Afbeelding van de lijnelementen van een vlak op den complex der raaklijnen van een monoïde

https://hdl.handle.net/1874/289926

AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN VAN EEN VLAK OP DEN COMPLEX DER RAAKLIJNEN VAN EEN MONOÏDE

A. J. VAN DITMARSCH

AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN VAN EEN VLAK OP DEN COMPLEX DER RAAKLIJNEN VAN EEN MONOÏDE.

Diss. Utrecht 1928

AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN VAN EEN VLAK OP DEN COMPLEX DER RAAKLIJNEN VAN EEN MONOÏDE.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN **DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE** AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Dr. B. J. H. OVINK, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 9 JULI 1928, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

ANTHONIE JOHANNES VAN DITMARSCH
GEBOREN TE UTRECHT

NAUTA & Co. — ZUTPHEN

Aan mijn Ouders.

Bij het eindigen van mijn academische studie betuig ik mijn oprechten dank aan U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor het onderricht, hetwelk ik van U heb mogen ontvangen.

Allereerst geldt mijn dank U, Hooggeleerde DE VRIES, *Hooggeachte Promotor, voor de welwillendheid, die gij bij het bewerken van dit proefschrift hebt betoond en voor de moeite, die gij U voor mij hebt getroost. Ik gevoel mij aan U zeer verplicht voor de vriendelijke en aanmoedigende wijze, waarop gij mij, toen ik mij om hulp tot U wendde, zijt tegemoet gekomen. Ook uw welverzorgde en leerrijke colleges zal ik mij steeds dankbaar blijven herinneren.*

Ook jegens U, Hooggeleerde ORNSTEIN, *gevoel ik mij zeer verplicht. Uw vriendelijke hulpvaardigheid, welke ik bij mijn studie op het Physisch Laboratorium mocht ontvangen, zal ik nooit vergeten.*

U, Zeergeleerde BURGER, *dank voor den vriendelijken raad en bereidwillige hulp, welke ik van U nooit vergeefs heb gevraagd.*

HOOFDSTUK I.

§ *1*. *Definitie van de afbeelding*. Om een afbeelding te krijgen van de lijnelementen van een vlak α op de raaklijnen van een *monoïde* M van den graad n met $(n-1)$-voudig punt O kunnen we als volgt te werk gaan.

Een lijnelement (P, l) van α bestaat uit een lijn l en een punt P, die incident zijn. We noemen het snijpunt van M met de rechte, die P uit O projecteert, R.

Zij r de doorsnee van het raakvlak ϱ in R met het vlak, dat l uit O projecteert, dan beschouwen we r als het beeld van (P, l).

Is, omgekeerd, r een willekeurige raaklijn van M, R het raakpunt, l de doorsnee van α met het vlak (O, r), P de projectie van R, dan is (P, l) het beeld van r.

§ *2*. In het algemeen is de verwantschap omkeerbaar eenduidig. Zijn n.l. P en l gegeven, dan bestaat er slechts *één* verbindingsvlak (O, l) en *één* verbindingsrechte OP en ook in het algemeen *één* snijpunt van OP met M, omdat M een monoïde is. Dus is R eenduidig bepaald; hierbij behoort in het algemeen één raakvlak, dus is *r* eveneens eenduidig bepaald.

Is omgekeerd *r* een gegeven raaklijn van *M*, R het raakpunt, dan is er in het algemeen slechts *één* verbindingslijn OR, als ook *één* verbindingsvlak (O, *r*).

We vinden dus in het algemeen één snijpunt van OR met α en *één* snijlijn van (O, *r*) met α.

P is dus, evenals *l*, in het algemeen eenduidig bepaald.

Uitzonderingen. Op een monoïde van den graad *n* liggen *n* (*n*—1) (in het algemeen verschillende) rechten, die door den top O gaan. De snijpunten van α met deze *n* (*n*—1) rechten noemen we A_1, A_2............ $A_{n(n-1)}$.

Wanneer P met een punt *A* samenvalt, dan ligt de verbindingslijn OP (of OA) op het oppervlak *M* en het snijpunt van OP met M is onbepaald; R kan dus elk willekeurig punt van de rechte OA zijn en het raakvlak ϱ een willekeurig vlak door OA.

We verkrijgen *r* als doorsnede van het vlak (O, *l*) met een willekeurig vlak door OA.

Het vlak (O, *l*) snijdt M volgens de rechte OA en een kromme van den graad (*n*—1), die in O een (*n*—2)-voudig punt heeft. Deze kromme c^{n-1} wordt door de lijn OA, behalve in het punt O, nog gesneden in het enkelvoudige punt R.

Denken we ons nu een bepaalde rechte *l* door A. Nadert een punt P van *l* meer en meer tot het punt A, dan zal het beeld op de monoïde meer en meer naderen tot het zooeven genoemde punt R. Valt P met A samen, dan valt ten slotte het beeld van P met R samen en elke rechte door R, die c^{n-1} snijdt, is raaklijn van M en is als beeld te beschouwen van het lijnelement (A, *l*) en omgekeerd wordt de geheele waaier dier raaklijnen afgebeeld op (A, *l*).

Met den waaier om A komt dus een parabolische bilineaire congruentie, [1, 1] overeen.

Wanneer P een punt van de kromme k^{n-1} is volgens welke α gesneden wordt door den raakkegel van O, dan zal het overeenkomstige punt R met O samenvallen.

Indien nu *elke* rechte door O als (oneigenlijke) raaklijn wordt beschouwd, is het raakvlak in O onbepaald en elke willekeurige rechte door O in vlak (O, *l*) is als beeld van het lijnelement (P, *l*) te nemen.

Elk punt van de kromme k^{n-1} is dus singulier.

Gaat *r* door O, dan is het vlak door O en *r* onbepaald en wanneer R in O valt, is het bijbehoorende punt P een punt van de kromme k^{n-1}, zoodat het lijnelement (R, *r*) afgebeeld wordt door (P, *l*) een willekeurige rechte *l* door P, een willekeurig punt op k^{n-1}.

Voor de n(n—1) rechten OA, die op te vatten zijn als lijnen *r* door O, ligt het punt R willekeurig hierop en zoo R niet met O samenvalt, komt P in eenig punt *A* terecht.

§ *3*. Het beeld van een waaier in α is een waaier van raaklijnen.

Het beeld van de lijnelementen op een rechte *l* bestaat uit de raaklijnen getrokken aan de kromme, waarin M gesneden wordt het vlak (O, l).

We beschouwen een stelsel lijnelementen, waarvan P op een rechte c ligt, terwijl l door een punt D gaat. Het punt R doorloopt een kromme γ^n met $(n-1)$-voudig punt O n.l. de doorsnee van M met het vlak (O, c), terwijl het vlak (O, l) om de rechte OD draait. De lijnen r beschrijven dus een regelvlak Γ, dat OD tot richtlijn heeft.

Om het aantal raakvlakken van M in punten van γ^n te bepalen, die door een willekeurig punt gaan, merken we op, dat dit aantal niet verandert, als we het punt in het vlak van γ^n nemen; dat dit aantal dus gelijk is aan de klasse van γ^n, welke $2(n-1)$ bedraagt.

Contrôle: Het pooloppervlak van een willekeurig punt is een monoïde M^{n-1} met $(n-2)$-voudig punt O. Dit snijdt γ^n buiten O in $n(n-1)-(n-1)(n-2)=2(n-1)$ punten R.

Hieruit volgt, dat OD een $2(n-1)$-voudige richtlijn is, want bij elk raakvlak, door een punt van OD behoort één vlak (O, l). Verder ligt in elk vlak door OD nog slechts één beschrijvende van het regelvlak. Immers een willekeurig vlak δ door OD snijdt c in *één* punt P, waarvan het beeld R op γ^n ligt. Het in dit punt aangebrachte raakvlak ϱ snijdt het vlak δ volgens een lijn r, die tot het regelvlak behoort.

Het regelvlak Γ heeft dus de graad

$$2\,(n-1)+1=2\,n-1$$

De doorsnede van het regeloppervlak Γ met het vlak (O, c) bestaat, behalve uit γ^n, uit $(n-1)$ raaklijnen in O aan γ^n.

De raakkegel in den top O aan de monoïde, welke kegel van den graad (n—1) is, wordt door de rechte c in (n—1) punten gesneden en de lijnelementen, waarvoor deze snijpunten de punten P zijn, hebben de bovengenoemde raaklijnen tot beeld.

§ *4*. Zij gegeven een stelsel (λ, π) van lijnelementen, waarvan de punten P op een kromme van den graad π liggen en de rechten l een kromme van de klasse λ omhullen.

De kromme (P) wordt uit O geprojecteerd door een kegel van den graad π, die M snijdt volgens een kromme van den graad $n\,\pi$ met een π(n—1)-voudig punt in O.

Het pooloppervlak van een willekeurig punt X is van den graad (n—1) en heeft in O een (n—2)-voudig punt, snijdt dus de bovengenoemde kromme van den graad $n\,\pi$, buiten O, in $(n-1)\,\pi - (n-2)(n-1)\,\pi = 2(n-1)\,\pi$ punten. Dus omhullen de raakvlakken ϱ in de punten R dier kromme een oppervlak van de klasse $2\,(n-1)\,\pi$.

Beschouw nu de verwantschap tusschen de punten IJ en Z, welke twee bij elkaar behoorende vlakken ϱ en (O, l) op een rechte u insnijden. Door *IJ* gaan $2\,(n-1)\,\pi$ vlakken ϱ, zoodat aan IJ evenzoovele punten Z zijn toegevoegd.

Door Z, dus door O Z, gaan λ vlakken (O, l). Elke coincidentie IJ $\equiv$ Z levert een op u gelegen snijpunt van ϱ met

(O, l), dus een op u rustende raaklijn r. Bijgevolg is (λ, π) de afbeelding van een regelvlak van den graad

$$\lambda + 2\,(n-1)\,\pi.$$

§ 5. Zij gegeven een nulstelsel $N(\mu, \nu)$ dan kan men vragen naar de meetkundige plaats van de nulpunten der stralen van een waaier om een punt A. Een willekeurige rechte door A bevat buiten dit punt ν nulpunten, maar A zelf is voor μ stralen nulpunt, zoodat de graad van de meetkundige plaats, de z.g. nulkromme, van den graad $(\mu + \nu)$ is met μ-voudig punt A. De lijnelementen in dien waaier vormen dus een stelsel $(1, \mu + \nu)$

Een nulstelsel $N(\mu, \nu)$ wordt afgebeeld door een stralencongruentie [r] van raaklijnen van M. We bepalen den veldgraad (het aantal rechten in een willekeurig vlak) en den stergraad (het aantal rechten door een punt).

Den stergraad bepalen we als volgt:

Is B een willekeurig punt van de ruimte, dan vormen de raakpunten van de raaklijnen uit B een kromme lijn van den graad $n\,(n-1)$, die in O een $(n-1)(n-2)$-voudig punt bezit en dus uit O op α geprojecteerd wordt in een kromme lijn van den graad

$$n(n-1) - (n-1)(n-2) = 2(n-1).$$

Zij B' de projectie van B uit O, dan beschouwen we de nulkromme van B', een kromme van den graad $(\mu + \nu)$. Deze heeft met de kromme van den graad $2(n-1)$ gemeen $2\,(n-1)\,(\mu + \nu)$ punten; dit is ook het aantal lijnen van de congruentie door B m.a.w. de stergraad van de congruentie.

We bepalen nu den veldgraad, d.i. het aantal stralen van de congruentie in een willekeurig vlak V.

Die stralen moeten dus raaklijnen zijn aan de kromme lijn, volgens welke V de monoïde snijdt. Het stelsel raaklijnen van die doorsnijdingskromme beantwoordt aan een stelsel lijnelementen in α, gevormd door de raaklijnen met raakpunten van een kromme lijn van den n *en* graad m.a.w. een stelsel $\{n(n-1), n\}$. Dit stelsel heeft met het gegeven nulstelsel gemeen

$$\mu\, n\,(n-1) + \nu\, n \text{ lijnelementen}$$ [1]

De afbeelding van een nulstelsel N (μ, ν) is dus een congruentie $[2(n-1)((\mu+\nu); \mu\, n(n-1) + \nu\, n]$.

Een bilineair nulstelsel N (1, 1) wordt dus afgebeeld door een congruentie

$$[4\,(n\text{-}1);\, n\,(n\text{-}1) + n] = [4\,(n\text{-}1),\, n^2]$$

Zoo'n nulstelsel heeft drie singuliere punten S_1, S_2 en S_3; [2] daarmee komen overeen op de monoïde drie punten R_1, R_2 en R_3 met bijbehoorende waaiers (r_1), (r_2), (r_3), zoodat R_1, R_2 en R_3 singuliere punten van de congruentie zijn.

§ *6.* We kunnen omgekeerd nagaan wat in het vlak α overeenkomt met een gegeven stelsel van raaklijnen der monoïde.

[1]) Zie G. Schaake. Afbeeldingen van figuren op de punten eener lineaire ruimte. Acad. proefschrift 1922. Blz. 10.

[2]) Vgl. Dr. Jan de Vries: Vlakke lineaire nulstelsels. Verslagen Kon. Acad. van Wetenschappen XXI pag. 1070.

Bijv: De *omhullingskegel* met top B is de afbeelding van een bepaald stelsel lijnelementen in α. De raakpunten van de raaklijnen door B liggen op een kromme lijn, die de doorsnede is van *M* met het pooloppervlak van B. t. o. z. van *M*. Dit pooloppervlak is een monoïde van den graad $(n—1)$ met $(n—2)$-voudig punt in *O*. De doorsnede is dus een ruimtekromme van den graad $n(n—1)$ met een $(n—1)$ $(n—2)$-voudig punt in *O*.

De projectie van deze kromme uit O op het vlak α is van den graad

$$n\,(n—1) — (n—1)\,(n—2) = 2\,n—2$$

Elk vlak door O heeft buiten dit punt met de aanrakingskromme $(2n—2)$ punten gemeen.

De punten P van het stelsel lijnelementen in α moeten op deze kromme k^{2n-2} van den graad $(2n—2)$ liggen; De lijnen *l* moeten door een vast punt van α gaan, n.l. door de projectie *B'* van B. De omhullingskegel met top B is dus de afbeelding van een stelsel $\{ 1,\ 2n—2 \}$.

De kromme lijn k^{2n-2} heeft met de kromme k^{n} volgens welke α door *M* gesneden wordt $2\,n\,(n—1)$ punten gemeen.

De vraag is nu met welke raakpunten *R* van raaklijnen aan de monoïde, komen deze snijpunten overeen.

De aanrakingskromme van den kegel uit B en de monoïde zal door α in $n(n—1)$ punten gesneden worden, die op de doorsnee van α met de monoïde liggen. Deze $n\,(n—1)$ punten behooren tot de $2n\,(n—1)$ snijpunten. De overige hiervan moeten nu zulke punten zijn, die hun overeenkomende punten R op bovengenoemde ruimtekromme van den $n(n-1)^{sten}$ graad hebben, terwijl zij de projecties van R uit O zijn. De projecteerende stralen hebben dus met de monoïde $\{(n-1) + 1+1\} = (n+1)$ punten gemeen; liggen dus geheel op M^n.

Het zijn dus de $n(n-1)$ rechten op M^n, die door O gaan.

De $2n(n-1)$ snijpunten zijn dus eensdeels de $n(n-1)$ punten volgens welke α gesneden wordt door de aanrakingskromme van den kegel uit B, andersdeels de $n(n-1)$ doorgangspunten van de $n(n-1)$ rechten door O op M.

Contrôle: De raakvlakken in de punten van een rechte OA_k vormen een bundel. *Eén* raakvlak gaat dus door B. Op elke rechte OA_k rust dus een raaklijn aan M, die door B gaat. De aanrakingskromme van kegel en monoïde snijdt dus de $n(n-1)$ rechten door O; de projectie van deze kromme gaat dus door de punten $A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n(n-1)}$.

De monoïde wordt door α gesneden in een kromme van den n^{en} graad k^n. Het aantal raakvlakken van M in punten van k^n, dat door B gaat, is gelijk aan de klasse van k^n, welke $n(n-1)$ bedraagt (zie ook § 3). Door B gaan dus $n(n-1)$ raaklijnen aan M die deze op k^n raken.

Hiermee zijn ook de $2\,n(n-1)$ snijpunten op k^n verantwoord.

Als B de rechte b doorloopt, vormen de overeenkomstige beschrijvenden van de raakkegels een congruentie. Den stergraad bepalen we op de volgende manier.

De lijnen, die door een punt X gaan, liggen in het vlak (X, *b*) en raken aan de kromme lijn van graad *n* volgens welke dit vlak de monoïde snijdt. Het aantal bedraagt n(n—1).

Om den veldgraad te bepalen, gaan we als volgt te werk. De lijnen, die in een willekeurig vlak ξ liggen, moeten raaklijnen zijn aan de kromme lijn, volgens welke ξ de monoïde snijdt en bovendien door het punt (ξ, *b*) gaan.

Hun aantal bedraagt dus ook n(n—1). We hebben dus te doen met een congruentie [n(n—1), n(n—1)] en deze heeft *b* tot richtlijn.

De aanrakingskrommen op de monoïde vormen een bundel, want om de kromme lijnen te bepalen, die gaan door een willekeurig punt op M, behoeft men slechts in dit punt het raakvlak aan te brengen en te doorsnijden met *b*, wat *één* snijpunt, dus één omhullingskegel, geeft.

Dus vormen hun projecties een bundel krommen van den graad $2(n—1)$ met $4(n—1)^2$ basispunten.

Deze bestaan uit de n(n—1) doorgangspunten van α met de rechten op de monoïde door O en de projecties der raakpunten van de (n—1)(3 n—4) raakvlakken door *b*[1]).

Door een punt P in α gaat *een* rechte *l*, want in het bij P behoorende punt R is *één* raaklijn, die op *b* rust.

Omgekeerd gaan we na, hoeveel punten P bij een willekeurige rechte *l* behooren. Dit aantal is gelijk aan de klasse

---

[1]) De klasse van een monoïde van den graad *n* is (n—1)(3n—4). Zie b.v. G. van Beek. Acad. proefschrift 1907. Over Monoïden blz. 26.

van de kromme, volgens welke de monoïde wordt gesneden door het vlak (O, *l*). Deze kromme is van den n[en] graad en heeft *O* als (n—1)-voudig punt. De klasse is dus

$$\nu = n(n-1) - (n-1)(n-2) = 2(n-1)$$

We krijgen dus een nulstelsel $N\{1, 2(n-1)\}$

Welke zijn de singuliere nulpunten van dit nulstelsel?

Singuliere nulpunten zijn de $4(n-1)^2$ basispunten, want, indien het punt P met een dergelijk punt samenvalt, gaan hierdoor oneindig veel lijnen *l*, die de projecties zijn van evenzooveel raaklijnen *r* in het basispunt R van den bundel krommen op M.

Verder snijdt *b* de monoïde in *n* punten, waarvan de projecties ook singuliere nulpunten zijn, omdat in die snijpunten alle raaklijnen op *b* rusten.

Bovendien zijn nog singulier de projecties van de (n—1) punten, waarin de raakkegel van *O* gesneden wordt door de rechte *b*. Immers, uit elk snijpunt van *b* met dien kegel zijn oneindig veel raaklijnen te trekken aan de monoïde, rustend op *b*, die geprojecteerd evenveel lijnen *l* opleveren door de projectie van zulk een snijpunt.

Hiermede zijn dus de $4(n-1)^2 + 2(n-1) + 1$ singuliere punten van het nulstelsel $N\{1, 2(n-1)\}$ gevonden[1]).

§ 7. *Lineair nulstelsel in* α. Hierbij is aan elk punt P *één* rechte *l* toegevoegd en omgekeerd is elke rechte *l* aan *m* punten P toegewezen.

---

[1]) Zie Dr. Jan de Vries: Verslagen Kon. Acad. v. Wetenschappen, t.a.p.

Hiermee komt overeen een congruentie van raaklijnen van *M*, waarvan er in elk punt R van *M* één raakt, terwijl er *m* aan een vlakke doorsnee door O raken.

De stergraad van die congruentie is 2 (m + 1) (n—1), want neemt men een willekeurig punt S, dan is het pooloppervlak van *S* van den graad (n—1) en heeft een (n—2)-voudig punt in O, dus wordt de aanrakingskromme geprojecteerd in een kromme lijn van den graad

$$n\,(n-1) - (n-1\,(n-2) = 2\,(n-1)$$

Deze snijdt de nulkromme, die behoort bij de projectie S' van S in 2 (m + 1) (n—1) punten en met elk snijpunt komt een straal van de congruentie door S overeen.

De stergraad is dus 2 (m + 1) (n—1). De veldgraad is $n\,(n-1) + mn$. Dezen bepalen we als volgt:

Een willekeurig vlak snijdt de monoïde in een n^e graadskromme *K*, die uit O op α wordt geprojecteerd in een kromme k^n.

Het stelsel raaklijnen der kromme K beantwoordt aan een stelsel lijnelementen in α, gevormd door de raaklijnen met raakpunten van k^n m.a.w. een stelsel $\{n(n-1), n\}$. Dit stelsel heeft met het nulstelsel $N\{1, m\}$ gemeen $n(n-1) + mn$ lijnelementen.

De afbeelding van het nulstelsel is dus een congruentie

$$[2\,(m+1)\,(n-1);\; n\,(n-1) + mn]$$

HOOFDSTUK II.

BIJZONDERE GEVALLEN.

§ *1*. Bijzondere gevallen van de in Hoofdstuk I algemeen behandelde afbeelding zijn o.a. de volgende:

1) O ligt in het eindige, terwijl twee van de rechten op M^n door O isotrope rechten zijn en α evenwijdig is aan het vlak door die twee rechten.

2) O ligt in het eindige, terwijl twee van de rechten op M^n door O samengevallen zijn en α evenwijdig is aan het vlak door die twee rechten.

3) O ligt in het oneindige, terwijl twee van de rechten op M^n door O in V_∞ liggen en reëel en verschillend zijn, of samengevallen, of verschillend en imaginair.

Voor $n = 2$ krijgt men als bijzondere gevallen te beschouwen den bol, den kegel, den cylinder, de paraboloïde.

We zullen ons hierbij echter alleen tot den bol beperken en slechts zulke vraagstukken bespreken, die om hun aanschouwelijk of elementair karakter de opmerkzaamheid verdienen.

In het bijzonder zullen we het volgende vraagstuk beschouwen. De raaklijnen van *M*, die nog aan twee enkelvoudige voorwaarden voldoen, vormen een regelschaar van raaklijnen *r* van M, die in α afgebeeld wordt door een stelsel van ∞^1 lijnelementen (P, *l*).

Wat is de meetkundige plaats van de punten P, alsmede de omhullende van de lijnen *l*?

De bol.

§ 2. Zij *O* de Noordpool, α het raakvlak in de Zuidpool Z, dan is *P* de stereografische projectie van R.

Het beeld van een waaier in α is een waaier van raaklijnen in R. Hierbij doet zich de bijzonderheid voor, dat de hoek tusschen twee lijnelementen in P gelijk is aan den hoek tusschen de afbeeldende raaklijnen.

De lijnelementen van een rechte in α, waarbij *P* op deze ligt en *l* er mee samenvalt, worden afgebeeld door de raaklijnen aan den cirkel (R) op M, die door *O* gaat.

De lijnelementen van een cirkel, waarbij P op dien cirkel ligt en *l* in P hieraan raakt, worden afgebeeld door de raaklijnen aan den cirkel (R) op *M*, die de stereografische projectie is van dien cirkel in α.

De lijnelementen, gevormd door de punten P met bijbehoorende stralen van een cirkel in α, worden afgebeeld door de beschrijvenden van den omhullingskegel, die *M* aanraakt volgens (R). Immers, indien Q het middelpunt is van dien cirkel in α, dan moeten de afbeeldende raaklijnen liggen in vlakken door O Q; O Q dus snijden en M volgens (R) aanraken.

Twee lijnelementen in α, die tot een cirkel behooren, waarbij P op dien cirkel ligt en l in P hieraan raakt, worden afgebeeld door twee elkaar snijdende (of in *één* vlak liggende) raaklijnen van M, en omgekeerd.

Twee zulke lijnelementen zullen we kortweg concyklisch noemen, zoodat met twee concyklische lijnelementen twee elkaar snijdende raaklijnen van M overeenkomen, en omgekeerd.

Behooren nu de lijnelementen bij cirkels van een parabolischen cirkelbundel (hierbij zijn de basispunten samengevallen) dan verkrijgen we het volgende:

Elke cirkel van den bundel geeft als afbeelding een cirkel (R) op M, terwijl al deze cirkels (R) de raaklijn r_0 gemeen hebben, die met het gemeenschappelijk lijnelement van het basispunt overeenkomt.

Alle lijnelementen van cirkels van een parabolischen cirkelbundel zijn dus de afbeeldingen van alle raaklijnen aan M, die een vaste raaklijn snijden. Zij vormen een congruentie [2, 2] met richtlijn r_0; r_0 is voor deze congruentie [2, 2] meetkundige plaats van singuliere punten, daar door elk punt N van deze rechte oneindig veel lijnen der congruentie gaan, die den omhullingskegel van N vormen.

§ *3*. Beschouwen we nu alle lijnelementen behoorende tot cirkels van een willekeurigen cirkelbundel.

De basispunten P_1 en P_2 worden afgebeeld door de punten R_1 en R_2 op *M*, door welke alle cirkels (R) gaan, die de beelden zijn van de cirkels van den bundel. De cirkels (R) liggen dus in een vlakkenbundel met as R_1R_2

De lijnelementen van een willekeurigen cirkelbundel komen overeen met alle raaklijnen aan *M*, die een vaste rechte snijden. Zij vormen een congruentie [2, 2] met richtlijn $R_1 R_2$. De veldgraad is 2, daar elk willekeurig vlak de vaste rechte in een punt snijdt, waaruit 2 raaklijnen aan de doorsnee met den bol te trekken zijn en de stergraad is eveneens 2, omdat door een willekeurig punt en de vaste rechte *een* vlak is te brengen, hetwelk den bol volgens een cirkel doorsnijdt, waaraan twee raaklijnen te trekken zijn die door het willekeurige punt gaan.

Indien we te doen hebben met lijnelementen behoorende bij cirkels van een cirkelbundel die puntcirkels, dus imaginaire basispunten heeft, dan worden de cirkels in α, op *M* afgebeeld als een stelsel cirkels, waarvan de vlakken een vlakkenbundel vormen, waarvan de as den bol niet treft. De raaklijnen aan dit stelsel cirkels zullen allen deze, buiten den bol liggende, as snijden, zoodat de lijnelementen van een dergelijken cirkelbundel overeenkomen met alle raaklijnen aan *M*, die een buiten *M* liggende vaste lijn p snijden. Ook zij vormen een congruentie [2, 2] met as *p*.

§ *4*. Onderzoeken we nu de afbeelding van de gemeenschappelijke lijnelementen van twee cirkelbundels.

Alle lijnelementen van den éénen cirkelbundel worden afgebeeld door de raaklijnen aan M, die de vaste rechte *a* snijden; de lijnelementen van den anderen cirkelbundel door de raaklijnen aan M, die de vaste rechte *b* snijden.

De raaklijnen, die tegelijk de beide rechten *a* èn *b* snijden komen overeen met de gemeenschappellijke lijnelementen van de cirkelbundels. Deze raaklijnen vormen een regeloppervlak van den 4^en^ graad, waarvan *a* en *b* dubbele richtlijnen zijn, hetgeen als volgt blijkt.

Beschrijft men uit een willekeurig punt van de richtlijn *a* den omhullingskegel aan den bol, dan wordt deze door de andere richtlijn *b* in 2 punten gesneden, waardoor een beschrijvende van het regelvlak gaat. Door elk punt van *a* gaan dus twee beschrijvenden; eveneens door elk punt van *b*.

Een vlak door *a* snijdt den bol *M* volgens een cirkel en de richtlijn *b* snijdt dit vlak in een punt, waaruit twee raaklijnen aan den doorsnijdingscirkel zijn te trekken. In het vlak door *a* liggen dus, behalve de dubbelrechte *a*, twee beschrijvenden van het regelvlak, hetwelk dus van den 4^en^ graad is.

Om de meetkundige plaats van het raakpunt *R* te bepalen, gaan we als volgt te werk:

We denken ons een vlak δ, door de as *a* aangebracht; het vlak δ snijdt den bol in een cirkel *C*, gaande door A_1 en A_2. Het vlak δ snijdt de as *b* in een punt Q, waaruit twee raaklijnen QR_1 en QR_2 aan *C* zijn te trekken, die dan ook op *a* rusten. De punten R_1 en R_2 behooren dus tot de meetkundige plaats, maar ook A_1 en A_2, want in ieder van deze punten is een raakvlak aan den bol aan te brengen, dat de as b respectievelijk in de punten S_1 en S_2 snijdt; S_1A_1 en S_2A_2 zijn dus raaklijnen aan den bol, die op a en b steunen. In het vlak δ liggen dus 4 punten van de meetkundige plaats (R), welke dus een ruimtekromme van den 4en graad zal zijn. Deze kromme ϱ^4 zal uit O geprojecteerd geven de meetkundige plaats der punten P, die eveneens van den 4^{en} graad zal zijn.

De meetkundige plaats P is ook aldus te vinden.

Op elken cirkel α van den eenen bundel (α) bepaalt de andere bundel (β) een involutie I^2; de dubbelpunten zijn raakpunten P. Door het basispunt A'_1 gaat *één* cirkel β; er is *één* cirkel α, die hem in A'_1 raakt, dus is A'_1 een punt der meetkundige plaats. Evenzoo A'_2.

Schijnbaar bevat elke cirkel α dus 4 punten der meetkundige plaats. Maar de cirkelpunten in het oneindige zijn dubbelpunten der meetkundige plaats, dus bevat cirkel α 8 punten der meetkundige plaats en men vindt dus voor deze een kromme van den 4^{en} graad.

§ *5.* Van de in de voorgaande paragraaf behandelde soort regelvlakken willen we enkele bespreken:

1^e. De eene richtlijn a staat loodrecht op α, de andere, b, is de oneindig verre rechte l_∞ van α. Het oppervlak, dat ontstaat is de rechte bolconoïde.

Snijdt de lijn a den bol in de punten A_1 en A_2 en de groote cirkel door O, A_1 en A_2 den equator in de punten E_1 en E_2, dan zijn de projecties A'_1 en A'_2 harmonisch gescheiden door de projecties E'_1 en E'_2. A'_1 en A'_2 zijn de basispunten van een cirkelbundel, overeenkomende met de cirkels op M in den vlakkenbundel met as a.

$E'_1 E'_2$ is een middellijn van den cirkel, die de projectie is van den equator. Volgens een bekende eigenschap worden alle cirkels met basispunten A'_1 en A'_2 rechthoekig gesneden door den cirkel met middellijn $E'_1 E'_2$, de projectie van den equator.

De vlakken, gaande door l_∞ van α, snijden den bol M volgens een stelsel cirkels evenwijdig met α, die in projectie opleveren een bundel concentrische cirkels met Z als middelpunt.

Een vlak door a en een vlak door b snijden elkaar volgens een rechte, die raaklijn zal zijn, als de twee cirkels op den bol elkaar zullen raken of ook de projecties hiervan in α.

Een raakpunt in α bevindt zich op den lijn, die Z verbindt met het middelpunt van een cirkel door $A'_1 A'_2$.

De meetkundige plaats der punten (P) zal dus de meetkundige plaats zijn der snijpunten van overeenkomstige exemplaren van een waaier en een cirkelbundel, die projectief aan elkaar zijn toegevoegd. De waaier zal op een willekeurige rechte f een puntenreeks insnijden, waarvan elk punt overeenkomt met twee snijpunten van den bijbehoorenden cirkel. Op de rechte f hebben we dus een verwantschap (1, 2), welke *drie* coincidenties heeft. De meetkundige plaats der punten (P) is dus een kromme van den 3[en] graad.

Deze kromme lijn zal door Z gaan en tot symmetrieas hebben de lijn, die Z verbindt met het snijpunt (a, *a*).

Wanneer de as a den bol *M* snijdt, zal de meetkundige plaats (P) bestaan uit een ovaal en een serpentine, hetgeen veroorzaakt wordt doordat er tusschen de punten A_1 en A_2 een gedeelte van den bol zich bevindt, waar geen rakende cirkels mogelijk zijn.

Indien de as den bol *M* raakt, zal de kromme (P) een dubbelpunt hebben en als *a* geen punt met *M* gemeen heeft, dan zal de meetkundige plaats (P) een enkele serpentine zijn.

§ *6.* De omhullende van de lijnen *l* is als volgt te karakteriseeren. Op elken straal door Z liggen twee punten n.l. P_1 en P_2 en de raaklijnen l_1 en l_2 in P_1 en P_2 behooren bij een cirkel *c*, die door de basispunten A_1' en A_2' gaat.

Elke cirkel c van dien bundel snijdt de stereografische projectie van den equator loodrecht, zoodat dus geldt

$$Z P_1 \times Z P_2 = 4 R^2$$

(*2 R* is de straal van de projectie van den equator).

Hieruit volgt, dat P_1 en P_2 harmonisch gescheiden zijn door de stereografische projectie van den equator, zoodat de twee lijnen *l* niets anders zijn dan de poollijnen ten opzichte van dien cirkel der punten *P*. En daar de kromme (P) van den derden graad is, zal de omhullende van de lijnen *l*, de poolfiguur van de meetkundige plaats (P), van de derde klasse zijn. In het algemeen is ze van den graad *6*, in het geval de cirkelbundel parabolisch is, is ze van den vierden graad. Immers, in dit geval heeft de kromme (P) een dubbelpunt; de duale figuur moet dus een dubbelraaklijn hebben, hetgeen de graad met 2 vermindert.

Opmerking: Alle raaklijnen aan den bol, die drie vaste rechten snijden, zijn 4 in getal. De raaklijnen, die twee vaste rechten snijden, vormen, zooals uit het voorgaande is gebleken, een regelvlak van den 4^{en} graad. Dit regelvlak zal door de derde vaste rechte (richtlijn) gesneden worden in 4 punten. Er zijn dus 4 raaklijnen, die drie vaste rechten snijden.

De doorsnijdingen met den bol van de drie vlakkenbundels met deze 3 richtlijnen tot as, zullen als beeld in α geven drie cirkelbundels. Het aantal lijnelementen, dat nu gemeenschappelijk tot cirkels van de drie cirkelbundels behooren, bedraagt dus eveneens *4*.

Er zijn dus 4 lijnen, die tegelijk raaklijnen zijn resp. voor een cirkel uit 1sten, 2^{en} en 3^{en} bundel.

HOOFDSTUK III.

KUBISCHE MONOÏDEN.

§ *1*. Hierbij kunnen zich vier soorten voordoen. Naar het aantal dubbelpunten onderscheidt men: de enkelvoudige monoïde met *één* dubbelpunt; de dimonoïde, de trimonoïde en de quadrimonoïde respectievelijk met 2, 3 en 4 dubbelpunten. Hiervan zullen we bespreken *de enkelvoudige monoïde*. Het aantal rechten door den top bedraagt *zes*. Zulk een monoïde moet echter nog andere rechten buiten het dubbelpunt O bevatten. De *6* rechten door den top kunnen op 15 manieren twee aan twee gecombineerd worden en elk vlak, door een tweetal dezer rechten aangebracht, snijdt de monoïde nog volgens een rechte buiten O, zoodat er op een dergelijk kubisch oppervlak 15 rechten buiten het dubbelpunt liggen.

Noemen we de rechten door O respectievelijk $a_1, a_2 \dots . a_6$ en de rechte buiten O in het vlak (a_k, a_l) c_{kl} (k en l 1,...6).

Een rechte buiten O op de monoïde kan slechts twee lijnen a_k snijden, bij voorbeeld de rechte c_{34}, liggende in (a_3, a_4), kan geen der overige rechten a_k snijden, daar anders het vlak door O en c_{34}, meer dan drie rechten met het kubisch oppervlak gemeen zou hebben. De rechte c_{34} zal echter wel c_{12} en c_{56} snijden.

De projecties uit O van de rechten a_k zijn de 6 punten A'_k. Indien nu van het lijnelement (P, l) in α, het punt P samenvalt met een punt A'_k dan zal het beeld R hiervan schijnbaar een willekeurig punt van de rechten a_k zijn en r dan doorsnee van het vlak (O, l) met een willekeurig vlak door a_k.

Het vlak (O, l) snijdt echter de monoïde volgens een kegelsnede α_k^2 en de lijn a_k en deze hebben, behalve O, een punt R gemeen.

Elke rechte door R, die α_k^2 snijdt, is raaklijk van de monoïde en is als beeld te beschouwen van het lijnelement (A'_k, l).

Omgekeerd wordt de geheele waaier van de raaklijnen in R afgebeeld op $(A'_k, l.)$

Met den waaier om A'_k komt dus een parabolische, bilineaire congruentie [1, 1] met richtlijn a_k overeen.

Is P een punt van de lijn $A'_k\ A'_l$ en $l \equiv A'_k\ A'_l$, dan ligt het punt R op de rechte c_{kl} en $r \equiv c_{kl}$.

Indien P een punt is van de kegelsnede ω'^2, volgens welke α gesneden wordt door den raakkegel van O, dan zal het beeld R met O samenvallen. Het raakvlak aan den raakkegel van O in dit punt is dan onbepaald en r is dus een willekeurige van de rechten door O in het vlak (O, l). Ieder punt van ω'^2 is dus singulier. Omgekeerd is elke raaklijn door O singulier (zie § 2, Hoofdstuk 1).

§ *2.* Een stelsel van lijnelementen, waarvan P op een rechte c ligt, terwijl l door een vast punt D gaat, geeft als meetkundige plaats der punten R een nodale kromme c^3, de doorsnede van de monoïde met (O, c). Het vlak (O, l) draait om de rechte $O\,D$, de lijnen r zullen dus een regelvlak beschrijven, dat $O\,D$ tot richtlijn heeft en waarvan de graad 5 is, zooals uit § 3 van Hoofdstuk 1 blijkt.

Als we voor D een punt A'_k kiezen, gaat het regelvlak over in het samenstel van een regelvlak van den 3^{en} graad plus de raakkegel van O. De lijn $O\,D$ is voor dit kubisch regelvlak een tweevoudige richtlijn.

Onderzoeken we nu het beeld van de lijnelementen, waarvan P de kegelsnede c'^2 in α doorloopt en l in P hieraan raakt, die dus een stelsel (2, 2) vormen in α.

De kegelsnede c'^2 snijdt ω'^2 *4* maal en een c'^3, die door de punten A'_k gaat, *6* maal; zelf is ze dus beeld van de punten R eener zesden graadsruimtekromme ϱ^6, die in O een viervoudig punt bezit, de meetkundige plaats (R) is dus een ϱ^6. De meetkundige plaats der lijnen r zal bestaan uit de raaklijnen van de monoïde in de punten van ϱ^6 en aan deze *rakend.*

Den graad van het regelvlak bepalen we uit het aantal snijpunten van een willekeurige lijn met dit regelvlak.

Een vlak door een willekeurige lijn p snijdt de ϱ^6 in 6 punten S_1, S_2 . . . S_6, die een involutie I^6 bepalen. Het aantal coïncidenties bedraagt 10, d.w.z. er zijn 10 raaklijnen aan ϱ^6, die op p rusten; p snijdt dus 10 lijnen van het regelvlak, hetwelk dus van den 10^{en} graad is.

Gaat de kegelsnede c'^2 door een der punten A'_k dan is de meetkundige plaats der punten A een ϱ^5 (aangevuld door a_k), die in O een drievoudig punt heeft en de meetkundige plaats der raaklijnen r zal bestaan uit een regelvlak van den 8sten graad en het dubbel te tellen vlak (a_k, l), waarbij l door A'_k gaat.

Zoo zal het stelsel lijnelementen van een kegelsnede c'^2, gaande door 2 punten A'_k, als beeld een kromme (R) van den 4den graad geven met dubbelpunt in O, welke bovendien nog twee rechten a_k snijdt en als regelvlak van raaklijnen r een van den zesden graad en twee dubbel te tellen vlakken.

Gaat de kegelsnede c'^2 door 3 punten A'_k dan verkrijgen we als kromme (R) een ϱ^3 door O, aangevuld door 3 rechten a_k waarop ϱ^3 rust, terwijl het regelvlak (r) van den 4en graad wordt.

Wanneer ten slotte de kegelsnede c'^2 genomen wordt door 4 punten A'_k, gaat de kromme (R) over in een kegelsnede ϱ^2, die bijvoorbeeld op a_1, a_2, a_3 en a_4 rust, terwijl c_{56} er koorde van is, daar de kegelsnede c'^2 de rechte $A'_5 A'_6$ buiten de punten A'_5 en A'_6 tweemaal snijdt. De kegelsnede ϱ^2 ligt dus in het vlak door c_{56}.

Het regelvlak (r) wordt van den tweeden graad; waarbij 4 dubbel te tellen vlakken behooren.

§ 3. Omgekeerd willen we nu nagaan, wat in a overeenkomt met een gegeven stelsel van raaklijnen aan de monoïde. De raaklijnen door een punt B vormen den omhullingskegel van B; deze is van den zesden graad, gaat door O en raakt de monoïde volgens een zesden graadsruimtekromme ϱ^6, die een dubbelpunt in O heeft.

De kromme (P) zal dus een 4e graadskromme zijn en de lijnen l, de beelden van de raaklijnen r door B, zullen door de projectie B′ van B gaan. Het beeld is dus een stelsel (1, 4).

Doorloopt B de rechte b, dan vormen de overeenkomstige beschrijvenden van de raakkegels een congruentie [6, 6] met b tot richtlijn (Zie § 6 Hoofdstuk 1).

De aanrakingskrommen op de monoïde vormen een bundel krommen ϱ^6, die in O een dubbelpunt hebben. De projecties dezer krommen vormen in α een bundel 4e graadskrommen met 16 basispunten.

Deze zijn de 6 punten A'_k en de 10 projecties van de raakpunten van de 10 raakvlakken door b.

Door een punt P in α gaat *één* rechte l en bij een willekeurige l behooren 4 punten P. Het beeld van de raaklijnencongruentie [6, 6] is dus een nulstelsel N(1, 4).

Singuliere punten zijn de 16 basispunten; de 3 projecties van de snijpunten van b met de kubische monoïde en de projecties van de twee snijpunten van b met den raakkegel van O, in het geheel dus *21*, hetgeen het aantal singuliere punten van een nulstelsel N(1, 4) is.

Het stelsel raaklijnen aan een ϱ^3 op de kubische monoïde, welke kromme niet door O gaat, geeft als beeld voor de kromme (P) een kubische kromme c'^3. Daar door ieder punt van de ruimte een koorde te trekken is van een kubische ruimtekromme, gaat door O *één* koorde van ϱ^3, welke dan met de monoïde 4 punten gemeen heeft; er dus geheel op ligt. Stel, dat dit de rechte a_1 is; de kromme (P) gaat dan door A'_1 en heeft daar een dubbelpunt. Elk vlak snijdt de kubische monoïde in een derde graadskromme k^3, die in 3 punten de ϱ^3 snijdt. De kromme (P), c'^3, zal een willekeurige k'^3 door A'_1 driemaal buiten de punten A'_k moeten snijden, dus 6 maal in de punten A'_k. Hieruit volgt, dat c'^3, behalve door A'_1, nog door 4 andere punten A'_k zal gaan, bijvoorbeeld door A'_2, A'_3, A'_4, A'_5 en dat dus ϱ^3 a_1, a_2, a_3, a_4 en a_5 snijdt; slechts a_6 niet.

De rechten c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15} kunnen ϱ^3 evenmin snijden, daar anders het vlak (a_1, a_2) bijv. in dat geval 4 punten met ϱ^3 gemeen zou hebben, wat onmogelijk is.

De kromme ϱ^3 rust op c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{45} en c_{56}, daar een vlak (a_2, a_3) bijv. 2 snijpunten met ϱ^3 heeft op a_2 en a_3; het 3e snijpunt van ϱ^3 moet liggen op de restdoorsnee van het vlak met de monoïde d.i. op de rechte c_{23}.

De rechten c_{26}, c_{36}, c_{46} en c_{56} zijn koorden, daar bijv. het vlak (a_2, a_6) 3 punten met ϱ^3 gemeen heeft, waarvan *een* op a_2 en de twee overigen moeten dan op c_{26} liggen, welke rechte dus koorde is.

De raaklijnen der monoïde in punten van ϱ^3 vormen een congruentie.

Het pooloppervlak van een willekeurig punt X is een oppervlak van den tweeden graad, dat met ϱ^3 6 snijpunten geeft.

De raakvlakken in de punten van ϱ^3 aan de monoïde omhullen dus een oppervlak van de 6e klasse.

Door elk punt gaan derhalve 6 raaklijnen van M^3, die op de ϱ^3 rusten; de stergraad is dus *6*.

Elk willekeurig vlak δ snijdt de ϱ^3 in 3 punten. De raakvlakken in deze punten aan de monoïde aangebracht, leveren drie snijlijnen r in δ, waaruit volgt, dat de veldgraad 3 is. De congruentie is voor te stellen door [6, 3].

De afbeelding is van dien aard, dat elke willekeurige rechte l in α de afbeelding is van 3 rechten r der congruentie en dat in het algemeen een punt P in α geen overeenkomstig punt R op ϱ^3 heeft, daar P op c'^3 moet liggen.

Wanneer de ϱ^3 door het punt O gaat is de projectie in α een kegelsnede c'^2, die ω'^2 in den doorgang O^1 der rechte snijdt, welke ϱ^3 in O aanraakt. De kegelsnede c'^2 wordt verder nog in drie andere punten door ω'^2 gesneden, welke de projecties zijn van 3 punten, die tegelijk op ϱ^3 en op den raakkegel van *O* liggen, dus punten zijn van drie rechten *a*. Hieruit volgt, dat ϱ^3 op drie dezer rechten steunt, bijvoorbeeld op a_1, a_2, en a_3.

Met een c'^3 heeft c'^2 nog drie punten buiten de punten A'_1, A'_2 en A'_3 gemeen n.l. S'_1, S'_2, S'_3, die de beelden zijn van de punten, die de vlakke c^3 op ϱ^3 insnijdt.

De congruentie van raaklijnen in de punten van zulk een ϱ^3 is voor te stellen door [4, 3]. Immers het pooloppervlak van een willekeurig punt is van den tweeden graad en snijdt de ϱ^3 buiten O, in $3 \times 2 - 2 = 4$ punten. Door elk punt gaan dus 4 raaklijnen van M^3, die op ϱ^3 rusten. De stergraad is dus 4. De veldgraad is *3*, zooals een bewijs, als bovenstaand, doet zien.

§ *4.* Beschouwen we nu het stelsel raaklijnen van M^3, die deze in de punten van een m^e graadsruimtekromme ϱ^m raken, welke σ maal door den top O gaat en de lijnen a_k in $\sum_6 \alpha_k$ punten snijdt.

De meetkundige plaats (P) zal een kromme van den graad $(m - \sigma)$ zijn. Elk vlak snijdt de ϱ^m in m punten en elk der rechten a_k, zoodat de projectie van de doorsnee van het vlak met M^3 een k'^3 zal zijn, die met (P) gemeen zal hebben $(m + \sum_6 \alpha_k)$ punten.

We krijgen dus $3(m - \sigma) = m + \sum_6 \alpha_k$

In A'_k heeft de kromme (P) een α_k voudig punt. Met den doorgang van den raakkegel van O, ω'^2, heeft ze buiten A'_k σ punten gemeen, dus is ook $2(m - \sigma) = \sigma + \sum_6 \alpha_k$, wat identiek is met de boven genoemde voorwaarde.

Is $\sigma = o$, hetgeen dus zeggen wil, dat ϱ^m niet door O gaat, dan moet $2 m = \sum_6 \alpha_k$ Voor de kubische kromme ϱ^3 zagen we in het voorgaande, dat deze ook 6 punten met de rechten a_k gemeen heeft.

Wanneer *h* het aantal schijnbare dubbelpunten van ϱ^m is, dan heeft ϱ^m *h* rechten tot koorden.

De raaklijnen van M^3 in de punten van ϱ^m vormen een congruentie, waarvan de stergraad bedraagt $2 m - \sigma$ en de veldgraad *m*, dus een congruentie $[2 m - \sigma, m]$ Een willekeurige rechte *l* in *a* is het beeld van m rechten r, daar het vlak (O, *l*) ϱ^m in $(m - \sigma)$ punten buiten O snijdt en in σ punten, die daar samenvallen.

J. 133.

STELLINGEN.

1.

Ten onrechte beweert Dr. M. N. van der Bijl: „De stralen van een complex van hoogeren graad kunnen niet volgens een (1, 1) toegevoegd worden aan de punten der ruimte door middel van een afbeelding, waarbij elke straal zijn beeldpunt bevat en waarbij het afbeeldingsvoorschrift op niet-complexstralen toepasselijk is."

Dergelijke afbeeldingen zijn voor bijzondere complexen van hoogeren graad zeer wel mogelijk.

M. N. v. d. Bijl. Acad. proefschrift 1926. Utrecht. Stelling 2.

2.

De uitdrukkingen, die Reye vindt voor het aantal punten en stralen van een plat vlak en in de ruimte, hebben, behalve wat haar graad in *n* betreft, geen beteekenis.

Dr. Th. Reye. Die Geometrie der Lage. 5e Aufl. Blz. 19.

3.

Het bewijs, door Dr. Fred. Schuh en Dr. J. G. Rutgers gegeven voor de convergentie van de integraal $\int_o^\infty f(x) \sin x \, dx$, waarbij f(x) voor $x > o$ positief en monotoon onbepaald dalend, is onvolledig.

Dr. Fred. Schut en Dr. J. G. Rutgers. Compendium der Hoogere Wiskunde. 3e deel, blz. 127, § 34.

4.

De namen orthohelium en parahelium zijn ondoelmatig en dienen door een betere nomenclatuur vervangen te worden.

5.

De kleurenleer van Ostwald heeft niet de minste physische beteekenis.

6.

Bij de behandeling der vergelijkingen dient scherp op den voorgrond te worden gezet, dat een vergelijking niet is een bewering, doch een vraag. Daarom dienen de vraagstukken met zoogenaamde „ingekleede” vergelijkingen vooraf te gaan.

7.

De elementaire mechanica is een uitstekend hulpmiddel om den leerlingen een goed gebruik der reeds behandelde wiskunde te leeren.

8.

Het onderwijzen van de allereerste beginselen der hoogere wiskunde moge te verdedigen zijn voor de β leerlingen onzer gymnasia, het heeft geen nut voor vele leerlingen der H.B.S. 5.