonderingspunten.*

1. Ieder punt F van Φ^3 is beeld van ∞^1 lijnelementen (F, r), waarbij r een willekeurige raaklijn in F aan M^3 is.

2. Ieder punt A van a is beeld van ∞^1 lijnelementen (L, r), waarbij L het snijpunt van OA en M^3 is en r een willekeurige raaklijn in L aan M^3.

3. Het in § I, 4 genoemde vlak α behoort bij 2 raaklijnen in O aan M^3, zoodat ieder punt van den kegel K^2 beeld is van 2 lijnelementen (O, r).

4. Het raakvlak in elk punt P van α^6 (zie § I, 5) snijdt Φ volgens een rechte f door $A\varphi$, zoodat bij alle raaklijnen in P aan M^3 hetzelfde vlak α behoort. Het snijpunt S van OP met a is dus beeld van ∞^1 lijnelementen (P, r) waarvan de raaklijnen r een waaier om P vormen.

Door f gaan 10 raakvlakken aan M^3, zoodat het vlak (a, f) 10 punten S bevat. Bovendien snijdt de kegel $K^4 = (O, \alpha^6)$ a in 4 punten. De punten S vormen dus een ruimtekromme σ^{14}.

5. Het snijpunt O_k van Φ met een rechte o_k is beeld van de ∞^1 lijnelementen, waarvan o_k drager is.

6. Een willekeurig punt U van o_k is beeld van ∞^1 lijnelementen (P, u) waarbij P willekeurig op o_k genomen kan worden, en u één van de raaklijnen in P aan M^3 is. De lijnen u snijden op de snijlijn s van $\alpha = (U, a)$ met Φ en op o_k twee projectieve puntenreeksen in, vormen dus een kwadratische regelschaar U^2.

7. O, als hoofdpunt, is beeld van een stelsel (P, r), waarbij ieder punt P van M^3 eenmaal voorkomt, terwijl bij iedere P één r behoort. De r's vormen een congruentie (6, 6).

§ III. *Stelsels van lijnelementen met hun beelden.*

1. De lijnelementen van M^3, gelegen in een willekeurig vlak δ, hebben tot beeld een ruimtekromme ρ^9 met een 6-voudig punt in O, en a als trisecante.

Bizondere standen van δ :

a) *δ bevat a.* Het stelsel (P, r) in δ bevat 6 raaklijnen A_φ, die ieder een rechte door O tot beeld hebben. De overige lijnelementen hebben de punten van δ^3 zelf tot beeld.

b) *δ raakt aan M^3.* De doorsnede δ^3 krijgt dan in het raakpunt D een dubbelpunt. Als beeld van δ^3 vindt men nu een ruimtekromme ρ^7, en verder OD, 2 maal geteld als beeld van den waaier (D, δ).

c) *δ gaat door O.* Nu krijgt δ^3 een dubbelpunt in O. Als d_1 en d_2 de dubbelpuntsraaklijnen zijn, hebben (O, d_1) en (O, d_2) ieder een kegelsnede tot beeld, door K^2 op het bij ieder van die lijnelementen behoorende vlak α ingesneden. De rest van δ^3 heeft tot beeld een in δ gelegen vlakke kromme ρ^5.

d) *δ bevat een rechte o_k.* De restdoorsnede is dan een kegelsnede δ^2 door O. Alle elementen, waarvan o_k drager is, hebben het snijpunt O_k van o_k en Φ tot beeld; alleen (O, o_k) heeft tot beeld een kegelsnede $\varkappa^2$, als genoemd in § I, 4, evenzoo de raaklijn in O aan δ^2. Het beeld van δ^2 is een vlakke ρ^3. In het snijpunt D van o_k en δ^2 raakt δ aan M^3. Het beeld van den waaier (D, δ) is de rechte o_k, 2 maal geteld.

e) *δ drievoudig raakvlak.* De doorsnede met M^3 ontaardt dan in 3 rechten. Daarbij zijn twee gevallen te onderscheiden.

α) δ gaat door O. δ^3 bestaat dan uit de rechten o_k, o_l en p_{kl}. Het beeld van o_k is O_k, dat van o_l is O_l. Het beeld van p_{kl} is een rechte als snijlijn van het vlak (O, p_{kl}) met het bij p_{kl} behoorende vlak α. Het beeld van (O, o_k), evenals dat van (O, o_l), is een kegelsnede $\varkappa^2$. Zij P_k het snijpunt van o_k en p_{kl}, P_l dat van o_l en p_{kl}. De waaiers (P_k, δ) en (P_l, δ) hebben dan resp. de rechten OP_k en OP_l, ieder dubbel geteld, tot beeld.

β) δ gaat niet door O. δ^3 bestaat dan uit 3 rechten p_{kl}, zoodanig dat de indices van 1 tot 6 ieder éénmaal voorkomen. Iedere rechte p_{kl} heeft tot beeld een rechte, die snijlijn is van het vlak (O, p_{kl}) met het bij p_{kl} behoorende vlak α. Als P, Q en R de snijpunten zijn der drie rechten p_{kl} onderling, dan zijn de rechten OP, OQ en OR ieder dubbel te tellen als beelden van de waaiers (P, δ), (Q, δ), en (R, δ).

2. Zij P een punt van M^3, r een willekeurige raaklijn in P. Het stelsel (P, r) heeft dan de puntenreeks OP tot beeld.

3. De hoofdraaklijnen h vormen een congruentie (6, 9). Zij H op iedere h het raakpunt, dan is het beeld van het stelsel (H, h) een oppervlak S^{17} met dubbelrechte a en een 15-voudig punt in O.

4. Alle raaklijnen r uit een willekeurig punt Q der ruimte raken M^3 in de punten P van een ruimtekromme π^6 met een dubbelpunt in O. Het stelsel (P, r) heeft tot beeld een ruimtekromme τ^{10} met een 6-voudig punt in O en a als quadrisecante.

§ IV. *Stelsels van beelden met bijbehoorende lijnelementen.*

1. De punten van een rechte b zijn beelden van een stelsel (P, r). De punten P vormen de doorsnede β^3 van M^3 en het vlak $\beta = (b, O)$. De rechten r vormen een regelvlak B^8.

Als b in Φ ligt, ontaardt B^8 in 3 waaiers van raaklijnen, die de snijpunten van b en Φ^3 tot toppen hebben, en een B^5.

Als b op a rust, in het punt A_b, ontaardt B^8 in een waaier met als top het snijpunt van OA_b en M^3, en een B^7.

2. De punten van een vlakke doorsnede δ^3 zijn beelden van een stelsel (P, r). De m. p. van P is δ^3, de raaklijnen r vormen een regelvlak D^9.

3. De punten van een willekeurig vlak β zijn de beelden van ∞^2 lijnelementen (P, r). Bij iedere P van M^3 behoort één r. Het stelsel (r) vormt een congruentie $(10, 9)$. Als β door O gaat, valt deze uiteen in een bij O behoorende congruentie $(6, 6)$ en een congruentie $(4, 3)$.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Een trimonoïde en een quadrimonoïde kunnen zonder ontaarding alleen bestaan voor den graad 3.

II.

In een Nederlandsche verhandeling over het onmeetbare getal is het gebruik van het woord «fundamentaalreeks» te verkiezen boven dat van het woord «fundamentaalrij».

[Dr. F. SCHUH, Het Getalbegrip, Hoofdstuk III.]

III.

De kennis van de meer-dimensionale meetkunde en van de niet-euclidische meetkunden is voor den physicus gewenscht.

IV.

De relativiteitstheorie heeft voorloopig alleen wetenschappelijk belang.

V.

Het is van groot belang, zoowel voor het onderwijs als voor de maatschappij, de H. B. S. niet zonder meer open te stellen voor iedereen, die «met vrucht» lager onderwijs genoten heeft

VI.

Het is wenschelijk, bij de opleiding van den mathematicus eenige aandacht te schenken aan de geschiedenis der Wiskunde.