Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

# Nulstelsels in het platte vlak

https://hdl.handle.net/1874/289925

A. qu. 192. 1928

# NULSTELSELS IN HET PLATTE VLAK

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Diss.
Utrecht
1928

C. M. VAN DIEREN

NULSTELSELS IN HET PLATTE VLAK.

BIBLIOTHEEK UNIVERSITEIT UTRECHT

3148 281 7

Diss. Utrecht 1928

# NULSTELSELS IN HET PLATTE VLAK

PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
**DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE**
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT,
OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS
Dr. B. J. H. OVINK, HOOGLEERAAR IN DE
FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJS-
BEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN
SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE
BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN
OP MAANDAG 27 FEBRUARI 1928, DES
NAMIDDAGS TE VIER UUR, DOOR

**CATHARINA MARIA VAN DIEREN**
GEBOREN TE ARNHEM.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

DRUKKERIJ ZUIDAM — UTRECHT

*AAN MIJN OUDERS.*

Bij het voltooien van dit proefschrift dank ik U, Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

Vooral dank ik U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, voor het vele, dat ik van U mocht leeren en voor de hooggewaardeerde hulp, die ik bij de bewerking van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

Hooggeleerde WOLFF, de persoonlijke belangstelling, die ik, in het bijzonder tijdens mijne schooljaren en kort voor het aanvangen van mijne academische studie, van U mocht ondervinden, zal mij steeds in dankbare herinnering blijven.

# INLEIDING.

De aanleiding tot het schrijven van dit proefschrift is geweest de kennisname van hetgeen door Dr. Jan de Vries omtrent vlakke nulstelsels is bekend gemaakt in de navermelde, in de Verslagen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam gepubliceerde, mededeelingen:

1°. Vlakke lineaire nulstelsels. (XXI bl. 1070).

2°. Lineaire nulstelsels in het platte vlak. (XXVI bl. 1485).

3°. Nulstelsels in het vlak. (XXVI bl. 1142).

4°. Twee nulstelsels, die door een net van kubische krommen worden bepaald. (XXV bl. 954).

5°. Nulstelsels, welke door lineaire stelsels van vlakke algebraïsche krommen worden bepaald. (XXVII bl. 948).

Na eenige inleidende, in hoofdstuk I van dit proefschrift samengevatte, opmerkingen, worden in de hoofdstukken II, III, IV en V achtereenvolgens behandeld:

1°. Niet-lineaire nulstelsels zonder singuliere punten en stralen, (hoofdstuk II).

2°. Enkel- en meervoudig singuliere punten en stralen, (hoofdstuk III).

3°. Nulstelsels (lineaire of niet-lineaire), die enkel- en meervoudig singuliere punten en stralen bezitten, (hoofdstukken IV en V).

Het zesde hoofdstuk is in hoofdzaak gewijd aan de singuliere punten en stralen van lineaire nulstelsels en bevat daar van een uitgewerkte toepassing op een nulstelsel, dat door een bundel van algebraïsche krommen wordt bepaald.

Het laatste hoofdstuk is een uitbreiding van de vierde der bovengenoemde mededeelingen, waarbij gebruik gemaakt is van de door Dr. Jan de Vries in zijn mededeeling „Over netten van algebraïsche krommen", (Verslagen XIII bl. 708) berekende klasse der kromme van Zeuthen. Een aantal der in dit hoofdstuk afgeleide uitkomsten is, langs anderen weg, door Dr. Jan de Vries gevonden in zijn mededeeling „Kenmerkende getallen voor netten van algebraïsche krommen". (Verslagen XXIII bl. 862).

## HOOFDSTUK I.

**Bepaling van een nulstelsel. Singulier punt. Singuliere rechte. Lineaire nulstelsels.**

§ 1. Onder *een vlak nulstelsel* N $(n, m)$ verstaat men een wederkeerige verwantschap tusschen de punten en de stralen van een vlak, waarbij aan elk *punt* worden toegevoegd *n nulstralen* door dat punt, aan elken *straal m* op hem gelegen *nulpunten*.

Een nulstelsel $(n, m)$ kan bepaald worden door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o, & (1) \\ f(x, u) \equiv a_x^m u_\alpha^n = o. & (2) \end{cases}$$

Immers, kiezen wij een rechte $(u)$ dan bepalen deze twee vergelijkingen $m$ op die rechte gelegen punten, haar snijpunten met een kromme $c^m$, van den graad $m$; kiezen we een punt $(x)$ dan bepalen de twee vergelijkingen $n$ door $(x)$ gaande stralen, de raaklijnen uit $(x)$ aan een kromme $K_n$, van de klasse $n$.

Een *rechte is singulier*, als al haar punten nulpunten zijn. Een *punt is singulier*, als al de door het punt gaande stralen nulstralen zijn.

§ 2. Is $n$ of $m$ een van beide (of beide) gelijk 1, dan spreekt men van een *lineair nulstelsel.*

Voor $m = 1$ bepalen $u_x = o$ en $f(x, u) \equiv a_x u_\alpha^n = o$ een nulstelsel $(n, 1)$, waarbij door een punt $n$ nulstralen gaan, op een rechte slechts *één* nulpunt ligt, het snijpunt van die rechte met de rechte $a_x u_\alpha^n = o$. Een rechte $u_x = o$ zal *singulier* zijn, als aan de vergelijkingen $u_x = o$ en $a_x u_\alpha^n = o$ onafhankelijk van $x_k$ kan voldaan worden, dus als

$$\begin{vmatrix} u_1 , & u_2 \\ a_1 u_\alpha^n , & a_2 u_\alpha^n \end{vmatrix} = o,$$

$$\begin{vmatrix} u_2 , & u_3 \\ a_2 u_\alpha^n , & a_3 u_\alpha^n \end{vmatrix} = o,$$

$$\begin{vmatrix} u_3 , & u_1 \\ a_3 u_\alpha^n , & a_1 u_\alpha^n \end{vmatrix} = o,$$

of

$$a_1 u_\alpha^n . u_2 - a_2 u_\alpha^n . u_1 = o,$$
$$a_2 u_\alpha^n . u_3 - a_3 u_\alpha^n . u_2 = o,$$
$$a_3 u_\alpha^n . u_1 - a_1 u_\alpha^n . u_3 = o.$$

De eerste twee van deze vergelijkingen geven $(n+1)^2$ oplossingen. Hieronder zijn er *n*, die volgen uit $u_2 = o$ en $a_2 u_\alpha^n = o$. Deze voldoen niet aan de derde vergelijking. Voor de overige $(n+1)^2 - n$ oplossingen geldt

$$\frac{a_1 u_\alpha^n}{u_1} = \frac{a_2 u_\alpha^n}{u_2} \text{ en}$$

$$\frac{a_2 u_\alpha^n}{u_2} = \frac{a_3 u_\alpha^n}{u_3}. \text{ Dus ook}$$

$$\frac{a_1 u_\alpha^n}{u_1} = \frac{a_3 u_\alpha^n}{u_3} \text{ of } a_3 u_\alpha^n . u_1 = a_1 u_\alpha^n . u_3.$$

Deze voldoen dus ook aan de derde vergelijking. Derhalve: *Een nulstelsel (n, 1) is in het bezit van $n^2 + n + 1$ singuliere stralen.*

Een nulstelsel (1, *m*) kan bepaald worden door de vergelijkingen:

$u_x = o$ en $f(x, u) \equiv a_x^m u_\alpha = o$. Iedere rechte draagt *m* nulpunten, ieder punt slechts *één* nulstraal.

*Een nulstelsel (1, m) is in het bezit van $m^2 + m + 1$ singuliere punten.*

## HOOFDSTUK II.

### Een nulstelsel (n, m) zonder singuliere punten of rechten.

§ 1. Niet-lineaire nulstelsels behoeven geen singuliere punten of singuliere stralen te bezitten.

Stellen we in het volgende, dat $n$ en $m$ beide $>1$ en dat *geen singuliere punten of stralen aanwezig zijn.* Wentelt $(u)$ om een vast punt $(y)$, dan geldt steeds: $u_y = 0$. De meetkundige plaats der op $(u)$ gelegen nulpunten is dan te vinden door eliminatie van $u_k$ uit:

$u_x = 0$, $u_y = 0$, $a_x^m \, u_\alpha^n = 0$.

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt:

$$\frac{u_1}{\begin{vmatrix} x_2 , x_3 \\ y_2 , y_3 \end{vmatrix}} = \frac{u_2}{\begin{vmatrix} x_3 , x_1 \\ y_3 , y_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_3}{\begin{vmatrix} x_1 , x_2 \\ y_1 , y_2 \end{vmatrix}}, \text{ waarmee}$$

de derde vergelijking overgaat in

$$a_x^m \left\{ \alpha_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \alpha_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + \alpha_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \right\}^n = 0$$

of, als we den determinant $| \alpha \, x \, y |_3$ voorstellen door $(\alpha \, x \, y)$ in:

(1) $a_x^m (\alpha \, x \, y)^n = 0$.

Daar iedere straal door $(y)$ deze kromme buiten $(y)$ slechts in $m$ punten mag snijden, is $(y)$ op deze kromme een $n$-voudig punt, waarin de $n$ nulstralen van $(y)$ raaklijnen zijn.

$(Y)_{n+m}$

*De meetkundige plaats der, op alle door een vast punt (y) getrokken stralen gelegen, nulpunten is een kromme* $(Y)_{n+m}$, *de nulkromme van (y), met vergelijking*

(1) $a_x^m (a\,x\,y)^n = o$. *Zij is van den graad n + m, met een n-voudig punt in (y).*

$(v)_{n+m}$

Eveneens:

*Doorloopt (x) een vaste rechte v, dan omhullen de nulstralen van (x) een kromme* $(v)_{n+m}$ *met vergelijking*

(2) $(a\,u\,v)^m\,u_\alpha{}^n = o$, *van de klasse n + m, die v tot m-voudige raaklijn heeft.*

§ 2. Uit een punt (X) vertrekken *n* nulstralen, de raaklijnen aan de aan (X) toegevoegde $K_n$. Vallen er hiervan twee samen, dan is (X) in het bezit van een *dubbelen nulstraal.* Opdat twee raaklijnen samenvallen moet *(X) op de betrokken* $K_n$ *gelegen* zijn. De vergelijking van $K_n$ is in lijncoördinaten f (X, u) = o.

Deze zal in puntcoördinaten een vergelijking F (x, X) = o hebben. Ligt (X) op deze $K_n$, dan moet gelden F (X, X) = o. Dus:

$(N\,n_2)$

*De meetkundige plaats der punten, die in het bezit zijn van een dubbelen nulstraal, is een kromme* $(N\,n_2)$, *met vergelijking F (x, x) = o.*

Bij ieder punt (X) van $(N\,n_2)$ behoort een dubbele nulstraal.

$(n_2)$

*De dubbele nulstralen zullen een kromme* $(\mathbf{n}_2)$ *omhullen.*

Beschouwen we alleen die $K_n$ waarop het toegevoegde punt (X) gelegen is, dus op $(N\,n_2)$ gelegen punten (X). De hierbij behoorende krommen $K_n$ (als omhulden van rechten beschouwd) kunnen tot singulariteiten *dubbel-* of *keerpunten* hebben. Het kan dus voorkomen dat (X) met zoo'n dubbel- of keerpunt samenvalt.

*Valt (X) met een dubbelpunt van $K_n$ samen*, dan heeft $K_n$ in (X) twee dubbelpuntsraaklijnen, *die beide een dubbelen nulstraal voor (X) vertegenwoordigen*. Deze raken dus beide aan de kromme $(n_2)$. Tusschen $(N n_2)$ en $(n_2)$ is een één-eenduidige verwantschap. De dubbele nulstraal in een punt van $(N n_2)$ is een raaklijn aan $(n_2)$. Komen op bovengenoemde wijze twee raaklijnen van $(n_2)$ in hetzelfde punt van $(N n_2)$ samen, dan moet dit punt dus *een dubbelpunt* op $(N n_2)$ zijn. Dus: *Het aantal punten, dat in het bezit is van twee dubbele nulstralen, is het aantal dubbelpunten van $(N n_2)$.*

*Valt (X) met een keerpunt van zijn toegevoegde $K_n$ samen*, dan heeft $K_n$ in (X) één keerpuntsraaklijn, die de samenvalling van twee dubbelpuntsraaklijnen is. Het punt (X) is dan ook op $(N n_2)$ *een keerpunt*. Het bevat dan een *drievoudigen nulstraal*.
*Het aantal punten, dat in het bezit is van een drievoudigen nulstraal, is het aantal keerpunten van $(N n_2)$.*

Op een rechte (U) liggen *m* nulpunten, de snijpunten van (U) met de aan (U) toegevoegde $c^m$. Vallen twee nulpunten samen dan is *de rechte raaklijn aan deze* $c^m$. De vergelijking van $c^m$ in puntcoördinaten is $f(x, U) = o$. In lijncoördinaten heeft $c^m$ een vergelijking $F^1(u, U) = o$. Opdat (U) aan $c^m$ raakt, moet dus gelden $F^1(U, U) = o$.

$(n_{N_2})$ *De rechten, die een dubbel nulpunt bevatten, omhullen dus een kromme $(n_{N_2})$ met vergelijking $F^1(u, u) = o$.*

$(N_2)$ Iedere raaklijn (U) van $(n_{N_2})$ bevat een dubbel nulpunt. *De dubbele nulpunten zullen op een kromme* $(N_2)$ *liggen.*

Beschouwen we alleen de $c^m$, waarvan de bijbehoorende rechte (U) aan $c^m$ raakt. Deze $c^m$ (als meetkundige plaats van punten beschouwd) kan tot singulariteiten *dubbelraaklijnen* en *stationaire raaklijnen hebben*. Het kan voorkomen dat (U) met zoo'n dubbelraaklijn of stationaire raaklijn samenvalt.

*Valt (U) met een dubbelraaklijn van* $c^m$ *samen*, dan liggen er op *(U) twee dubbele nulpunten*, die beide op $(N_2)$ liggen. Bij deze beide punten van $(N_2)$ behoort dezelfde nulstraal (U), die raaklijn aan $(n_{N_2})$ is. Tusschen $(N_2)$ en $(n_{N_2})$ is een één-eenduidige verwantschap. De nulstraal, waarop een punt van $(N_2)$ dubbel nulpunt is, is een raaklijn van $(n_{N_2})$.

Heeft een raaklijn aan $(n_{N_2})$ twee dubbele nulpunten met $(N_2)$ gemeen, dan moet ze *dubbelraaklijn* van $(n_{N_2})$ zijn.

*Valt (U) met een stationaire raaklijn van* $c^m$ *samen*, dan ligt er op (U) een *drievoudig nulpunt*, dat ook op $(N_2)$ ligt. De daarbij behoorende nulstraal is dan *stationaire raaklijn* van $(n_{N_2})$. Dus: *Het aantal stralen, dat in het bezit is van twee dubbele nulpunten, is het aantal dubbelraaklijnen van* $(n_{N_2})$.

*Het aantal stralen, dat in het bezit is van een drievoudig nulpunt, is het aantal stationaire raaklijnen van* $(n_{N_2})$.

§ 3. De nulkromme $(P)^{n+m}$ van een punt P is van den graad $n+m$ en heeft in P een $n$-voudig punt. De klasse van $(P)^{n+m}$ is dus $m^2+2\,nm-m$. Uit P vertrekken dus $m^2+2\,nm-m-2\,n=(2\,n+m)\,(m-1)$ raaklijnen aan deze nulkromme. Op deze stralen zijn twee nulpunten samengevallen. Derhalve:

*De klasse van de omhulde der stralen met dubbel nulpunt* $(n_{N_2})$ *is* $(2\,n+m)\,(m-1)$.

En eveneens:

*De graad van de meetkundige plaats* ($N^{n}_{2}$) *der punten, die in het bezit zijn van een dubbelen nulstraal is*

$$(2m+n)(n-1).$$

§ 4. De bij twee willekeurige rechten $v$ en $w$ behoorende krommen

$(v)_{n+m} \equiv (a\,u\,v)^m\, u_\alpha{}^n = o$ en

$(w)_{n+m} \equiv (a\,u\,w)^m\, u_\alpha{}^n = o$

hebben $(n+m)^2$ gemeenschappelijke raaklijnen, waartoe echter behooren de $n$ nulstralen van het punt $vw$.

*Dus zijn er* $(n+m)^2 - n$ *stralen, die een nulpunt op ieder van twee gegeven rechten werpen.* Hieruit volgt weer: *Wanneer een punt N een rechte v doorloopt, zullen de overige nulpunten der bij het punt N behoorende nulstralen op een kromme van den graad* $(n+m)^2 - n$ *liggen.* Deze kromme zal *enkelvoudige* punten bezitten in de op $v$ gelegen dubbele nulpunten en $(m-1)$*-voudige* punten in de $m$ nulpunten van $v$.

En verder:

*Er zijn* $(n+m)^2 - m$ *punten, die een nulstraal zenden door ieder van twee gegeven punten. Wanneer een nulstraal n een waaier (P) beschrijft, zullen de overige nulstralen der op n gelegen nulpunten een kromme van de klasse* $(n+m)^2 - m$ *omhullen,* die de door P gaande dubbele nulstralen tot *enkelvoudige* raaklijnen zal hebben en de $n$ nulstralen van P tot $(n-1)$*-voudige* raaklijnen.

§ 5. Denken we aan een *vaste* rechte *a*. Een punt P *op a* bevat $n$ nulstralen. Op ieder dier nulstralen liggen nog $m-1$ (in het algemeen niet met P samenvallende) nulpunten $Q_1 \ldots . Q_{m-1}$. We gaan in een waaier (M) aan een straal $p = MP$ toevoegen elken straal $q = MQ_\lambda$, waarbij

P altijd op $a$ gelegen is en $Q_\lambda$ op een der nulstralen van P nulpunt is. Aan een waaierstraal $p$ zijn toegevoegd n(m—1) stralen $q$. Beschouwen we nu een waaierstraal als een straal $q$. Er zijn $(n+m)^2-n$ nulstralen, die een nulpunt op $a$ en een op $q$ werpen. Dus aan $q$ zijn $(n+m)^2-n$ stralen $p$ toegevoegd. Het aantal coïncidenties is dus $n(m-1)+(n+m)^2-n$. De nulkromme van M snijdt $a$ in $n+m$ punten. Door M gaan dus $n+m$ stralen, die een nulpunt op $a$ bevatten en ieder nog $m-1$ andere nulpunten Q. Hierdoor ontstaan $(n+m)(m-1)$ coïncidenties. Er blijven dan nog over $n^2+2nm-n+m$ coïncidenties, die ontstaan als een punt Q met een punt P samenvalt, dus als op $a$ een dubbel nulpunt ligt. Dus:

*De graad van de meetkundige plaats der dubbele nulpunten, de coïncidentiekromme* $(N_2)$, *is* $n^2+2nm-n+m$.

En eveneens:

*De dubbele nulstralen omhullen een kromme* $(n_2)$ *van de klasse* $m^2+2nm-m+n$.

§ 6. De dubbele nulpunten liggen op de kromme $(N_2)$. Op iederen nulstraal met dubbel nulpunt liggen nog $m-2$ andere nulpunten. Deze zullen ook op een meetkundige plaats, *de complementaire kromme*, liggen. Hiervan bepalen we den graad als volgt:

Denk weer aan een *vaste* rechte $a$. Een punt P op $a$ bevat $n$ nulstralen, die alle nog $m-1$ (in het algemeen niet met P samenvallende) nulpunten $Q_1 \ldots Q_{m-1}$ bevatten. We voegen nu in een waaier (M) aan een straal $q_1 = MQ_\lambda$ een straal $q_2 = MQ_\mu$ toe $(\mu \neq \lambda)$, en omgekeerd. Dit doen we voor ieder punt P van $a$. Beschouwen we een waaierstraal door M als straal $q_1$. Er zijn dan $(n+m)^2-n$ nulstralen, die op ieder der twee vaste rechten $q_1$ en $a$ een nulpunt werpen. Ieder dier stralen bevat nog $m-2$ overige nulpunten, die met M verbonden de aan $q_1$ toegevoegde stralen $q_2$ leveren.

Het kenmerkende getal van deze involutorische verwantschap is dus
$(m-2)\{(n+m)^2-n\}$ en het aantal coïncidenties $(q_1=q_2)$ is dus $2(m-2)\{(n+m)^2-n\}$. De nulkromme van M snijdt $a$ in $n+m$ punten $R_k$. Iedere straal $MR_k$ bevat $(m-1)(m-2)$ paren $Q_1$, $Q_2$ en vertegenwoordigt dus $(m-1)(m-2)$ coïncidenties. Trekken we dus $(n+m)(m-1)(m-2)$ coïncidenties af van het totale aantal, dan blijven er over
$(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$ coïncidenties, die ontstaan door het samenvallen van twee nulpunten op een straal, die op een vaste rechte $a$ een derde nulpunt werpt. Dit getal is de graad van *de complementaire kromme*. Dus:

*De meetkundige plaats der groepen van $(m-2)$ nulpunten gelegen op nulstralen, die een dubbel nulpunt bezitten, is een kromme, waarvan de graad is*
$(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$.

Eveneens:

*De groepen van $(n-2)$ nulstralen, die bij de punten behooren, welke verder nog in het bezit zijn van een dubbelen nulstraal, omhullen een kromme, waarvan de klasse is*
$(n-2)(n^2+3nm+n+2m^2-m)$.

§ 7. Als volgt kunnen we nu het aantal stralen met twee dubbele nulpunten afleiden. We voegen in een waaier (M) involutorisch aan elkaar toe de stralen $q_1$ en $q_2$ naar de enkelvoudige nulpunten $N_1$ der nulstralen met een dubbel nulpunt $N_2$. Een straal $q_1$ bevat $(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$ punten $N_1$. Bij ieder punt $N_1$ behoort een nulstraal met dubbel nulpunt. Op ieder dier nulstralen liggen verder nog

$m-3$ enkelvoudige nulpunten. Dus is het kenmerkende getal van deze verwantschap $(m-2)(m-3)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$. Het aantal coïncidenties is
$2(m-2)(m-3)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$. Door M gaan $(2n+m)(m-1)$ stralen met dubbel nulpunt (II § 3). Op ieder dier stralen liggen $m-2$ enkelvoudige nulpunten. Deze stralen veroorzaken dus een aantal coïncidenties gelijk aan
$(m-2)(m-3)(2n+m)(m-1)$. Trekken we dit aantal van het totale aantal coïncidenties af, dan blijven er over
$(m-2)(m-3)\{(2n+m)^2+3m\}$ coïncidenties. De helft hiervan is het aantal stralen met twee dubbele nulpunten. Dus:
*In een nulstelsel* $(n, m)$ *zijn*
$^1/_2\,(m-2)\,(m-3)\,\{(2n+m)^2+3m\}$ *stralen met twee dubbele nulpunten.*

Hieruit volgt tevens:

*Het aantal dubbelraaklijnen van* $(n_{N_2})$ *is*

$$^1/_2\,(m-2)\,(m-3)\,\{(2n+m)^2+3m\}.$$

*In een nulstelsel* $(n, m)$ *zijn*
$^1/_2\,(n-2)\,(n-3)\,\{(2m+n)^2+3n\}$ *punten met twee dubbele nulstralen.*

*Het aantal dubbelpunten van* $(N_{n_2})$ *is*

$$^1/_2\,(n-2)\,(n-3)\,\{(2m+n)^2+3n\}.$$

§ 8. Het aantal stralen met drievoudig nulpunt vinden we door de volgende verwantschap. In een waaier (M) voegen we aan de stralen $p$, die M verbinden met dubbele nulpunten $N_2$ op nulstralen $n_{N_2}$ toe de stralen $q$, die M verbinden met de overige op denzelfden nulstraal gelegen nulpunten $N_1$. Een straal $p$ snijdt $(N_2)$ in $(n^2+2nm-n+m)$ punten $N_2$, die ieder een nulstraal geven met $m-2$ punten $N_1$. Dus is het eerste kenmerkende getal $(m-2)(n^2+2nm-n+m)$.

Een straal $q$ snijdt de complementaire kromme in $(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$ punten $N_1$. Door ieder punt $N_1$ gaat een nulstraal, waarop een dubbel nulpunt $N_2$ gelegen is. Dus het tweede kenmerkende getal is $(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$. Het aantal coïncidenties is $(m-2)(3n^2+5nm+m^2+2m-2n)$.

Door M gaan $(2n+m)(m-1)$ stralen met dubbel nulpunt. Op ieder dier stralen ligt een punt $N_2$ en $m-2$ punten $N_1$. Hierdoor ontstaat een aantal coïncidenties gelijk aan $(m-2)(2n+m)(m-1)$. Er blijven dan nog over $(m-2)(3n^2+5nm+m^2+2m-2n-2nm+2n-m^2+m)=3(m-2)(n^2+nm+m)$ coïncidenties. Dit aantal coïncidenties, ontstaan door het samenvallen van een punt $N_1$ met een punt $N_2$, geeft ons het aantal stralen met drievoudig nulpunt. Dus:

*In een nulstelsel $(n, m)$ zijn $3(m-2)(n^2+nm+m)$ stralen met drievoudig nulpunt.*

Tevens:

*Het aantal stationaire raaklijnen van $(n_{N_2})$ is*

$$3(m-2)(n^2+nm+m).$$

*In een nulstelsel $(n, m)$ zijn $3(n-2)(m^2+nm+n)$ punten met een drievoudigen nulstraal.*

*Het aantal keerpunten van $(N_{n_2})$ is $3(n-2)(m^2+nm+n)$.*

§ 9. In een waaier (M) voegen we aan de stralen $p=MN$ de stralen $q=MN^1$ toe, waarbij N en $N^1$ nulpunten op een zelfden nulstraal zijn en N nulpunt op p is. De $m$ nulpunten van een straal $p$ bezitten ieder nog $n-1$ andere nulstralen, elk met $m-1$ nulpunten $N^1$. Aan een straal $p$ zijn dus $m(n-1)(m-1)$ stralen $q$ toegevoegd. De overige nulpunten der nulstralen, die alle een nulpunt op een straal

$q$ werpen, liggen op een kromme van den graad $(n+m)^2-n$ (II § 4). Deze kromme en de nulkromme van M hebben $(n+m)\{(n+m)^2-n\}$ gemeenschappelijke punten, waartoe de $n(m-1)$ niet in M gelegen nulpunten der $n$ nulstralen van M behooren, alsmede de $m$ nulpunten van $q$, die enkelvoudige punten van $(M)^{n+m}$ en $(m-1)$-voudige punten van de eerste kromme zijn.

Dan blijven er nog $(n+m)\{(n+m)^2-(n+m-1)\}$ gemeenschappelijke punten over. Dit moeten punten zijn, die een nulstraal door M zenden, terwijl een van hun overige nulstralen een nulpunt op $q$ werpt. Aan een straal $q$ zijn dus $(n+m)\{(n+m)^2-(n+m-1)\}$ stralen $p$ toegevoegd. Van de $m(n-1)(m-1)+(n+m)\{(n+m)^2-(n+m-1)\}$ coïncidenties der verwantschap worden er $(m-1)(m^2+2nm-m+n)$ veroorzaakt door de $m^2+2nm-m+n$ door M gaande dubbele nulstralen $n_2$, daar deze ieder één nulpunt bezitten, dat twee nulstralen door M zendt en dus ieder $m-1$ paren N, N' bevatten. Het aantal, $n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m$, der overige coïncidenties is het aantal der door M gaande stralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is. Derhalve:

*De klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, is*

$$n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m.$$

*De nulpunten, die een dubbelen nulstraal tot enkelvoudigen nulstraal bezitten, zijn gelegen op een kromme van den graad*

$$m^3+3nm^2+2n^2m-m^2-2nm+2m+n.$$

§ 10. Het aantal gemeenschappelijke punten van de nulkromme $(P)^{n+m}$ en $(N_2)$ is $(n+m)(n^2+2nm-n+m)$. Dit aantal is gelijk aan

$(2n+m)(m-1)+(n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m)$.

Noodzakelijkerwijs moeten beide krommen dus *één* punt gemeen hebben in ieder der $(2n+m)(m-1)$ dubbele nulpunten der door P gaande stralen $n_{N_2}$ en, zooals te verwachten was, één punt in ieder der
$n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m$ dubbele nulpunten, die enkelvoudige nulpunten zijn op een door P gaanden straal (II § 9).

Het aantal gemeenschappelijke punten van $(P)_{n+m}$ en $(N^{n}_2)$ is $(n+m)(2m+n)(n-1)$. Dit aantal is gelijk aan

$$2(m^2+2nm-m+n)+(n-2)(n^2+3nm+n+2m^2-m).$$

In verband met II § 5 en § 6 volgt hieruit dat beide krommen *twee* punten gemeen hebben in de punten $N^{n}_2$, die den dubbelen nulstraal door P zenden, en één in de punten $N^{n}_2$, die een enkelvoudigen nulstraal door P zenden.
*De kromme $(N^{n}_2)$ zal in ieder van haar punten geraakt worden door de nulkrommen van alle punten van den dubbelen nulstraal, die bij het beschouwde punt van $(N^{n}_2)$ behoort.*

*De raaklijnen van de omhulde $(n_{N_2})$ zullen in hun raakpunt met $(n_{N_2})$ tevens raaklijn zijn van alle krommen $(p)_{n+m}$, behoorende bij stralen p, die door het op den beschouwden straal $n_{N_2}$ gelegen dubbele nulpunt gaan.*

§ 11. Het kan voorkomen, dat *een punt op twee niet samenvallende nulstralen dubbel nulpunt* is. Dan heeft de kromme $(N_2)$ in dat punt *een dubbelpunt.* We zullen zoo'n punt aanduiden met $N_2^{n,n}$. Vallen de beide nulstralen, waarop het punt dubbel nulpunt is, samen, dan heeft $(N_2)$ in dat punt *een keerpunt.* We zullen een dergelijk punt voorstellen door $N_2^{n2}$.

En eveneens zullen we met $n_2^{N,N}$ een nulstraal aanduiden, die *van twee van zijn nulpunten dubbele nulstraal,* dus *dubbelraaklijn van* $(n_2)$ is, terwijl $n_2^{N2}$ dubbele nulstraal van twee samengevallen nulpunten en dus *stationaire raaklijn* van $(n_2)$ is.

Beschouwen we een verwantschap tusschen de waaierstralen $p = MN_1$ en $q = MN_1^1$, waarbij $N_1$ een punt $N^{n_2}$ is en $N_1^1$ een der overige nulpunten van den bij $N_1$ behoorenden dubbelen nulstraal. Daar de meetkundige plaats $(N^{n_2})$ van den graad $(2m+n)(n-1)$ is en op iederen dubbelen nulstraal $m-1$ nulpunten liggen, waarvan $n_2$ een enkelvoudige nulstraal is, zijn aan een straal $p$ dus $(m-1)(2m+n)(n-1)$ stralen $q$ toegevoegd. De punten, die een dubbelen nulstraal tot enkelvoudigen nulstraal hebben, liggen op een kromme van den graad $m^3+3nm^2+2n^2m-m^2-2nm+2m+n$ en dit is tevens het aantal stralen $p$, dat aan een straal $q$ wordt toegevoegd (II § 9). De $m^2+2nm-m+n$ door M gaande dubbele nulstralen bevatten $m-1$ paren $N_1$, $N_1^1$ en veroorzaken dus $(m-1)(m^2+2nm-m+n)$ coïncidenties. De overige $3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m$ coïncidenties geven ons het aantal dubbele nulstralen, die in het punt $N^{n_2}$ een dubbel nulpunt bezitten. Dat het gevonden aantal in zich zelf duaal is, is in overeenstemming met het feit, dat iedere straal $n_2^{N2}$ één punt $N_2^{n2}$ bevat.

*Het aantal stralen* $n_2^{N2}$ *(tevens stationaire raaklijnen van* $(n_2)$*) is* $3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m$.

*Het aantal punten* $N_2^{n2}$ *(tevens keerpunten van* $(N_2)$*) is* $3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m$.

*De keerpunten van* $(N_2)$ *zijn gelegen op de stationaire raaklijnen van* $(n_2)$.

We voegen in een waaier (M) aan elkaar toe de stralen $p = MN_2$ en $q = MN_1$, waarbij $N_1$ een der overige nulpunten is van een nulstraal, waarop het dubbele nulpunt $N_2$ enkelvoudig nulpunt is. Een straal $p$ snijdt $(N_2)$ in $n^2+2nm-n+m$ punten $N_2$, die ieder op $n-1$ nulstralen enkelvoudig nulpunt zijn. Ieder dier nulstralen bevat $m-1$ nulpunten $N_1$. Aan een straal $p$ zijn dus $(m-1)(n-1)(n^2+2nm-n+m)$ stralen $q$ toegevoegd. De overige nulpunten van de stralen, die een nulpunt op een straal $q$ werpen, liggen op een kromme van den graad $(n+m)^2-n$ (II § 4), die met de meetkundige plaats der dubbele nulpunten $(n^2+2nm-n+m)\{(n+m)^2-n\}$ punten gemeen heeft. Daar dit dubbele nulpunten zijn, waarvan een nulstraal een nulpunt op $q$ werpt, behooren hiertoe (II § 6) $(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)$ dubbele nulpunten, waarvan de straal $n_{N_2}$ een nulpunt op $q$ werpt en $n^2+2nm-n+m$ op $q$ gelegen dubbele nulpunten. De overige

$$(n^2+2nm-n+m)\{(n+m)^2-n\}$$

$-(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)-(n^2+2nm-n+m)$ gemeenschappelijke punten zijn dubbele nulpunten, die enkelvoudige nulpunten zijn op nulstralen, welke tevens een nulpunt op $q$ werpen. Tevens is hun aantal gelijk aan het getal, dat aangeeft, hoeveel stralen $p$ aan een straal $q$ zijn toegevoegd. Van de $n^4+5n^3m+7n^2m^2+2nm^3-3n^3-9n^2m-3nm^2+6n^2+6nm-2n+2m$ coïncidenties der verwantschap worden er $(m-1)(n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m)$ geleverd door de door M gaande stralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is (II § 9), die ieder $m-1$ paren $N_2\,N_1$ bevatten. Dan blijven er nog

$n^4+4n^3m+4n^2m^2-2n^3-5n^2m+nm^2+5n^2+2nm-m^2+3m$ coïncidenties over, die ontstaan als een punt op twee nulstralen dubbel nulpunt is, waarbij de mogelijkheid bestaat, dat deze twee nulstralen zijn samengevallen. Het aantal punten ($N_2^{n,n} + N_2^{n2}$) is de helft van dit aantal coïncidenties.

*Het aantal punten* ($N_2^{n,n} + N_2^{n2}$) [*tevens singuliere punten van* ($N_2$)] *is*
$^1/_2(n^4+4n^3m+4n^2m^2-2n^3-5n^2m+nm^2+5n^2+2nm-m^2+3m)$.

*Het aantal stralen* ($n_2^{N,N} + n_2^{N2}$) [*tevens singuliere raaklijnen van* ($n_2$)] *is* $^1/_2(m^4+4nm^3+4n^2m^2-2m^3-5nm^2+n^2m+5m^2+2nm-n^2+3n)$.

Daar het aantal punten $N_2^{n2}$ en stralen $n_2^{N2}$ reeds in het begin van deze § is afgeleid, kan door aftrekking het aantal punten $N_2^{n,n}$ en het aantal stralen $n_2^{N,N}$ gevonden worden.

§ 12. Het aantal gemeenschappelijke punten van ($N n_2$) en ($N_2$) is $(2m+n)(n-1)(n^2+2nm-n+m) =$
(1) $n^4+4n^3m+4n^2m^2-2n^3-5n^2m-2nm^2+n^2+nm-2m^2$.
Deze moeten gelegen zijn:
1°. in de
(2) $3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m$ punten $N_2^{n2}$ (II § 11).
2°. in punten $N_2$, die op een dubbelen nulstraal enkelvoudig nulpunt zijn. Als volgt bepalen we het aantal dezer punten. Denk aan een vaste rechte *l*. Een dubbel nulpunt $N_2$ zendt $n-1$ nulstralen uit, waarop $N_2$ enkelvoudig nulpunt is. Deze nulstralen snijden *l* in $n-1$ punten $P_1 \ldots P_{n-1}$. We voegen in een involutorische verwantschap aan een punt $P_k$ de overige $n-2$ tot dezelfde groep behoorende punten toe. Het kenmerkende getal van deze verwantschap is
$(n-2)(n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m)$ (II § 9). Het aantal coïncidenties is hiervan het dubbele. De $n^2+2nm-n+m$ op *l* gelegen punten $N_2$ veroorzaken
$(n-1)(n-2)(n^2+2nm-n+m)$ coïncidenties. Het dan nog

overblijvende aantal coïncidenties is het door ons gezochte aantal punten $N_2$ in het bezit van een dubbelen nulstraal, waarop $N_2$ enkelvoudig nulpunt is. We vinden:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} n^4 + 4n^3 m + 4n^2 m^2 - 2n^3 - 11n^2 m - 8nm^2 + 3n^2 + 9nm \\ -6n - 6m. \end{array} \right.$$

We zien nu:

De som van tweemaal het aantal (2) en het aantal (3) is het aantal (1). Hieruit volgt, dat $(N_{n_2})$ *en* $(N_2)$ *in de eerste soort snijpunten* [*de keerpunten van* $(N_2)$] *twee punten, in de tweede soort snijpunten slechts één punt gemeen hebben.*

# HOOFDSTUK III.

## Singuliere punten en stralen.

§ 1. Wij zullen onder $S_k$ een *k-voudig singulier punt* verstaan, waarmee bedoeld wordt dat $S_k$ op elken straal $k$ nulpunten vervangt.

Eveneens nemen we aan dat $s_r$ een *r-voudig singuliere straal* is, als $s_r$ voor elk van zijn punten $r$ samengevallen nulstralen vertegenwoordigt. Gaan we eerst na of de nulkromme van een punt $S_k$ ook van den graad $n+m$ is. De nulstralen van de op een rechte $v$ gelegen punten omhullen de kromme $(v)_{n+m}$. Uit $S_k$ kan men $n+m$ raaklijnen aan $(v)_{n+m}$ trekken, die $v$ in $n+m$ punten snijden. Er zijn in den waaier $(S_k)$ dus $n+m$ stralen, die een nulpunt op $v$ werpen.

De nulkromme van $S_k$ is dus van den graad $n+m$. Daar iedere straal door $S_k$ slechts $m-k$ nulpunten buiten $S_k$ bevat, *moet $S_k$ op $(S_k)_{n+m}$ een $(n+k)$-voudig punt zijn.*

En eveneens zullen de nulstralen van de punten van den singulieren straal $s_r$ een kromme $(s_r)_{n+m}$ van de klasse $n+m$ omhullen, die *$s_r$ tot $(n+r)$-voudige raaklijn heeft.*

§ 2. Een nulstelsel $(n, m)$ wordt voorgesteld door de twee vergelijkingen:

(1) $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$

(2) $f(x, u) \equiv a_x^m u_a^n = o.$

De nulkromme van een punt (y) heeft tot vergelijking:

(3) $a_x^m (\alpha x y)^n = o$ of

(4) $a_x^m \{\alpha_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \alpha_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + \alpha_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1)\}^n = o.$

Stel (y) is het punt $O_3$. De nulkromme van $O_3$ is dan

(5) $a_x^m (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)^n = o$, een kromme met in $O_3$ een $n$-voudig punt.

Onderstellen we nu, *dat $O_3$ een k-voudig singulier punt* is, dan moet, volgens III § 1, $O_3$ op deze nulkromme een $(n+k)$-voudig punt zijn. De vergelijking van deze nulkromme moet dan als hoogste macht van $x_3$ bevatten $x_3^{m-k}$.

Dus vergelijking (5) moet van den vorm zijn

(6) $a_x^{m-k} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^k (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)^n = o.$

Dit nulstelsel moet dus oorspronkelijk bepaald zijn door de twee vergelijkingen:

(7) $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$

(8) $f(x, u) \equiv a_x^{m-k} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^k u_\alpha^{\ n} = o.$

Gaan we nu na, wat de vergelijking van de nulkromme van een willekeurig punt (y) in dit nulstelsel wordt. Daarvoor geldt:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = o,$$
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o,$$
$$a_x^{m-k} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^k u_\alpha^{\ n} = o.$$

Door eliminatie van $u_k$ vinden we voor de vergelijking van deze nulkromme $\alpha_x^{m-k} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^k (\alpha x y)^n = o.$ (9)

Uit deze vergelijking blijkt dat *deze nulkromme in het algemeen in het k-voudig singuliere punt $O_3$ een k-voudig punt heeft.*

De coefficient van $x_3^{m+n-k}$ in vergelijking (9) gelijk nul gesteld, bepaalt den raaklijnencomplex van de nulkromme in $O_3$. Deze coefficient is van den vorm:

$a_3^{m-k} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^k (\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2)^n$ en is dus een homogene functie van den graad $n$ in $y_1$ en $y_2$, die niet van $y_3$

afhangt. Alleen *nulkrommen van punten, die op eenzelfde door $O_3$ gaande rechte liggen, hebben in $O_3$ dezelfde k raaklijnen.* Dus:

*In een k-voudig singulier punt heeft de nulkromme van dit punt zelf een $(n+k)$-voudig punt.*

*De overige nulkrommen hebben alle het k-voudig singuliere punt tot k-voudig punt, terwijl nulkrommen van punten, die op eenzelfde, door $S_k$ gaande rechte gelegen zijn, in $S_k$ dezelfde raaklijnen hebben.*

En eveneeens:

*De kromme $(s_r)_{n+m}$, behoorende bij een r-voudig singuliere rechte, heeft die rechte tot $(m+r)$-voudige raaklijn.*

*De krommen $(v)_{n+m}$, behoorende bij alle overige rechten v, hebben $s_r$ tot r-voudige raaklijn, terwijl twee krommen $(v)_{n+m}$ en $(v^1)_{n+m}$ alleen dan $s_r$ in dezelfde punten raken, als de bijbehoorende rechten v en $v^1$ de rechte $s_r$ in hetzelfde punt snijden.*

Voor $k=1$ vinden we dus een nulkromme $(S_1)^{n+m}$ met in $S_1$ een $(n+1)$-voudig punt; de overige nulkrommen hebben in $S_1$ een enkelvoudig punt.

Voor $r=1$ is $s_1$ van $(s_1)_{n+m}$ een $(m+1)$-voudige raaklijn en van de overige krommen $(v)_{n+m}$ een enkelvoudige raaklijn.

§ 3. Daar we uit $S_k$ $n+m$ raaklijnen aan de omhulde $(v)_{n+m}$ kunnen trekken, bestaan er dus $n+m$ nulstralen met één nulpunt op $v$ en $k$ samengevallen nulpunten in $S_k$. Als $k=m$, dan zijn deze rechten *singulier.*

In een nulstelsel $(n, m)$ kan een $m$-voudig singulier punt dus slechts bestaan als gemeenschappelijk punt van $n+m$ door dit punt gaande singuliere rechten.

Eveneens kan in een nulstelsel $(n, m)$ een $n$-voudig singuliere rechte slechts bestaan, als er op deze rechte tevens $n+m$ singuliere punten gelegen zijn.

## HOOFDSTUK IV.

**Een nulstelsel (n, m) met één k-voudig singulier punt $S_k$ en één r-voudig singuliere rechte $s_r$.**

§ 1. (zie II § 3) De nulkromme van een willekeurig punt P heeft in P een *n*-voudig punt en in $S_k$ een *k*-voudig punt. Dus gaan er door P $(n+m)(n+m-1)-n(n-1)-k(k-1)-2n = (2n+m)(m-1)-k(k-1)$ raaklijnen aan $(P)_{n+m}$, die niet in P raken. Dus *de kromme* $(n_{N_2})$ *is van de klasse*

$$(2n+m)(m-1)-k(k-1).$$

Eveneens:

*De graad van* $(N_{n_2})$ *is*

$$(2m+n)(n-1)-r(r-1).$$

Tevens blijkt, dat enkelvoudig singuliere punten of stralen noch de klasse van $(n_{N_2})$, noch den graad van $(N_{n_2})$ verminderen.

§ 2. (zie II § 4) De bij twee willekeurige rechten *v* en *w* behoorende krommen $(v)_{n+m}$ en $(w)_{n+m}$ hebben $(n+m)^2$ gemeenschappelijke raaklijnen, waartoe behooren de *n* nulstralen van het snijpunt van *v* en *w*. Maar beide krommen hebben $s_r$ tot *r*-voudige raaklijn en zullen met $s_r$ in het algemeen niet dezelfde raakpunten hebben. Dus is $s_r$ van deze beide krommen een $r^2$-voudig gemeenschappelijke raaklijn. Er blijven dus nog over $(n+m)^2-n-r^2$ gemeenschappelijke raaklijnen van $(v)_{n+m}$ en $(w)_{n+m}$. Dus:

*Er zijn* $(n+m)^2-n-r^2$ *stralen, die een nulpunt op ieder van twee gegeven rechten werpen.*

En hieruit volgt:

*Wanneer een punt* $N$ *een rechte* $v$ *doorloopt, zullen de overige nulpunten der bij het punt* $N$ *behoorende nulstralen op een kromme van den graad* $(n+m)^2-n-r^2$ *liggen,* die in de op $v$ gelegen dubbele nulpunten *enkelvoudige* punten bezit en $(m-1)$*-voudige* punten in de $m$ nulpunten van $v$. Daar er $n+m$ nulstralen zijn, die een nulpunt op $v$ werpen en $k$ samengevallen nulpunten in het singuliere punt $S_k$ bezitten, zal deze kromme $S_k$ *tot* $(n+m)$ *k-voudig punt* hebben.

Eveneens:

*Er zijn* $(n+m)^2-m-k^2$ *punten, die een nulstraal zenden door ieder van twee gegeven punten.*

*Wanneer een nulstraal n een waaier* (P) *beschrijft, zullen de overige nulstralen der op n gelegen nulpunten een kromme van de klasse* $(n+m)^2-m-k^2$ *omhullen.* Deze kromme zal de door P gaande dubbele nulstralen tot *enkelvoudige* raaklijnen hebben; ze zal de $n$ nulstralen van P tot $(n-1)$-voudige raaklijnen bezitten en de singuliere rechte $s_r$ tot $(n+m)$ *r-voudige raaklijn.*

§ 3. (zie II § 5) Beschouwen we dezelfde verwantschap als in II § 5, *mits a niet door* $S_k$ *gaat.* Een straal $p$ geeft $n(m-1)$ stralen $q$. Er zijn $(n+m)^2-n-r^2$ nulstralen met een nulpunt op $a$ en een op een waaierstraal $q$. Dus een straal $q$ geeft $(n+m)^2-n-r^2$ stralen $p$. Het aantal coïncidenties is dus $n(m-1)+(n+m)^2-n-r^2$. De nulkromme van M snijdt $a$ in $n+m$ punten, waardoor $(n+m)(m-1)$ coïncidenties ontstaan. We vinden zoo:

*De graad van* $(N_2)$ *is* $n^2+2nm-n+m-r^2$.

*En de klasse van* $(n_2)$ *is*

$$m^2+2nm-m+n-k^2.$$

§ 4. (zie II § 6) Beschouwen we dezelfde verwantschap als in II § 6, mits weer $a$ niet door $S_k$ gaat. Als we een waaierstraal als straal $q_1$ beschouwen, dan zijn er $(n+m)^2-n-r^2$ nulstralen met een nulpunt op $q_1$ en een op $a$. Ieder dier nulstralen bevat nog $m-2$ nulpunten. Het kenmerkend getal van de verwantschap is dus $(m-2)\{(n+m)^2-n-r^2\}$ en het aantal coïncidenties is $2(m-2)\{(n+m)^2-n-r^2\}$. De door M gaande waaierstralen met nulpunt op $a$ veroorzaken weer $(n+m)(m-1)(m-2)$ coïncidenties. De nulkromme van het punt $S_k$ snijdt $a$ in $n+m$ punten. Er zijn dus $n+m$ nulstralen met een nulpunt op $a$ en met $k$ *samengevallen nulpunten in* $S_k$. (De overige nulpunten van deze $n+m$ nulstralen kunnen gescheiden nulpunten zijn, daar $a$ willekeurig te kiezen is.) De waaierstraal $MS_k$ vertegenwoordigt dus $(n+m)k(k-1)$ coïncidenties van een straal $q_1$ met een straal $q_2$. We vinden voor het resteerende aantal coïncidenties:

$$2(m-2)\{(n+m)^2-n-r^2\}-(n+m)(m-1)(m-2)-(n+m)k(k-1)=$$

$$(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)-2(m-2)r^2-(n+m)k(k-1).$$

*De graad van de complementaire kromme is*

$$(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)-2(m-2)r^2-(n+m)k(k-1).$$

*De klasse van de duaal daaraan toegevoegde kromme is*

$$(n-2)(n^2+3nm+n+2m^2-m)-2(n-2)k^2-(n+m)r(r-1).$$

§ 5. (zie II § 7) Beschouwen we dezelfde verwantschap als in II § 7. Een straal $q_1$ bevat $(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)-2(m-2)r^2-(n+m)k(k-1)$ punten $N_1$ gelegen op een straal met een

dubbel nulpunt. Op ieder dier stralen liggen nog $m-3$ overige nulpunten. Dus is het kenmerkende getal van deze verwantschap $(m-3)\{(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n-2r^2)-(n+m)k(k-1)\}$ en het dubbele hiervan is het aantal coïncidenties. Door M gaan $(2n+m)(m-1)-k(k-1)$ stralen $n_{N_2}$, die ieder $m-2$ enkelvoudige nulpunten dragen en waardoor een aantal coïncidenties gelijk aan
$(m-2)(m-3)\{(2n+m)(m-1)-k(k-1)\}$ ontstaat. Er blijft dus een aantal coïncidenties over gelijk aan $(m-2)(m-3)(4n^2+4nm+m^2+3m-4r^2)-(m-3)(2n+m+2)k(k-1)$. De helft hiervan is het aantal stralen met twee dubbele nulpunten. Dus:

*Het aantal stralen met twee dubbele nulpunten is*
$^1/_2(m-2)(m-3)\{(2n+m)^2+3m-4r^2\}-{}^1/_2(m-3)(2n+m+2)k(k-1)$.

*Het aantal punten, dat in het bezit is van twee dubbele nulstralen, is*
$^1/_2(n-2)(n-3)\{(2m+n)^2+3n-4k^2\}-{}^1/_2(n-3)(2m+n+2)r(r-1)$.

§ 6. (zie II § 8) Beschouwen we dezelfde verwantschap als in II § 8. Een straal $p$ snijdt $(N_2)$ in $n^2+2nm-n+m-r^2$ punten $N_2$, die ieder een straal $n_{N_2}$ geven, waarop $m-2$ punten $N_1$. Dus is het eerste kenmerkende getal $(m-2)(n^2+2nm-n+m-r^2)$. Een straal $q$ snijdt de complementaire kromme in $(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n-2r^2)-(n+m)k(k-1)$ punten $N_1$. Door ieder punt $N_1$ gaat een nulstraal $n_{N_2}$ met dubbel nulpunt. Dus is het tweede kenmerkende getal
$(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n-2r^2)-(n+m)k(k-1)$.
Door M gaan $(2n+m)(m-1)-k(k-1)$ stralen $n_{N_2}$ met ieder een punt $N_2$ en $m-2$ punten $N_1$. Hierdoor wordt een

aantal coïncidenties veroorzaakt gelijk aan
$(m-2)\{(2n+m)(m-1)-k(k-1)\}$. Trekt men dit af van de som der beide kenmerkende getallen, dan vindt men: *Het aantal stralen met drievoudig nulpunt is*

$$3(m-2)(n^2+nm+m-r^2)-(n+2)k(k-1).$$

*Het aantal punten met drievoudigen nulstraal is*

$$3(n-2)(m^2+nm+n-k^2)-(m+2)r(r-1).$$

Opmerking: Tot het bovenstaande aantal stralen met drievoudig nulpunt kunnen stralen behooren, *die een enkelvoudig- of tweevoudig singulier punt tot drievoudig nulpunt hebben*. Is $k=2$, dan is dit het geval met de $n+2$ stralen, die in $S_2$ aan $(S_2)^{n+m}$ raken.

Evenzoo zullen, als $r=2$, tot het aantal punten met drievoudigen nulstraal behooren de $m+2$ punten, waarin $s_2$ aan $(s_2)_{n+m}$ raakt.

§ 7. (zie II § 9) Beschouwen we dezelfde verwantschap als in II § 9. Aan een straal $p$ zijn weer $m(n-1)(m-1)$ stralen $q$ toegevoegd. De overige nulpunten der nulstralen, die alle een nulpunt op een straal $q$ werpen, liggen op een kromme van den graad $(n+m)^2-n-r^2$ (IV § 2). Deze kromme en de nulkromme van M hebben $(n+m)\{(n+m)^2-n-r^2\}$ punten gemeen, waartoe de $n(m-1)$ niet in M gelegen nulpunten der $n$ nulstralen van M behooren en de $m$ nulpunten van $q$, die enkelvoudige punten van $(M)^{n+m}$ en $(m-1)$-voudige punten van de eerste kromme zijn. Bovendien liggen er $(n+m)k^2$ gemeenschappelijke punten in het punt $S_k$, dat op $(M)^{n+m}$ een $k$-voudig en op de eerste kromme een $(n+m)$ $k$-voudig punt is.

Ten slotte vinden we dus $(n+m)\{(n+m)^2-n-r^2\}-n$

$(m-1)-m(n-1)-(n+m)k^2=(n+m)\{(n+m)^2-(n+m-1)-(k^2+r^2)\}$ gemeenschappelijke punten, hetgeen punten moeten zijn, die een nulstraal door M zenden, terwijl een van hun overige nulstralen een nulpunt op $q$ werpt.

Tevens is $(n+m)\{(n+m)^2-(n+m-1)-(k^2+r^2)\}$ het aantal stralen $p$, die aan een straal $q$ zijn toegevoegd. De $m^2+2nm-m+n-k^2$ door M gaande dubbele nulstralen veroorzaken $(m-1)(m^2+2nm-m+n-k^2)$ der coïncidenties. Het aantal,

$n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n-m-(n+1)k^2-(n+m)r^2$,

der overige coïncidenties is het aantal der door M gaande stralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is.

*De klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, is*

$n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m-(n+1)k^2-(n+m)r^2$.

*De nulpunten, die een dubbelen nulstraal tot enkelvoudigen nulstraal hebben, liggen op een kromme van den graad*

$m^3+3nm^2+2n^2m-m^2-2nm+2m+n-(m+1)r^2-(n+m)k^2$.

§ 8. Het aantal gemeenschappelijke punten van $(P)^{n+m}$ en $(N_2)$
(zie II § 10) is $(n+m)(n^2+2nm-n+m-r^2)$.

Hiervoor kunnen we schrijven:

$\{(2n+m)(m-1)-k(k-1)\}+\{n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m-(n+1)k^2-(n+m)r^2\}+k\{(n+2)k-1\}$.

Beide krommen hebben slechts één punt gemeen in ieder der $(2n+m)(m-1)-k(k-1)$ dubbele nulpunten der door P gaande stralen $n_{N_2}$ en ook slechts één punt in ieder der $n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m-(n+1)k^2-(n+m)r^2$ dubbele nulpunten, die enkelvoudig nulpunt zijn op een door P gaanden straal (II § 10). De overige $k\{(n+2)k-1\}$ gemeenschappelijke punten moeten in $S_k$ vallen. Daar $(P)^{n+m}$

in $S_k$ een *k*-voudig punt heeft, volgt hieruit:

*De meetkundige plaats* $(N_2)$ *der dubbele nulpunten heeft het k-voudig singuliere punt tot* $\{(n+2)\,k-1\}$*-voudig punt.*

*De omhulde* $(n_2)$ *der dubbele nulstralen zal de r-voudig singuliere rechte tot* $\{(m+2)\,r-1\}$*-voudige raaklijn bezitten.*

Het aantal gemeenschappelijke punten van $(P)^{n+m}$ en $(N^{n_2})$ is $(n+m)\,\{(2m+n)(n-1)-r(r-1)\}$. Hiervoor kunnen we schrijven $2(m^2+2nm-m+n-k^2)+\{(n-2)(n^2+3nm+n+2m^2-m)-2(n-2)k^2-(n+m)r(r-1)\}+k\{2(n-1)k\}$. Vergelijken we dit met IV § 3 en § 4 en II § 10, dan volgt hieruit, dat de $2(m^2+2nm-m+n-k^2)$ gemeenschappelijke punten gelegen zijn in de punten $N^{n_2}$, die den dubbelen nulstraal door P zenden, de $(n-2)(n^2+3nm+n+2m^2-m)-2(n-2)k^2-(n+m)r(r-1)$ gemeenschappelijke punten in de punten $N^{n_2}$, die een enkelvoudigen nulstraal door P zenden en de overige $k\{2(n-1)k\}$ dus in $S_k$. Daar $(P)^{n+m}$ in $S^k$ een *k*-voudig punt heeft, volgt hieruit:

*De meetkundige plaats* $(N^{n_2})$ *der punten, die in het bezit zijn van een dubbelen nulstraal, heeft het k-voudig singuliere punt tot* $\{2\,n-1)\,k\}$*-voudig punt.*

*De omhulde* $(n_{N_2})$ *der stralen met dubbel nulpunt heeft de r-voudig singuliere rechte tot* $\{2(m-1)\,r\}$*-voudige raaklijn.*

§ 9. (zie II § 11) Ten einde het aantal stralen $n_2^{N2}$ af te leiden, maken we gebruik van dezelfde verwantschap als in II § 11. Aan een straal *p* zijn $(m-1)\,\{(n-1)(2m+n)-r(r-1)\}$ stralen *q* toegevoegd. Aan een straal *q* zijn $m^3+3nm^2+2n^2m-m^2-2nm+n+2m-(m+1)r^2-(n+m)k_1$ stralen *p* toegevoegd (IV § 7). De $m^2+2nm-m+n-k^2$ door M gaande dubbele nulstralen bevatten $m-1$ paren $N_1$, $N_1{}^1$

en veroorzaken dus $(m-1)(m^2+2nm-m+n-k^2)$ coïncidenties. Dat $(N^{n_2})$ in een $k$-voudig singulier punt een $\{2(n-1)k\}$-voudig punt heeft (IV § 8), moeten we opvatten alsof $k$, in $S_k$ samenvallende, punten ieder in het bezit zijn van $2(n-1)$ dubbele nulstralen. Dan zijn er op ieder dier dubbele nulstralen $\frac{1}{2}k(k-1)$ paren $N_1$, $N_1^1$ in $S_k$ vereenigd. In het geheel geldt het punt $S_k$ dus voor $2(n-1)$. $\frac{1}{2}k(k-1)$ paren $N_1$, $N_1^1$ en het levert dus $(n-1)k(k-1)$ coïncidenties. Dan blijft er nog een aantal coïncidenties over groot $(m-1)$ $\{(n-1)(2m+n)-r(r-1)\}+m^3+3nm^2+2n^2m-m^2-2nm+n+2m-(m+1)r^2-(n+m)k^2-(m-1)(m^2+2nm-m+n-k^2)-(n-1)k(k-1)=3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m-2mr^2+(m-1)r-2nk^2+(n-1)k$. Dit aantal blijkt weer in zich zelf duaal te zijn.

*Het aantal stralen $n_2^{N2}$ (tevens stationaire raaklijnen van $(n_2)$, die niet singulier zijn) is*

$$3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m-2mr^2+(m-1)r-2nk^2+(n-1)k.$$

*Het aantal punten $N_2^{n2}$ (tevens keerpunten van $(N_2)$, die niet singulier zijn) is*

$$3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m-2mr^2+(m-1)r-2nk^2+(n-1)k.$$

De tweede in II § 11 gebruikte verwantschap zal ons ook nu weer het aantal punten $(N_2^{n,n}+N_2^{n2})$ geven. Aan een straal $p$ zijn $(n-1)(m-1)(n^2+2nm-n+m-r^2)$ stralen $q$ toegevoegd. De overige nulpunten der stralen, die een nulpunt op een straal $q$ werpen, liggen op een kromme van den graad $(n+m)^2-n-r^2$ (IV § 2). Van de $(n^2+2nm-n+m-r^2)\{(n+m)^2-n-r^2\}$ punten, die deze kromme gemeen heeft met de kromme $(N_2)$ zijn er $(m-2)$

$(m^2 + 3nm + m + 2n^2 - n) - 2(m-2)\, r^2 - (n+m)\, k(k-1)$ gelegen in punten $N_2$, waarvan de straal $n_{N_2}$ een enkelvoudig nulpunt op $q$ werpt (IV § 4); $n^2 + 2nm - n + m - r^2$ liggen er in de op $q$ gelegen dubbele nulpunten en $(n+m)k\ \{(n+2)\, k - 1\}$ liggen er in $S_k$ (IV § 2 en § 8). De overige gemeenschappelijke punten van deze beide krommen zijn dubbele nulpunten, die enkelvoudig nulpunt zijn op een nulstraal, welke tevens een nulpunt op $q$ werpt. Het aantal van deze punten is dus het getal, dat aangeeft hoeveel stralen $p$ er aan een straal $q$ zijn toegevoegd. Het aantal coïncidenties der verwantschap is: $(n-1)\,(m-1)\,(n^2 + 2nm - n + m - r^2) + (n^2 + 2nm - n + m - r^2)\ \{(n+m)^2 - n - r^2\} - (m-2)\,(m^2 + 3nm + m + 2n^2 - n) + 2\,(m-2)\, r^2 + (n+m)\, k\, (k-1) - (n^2 + 2nm - n + m - r^2) - (n+m)\, k\ \{(n+2)\, k - 1\}$. De $n^3 + 3n^2m + 2nm^2 - n^2 - 2nm + 2n + m - (n+1)k^2 - (n+m)r^2$ door M gaande stralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is (IV § 7), bevatten ieder $m-1$ paren $N_2$, $N_1$ en leveren dus $(m-1)\ \{n^3 + 3n^2m + 2nm^2 - n^2 - 2nm + 2n + m - (n+1)k^2 - (n+m)r^2$ coïncidenties. Er blijft dan nog een aantal coïncidenties over gelijk aan $n^4 + 4n^3m + 4n^2m^2 - 2n^3 - 5n^2m + nm^2 + 5n^2 + 2nm - m^2 + 3m + (-2n^2 - 4nm + 2n + m - 4)r^2 + (r^2) \times (r^2) - (n+1)^2 k^2$.

*Het aantal punten* $(N_2^{n,n} + N_2^{n2})$ *is*
$\frac{1}{2}\ \{n^4 + 4n^3m + 4n^2m^2 - 2n^3 - 5n^2m + nm^2 + 5n^2 + 2nm - m^2 + 3m + (-2n^2 - 4nm + 2n + m - 4)\, r^2 + (r^2) \times (r^2) - (n+1)^2\, k^2\}$.

Door aftrekken kan men het aantal punten $N_2^{n,n}$ vinden. Bovendien stelt bovenstaande uitkomst het aantal *tweevoudige punten van* $(N_2)$ voor, waarvan er dan $3n^2m + 3nm^2 - n^2 - 4nm - m^2 + 3n + 3m - 2m\, r^2 + (m-1)\, r - 2n\, k^2 + (n-1)\, k$ in *keerpunten* liggen. Zooals reeds is afgeleid zal $(N_2)$ nog in het $k$-voudig singuliere punt een $\{(n+2)\, k - 1\}$-*voudig punt* bezitten.

*Het aantal stralen* $(n_2^{N.N} + n_2^{N2})$ *is*
$\frac{1}{2} \{ m^4 + 4nm^3 + 4n^2m^2 - 2m^3 - 5nm^2 + n^2m + 5m^2 + 2nm - n^2 + 3n + (-2m^2 - 4nm + 2m + n - 4)k^2 + (k^2) \times (k^2) - (m + 1)^2 r^2 \}$, waarvan men het reeds bekende aantal stralen $n_2^{N2}$ moet aftrekken, om het aantal stralen $n_2^{N.N}$ te vinden.

Bovenstaande uitkomst is tevens het aantal *tweevoudige raaklijnen van* $(n_2)$, waarvan er echter $3n^2m + 3nm^2 - n^2 - 4nm - m^2 + 3n + 3m - 2m r^2 + (m-1) r - 2n k^2 + (n-1)k$ *stationaire raaklijnen* zijn, terwijl $(n_2)$ nog de *r*-voudig singuliere rechte tot $\{ (m+2) r - 1 \}$*-voudige raaklijn* heeft.

Opmerking:

De in dit hoofdstuk afgeleide uitkomsten mogen niet toegepast worden op nulstelsels, waarbij $k = m$ of $r = n$ *is*.
[ III § 3. De nulkromme van het punt $S_m$ bestaat uit $n + m$ singuliere rechten. In de in IV § 4 gebruikte verwantschap zal de waaierstraal M $S_m$ dus niet $(n + m)\, m\, (m - 1)$ coïncidenties vertegenwoordigen. ]

# HOOFDSTUK V.

## Een nulstelsel (n, m) met meerdere singuliere punten en stralen.

§ 1. Denken we aan een nulstelsel $(n, m)$ met $\alpha_1$ enkelvoudig singuliere punten, $\alpha_2$ tweevoudig singuliere punten ...., $\alpha_k$ $k$-voudig singuliere punten en $\beta_1$ enkelvoudig singuliere rechten, $\beta_2$ tweevoudig singuliere rechten ...., $\beta_r$ $r$-voudig singuliere rechten.

Met dezelfde methoden, die in IV gevolgd zijn, kan dan gevonden worden:

De klasse van $(n_{N_2})$ is $(2n+m)(m-1)-\Sigma\alpha_k\, k(k-1)$.

De graad van $(N_{n_2})$ is $(2m+n)(n-1)-\Sigma\beta_r\, r(r-1)$.

De graad van $(N_2)$ is $n^2+2nm-n+m-\Sigma\beta_r\, r^2$.

De klasse van $(n_2)$ is $m^2+2nm-m+n-\Sigma\alpha_k\, k^2$.

De graad van de complementaire kromme is

$$(m-2)(m^2+3nm+m+2n^2-n)-2(m-2)\Sigma\beta_r\, r^2-(n+m)\,\Sigma\alpha_k\, k(k-1).$$

De klasse van de duaal daaraan toegevoegde kromme is

$$(n-2)(n^2+3nm+n+2m^2-m)-2(n-2)\Sigma\alpha_k\, k^2-(n+m)\,\Sigma\beta_r\, r(r-1).$$

Het aantal stralen met twee dubbele nulpunten is

$$\tfrac{1}{2}(m-2)(m-3)\,\{(2n+m)^2+3m-4\,\Sigma\beta_r\, r^2\}-\tfrac{1}{2}(m-3)(2n+m+2)\,\Sigma\alpha_k\, k(k-1).$$

Het aantal punten met twee dubbele nulstralen is
$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)\{(2m+n)^2+3n-4\Sigma\alpha_k k^2\}-\frac{1}{2}(n-3)$
$$(2m+n+2)\ \Sigma\beta_r\, r(r-1).$$

Het aantal stralen met drievoudig nulpunt is
$$3(m-2)(n^2+nm+m-\Sigma\beta_r r^2)-(n+2)\Sigma\alpha_k k(k-1).$$
Het aantal punten met drievoudigen nulstraal is
$$3(n-2)(m^2+nm+n-\Sigma\alpha_k k^2)-(m+2)\Sigma\beta_r r(r-1).$$

De klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, is
$n^3+3n^2m+2nm^2-n^2-2nm+2n+m-(n+1)\Sigma\alpha_k k^2-(n+m)$
$$\Sigma\beta_r r^2.$$
De nulpunten, die een dubbelen nulstraal tot enkelvoudigen nulstraal hebben, liggen op een kromme van den graad
$m^3+3nm^2+2n^2m-m^2-2nm+2m+n-(m+1)\Sigma\beta_r r^2-$
$$(n+m)\Sigma\alpha_k k^2.$$

Het aantal stralen $n_2^{N2}$ en het aantal punten $N_2^{n2}$ is
$3n^2m+3nm^2-n^2-4nm-m^2+3n+3m-2m\Sigma\beta_r r^2+(m-1)$
$$\Sigma\beta_r r-2n\Sigma\alpha_k k^2+(n-1)\Sigma\alpha_k k.$$

Het aantal punten $(N_2^{n.n}+N_2^{n2})$ is
$\frac{1}{2}\{n^4+4n^3m+4n^2m^2-2n^3-5n^2m+nm^2+5n^2+2nm-$
$m^2+3m+(-2n^2-4nm+2n+m-4)\Sigma\beta_r r^2+(\Sigma\beta_r r^2)\times$
$$(\Sigma\beta_r r^2)-(n+1)^2\Sigma\alpha_k k^2\}.$$
Het aantal stralen $(n_2^{N.N}+n_2^{N2})$ is
$\frac{1}{2}\{m^4+4nm^3+4n^2m^2-2m^3-5nm^2+n^2m+5m^2+2nm-n^2$
$+3n+(-2m^2-4nm+2m+n-4)\Sigma\alpha_k k^2+(\Sigma\alpha_k k^2)\times$
$$(\Sigma\alpha_k k^2)-(m+1)^2\Sigma\beta_r r^2\}.$$

Gaan we, evenals in IV § 8 geschied is, het aantal gemeenschappelijke punten van $(P)^{n+m}$ en $(N_2)$ bepalen, dan vinden we, dat er hiervan $\Sigma\, \alpha_k\, k \{ (n+2)\, k-1 \}$ in de singuliere punten moeten vallen. Onderstellen we, dat $(N_2)$ in een *k*-voudig singulier punt een $x_k$-voudig punt heeft, dan moet dus

$$\Sigma\, \alpha_k\, k \{ (n+2)\, k-1 \} = \Sigma\, \alpha_k\, k\, x_k \text{ of}$$
$$\Sigma\, \alpha_k\, k \{ (n+2)\, k-1-x_k \} = 0.$$

Daar deze lineaire betrekking in $\alpha_k$ geldt, onverschillig welke waarde *n* heeft, volgt hieruit $k \{ (n+2) k-1-x_k \} = 0$. Dus $x_k = (n+2)\, k-1$.

$(N_2)$ heeft in ieder k-voudig singulier punt een $\{ (n+2)\, k-1 \}$-voudig punt.

$(n_2)$ heeft iedere *r*-voudig singuliere rechte tot $\{ (m+2)\, r-1 \}$-voudige raaklijn.

En op dezelfde wijze kan afgeleid worden: $(N_{n_2})$ heeft in ieder k-voudig singulier punt een $\{ 2\,(n-1)\, k \}$-voudig punt.

$(n_{N_2})$ heeft iedere r-voudig singuliere rechte tot $\{ 2(m-1)\, r \}$-voudige raaklijn.

§ 2. We zullen nu nog afleiden, hoe vaak de complementaire kromme door ieder singulier punt gaat. De gemeenschappelijke punten van een nulkromme $(P)^{n+m}$ en de complementaire kromme, waarvan het aantal $(n+m)$ $(m-2)\,(m^2+3nm+m+2n^2-n)-2\,(n+m)\,(m-2)\, \Sigma\, \beta_r\, r^2-$ $(n+m)^2\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)$ is, zullen gelegen zijn:

1°. In de singuliere punten. Onderstellen we, dat de complementaire kromme in een *k*-voudig singulier punt een $IJ_k$-voudig punt heeft, dan is het aantal in singuliere punten gelegen snijpunten $\Sigma\, \alpha_k\, k\, IJ_k$.

2°. In de $m-2$ enkelvoudige nulpunten der door P gaande stralen $n_{N_2}$. Dit aantal snijpunten is dus

$$(m-2) \{ (2n+m)\,(m-1) - \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) \}.$$

$3^0$. In, op niet door P gaande stralen $n_{N_2}$ gelegen, enkelvoudige nulpunten, die een nulstraal door P zenden. Dit aantal moeten we nog afleiden. Beschouwen we een verwantschap tusschen de stralen $q_1 = MN$ en $q_2 = MN^1$ van een waaier (M), waarbij N en $N^1$ nulpunten van eenzelfden zoodanigen nulstraal zijn, dat een zijner overige $m-2$ nulpunten een anderen nulstraal door M zendt. Volgens IV § 7 behooren bij een straal $q_1$ $(n+m) \{(n+m)^2-(n+m-1)-(\Sigma \alpha_k^s k^2 + \Sigma \beta_r r^2)\}$ punten, die een nulstraal door M zenden en een anderen nulstraal bezitten, waarop een nulpunt N ligt, dat tevens op $q_1$ is gelegen. Deze laatste nulstraal bezit verder nog $m-2$ nulpunten $N^1$. Het kenmerkende getal van de verwantschap is dus
$(m-2)(n+m)\{(n+m)^2-(n+m-1)-(\Sigma \alpha_k k^2+\Sigma \beta_r r^2)\}$ en het aantal coïncidenties is hiervan het dubbele.

De $n$ nulstralen van M vormen n (n—1) paren nulstralen, waarop de $m-1$ niet in M gelegen nulpunten $(m-1)(m-2)$ paren N, $N^1$ vormen. Het aantal der hierdoor veroorzaakte coïncidenties is $n(n-1)(m-1)(m-2)$. De $m^2+2nm-m+n-\Sigma \alpha_k k^2$ door M gaande dubbele nulstralen bevatten ieder $m-1$ nulpunten, die den dubbelen nulstraal slechts tot enkelvoudigen nulstraal hebben. Ieder dier dubbele nulstralen bevat dus $(m-1)(m-2)$ paren N, $N^1$. Het hierdoor veroorzaakte aantal coïncidenties is
$(m-1)(m-2)(m^2+2nm-m+n-\Sigma \alpha_k k^2)$. $(M)^{n+m}$ en $(S_k^s)^{n+m}$ hebben $(n+m)^2$ gemeenschappelijke punten, waarvan er $(n+k)k$ in $S_k$ vallen, $(\alpha_k-1)k^2$ in de overige $k$-voudig singuliere punten, $\Sigma \alpha_i i^2$ $(i \neq k)$ in de overige singuliere punten en $m-k$ in de niet in $S_k$ gelegen nulpunten der rechte $MS_k$. De overige $(n+m)^2-nk-m+k-\Sigma \alpha_k k^2$ gemeenschappelijke punten zijn punten, die een nulstraal door M en een nulstraal door $S_k$ zenden. Op dezen laatsten nulstraal geldt $S_k$

voor $k(k-1)$ paren N, N'. Het singuliere punt $S_k$ veroorzaakt dus een aantal coïncidenties gelijk aan $\{(n+m)^2 - nk - m + k - \Sigma\, \alpha_k k^2\}\, k(k-1)$. Alle singuliere punten veroorzaken tezamen een aantal coïncidenties gelijk aan $(n+m)^2\, \Sigma\, \alpha_k\, k(k-1) - n\, \Sigma\, \alpha_k\, k^2\, (k-1) - m\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) + \Sigma\, \alpha_k\, k^2\,(k-1) - \Sigma\, \alpha_k\, k^2 \times \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)$.

De overige coïncidenties kunnen slechts ontstaan als op een niet door M gaanden straal $n_{N_2}$ een enkelvoudig nulpunt ligt, dat een nulstraal door M zendt. Het aantal dier coïncidenties is $2(m-2)(n+m)\,\{(n+m)^2 - (n+m-1) - (\Sigma\, \alpha_k\, k^2 + \Sigma\, \beta_r\, r^2)\} - n(n-1)(m-1)(m-2) - (m-1)(m-2)(m^2 + 2nm - m + n - \Sigma\, \alpha_k\, k^2) - (n+m)^2\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) + n\, \Sigma\, \alpha_k\, k^2\,(k-1) + m\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) - \Sigma\, \alpha_k\, k^2\,(k-1) + \Sigma\, \alpha_k\, k^2 \times \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)$ en dit is tevens het gezochte aantal snijpunten.

Wij vinden dus de gelijkheid:

$$(n+m)(m-2)(m^2 + 3nm + m + 2n^2 - n) - 2\,(m-2)(n+m)\, \Sigma\, \beta_r\, r^2 - (n+m)^2\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) = \Sigma\, \alpha_k\, k\, \mathrm{IJ}_k + (m-2)\,\{(2n+m)(m-1) - \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)\} + 2(m-2)(n+m)\,\{(n+m)^2 - (n+m-1) - (\Sigma\, \alpha_k\, k^2 + \Sigma\beta_r\, r^2)\} - n(n-1)(m-1)(m-2) - (m-1)(m-2)(m^2 + 2nm - m + n - \Sigma\, \alpha_k\, k^2) - (n+m)^2\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) + n\, \Sigma\, \alpha_k\, k^2\,(k-1) + m\, \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) - \Sigma\, \alpha_k\, k^2\,(k-1) + \Sigma\, \alpha_k\, k^2 \times \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1),$$

waaruit men kan afleiden:

$\Sigma\, \alpha_k\, k\, \mathrm{IJ}_k = \Sigma\, \alpha_k\, k^2\,\{m^2 + 2nm - m - 2n - 2n\,k - 2k - \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)\} + \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)\,(nk + 3k - 2)$. $(S_k)^{n+m}$ heeft in $S_k$ een $(n+k)$-voudig punt, in alle overige $k$-voudig singuliere punten een $k$-voudig punt en in alle $i$-voudig singuliere punten $(i \neq k)$ een $i$-voudig punt. De klasse van $(S_k)^{n+m}$ is dus $m^2 + 2nm - m - 2nk - \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1)$. Door $S_k$ gaan dus $m^2 + 2nm - m - 2nk - \Sigma\, \alpha_k\, k\,(k-1) - 2\,(n+k)$ raaklijnen aan $(S_k)^{n+m}$, die deze kromme niet in $S_k$ raken. Op ieder dier raaklijnen ligt één dubbel nulpunt, terwijl $k$ der overige

nulpunten in $S_k$ samenvallen. Deze dubbele nulpunten veroorzaken, dat de complementaire kromme reeds met $k\{m^2+2nm-m-2n-2nk-2k-\Sigma\alpha_k k(k-1)\}$ takken door $S_k$ gaat en daar we ondersteld hebben, dat de complementaire kromme in $S_k$ een $IJ_k$-voudig punt heeft, kunnen we dus $IJ_k = k\{m^2+2nm-m-2n-2nk-2k-\Sigma\alpha_k\, k\,(k-1)\} + Z_k$ stellen. Dan is
$\Sigma\alpha_k k^2\{m^2+2nm-m-2n-2nk-2k-\Sigma\alpha_k k(k-1)\}+\Sigma\alpha_k k$
$Z_k = \Sigma\alpha_k k^2\{m^2+2nm-m-2n-2nk-2k-\Sigma\alpha_k\, k\,(k-1)\} +$
$\Sigma\alpha_k k(k-1)(nk+3k-2)$. Dus $\Sigma\alpha_k k Z_k = \Sigma\alpha_k\, k\,(k-1)(nk+3k-2)$ of $\Sigma\alpha_k[k\{(k-1)(nk+3k-2)-Z_k\}]=o$. Daar deze lineaire betrekking in $\alpha_k$ geldt, onverschillig welke waarde $n$ heeft, volgt hieruit:
$Z_k = (k-1)(nk+3k-2)$. Dus:
*De complementaire kromme gaat met*
$\{m^2+2nm-m-2n-2nk-2k-\Sigma\alpha_k\, k\,(k-1)\}\,k+(k-1)(nk+3k-2)$ *takken door een k-voudig singulier punt.*

*De duaal aan de complementaire kromme toegevoegde kromme heeft een r-voudig singuliere rechte tot* $\{n^2+2nm-n-2m-2m\,r-2r-\Sigma\beta_r\, r\,(r-1)\}\,r+(r-1)(mr+3r-2)$-*voudige raaklijn.*

# HOOFDSTUK VI.

## Lineaire nulstelsels.

§ 1. De in hoofdstuk V gevonden uitkomsten kunnen ook toegepast worden op de nulstelsels, die *n* of *m* een van beide, of allebei gelijk aan 1 hebben, mits rekening gehouden wordt met het steeds aanwezig zijn van $m^2+m+1$ *singuliere punten bij een nulstelsel* (*1, m*) *en van* $n^2+n+1$ *singuliere stralen bij een nulstelsel* (*n, 1*) (I § 2). Hieronder worden *enkelvoudig* singuliere punten en stralen verstaan. Ofschoon bij ieder nulstelsel $\infty^2$ nulkrommen behooren, vormen deze alleen in een nulstelsel (1, *m*) een *net*, want door twee willekeurige punten P en Q gaat dan slechts één nulkromme; de daarbij behoorende waaiertop is het snijpunt van de bij P en Q behoorende nulstralen.

Tot de $m^2+2m+1$ gemeenschappelijke punten van twee nulkrommen $(P)^{1+m}$ en $(Q)^{1+m}$ behooren de *m* nulpunten van P Q. De overige $m^2+m+1$ gemeenschappelijke punten zijn $m^2+m+1$ singuliere punten, daar ze meer dan één nulstraal bezitten. *De singuliere punten zijn dus tevens basispunten van het net der nulkrommen.*

We gaan nu opsporen met hoeveel men het aantal enkelvoudig singuliere punten moet verminderen, als een nulstelsel (1, *m*) in het bezit is van een *k*-voudig singulier punt. Beschouwen we het nulstelsel (1, *m*), dat bepaald wordt door de vergelijkingen:

(1) $u_x = o$,

(2) $a_x^{m-k}\,(b_1\, x_1 + b_2\, x_2)^k\, u_\alpha = o$

en dat dus $O_3$ tot *k*-voudig singulier punt heeft. De coördinaten van een singulier punt moeten onafhankelijk van $u_k$ aan de vergelijkingen (1) en (2) voldoen. Dus moet gelden:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} x_1 & , & x_2 \\ \alpha_1\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k & , & \alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k \end{vmatrix} = o,$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} x_2 & , & x_3 \\ \alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k & , & \alpha_3\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k \end{vmatrix} = o,$$

$$(5)\quad \begin{vmatrix} x_3 & , & x_1 \\ \alpha_3\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k & , & \alpha_1\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k \end{vmatrix} = o,$$

of

$$(3a)\quad \alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k . x_1 - \alpha_1\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k . x_2 = o,$$

$$(4a)\quad \alpha_3\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k . x_2 - \alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k . x_3 = o,$$

$$(5a)\quad \alpha_1\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k . x_3 - \alpha_3\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k . x_1 = o.$$

De eerste twee van deze vergelijkingen geven gezamenlijk $(m+1)^2$ oplossingen, waaronder *m* oplossingen volgend uit $x_2 = o$ en $\alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k = o$. De $(m+1)^2 - m$ overige gemeenschappelijke oplossingen van de vergelijkingen (3a) en (4a) voldoen niet aan $x_2 = o$ en aan $\alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k = o$. Voor deze oplossingen geldt dus

$$\frac{\alpha_1\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k}{x_1} = \frac{\alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k}{x_2} = \frac{\alpha_3\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k}{x_3}.$$

Dus voldoen deze oplossingen ook aan vergelijking (5a). Maar bij de gemeenschappelijke oplossingen van (3a) en (4a), volgend uit $x_2 = o$ en $\alpha_2\, a_x^{m-k}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)^k = o$, zijn er nog *k*, waarvoor $x_1 = o$ en $x_2 = o$. Ook deze voldoen aan (5a). We vinden dus in het geheel $(m+1)^2 - m + k$ gemeenschappelijke oplossingen van de vergelijkingen (3a) en (4a), die ook aan de vergelijking (5a) voldoen. Daar vergelijking (3a) een kromme voorstelt met in $O_3$ een $(k+1)$-voudig punt

en vergelijking (4a) een kromme met $O_3$ tot *k*-voudig punt, geldt $O_3$ voor $k(k+1)$ gemeenschappelijke punten dezer beide krommen, die ook op de kromme liggen, welke voorgesteld wordt door vergelijking (5a). Het aantal niet in $O_3$ gelegen gemeenschappelijke punten der door (3a), (4a) en (5a) voorgestelde krommen is dus
$(m+1)^2-m+k-k(k-1)=m^2+m+1-k^2$. Dus heeft het nulstelsel nog $m^2+m+1-k^2$ enkelvoudig singuliere punten.

*Ieder k-voudig singulier punt vermindert het aantal enkelvoudig singuliere punten van een algemeen nulstelsel (1, m) met $k^2$; iedere r-voudig singuliere rechte vermindert het aantal enkelvoudig singuliere rechten van een algemeen nulstelsel (n, 1) met $r^2$.*

§ 2. In III § 2 is aangetoond, dat nulkrommen, behoorende bij punten, die op eenzelfde door $S_k$ gaande rechte gelegen zijn, in $S_k$ dezelfde *k* raaklijnen hebben. Is het singuliere punt een enkelvoudig singulier punt, dan hebben alle nulkrommen dit punt tot enkelvoudig punt, terwijl nulkrommen van punten, die gelegen zijn op eenzelfde door $S_1$ gaande rechte, in dit punt dezelfde raaklijn hebben. We zullen nu aantoonen, dat er lineaire nulstelsels kunnen bestaan, waarbij nulkrommen van op eenzelfde door $S_1$ gaande rechte gelegen punten alle *deze rechte* tot raaklijn hebben. Het zal dan blijken, dat het singuliere punt, ofschoon het een *enkelvoudig* punt op een willekeurige nulkromme is, een *tweevoudig singulier punt* is.

(1) $u_x = o$ en

(2) $a_x^{m-1}(b_1 x_1 + b_2 x_2)\, u_\alpha = o$

bepalen een nulstelsel (1, *m*) met $O_3$ tot enkelvoudig singulier punt. De nulkromme van een punt IJ heeft tot vergelijking

(3) $a_x^{m-1}(b_1 x_1 + b_2 x_2)(\alpha\, x\, y) = o$ en is dus een kromme

met $O_3$ tot enkelvoudig punt. De nulkromme van $O_3$ wordt voorgesteld door

(4) $a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2) (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) = 0$. Ze heeft dus in $O_3$ een dubbelpunt. We kunnen vergelijking (3) ook als volgt schrijven:

(3a) $a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2) \{ x_3 (\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2) + x_2 (\alpha_1 y_3 - \alpha_3 y_1) + x_1 (\alpha_3 y_2 - \alpha_2 y_3) \} = 0$, waaruit blijkt, dat de raaklijn van deze kromme in $O_3$ tot vergelijking heeft:

(5) $a_0 (\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2) (b_1 x_1 + b_2 x_2) = 0$, waarbij

(6) $a_x^{m-1} = a_0 x_3^{m-1} + (a^1 x^1 + a_2 x_2) x_3^{m-2} + \ldots.$ gesteld is. Vergelijking (5) schrijven we in den vorm

(5a) $a_0 b_1 (\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2) x_1 + a_0 b_2 (\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2) x_2 = 0$. De vergelijking van de rechte $O_3$ IJ is:

(7) $y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0$.

We zien nu, dat vergelijking (5a) in den vorm (7) overgaat als

(8) $a_0 b_1 \alpha_2 = 0$, $a_0 b_2 \alpha_1 = 0$ en $a_0 b_1 \alpha_1 = a_0 b_2 \alpha_2$. Dan moeten in vergelijking (2) de termen in $x_3^{m-1} x_1 u_2$ en $x_3^{m-1} x_2 u_1$ ontbreken, terwijl de termen in $x_3^{m-1} x_1 u_1$ en $x_3^{m-1} x_2 u_2$ dezelfde coefficient moeten hebben. Het nulstelsel is dan nog een (1, *m*). De nulkrommen, behoorende bij alle op eenzelfde door $O_3$ gaande rechte gelegen punten, hebben alle dan $O_3$ nog tot *enkelvoudig* punt, maar alle hebben ze met die rechte *twee* samengevallen punten in $O_3$ gemeen. Op alle door $O_3$ gaande stralen is $O_3$ dus niet een enkelvoudig maar een *tweevoudig nulpunt*. Dus is $O_3$ een *tweevoudig singulier punt*. We zullen een dergelijk tweevoudig singulier punt in het vervolg aanduiden met $S_2^*$ en een nulstelsel, dat singuliere punten $S_2^*$ bezit, met $N^*$ (1, *m*). De vergelijking (4) der nulkromme van $O_3$ kan vollediger geschreven worden als

(4a) $\{ a_0 x_3^{m-1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2) x_3^{m-2} + \ldots. \} (b_1 x_1 + b_2 x_2)$

$(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) = o$ of

(4b) $a_0 b_1 \alpha_1 x_1 x_2 x_3^{m-1} - a_0 b_2 \alpha_2 x_1 x_2 x_3^{m-1} - a_0 b_1 \alpha_2 x_1^2 x_3^{m-1} + a_0 b_2 \alpha_1 x_2^2 x_3^{m-1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2)(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) x_3^{m-2} + \ldots = o.$

Voeren we de, in de vergelijkingen (8) gevonden, betrekkingen in (4b) in, dan vinden we, dat de termen met $x_3^{m-1}$ alle wegvallen. De vergelijking van de nulkromme van $O_3$ is dus:

(4c) $(a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2)(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) x_3^{m-2} + \ldots = o.$

*De nulkromme van het tweevoudig singuliere punt* $O_3 = S_2^*$ *heeft dus dit punt tot drievoudig punt.*

Sporen we nu nog het aantal der enkelvoudig singuliere punten op. Hun aantal is het aantal, niet door $O_3$ voorgestelde, gemeenschappelijke oplossingen der drie vergelijkingen:

(9) $\alpha_2 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2). x_1 - \alpha_1 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2). x_2 = o,$

(10) $\alpha_3 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2). x_2 - \alpha_2 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2). x_3 = o,$

(11) $\alpha_1 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2). x_3 - \alpha_3 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2). x_1 = o.$

De eerste twee vergelijkingen geven $(m+1)^2$ gemeenschappelijke oplossingen, waaronder *m* oplossingen, volgend uit

$x_2 = o$ en $\alpha_2 a_x^{m-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2) = o$ of uit

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = o \text{ en [als we de vergelijkingen (8) in rekening brengen]} \\ a_0 b_2 \alpha_2 x_2 x_3^{m-1} + \alpha_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2) x_3^{m-2} + \ldots = o. \end{array} \right.$$

Daar de tweede van deze vergelijkingen een kromme voorstelt, die in $O_3$ een enkelvoudig punt heeft met $x_2 = o$ tot raaklijn, vertegenwoordigt $O_3$ twee van deze *m* oplossingen. Deze twee oplossingen voldoen ook aan vergelijking (11), de overige *m*—2 oplossingen niet. Verder geven de vergelijkingen (9) en (10) nog $(m+1)^2 - m$ oplossingen, die voldoen aan

$$\frac{\alpha_1\, a_x{}^{m-1}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)}{x_1} = \frac{\alpha_2\, a_x{}^{m-1}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)}{x_2} = \frac{\alpha_3\, a_x{}^{m-1}\,(b_1 x_1 + b_2 x_2)}{x_3}$$

en die dus ook aan vergelijking (11) voldoen. Van de $(m+1)^2$ gemeenschappelijke oplossingen der vergelijkingen (9) en (10) voldoen er dus $m^2+2m+1-m+2=m^2+m+3$ ook aan vergelijking (11). Als we de vergelijkingen (8) in rekening brengen, gaan de vergelijkingen (9) en (10) over in

(9a) $\{ \alpha_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2).\ x_1 - \alpha_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2) x_2 \} x_3{}^{m-2} + \ldots = o,$

(10a) $-a_0 b_2 \alpha_2 x_2 x_3{}^m + \{ (a_0 b_1 \alpha_3 x_1 + a_0 b_2 \alpha_3 x_2) x_2 - \alpha_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2) \} x_3{}^{m-1} + \ldots = o.$

(9a) is de vergelijking van een kromme met in $O_3$ een drievoudig punt en in $O_3$ heeft die kromme de rechte $x_2 = o$ niet tot raaklijn. (10a) stelt een kromme voor met $O_3$ tot enkelvoudig punt en in dat punt $x_2 = o$ tot raaklijn. Van de gemeenschappelijke punten der door (9a) en (10a) voorgestelde krommen liggen er dus 3 in $O_3$, zoodat er $m^2+m+3-3$ of $m^2+m$, *niet in $O_3$ gelegen*, gemeenschappelijke punten dezer krommen moeten bestaan, die tevens punten van de door (11) voorgestelde kromme zijn. Dus bezit dit nulstelsel *$m^2+m$ enkelvoudig singuliere punten.*

We zien, dat dit nulstelsel in de volgende twee opzichten niet aan de eerder gevonden regels voldoet:

1°. *Alle nulkrommen hebben in het tweevoudig singuliere punt $S_2{}^*$ een enkelvoudig punt, behalve die van het singuliere punt $S_2{}^*$ zelf, die dit punt tot drievoudig punt heeft.*

2°. *Het aantal enkelvoudig singuliere punten wordt door het bestaan van dit tweevoudig singuliere punt niet met vier maar slechts met één verminderd.*

En eveneens zal bij de *nulstelsels* $(n, 1)$ *het aantal enkelvoudig singuliere rechten slechts één minder zijn, als er een tweevoudig singuliere rechte* $s_2^*$ *is, die enkelvoudige raaklijn van alle krommen* $(p)_{n+1}$ *is, maar zoodanig, dat krommen* $(p)_{n+1}$, *behoorende bij door eenzelfde punt van* $s_2^*$ *gaande rechten, in dit gemeenschappelijke punt van p en* $s_2^*$ *aan* $s_2^*$ *raken.*

§ 3. Op een $N^*$ $(1, m)$ mogen de in V gevonden uitkomsten niet toegepast worden, daar de nulkrommen in $S_2^*$ geen dubbelpunt hebben.

Denken we aan *een* $N^*$ $(1, m)$ *met* $\alpha$ *tweevoudig singuliere punten* $S_2^*$ *en* $m^2+m+1-\alpha$ *enkelvoudig singuliere punten* $S_1$.

De nulkrommen hebben dus geen meervoudige punten. Door een punt P gaan $(1+m)m-2=(m+2)(m-1)$ raaklijnen, die de nulkromme van P niet in P raken. Hiertoe behooren $\alpha$ rechten $PS_2^*$. Dus:
*De klasse van de omhulde* $(n_{N_2})$ *is* $(m+2)(m-1)-\alpha$.

*De graad van de kromme* $(N_2)$, die niet van de singuliere punten afhangt, is $1+2m-1+m=3m$.

Gebruiken we dezelfde verwantschap als in IV § 4, dan is daarvan het kenmerkend getal $(m-2)\{(1+m)^2-1\}=m(m-2)(m+2)$. Het aantal coïncidenties is $2m(m-2)(m+2)$. De door M gaande waaierstralen met nulpunt op *a* veroorzaken $(m+1)(m-1)(m-2)$ coïncidenties. Het aantal $(m-2)(m^2+4m+1)$ der overige coïncidenties is het aantal op *a* gelegen punten, die enkelvoudig nulpunt op een nulstraal $n_{N_2}$ zijn. $(S_2^*)_{1+m}$ snijdt a in $1+m$ punten. Ieder van deze punten is enkelvoudig nulpunt op een straal $n_{N_2}$ $(N_2 = S_2^*)$. Daar er $\alpha$ punten $S_2^*$ zijn, volgt hieruit:

*De graad van de complementaire kromme is*

$$(m-2)(m^2+4m+1)-(m+1)\alpha.$$

Gebruiken we dezelfde verwantschap als in IV § 5, dan is daarvan het kenmerkende getal (m—3) maal het getal, dat den graad van de complementaire kromme aangeeft. De door M gaande stralen $n_{N_2}$ geven een aantal coïncidenties gelijk aan (m—2) (m—3) maal het getal, dat de klasse van $(n_{N_2})$ aangeeft. Het aantal overblijvende coïncidenties is $2(m-3)(m-2)(m^2+4m+1)-2\alpha(m+1)(m-3)-(m-2)(m-3)(m+2)(m-1)+\alpha(m-2)(m-3)=(m-3)\{(m-2)(m^2+7m+4)-(m+4)\alpha\}$.

*Het aantal stralen met twee dubbele nulpunten is*

$$\tfrac{1}{2}(m-3)\{(m-2)(m^2+7m+4)-(m+4)\alpha\}.$$

De verwantschap, die in IV § 6 gebruikt is, heeft tot eerste kenmerkende getal $(m-2)$ maal het getal, dat den graad van $(N_2)$ aangeeft. Het tweede kenmerkende getal is gelijk aan het getal, dat den graad van de complementaire kromme aangeeft. De door M gaande stralen $n_{N2}$ veroorzaken een aantal coïncidenties gelijk aan $(m-2)$ maal het getal, dat den graad van $(n_{N2})$ aangeeft. Het aantal stralen met drievoudig nulpunt is dus $3m(m-2)+(m-2)(m^2+4m+1)-\alpha(m+1)-(m-2)(m+2)(m-1)+\alpha(m-2)=3\{(m-2)(2m+1)-\alpha\}$. Hierbij zijn echter stralen, waarop het drievoudig nulpunt in een punt $S_2^*$ valt, want daar $S_2^*$ een drievoudig punt op $(S_2^*)^{1+m}$ is, gaan er door ieder punt $S_2^*$ drie nulstralen [de drie raaklijnen aan $(S_2^*)^{1+m}$], die in $S_2^*$ drie samengevallen nulpunten bezitten. Er zijn dus $3\alpha$ nulstralen, die een punt $S_2^*$ tot drievoudig nulpunt bezitten.

*Het aantal stralen met drievoudig, niet singulier, nulpunt is*
$$3\,\{(m-2)(2m+1)-2\alpha\}.$$

Het aantal gemeenschappelijke punten van $(N_2)$ en een nulkromme $(P)^{1+m}$ is $3m(m+1)$. Hiervoor kunnen we schrijven: $\{(m+2)(m-1)-\alpha\}+2(m^2+m+1-\alpha)+3\alpha$.

De $(m+2)(m-1)-\alpha$ gemeenschappelijke punten zijn gelegen in de, op de door P gaande stralen $n_{N2}$ gelegen dubbele nulpunten. De $2(m^2+m+1-\alpha)$ gemeenschappelijke punten liggen in de $m^2+m+1-\alpha$ enkelvoudig singuliere punten, die volgens IV § 8 dubbelpunten van $(N_2)$ zijn. De $3\alpha$ gemeenschappelijke punten moeten dus in de $\alpha$ punten $S_2^*$ vallen. Daar deze punten enkelvoudige punten van $(P)^{1+m}$ zijn, volgt hieruit:

*De meetkundige plaats $(N_2)$ heeft in ieder punt $S_2^*$ een drievoudig punt.*

§ 4. Het volgende nulstelsel is een $N^*$ (1, *m*). Aan iedere rechte worden als nulpunten toegevoegd de punten, waarin die rechte twee samengevallen punten gemeen heeft met een tot een gegeven bundel $(C^n)$ behoorende kromme. Een willekeurige rechte wordt door de bundelkrommen in de groepen van een $I_n$ gesneden. Daar deze $I_n$ $2(n-1)$ coïncidenties heeft, liggen er op een rechte $2(n-1)$ nulpunten.

Een willekeurig punt P bezit slechts één nulstraal, de raaklijn in P aan de door P gaande bundelkromme. *Het nulstelsel is dus een N* (1, 2n—2). Het aantal singuliere punten moet dus gelijkwaardig zijn met *$4n^2-6n+3$ enkelvoudig singuliere punten.*

In den bundel zijn $3(n-1)^2$ krommen in het bezit van een dubbelpunt. Door een dubbelpunt *D* gaat slechts de nodale kromme, maar alle door *D* gaande stralen hebben in *D* met deze kromme twee punten gemeen. Op iederen door *D* gaanden straal is *D* dus nulpunt. In de, door den bundel $(C^n)$ op een door *D* gaande rechte, gevormde $I_n$ vertegenwoordigt *D* slechts één dubbelpunt. Dus is *D enkelvoudig singulier.*

Beschouwen we een rechte door een basispunt *B*. Alle bundelkrommen snijden deze rechte in *B* en in groepen van $n-1$ punten, die een $I_{n-1}$ vormen met $2n-4$ coïncidenties. Als we *B* niet meetellen, liggen er op een rechte slechts $2n-4$ nulpunten. *B* telt dus op de beschouwde rechte voor twee nulpunten. Dit is met alle door *B* gaande rechten het geval. *B* is dus *tweevoudig singulier.*

Het nulstelsel bezit dus $3\,(n-1)^2$ *enkelvoudig singuliere punten, gelegen in de dubbelpunten der nodale krommen en* $n^2$ *tweevoudig singuliere punten, gelegen in de basispunten van den bundel.*

Nu is echter $3\,(n-1)^2 + n^2 = 4n^2 - 6n + 3$ en dit is juist het aantal enkelvoudig singuliere punten, waarmee het totale aantal singuliere punten gelijkwaardig moet zijn. Dit doet reeds vermoeden, dat de basispunten punten $S_2^*$ zullen zijn.

Alle stralen van een waaier (P) zullen aan bundelkrommen raken. De nulkromme van P is de meetkundige plaats van de raakpunten; de nulstraal van P is de raaklijn in P aan die nulkromme. Hieruit volgt, dat de nulkromme van P dezelfde kromme is, als de *poolkromme* van P ten opzichte van den bundel $(C^n)$. Het is bekend, dat de poolkromme van een willekeurig punt P *enkelvoudige punten heeft in de dubbelpunten D en in de basispunten B,* maar dat alle poolkrommen van, op een door een basispunt *B* gaande rechte gelegen, punten in *B aan die rechte raken* en dat de poolkromme van *B* in *B* een *drievoudig punt* heeft.

Het blijkt dus, dat de basispunten geheel voldoen aan de eischen aan een punt $S_2^*$ gesteld. Dus:

*Het nulstelsel* $N^*$ $(1, 2n-2)$ *heeft* $3(n-1)^2$ *punten* $S_1$ *en* $n^2$ *punten* $S_2^*$.

Passen we er nu de in § 3 afgeleide uitkomsten op toe, dan vinden we:

De klasse van de omhulde $(n_{N_2})$ is $3n(n-2)$. Een straal $n_{N_2}$ is een stationaire raaklijn van een $C^n$. Dus:

*De stationaire raaklijnen der krommen van een bundel* $(C^n)$ *omhullen een kromme van de klasse* $3n(n-2)$.

Voor den graad van $(N_2)$ vinden we $6(n-1)$. $(N_2)$ is de inflexiekromme van den bundel. *De graad van de inflexiekromme is dus* $6(n-1)$.

Voor het aantal stralen met twee dubbele nulpunten vinden we $3(2n-5)(n^3-n^2-6n+4)$.

*Het aantal stralen, die twee maal stationaire raaklijn van een bundelkromme zijn, is* $3(2n-5)(n^3-n^2-6n+4)$.

Het aantal stralen met drievoudig, niet singulier, nulpunt is $6(3n-2)(n-3)$.

*Het aantal krommen met een undulatiepunt is dus*

$$6(3n-2)(n-3).$$

$(N_2)$ heeft in de punten $S_2^*$ drievoudige punten en dubbelpunten in de punten $S_1$ (VI § 3 en V § 1). De meervoudige punten van $(N_2)$ kunnen in een nulstelsel $(1, m)$ slechts in singuliere punten gelegen zijn, want een meervoudig punt van $(N_2)$ moet dubbel nulpunt op meer dan één nulstraal zijn. Hieruit volgt:

*De singuliere punten van de inflexiekromme zijn* $n^2$ *drievoudige punten in de basispunten en* $3(n-1)^2$ *dubbelpunten in de dubbelpunten der nodale bundelkrommen.*

In het nulstelsel $N^*$ $(1, 2n-2)$ bevat een rechte, die twee punten $S_2^*$ verbindt, vier nulpunten; een rechte, die een punt $S_2^*$ verbindt met een punt $S_1$, bevat drie nulpunten. Daar $m = 2n—2$ even is, zijn deze rechten singulier als $m = 2$, dus als $n = 2$. Elke rechte heeft dan tot nulpunten haar raakpunten met twee kegelsneden van een bundel. Het nulstelsel is dan een $N^*$ (1, 2). De vier basispunten van den kegelsnedenbundel zijn punten $S_2^*$; de drie dubbelpunten der ontaarde bundelkrommen zijn punten $S_1$. Daar op een verbindingslijn van twee basispunten steeds een dubbelpunt ligt, zijn er zes singuliere rechten, de zes verbindingslijnen der vier punten $S_2^*$, dus de zes zijden van een volledigen vierhoek.

## HOOFDSTUK VII.

**Nulstelsels, die door netten van algebraïsche krommen bepaald worden.**

§ 1. We beschouwen een algemeen net $[C^n]$ en veronderstellen, dat $n > 3$. Denken we aan een willekeurige rechte $a$. Een punt P van $a$ is basispunt van een tot $[C^n]$ behoorenden bundel $(C^n)$. In dezen bundel is in het algemeen slechts één kromme aanwezig, die in P aan $a$ raakt en dus $a$ nog in $n-2$ punten Q snijdt. We voegen in een verwantschap de punten Q aan P toe. Bij ieder punt P behooren $n-2$ punten Q. Beschouwen we nu een punt Q. Dit is basispunt van een bundel $(C^n)$, die alle met $a$ nog $n-1$, niet in Q gelegen punten gemeen hebben. Deze punten bepalen op $a$ een $I_{n-1}$, met $2n-4$ coïncidenties. Derhalve zijn aan ieder punt Q $2n-4$ punten P toegevoegd. De verwantschap tusschen de punten P en Q heeft $3n-6$ coïncidenties. Dus is $a$ in $3n-6$ punten I *stationaire raaklijn* van een netkromme. We voegen in een nulstelsel deze punten I aan $a$ als nulpunten toe. Daar in den bundel, die I tot basispunt heeft, drie krommen voorkomen, waarop I buigpunt is (de inflexiekromme van een bundel heeft een basispunt tot drievoudig punt, VI § 4), is I in het bezit van *drie nulstralen. Het nulstelsel is dus een N (3, 3n—6).* Daar in een algemeen net $[C^n]$ als $n > 3$ geen figuren voorkomen samengesteld uit een rechte en een $C^{n-1}$ en we bovendien onderstellen, dat het net $[C^n]$ geen basispunten heeft, zal het nulstelsel *geen singuliere stralen of singuliere punten bezitten.* We kunnen op dit nulstelsel dus de regels toepassen, die in hoofdstuk II zijn afgeleid. We vinden dan:

De klasse van $n_{N_2}$ is $3n(3n-7)$.
De graad van $(N_{n_2})$ is $6(2n-3)$.
De graad van $(N_2)$ is $3(7n-12)$.
De klasse van $(n_2)$ is $3(3n^2-7n+3)$.
De graad van de complementaire kromme is

$$3(3n-8)\,(3n^2-2n-3).$$

Het aantal stralen met twee dubbele nulpunten is

$$\tfrac{27}{2}\,(n+2)\,(n-1)\,(n-3)\,(3n-8).$$

Het aantal stralen met drievoudig nulpunt is $9(3n-8)\,(4n-5)$.

Punten met twee dubbele nulstralen kunnen niet voorkomen.

Het aantal punten met een drievoudigen nulstraal is

$$9(3n^2-9n+7).$$

De klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, is $6(9n^2-25n+18)$.
Het aantal punten $N_2^{n2}$ en het aantal stralen $n_2^{N2}$ is

$$18(n-2)\,(4n-5).$$

Het aantal punten $(N_2^{n.n}+N_2^{n2})$ is $3(57n^2-192n+168)$.
Het aantal stralen $(n_2^{N.N}+n_2^{N2})$ is

$$\tfrac{9}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,(9n^2-15n-1).$$

§ 2. Een dubbel nulpunt kan een *undulatiepunt* $U$ van een netkromme zijn; op de *vierpuntige raaklijn* $u$, die deze kromme in het punt $U$ bezit, zijn twee nulpunten in $U$ vereenigd. Tot de meetkundige plaats $(N_2)$ behoort dus de meetkundige plaats *$(U)$ der undulatiepunten* en tot de omhulde der stralen $(n_{N_2})$ zal de omhulde *$(u)$ der vierpuntige raaklijnen* behooren. We kunnen als volgt bewijzen, dat ook in de dubbelpunten $D$ der nodale krommen uit het net $[C^n]$ één straal een dubbel nulpunt bezit en dat deze straal de *basis-*

*raaklijn t* is, behoorende bij den door *D* bepaalden bundel ($C^n$).

In het begin van de vorige § is er opgewezen, dat de krommen van het net [$C^n$] op een willekeurige rechte *a* een verwantschap [2n – 4, n – 2] bepalen tusschen de punten P, waarin netkrommen met de rechte *a* twee samengevallen punten gemeen hebben en de overige $n-2$ punten Q, die ieder dier krommen nog met de rechte gemeen heeft. Is de beschouwde rechte een basisraaklijn *t* van een tot het net behoorenden bundel en is *D* het op *t* gelegen dubbele basispunt, dan is nog aan een punt P, dat niet in *D* gelegen is, een groep van $n-2$ punten Q toegevoegd. Aan een niet in *D* gelegen punt Q zijn nog 2n – 4 punten P toegevoegd. Daar de door Q bepaalde bundel ($C^n$) in het algemeen slechts één exemplaar door *D* zendt en alle door *D* gaande krommen in *D* twee samengevallen punten met *t* gemeen hebben, zal altijd een der tot eenzelfde groep behoorende punten P in *D* liggen. Projecteeren we nu de punten *P* door middel van een waaier ($O_1$), de punten Q door middel van een waaier ($O_2$), dan zijn ook de stralen $O_1$ P en $O_2$ Q door middel van een verwantschap, *de verwantschap I*, aan elkaar toegevoegd. Bepalen we den graad van de kromme *V*, die de meetkundige plaats is van de snijpunten der aan elkaar toegevoegde stralen uit beide waaiers.

Op een straal $O_2$ Q liggen 2n—4 punten van *V* in de snijpunten van $O_2$ Q met de aan $O_2$ Q toegevoegde stralen $O_1$ P. $O_2$ is een $(n-2)$-voudig punt van *V*, want de $n-2$ stralen $O_2$ Q, die aan den door $O_2$ gaanden straal $O_1$ P zijn toegevoegd, zullen dezen straal in $O_2$ snijden. *De graad van de kromme V is dus* $2n-4+n-2=3n-6$. Daar echter *D* tot alle groepen van punten P behoort, zal op iederen straal van den waaier ($O_2$) één punt van de kromme *V* gelegen zijn in het snijpunt van dien straal met $O_1$ D. De geheele rechte $O_1$ D maakt dus deel uit van $V$ en $V$ zal dus bestaan uit $O_1$ *D en een kromme* $V^1$*, waarvan de graad* $3n-7$ *is.* Deze kromme $V^1$ is de meetkundige plaats van de snijpunten der stralen $O_2$ Q van den waaier $(O_2)$ met de in een verwantschap, *de verwantschap II,* aan deze stralen toegevoegde groepen van $2n-5$ stralen $O_1$ P, die we verkrijgen door uit de tot dusver beschouwde groepen van $2n-4$ stralen $O_1$ P *één* maal den straal $O_1$ D te verwijderen. Beschouwen we in deze verwantschap den straal $O_2 Q = O_2 D$. $D$ is dubbel basispunt van een bundel $(C^n)$; de krommen van dezen bundel hebben alle met $t$ nog $n-2$ niet in $D$ gelegen punten gemeen, die op $t$ een $I_{n-2}$ vormen, die $2n-6$ coïncidenties bezit. Dus gaan er door $D$ $2n-6$ netkrommen, die, behalve in $D$, nog in een ander punt twee samengevallen punten met $t$ gemeen hebben. De aan $O_2$ D toegevoegde groep stralen $O_1$ P bevat dus $2n-6$ niet door $D$ gaande stralen. Daar de groep uit $2n-5$ stralen moet bestaan, zal de straal $O_1$ D er dus nog toe moeten behooren. Op den straal $O_2$ D zal dus in $D$ één punt van de kromme $V^1$ liggen. De kromme $V^1$ snijdt of raakt $t$ dus in $D$ en snijdt in het eerste geval $t$ verder nog in $3n-8$ punten, in het tweede geval in $3n-9$ punten. Dit zijn de niet in $D$ gelegen punten, waarin $t$ stationaire raaklijn van een netkromme is en dus nulpunten van $t$. Daar het aantal op $t$ gelegen nulpunten $3n-6$ moet zijn, moet $D$ *in het eerste geval dus een dubbel nulpunt zijn en t de daarbij behoorende straal* $n_{N_2}$*; in het tweede geval is D een drievoudig nulpunt met t tot straal* $n_{N_3}$.

§ 3. *De meetkundige plaats* $(N_2)$ *der dubbele nulpunten, die van den graad* $21n-36$ *is, bestaat dus uit:*

1°. *de kromme* $\Delta$ *van Jacobi, waarvan de graad* $3(n-1)$ *is,*

$2^0$. *de meetkundige plaats (U) der undulatiepunten, waarvan de graad dus $3(6n-11)$ is.*

De *dubbelpuntsraaklijnen d der nodale netkrommen, die een kromme van de klasse $3(n-1)(2n-3)$ omhullen (kromme van Zeuthen)*, behooren tot de stralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is en die een kromme van de klasse $54n^2-150n+108$ omhullen. Hieruit volgt, dat *de stralen, die stationaire raaklijn van een kromme $C^n$ zijn in een punt, waarin een andere netkromme een undulatiepunt bezit, een kromme omhulllen van de klasse*

$$54n^2-150n+108-6n^2+15n-9=48n^2-135n+99.$$

De nulkromme van een punt P is van den graad $3n-3$. Ze heeft met de kromme (U) $9(n-1)(6n-11)$ punten gemeen, waartoe er $48n^2-135n+99$ behooren, die, als undulatiepunt van een netkromme, de vierpuntige raaklijn niet door P zenden. Er blijven dus

$54n^2-153n+99-48n^2+135n-99=6n(n-3)$ punten over, die, als undulatiepunt van een netkromme, de vierpuntige raaklijn wel door P zenden.

*De omhulde (u) der vierpuntige raaklijnen is van de klasse $6n(n-3)$.*

En daar de stralen $n_{N_2}$, die een kromme van de klasse $3n(3n-7)$ omhullen, basisraaklijnen of vierpuntige raaklijnen zijn, volgt hieruit:

*De omhulde (t) der basisraaklijnen is van de klasse $3n(n-1)$.*

§ 4. In VII § 1 is voor den graad van de complementaire kromme gevonden $3(3n-8)(3n^2-2n-3)$. In een nulstelsel $N(n, m)$, zonder singuliere punten of rechten, kan men den graad van de complementaire kromme ook als volgt bepalen:

Als $p$ een willekeurige rechte is, dan is het aantal gemeenschappelijke raaklijnen van $(p)_{n+m}$ en de kromme $(n_{N_2})$ het product van de getallen, die de klasse van beide krommen bepalen. Dit aantal is dus ook het aantal stralen $n_{N_2}$, die een nulpunt op $p$ werpen. Tot dit aantal behooren er eenige, die een *dubbel* nulpunt op $p$ werpen; het aantal hiervan is de graad van $(N_2)$. Deze stralen moeten als gemeenschappelijke raaklijnen van $(p)_{n+m}$ en $(n_{N_2})$ twee maal geteld worden (II § 10). Trekt men hun aantal dus twee maal af van het eerste aantal, dan blijft er over het aantal stralen $n_{N_2}$, die een enkelvoudig nulpunt op $p$ werpen en dit geeft ons tevens den graad van de complementaire kromme. Bij een bepaalde meetkundige plaats $(N_2)$ behoort dus een complementaire kromme, waarvan de graad is:

$$(n+m) \times \{\text{klasse van } (n_{N_2})\} - 2 \times \{\text{graad van } (N_2)\}.$$

De meetkundige plaats $(N_2)$ van het nulstelsel $N(3, 3n-6)$ bestaat uit:

| | |
|---|---|
| $\Delta$ [graad $3(n-1)$], | (U) [graad $3(6n-11)$], |
| waarbij behoort als $(n_{N_2})$ | waarbij behoort als $(n_{N_2})$ |
| (t) [klasse $3n(n-1)$]. | (u) [klasse $6n(n-3)$]. |

Passen we op (U) en (u) bovenstaanden regel toe voor het vinden van den graad der complementaire kromme, dan vinden we $3(6n^3-24n^2+6n+22)$. $\Delta$ en (t) geven volgens denzelfden regel $3(n-1)(3n^2-3n-2)$.

*Bij (U) behoort een complementaire kromme, waarvan de graad $3(6n^3-24n^2+6n+22)$ is en bij $\Delta$ een complementaire kromme, waarvan de graad $3(n-1)(3n^2-3n-2)$ is.*

[De som van deze twee getallen is $3(3n-8)(3n^2-2n-3)$, de graad van de complementaire kromme, zooals die in VII § 1 is afgeleid.]

coïncidenties door stralen met twee dubbele nulpunten.

§ 5. Een volkomen overeenkomstige berekening als in II § 7 is uitgevoerd voor het algemeene nulstelsel $N$ $(n, m)$ zonder singuliere punten of rechten, kunnen we nu toepassen op:

1°. (U), (u) en de complementaire kromme van (U),

2°. $\Delta$, (t) en de complementaire kromme van $\Delta$.

We vinden achtereenvolgens voor de aantallen coïncidenties:

1°. $6(6n^3-24n^2+6n+22)(3n-9)-(3n-8)(3n-9)6n(n-3)= 18(n-1)(n-3)(3n^2-4n-22)$,

2°. $6(n-1)(3n^2-3n-2)(3n-9)-(3n-8)(3n-9)3n(n-1)= 9(n-1)(n-3)(3n^2+2n-4)$.

[De som van deze aantallen is $27(n+2)(n-1)(n-3)(3n-8)$, zie VII § 1.]

coïncidenties door stralen met drievoudig nulpunt.

§ 6. De berekening, zooals die geschied is in II § 8 voeren we uit met:

1°. (U), (u) en de complementaire kromme van (U),

2°. $\Delta$, (t) en de complementaire kromme van $\Delta$.

We vinden dan voor de aantallen coïncidenties:

1°. $(3n-8)\,3(6n-11)+3(6n^3-24n^2+6n+22)-6n(n-3)(3n-8)=3(7n-22)(4n-5)$,

2°. $(3n-8)\,3(n-1)+3(n-1)(3n^2-3n-2)-3n(n-1)(3n-8)= 6(n-1)(4n-5)$.

[De som van deze aantallen is $9(3n-8)(4n-5)$, zie VII § 1.]

coïncidenties door punten $N_2^{n2}$.

§ 7. We gaan het totale aantal punten $N_2^{n2}$ splitsen in het aantal op (U) gelegen punten $N_2^{n2}$ en het aantal op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$.

Uit een punt $N_2 = U$ vertrekt een nulstraal $n_{N_2} = u$ en nog twee nulstralen $n$, waarop $U$ een enkelvoudig nulpunt is. We voegen in een verwantschap aan het punt P, waarin $u$ een willekeurige rechte $l$ snijdt, de beide punten Q toe, waarin de nulstralen $n$ de rechte $l$ snijden. [De aan deze verwantschap duaal toegevoegde is in II § 11 gebruikt om het aantal stralen $n_2^{N2}$ af te leiden.] Daar de klasse der omhulde (u) 6n(n—3) is, zijn aan een punt P 12n(n—3) punten Q toegevoegd. Uit een punt Q vertrekken $48n^2-135n+99$ stralen, waarop een punt *U* enkelvoudig nulpunt is (VII § 3). Dus zijn aan een punt Q $48n^2-135n+99$ punten P toegevoegd. Van de $60n^2-171n+99$ coïncidenties vallen er 6(6n—11) in de 3(6n—11) op *l* gelegen punten *U*. Dan blijven er nog $60n^2-207n+165$ coïncidenties over. Dus:

1°. *Het aantal door op (U) gelegen punten $N_2^{n2}$ veroorzaakte coïncidenties is 3(5n—11) (4n—5).*

Voeren we dezelfde berekening uit met de op $\Delta$ gelegen punten $N_2 = D$, de basisraaklijn en de twee dubbelpuntsraaklijnen, dan vinden we $6n(n-1)+3(n-1)(2n-3)-6(n-1)=3(n-1)(4n-5)$.

2°. *Het aantal door op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$ veroorzaakte coïncidenties is 3(n—1) (4n—5).*

De som van deze aantallen is 18(n—2) (4n—5), zie VII § 1.]

coïncidenties door punten ($N_2^{n,n}+N_2^{n2}$).

§ 8. Op overeenkomstige wijze, als in II § 11 is geschied, gaan we het aantal op (U) gelegen punten ($N_2^{n,n}+N_2^{n2}$) bepalen. Aan een straal *p* zijn 2(3n—7) 3(6n—11) stralen *q* toegevoegd. Beschouwen we een straal *q*. De overige nulpunten van de stralen, die alle een nulpunt op *q* werpen, liggen op een kromme van den graad $(3n-3)^2-3=9n^2-18n+6$, die met (U) $3(6n-11)(9n^2-18n+6)$ punten gemeen heeft, waarvan $3(6n^3-24n^2+6n+22)$ gelegen zijn in punten *U*, waarvan de straal *u* een nulpunt op *q* werpt (VII § 4) en 3(6n—11) in de op *q* gelegen punten *U*. Dus zijn aan een straal *q* toegevoegd $3(48n^3-183n^2+222n-77)$ stralen *p*. Verminderen we het aantal coïncidenties met $(3n-7)(48n^2-135n+99)$, het aantal coïncidenties veroorzaakt door de door M gaande stralen, waarop een punt $U$ enkelvoudig nulpunt is (VII § 3), dan vinden we:

1°. *Het aantal door op* $(U)$ *gelegen punten* $(N_2^{n,n} + N_2^{n2})$ *veroorzaakte coïncidenties is* $6(50n^2-171n+154)$.

Gaan we op overeenkomstige wijze te werk met $\Delta$ en (t), dan vinden we:

$$2(3n-7)\,3(n-1)+3(n-1)\,(9n^2-18n+6)-3(n-1)\,(3n^2-3n-2)-3(n-1)-(3n-7)\,3(n-1)(2n-3)=42(n-1)(n-2).$$

2°. *Het aantal door op* $\Delta$ *gelegen punten* $(N_2^{n,n} + N_2^{n2})$ *veroorzaakte coïncidenties is* $42(n-1)\,(n-2)$.

[De som van deze aantallen is $3(114n^2-384n+336)$, zie VII § 1.]

§ 9. Gaan we de uitkomsten der § § 5, 6, 7, 8 thans met elkaar in verband brengen en er de beteekenis van opsporen. Daar de kromme van Jacobi van een net zonder basispunten geen dubbel- of keerpunten bezit, kunnen de op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$ en $N_2^{n,n}$ slechts gelegen zijn in de gemeenschappelijke punten van $\Delta$ en (U). Een der twee nulstralen, waarop het punt dubbel nulpunt is, is dan een basisraaklijn, de andere is een vierpuntige raaklijn. Hieruit volgt, dat ieder der op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$ tevens een der in § 7 (1°) berekende coïncidenties veroorzaakt. Het aantal der in § 7 (2°) berekende coïncidenties is gelijk aan het op $\Delta$ gelegen aantal punten $N_2^{n2}$. Daar deze zelfde punten ook ieder een coïncidentie bijdragen tot het in § 7 (1°) berekende aantal coïncidenties, zal het overige aantal der in § 7 (1°) berekende coïncidenties veroorzaakt worden door de op (U) gelegen punten $N_2^{n2}$, waarbij beide nulstralen, waarop $U$ dubbel nulpunt is, vierpuntige raaklijnen zijn. Ieder dier punten veroorzaakt één van deze coïncidenties. We vinden dus:

*Het aantal punten, waarin twee netkrommen een undulatiepunt bezitten met dezelfde vierpuntige raaklijn, is*

$$6(2n-5)\ (4n-5).$$

§ 10. *Het aantal op* $\Delta$ *gelegen punten* $N_2^{n2}$ *is* $3(n-1)$ $(4n-5)$. Deze, en ook de op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n,n}$, dragen ieder slechts één coïncidentie bij tot het in § 8 (2⁰) berekende aantal coïncidenties, daar slechts een der beide nulstralen, waarop het punt dubbel nulpunt is, een basisraaklijn is. Het in § 8 (2⁰) afgeleide aantal coïncidenties is gelijk aan het op $\Delta$ gelegen aantal punten $(N_2^{n,n} + N_2^{n2})$. Door aftrekking vinden we:

*Het aantal op* $\Delta$ *gelegen punten* $N_2^{n,n}$ *is* $3(n-1)(10n-23)$.

Zoo'n punt moet een dubbelpunt van een netkromme zijn, waarbij één der dubbelpuntsraaklijnen een vierpuntige raaklijn (oneigenlijk) vertegenwoordigt. Zoo'n punt is een *flecnodaalpunt*. *Het aantal krommen in het net, die een flecnodaalpunt bezitten, is* $3(n-1)\ (10n-23)$.

§ 11. Gaan we nu na, hoe het in § 8 (1⁰) afgeleide aantal coïncidenties ontstaat. Ieder op (U) gelegen punt $N_2^{n2}$, waarvan de samengevallen nulstralen beide vierpuntige raaklijnen zijn, zal twee dezer coïncidenties veroorzaken. Dit aantal coïncidenties is dus $12(2n-5)\ (4n-5)$. Ieder op $\Delta$ gelegen punt $N_2^{n2}$, zoowel als ieder op $\Delta$ gelegen punt $N_2^{n,n}$, zal één dezer coïncidenties veroorzaken, daar deze beide soorten punten slechts één vierpuntige raaklijn bezitten. Hierdoor ontstaan dus $3(n-1)\ (4n-5) + 3(n-1)\ (10n-23)$ coïncidenties. De overige coïncidenties worden (telkens twee tegelijk) veroorzaakt door op (U) gelegen punten $N_2^{n,n}$, waarbij de beide nulstralen, waarop *U* dubbel nulpunt is, vierpuntige raaklijnen zijn.

Het aantal dier punten is dus $^3/_2 \{ 100n^2 - 342n + 308 - 4(2n-5)\ (4n-5) - (n-1)\ (4n-5) - (n-1)\ (10n-23) \} = 27\,(3n^2 - 10n + 10)$.

*Het aantal punten, waarin twee netkrommen een undulatiepunt bezitten met verschillende vierpuntige raaklijnen, is*

$$27(3n^2 - 10n + 10).$$

En dus: *De undulatiepunten der krommen van een net* $[C^n]$ *zijn gelegen op een kromme van den graad* $3(6n-11)$ *met* $27(3n^2-10n+10)$ *dubbelpunten en* $6(2n-5)\ (4n-5)$ *keerpunten.*

§ 12. Bij de $3(n-1)\ (4n-5)$ op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$ moet de basisraaklijn met één der dubbelpuntsraaklijnen zijn samengevallen. Zoo'n punt is dan basispunt van een, in het net begrepen, bundel $(C^n)$, waarvan alle krommen in dit basispunt drie punten met elkaar gemeen hebben. Het punt is dan een drievoudig basispunt. Dus:

*Het net bezit* $3(n-1)\ (4n-5)$ *bundels, waarvan de krommen elkaar osculeeren.* Voor het totale aantal der volgens § 7 door punten $N_2^{n2}$ veroorzaakte coïncidenties hebben we $18(n-2)\ (4n-5)$ gevonden, welk aantal tevens het totale aantal punten $N_2^{n2}$ moet zijn (II § 11). Dit aantal hebben we gesplitst in $6(2n-5)\ (4n-5)$ op (U) gelegen punten $N_2^{n2}$ en $3(n-1)\ (4n-5)$ op (U) en $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$, die in het totale aantal twee maal begrepen zijn. Daar deze punten ieder twee coïncidenties veroorzaken en ieder punt $N_2^{n2}$ slechts aanleiding tot één coïncidentie geeft, volgt hieruit, dat deze punten *drievoudige nulpunten* moeten zijn.

§ 13. De gemeenschappelijke punten van $\Delta$ en (U) kunnen slechts gelegen zijn in de $3(n-1)\ (4n-5)$ op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$ en de $3(n-1)\ (10n-23)$ op $\Delta$ gelegen punten

$N_2^{n,n}$. Het aantal gemeenschappelijke punten van $\Delta$ en (U) is 3(n—1) 3(6n—11), waarvoor we kunnen schrijven:

$$2 \times 3\,(n-1)\,(4n-5) + 3(n-1)\,(10n-23).$$

*De flecnodale punten zijn dus snijpunten van $\Delta$ en (U); de drievoudige basispunten zijn raakpunten van $\Delta$ en (U). In deze 3(n—1) (4n—5) drievoudige basispunten hebben $\Delta$ en (U) dus 6(n—1) (4n—5) punten gemeen.*

§ 14. Beschouwen we nu het in § 6 ($2^0$) afgeleide aantal coïncidenties. Daar de basisraaklijn *t* altijd in het dubbelpunt *D* stationaire raaklijn van een netkromme is, zal, als op *t* in *D* een drievoudig nulpunt gelegen is, *t* in *D* vierpuntige raaklijn van een netkromme zijn. Maar dan is D tevens een undulatiepunt van een netkromme. Het aantal in § 6 ($2^0$) berekende coïncidenties is dus tevens begrepen in het in § 6($1^0$) afgeleide aantal coïncidenties. Hieruit volgt, dat 15(n—4) (4n—5) coïncidenties veroorzaakt worden door op (U) gelegen punten, die drievoudig nulpunt op een nulstraal *u* zijn. Dit zijn punten, waarin een netkromme een vijfpuntige raaklijn heeft. Dus: *In het net komen 15(n—4) (4n—5) krommen voor met een vijfpuntige raaklijn.*

De, bij de 6(n—1) (4n—5) in § 6 ($2^0$) afgeleide coïncidenties behoorende, drievoudige nulpunten moeten als punten van $\Delta$ en als punten van (U) beschouwd worden; zij behooren tot de gemeenschappelijke punten van beide krommen en zijn als zoodanig dus dubbelpunten van de meetkundige plaats ($N_2$) en moeten derhalve punten zijn, die op *twee* nulstralen drievoudig nulpunt zijn. Het zijn dus gemeenschappelijke punten van $\Delta$ en (U), die zelfs *twee samengevallen nulstralen* uitzenden (de basisraaklijn is tevens de vierpuntige raaklijn). Op deze *beide* samengevallen nulstralen is het punt dan een drievoudig nulpunt. De coïncidenties

zullen dus veroorzaakt worden door de $3(n-1)(4n-5)$ drievoudige basispunten, waarvan we reeds weten, dat ze de op $\Delta$ en (U) gelegen punten $N_3^{n2}$ zijn. Voor het totale aantal stralen met drievoudig nulpunt is gevonden $9(3n-8)(4n-5)$. Hiervoor kunnen we schrijven:
$15(n-4)(4n-5)+4\times 3(n-1)(4n-5)$. Dit zijn de vijfpuntige raaklijnen en de dubbele nulstralen der drievoudige basispunten. Ieder drievoudig basispunt levert dus vier coïncidenties van het totale aantal. Inderdaad zal een drievoudig basispunt, als punt van $\Delta$ beschouwd, op twee samengevallen nulstralen drievoudig nulpunt zijn en dus twee coïncidenties leveren; als punt van (U) beschouwd levert het nogmaals op twee samengevallen nulstralen twee coïncidenties.

§ 15. Beschouwen we nu nog de uitkomsten van § 5. De in § 5 ($2^0$) gevonden uitkomst levert het aantal malen, dat op een basisraaklijn $t$ een tweede dubbel nulpunt gelegen is. Is dit tweede dubbel nulpunt een dubbel basispunt met den beschouwden straal $t$ tot basisraaklijn, dan geeft deze basisraaklijn aanleiding tot twee coïncidenties; is het tweede dubbel nulpunt een undulatiepunt met $t$ tot vierpuntige raaklijn, dan geeft de basisraaklijn slechts aanleiding tot één der in § 5 ($2^0$) afgeleide coïncidenties. De beteekenis van dit aantal coïncidenties is dus:
*De som van tweemaal het aantal basisraaklijnen t, die in twee dubbele basispunten basisraaklijn zijn en het aantal basisraaklijnen, die in een niet in D gelegen punt U vierpuntige raaklijn van een netkromme zijn, is gelijk aan*

$$9(n-1)(n-3)(3n^2+2n-4).$$

En de beteekenis van het in § 5 ($1^0$) afgeleide aantal coïncidenties is:
*De som van tweemaal het aantal vierpuntige raaklijnen u,*

*die twee netkrommen in een undulatiepunt raken en het aantal vierpuntige raaklijnen, die bovendien in een niet in U gelegen punt D basisraaklijn zijn, is*

$$18(n-1)(n-3)(3n^2-4n-22).$$

We kunnen het aantal basisraaklijnen, die in een niet in *D* gelegen punt *U* vierpuntige raaklijn zijn, als volgt afleiden. In II § 2 is er op gewezen, dat de stralen met drievoudig nulpunt stationaire raaklijnen van de omhulde ($n_{N_2}$) zijn. *De 15(n—4) (4n—5) vijfpuntige raaklijnen van netkrommen zullen stationaire raaklijnen van de omhulde (u) zijn.* De bij de $3(n-1)(4n-5)$ drievoudige basispunten behoorende *tweevoudige nulstralen* zijn ieder in het bezit van een *drievoudig nulpunt* en zijn dus *stationaire raaklijnen van de omhulden (u) en (t)*. De krommen (t) en (u) hebben $3n(n-1)\ 6n(n-3) = 18n^2(n-1)(n-3)$ raaklijnen gemeen, waartoe de bovengenoemde $3(n-1)(4n-5)$ gemeenschappelijke stationaire raaklijnen behooren, die we viermaal moeten tellen. Dan blijven er nog $6(n-1)(3n^3-9n^2-8n+10)$ gemeenschappelijke raaklijnen over. Dit zijn basisraaklijnen, die in een niet in *D* gelegen punt vierpuntige raaklijn van een netkromme zijn. Met dit aantal moeten we dus de beide in § 5 afgeleide aantallen verminderen. Na deeling door twee vinden we dan:

*Het aantal basisraaklijnen, die in twee dubbelpunten basisraaklijn zijn, is* $^3/_2(n-1)(3n^3-3n^2-14n+16)$.

*Het aantal vierpuntige raaklijnen, die twee netkrommen in een undulatiepunt raken, is*

$$3(n-1)(6n^3-30n^2-22n+188).$$

*De basisraaklijnen omhullen dus een kromme van de klasse* $3n(n-1)$ *met* $^3/_2(n-1)(3n^3-3n^2-14n+16)$ *dubbelraaklijnen en* $3(n-1)(4n-5$ *stationaire raaklijnen.*

*De vierpuntige raaklijnen omhullen een kromme van de klasse $6n(n-3)$ met $3(n-1)(6n^3-30n^2-22n+188)$ dubbelraaklijnen en $9(2n-7)(4n-5)$ stationaire raaklijnen.*

§ 16. In VII § 1 is nog de graad van de meetkundige plaats ($N_{n_2}$) afgeleid en het aantal punten met drievoudigen nulstraal. In verband met II § 8 vinden we:

*De punten, die de eigenschap hebben, dat twee nulstralen zijn samengevallen, liggen op een kromme van den graad $6(2n-3)$, die $9(3n^2-9n+7)$ keerpunten en geen dubbelpunten bezit.*

Volgens VII § 1 omhullen de dubbele nulstralen een kromme van de klasse $3(3n^2-7n+3)$. De stralen $n_2^{N.N}$ zijn hiervan de dubbelraaklijnen, de stralen $n_2^{N2}$ de stationaire raaklijnen. In VII § 1 is voor het totale aantal stralen $(n_2^{N.N}+n_2^{N2})$ gevonden $^9/_2\,(n-1)(n-2)(9n^2-15n-1)$ en voor het totale aantal stralen $n_2^{N2}$: $18(n-2)(4n-5)$.

*Het totale aantal stralen $n_2^{N.N}$ is dus*
$^9/_2\,(n-2)\{(n-1)(9n^2-15n-1)-4(4n-5)\}=\,^9/_2\,(n-2)(9n^3-24n^2-2n+21)$, terwijl de $18(n-2)(4n-5)$ stralen $n_2^{N2}$ gevormd worden door $6(2n-5)(4n-5)$ *stralen* $n_2^{N2}$ [de stralen, die in een undulatiepunt vierpuntige raaklijn van twee netkrommen zijn] en $3(n-1)(4n-5)$ *stralen* $n_2^{N3}$, die ieder twee stralen $n_2^{N2}$ vervangen en dus vierpuntige raaklijnen van de omhulde der dubbele nulstralen zullen zijn. We vinden dus:

*De dubbele nulstralen omhullen een kromme van de klasse $3(3n^2-7n+3)$ met $^9/_2\,(n-2)(9n^3-24n^2-2n+21)$ dubbelraaklijnen, $6(2n-5)(4n-5)$ stationaire raaklijnen en $3(n-1)(4n-5)$ vierpuntige raaklijnen.*

§ 17. De meetkundige plaatsen $(N_{n_2})$ en $\Delta$ hebben 18(n—1) (2n—3) punten gemeen, waartoe de 3(n—1)(4n—5) drievoudige basispunten behooren, die punten $N_3^{n2}$ zijn en dubbel geteld moeten worden, omdat ze drievoudig nulpunt op den *dubbelen* nulstraal zijn. De overige 12(n—1) (n—2) gemeenschappelijke punten zijn dubbelpunten van netkrommen, die dubbel nulpunt op een enkelvoudigen nulstraal zijn en waarbij de dubbele nulstraal ontstaan is door het samenvallen van twee dubbelpuntsraaklijnen. Het zijn dus keerpunten van netkrommen.

*In een net zijn 12(n—1) (n—2) krommen met een keerpunt.*

$(N_{n_2})$ en (U) hebben 18(2n—3) (6n—11) punten gemeen, waartoe de 6(2n—5) (4n—5) op (U) gelegen punten behooren, waarin twee netkrommen dezelfde vierpuntige raaklijn bezitten en de 3(n—1) (4n—5) drievoudige basispunten, ieder, evenals de eerstgenoemde gemeenschappelijke punten, weer tweemaal te tellen.

*De overige $6(16n^2—21n+44)$ gemeenschappelijke punten zijn punten, die undulatiepunt van een netkromme zijn, terwijl twee andere netkrommen in dit punt dezelfde stationaire raaklijn bezitten.*

§ 18. We hebben in VII § 1 ondersteld, dat n < 3. Gaan we nu nog het geval *n = 3* beschouwen. De graad van de meetkundige plaats der dubbele nulpunten zal, als er geen singuliere rechten aanwezig zijn, 3(7n—12) = 27 zijn. De graad van de kromme van Jacobi is *zes*. Daar een rechte, die vier punten met een $C^3$ gemeen heeft, een bestanddeel van die kromme vormt, zal de meetkundige plaats der undulatiepunten, waarvan de graad 27—6 = 21 is, nu vervangen worden door *21 enkelvoudig singuliere rechten s*. We hebben dus een nulstelsel *N (3, 3) met 21 enkelvoudig singuliere rechten s.* We vinden dan (volgens V § 1):

De klasse van $(n_{N_2})$ is 18.
De graad van $(N_{n_2})$ is 18.
De graad van $(N_2)$ is 6.
De klasse van $(n_2)$ is 27.

Het aantal stralen met drievoudig nulpunt is nul.

Het aantal punten met drievoudigen nulstraal is 63.

De klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, is 18.

Het aantal punten $N_2^{n2}$ en het aantal stralen $n_2^{N2}$ is 42.

§ 19. Daar de meetkundige plaats der dubbele nulpunten slechts door $\Delta$ gevormd wordt, zullen alle stralen $n_{N2}$ basisraaklijnen zijn. Dus:

*De basisraaklijnen van een net* $[C^3]$ *omhullen een kromme van de klasse 18.*

Daar de klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, 18 is, vinden we: *De dubbelpuntsraaklijnen omhullen een kromme van de klasse 18(kromme van Zeuthen).*

§ 20. De kromme van Jacobi bezit geen dubbel- of keerpunten. Derhalve kunnen de op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n2}$ slechts punten zijn, waarin de dubbele nulstraal ontstaan is door samenvallen van een basisraaklijn met een singuliere rechte. *Er zijn op* $\Delta$ *dus 42 punten gelegen, die als punten* $N_2^{n2}$ *een singuliere rechte tot tweevoudigen nulstraal bezitten.* Daar deze punten verder nog slechts één enkelvoudigen nulstraal hebben, moet in zulk een punt *een netkromme in het bezit zijn van een dubbelpunt, waarvan de singuliere* *rechte een dubbelpuntsraaklijn en tevens de basisraaklijn van den door dit punt bepaalden, tot het net behoorenden, bundel is.* Zulk een punt is dan van dezen bundel een *drievoudig basispunt.*

*In het net zijn dus 42 bundels, waarvan de krommen elkaar in een basispunt osculeeren.*

§ 21. Berekenen we, volgens de tweede in IV § 9 en V § 1 gebruikte verwantschap, het aantal coïncidenties door punten $(N_2^{n,n} + N_2^{n^2})$ veroorzaakt, dan vinden we daarvoor 42. Deze coïncidenties kunnen slechts veroorzaakt worden door het op een nulstraal samenvallen van twee nulpunten in een punt, dat reeds dubbel nulpunt op een anderen nulstraal is, *waarbij deze laatste nulstraal niet singulier mag zijn.* (Bij het bepalen der kenmerkende getallen van de gebruikte verwantschap zijn we, zooals uit IV § 9 blijkt, uitgegaan van dubbele nulpunten, waarbij de er bij behoorende straal $n_{N_2}$ niet singulier is; immers voor den graad van $(N_2)$ is $n^2 + 2nm - n + m - r^2$ gebruikt.) De tweede nulstraal, waarop het punt dubbel nulpunt is, kan dus echter wel singulier zijn en zal, daar de kromme van Jacobi slechts enkelvoudige punten bezit, zelfs singulier moeten zijn. De 42 drievoudige basispunten zullen tot de 42 coïncidenties geen enkele bijdragen, daar ze slechts een singuliere rechte tot dubbelen nulstraal bezitten. De coïncidenties worden dus veroorzaakt door *42 op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n,n}$, waarbij de eene nulstraal $n_{N_2}$ singulier is en de andere niet. Hierbij zal de niet-singuliere nulstraal $n_{N_2}$ de basisraaklijn zijn. De singuliere rechte is een der dubbelpuntsraaklijnen van de netkromme, die in $N_2^{n,n}$ een dubbelpunt heeft.*

§ 22. De $6 \times 21$ gemeenschappelijke punten van $\Delta$ met de 21 singuliere rechten moeten gelegen zijn in de 42 drievoudige basispunten, die op $\Delta$ punten $N_2^{n^2}$ zijn, en in de 42 punten $N_2^{n,n}$. Op iedere singuliere rechte liggen twee dubbelpunten, die snijpunten zijn van de rechte met de kegelsnede, waarmee ze een tot het net behoorende kromme vormt. In deze punten is de, bij den door zoo'n punt bepaalden bundel behoorende, basisraaklijn niet de singuliere rechte. In de overige op een singuliere rechte *s* gelegen punten van $\Delta$ moet de singuliere rechte wel de basisraaklijn zijn, daar, als dit niet het geval was, de ontaarde netkromme, waarvan *s* een bestanddeel uitmaakt, niet *twee* samengevallen punten met de basisraaklijn gemeen zou hebben. We zien dus nu:

De 42 op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n,n}$ zijn gelegen op 21 singuliere rechten in de 21 × 2 *dubbelpunten van de door een singuliere rechte en een kegelsnede gevormde netkrommen*. Hierbij is de basisraaklijn niet de singuliere rechte. De 42 op $\Delta$ gelegen punten $N_2^{n^2}$ zijn gelegen op 21 singuliere rechten in de 21 × 2 *drievoudige basispunten*. Hierbij is de basisraaklijn tevens de singuliere rechte. Als gemeenschappelijke punten van $\Delta$ en een singuliere rechte moeten deze punten tweemaal geteld worden. Dus zal $\Delta$ iedere singuliere rechte in deze punten raken.

*De 21 singuliere rechten zijn dubbelraaklijnen van de kromme van Jacobi. De zes gemeenschappelijke punten van de kromme van Jacobi en een singuliere rechte zijn dus: twee enkelvoudige snijpunten in de twee dubbelpunten van de door de rechte bepaalde ontaarde netkromme en twee raakpunten in de twee op de rechte gelegen drievoudige basispunten.*

§ 23. Volgens IV § 8 en V § 1 zouden we vinden, dat de omhulde der basisraaklijnen, dat is de omhulde $(n_{N_2})$, iedere singuliere rechte tot viervoudige raaklijn heeft. Dit zou dan beteekenen, dat iedere singuliere rechte in vier van haar punten basisraaklijn is. Daar ze echter slechts in twee punten basisraaklijn is (in de drievoudige basispunten), kan ze slechts in twee punten een raaklijn van $(n_{N_2})$ zijn. In die punten is ze dan een stationaire raaklijn. Daar er geen stralen met twee dubbele nulpunten en geen stralen met drievoudig nulpunt zijn, vinden we dus:

*De basisraaklijnen omhullen een kromme van de klasse 18, die de 21 singuliere rechten, ieder in twee punten, tot stationaire raaklijnen heeft.*

§ 24. In VII § 18 is nog de graad van $(N_{n_2})$ en het aantal punten met drievoudigen nulstraal afgeleid. Daaruit volgt: *De punten, die de eigenschap hebben, dat twee nulstralen zijn samengevallen, liggen op een kromme van den graad 18 met 63 keerpunten en geen dubbelpunten.*

De dubbele nulstralen omhullen een kromme van de klasse 27. Deze kromme zal, volgens IV § 8 en V § 1, iedere singuliere rechte tot viervoudige raaklijn bezitten. Daar iedere singuliere rechte slechts van twee drievoudige basispunten een dubbele nulstraal is, kan ze $(n_2)$ slechts in twee punten raken en moet ze in die punten een stationaire raaklijn van $(n_2)$ zijn.

Bij de berekening van het aantal stralen $(n_2^{N,N} + n_2^{N2})$ vinden we 294 coïncidenties der gebruikte verwantschap. Deze coïncidenties ontstaan als een der overige nulstralen van een nulpunt, dat een dubbelen nulstraal tot enkelvoudigen nulstraal heeft, met dezen dubbelen nulstraal is samengevallen. Hierbij kan deze dubbele nulstraal wel een singuliere rechte zijn, want de enkelvoudig singuliere rechten zijn ieder van twee drievoudige basispunten dubbele nulstraal. Ieder drievoudig basispunt veroorzaakt twee coïncidenties. De overige 210 coïncidenties moeten geleverd worden door 105 stralen $n_2^{N,N}$. Deze stralen moeten dubbelraaklijnen van de omhulde $(n_2)$ zijn.

*De dubbele nulstralen omhullen een kromme van de klasse 27 met 105 niet-singuliere dubbelraaklijnen en met de 21 singuliere rechten, ieder in twee punten, tot stationaire raaklijnen.*

Het aantal gemeenschappelijke punten van $(N_{n_2})$ en $\Delta$ is $6 \times 18 = 108$. Hiertoe behooren de 42 drievoudige basispunten, die dubbel geteld moeten worden, daar zoo'n punt als dubbel nulpunt op *s*, den dubbelen nulstraal, beschouwd kan worden. De overige 24 gemeenschappelijke punten zijn punten, die dubbel nulpunt op een enkelvoudigen nulstraal zijn en waarbij de dubbele nulstraal is ontstaan door het samenvallen van twee dubbelpuntsraaklijnen. Dus:

*In het net zijn 24 krommen met een keerpunt.*

§ 25. Het net $[C^3]$ van kubische krommen geeft nog aanleiding tot een ander nulstelsel. De netkrommen bepalen op een willekeurige rechte een involutie $I_3^2$ van den derden graad en den tweeden rang, die een *neutraal puntenpaar* bezit, dus twee punten, die met elk punt van de rechte een groep der $I_3^2$ vormen en die dus *twee basispunten* vormen van een in het net $[C^3]$ begrepen bundel. Deze basispunten *B* voegen we aan de rechte als nulpunten toe. Daar een willekeurig punt *B* slechts één bundel $(C^3)$ bepaalt, worden aan *B* als nulstralen toegevoegd de acht rechten *b*, die *B* met de overige basispunten van den door *B* bepaalden bundel verbinden. Het nulstelsel is dus een $N$ (8, 2). Als we onderstellen, dat het net $[C^3]$ geen basispunten bezit, zal $N$ (8, 2) geen singuliere punten hebben. De meetkundige plaats der dubbele nulpunten in dit nulstelsel is de kromme van Jacobi; de omhulde der stralen $n_{N_2}$ is de omhulde der basisraaklijnen. De 21 rechten, die tot de ontaarde netkrommen behooren, zullen singuliere rechten zijn. Daar we, als we geen singuliere rechten in rekening brengen, voor den graad van $(N_2)$ 90 vinden, volgt hieruit, dat de singuliere rechten ieder *tweevoudig singulier* moeten zijn. Dan wordt de graad van $(N_2)$: $90-21 \times 4=6$ (de graad van de kromme van Jacobi).

Voor de klasse van $(n_{N_2})$ vinden we 18. Dit is weer de klasse van de omhulde der basisraaklijnen.

Voor de klasse van de omhulde der nulstralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, vinden we 18, de klasse van de omhulde der dubbelpuntsraaklijnen (de kromme van Zeuthen).

Verder vinden we:

De stralen $n_2$ omhullen een kromme van de klasse 42; de stralen, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is, omhullen ook een kromme van de klasse 42. Deze overeenkomst in klasse is geen toeval, daar, zooals we zullen zien, de beide krommen samenvallen. Als een basispunt B in het bezit is van een *dubbelen* nulstraal $n_2$, dan moeten er op $n_2$ nog *twee* basispunten van den door $B$ bepaalden bundel liggen. Daar slechts op een singuliere rechte drie *niet* samenvallende basispunten van eenzelfden bundel kunnen liggen, moeten twee van de drie op $n_2$ gelegen basispunten zijn samengevallen tot een dubbel basispunt, waarbij echter $n_2$ niet de basisraaklijn kan zijn, daar ook in dit geval $n_2$ een singuliere rechte zou zijn. En dubbele nulstraal is dus een verbindingslijn van een der zeven aan een dubbel basispunt toegevoegde enkelvoudige basispunten met het bijbehoorende dubbele basispunt. Het is dus tevens een straal, waarop een dubbel nulpunt enkelvoudig nulpunt is. Dus: *De verbindingingslijnen van een dubbel basispunt met de zeven er aan toegevoegde enkelvoudige basispunten omhullen een kromme van de klasse 42.*

Voor het aantal punten met drievoudigen nulstraal vinden we 336. Tot de drievoudige nulstralen kunnen singuliere rechten behooren, die, daar ze voor ieder harer punten twee nulstralen vertegenwoordigen, dus punten kunnen bevatten, die de singuliere rechte tot drievoudigen nulstraal hebben. Op een drievoudigen nulstraal moeten *vier* basispunten liggen, waarvan er minstens twee moeten samenvallen. Vallen op een drievoudigen nulstraal twee basispunten samen, dan is de drievoudige nulstraal een singuliere rechte, die van de twee, tot de groep van vier behoorende niet samengevallen basispunten een drievoudige nulstraal is. Dit is het geval met twee enkelvoudige op een singuliere rechte gelegen basispunten, die behooren bij een bundel, waarvan twee basispunten zijn samengevallen in een op de singuliere rechte gelegen dubbelpunt van de ontaarde kromme, waarvan de singuliere rechte een bestanddeel is. Op iedere singuliere rechte liggen vier dergelijke punten. *Dus is ze van vier harer punten een drievoudige nulstraal.* De 21 singuliere rechten tellen dus voor 84 stralen $n_3$. De overige 252 drievoudige nulstralen moeten stralen zijn, waarop drie nulpunten zijn samengevallen tot een drievoudig basispunt. Aan ieder dier drievoudige basispunten zijn zes tot denzelfden bundel behoorende basispunten toegevoegd, die ieder één drievoudigen nulstraal bezitten.

*Voor het aantal drievoudige basispunten vinden we dus weer 42.*

Voor den graad van ($N_{n_2}$) vinden we 42. Deze kromme heeft de punten met niet-singulieren, drievoudigen nulstraal tot *keerpunten*. Dat zijn de *42 zestallen van basispunten, die aan de drievoudige basispunten zijn toegevoegd.*

Voor het aantal punten met twee dubbele nulstralen vinden we 1050. Het aantal coïncidenties der bij de berekening gebruikte verwantschap is dus 2100.

Als een nulpunt in het bezit is van twee dubbele nulstralen, dan is het een der vijf enkelvoudige basispunten van een bundel, die *twee dubbele basispunten* bezit. In ieder der twee dubbele basispunten komen vijf van deze dubbele nulstralen samen. Noemen we de enkelvoudige basispunten $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, de dubbele basispunten $B_{6,7}$ en $B_{8,9}$. Beschouwen we den nulstraal $B_1 B_{6,7}$ als een dubbelen nulstraal van zijn nulpunt $B_1$, dan worden in de bij de berekening gebruikte verwantschap aan dezen straal toegevoegd de nulstralen, die $B_1$ verbinden met $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_8$ en $B_9$. Het samenvallen van de nulstralen $B_1 B_8$ en $B_1 B_9$ levert een coïncidentie, waarmee echter tevens het samenvallen der twee basispunten $B_8$ en $B_9$ gepaard gaat. Als gevolg daarvan ontstaan de coïncidenties der stralen $B_2 B_8$ met $B_2 B_9$, $B_3 B_8$ met $B_3 B_9$, $B_4 B_8$ met $B_4 B_9$ en $B_5 B_8$ met $B_5 B_9$. Uitgaande van den nulstraal $B_1 B_{6,7}$ vinden we dus vijf coïncidenties. Eveneens zullen de overige vier in $B_{6,7}$ samenkomende dubbele nulstralen ieder vijf coïncidenties leveren. In het geheel leveren twee bij elkaar behoorende dubbele basispunten dus 25 coïncidenties. Het totale aantal 2100 coïncidenties wordt dus veroorzaakt door 84 paren van dubbele basispunten. *Het net bevat dus 84 bundels, waarvan de krommen elkaar in twee basispunten raken.*

De 84 vijftallen van enkelvoudige basispunten, die aan deze paren gekoppelde dubbele basispunten zijn toegevoegd, zijn dubbelpunten van ($N_{n_2}$). Derhalve:

*De zeventallen van basispunten, die aan de dubbele basispunten zijn toegevoegd, liggen op een kromme* ($N_{n_2}$) *van den graad 42, met 252 keerpunten [in de aan de drievoudige basispunten toegevoegde enkelvoudige basispunten], en 420 dubbelpunten [in de aan de paren van gekoppelde basispunten toegevoegde enkelvoudige basispunten].*

Voor het aantal punten $N_2^{n^2}$ en stralen $n_2^{N2}$ vinden we 84. Deze worden vertegenwoordigd door de $21 \times 4$ punten, die een singuliere rechte tot drievoudigen nulstraal hebben.

Gaan we het aantal punten $(N_2^{n,n} + N_2^{n2})$ opsporen, dan vinden we 42 coïncidenties der gebruikte verwantschap. Op iedere singuliere rechte liggen twee dubbelpunten van de ontaarde netkromme, waartoe de rechte behoort. Deze punten zijn dubbel nulpunt op de niet met de singuliere rechte samenvallende basisraaklijn en zijn verder nog in het bezit van een nulstraal, de singuliere rechte, die geheel uit nulpunten bestaat. Het zijn dus punten $N_2^{n,n}$, waarbij één der nulstralen $n_{N_2}$ niet singulier is (zie VII § 21). Ieder dier punten veroorzaakt echter slechts één coïncidentie. De 42 punten $N_2^{n,n}$ zijn dus gelegen in de $21 \times 2$ dubbelpunten der ontaarde krommen.

Voor het aantal coïncidenties, geleverd door stralen $(n_2^{N,N} + n_2^{N2})$, vinden we 504. Hiervan wordt een gedeelte veroorzaakt door de 84 paren gekoppelde dubbele basispunten. De verbindingslijn van twee bij elkaar behoorende dubbele basispunten is dubbele nulstraal van de beide dubbele basispunten. Ieder der *twee* in eenzelfde dubbel basispunt gelegen basispunten zal met de *beide* in het andere dubbele basispunt gelegen basispunten een coïncidentie leveren. Ieder paar dubbele basispunten veroorzaakt dus vier coïncidenties. Zoo vinden we er dus reeds 336. De overige 168 coïncidenties worden geleverd door de $21 \times 4$, bij de dubbelpunten der ontaarde netkrommen behoorende, op een singuliere rechte gelegen, enkelvoudige basispunten. De vier, op een zelfde singuliere rechte gelegen, enkelvoudige basispunten kunnen we ieder als een *dubbel* nulpunt beschouwen, terwijl zij allen de singuliere rechte tot *drievoudigen nulstraal* hebben. Iedere singuliere rechte levert dus acht van deze coïncidenties.

h.9700.

## STELLINGEN.

I.

Een nulstelsel ($n$, o) is in het bezit van een oneindig aantal singuliere rechten, de raaklijnen van een kromme der klasse $n$; een nulstelsel (o, $m$) bezit een oneindig aantal singuliere punten, die op een kromme van den graad $m$ gelegen zijn.

II.

Er zijn voorbeelden aan te wijzen van niet-lineaire nulstelsels, waarbij de meervoudig singuliere punten eigenschappen bezitten, overeenkomende met die van de singuliere punten $S_2^*$.

(Diss. VI § 2.)

III.

Bij de bepaling der klasse van de omhulde der harmonische poollijnen is door Dr. Jan de Vries niet opgemerkt, dat in ieder der punten $D_h$ twee takken der kromme $\varepsilon_*^{12}$ aan de beide takken der kromme $\iota^{12}$ raken.

(Jan de Vries. „De quadrupelinvolutie der cotangentiale punten van een kubischen bundel". K. A. v. W, XXII, bl. 1385.)

IV.

Door Dr. Jan de Vries is bij de bepaling der klasse van de omhulde der raaklijnen in de keerpunten van den complex over het hoofd gezien, dat de krommen $(D)_P$ en $(D)_Q$ ook de $6(n-1)^2$ kritische punten gemeen hebben.

(Jan de Vries. „Kenmerkende getallen voor een drievoudig oneindig stelsel algebraïsche vlakke krommen". K. A. v. W, XXIII, bl. 907.)

V.

De door Dr. Jan de Vries in zijne mededeeling „Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen" (K. A. v. W, XIII, bl. 751 § 5) bepaalde aantallen $t_4$ en $t_{3,2}$ zijn te groot.

VI.

Het is niet geoorloofd een punt te beschouwen als een cirkel, waarvan de straal nul is.

VII.

De afleiding van E. Goursat der noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het lineair afhankelijk zijn van *n* functie's $y_1$ (x), $y_2$ (x), . . . . . , $y_n$ (x) is niet volledig.

(E. Goursat. „Cours d'Analyse Mathématique." T. II, p. 424. 3ième édition.)

VIII.

Ten onrechte beweert J. Bertrand, dat de oplossing van het in „Calcul des Probabilités", § 29 p. 30, gestelde vraagstuk gevonden moet worden door toepassing van den regel der samengestelde waarschijnlijkheid.

IX.

Het bepalen der brekende hoeken van eenige achter en tegen elkaar geplaatste prisma's met gegeven brekingsindices door de voorwaarden, dat de lichtstraal, die met minimumdeviatie het stelsel verlaat, in ieder prisma de hierbij behoorende kleinste afwijking zal vertoonen, is slechts mogelijk, indien het aantal prisma's oneven is en hun brekingsaanwijzers aan zekere voorwaarden voldoen.

X.

Bij het Middelbaar- en Voorbereidend Hooger Onderwijs worden de leerlingen niet voldoende geoefend in zelfcritiek.