



Onderzoek van eenige bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen door eene afbeelding op het puntenveld

<https://hdl.handle.net/1874/291032>

gu. 192, 1928

**ONDERZOEK VAN EENIGE BILINEAIRE
CONGRUENTIES VAN KUBISCHE
RUIIMTEKROMMEN DOOR EENE
AFBEELDING OP HET
PUNTENVELD**



H. P. HOESTRA

Diss.
Utrecht

1928

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

BIBLIOTHEEK UNIVERSITEIT UTRECHT



3054 375 9

ONDERZOEK VAN EENIGE BILINEAIRE CONGRUENTIES
VAN KUBISCHE RUIMTEKROMMEN DOOR EENE
AFBEELDING OP HET PUNTENVELD

Diss. Utrecht 1920

Onderzoek van eenige bilineaire congruenties van
kubische ruimtekrommen door eene afbeelding op
het puntenveld.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. B. J. H. OVINK

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 5 Maart 1928, des namiddags 4 uur

DOOR

HENDRIK PIETER HOESTRA

geboren te BIERVLIET.

Electr. drukkerij „de Industrie” J. VAN DRUTEN — Utrecht

1928

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER MOEDER

Aan het einde mijner akademische studie gekomen zij het mij vergund, een woord van groote erkentelijkheid te richten tot U, Hooggeleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier colleges ik het voorrecht gehad heb, te genieten.

In de eerste plaats geldt mijn dank U, Hooggeleerde WOLFF, die mij door Uwe heldere voordracht steeds hebt weten te boeien.

Ook U, Hooggeleerde NIJLAND, zal ik steeds dankbaar blijven voor wat gij tot mijne wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

Hooggeleerde KRAMERS, wil ook gij mijn dank aanvaarden voor het vele, dat ik van U heb geleerd.

Ten slotte moge ik U, Hooggeleerde DE VRIES, hooggeachte promotor, mijn oprechten dank betuigen voor Uw zeer tot verruiming van mijn wiskundigen blik geleid hebbend onderwijs en voor de groote welwillendheid, waarmede gij mij bij de samenstelling van dit proefschrift hebt ter zijde gestaan.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING.	1
HOOFDSTUK I.	
De eerste algemeene congruentie van VENERONI . . .	3
HOOFDSTUK II.	
Eerste bijzondere geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI	16
HOOFDSTUK III.	
Tweede bijzondere geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI	30
HOOFDSTUK IV.	
De congruentie van REYE	45
HOOFDSTUK V.	
De congruentie van STUYVAERT	58
HOOFDSTUK VI.	
Slotwoord	74
STELLINGEN	78

INLEIDING.

Onder eene *congruentie van kubische ruimtekrommen* verstaat men een tweevoudig oneindig stelsel van ruimtekrommen van den derden graad. Het getal, dat aangeeft, hoeveel exemplaren van het stelsel door een gegeven punt gaan, heet de *orde* der congruentie; dat, hetwelk aangeeft, hoeveel exemplaren een gegeven rechte lijn tot koorde hebben, noemt men de *klasse* der congruentie.

Zijn van eene congruentie de orde en de klasse beide één, m. a. w. gaat er door een willekeurig punt slechts één kromme ρ^3 en is een willekeurige rechte maar van één exemplaar koorde, dan heet de congruentie *bilineair*. Eene zoodanige congruentie zullen we aanduiden door het teeken $[\rho^3]$.

Onder *hoofd- of basispunten* eener congruentie verstaat men punten, die op *alle* exemplaren der congruentie gelegen zijn. Een hoofdpunt draagt dus ∞^2 krommen ρ^3 .

De verbindingslijn van twee hoofdpunten der congruentie heet *hoofdkoorde*. Een hoofdkoorde wordt dus door elke kromme ρ^3 der congruentie in twee vaste punten gesneden.

In de volgende hoofdstukken zullen eenige bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen aan een onderzoek onderworpen worden en wel door eene *afbeelding op het platte vlak*. Eene zoodanige afbeelding is slechts dan mogelijk, indien twee op vaste rechten gekozen punten slechts *éene* kromme ρ^3 bepalen; elke kromme wordt dan in het algemeen door één punt van het genoemde platte vlak vertegenwoordigd en omgekeerd: elk punt van het vlak is in het algemeen beeld van *éene* kromme ρ^3 . Een punt in de afbeelding, hetwelk het beeld is van ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, heet een *singulier punt*.

Een lijn in de afbeelding, van welke ∞^1 punten één enkele kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ vertegenwoordigen, heet een *singuliere lijn*.

Het zal nu blijken, dat een dergelijke afbeelding *één aan één* een helder licht werpt op vele eigenschappen der congruenties van kubische ruimtekrommen, tot welker bespreking wij thans overgaan.

HOOFDSTUK I.

De eerste algemeene congruentie van VENERONI.

§ 1. Wij willen eens twee bundels quadratische oppervlakken beschouwen, aangeduid door (Φ_1^2) en (Φ_2^2) . De basisfiguur van den eersten bundel wordt gevormd door de kubische ruimtekromme σ_1^3 en één harer koorden b , die van den tweeden bundel door de kubische ruimtekromme σ_2^3 en dezelfde rechte b , die ook koorde van σ_2^3 is.

Elk oppervlak Φ_1^2 geeft nu met elk oppervlak Φ_2^2 eene doorsnede, die bestaat uit de rechte b en nog eene kubische ruimtekromme ρ^3 . De beide bundels bepalen zoo ∞^2 krommen ρ^3 en brengen dus een $[\rho^3]$ voort. Naar den wiskundige, die haar het eerst heeft aangewezen, wordt zij *de eerste algemeene congruentie van VENERONI* genoemd.

De congruentie is *bilineair*.

Immers: door een willekeurig punt P gaat één oppervlak Φ_1^2 en één oppervlak Φ_2^2 , dus één ρ^3 , welke met de rechte b de doorsnede dezer beide oppervlakken vormt. Verder snijden de beide bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) op eene willekeurige rechte l twee quadratische involuties in, welke involuties een gemeenschappelijk paar hebben. Dit puntenpaar behoort zoowel tot een oppervlak Φ_1^2 als tot een oppervlak Φ_2^2 , dus tot de snijkromme dezer twee oppervlakken, welke bestaat uit de rechte b en eene kromme ρ^3 der congruentie, die dus de rechte l tot koorde heeft.

Uit het bovenstaande volgt onmiddellijk, dat eene kromme ρ^3 der congruentie elk oppervlak Φ^2 , waarop ze *niet* ligt, in *geen andere punten* kan snijden, dan welke gelegen zijn op de basisfiguur van den bundel, waartoe Φ^2 behoort. Van de zes snijpunten van eene kromme ρ^3 met Φ^2 liggen er *twee*

op de rechte b , zoodat dus σ_1^3 en σ_2^3 door elke kromme ρ^3 der congruentie in vier punten gesneden worden.

§ 2. Om eene afbeelding ¹⁾ dezer congruentie op het puntenveld tot stand te brengen, denken we ons een plat vlak α gegeven, dat we als tafereel of beeldvlak aannemen. Verder kiezen we op de basiskromme σ_1^3 een punt C_1 en op de basiskromme σ_2^3 een punt C_2 . De raaklijn r_1 aan σ_1^3 in C_1 snijde het vlak α in P , de raaklijn r_2 aan σ_2^3 in C_2 snijde α in Q . Elk oppervlak Φ_1^2 heeft in C_1 een bepaald raakvlak, dat α snijdt volgens een rechte p door P en elk oppervlak Φ_2^2 heeft in C_2 een bepaald raakvlak, dat α snijdt volgens een rechte q door Q .

Wij beschouwen nu de op deze wijze verkregen rechten p , als de afbeeldingen der oppervlakken Φ_1^2 en de rechten q als de afbeeldingen der oppervlakken Φ_2^2 . Het snijpunt van een lijn p en een lijn q aanvaarden we verder als het beeld van die kromme ρ^3 der congruentie, welke met de rechte b de doorsnede van de door p en q vertegenwoordigde oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 vormt. Maar ook omgekeerd: elk punt van het beeldvlak α bepaalt een straal van den waaier (p) en een straal van den waaier (q), dus een vlak (p, r_1) , waaraan een oppervlak Φ_1^2 in C_1 raakt en een vlak (q, r_2) , waaraan een oppervlak Φ_2^2 in C_2 raakt. Deze twee oppervlakken bepalen één kromme ρ^3 der congruentie; de afbeelding is dus één aan één, op enkele uitzonderingen na. Er is één kromme ρ^3 , die afgebeeld wordt door ieder punt van de rechte r_0 , die de toppen P en Q der beide waaiers verbindt; r_0 is dus een *singuliere rechte* van de afbeelding.

De waaiertoppen P en Q zijn *singuliere punten* van de afbeelding, want zij zijn de beelden van ∞^1 krommen ρ^3 en

¹⁾ Door den heer Dr. G. SCHAAKE werd reeds de congruentie der kubische ruimtekrommen, die door vier gegeven punten gaan en twee gegeven rechten snijden, met behulp van de hier gebruikte afbeelding onderzocht. De resultaten van dit onderzoek verschenen in het verslag van de gewone vergadering der Afdeling Natuurkunde, Deel XXXV, N°. 3, van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

wel is P het beeld van de ∞^1 krommen ρ^3 , die gelegen zijn op *dat* oppervlak Φ_2^2 , hetwelk door den straal QP wordt vertegenwoordigd en Q het beeld van de ∞^1 krommen ρ^3 , die liggen op *dat* oppervlak Φ_1^2 , waarvan de straal PQ het beeld is. Het zijn nu juist *deze* beide oppervlakken, welke de bovenbedoelde door alle punten van r_0 afgebeelde kromme ρ^3 bepalen.

§ 3. Onderzoeken we eens, welke figuur in het beeldvlak α het beeld is van het oppervlak, gevormd door alle krommen ρ^3 der congruentie, die gaan door een vast punt B van de gemeenschappelijke basisrechte b . Er gaan door B ∞^1 krommen ρ^3 , die ieder met b de doorsnede vormen van een oppervlak Φ_1^2 met *het* oppervlak Φ_2^2 , dat Φ_1^2 in B raakt. Het punt B is dan *dubbelpunt* hunner doorsnede, zoodat het kubische bestanddeel hiervan door B moet gaan. Daar er ∞^1 paren elkaar in B rakende oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 zijn, zijn er ook ∞^1 krommen ρ^3 , die door B gaan.

Voegen we nu aan elk oppervlak Φ_1^2 *dat* oppervlak Φ_2^2 toe, hetwelk Φ_1^2 in B raakt, dan ontstaat een projectiviteit, of verwantschap (1,1) tusschen de exemplaren der beide bundels quadratische oppervlakken, dus ook tusschen de stralen der beide waaiers (p) en (q). Het voortbrengsel dezer waaiers is eene *kegelsnede* c^2 , welke dus het beeld is van het oppervlak, gevormd door alle krommen ρ^3 der congruentie, die door een vast punt B van b gaan. Deze kegelsnede gaat door de punten P en Q , zoodat we haar kunnen voorstellen door $c^2 (PQ)$.

De krommen ρ^3 der congruentie, welke op een gegeven rechte l rusten, vormen een oppervlak, waarvan we de afbeelding op het tafereel zullen bepalen.

Een willekeurig oppervlak Φ_1^2 snijdt l in twee punten. Deze twee punten bepalen twee oppervlakken Φ_2^2 , welker doorsneden met Φ_1^2 twee krommen ρ^3 bepalen, die op l rusten. Evenzoo behoort bij een willekeurig oppervlak Φ_2^2 een tweetal oppervlakken Φ_1^2 , welker doorsneden met Φ_2^2 twee op de rechte l rustende krommen ρ^3 bepalen. De oppervlakken der beide bundels zijn hierdoor gerangschikt in eene verwantschap (2,2),

dus ook hunne beeldrechten in het tafereel, dat zijn de stralen der beide waaiers (p) en (q). Hun voortbrengsel is dus een *kromme van den vierden graad*, λ^4 , welke P en Q tot dubbel-punten heeft. Wij kunnen haar voorstellen door $\lambda^4 (P^2 Q^2)$.

§ 4. Met behulp van deze uitkomst kunnen we nu den graad van het oppervlak Γ bepalen, waarop alle krommen ρ^3 gelegen zijn, die door een vast punt B van de rechte b gaan. Het beeld van dat oppervlak is de reeds gevonden kegelsnede $c^2 (PQ)$. Nu snijden $c^2 (PQ)$ en $\lambda^4 (P^2 Q^2)$ elkaar in $2 \times 4 = 8$ punten. Van deze acht punten vallen er twee in P en twee in Q , dus hebben de beide beeldkrommen *vier niet-singuliere* punten gemeen. Dat beteekent, dat op een gegeven rechte l vier krommen ρ^3 van het oppervlak Γ rusten. *Dit oppervlak is dus van den vierden graad* en kan door Γ^4 voorgesteld worden.

Tevens kunnen we den graad bepalen van het oppervlak Λ , beschreven door de krommen ρ^3 , welke de gegeven rechte l snijden. Daartoe bepalen we het aantal krommen ρ^3 , die op Λ gelegen zijn en een willekeurige rechte l' snijden. Bij l' behoort een oppervlak Λ' , met als beeld eene kromme $\mu^4 (P^2 Q^2)$. De krommen $\lambda^4 (P^2 Q^2)$ en $\mu^4 (P^2 Q^2)$ snijden elkaar in $4 \times 4 = 16$ punten. Van deze 16 punten vallen er vier in P en vier in Q , dus hebben de beide beeldkrommen *acht niet-singuliere* punten gemeen. Dat wil dus zeggen, dat er *acht* krommen ρ^3 zijn, die op Λ liggen en de rechte l' snijden; l' snijdt Λ dus in acht punten, zoodat Λ een *oppervlak van den achtsten graad* is, en door Λ^8 kan worden aangeduid.

Ook volgt hieruit, dat er *acht krommen ρ^3 van de congruentie zijn, die op twee gegeven rechten l en l' rusten.*

Er is één kromme ρ_1^3 , die de rechte l tot koorde heeft; hieruit volgt, dat de beeldkromme $\lambda^4 (P^2 Q^2)$ van het oppervlak Λ^8 een derde dubbelpunt heeft in het beeld van ρ_1^3 . De kromme λ^4 is dus *rationaal*.

§ 5. Wij willen nog even nagaan, wat de beteekenis is van de ligging der *singuliere punten* op de beeldfiguren en

welke gevolgtrekkingen we mogen maken, als twee beeldfiguren elkander in een singulier punt snijden.

Beschouwen we eens twee stralen p_1 en p_2 van den waaier (p). Dat de waaiertop P op p_1 ligt, beteekent, dat P het beeld is van *die* kromme ρ^3 der congruentie, welke het door den straal p_1 afgebeelde oppervlak Φ_1^2 met het door den straal QP van den waaier (q) afgebeelde oppervlak Φ_2^2 gemeen heeft. Dat P op den straal p_2 ligt heeft een overeenkomstige beteekenis, met dit onderscheid, dat P , als punt van p_2 beschouwd, een andere kromme ρ^3 vertegenwoordigt.

Als dus twee beeldkrommen elkaar in een singulier punt snijden, mogen we daaruit *niet* besluiten tot het gemeenschappelijk bezit van een kromme ρ^3 der congruentie der door deze beeldkrommen vertegenwoordigde oppervlakken. Het is nu duidelijk, dat bij de onderzoeken in § 4 de snijpunten der beeldfiguren, die in P en Q vielen, buiten beschouwing moesten blijven, waar gevraagd werd naar het aantal *gemeenschappelijke krommen der congruentie* van twee oppervlakken.

Bij de in de volgende hoofdstukken te behandelen congruenties van kubische ruimtekrommen zullen we kennis maken met andere singuliere punten dan waaiertoppen van stralen, die oppervlakken afbeelden. Dergelijke punten zijn eveneens de beelden van ∞^1 krommen ρ^3 der congruentie. Ook op deze is van toepassing, wat van de punten P en Q is gezegd, namelijk dat uit de snijding van twee beeldkrommen in zoo'n punt niet mag besloten worden tot het gemeenschappelijk bezit van een kromme der congruentie der door die krommen afgebeelde oppervlakken. Ook hier is alleen de gevolgtrekking juist, dat op elk dezer oppervlakken één der ∞^1 in dat singuliere punt afgebeelde krommen der congruentie gelegen is. Ligt een hier bedoeld singulier punt *k-voudig* op eene beeldkromme, dan bevat het toegevoegde oppervlak ook k der ∞^1 in dat punt afgebeelde krommen der congruentie.

§ 6. We willen eens nagaan, hoe de basisrechte b en de

basiskrommen σ_1^3 en σ_2^3 op de oppervlakken Γ^4 en Λ^8 gelegen zijn.

De beeldkromme $c^2(PQ)$ van het oppervlak Γ^4 snijdt de beeldkromme $d^2(PQ)$ van het oppervlak Δ^4 , dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een vast punt D van de basisrechte b gaan in 2 niet-singuliere punten. De oppervlakken Γ^4 en Δ^4 hebben dus twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gemeen.

Ook volgt hieruit, dat door een willekeurig punt van de basisrechte b twee krommen ρ^3 van het oppervlak Γ^4 gaan. De rechte b is dus een *dubbelrechte* op Γ^4 .

Door een willekeurig punt S_1 van de basiskromme σ_1^3 gaat één oppervlak Φ_2^2 , waaraan in het punt B van de basisrechte b door één oppervlak Φ_1^2 geraakt wordt, hetwelk met het oppervlak Φ_2^2 één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengt. Het punt S_1 draagt dus één kromme ρ^3 van het oppervlak Γ^4 .

Evenzoo draagt een willekeurig punt S_2 van de basiskromme σ_2^3 maar één kromme ρ^3 van het oppervlak Γ^4 .

De basiskrommen σ_1^3 en σ_2^3 zijn dus *enkelvoudige krommen* op Γ^4 .

Twee oppervlakken Γ^4 en Δ^4 , behoorende bij de punten B en D van b , hebben dus gemeen: de twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door beide punten gedragen worden, de beide basiskrommen σ_1^3 en σ_2^3 en de dubbelrechte b . De doorsnede dezer oppervlakken is dus van den graad

$$2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 2 = 16.$$

Het is gemakkelijk te zeggen, welke stralen p en q de *raaklijnen* in P en Q aan de kegelsnede c^2 zijn. Elke straal p snijdt c^2 in twee punten, van welke P er één is. Valt nu het tweede snijpunt ook in P , dan *raakt* die straal in P aan c^2 . Het punt P vertegenwoordigt dan *die* kromme ρ^3 van Γ^4 , welke tot de doorsnede behoort van het door den straal QP van den waaier (q) afgebeelde oppervlak Φ_2^2 met het oppervlak Φ_1^2 , dat in B het genoemde oppervlak Φ_2^2 aanraakt.

Een overeenkomstige redeneering geldt voor den in Q aan c^2 rakenden straal van den waaier (q).

De beeldkromme $\lambda^4(P^2Q^2)$ van het oppervlak Λ^8 snijdt

de beeldkromme $c^2(PQ)$ van het oppervlak Γ^4 in $4 \times 2 = 8$ punten, waarvan vier in P en Q vallen, dus ook vier niet-singulier zijn. Door een willekeurig punt B van de basisrechte b gaan dus vier krommen ρ^3 der congruentie, die ook op het oppervlak Λ^8 gelegen zijn. Hieruit volgt, dat b een *viervoudige rechte* op Λ^8 is.

Door een willekeurig punt S_1 van de basiskromme σ_1^3 gaat één oppervlak Φ_2^2 , dat door de rechte l in twee punten gesneden wordt. Deze twee punten bepalen twee oppervlakken Φ_1^2 , die met het door S_1 bepaalde oppervlak Φ_2^2 twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengen, die op l rusten. Door S_1 gaan dus twee krommen ρ^3 van het oppervlak Λ^8 , zoodat de basiskromme σ_1^3 *dubbelkromme* op Λ^8 is.

Op dezelfde manier kunnen we beredeneeren, dat de basiskromme σ_2^3 *dubbelkromme* op Λ^8 is.

Twee oppervlakken Λ^8 , behoorende bij de rechten l en l' hebben gemeen: de acht krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op beide rechten rusten. Ook hebben ze gemeen de beide dubbelkrommen σ_1^3 en σ_2^3 en de viervoudige basisrechte b . De doorsnede van twee zoodanige oppervlakken is dus van den graad

$$8 \times 3 + 2 \times 4 \times 3 + 4 \times 4 = 64.$$

§ 7. We willen thans gaan onderzoeken, welk oppervlak Ω gevormd wordt door de krommen ρ^3 der congruentie, die aan een gegeven vlak ϕ raken. Daartoe bepalen we de figuur in het beeldvlak α , door welke het gezochte oppervlak wordt vertegenwoordigd.

Beschouwen we eens een willekeurig oppervlak Φ_1^2 ; dit snijdt het vlak ϕ volgens eene kegelsnede k_1^2 , welke gaat door het doorgangspunt van de basisrechte b en door de drie doorgangspunten van de basiskromme σ_1^3 met ϕ . Elk oppervlak Φ_2^2 snijdt ϕ volgens een kegelsnede k_2^2 , welke ook gaat door het doorgangspunt van de basisrechte b met ϕ en nog door de drie doorgangspunten van de basiskromme σ_2^3 met ϕ . De kegelsneden k_2^2 vormen in ϕ een *bundel* (k_2^2) met als basispunten deze laatstgenoemde vier doorgangspunten. Zij snijden op de vaste kegelsnede k_1^2 , die met alle exem-

plaren van den bundel (k_2^2) het snijpunt van de rechte b met het vlak ϕ en nog drie veranderlijke punten gemeen heeft, een kubische involutie I^3 in. Deze heeft vier dubbelpunten, waaruit volgt, dat het vier keer voorkomt, dat de kegelsnede k_1^3 geraakt wordt door een exemplaar van den bundel (k_2^2) .

Een oppervlak Φ_2^2 van den tweeden bundel snijdt het in den aanhef van deze § genoemde oppervlak Φ_1^2 volgens de rechte b en een kromme ρ^3 der congruentie. Deze kromme ρ^3 snijdt dus het gegeven vlak ϕ in de snijpunten der vaste kegelsnede k_1^2 met de kegelsnede k_2^2 , welke de doorsnede is van dit oppervlak Φ_2^2 met ϕ . De involutie I^3 wordt dus ook op k_1^2 ingesneden door alle krommen ρ^3 van Φ_1^2 . Telkens als nu k_1^2 door een exemplaar van den bundel (k_2^2) geraakt wordt, raakt de bijbehorende kromme ρ^3 aan ϕ . Dit laatste heeft dus vier keer plaats. Er zijn dus vier oppervlakken Φ_2^2 , die met het gegeven oppervlak Φ_1^2 een aan het gegeven vlak ϕ rakende kromme ρ^3 der congruentie voortbrengen.

Op dezelfde manier kunnen we beredeneeren, dat er vier oppervlakken Φ_1^2 in den bundel (Φ_1^2) gevonden worden, die met een gegeven oppervlak Φ_2^2 een aan ϕ rakende kromme ρ^3 der congruentie voortbrengen.

De oppervlakken der beide bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) worden dus op deze wijze gerangschikt in een verwantschap $(4, 4)$, dus ook hunne beeldrechten in het tafereel, dat zijn de stralen der beide waaiers (p) en (q) . Het voortbrengsel dezer waaiers is dus eene kromme van den achtsten graad, λ^8 , welke P en Q tot viervoudige punten heeft, en dus voorgesteld kan worden door $\lambda^8 (P^4 Q^4)$. Deze kromme is dus het beeld van het oppervlak Ω .

Om den graad van het oppervlak Ω te bepalen, gaan we nu onderzoeken, hoeveel krommen ρ^3 van Ω op een gegeven rechte l rusten, m.a.w. hoeveel krommen ρ^3 tot de doorsnede der oppervlakken Ω en Λ^8 behooren. De beeldkrommen, $\lambda^8(P^4 Q^4)$ en $\lambda^4(P^2 Q^2)$ dezer oppervlakken snijden elkaar in $8 \times 4 = 32$ punten, waarvan er $2 \times 4 \times 2 = 16$ in de singuliere punten P en Q vallen. De beeldkrommen hebben dus 16

niet-singuliere punten gemeen, dus zijn er ook 16 krommen ρ^3 van de congruentie, die op Ω liggen en tevens op l rusten. De rechte l snijdt het oppervlak Ω dus in 16 punten, zoodat dit een *oppervlak van den zestienden graad*, Ω^{16} , is.

De beeldkrommen $\lambda^8(P^4Q^4)$ en $\mu^8(P^4Q^4)$ van de oppervlakken Ω en Ω' , behoorende bij twee vlakken ϕ en ϕ' , snijden elkaar in $8 \times 8 = 64$ punten, waarvan er $2 \times 4 \times 4 = 32$ in P en Q vallen, dus ook 32 niet-singulier zijn. Hieruit volgt, dat er 32 krommen ρ^3 der congruentie zijn, die aan twee gegeven vlakken ϕ en ϕ' raken.

De beeldkrommen $c^2(PQ)$ en $\lambda^8(P^4Q^4)$ van Γ^4 en Ω^{16} snijden elkaar in $16 - 8 = 8$ niet singuliere punten. Er gaan dus door elk punt van b acht krommen ρ^3 , die tevens op Ω^{16} liggen; b is dus een *achtvoudige rechte* op dit oppervlak.

Omdat door een willekeurig punt S_1 van de basiskromme σ_1^3 één oppervlak Φ_2^2 gaat, waaraan vier oppervlakken Φ_1^2 zijn toegevoegd, die met Φ_2^2 eene door S_1 gaande en aan ϕ rakende kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengen, is σ_1^3 een *viervoudige kromme* op het oppervlak Ω^{16} .

Evenzoo ligt de basiskromme σ_2^3 *viervoudig* op Ω^{16} .

Twee oppervlakken Ω^{16} , behoorende bij de vlakken ϕ en ϕ' hebben dus gemeen: de twee en dertig krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die beide vlakken aanraken, de beide viervoudige krommen σ_1^3 en σ_2^3 en de achtvoudige rechte b . De doorsnede van twee zoodanige oppervlakken is dus van den graad

$$32 \times 3 + 2 \times 16 \times 3 + 8 \times 8 = 256.$$

§ 8. Onder een *ontaarde kubische ruimtekromme* verstaat men eene figuur, die samengesteld is uit bestanddeelen, waarvan de som der graadgetallen eveneens drie is, terwijl de figuur in haar geheel het geslacht *nul* heeft, evenals eene enkelvoudige ruimtekromme van den derden graad. Men kan dus ook zeggen, dat de naam ontaarde kubische ruimtekromme slechts toekomt aan figuren van den derden graad, welke door een gegeven punt maar ééne koorde zenden.

Uit bovenstaande bepaling volgt, dat er twee soorten van ontaarde kubische ruimtekrommen zijn.

In de eerste plaats behooren er de figuren toe, die bestaan uit een *kegelsnede* en een daarop rustende, niet in het vlak dier kegelsnede gelegen, *rechte*. Inderdaad kunnen we door een gegeven punt maar ééne koorde naar deze figuur trekken.

De verbindingslijn van het gegeven punt met het steunpunt van rechte en kegelsnede telt niet als koorde mee.

In de tweede plaats treden als ontaarde kubische ruimtekrommen op de figuren, die bestaan uit *twee kruisende rechten gesneden door een derde*, van welke figuren de stergraad van de congruentie harer koorden ook één bedraagt.

Volledigheidshalve willen we nog even vermelden, dat het geslacht p van een uit twee bestanddeelen van de geslachten p_1 en p_2 samengestelde ruimtekromme uitgedrukt wordt door de betrekking:

$$p = p_1 + p_2 + s - 1,$$

waarin s het aantal snijpunten der samenstellende krommen beteekent. Eene kegelsnede en eene rechte, die de kegelsnede *niet* snijdt, vormen dus samen een figuur, die het *virtueele* geslacht heeft, zooals men dat uitdrukt, van

$$0 + 0 + 0 - 1 = -1.$$

Eene dergelijke figuur kan dus *niet* gerekend worden tot de ontaarde kubische ruimtekrommen. Dat een willekeurig vlak haar in drie punten snijdt, legt dus hier geen gewicht in de schaal.

§ 9. Wij beschouwen thans eerst het geval, dat twee oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 elkander snijden volgens de rechte b , eene kegelsnede δ^2 en eene rechte d , die op δ^2 rust en met haar eene ontaarde figuur ρ^3 vormt. Het is nu noodzakelijk, dat zoowel δ^2 als d door b gesneden worden. Maar ook de beide basiskrommen σ_1^3 en σ_2^3 snijden deze ontaarde figuur ρ^3 . Op δ^2 liggen drie punten van σ_1^3 en drie punten van σ_2^3 , terwijl de rechte d door σ_1^3 en σ_2^3 in één punt gesneden wordt. In elk vlak door b ligt buiten deze rechte b één snijpunt met σ_1^3 en één snijpunt met σ_2^3 , dus één rechte d , die b in een punt Q snijdt. Aan dit vlak raakt in Q één oppervlak Φ_1^2 en ook één oppervlak Φ_2^2 . Deze twee oppervlakken hebben eene doorsnede, die bestaat uit de rechten b en d — want

d is van elk der oppervlakken de tweede beschrijvende lijn van het raakvlak in Q — en dus nog een kegelsnede δ^2 . Wentelt nu dit vlak om de rechte b , dan beschrijven de ont-aarde figuren ρ^3 een oppervlak Ψ , bestaande uit twee andere oppervlakken, $\mathfrak{S}$, dat door de rechten d , en Δ , dat door de kegelsneden c^2 afzonderlijk beschreven wordt.

Van het oppervlak Ψ willen we nu de afbeelding op het tafereel en met behulp dezer afbeelding den graad bepalen, en daarna langs een anderen weg de graadgetallen van $\mathfrak{S}$ en Δ .

We beginnen met het oppervlak Ψ , beschouwd als één enkel oppervlak, dat voortgebracht wordt door alle uit een kegelsnede c^2 en een daarop steunende rechte d samengestelde krommen ρ^3 . We kiezen nu een willekeurig oppervlak Φ_1^2 en vragen naar het aantal rechten d , die op het oppervlak Φ_1^2 gelegen zijn. Het zijn er *vier*, want elke rechte d moet behalve op b en σ_1^3 rusten op σ_2^3 , omdat ze het lineaire bestanddeel is van de ontaarde kromme ρ^3 , die door twee oppervlakken, Φ_1^2 en Φ_2^2 , wordt voortgebracht. Nu snijdt σ_2^3 het oppervlak in *zes* punten, waarvan er *twee* op b liggen. Door elk der *vier* andere punten gaat ééne beschrijvende van Φ_1^2 , die op b rust, dus ééne rechte d . Op Φ_1^2 liggen dus vier rechten d . Er zijn dus *vier* oppervlakken Φ_2^2 , die met het gegeven oppervlak Φ_1^2 eene rechte d gemeen hebben. Evenzoo zijn er *vier* oppervlakken Φ_1^2 , die met een gegeven oppervlak Φ_2^2 een rechte d gemeen hebben. Voegen we nu aan elk oppervlak Φ_1^2 (Φ_2^2) de *vier* oppervlakken Φ_2^2 (Φ_1^2) toe, welke er een rechte d mee gemeen hebben, dan worden de oppervlakken der beide bundels gerangschikt in eene verwantschap (4, 4), dus ook hunne beeldrechten in het tafereel. De stralen der beide waaiers (p) en (q), gerangschikt in een verwantschap (4, 4), brengen eene kromme van den *achtsten* graad, γ^8 , voort, welke kromme de waiertoppen P en Q tot *viervoudige* punten heeft. Deze kromme γ^8 ($P^4 Q^4$) is dus het beeld van het oppervlak Ψ .

Om nu den graad van het oppervlak Ψ te bepalen, gaan we onderzoeken, in hoeveel punten Ψ door een willekeurige

rechte l gesneden wordt. We herinneren ons, dat de kromme $\lambda^4(P^2 Q^2)$ het beeld is van het oppervlak Λ^8 , welk oppervlak beschreven werd door alle krommen ρ^3 van de congruentie, die op een gegeven rechte l rusten. De krommen $\lambda^4(P^2 Q^2)$ en $\gamma^8(P^4 Q^4)$ snijden elkaar in $4 \times 8 = 32$ punten, waarvan er 16 in P en Q vallen, dus $32 - 16 = 16$ buiten de singuliere punten. Er zijn dus 16 krommen ρ^3 , in dit geval *ontaarde* krommen ρ^3 , die op een gegeven rechte l rusten en tevens op Ψ liggen, waaruit volgt, dat de rechte l het oppervlak Ψ in 16 punten snijdt, zoodat dit een *oppervlak van den zestienden graad*, Ψ^{16} , is.

De basisrechte b is een *achtvoudige rechte* en de basis-krommen σ_1^3 en σ_2^3 zijn *viervoudige krommen* op Ψ^{16} .

De achtvoudigheid van de basisrechte b en de viervoudigheid der krommen σ_1^3 en σ_2^3 op het oppervlak Ψ^{16} kan op dezelfde manier aangetoond worden, als aan het slot van § 7 is gedaan voor het oppervlak Ω^{16} .

Het is niet mogelijk, om met behulp der hier behandelde afbeelding de graadgetallen der oppervlakken $\mathfrak{S}$ en Δ te bepalen, aangezien wij alleen krommen ρ^3 hebben doen vertegenwoordigen door punten in het tafereel en geen rechten en kegelsneden afzonderlijk. Volledigheidshalve willen we echter die getallen toch berekenen, en wel door den graad van $\mathfrak{S}$ uit te vorschen.

Beschouwen we eens een willekeurig vlak β door b . Van het oppervlak $\mathfrak{S}$ ligt daarin b en één rechte d , namelijk de verbindingslijn van de niet op b gelegen snijpunten van σ_1^3 en σ_2^3 met β . De kegels, die σ_1^3 en σ_2^3 uit het snijpunt van b met d projecteeren, hebben negen ribben gemeen, waarvan er vier langs b vallen. De andere vijf zijn dus rechten d , waaruit volgt, dat b *vijfvoudige rechte* van het regelvlak $\mathfrak{S}$ is. Het vlak β geeft dus met $\mathfrak{S}$ eene doorsnede van den zesden graad, zoodat *zes* de graad van $\mathfrak{S}$ is, en dus *tien* de graad van Δ .

Het oppervlak Ψ^{16} bestaat dus uit een regelvlak $\mathfrak{S}^6$ en een oppervlak Δ^{10} .

Daar b vijfvoudig op $\mathfrak{S}^6$ is, is ze *drievoudig* op Δ^{10} .

Door een punt van σ_1^3 en de rechte b is een vlak bepaald;

dit vlak snijdt σ_2^3 in drie punten, waarvan er twee op b liggen. De verbindingslijn van het derde snijpunt van σ_2^3 met dat vlak en het op σ_1^3 gekozen punt is een rechte d . Door een punt van σ_1^3 en dus ook van σ_2^3 gaat bijgevolg maar één rechte d , zoodat de basiskrommen σ_1^3 en σ_2^3 *enkelvoudige krommen* op $\mathfrak{S}^6$ zijn en dus *drievoudige krommen* op Δ^{10} .

§ 10. Vervolgens willen we het geval nagaan, dat twee oppervlakken Φ_1^3 en Φ_2^3 elkander snijden volgens *vier rechten*, b , a_1 , a_2 en c . Deze vier rechten moeten zoodanig ten opzichte van elkaar gelegen zijn, dat *twee* ervan *elkander kruisen* en door de beide andere *gesneden* worden. Stel dat b en c elkander kruisen, dan worden ze door a_1 en a_2 beide gesneden. De ontaarde kromme ρ^3 bestaat dan uit de beide kruisende rechten a_1 en a_2 , die gesneden worden door de rechte c . De basiskrommen σ_1^3 en σ_2^3 hebben b tot koorde, dus ook c , terwijl ze elk op a_1 en a_2 één snijpunt hebben. De rechte c is dus *gemeenschappelijke koorde* van σ_1^3 en σ_2^3 . Nu hebben twee kubische ruimtekrommen *tien* gemeenschappelijke korden; behalve b hebben σ_1^3 en σ_2^3 er dus negen, zoodat er *negen figuren* ρ^3 zijn, die uit drie rechten bestaan.

HOOFDSTUK II.

Eerste bijzondere geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI.

§ 1. Als bijzonder geval van de twee bundels quadratische oppervlakken van hoofdstuk I willen we nu eens twee bundels quadratische kegels, aangeduid door (K_1^2) en (K_2^2) , beschouwen. Laat daartoe gegeven zijn vier punten A_1, A_2, A_3, A_4 en twee rechten, c_1 door A_1 en c_2 door A_2 . Als basisfiguur van den bundel (K_1^2) kiezen we de vier rechten $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$ en c_1 en als basisfiguur van den bundel (K_2^2) de vier rechten $A_2 A_1, A_2 A_3, A_2 A_4$ en c_2 .

De beide bundels hebben de basisribbe $A_1 A_2$ gemeen, zoodat ze een *bilineaire congruentie* $[\rho^3]$ voortbrengen, voor het bewijs waarvan wij naar het vorige hoofdstuk verwijzen.

§ 2. We zullen beginnen met van deze congruentie eene afbeelding op het platte vlak tot stand te brengen.

Een punt van de basisribbe c_1 van den bundel (K_1^2) draagt één kegel K_2^2 , dus ∞^1 krommen ρ^3 der congruentie, alle gelegen op den kegel K_2^2 en met de gemeenschappelijke basisribbe $A_1 A_2$ de doorsneden vormend van K_2^2 met de exemplaren van den bundel (K_1^2) .

Evenzoo draagt een punt van de basisribbe c_2 van den bundel (K_2^2) één kegel K_1^2 , dus ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$.

Door twee punten C_1 en C_2 van de basisribben c_1 en c_2 gaat dus één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, namelijk *die* kromme ρ^3 , welke met $A_1 A_2$ de doorsnede vormt van den door C_1 bepaalden kegel K_2^2 en den door C_2 bepaalden kegel K_1^2 . Worden nu de puntenreeksen (C_1) en (C_2) in projectief verband gebracht met de stralenwaaiers (p) en (q) , gelegen in

een plat vlak α , dat we als tafereel of beeldvlak kiezen, dan wordt elke kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ afgebeeld in een *punt* van α , terwijl omgekeerd elk punt van α snijpunt is van één straal p en één straal q , dus één punt C_1 op c_1 en één punt C_2 op c_2 , dus één kegel K_2^2 en één kegel K_1^2 , dus één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ bepaalt, althans in het algemeen. Er is één punt B_1 op c_1 , waaraan is toegevoegd de lijn PQ , die de toppen P en Q der waaiers (p) en (q) verbindt. De ∞^1 krommen ρ^3 , welke door B_1 gaan, hebben alle hun beeld in Q . Evenzoo is er één punt B_2 op c_2 , dat tot beeld heeft de lijn QP , nu dus beschouwd als straal van den waaier (q). De ∞^1 krommen ρ^3 , welke door B_2 gaan, hebben alle hun beeld in P .

Het exemplaar van de congruentie, dat door B_1 en B_2 gaat, wordt afgebeeld in elk punt van de lijn PQ .

We kunnen deze afbeelding ook zoo beschouwen, dat elke straal p van den waaier (p) een kegel K_2^2 en elke straal q van den waaier (q) een kegel K_1^2 vertegenwoordigt. Het snijpunt dezer stralen beeldt dan *die* kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ af, welke met $A_1 A_2$ de doorsnede dier beide kegels vormt.

De punten P en Q zijn *singuliere* punten in de afbeelding. Zij vertegenwoordigen elk ∞^1 krommen ρ^3 der congruentie.

§ 3. Allereerst gaan we nu onderzoeken, welke de beelden zijn van de ontaarde figuren ρ^3 , die zijn samengesteld uit een rechte d en eene kegelsnede c^2 , die op d rust en tevens van die, welke uit drie rechten bestaan. Wij onderscheiden *negen* groepen ontaarde figuren ρ^3 .

Groep I. We brengen een vlak door A_1, A_2 en A_3 , dat we ϕ_4 zullen noemen. De transversaal d_4 door A_4 over c_1 en c_2 moge ϕ_4 in D_4 snijden. Nu vormt d_4 met elke kegelsnede c^2 , gelegen in ϕ_4 en gaande door de punten A_1, A_2, A_3 en D_4 een ontaarde figuur ρ^3 . In ϕ_4 ligt een bundel (c^2) met de genoemde vier punten als basispunten, zoodat tot deze groep ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ behooren.

De rechte d_4 snijdt c_1 in S' , en c_2 in T' . Het punt S' heeft tot beeld een straal p , het punt T' een straal q . Het snijpunt S_4 dezer twee stralen is dus het beeld van alle

ontaarde krommen ρ^3 , die tot deze eerste groep behooren; het is dus een *singulier* punt van de afbeelding.

Tot den bundel kegelsneden in ϕ_4 behooren *drie* ontaarde kegelsneden, welke ieder met de rechte d_4 een uit drie rechten bestaande figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormen.

Groep II. We brengen een vlak ϕ_3 door A_1 , A_2 en A_4 . De transversaal d_3 door A_3 over c_1 en c_2 moge ϕ_3 in D_3 snijden. De punten A_1 , A_2 , A_4 en D_3 zijn nu de basispunten van een in ϕ_3 gelegen bundel (c^2), waarvan elk exemplaar met d_3 een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Ook hier vinden we dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 .

De bundel (c^2) bezit drie in twee rechten ontaarde kegelsneden; we vinden dus ook hier drie ontaarde figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.

De rechte d_3 rust in twee vaste punten, S'' en T'' op c_1 en c_2 . Het snijpunt S_3 van de stralen in het tafereel α , die aan deze punten S'' en T'' toegevoegd zijn, is dus het beeld van alle tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$. Ook S_3 is dus een *singulier* punt van de afbeelding.

Groep III. We brengen een vlak ϕ_2 door A_1 , A_3 en A_4 , welk vlak de rechte c_2 in S_2 moge snijden. Het lineaire bestanddeel van elke tot deze groep behorende ontaarde figuur ρ^3 moet door A_2 gaan en op c_1 rusten. Aan elken straal d_2 van den waaier (A_2, c_1), welke straal ϕ_2 in D_2 moge snijden, is de kegelsnede c^2 in ϕ_2 door A_1 , A_3 , A_4 , S_2 en D_2 toegevoegd; zij vormt met d_2 een ontaarde figuur ρ^3 . Deze kegelsneden vormen in ϕ_2 een bundel met basispunten A_1 , A_3 , A_4 en S_2 .

Het komt driemaal voor, dat een kegelsnede van dezen bundel ontaardt in twee rechten, die met d_2 een ontaarde figuur ρ^3 vormen, die uit drie rechten bestaat.

-Het vaste punt S_2 en c_2 , waardoor alle ontaarde figuren ρ^3 dezer groep gaan, heeft tot beeld een lijn q_2 in α . De veranderlijke snijpunten der lijnen d_2 met c_1 hebben tot beelden de stralen van den waaier (p), door welke q_2 gesneden wordt in de beeldpunten der ∞^1 tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 . De beeldfiguur dezer ∞^1 ont-

aarde krommen ρ^3 is dus de straal q_2 van den waaier (q).

Groep IV. We brengen een vlak ϕ_1 door A_2 , A_3 en A_4 , welk vlak door de rechte c_1 in S_1 gesneden moge worden. Het lineaire bestanddeel van elke tot deze groep behorende ontaarde figuur ρ^3 moet door A_1 gaan en op c_2 rusten. Aan elken straal d_1 van den waaier (A_1, c_2), welke straal ϕ_1 in D_1 moge snijden, is dus een kegelsnede c^2 in ϕ_1 door A_2 , A_3 , A_4 , S_1 en D_1 toegevoegd, die met d_1 een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Deze kegelsneden vormen in ϕ_1 een bundel met basispunten A_2 , A_3 , A_4 en S_1 .

Het komt driemaal voor, dat een kegelsnede van dezen bundel ontaardt in twee rechten, die met d_1 een ontaarde figuur ρ^3 vormen, die uit drie rechten bestaat.

Het vaste punt S_1 van c_1 , waardoor alle ontaarde figuren ρ^3 dezer groep gaan, heeft tot beeld een lijn p_1 in α . De veranderlijke snijpunten der lijnen d_1 met c_2 hebben tot beelden de stralen van den waaier (q), door welke p_1 gesneden wordt in de beeldpunten der ∞^1 tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 . De beeldfiguur dezer ∞^1 ontaarde krommen ρ^3 is dus de straal p_1 van den waaier (p).

Groep V. We brengen een vlak ϕ_{24} door de rechte c_1 en het punt A_3 . Dit vlak wordt door c_2 in T'' gesneden, want de rechte door A_3 en dit snijpunt rust tevens op c_1 en is dus de in groep II opgetreden transversaal d_3 .

Het lineaire bestanddeel der tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 is de rechte d_{24} , die A_2 en A_4 verbindt. Zij moge ϕ_{24} in D_{24} snijden.

De punten A_1 , A_3 , T'' en D_{24} in ϕ_{24} zijn nu de basispunten van een bundel (c^2), waarvan elk exemplaar met de rechte d_{24} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Hiervan zijn er dus ∞^1 .

Tot den genoemden kegelsnedenbundel behooren drie uit twee rechten samengestelde kegelsneden. Er zijn dus drie tot deze groep behorende figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.

Het punt T'' op c_2 , waardoor alle ontaarde figuren dezer groep gaan, heeft tot beeld een lijn q_{24} van den waaier (q).

Dit is echter dezelfde straal, die reeds in groep II is opgetreden; hij bevat dus het singuliere punt S_3 . De veranderlijke punten, door de exemplaren van den bundel (c^2) op c_1 ingesneden, hebben tot beelden alle stralen van den waaier (p) . Hieruit volgt, dat de beeldfiguur der ∞^1 tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 de straal q_{24} is.

Groep VI. We brengen een vlak ϕ_{23} door de rechte c_1 en het punt A_4 . Dit vlak wordt door c_2 in T' gesneden, want de rechte door A_4 en dit snijpunt rust tevens op c_1 en is dus de in groep I opgetreden transversaal d_4 .

Het lineaire bestanddeel der tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 is de rechte d_{23} , die A_2 en A_3 verbindt. Zij moge ϕ_{23} in D_{23} snijden.

De punten A_1 , A_4 , T' en D_{23} in ϕ_{23} zijn nu de basispunten van een bundel kegelsneden, waarvan elk exemplaar met de rechte d_{23} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Hiervan zijn er dus ∞^1 .

Tot den genoemden kegelsnedenbundel behooren drie uit twee rechten samengestelde kegelsneden. Er zijn dus drie tot deze groep behorende figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.

Het punt T' op c_2 , waardoor alle ontaarde figuren dezer groep gaan, heeft tot beeld een lijn q_{23} van den waaier (q) . Dit is echter dezelfde straal, die reeds in groep I is opgetreden; zij bevat dus het singuliere punt S_4 . De veranderlijke punten, door de exemplaren van den bundel (c^2) op c_1 ingesneden, hebben tot beelden alle stralen van den waaier (p) . Hieruit volgt, dat de beeldfiguur der ∞^1 tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 de straal q_{23} is.

Groep VII. We brengen een vlak ϕ_{14} door de rechte c_2 en het punt A_3 . Dit vlak wordt door c_1 in S'' gesneden, want de rechte door A_3 en dit snijpunt rust tevens op c_2 en is dus de in groep II opgetreden transversaal d_3 .

Het lineaire bestanddeel der tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 is de rechte d_{14} , die A_1 en A_4 verbindt. Zij moge ϕ_{14} in D_{14} snijden.

De punten A_2 , A_3 , S'' en D_{14} in ϕ_{14} zijn de basispunten

van een kegelsnedenbundel (c^2), waarvan elk exemplaar met de rechte d_{14} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Hiervan zijn er dus ∞^1 .

Tot den genoemden kegelsnedenbundel behooren drie uit twee rechten samengestelde kegelsneden. Er zijn dus drie tot deze groep behorende figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.

Het punt S'' op c_1 , waardoor alle ontaarde figuren dezer groep gaan, heeft tot beeld een lijn p_{14} van den waaier (p). Dit is echter dezelfde straal, die reeds in groep II is opgetreden; zij bevat dus het singuliere punt S_3 . De veranderlijke punten, door de exemplaren van den bundel (c^2) op c_2 ingesneden, hebben tot beelden alle stralen van den waaier (q). Hieruit volgt, dat de beeldfiguur der ∞^1 tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 de straal p_{14} is.

Groep VIII. We brengen een vlak ϕ_{13} door de rechte c_2 en het punt A_4 . Dit vlak wordt door c_1 in S' gesneden, want de rechte door A_4 en dit snijpunt rust tevens op c_2 en is dus de in groep I opgetreden transversaal d_4 .

Het lineaire bestanddeel der tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 is de rechte d_{13} , die A_1 en A_3 verbindt. Zij moge ϕ_{13} in D_{13} snijden.

De punten A_2 , A_4 , S' en D_{13} in ϕ_{13} zijn nu de basispunten van een bundel kegelsneden (c^2), waarvan elk exemplaar met de rechte d_{13} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Hiervan zijn er dus ∞^1 .

Tot den genoemden kegelsnedenbundel behooren drie uit twee rechten samengestelde kegelsneden. Er zijn dus drie tot deze groep behorende figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.

Het punt S' op c_1 , waardoor alle ontaarde figuren dezer groep gaan, heeft tot beeld een lijn p_{13} van den waaier (p). Dit is echter dezelfde straal, die reeds in groep I is opgetreden; zij bevat dus het singuliere punt S_4 . De veranderlijke punten, door de exemplaren van den bundel (c^2) op c_2 ingesneden, hebben tot beelden alle stralen van den waaier (q). Hieruit volgt, dat de beeldfiguur der ∞^1 tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 de straal p_{13} is.

Groep IX. We beschouwen een willekeurig vlak ϕ_{12} door de rechte $A_3 A_4$. Dit vlak wordt gesneden door de rechten c_1 en c_2 en ook door het lineaire bestanddeel, dat noodzakelijk in deze groep optreedt: de rechte $d_{12} \equiv A_1 A_2$. Noemen we de snijpunten dezer drie rechten met ϕ_{12} achtereenvolgens C_1 , C_2 en D_{12} , dan ligt er in ϕ_{12} één kegelsnede c^2 , die door d_{12} tot een ontaarde kromme ρ^3 wordt aangevuld. Wentelt nu ϕ_{12} om de rechte $A_3 A_4$, dan beschrijven de kegelsneden, waarvan er in elk vlak ϕ_{12} één ligt, het quadratisch oppervlak, bepaald door c_1 , c_2 , A_3 , A_4 en een punt van d_{12} . Dit quadratisch oppervlak is dus tevens de meetkundige plaats der ontaarde krommen ρ^3 dezer groep. Er zijn er ∞^1 .

Komt het punt A_1 in het vlak ϕ_2 te liggen, dan treffen we een exemplaar van groep III aan. De kegelsnede raakt dan in A_1 aan den doorgang van het vlak $A_2 c_1$. In den stand, waarin het punt A_2 in ϕ_1 valt, vinden we een exemplaar terug van groep IV. De kegelsnede raakt dan in A_2 aan den doorgang van het vlak $A_1 c_2$. Deze twee exemplaren ρ^3 bestaan elk uit een kegelsnede en de rechte d_{12} .

Tot de groep IX behooren twee figuren ρ^3 , die uit drie rechten zijn samengesteld.

Ten eerste vormt d_{12} met de transversaal d_3 door A_3 over c_1 en c_2 en de transversaal door A_4 over d_{12} en d_3 een in drie rechten uiteengevallen kromme ρ^3 der congruentie.

In de tweede plaats wordt een zoodanige ontaarde figuur ρ^3 gevormd door d_{12} , de transversaal d_4 door A_4 over c_1 en c_2 en de transversaal door A_3 over d_{12} en d_4 .

De beide laatste ontaarde figuren hebben we reeds achtereenvolgens in groep II en in groep I ontmoet.

We moeten nu nog onderzoeken, door welke figuur de ∞^1 ontaarde krommen ρ^3 dezer groep in het tafereel worden vertegenwoordigd. De puntenreeksen (C_1) en (C_2) , die door het wentelende vlak ϕ_{12} op de rechten c_1 en c_2 worden ingesneden, zijn projectief, daar een willekeurig punt op c_1 één vlak ϕ_{12} bepaalt, dus één punt op c_2 en omgekeerd. De stralen der beide waaiers (p) en (q) in α worden dus

ook in eene verwantschap (1, 1) gerangschikt; hun voortbrengsel is eene kegelsnede σ^2 , die door P en Q gaat, maar ook door de beide singuliere punten S_3 en S_4 , omdat de groep IX een exemplaar gemeen heeft met groep II en één met groep I, namelijk in beide gevallen een uit drie rechten bestaande figuur ρ^3 . We kunnen deze kegelsnede dus voorstellen door $\sigma^2(P Q S_3 S_4)$.

Hiermee zijn alle ontaarde figuren ρ^3 , die tot deze congruentie behooren, aangewezen.

§ 4. Ons eerste doel zal nu zijn, na te gaan hoeveel uit drie rechte bestaande figuren ρ^3 deze congruentie bevat.

Tellen we de tot de negen in § 3 behandelde groepen behorende gevonden uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 samen, dan vinden we het getal 26. Dit is echter niet het gezochte aantal. De ontworpen afbeelding zal uitwijzen, dat we ze alle dubbel hebben geteld: *er zijn er slechts dertien*.

Het buiten P vallende snijpunt van den straal p_1 , die de figuren van groep IV afbeeldt, met de kegelsnede σ^2 , die de exemplaren van groep IX vertegenwoordigt, is het beeld van de aan de groepen IV en IX gemeenschappelijke ontaarde figuur, die uit een rechte en een kegelsnede bestaat, waarop reeds gewezen werd.

Het buiten Q vallende snijpunt van den straal q_2 , die de figuren van groep III afbeeldt, met de kegelsnede σ^2 , is het beeld van de aan de groepen III en IX gemeenschappelijke ontaarde figuur, die uit een rechte en een kegelsnede bestaat; deze werd ook reeds vermeld.

Andere dan deze twee *niet* uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 kunnen de negen groepen *niet* gemeen hebben. De overige snijpunten der beeldfiguren onderling, die gelegen zijn buiten de singuliere punten P en Q , wijzen op het gemeenschappelijk bezit van uit drie rechten samengestelde ontaarde figuren ρ^3 der door die beeldfiguren vertegenwoordigde groepen.

Het singuliere punt S_3 ligt op de rechten p_{14} en q_{24} en op de kegelsnede σ^2 . In S_3 worden dus *drie* uit drie rechten

bestaande ontaarde krommen ρ^3 afgebeeld, die bij de vermelding van het getal 26 dubbel geteld zijn.

Ook het singuliere punt S_4 vertegenwoordigt *drie* dubbel getelde exemplaren wegens zijn ligging op de rechten p_{13} en q_{23} en op de kegelsnede σ^2 .

Eindelijk vertegenwoordigen de snijpunten der lijnenparen p_1 en q_2 , p_1 en q_{23} , p_1 en q_{24} , p_{13} en q_2 , p_{14} en q_2 , p_{13} en q_{24} en p_{14} en q_{23} elk nog *één* dubbel geteld exemplaar.

We vinden met behulp der afbeelding dus *dertien* dubbel gestelde exemplaren en daar er 26 geteld waren, zonder op de gelijkheid te letten, bevat deze congruentie juist *dertien uit drie rechten bestaande figuren* ρ^3 .

§ 5. Wij willen nu met behulp der afbeelding onderzoeken, welk oppervlak gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der congruentie, die op een gegeven rechte l rusten.

Door een punt C_1 van de basisrechte c_1 gaan ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, alle gelegen op den kegel K_2^2 , die door dit punt C_1 is bepaald. Deze kegel wordt door de rechte l in twee punten gesneden. Deze twee punten bepalen elk een kegel K_1^2 , die met den kegel K_2^2 een kromme ρ^3 van de $[\rho^3]$ voortbrengt, die door C_1 gaat en op l rust, terwijl deze krommen ρ^3 op de basisrechte c_2 elk een punt bepalen. Aan het punt C_1 op c_1 zijn op deze wijze twee punten van c_2 toegevoegd.

Omgekeerd gaan door een punt C_2 van c_2 ook ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, alle gelegen op den door C_2 bepaalden kegel K_1^2 , die door l ook in twee punten gesneden wordt. Deze punten bepalen weer twee kegels K_2^2 , deze kegels twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ en deze krommen snijden op c_1 twee aldus aan C_2 toegevoegde punten in.

De puntenreeksen (C_1) en (C_2) op c_1 en c_2 worden op deze wijze in eene verwantschap (2, 2) gerangschikt, dus ook hunne beeldrechten in het tafereel. Het voortbrengsel der beide waaiers (p) en (q) is dus eene *kromme van den vierden graad*, λ^4 , welke de waaiertoppen P en Q tot *dubbelpunten* heeft.

In het vlak ϕ_4 ligt *één* kegelsnede, die op l rust evenals

in het vlak Φ_3 . De singuliere punten S_4 en S_3 , welke de ontaarde figuren ρ^3 van groep I en groep II vertegenwoordigen, liggen dus ook op λ^4 . We kunnen deze kromme dus voorstellen door $\lambda^4(P^2 Q^2 S_3 S_4)$. Ook kan hier reeds opgemerkt worden, dat de kromme λ^4 , die blijkbaar rationaal moet zijn, haar derde dubbelpunt heeft in het beeldpunt van *die* kromme ρ^3 der congruentie, welke de gegeven rechte l tot koorde heeft.

De kromme $\lambda^4(P^2 Q^2 S_3 S_4)$ is dus het beeld van het oppervlak Λ , dat de meetkundige plaats is van alle krommen ρ^3 der congruentie, die op een gegeven rechte l rusten. We willen nu van Λ den graad bepalen, door te onderzoeken, in hoeveel punten een tweede rechte l' dit oppervlak snijdt.

Het beeld van het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op l' rusten, is een kromme $\mu^4(P^2 Q^2 S_3 S_4)$. Deze kromme snijdt $\lambda^4(P^2 Q^2 S_3 S_4)$ in $4 \times 4 = 16$ punten. Van deze vallen er $2 \times 2 \times 2 + 2 \times 1 = 10$ in de vier singuliere punten, dus zes daarbuiten. Dit beteekent, dat er zes krommen ρ^3 zijn, die zoowel op l als op l' rusten, dus dat het oppervlak Λ door de rechte l' in zes punten gesneden wordt. Het is dus een *oppervlak van den zesden graad*, Λ^6 .

Utt bovenstaande redeneering volgt tevens, dat de congruentie zes krommen ρ^3 bevat, *die op twee gegeven rechten l en l' rusten*.

Met behulp der afbeelding kunnen we ook nagaan, welke rechte lijnen op het oppervlak Λ^6 gelegen zijn.

De krommen $\lambda^4(P^2 Q^2 S_3 S_4)$ en $\sigma^2(P Q S_3 S_4)$ snijden elkaar in $4 \times 2 = 8$ punten. Hiervan vallen er 4 in P en Q en 2 in S_3 en S_4 ; dus ze hebben twee niet-singuliere punten gemeen, waaruit volgt, dat er twee tot groep IX behorende ontaarde figuren ρ^3 op Λ^6 liggen, dat wil dus zeggen twee kegelsneden dezer groep, zoodat d_{12} *dubbelrechte* is.

Omdat door *elk* punt van c_1 en ook van c_2 twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gaan, die op l rusten, zijn ook c_1 en c_2 *dubbelrechten* op Λ^6 .

De rechten d_{24} , d_{23} , d_{14} en d_{13} zijn *enkelvoudige* rechten

op Λ^6 , omdat $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_3 S_4)$ de stralen q_{24} , q_{23} , p_{14} en p_{13} buiten de singuliere punten elk in één punt snijdt.

De rechten d_4 en d_3 liggen *enkelvoudig* op Λ^6 , omdat $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_3 S_4)$ de punten S_4 en S_3 bevat.

Verder bevat Λ^6 van elk der beide waaiers $(A_1 c_2)$ en $(A_2 c_1)$ twee stralen, omdat $\lambda_4 (P^2 Q^2 S_3 S_4)$ de beeldrechten p_1 en q_2 elk in twee punten buiten de singuliere punten snijdt.

Eindelijk ligt de rechte l op Λ^6 .

De kromme ρ^3 , van welke l koorde is, is *dubbelkromme* op Λ^6 .

Op het oppervlak Λ^6 liggen dus drie dubbelrechten, elf enkelvoudige rechten, en één dubbelkromme ρ^3 . Hieruit volgt, dat er op Λ^6 ook gelegen zijn twaalf kegelsneden, waarvan er tien met elk der enkelvoudige rechten — de rechte l niet medegerekend — en twee met de dubbelrechte d_{12} ontaarde figuren ρ^3 vormen.

Ter controleering van den graad van de doorsnede van twee oppervlakken Λ^6 , behorende bij de rechten l en l' , kunnen we opmerken, dat ze gemeen hebben: de zes krommen ρ^3 , die op l en op l' rusten, de drie dubbelrechten en zes van de enkelvoudige rechten. De twee maal twee stralen der beide waaiers $(A_1 c_2)$ en $(A_2 c_1)$ verschillen namelijk bij verschillende oppervlakken Λ . De doorsnede van twee zoodanige oppervlakken is dus van den graad

$$6 \times 3 + 3 \times 4 + 6 = 36.$$

Uit het bezit van twee niet-singuliere snijpunten der krommen $\sigma_2 (P Q S_3 S_4)$ en $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_3 S_4)$ blijkt opnieuw, dat de meetkundige plaats der in groep IX optredende kegelsneden een quadratisch oppervlak is: l snijdt dit blijkbaar in twee punten,

§ 6. We willen nu gaan onderzoeken, welk oppervlak gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der congruentie, die aan een gegeven vlak ϕ raken.

Door een punt C_1 van de basisrechte c_1 gaan ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, gelegen op den door dit punt C_1 bepaalden kegel K_2^2 . Een willekeurig vlak ϕ snijdt dezen kegel volgens een kegelsnede k_2^2 , welke gaat door de doorgangspunten van de basisrechten c_2 , d_{12} , d_{23} en d_{24} met ϕ . Een willekeurige kegel

K_1^2 snijdt ϕ volgens een kegelsnede k_1^2 , die gaat door de doorgangspunten van de basisrechten c_1 , d_{12} , d_{13} en d_{14} met ϕ . Het snijpunt van d_{12} met ϕ hebben de kegelsneden dus gemeen.

De kegels K_1^2 en K_2^2 snijden elkaar volgens de rechte d_{12} en een kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, die het vlak ϕ snijdt in de drie niet op d_{12} gelegen snijpunten van de kegelsneden k_1^2 en k_2^2 .

De kegelsneden k_1^2 , in ϕ bepaald door alle kegels K_1^2 , vormen een bundel met als basispunten de vier genoemde doorgangspunten van de rechten c_1 , d_{12} , d_{13} en d_{14} met ϕ , waarvan d_{12} dus tevens k_2^2 snijdt. De drie andere snijpunten van een kegelsnede k_1^2 met de vaste kegelsnede k_2^2 zijn veranderlijk; de exemplaren van den bundel (k_1^2) bepalen dus op k_2^2 een kubische involutie I^3 . Deze heeft vier dubbelpunten; het komt dus vier keer voor, dat de kegelsnede k_2^2 geraakt wordt door een exemplaar van den bundel (k_1^2) .

Telkens echter als één der kegelsneden van den bundel (k_1^2) de vaste kegelsnede k_2^2 raakt, raakt de kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, die met d_{12} de doorsnede vormt van den gegeven kegel K_2^2 met den kegel K_1^2 , welker snijkromme k_1^2 met ϕ aan k_2^2 raakt, aan het vlak ϕ . Dit laatste heeft dus vier keer plaats. Er zijn dus vier kegels K_1^2 , die met den gegeven kegel K_2^2 een aan het gegeven vlak ϕ rakende kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengen.

Deze vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 bepalen op de basisrechte c_2 vier punten, welke dus aan het op c_1 gekozen punt C_1 zijn toegevoegd.

Op dezelfde manier kunnen we beredeneeren, dat er vier kegels in den bundel (K_2^2) gevonden worden, die met een gegeven kegel K_1^2 een aan ϕ rakende kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengen, dus dat er op de basisrechte c_1 vier punten zijn, die in dit verband aan een op c_2 gegeven punt C_2 zijn toegevoegd.

De puntenreeksen (C_1) en (C_2) op c_1 en c_2 worden dus op deze wijze gerangschikt in eene verwantschap (4, 4) dus ook hunne beeldrechten in het tafereel, de stralen der beide waaiers (p) en (q) . De beide waaiers brengen dus een kromme van den achtsten graad, ϕ^8 , voort, welke kromme de waaiertoppen P en Q tot *viervoudige* punten heeft.

Twee exemplaren van den bundel kegelsneden, in het vlak ϕ_4 gelegen, raken aan de snijlijn van het gegeven vlak ϕ met ϕ_4 , dus aan ϕ_4 . Evenzoo liggen er in het vlak ϕ_3 twee aan ϕ rakende kegelsneden. Van elk der groepen I en II behooren dus twee ontaarde figuren ρ^3 tot de gezochte, zoodat de punten S_4 en S_3 *dubbelpunten* van de kromme ϕ^8 zijn. We kunnen deze dus aanduiden met $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$.

De gevonden kromme $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ is dus het beeld van het oppervlak Φ , dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die aan een gegeven vlak ϕ raken. Van dit oppervlak Φ willen we nu den graad bepalen.

Daartoe bepalen we het aantal niet-singuliere snijpunten der krommen $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_3 S_4)$. Dit aantal bedraagt $8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 12$, hetgeen beteekent, dat er twaalf krommen ρ^3 zijn, die zoowel aan een gegeven vlak ϕ raken als op een gegeven rechte l rusten. Het oppervlak Φ wordt dus door l in twaalf punten gesneden; het is dus een *oppervlak van den twaalfden graad*, Φ^{12} .]

De beeldkrommen $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en $\psi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ van twee oppervlakken Φ^{12} en Ψ^{12} , behoorende bij de vlakken ϕ en ψ , snijden elkaar in $8 \times 8 - 2 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 = 24$ niet-singuliere punten. Hieruit leiden wij af, dat er *vier en twintig krommen* ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, *die aan twee gegeven vlakken* ϕ en ψ , *raken*.

Op dezelfde wijze als dat geschied is voor het oppervlak Λ^6 willen we onderzoeken, welke rechten er op het oppervlak Φ^{12} gelegen zijn.

De krommen $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en $\sigma^2 (P Q S_3 S_4)$ hebben $8 \times 2 = 16$ punten gemeen, waarvan er $2 \times 4 + 2 \times 2 = 12$ singulier zijn. De vier niet-singuliere punten wijzen op vier ontaarde figuren ρ^3 van groep IX, die op het oppervlak Φ^{12} liggen, dat wil zeggen vier kegelsneden en de rechte d_{12} *viervoudig*.

Omdat door *elk* punt van c_1 en ook van c_2 vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gaan, zijn de rechten c_1 en c_2 op Φ^{12} *viervoudige* rechten.

Omdat de kromme $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ de singuliere punten

S_3 en S_4 tot dubbelpunten heeft en de stralen p_{13} , p_{14} , q_{23} en q_{24} elk in twee niet-singuliere punten snijdt, zijn d_3 , d_4 , d_{13} , d_{14} , d_{23} en d_{24} *dubbelrechten* van Φ^{12} .

Wegens de vier niet-singuliere snijpunten van ϕ^8 ($P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2$) met p_1 en met q_2 liggen er op Φ^{12} vier stralen van elk der waaiers $(A_1 c_2)$ en $(A_2 c_1)$.

Op het oppervlak Φ^{12} liggen dus drie viervoudige rechten, zes dubbelrechten en acht enkelvoudige rechten. Er liggen dus ook op Φ^{12} vier en twintig kegelsneden, waarvan er acht met elk der enkelvoudige rechten, twaalf met elk der dubbelrechten en vier met de viervoudige rechte d_{12} ontaarde figuren ρ^3 vormen.

Ter controleering van den graad van de doorsnede van twee oppervlakken Φ^{12} , behorende bij de vlakken ϕ en ϕ' , kunnen we opmerken, dat ze gemeen hebben: de vier en twintig krommen ρ^3 , die zoowel aan ϕ als aan ϕ' raken, drie viervoudige en zes dubbelrechten. Voor den graad van de doorsnede van twee zoodanige oppervlakken vinden we dus:

$$24 \times 3 + 3 \times 16 + 6 \times 4 = 144.$$

HOOFDSTUK III.

Tweede bijzondere geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI.

§ 1. Denken wij ons thans gegeven drie punten A_1, A_2, A_3 en drie rechten c_1, c_2, b , waarvan c_1 door A_1 en c_2 door A_2 gaat en beschouwen wij eens alle kubische ruimtekrommen ρ^3 , die door de drie gegeven punten A_1, A_2 en A_3 gaan, de gegeven rechten c_1 en c_2 nog eens snijden en de rechte b tot koorde hebben. Deze krommen ρ^3 vormen eene *bilinéaire* congruentie, waarvan wij zullen bewijzen, dat zij als een bijzonder geval van de in hoofdstuk I behandelde kan beschouwd worden. Noemen wij de transversalen door A_3 over c_1 en b , door A_3 over c_2 en b , door A_1 over c_2 en b en door A_2 over c_1 en b achtereenvolgens d_{13}, d_{23}, d_{21} en d_{12} , dan vormen de vierzijden c_1, b, d_{12}, d_{13} en c_2, b, d_{21}, d_{23} de bases van twee bundels quadratische oppervlakken (Φ_1^2) en (Φ_2^2) . Elk oppervlak Φ_1^2 geeft nu met elk oppervlak Φ_2^2 eene doorsnede, die bestaat uit de rechte b en een kubische ruimtekromme, die gaat door de punten A_1, A_2, A_3 en die de rechte b , dus ook de rechten c_1 en c_2 , tot koorde heeft. De beide bundels brengen dus inderdaad de bovenbedoelde $[\rho^3]$ voort, waarmee tevens is aangetoond, dat ze *bilinéair* is.

§ 2. We zullen weer beginnen met van deze congruentie eene afbeelding op het platte vlak tot stand te brengen.

Door een punt van de basisribbe c_1 van den bundel (Φ_1^2) gaat één oppervlak Φ_2^2 , dus draagt dit punt ∞^1 krommen ρ^3 der congruentie, alle gelegen op dit oppervlak Φ_2^2 en met de gemeenschappelijke basisribbe b de doorsneden vormend van Φ_2^2 met de exemplaren van den bundel (Φ_1^2) .

Evenzoo draagt een punt van de basisribbe c_2 van den bundel (Φ_2^2) één oppervlak Φ_1^2 , dus ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$.

Door twee punten C_1 en C_2 van de basisribben c_1 en c_2 gaat dus één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, namelijk *die* kromme ρ^3 , welke met b de doorsnede vormt van het door C_1 bepaalde oppervlak Φ_2^2 en het door C_2 bepaalde oppervlak Φ_1^2 . Worden nu de puntenreeksen (C_1) en (C_2) in projectief verband gebracht met de stralen van twee waaiers (p) en (q) , gelegen in een plat vlak α , dat we als beeldvlak of tafereel kiezen, dan wordt elke kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ afgebeeld in een *punt* van α : het snijpunt der aan de punten C_1 en C_2 van c_1 en c_2 toegevoegde stralen p en q , terwijl omgekeerd elk punt van α snijpunt is van één straal p en één straal q , dus één punt C_1 op c_1 en één punt C_2 op c_2 , dus één oppervlak Φ_2^2 en één oppervlak Φ_1^2 , dus één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ bepaalt, althans in het algemeen. Er is één punt B_1 op c_1 , waaraan is toegevoegd de lijn PQ , die de toppen P en Q der waaiers (p) en (q) verbindt. De ∞^1 krommen ρ^3 , welke door B_1 gaan, hebben alle hun beeld in Q . Evenzoo is er één punt B_2 op c_2 , dat tot beeld heeft de lijn QP , nu beschouwd als straal van den waaier (q) . De ∞^1 krommen ρ^3 , welke door B_2 gaan, hebben alle hun beeld in P .

Het exemplaar van de congruentie, dat door B_1 en B_2 gaat, wordt afgebeeld in elk punt van de lijn PQ .

De punten P en Q zijn *singuliere* punten in de afbeelding. Zij vertegenwoordigen elk ∞^1 krommen ρ^3 der congruentie.

§ 3. Ons eerste werk zal zijn, te onderzoeken, welke de beelden zijn van de ontaarde figuren ρ^3 , die zijn samengesteld uit een rechte d en eene kegelsnede c^2 , die op d rust en tevens van die, welke uit drie rechten bestaan. Wij onderscheiden *acht* groepen dergelijke ontaarde figuren ρ^3 .

Groep I. Wij brengen een vlak Φ_0 door A_1 , A_2 en A_3 . De gemeenschappelijke basisribbe b moge dit vlak in B_0 snijden. Eene ontaarde figuur ρ^3 bestaat uit een kegelsnede c^2 in Φ_0 en een transversaal van de rechten c_1 , c_2 en b , die op c^2 rust. De punten A_1 , A_2 , A_3 en B_0 zijn de basispunten

van een bundel kegelsneden (c^2). De transversalen van c_1 , c_2 en b vormen een hyperboloïde, die ϕ_0 volgens eene kegelsnede h^2 snijdt, welke gaat door A_1 , A_2 en B_0 en dus ieder exemplaar van den bundel (c^2) nog in een vierde punt snijdt; aan elke kegelsnede c^2 van den bundel is één door dit vierde snijpunt met h^2 gaande transversaal t van c_1 , c_2 en b toegevoegd, die met c^2 een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt, maar ook omgekeerd: elke transversaal t van c_1 , c_2 en b bepaalt in ϕ_0 een punt, waardoor één exemplaar van den bundel (c^2) gaat, die t tot een ontaarde figuur ρ^3 aanvult. Deze groep telt dus ∞^1 uit een kegelsnede en een rechte bestaande figuren ρ^3 .

Tot den kegelsnedenbundel behooren drie ontaarde krommen c^2 , dus tot deze groep drie uit drie rechten samengestelde figuren ρ^3 .

De ontaarde figuren ρ^3 en wel de lineaire bestanddeelen daarvan bepalen op c_1 en c_2 twee projectieve puntenreeksen. De stralen der waaiers (p) en (q), die deze reeksen in het tafereel afbeelden, zijn dus ook projectief; hun voortbrengsel is dus eene kegelsnede σ^2 , zoodat deze de beeldfiguur is van alle tot deze groep behoorende ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Groep II. Wij brengen een vlak ϕ_3 door de rechte b en het punt A_3 . De rechte c_1 moge dit vlak in D_1 , de rechte c_2 in D_2 snijden.

Het lineaire bestanddeel der tot deze groep behoorende ontaarde figuren ρ^3 is de rechte $A_1 A_2$, welker snijpunt met ϕ_3 we D_3 zullen noemen.

In ϕ_3 ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_3 , D_1 , D_2 en D_3 . Elk exemplaar van dezen bundel vormt met de rechte $d_3 \equiv A_1 A_2$ een ontaarde figuur ρ^3 , zoodat er ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 tot deze groep behooren.

Daar in den bundel (c^2) drie uit twee rechten bestaande krommen c^2 voorkomen zijn er ook drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

Het punt D_1 op c_1 heeft tot beeld een straal p in α , het punt D_2 op c_2 een straal q . Het snijpunt S dezer twee stralen beeldt dus alle ontaarde figuren ρ^3 dezer groep

af en is mitsdien een *singulier* punt van de afbeelding.

Eén der uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 bezit tot bestanddeel de rechte $D_1 D_2$ in ϕ_3 , die dus tevens op b rust. Deze figuur komt dus ook in groep I voor, zoodat het punt S op de kegelsnede σ^2 ligt. Daar deze ook door de punten P en Q gaat kunnen we haar voorstellen door $\sigma^2 (P Q S)$.

Groep III. We brengen een vlak ϕ_2 door de rechte c_1 en het punt A_3 . De rechte c_2 moge dit vlak in U_2 , de rechte b in S_1 snijden. In ϕ_2 ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_3 , U_2 en S_1 . Elk exemplaar van dezen bundel bepaalt een straal van den waaier ($A_2 b$), die er op rust en er een ontaarde figuur ρ^3 mee vormt. Er zijn dus ∞^1 uit een kegelsnede en een rechte bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

In den bundel (c^2) komen drie ontaarde kegelsneden voor, dus vinden we ook drie uit drie rechten samengestelde ontaarde krommen ρ^3 in deze groep.

Het punt U_2 op c_2 draagt alle figuren ρ^3 , terwijl door elk punt van c_1 een kegelsnede, dus een ontaarde figuur ρ^3 gaat. Het beeld van U_2 is een straal q_1 van den waaier (q); het beeld van alle punten van c_1 is de waaier (p), dus het beeld van de ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is de straal q_1 .

Groep IV. We brengen een vlak ϕ_1 door de rechte c_2 en het punt A_3 . Dit vlak moge door de rechte c_1 in U_1 en door de rechte b in S_2 gesneden worden.

In ϕ_1 ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_2 , A_3 , U_1 en S_2 . Elk exemplaar van dezen bundel bepaalt een straal van den waaier ($A_1 b$), die er op rust en er een ontaarde figuur ρ^3 mee vormt. Er zijn dus ∞^1 uit een kegelsnede en een rechte bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

In den bundel (c^2) komen drie ontaarde kegelsneden voor, dus vinden we ook drie uit drie rechten samengestelde ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

Het punt U_1 op c_1 draagt alle figuren ρ^3 , terwijl door elk punt op c_2 een kegelsnede, dus een ontaarde figuur ρ^3 gaat. Het beeld van U_1 is een straal p_1 van den waaier (p); het

beeld van alle punten van c_2 is de waaier (q), dus het beeld van de ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is de straal p_1 .

Groep V. We brengen een vlak ϕ_{21} , door de rechte c_2 en het punt A_1 . De rechte b moge ϕ_{21} in B_2 snijden.

Het lineaire bestanddeel der ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is de transversaal d_{13} door A_3 over c_1 en b , welke het vlak ϕ_{21} in C_2 moge snijden.

In ϕ_{21} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_2 , B_2 en C_2 . Elk exemplaar van dezen bundel wordt door d_{13} tot een ontaarde figuur ρ^3 aangevuld. Er zijn er dus ∞^1 .

Wegens de drie uit twee rechten bestaande kegelsneden, die tot den bundel (c^2) behooren, komen er ook drie uit drie rechten gevormde ontaarde figuren ρ^3 in deze groep voor.

De figuren dezer groep gaan alle door het vaste punt D_1 op de rechte c_1 terwijl door elk punt van de rechte c_2 een exemplaar gaat. Hieruit volgt, dat alle figuren dezer groep afgebeeld worden in den straal p_2 , welke het beeld is van het punt D_1 op c_1 .

Groep VI. We brengen een vlak ϕ_{12} door de rechte c_1 en het punt A_2 . De rechte b moge ϕ_{12} in B_1 snijden.

Het lineaire bestanddeel der ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is de transversaal d_{23} door A_3 over c_2 en b , welke het vlak ϕ_{12} in C_1 moge snijden.

In ϕ_{12} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_2 , B_1 en C_1 . Elk exemplaar van dezen bundel wordt door d_{23} tot een ontaarde figuur ρ^3 aangevuld. Er zijn er dus ∞^1 .

Wegens de drie uit twee rechten bestaande kegelsneden, die tot den bundel (c^2) behooren, komen er ook drie uit drie rechten gevormde ontaarde figuren ρ^3 in deze groep voor.

De figuren dezer groep gaan alle door het vaste punt D_2 op de rechte c_2 , terwijl door elk punt van de rechte c_1 een exemplaar gaat. Hieruit volgt, dat alle figuren dezer groep afgebeeld worden in den straal q_2 , welke het beeld is van het punt D_2 op c_2 .

Groep VII. We beschouwen den vlakkenbundel (ϕ_{13}) door

de punten A_1 en A_3 . De rechte c_2 moge de exemplaren van dezen bundel in het veranderlijke punt Y_2 , de rechte b in het veranderlijke punt Z_2 snijden.

Het lineaire bestanddeel der ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is de transversaal d_{12} door A_2 over c_1 en b . Zij trad reeds op in groep VI, waar zij b in B_1 sneed. Noemen we verder T_2 haar snijpunt met c_1 en X_2 haar veranderlijk snijpunt met de exemplaren van (ϕ_{13}) .

In elk vlak ϕ_{13} ligt nu één kegelsnede c^2 , door de vijf punten A_1 , A_3 , X_2 , Y_2 en Z_2 bepaald. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

Er is één transversaal door A_1 over c_2 en b en één transversaal door A_3 over deze eerste transversaal en d_{12} , welk drietal rechten een tot deze groep behorende ontaarde figuur ρ^3 vormt. Verwisselen we de rollen van A_1 en A_3 , dan vinden we nog zoo'n figuur. Tot deze groep behooren dus twee uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 .

Het punt T_2 op c_1 draagt alle figuren dezer groep, terwijl door elk punt van de rechte c_2 een exemplaar gaat. Hieruit volgt, dat alle figuren dezer groep afgebeeld worden in den straal p_3 , welke het beeld is van het punt T_2 op c_1 .

Groep VIII. We beschouwen den vlakkenbundel (ϕ_{23}) door de punten A_2 en A_3 . De rechte c_1 moge de exemplaren van dezen bundel in het veranderlijke punt Y_1 , de rechte b in het veranderlijke punt Z_1 snijden.

Het lineaire bestanddeel der ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is de transversaal d_{21} door A_1 over c_2 en b . Zij trad reeds op in groep V, waar zij b in B_2 sneed. Noemen we verder T_1 haar snijpunt met c_2 en X_1 haar veranderlijk snijpunt met de exemplaren van (ϕ_{23}) .

In elk vlak ϕ_{23} ligt nu één kegelsnede c^2 , door de vijf punten A_2 , A_3 , X_1 , Y_1 en Z_1 bepaald. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

Er is één transversaal door A_2 over c_1 en b en één transversaal door A_3 over deze eerste transversaal en d_{21} , welk drietal rechten een tot deze groep behorende ontaarde figuur ρ^3 vormt. Verwisselen we de rollen van A_2 en A_3 , dan

vinden we nog zoo'n figuur. Tot deze groep behooren dus twee uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 .

Het punt T_1 op c_2 draagt alle figuren dezer groep, terwijl door elk punt van de rechte c_1 een exemplaar gaat. Hieruit volgt, dat alle figuren dezer groep afgebeeld worden in den straal q_3 , welke het beeld is van het punt T_1 op c_2 .

Hiermee zijn alle ontaarde figuren ρ^3 , die tot deze congruentie behooren, aangewezen.

§ 4. We willen nu nagaan, hoeveel uit de drie rechten bestaande figuren ρ^3 deze congruentie bevat.

Tellen we de tot de acht in § 3 behandelde groepen gevonden uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 samen, dan vinden we het getal 22. Dit is echter niet het gezochte aantal. De ontworpen afbeelding zal ook hier uitwijzen, dat we ze alle dubbel hebben geteld: *er zijn er slechts elf*.

Het wentelende vlak in groep VII komt eenmaal in den stand $A_1 A_2 A_3$ en eenmaal in den stand $c_1 A_3$. Hieruit volgt, dat het niet-singuliere snijpunt van p_3 met de kegelsnede σ^2 en dat met den straal q_1 wijzen op een aan de groepen VII en I en ook een aan de groepen VII en III gemeenschappelijk exemplaar, dat uit een kegelsnede en een rechte bestaat.

Het wentelende vlak in groep VIII komt eenmaal in den stand $A_1 A_2 A_3$ en eenmaal in den stand $c_2 A_3$. Hieruit volgt, dat het niet-singuliere snijpunt in de afbeelding van q_3 met de kegelsnede σ^2 en dat met den straal p_1 wijzen op een aan de groepen VIII en I en ook een aan de groepen VIII en IV gemeenschappelijk exemplaar, dat uit een kegelsnede en een rechte bestaat.

Andere dan deze vier *niet* uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 kunnen de acht groepen *niet* gemeen hebben. De overige snijpunten der beeldfiguren onderling, die gelegen zijn buiten de singuliere punten P en Q , wijzen dus op het gemeenschappelijk bezit van uit drie rechten samengestelde ontaarde figuren ρ^3 der door die beeldfiguren vertegenwoordigde groepen.

Het singuliere punt S ligt op de kegelsnede σ^2 , de rechte p_2 en de rechte q_2 . In S worden dus *drie* uit drie rechten

bestaande figuren ρ^3 afgebeeld, die bij de vermelding van het getal 22 dubbel geteld zijn.

De snijpunten der lijnenparen p_1 en q_1 , p_1 en q_2 , p_2 en q_1 , p_2 en q_3 , p_3 en q_2 , p_3 en q_3 en ook de snijpunten der stralen p_1 en q_1 met de kegelsnede σ^2 vertegenwoordigen elk één dubbel geteld exemplaar.

We vinden met behulp der afbeelding dus *elf* dubbel getelde exemplaren en daar er 22 geteld waren, zonder op de gelijkheid te letten, bevat deze congruentie juist *elf uit drie rechten bestaande figuren* ρ^5 .

§ 5. Als eerste toepassing van de ontworpen afbeelding willen we eens onderzoeken, welke figuur in het beeldvlak α het oppervlak vertegenwoordigt, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der congruentie, die door een vast punt B van de gemeenschappelijke basisrechte b gaan. Er gaan door $B \infty^1$ krommen ρ^3 , die ieder met b de doorsnede vormen van een oppervlak Φ_1^2 met het oppervlak Φ_2^2 , dat Φ_1^2 in B raakt. Het punt B is dan dubbelpunt hunner doorsnede, zoodat het kubische bestanddeel hiervan door B moet gaan. Er zijn ∞^1 paren elkaar in B rakende oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 , dus ook ∞^1 krommen ρ^3 , die door B gaan.

Door een punt C_1 van de basisrechte c_1 en het punt B van b gaat één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, want C_1 bepaalt één oppervlak Φ_2^2 , dat in B maar door één oppervlak Φ_1^2 geraakt wordt. Deze kromme bepaalt op de basisrechte c_2 één punt.

Evenzoo gaat door een punt C_2 van c_2 en het punt B van b maar één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, die op c_1 één punt bepaalt.

Aan elk punt van c_1 is op die wijze één punt van c_2 toegevoegd en omgekeerd. De puntenreeksen (C_1) en (C_2) zijn dus projectief, dus ook de overeenkomstige waaiers in α . Het voortbrengsel van de waaiers (p) en (q) is dus eene kegelsnede β^2 , gaande door de waiertoppen P en Q .

In het vlak ϕ_3 ligt één kegelsnede, die door B gaat, dus die met de rechte d_3 een door dit punt gaande figuur ρ^3 vormt. Hieruit volgt, dat het singuliere punt S op β^2 ligt.

De kromme $\beta^2 (P Q S)$ is dus het beeld van het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een vast punt B van b gaan.

Een nader onderzoek van dit oppervlak kan hier nog niet plaats hebben. Het zal geschieden in § 7.

§ 6. Het onderzoek naar het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der congruentie, die op een gegeven rechte l rusten, is nu aan de beurt.

Door een punt C_1 van de basisrechte c_1 gaan ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, alle gelegen op het oppervlak Φ_2^2 , dat door dit punt C_1 is bepaald. Dit oppervlak wordt door de rechte l in twee punten gesneden. Deze twee punten bepalen elk een oppervlak Φ_1^2 , dat met het oppervlak Φ_2^2 een kromme ρ^3 van de $[\rho^3]$ voortbrengt, die door C_1 gaat en op l rust, terwijl deze krommen ρ^3 op de basisrechte C_2 elk een punt bepalen. Aan het punt C_1 op c_1 zijn op deze wijze twee punten van c_2 toegevoegd.

Omgekeerd gaan door een punt C_2 van c_2 ook ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, alle gelegen op het door C_2 bepaalde oppervlak Φ_1^2 , dat door l ook weer in twee punten gesneden wordt. Deze punten bepalen weer twee oppervlakken Φ_2^2 , deze oppervlakken twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ en deze krommen snijden op c_1 twee aldus aan C_2 toegevoegde punten in.

De puntenreeksen (C_1) en (C_2) op c_1 en c_2 worden op deze wijze in eene verwantschap $(2, 2)$ gerangschikt, dus ook hunne beeldrechten in het tafereel. Het voortbrengsel der beide waaiers (p) en (q) is dus een kromme van den vierden graad, λ^4 , welke de waiertoppen P en Q tot dubbelpunten heeft.

In het vlak Φ_3 ligt één kegelsnede, die op l rust, dus ligt het singuliere punt S op λ^4 . Deze rationale kromme kunnen we dus voorstellen door $\lambda^4 (P^2 Q^2 S)$.

Zij heeft haar derde dubbelpunt in het beeldpunt van *die* kromme ρ^3 der congruentie, welke de gegeven rechte l tot koorde heeft.

De kromme $\lambda^4 (P^2 Q^2 S)$ is dus het beeld van het oppervlak Λ , dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$,

die op een gegeven lijn l rusten. We willen nu van Λ den graad bepalen, door na te gaan, in hoeveel punten een tweede rechte l' dit oppervlak snijdt.

Het beeld van het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op l' rusten, is een kromme $\mu^4(P^2 Q^2 S)$. Deze kromme snijdt $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$ in $4 \times 4 = 16$ punten. Van deze vallen er $2 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 = 9$ in de drie singuliere punten, dus zeven daarbuiten. Dit beteekent, dat er zeven krommen ρ^3 zijn, die zoowel op l als op l' rusten, dus dat het oppervlak Λ door de rechte l' in *zeven* punten gesneden wordt. Het is dus een *oppervlak van den zevenden graad*, Λ^7 .

We hebben hier tevens gevonden, dat de congruentie *zeven krommen* ρ^3 bevat, *die op twee gegeven rechten* l en l' rusten.

Met behulp der afbeelding kunnen we ook nagaan, welke rechten er op het oppervlak Λ^7 gelegen zijn.

De krommen $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$ en $\sigma^2(P Q S)$ snijden elkaar in $4 \times 2 = 8$ punten, waarvan er $2 + 2 + 1 = 5$ in de singuliere punten vallen, dus drie daarbuiten, waaruit volgt, dat er drie tot groep I behoorende ontaarde figuren ρ^3 op Λ^7 liggen, dat wil dus zeggen drie kegelsneden en drie transversalen van c_1 , c_2 en b .

Het singuliere punt S ligt op $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$, dus ligt de rechte d_3 enkelvoudig op Λ^7 .

De stralen p_2 en q_2 worden elk door $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$ in één niet-singulier punt gesneden. Hieruit besluiten wij, dat de rechten d_{13} en d_{23} ook enkelvoudig op Λ^7 liggen.

De stralen p_1 en q_1 worden elk door $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$ in twee niet-singuliere punten gesneden. Hieruit leiden wij af, dat op Λ^7 van elk der waaiers $(A_1 b)$ en $(A_2 b)$ twee stralen liggen.

Omdat door *elk* punt van c_1 en ook van c_2 twee krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gaan, die op l rusten, zijn c_1 en c_2 *dubbelrechten* op Λ^7 .

Omdat de stralen p_3 en q_3 ieder door $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$ in twee niet-singuliere punten gesneden worden, zijn de rechten d_{12} en d_{21} *dubbelrechten* op Λ^7 .

Ook de rechte l ligt op Λ^7 , terwijl de kromme ρ^3 , van welke l koorde is, *dubbelkromme* is op Λ^7 .

De rechte b verdient afzonderlijke vermelding. Zij is namelijk een *drievoudige* rechte op Λ^7 . Immers de krommen $\lambda^4 (P^2 Q^2 S)$ en $\beta^2 (P Q S)$ snijden elkaar in $8 - 2 - 2 - 1 = 3$ niet-singuliere punten, hetgeen beteekent, dat er *drie* krommen ρ^3 der congruentie zijn, die door een willekeurig punt B van b gaan en tevens op l rusten. Maar het beteekent nog meer; er volgt uit, dat alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een gegeven punt B van b gaan, op een *kubisch oppervlak* zijn gelegen.

Op Λ^7 liggen dus *vier dubbelrechten, elf enkelvoudige rechten, één dubbelkromme* ρ^3 en *één drievoudige rechte*. Ook liggen op Λ^7 *veertien kegelsneden*, waarvan er tien met elk der enkelvoudige rechten — de rechte l niet medegerekend — en vier met de beide dubbelrechten d_{12} en d_{21} ontaarde figuren ρ^3 vormen.

Ter controleering van den graad van de doorsnede van twee oppervlakken Λ^7 , behoorende bij de rechten l en l' , kunnen we opmerken, dat ze gemeen hebben: de zeven krommen ρ^3 , die op l en l' rusten, drie enkelvoudige rechten, namelijk d_3 , d_{13} en d_{23} , de vier dubbelrechten en de drievoudige rechte b . Hunne doorsnede is dus van den graad

$$7 \times 3 + 3 \times 1 + 4 \times 4 + 9 = 49.$$

Uit het bezit van twee niet-singuliere snijpunten van de kromme $\lambda^4 (P^2 Q^2 S)$ en elk der beide stralen p_3 en q_3 volgt, dat de meetkundige plaats der in groep VII en ook die der in groep VIII optredende kegelsneden een quadratisch oppervlak is: l snijdt dit blijkbaar in twee punten.

§ 7. Het in § 6 gevonden kubisch oppervlak, dat we B^3 zullen noemen willen we nog even aan een kort onderzoek onderwerpen.

Het beeld van het oppervlak, gevormd door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een gegeven punt D van b gaan, is een kegelsnede $\delta^2 (P Q S)$. Deze snijdt $\beta^2 (P Q S)$ in 4 punten, waarvan er maar één niet-singulier is. Hieruit blijkt opnieuw, dat door twee op b gegeven punten B en D slechts één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ gaat en tevens, dat b een enkelvoudige

rechte op B^3 is, evenals c_1 en c_2 , zooals uit de beschouwingen in § 5 volgt.

De beeldkromme $\beta^2(PQ S)$ snijdt de stralen p_3, q_3, p_1 en q_1 elk in één niet-singulier punt; de rechten d_{12} en d_{21} liggen dus ook op B^3 , alsmede van elk der waaiers $(A_1 b)$ en $(A_2 b)$ één straal.

Uit de ligging van het singuliere punt S op $\beta^2(PQ S)$ volgt, dat ook d_3 op B^3 ligt, terwijl het eenige niet-singuliere snijpunt der krommen $\beta^2(PQ S)$ en $\sigma^2(PQ S)$ verraaft, dat B^3 één transversaal van c_1, c_2 en b bezit.

Op het oppervlak B^3 liggen dus negen enkelvoudige rechten en zes kegelsneden, welke de afbeelding ons veroorlooft, te ontdekken.

Twee oppervlakken B^3 , behoorende bij de punten B en B' , hebben gemeen: de kromme ρ^3 , die door B en B' gaat en de zes enkelvoudige rechten b, c_1, c_2, d_3, d_{12} en d_{21} .

Hunne doorsnede is dus van den graad

$$1 \times 3 + 6 \times 1 = 9.$$

§ 8. We willen er thans toe overgaan, te onderzoeken, welk oppervlak gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der congruentie, die aan een gegeven vlak ϕ raken.

Door een punt C_1 van de basisrechte c_1 gaan ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, alle gelegen op het door dit punt C_1 bepaalde oppervlak Φ_2^2 . Een willekeurig vlak ϕ snijdt dit oppervlak volgens een kegelsnede k_2^2 , welke gaat door de doorgangspunten van de basisrechten c_2, b, d_{21} en d_{23} met ϕ . Een willekeurig oppervlak Φ_1^2 snijdt ϕ volgens een kegelsnede k_1^2 , die gaat door de doorgangspunten van de basisrechten c_1, b_1, d_{12} en d_{13} met ϕ . Het snijpunt van b met ϕ hebben de kegelsneden dus gemeen.

De oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 snijden elkaar volgens de rechte b en een kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, die het vlak ϕ snijdt in de drie niet op b gelegen snijpunten van de kegelsneden k_1^2 en k_2^2 .

De kegelsneden k_1^2 , in ϕ bepaald door alle oppervlakken Φ_1^2 , vormen een bundel met als basispunten de vier genoemde doorgangspunten van de rechten c_1, b, d_{12} en d_{13} met ϕ ,

waarvan b dus tevens k_2^2 snijdt. De drie andere snijpunten van een kegelsnede k_1^2 met de vaste kegelsnede k_2^2 , zijn veranderlijk; de exemplaren van den bundel (k_1^2) bepalen dus op k_2^2 een kubische involutie I^3 . Deze heeft vier dubbelpunten; het komt dus vier keer voor, dat de kegelsnede k_2^2 geraakt wordt door een exemplaar van den bundel (k_1^2) .

Telkens echter als één der kegelsneden van den bundel (k_1^2) de vaste kegelsnede k_2^2 raakt, raakt de kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, die met b de doorsnede vormt van het gegeven oppervlak Φ_2^2 met het oppervlak Φ_1^2 , welker snijkromme k_1^2 met ϕ aan k_2^2 raakt, aan het vlak ϕ . Dit laatste heeft dus vier keer plaats. Er zijn dus vier oppervlakken Φ_1^2 , die met het gegeven oppervlak Φ_2^2 een aan het gegeven vlak ϕ rakende kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengen.

Deze vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 bepalen op de basisrechte c_2 vier punten, welke dus aan het op c_1 gekozen punt C_1 zijn toegevoegd.

Op dezelfde manier kunnen we beredeneeren, dat er vier oppervlakken Φ_2^2 in den bundel (Φ_2^2) gevonden worden, die met een gegeven oppervlak Φ_1^2 een aan ϕ rakende kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengen, dus dat er op de basisrechte c_1 vier punten zijn, die in dit verband aan een op c_2 gegeven punt C_2 zijn toegevoegd.

De puntenreeksen (C_1) en (C_2) op c_1 en c_2 worden dus op deze wijze gerangschikt in eene verwantschap $(4, 4)$ dus ook hunne beeldrechten in het tafereel, de stralen der beide waaiers (p) en (q) . De beide waaiers brengen dus eene kromme van den achtsten graad, γ^8 , voort, welke kromme de waaier-toppen P en Q tot *viervoudige* punten heeft.

Twee exemplaren van den bundel kegelsneden, in het vlak ϕ_3 gelegen, raken aan de snijlijn van het gegeven vlak ϕ met Φ_3 , dus aan ϕ_3 . Van groep II behooren dus twee ont-aarde figuren ρ^3 tot de gezochte, zoodat het punt S dubbel-punt van de kromme γ^8 is. We kunnen deze dus aanduiden met γ^8 ($P^4 Q^4 S^2$).

Deze kromme nu is het beeld van het oppervlak Γ , dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die aan een

gegeven vlak ϕ raken. Van dit oppervlak Γ willen we nu den graad bepalen.

Daartoe bepalen we het aantal niet-singuliere snijpunten der krommen $\gamma^8(P^1 Q^4 S^2)$ en $\lambda^4(P^2 Q^2 S)$. Dit aantal bedraagt $8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 2 \times 1 = 14$, hetgeen beteekent, dat er 14 krommen ρ^3 zijn, die zoowel aan een gegeven vlak ϕ raken als op een gegeven rechte l rusten. Het oppervlak Γ wordt dus door l in veertien punten gesneden; het is dus een *oppervlak van den veertienden graad*, Γ^{14} .

De beeldkrommen $\gamma^8(P^1 Q^4 S^2)$ en $\delta^8(P^4 Q^1 S^2)$ van twee oppervlakken Γ^{14} en Δ^{14} , behoorende bij de vlakken ϕ en ψ , snijden elkaar in $8 \times 8 - 2 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 = 28$ niet-singuliere punten. Hieruit leiden wij af, dat er *acht en twintig krommen* ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die aan twee gegeven vlakken, ϕ en ψ , raken.

Ons rest nu nog het onderzoek naar de rechten en kegelsneden, die op het oppervlak Γ^{14} gelegen zijn.

De krommen $\gamma^8(P^4 Q^4 S^2)$ en $\sigma^2(P Q S)$ hebben $8 \times 2 = 16$ punten gemeen, waarvan er $2 \times 4 + 2 = 10$ singulier zijn. De zes niet-singuliere punten wijzen op zes ontaarde figuren ρ^3 van groep I, die op Γ^{14} liggen, dat wil zeggen zes kegelsneden en zes transversalen van c_1 , c_2 en b .

Het singuliere punt S is dubbelpunt van $\gamma^8(P^4 Q^4 S^2)$, dus is d_3 *dubbelrechte* op Γ^{14} .

De stralen p_1 en q_1 worden elk door $\gamma^8(P^4 Q^4 S^2)$ in vier niet-singuliere punten gesneden. Hieruit volgt, dat op Γ^{14} van elk der waaiers $(A_1 b)$ en $(A_2 b)$ vier stralen liggen.

De stralen p_2 en q_2 worden elk door $\gamma^8(P^4 Q^4 S^2)$ in twee niet-singuliere punten gesneden, waaruit we besluiten, dat d_{13} en d_{23} *dubbelrechten* op Γ^{14} zijn.

Omdat door *elk* punt van c_1 en ook van c_2 vier krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gaan, die aan ϕ raken, zijn c_1 en c_2 *viervoudige rechten* op Γ^{14} .

Omdat de stralen p_3 en q_3 ieder door $\gamma^8(P^4 Q^4 S^2)$ in vier niet-singuliere punten gesneden worden, zijn de rechten d_{12} en d_{21} *viervoudige rechten* op Γ^{14} .

Ook de rechte b ligt op Γ^{14} en wel *zesvoudig*. Immers

de krommen $\gamma^8(P^4 Q^4 S^2)$ en $\beta^2(P Q S)$ snijden elkaar in $16 - 2 \times 4 - 2 = 6$ niet-singuliere punten, hetgeen beteekent, dat er zes krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die door een willekeurig punt B van b gaan en tevens aan ϕ raken. Daar er nu door *elk* punt van b zes aan ϕ rakende krommen ρ^3 gaan, is b zesvoudige rechte op Γ^{14} .

Op Γ^{14} liggen dus *veertien enkelvoudige rechten, drie dubbelrechten, vier viervoudige rechten en één zesvoudige rechte*.

Verder liggen er op Γ^{14} *acht en twintig kegelsneden*, waarvan er veertien met elk der enkelvoudige rechten, zes met de drie dubbelrechten en acht met de beide viervoudige rechten d_{12} en d_{21} ontaarde figuren ρ^3 vormen.

Ter controleering van den graad van de doorsnede van twee oppervlakken Γ^{14} , behoorende bij de vlakken ϕ en ϕ' , kunnen we opmerken, dat ze gemeen hebben: de acht en twintig krommen ρ^3 , die aan ϕ en ϕ' raken, de drie dubbelrechten, de vier viervoudige rechten en de zesvoudige rechte b . Hunne doorsnede is dus van den graad

$$28 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 16 + 36 = 196.$$

HOOFDSTUK IV.

De congruentie van REYE.

§ 1. Eene kubische ruimtekromme is bepaald door zes willekeurig in de ruimte gegeven punten. Liggen er vier van de zes punten in één plat vlak, dan ontgaat de kromme in een kegelsnede door die vier punten en het doorgangspunt van de verbindingslijn der beide andere punten met dat vlak en deze rechte. Liggen vijf van de zes gegeven punten in één vlak, dan vormt elke rechte, die door het zesde punt gaat en op de kegelsnede rust, die door de vijf andere punten is bepaald, met die kegelsnede een ontgaarde kubische ruimtekromme. Er gaan dan ∞^1 figuren door de zes gegeven punten. De meetkundige plaats der lineaire bestanddeelen is de quadratische kegel met dat zesde punt tot top en de genoemde kegelsnede tot richtkromme.

Door vijf gegeven punten gaan ∞^2 kubische ruimtekrommen; deze vormen dus eene congruentie. Immers door een willekeurig zesde punt gaat één kromme. Op die kromme liggen ∞^1 punten en daar de ruimte uit ∞^3 punten bestaat, gaan er door die vijf gegeven punten $\infty^3 : \infty^1 = \infty^2$ kubische ruimtekrommen.

Wij zullen nu de congruentie van REYE, welke bestaat uit alle kubische ruimtekrommen ρ^3 , die door vijf gegeven punten gaan, beschouwen als voortbrengsel van twee bundels quadratische kegels (K_1^2) en (K_2^2).

Noemen we de vijf gegeven punten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en kiezen we als basisribben van den bundel (K_1^2) de rechten $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$ en $A_1 A_5$ en als basisribben van den bundel (K_2^2) de rechten $A_2 A_1, A_2 A_3, A_2 A_4$ en $A_2 A_5$, dan is de doorsnede van elken kegel K_1^2 , met elken kegel K_2^2

samengesteld uit de gemeenschappelijke basisribbe $A_1 A_2$ der beide bundels en eene kubische ruimtekromme, die door de vijf gegeven punten gaat. De beide bundels quadratische kegels brengen dus de congruentie van REYE voort, die dus ook als een bijzonder geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI beschouwd kan worden en bijgevolg *bilineair* is.

Ook hier geldt de waarheid, dat een kromme ρ^3 der congruentie elken kegel K^2 , waarop ze *niet* ligt, in *geen andere punten* kan snijden, dan welke gelegen zijn op de basisfiguur van den bundel, waartoe K^2 behoort; een zoodanige kromme ρ^3 snijdt dus K^2 in de vijf punten A_1, A_2, A_3, A_4 en A_5 , het snijpunt, dat in den top valt, dubbel tellend.

§ 2. We willen van de congruentie van REYE een afbeelding op het puntenveld ontwerpen.

We kiezen twee vaste rechten c_1 en c_2 . De kegels K_1^2 van den bundel (K_1^2) snijden op c_1 eene quadratische involutie I_1^2 in en de exemplaren van den bundel (K_2^2) bepalen op c_2 eene quadratische involutie I_2^2 .

We nemen vervolgens een plat vlak α aan en brengen nu de *puntenparen* van de involutie I_1^2 op c_1 in projectief verband met de *stralen* van een waaier (p) met top P in het vlak α .

Evenzoo leggen wij een projectief verband tusschen de *puntenparen* van de involutie I_2^2 op c_2 en de *stralen* van een waaier (q) met top Q in α .

Een kegel K_1^2 en een kegel K_2^2 brengen één kromme ρ^3 der congruentie voort; de kegel K_1^2 snijdt c_1 in een puntenpaar van de I_1^2 , de kegel K_2^2 snijdt c_2 in een puntenpaar van de I_2^2 . Het snijpunt der stralen p en q , welke aan deze twee puntenparen zijn toegevoegd, aanvaarden wij nu als beeld van de door deze twee kegels K_1^2 en K_2^2 voortgebrachte kromme ρ^3 der $[\rho^3]$.

Deze afbeelding is *één aan één*. Elke kromme ρ^3 bepaalt in α één punt, maar ook omgekeerd bepaalt elk punt in het vlak α één straal p en één straal q , dus één puntenpaar van de I_1^2 op c_1 en één puntenpaar van de I_2^2 op c_2 , dus één

kegel van elk der bundels, dus één kromme ρ^3 van de congruentie.

Er is één kromme ρ^3 van de $[\rho^3]$, die afgebeeld wordt door ieder punt van de rechte r_0 , die de toppen P en Q der beide waaiers verbindt.

De waaiertoppen P en Q zijn *singuliere* punten van de afbeelding, want zij zijn de beelden van ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$.

P is het beeld van *die* ∞^1 krommen ρ^3 , die gelegen zijn op den kegel K_2^2 , welke door den straal QP van den waaier (q) wordt afgebeeld en Q is het beeld van *die* ∞^1 krommen ρ^3 , die gelegen zijn op den door den straal PQ van den waaier (p) afgebeelden kegel K_1^2 . Het zijn nu juist *deze* beide kegels, welke de bovenbedoelde door alle punten van r_0 afgebeelde kromme ρ^3 voortbrengen.

§ 3. We willen nu eerst weer onderzoeken, welke de beelden zijn van de ontaarde figuren ρ^3 , die zijn samengesteld uit een rechte d en eene kegelsnede c^2 , die op d rust, alsmede van die, welke uit drie rechten bestaan. Wij onderscheiden *tien* groepen ontaarde figuren ρ^3 .

Ontaarde figuren ρ^3 kunnen dan en dan alleen in deze congruentie voorkomen, als één der kegels K_1^2 of K_2^2 ontaardt in twee platte vlakken of als beide kegels dit doen, daar twee niet-ontaarde kegels één en ook maar één beschrijvende gemeen hebben. Een hier voorkomende kegel kan op *drie* manieren ontaarden.

De vlakken, waarin een kegel ontaarden kan, moeten door den top gaan. In den bundel (K_1^2) komen dus als ontaarde kegels voor de vlakkenparen $A_1 A_2 A_3$ en $A_1 A_4 A_5$, $A_1 A_2 A_4$ en $A_1 A_3 A_5$ en ten derde $A_1 A_2 A_5$ en $A_1 A_3 A_4$. In den bundel (K_2^2) komen als ontaarde kegels voor de vlakkenparen $A_2 A_1 A_3$ en $A_2 A_4 A_5$, $A_2 A_1 A_4$ en $A_2 A_3 A_5$ en ten derde $A_2 A_4 A_5$ en $A_2 A_3 A_4$.

Ontaardt slechts één der beide kegels in een vlakkenpaar, dan is hun voortbrengsel een uit een rechte d en een kegelsnede c^2 bestaande figuur ρ^3 ; doen ze het beide, dan brengen

ze een uit drie rechten samengestelde figuur ρ^3 voort of ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 , waaronder drie uit drie rechten bestaande. Dit laatste geval doet zich voor, als de vlakkenparen, waarin twee kegels uiteen vallen, een gemeenschappelijk exemplaar hebben. Het aantal vlakken, waarin bij deze congruentie kegelsneden, als bestanddeelen van door de punten A_1, A_2, A_3, A_4 en A_5 gaande figuren ρ^3 , kunnen liggen, bedraagt $C_5^3 = 10$, waarmee het aantal van tien groepen ontaarde figuren ρ^3 is verklaard. We zullen ze nu gaan bespreken.

Groep I. Wij beschouwen het vlak $A_1 A_2 A_3$. Ter bekorting zullen we het vlak $A_k A_l A_m$ door ϕ_{klm} en de rechte $A_k A_l$ door d_{kl} aanduiden. Het vlak $A_1 A_2 A_3$ noemen we dus ϕ_{123} .

De rechte d_{45} moge ϕ_{123} in het punt B_{45} snijden. In ϕ_{123} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1, A_2, A_3 en B_{45} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{45} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bezit drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep worden voortgebracht door twee, elk in twee vlakken uiteengevallen, kegels: ϕ_{123}, ϕ_{145} en ϕ_{213}, ϕ_{245} . Ze worden dus alle afgebeeld in één enkel punt, S_1 , het snijpunt der beeldstralen p en q van de puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 , op c_1 en c_2 door de vlakkenparen ingesneden. S_1 is dus een *singulier* punt van de afbeelding.

Groep II. Wij beschouwen het vlak ϕ_{124} . De rechte d_{35} moge dit in het punt B_{35} snijden. In ϕ_{124} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1, A_2, A_4 en B_{35} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{35} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bevat drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep worden voortgebracht door twee, elk in twee vlakken uiteengevallen, kegels: ϕ_{124}, ϕ_{135} en ϕ_{214}, ϕ_{235} . Ze worden dus, evenals die van groep I, afgebeeld in een punt S_2 , hetwelk dus ook een *singulier* punt van de afbeelding is.

Groep III. Wij beschouwen het vlak ϕ_{125} . De rechte d_{34} moge dit in het punt B_{34} snijden. In ϕ_{125} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_2 , A_5 en B_{34} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{34} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bevat drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep worden voortgebracht door twee, elk in twee vlakken uiteengevallen, kegels: ϕ_{125} , ϕ_{134} en ϕ_{215} , ϕ_{234} . Ze worden dus afgebeeld in een punt S_3 , eveneens een *singulier* punt van de afbeelding.

Groep IV. Wij beschouwen het vlak ϕ_{134} . De rechte d_{25} moge dit in het punt B_{25} snijden. In ϕ_{134} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_3 , A_4 en B_{25} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{25} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bevat drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep worden voortgebracht door één, in twee vlakken uiteengevallen, kegel K_1^2 : ϕ_{134} , ϕ_{125} en alle kegels van den bundel (K_2^2). Dat vlakkenpaar bepaalt op c_1 een puntenpaar van de involutie I_1^2 , dat tot beeld heeft een straal p_4 van den waaier (p). Deze straal is dus het beeld van alle ontaarde figuren ρ^3 dezer groep.

Op den straal p_4 ligt het punt S_3 omdat het vlakkenpaar ϕ_{134} , ϕ_{125} reeds in groep III optrad, zoodat één der exemplaren van groep III ook in groep IV voorkomt.

Groep V. Wij beschouwen het vlak ϕ_{135} . De rechte d_{24} moge dit in het punt B_{24} snijden. In ϕ_{135} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_3 , A_5 en B_{24} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{24} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bevat drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep worden voortgebracht door één, in twee vlakken uiteengevallen, kegel K_1^2 : ϕ_{135} , ϕ_{124} en alle kegels van den bundel (K_2^2). Het beeld van alle ontaarde figuren

ρ^3 dezer groep is dus een straal p_5 van den waaier (p).

Op den straal p_5 ligt het punt S_2 , omdat het vlakkenpaar ϕ_{135} , ϕ_{124} reeds in groep II optrad, zoodat deze vijfde groep één exemplaar gemeen heeft met groep II.

Groep VI. We beschouwen het vlak ϕ_{145} . De rechte d_{23} moge dit in het punt B_{23} snijden. In ϕ_{145} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , A_4 , A_5 en B_{23} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{23} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bevat drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep worden voortgebracht door één, in twee vlakken uiteengevallen, kegel K_1^2 : ϕ_{145} , ϕ_{123} en alle kegels van den bundel (K_2^2). Het beeld van alle ontaarde figuren ρ^3 dezer groep is dus een straal p_6 van den waaier (p).

Op den straal p_6 ligt het punt S_1 , omdat het vlakkenpaar ϕ_{145} , ϕ_{123} reeds in groep I optrad. De groepen I en VI hebben dus een gemeenschappelijk exemplaar.

Groepen VII, VIII en IX. Verwisselen we in de groepen IV, V en VI de punten A_1 en A_2 , dan krijgen we achtereenvolgens de groepen VII, VIII en IX. Maar verwisseling der punten A_1 en A_2 beteekent verwisseling van de rollen, die de kegels der beide bundels spelen bij de voortbrenging der ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Bij de groepen IV, V en VI vonden we als beeldfiguren der tot die groepen behorende ontaarde figuren ρ^3 drie stralen van den waaier (p), elk gaande door een punt S .

De figuren der groepen VII, VIII en IX worden dus afgebeeld door drie stralen van den waaier (q), ook elk gaande door een punt S .

We noemen de beeldrechten van deze groepen achtereenvolgens q_7 , q_8 en q_9 . Het punt S_3 ligt op q_7 , S_2 op q_8 en S_1 op q_9 , omdat de groepen III en VII, II en VIII en ook I en IX een gemeenschappelijke ontaarde figuur ρ^3 bezitten.

Groep X. We beschouwen het vlak ϕ_{345} . De rechte d_{12} moge dit in het punt B_{12} snijden. In ϕ_{345} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_3 , A_4 , A_5 en B_{12} , waarvan

elk exemplaar met de rechte d_{12} een ontaarde figuur ρ^3 vormt. Er zijn dus ∞^1 ontaarde figuren ρ^3 in deze groep.

De bundel (c^2) bevat drie ontaarde kegelsneden. Er zijn dus drie uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 in deze groep.

De figuren dezer groep hebben alle als lineair bestanddeel de gemeenschappelijke basisribbe d_{12} der beide bundels (K_1^2) en (K_2^2), terwijl het quadratische bestanddeel gelegen is in het vlak ϕ_{345} , dat nooit deel kan uitmaken van een ontaarden kegel. Om dus een figuur van deze samenstelling voort te brengen, moeten twee kegels, één van den bundel (K_1^2) en één van den bundel (K_2^2), elkaar langs die gemeenschappelijke basisribbe d_{12} *aanraken*. Hunne doorsnede bestaat dan namelijk uit die basisribbe d_{12} , *dubbel geteld* en eene kegelsnede in het vlak ϕ_{345} , gaande door de punten A_3, A_4, A_5 en B_{12} en in B_{12} tot raaklijn hebbende de snijlijn van het gemeenschappelijk raakvlak der beide kegels langs d_{12} met het vlak ϕ_{345} .

De aldus aan elkaar toegevoegde kegels der beide bundels (K_1^2) en (K_2^2) rangschikken de puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 op c_1 en c_2 in eene verwantschap (1, 1), dus ook hunne beeldrechten in het tafereel α . Het voortbrengsel der beide waaiers (p) en (q) is dus een *kegelsnede* σ^2 , gaande door de waaiertoppen P en Q . Zij is het beeld van alle tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Ontaardt één der kegels K_1^2 in twee vlakken, dan moet de toegevoegde kegel K_2^2 het ook doen. Deze twee ontaarde kegels raken elkaar echter *slechts dan* langs de basisribbe d_{12} , als ze het vlak door die basisribbe d_{12} tot *gemeenschappelijk bestanddeel* hebben. Dit is op drie manieren mogelijk. Ze kunnen gemeenschappelijk hebben het vlak $\phi_{123} \equiv \phi_{213}$, het vlak $\phi_{124} \equiv \phi_{214}$ of het vlak $\phi_{125} \equiv \phi_{215}$.

De drie tot deze groep behorende door de drie paar in twee vlakken uiteengevallen kegels voortgebrachte uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn reeds opgetreden in de groepen I, II en III en wel kwam in elk dezer groepen één dezer exemplaren voor. Hieruit volgt, dat de punten

S_1 , S_2 en S_3 op de kegelsnede σ^2 liggen. We kunnen deze dus voorstellen door $\sigma^2 (P Q S_1 S_2 S_3)$.

De afbeelding telt dus *vijf singuliere punten*: P , Q , S_1 , S_2 en S_3 , welke de beelden zijn van ∞^1 krommen ρ^3 der congruentie.

Hiermee zijn alle tot de congruentie van REYE behorende ontaarde figuren ρ^3 aangewezen.

§ 4. We gaan nu eerst weer onderzoeken, hoeveel uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 deze congruentie bevat.

Tellen we de tot de tien in § 3 behandelde groepen behorende gevonden uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 samen, dan vinden we het getal 30, want elk groep bezit er drie. Er zijn echter geen 30 *verschillende* dergelijke figuren. De afbeelding leert ons, dat we ze alle dubbel geteld hebben: *er zijn er slechts vijftien*.

Wat zich bij de in de vorige hoofdstukken behandelde congruenties niet heeft voorgedaan is, dat de snijpunten der beeldfiguren *uitsluitend* uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 vertegenwoordigen, welke aan de verschillende groepen gemeenschappelijk toebehooren. In de tien groepen kunnen geen gelijke niet-ontaarde kegelsneden voorkomen, omdat geen enkele groep een vlak, waarin zoo'n niet ontaarde kegelsnede zou kunnen liggen, met een andere groep deelt. In de afbeelding hebben we dus eenvoudig de snijpunten der beeldfiguren onderling te tellen, rekening houdende met de beteekenis der singuliere punten.

In het singuliere punt S_1 snijden elkaar de rechten p_6 en q_9 en de kegelsnede σ^2 . Het punt S_1 vertegenwoordigt dus *drie* uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 . Hetzelfde geldt voor de singuliere punten S_2 en S_3 .

Er zijn verder in de figuur nog aanwezig *zes* niet-singuliere snijpunten van beeldrechten, namelijk van de stralen p_4 en q_8 , p_4 en q_9 , p_5 en q_7 , p_5 en q_9 , p_6 en q_7 en p_6 en q_8 . Deze vertegenwoordigen elk *één* uit drie rechten bestaande figuur ρ^3 .

De congruentie van REYE bevat dus totaal

$$3 \times 3 + 6 \times 1 = 15$$

uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 .

§ 5. Wij willen nu een onderzoek instellen naar het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 dezer congruentie, die op een gegeven rechte l rusten.

Een puntenpaar van de involutie I_1^2 op de rechte c_1 bepaalt één kegel K_1^2 . Deze snijdt de gegeven rechte l in twee punten. Door elk dezer beide punten gaat één kegel K_2^2 , die met de eerstgenoemde kegel K_1^2 een kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengt, die op l rust.

De twee kegels K_2^2 bepalen op de rechte c_2 twee puntenparen van de involutie I_2^2 , die op deze wijze aan het puntenpaar der I_1^2 , dat K_1^2 op c_1 bepaalt, zijn toegevoegd.

Eenzoo snijdt een gegeven kegel K_2^2 op de rechte c_2 een puntenpaar der involutie I_2^2 in, waaraan twee puntenparen der I_1^2 op c_1 zijn toegevoegd, die daarop ingesneden worden door de twee kegels K_1^2 , welke ieder gaan door één der beide snijpunten van de rechte l met den kegel K_2^2 .

De puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 op c_1 en c_2 worden op deze wijze gerangschikt in eene verwantschap (2, 2) dus ook is dit het geval met hunne beelden in tafereel α . Het voortbrengsel der beide waaiers (p) en (q) is dus eene *kromme van den vierden graad*, λ^4 , die de waaiertoppen P en Q tot dubbelpunten heeft.

In het vlak ϕ_{123} ligt één kegelsnede, die op l rust; evenzoo bezit de bundel (c^2) in het vlak ϕ_{124} en die, welke in het vlak ϕ_{125} ligt, een exemplaar, dat op l rust. Van elk der groepen I, II en III behoort dus één ontaarde figuur ρ^3 tot de hier beschouwde. De singuliere punten S_1 , S_2 en S_3 liggen dus op de kromme λ^4 . Deze kunnen we dus voorstellen door $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2 S_3)$. Zij is het beeld van het oppervlak Λ , gevormd door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op de gegeven lijn l rusten.

We zullen nu van dit oppervlak Λ den graad bepalen, door te onderzoeken, in hoeveel punten een willekeurige rechte l' het snijdt.

De krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op de rechte l' rusten, vormen een oppervlak Λ' , dat afgebeeld wordt door eene kromme $\mu^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2 S_3)$. Deze kromme snijdt $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2 S_3)$

in $4 \times 4 = 16$ punten, waarvan er $2 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1 = 11$ in de singuliere punten vallen, dus vijf er buiten. Vijf krommen ρ^3 van het oppervlak Λ liggen dus tevens op het oppervlak Λ' , dat wil zeggen rusten tevens op l' . De rechte l' snijdt het oppervlak Λ dus in vijf punten, zoodat het een *oppervlak van den vijfden graad*, Λ^5 , is.

Ook beteekent het bezit van vijf niet-singuliere snijpunten der beide beeldkrommen λ^4 en μ^4 , dat er *vijf krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die op twee gegeven rechten l en l' rusten*.

Er is één kromme ρ^3 der $[\rho^3]$, die de rechte l tot koorde heeft. De kromme $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2 S_3)$ heeft in het beeldpunt dezer kromme ρ^3 een dubbelpunt. Zij bezit dus drie dubbelpunten en is derhalve rationaal.

Met behulp van de afbeelding kunnen we nu ook weer vinden, welke rechte lijnen er op het oppervlak Λ^5 liggen.

De kromme $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2 S_3)$ snijdt de kegelsnede $\sigma^2 (P Q S_1 S_2 S_3)$ in $4 \times 2 - 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ niet-singulier punt.

Zij gaat door de singuliere punten S_1 , S_2 en S_3 en snijdt elk der zes stralen p_4 , p_5 , p_6 , q_7 , q_8 en q_9 in één niet-singulier punt.

Uit een en ander leiden wij af, dat van elk der tien groepen ontaarde figuren ρ^3 één exemplaar op het oppervlak Λ^5 is gelegen.

Dit oppervlak bezit dus de *tien hoofdkoorden* der $[\rho^3]$ als enkelvoudige rechten en *tien kegelsneden*, elk gelegen in één der tien in de groepen ontaarde figuren ρ^3 optredende vlakken, die met deze hoofdkoorden ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ vormen.

Eindelijk ligt op Λ^5 de rechte l , terwijl de kromme ρ^3 , die l tot koorde heeft, *dubbelskromme* op dit oppervlak is.

Twee oppervlakken Λ^5 , behoorende bij de rechten l en l' hebben gemeen: de vijf krommen ρ^3 , die op beide rechten rusten en de tien hoofdkoorden der congruentie. Hunne doorsnede is dus van den graad

$$5 \times 3 + 10 \times 1 = 25.$$

§ 6. De krommen ρ^3 der congruentie, die aan een gegeven vlak ϕ raken, vormen een oppervlak, waarvan we door middel eener afbeelding den graad willen bepalen.

Een puntenpaar der involutie I_1^2 op c_1 draagt één kegel K_1^2 . Deze snijdt een gegeven vlak ϕ volgens een kegelsnede c_1^2 , die gaat door de doorgangspunten van de basisribben d_{12} , d_{13} , d_{14} en d_{15} van den bundel (K_1^2) met ϕ .

Een kegel K_2^2 snijdt het vlak ϕ volgens eene kegelsnede c_2^2 , die door de doorgangspunten van de basisribben d_{21} , d_{23} , d_{24} en d_{25} van den bundel (K_2^2) met ϕ gaat.

We noemen het doorgangspunt van de basisribbe $d_{21} \equiv d_{12}$, dat op *beide* kegelsneden ligt, D .

De twee kegels K_1^2 en K_2^2 brengen een kromme ρ^3 der congruentie voort, die het vlak ϕ snijdt in de drie buiten D vallende snijpunten der beide kegelsneden c_1^2 en c_2^2 .

De kegels van den bundel (K_2^2) bepalen in het vlak ϕ een bundel kegelsneden (c_2^2) , waarvan dus elk exemplaar de kegelsnede c_1^2 behalve in D , nog snijdt in drie buiten D vallende punten. Alleen *die* kegel K_2^2 , die den kegel K_1^2 langs de gemeenschappelijke basisribbe d_{12} aanraakt, snijdt ϕ volgens een in D aan c_1^2 rakende kegelsnede c_2^2 , zoodat in dit ééne geval één der drie bedoelde snijpunten in D valt. Maar dan gaat door D ook de voortgebrachte kromme ρ^3 der $[\rho^3]$; deze is dan echter noodzakelijkerwijze ontaard in de rechte d_{12} en de kegelsnede c^2 , gelegen in het vlak ϕ_{345} en bepaald door de punten A_3 , A_4 , A_5 en de beide snijpunten D' en D'' van de kegelsnede c_1^2 met ϕ_{345} .

De bundel kegelsneden (c_2^2) snijdt dus op de vaste kegelsnede c_1^2 eene kubische involutie I^3 in. Deze heeft vier dubbelpunten; het komt dus vier maal voor, dat de kegelsnede c_1^2 geraakt wordt door een exemplaar van den bundel (c_2^2) .¹⁾

Telkens echter als dit gebeurt, raakt ook de bijbehorende kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ aan het vlak ϕ . Op den kegel K_1^2 liggen dus vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, welke uit den kegel K_1^2 gesneden worden door vier kegels van den bundel

¹⁾ De punten D' en D'' zijn blijkbaar de aan D toegevoegde punten der I^3 op c_1^2 .

(K_2^2). Deze vier kegels K_2^2 bepalen op de rechte c_2 vier puntenparen der involutie I_2^2 , welke aldus aan het door den kegel K_1^2 op c_1 bepaalde puntenpaar der I_1^2 zijn toegevoegd.

Op dezelfde manier kunnen we beredeneeren, dat op een gegeven kegel K_2^2 vier krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gelegen zijn, die aan het vlak ϕ raken. De kegel K_2^2 bepaalt op de rechte c_2 één puntenpaar der involutie I_2^2 ; de vier kegels K_1^2 , die uit den kegel K_2^2 de vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ snijden, bepalen op c_1 vier puntenparen der I_1^2 , welke aan het zoo juist genoemde puntenpaar der I_2^2 op c_2 zijn toegevoegd.

De puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 op c_1 en c_2 worden op deze wijze gerangschikt in eene verwantschap (4, 4), dus zal dit ook het geval zijn met hunne beeldrechten in het tafereel α . Het voortbrengsel der beide waaiers (p) en (q) is dus een *kromme van den achtsten graad*, δ^8 , die de waaier-toppen P en Q tot viervoudige punten heeft.

De vlakken ϕ_{123} , ϕ_{124} en ϕ_{125} worden ieder door het vlak ϕ volgens eene rechte lijn gesneden. Van elk der bundels kegelsneden, die in de genoemde vlakken gelegen zijn, raken twee exemplaren aan die snijlijn met ϕ , dus aan ϕ ; deze twee exemplaren zijn bestanddeelen van krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, zoodat van elk der groepen I, II en III twee ontaarde figuren ρ^3 tot de aan ϕ rakende behooren. Hieruit volgt, dat de singuliere punten S_1 , S_2 en S_3 dubbelpunten van δ^8 zijn. We kunnen deze dus aanduiden door $\delta^8(P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2 S_3^2)$. Zij is het beeld van het oppervlak Δ , dat beschreven wordt door alle krommen ρ^3 der congruentie, die aan het gegeven vlak ϕ raken.

We gaan nu van dit oppervlak Δ den graad bepalen, door te onderzoeken, in hoeveel punten een willekeurige rechte l het snijdt.

De beeldkrommen $\delta^8(P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2 S_3^2)$ en $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2 S_3)$ snijden elkaar in $8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 3 \times 2 \times 1 = 10$ niet-singuliere punten. Dat beteekent, dat er tien krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die zoowel aan een gegeven vlak ϕ raken als op een gegeven rechte l rusten. Het oppervlak Δ wordt dus door een willekeurige rechte l in tien punten gesneden. Het is derhalve een *oppervlak van den tienden graad*, Δ^{10} .

De beeldkrommen $\delta^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2 S_3^2)$ en $\epsilon^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2 S_3^2)$, van twee oppervlakken Δ^{10} , behoorende bij de vlakken ϕ en ψ , snijden elkaar in $64 - 2 \times 4 \times 4 - 3 \times 2 \times 2 = 20$ niet-singuliere punten. *Er zijn dus twintig krommen ρ^3 der congruentie, die aan twee gegeven vlakken ϕ en ψ raken.*

Op dezelfde wijze, als dat bij het oppervlak Λ^5 heeft plaats gehad, kunnen we ook voor het oppervlak Δ^{10} met behulp der afbeelding uitmaken, welke rechten er op liggen.

De kromme $\delta^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2 S_3^2)$ snijdt de kegelsnede $\sigma^2 (P Q S_1 S_2 S_3)$ in $8 \times 2 - 2 \times 4 - 3 \times 2 = 2$ niet-singuliere punten.

Zij heeft de singuliere punten S_1, S_2 en S_3 tot dubbelpunten en snijdt elk der zes stralen p_4, p_5, p_6, q_7, q_8 en q_9 in twee niet-singuliere punten.

Uit het bovenstaande besluiten wij, dat van elk der tien groepen ontaarde figuren ρ^3 twee exemplaren op het oppervlak Λ^{10} gelegen zijn.

Dit oppervlak bezit dus de *tien* hoofdkoorden der $[\rho^3]$ als *dubbelrechten* en *twintig kegelsneden*, paarsgewijze gelegen in de tien in de groepen ontaarde figuren ρ^3 optredende vlakken en met deze hoofdkoorden ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ vormend.

Twee oppervlakken Δ^{10} , behoorende bij de vlakken ϕ en ϕ' , hebben gemeen: de 20 krommen ρ^3 , die beide vlakken aanraken en de tien hoofdkoorden der congruentie als dubbelrechten. De doorsnede van twee zoodanige oppervlakken is dus van den graad

$$20 \times 3 + 10 \times 4 = 100.$$

HOOFDSTUK V.

De congruentie van STUYVAERT.

§ 1. Wij denken ons ten slotte gegeven twee punten A_1 en A_2 en drie rechten b_1 , b_2 en b_3 en beschouwen alle kubische ruimtekrommen, die door A_1 en A_2 gaan en b_1 , b_2 en b_3 tot koorden hebben. Wij zullen bewijzen, dat deze kubische ruimtekrommen eene bilineaire congruentie vormen, welke voortgebracht kan worden door twee bundels quadratische oppervlakken, welke wij weer zullen aangeven door (Φ_1^2) en (Φ_2^2) .

Noemen wij daartoe de transversalen door A_1 over b_1 en b_2 , door A_1 over b_1 en b_3 , door A_2 over b_1 en b_2 en door A_2 over b_1 en b_3 achtereenvolgens d_{23} , d_{22} , d_{13} en d_{12} , dan vormen de vierzijden b_1 , b_2 , d_{23} , d_{13} en b_1 , b_3 , d_{22} , d_{12} de bases van twee bundels quadratische oppervlakken (Φ_1^2) en (Φ_2^2) . Elk oppervlak Φ_1^2 geeft met elk oppervlak Φ_2^2 eene doorsnede, die bestaat uit de rechte b_1 en eene kubische ruimtekromme, die gaat door de punten A_1 en A_2 en die de rechte b_1 en dus ook de rechten b_2 en b_3 tot koorden heeft. De beide bundels brengen dus blijkbaar de bovenbedoelde congruentie voort, welke ook nu weer *bilineair* is en den naam *congruentie van STUYVAERT* draagt.

We zullen de transversalen door A_1 over b_2 en b_3 en door A_2 over b_2 en b_3 achtereenvolgens noemen d_{21} en d_{11} . Zij spelen een rol bij de ontaarde figuren ρ^3 .

Hoewel aan de rechte b_1 bij de samenstelling der beide bundels quadratische oppervlakken eene bijzondere taak is opgedragen — zij is *gemeenschappelijke* basisribbe, terwijl de rechten b_2 en b_3 elk maar tot de basisfiguur van één der beide bundels behooren — is zij toch gelijkwaardig met de rechten b_2 en b_3 . Wat dan ook in dit hoofdstuk ten aanzien

van één der drie rechten b bewezen wordt, geldt voor alle drie. Wij zouden dezelfde congruentie verkregen hebben, als we de rollen der rechten b_1 en b_2 of b_1 en b_3 hadden verwisseld.

Een kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ snijdt ieder oppervlak Φ^2 , waarop ze *niet* ligt, in *geen andere punten*, dan die, welke gelegen zijn op de basisfiguur van den bundel, waartoe Φ^2 behoort. Hieruit volgt, dat de transversalen door A_1 en ook die door A_2 over twee der rechten b door *geen enkele* kromme ρ^3 , die niet ontaard is, buiten de punten A_1 en A_2 gesneden worden. Deze transversalen, die toch wel degelijk op de oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 gelegen zijn, komen dus voor als bestanddeelen van ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

§ 2. We zullen van de congruentie van STUYVAERT eene afbeelding op het puntenveld ontwerpen, op overeenkomstige wijze, als is geschied bij de congruentie van REYE.

Inplaats echter van twee vaste rechten *aan te nemen*, zooals in hoofdstuk IV gedaan is, hebben we er hier reeds de *beschikking* over: we gebruiken de rechten b_2 en b_3 voor ons doel.

De oppervlakken Φ_1^2 van den bundel (Φ_1^2) snijden op de rechte b_3 eene quadratische involutie I_1^2 in en de exemplaren van den bundel (Φ_2^2) bepalen op b_2 eene quadratische involutie I_2^2 .

We nemen vervolgens weer een plat vlak α aan en brengen nu de *puntenparen* van de involutie I_1^2 op b_3 in projectief verband met de *stralen* van een waaier (p) met top P in het vlak α .

Evenzoo leggen wij een projectief verband tusschen de *puntenparen* van de involutie I_2^2 op b_2 en de *stralen* van een waaier (q) met top Q in α .

Een oppervlak Φ_1^2 en een oppervlak Φ_2^2 brengen één kromme ρ^3 der congruentie voort; het oppervlak Φ_1^2 snijdt b_3 in een puntenpaar der I_1^2 , het oppervlak Φ_2^2 snijdt b_2 in een puntenpaar der I_2^2 .

Het snijpunt der stralen p en q , welke aan deze twee puntenparen zijn toegevoegd, aanvaarden wij nu als beeld

van de door deze twee oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 voortgebrachte kromme ρ^3 der $[\rho^3]$.

Deze afbeelding is *één aan één*. Elke kromme ρ^3 bepaalt in α één punt, maar ook omgekeerd bepaalt elk punt in het vlak α één straal p en één straal q , dus één puntenpaar van de I_1^2 op b_3 en één puntenpaar van de I_2^2 op b_2 , dus één oppervlak van elk der bundels, dus één kromme ρ^3 van de congruentie.

Er is één kromme ρ^3 van de $[\rho^3]$, die afgebeeld wordt door ieder punt van de rechte r_0 , die de toppen P en Q der beide waaiers verbindt.

De waaiertoppen P en Q zijn *singuliere* punten van de afbeelding, want zij zijn de beelden van ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$. P is het beeld van *die* ∞^1 krommen ρ^3 , die gelegen zijn op het oppervlak Φ_2^2 , hetwelk door den straal QP van den waaier (q) wordt afgebeeld en Q is het beeld van *die* ∞^1 krommen ρ^3 , die liggen op het door den straal PQ van den waaier (p) afgebeelde oppervlak Φ_1^2 . Het zijn nu juist *deze* beide oppervlakken, welke de bovenbedoelde door alle punten van r_0 afgebeelde kromme ρ^3 voortbrengen.

§ 3. Allereerst gaan we nu weer onderzoeken, hoe de ontaarde figuren ρ^3 dezer congruentie, die zijn samengesteld uit een rechte d en een kegelsnede c^2 , die op d rust, alsmede die, welke uit drie rechten bestaan, in het tafereel α worden afgebeeld.

De ontaarde figuren ρ^3 van deze $[\rho^3]$ zullen door ons in *zeven* groepen ondergebracht worden.

Groep I. We brengen een vlak ϕ_{11} door de rechte b_1 en het punt A_1 . De rechten b_2 en b_3 en de transversaal d_{11} mogen dit vlak achtereenvolgens snijden in de punten H_2 , F_3 en D_{11} . De steunpunten van d_{11} op b_2 en b_3 noemen we B_2 en B_3 .

In ϕ_{11} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , H_2 , F_3 en D_{11} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{11} een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Er zijn er dus ∞^1 in deze groep.

Wegens de drie ontaarde kegelsneden, die tot den bundel (c^2) behooren, bezit deze groep drie uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Alle figuren ρ^3 dezer groep snijden b_2 zoowel als b_3 in een vast puntenpaar der door die rechten gedragen involuties. Ze worden dus alle afgebeeld in het snijpunt S_1 van een straal p en een straal q .

Het punt S_1 is dus een *singulier* punt van de afbeelding.

Groep II. We brengen een vlak ϕ_{21} door de rechte b_1 en het punt A_2 . De rechten b_2 en b_3 en de transversaal d_{21} mogen dit vlak achtereenvolgens snijden in de punten G_2 , E_3 en D_{21} . De steunpunten van d_{21} op b_2 en b_3 noemen we C_2 en C_3 .

In ϕ_{21} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_2 , G_2 , E_3 en D_{21} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{21} een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Er zijn er dus ∞^1 in deze groep.

Wegens de drie ontaarde kegelsneden, die tot den bundel (c^2) behooren, bezit deze groep drie uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Alle figuren ρ^3 dezer groep snijden b_2 zoowel als b_3 in een vast puntenpaar der door deze rechten gedragen involuties. Ze worden dus alle afgebeeld in het snijpunt S_2 van een straal p en een straal q .

Het punt S_2 is dus een *singulier* punt van de afbeelding.

Groep III. We brengen een vlak ϕ_{12} door het punt A_1 en de rechte b_2 . De rechte b_1 en de transversaal d_{12} mogen dit vlak achtereenvolgens snijden in de punten H_1 en D_{12} ; de rechte b_3 snijdt het in het punt C_3 . Het steunpunt van d_{12} op b_1 noemen we E_1 ; dat van d_{12} op b_3 is het punt E_3 .

In ϕ_{12} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , H_1 , C_3 en D_{12} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{12} een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Er zijn er dus ∞^1 in deze groep.

Wegens de drie tot den bundel (c^2) behoorende ontaarde kegelsneden, bezit deze groep drie uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Alle figuren dezer groep snijden de rechte b_3 in de twee vaste punten C_3 en E_3 , welk paar der op b_3 gelegen I_1^2 ook door alle exemplaren van groep II op deze rechte werd ingesneden. Het beeld van dit puntenpaar der I_1^2 is de straal p , die reeds in groep II optrad en dien we p_3 zullen noemen.

De figuren dezer groep snijden op de rechte b_2 de involutie I_2^2 in. Het beeld van de tot deze groep behorende figuren ρ^3 is dus de straal p_3 , op welken het singuliere punt S_2 is gelegen.

Groep IV. We brengen een vlak ϕ_{22} door het punt A_2 en de rechte b_2 . De rechte b_1 en de transversaal d_{22} mogen dit vlak achtereenvolgens snijden in de punten G_1 en D_{22} ; de rechte b_3 snijdt het in het punt B_3 . Het steunpunt van d_{22} op b_1 noemen we F_1 ; dat van d_{22} op b_3 is het punt F_3 .

In ϕ_{22} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_2 , G_1 , B_3 en D_{22} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{22} een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Er zijn er dus ∞^1 in deze groep.

Wegens de drie tot den bundel (c^2) behorende ontaarde kegelsneden, bezit deze groep drie uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Alle figuren dezer groep snijden de rechte b_3 in de twee vaste punten B_3 en F_3 , welk paar der op b_3 gelegen I_1^2 ook door alle exemplaren van groep I op deze rechte werd ingesneden. Het beeld van dit puntenpaar der I_1^2 is de straal p , die reeds in groep I optrad en dien we p_4 zullen noemen.

De figuren dezer groep snijden op de rechte b_2 de involutie I_2^2 in. Het beeld van de tot deze groep behorende figuren ρ^3 is dus de straal p_4 , op welken het singuliere punt S_1 is gelegen.

Groep V. We brengen een vlak ϕ_{13} door het punt A_1 en de rechte b_3 . De rechte b_1 en de transversaal d_{13} mogen dit vlak achtereenvolgens snijden in de punten F_1 en D_{13} ; de rechte b_2 snijdt het in het punt C_2 . Het steunpunt van d_{13} op b_1 noemen we G_1 ; dat van d_{13} op b_2 is het punt G_2 .

In ϕ_{13} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_1 , F_1 , C_2 en D_{13} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{13}

een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Er zijn er dus ∞^1 in deze groep.

Wegens de drie tot den bundel (c^2) behorende ontaarde kegelsneden bezit deze groep drie uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Alle figuren dezer groep snijden de rechte b_2 in de twee vaste punten C_2 en G_2 , welk paar der op b_2 gelegen I_2^2 ook door alle exemplaren van groep II op deze rechte werd ingesneden. Het beeld van dit puntenpaar der I_2^2 is de straal q , die reeds in groep II optrad en dien we q_5 zullen noemen.

De figuren dezer groep snijden op de rechte b_3 de involutie I_1^2 in. Het beeld van de tot deze groep behorende figuren ρ^3 is dus de straal q_5 , op welken het singuliere punt S_2 is gelegen.

Groep VI. We brengen een vlak ϕ_{23} door het punt A_2 en de rechte b_3 . De rechte b_1 en de transversaal d_{23} mogen dit vlak achtereenvolgens snijden in de punten E_1 en D_{23} ; de rechte b_2 snijdt het in het punt B_2 . Het steunpunt van d_{23} op b_1 noemen we H_1 ; dat van d_{23} op b_2 is het punt H_2 .

In ϕ_{23} ligt een bundel kegelsneden (c^2) met basispunten A_2 , E_1 , B_2 en D_{23} , waarvan elk exemplaar met de rechte d_{23} een ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt. Er zijn er dus ∞^1 in deze groep.

Wegens de drie tot den bundel (c^2) behorende ontaarde kegelsneden bezit deze groep drie uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Alle figuren dezer groep snijden de rechte b_2 in de twee vaste punten B_2 en H_2 , welk paar der op b_2 gelegen I_2^2 ook door alle exemplaren van groep I op deze rechte werd ingesneden. Het beeld van dit puntenpaar der I_2^2 is de straal q , die reeds in groep I optrad en dien we q_6 zullen noemen.

De figuren dezer groep snijden op de rechte b_3 de involutie I_1^2 in. Het beeld van de tot deze groep behorende figuren ρ^3 is dus de straal q_5 , op welken het singuliere punt S_1 is gelegen.

Groep VII. We beschouwen den vlakkenbundel (ϕ) door de punten A_1 en A_2 . In elk vlak ϕ ligt een kegelsnede c^2 ,

gaande door de punten A_1 en A_2 en de doorgangspunten der drie basisribben b_1 , b_2 en b_3 met ϕ .

De transversalen van b_1 , b_2 en b_3 liggen op eene hyperboloïde $\mathcal{S}^2$, die door ϕ gesneden wordt volgens eene kegelsnede h^2 , die de kegelsnede c^2 snijdt in de drie genoemde doorgangspunten en nog een vierde punt, door hetwelk één transversaal over b_1 , b_2 en b_3 gaat, die met c^2 een ontaarde figuur ρ^3 vormt.

Bij elk vlak ϕ van den bundel (ϕ) behoort dus één ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$. Deze groep telt er dus ∞^1 .

Liggen twee van de drie snijpunten van de rechten b_1 , b_2 en b_3 met een vlak ϕ collineair met A_1 of met A_2 , dan ont-aardt de in dat vlak ϕ gelegen kegelsnede in een lijnenpaar, zoodat dan de bijbehorende figuur ρ^3 uit drie rechten is samengesteld.

Daar dit geval zich *zes maal* voordoet, namelijk telkens, als een vlak ϕ gaat door één der zes rechten d_{11} , d_{21} , d_{12} , d_{22} , d_{13} en d_{23} , m. a. w. samenvalt met één der in de zes voorafgaande groepen optredende vlakken, bezit deze groep al minstens *zes* ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$, die uit drie rechten zijn samengesteld.

We kunnen hieruit nu reeds besluiten, dat de beeldfiguur van de exemplaren dezer groep door de singuliere punten S_1 en S_2 moet gaan.

Zijn de drie snijpunten van de rechten b_1 , b_2 en b_3 met een vlak ϕ collineair, dan ont-aardt de in dat vlak ϕ gelegen kegelsnede in een lijnenpaar, dat bestaat uit de rechte $A_1 A_2$ en de verbindingslijn van de drie snijpunten der rechten b met ϕ . Het lineaire bestanddeel buiten het vlak ϕ , dat met dit lijnenpaar een uit drie rechten bestaande figuur ρ^3 der $[\rho^3]$ vormt, is dan de *tweede* transversaal, die de vier lijnen $A_1 A_2$, b_1 , b_2 en b_3 bezitten.

Het komt dus weliswaar *tweemaal* voor, dat de snijpunten van de rechten b_1 , b_2 en b_3 met een vlak ϕ collineair zijn, maar we vinden in beide gevallen dezelfde ontaarde figuur ρ^3 der $[\rho^3]$.

Deze *zevende* groep bezit dus *zeven* uit drie rechten bestaande figuren ρ^3 der $[\rho^3]$.

Ons rest nu nog, na te gaan, door welke figuur in het tafereel α de exemplaren dezer groep afgebeeld worden.

Door een puntenpaar K_1, K_2 van de involutie I_1^2 op b_3 gaan twee ontaarde figuren ρ^3 . Immers: het vlak ϕ kan door het punt A_1 gaan; dan gaat het lineaire bestanddeel door het punt A_2 , maar ook het omgekeerde kan zich voordoen. Deze twee figuren ρ^3 snijden op de rechte b_2 twee puntenparen der I_2^2 in.

Aan elk puntenpaar der I_1^2 op b_3 zijn op deze wijze twee puntenparen der I_2^2 op b_2 toegevoegd, maar ook omgekeerd zijn aan een gegeven puntenpaar der I_2^2 op b_2 twee puntenparen der I_1^2 op b_3 toegevoegd.

De puntenparen der beide involuties I_1^2 en I_2^2 op b_3 en b_2 worden hierdoor gerangschikt in eene verwantschap (2, 2), dus ook hunne beeldrechten in het tafereel α . Deze, dat zijn de stralen der beide waaiers (p) en (q), brengen dus eene *kromme van den vierden graad*, σ^4 , voort, welke derhalve het beeld is van de tot deze groep behorende ontaarde figuren ρ^3 der congruentie. Zij heeft de waaiertoppen P en Q tot dubbelpunten en gaat, zooals reeds is opgemerkt, door de singuliere punten S_1 en S_2 . We kunnen haar dus aanduiden met $\sigma^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$.

De meetkundige plaats Σ dezer ontaarde figuren ρ^3 is een *oppervlak van den zesden graad*, zooals we in § 6 zullen bewijzen met behulp van de afbeelding van het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op een gegeven rechte l rusten.

Die meetkundige plaats bestaat echter uit twee oppervlakken: dat, hetwelk door de kegelsneden c^2 , gelegen in de vlakken ϕ , wordt beschreven en dat, hetwelk de transversalen der rechten b_1, b_2 en b_3 vormen.

Het eerste is een *dimonoïde van den vierden graad*, Λ^4 , omdat in een willekeurig vlak ϕ een kegelsnede c^2 en de rechte $A_1 A_2$, die dubbel geteld moet worden, liggen en het tweede is de reeds genoemde hyperboloïde $\mathfrak{S}^2$.

§ 4. Met behulp der in het tafereel α ontstane beeld-

figuren willen we nu eerst weer uitvorschén, hoeveel uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 de congruentie van STUYVAERT bezit.

Tellen we de in de zeven groepen gevonden uit drie rechten bestaande ontaarde figuren ρ^3 samen, dan vinden we het getal 25. De afbeelding zal ons doen zien, dat dit niet het gezochte aantal is: *er zijn er slechts dertien*.

In het tafereel α aanschouwen we de volgende figuren: de singuliere punten S_1 en S_2 , de stralen p_3 en q_5 door S_2 , de stralen p_4 en q_6 door S_1 en de kromme van den vierden graad σ^4 ($P^2 Q^2 S_1 S_2$), die elk der stralen p_3 , p_4 , q_5 en q_6 in één niet-singulier punt snijdt. We noemen deze snijpunten achtereenvolgens P_3 , P_4 , Q_5 en Q_6 . Eindelijk snijden de stralen p_3 en q_5 elkander in een punt R_{35} en de stralen p_4 en q_6 elkander in een punt R_{46} .

Daar de zeven groepen ontaarde figuren geen vlakken, waarin *kegelsneden* gelegen zijn als bestanddeelen van figuren ρ^3 , gemeen hebben, vertegenwoordigen de snijpunten der beeldfiguren onderling slechts aan de groepen gemeenschappelijke exemplaren, die uit drie rechten bestaan.

Door elk der beide singuliere punten S_1 en S_2 gaan *drie* beeldfiguren. Deze punten vertegenwoordigen dus elk *drie* dubbelgetelde exemplaren. De vier punten P en de beide punten R wijzen ieder op *één* dubbel getelde figuur ρ^3 , zoodat de geheele afbeelding ons leert, dat er *twaalf dubbelgetelde figuren* ρ^3 in het getal 25 zijn opgesloten. De congruentie van STUYVAERT bevat dus *dertien uit drie rechten samengestelde ontaarde figuren* ρ^3 .

Het beeldpunt van de *niet dubbelgetelde* figuur ρ^3 , die uit drie rechten bestaat, ligt ergens op de beeldkromme σ^4 , want van de *zeven* dergelijke figuren van groep VII vallen er *zes* onder de dubbelgetelde. De figuur ρ^3 , bestaande uit de rechte $A_1 A_2$ en de beide transversalen van de rechten $A_1 A_2$, b_1 , b_2 en b_3 komt slechts eenmaal voor.

§ 5. Alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die gaan door een vast punt B op de gemeenschappelijke basisrechte b_1 der beide

bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) , vormen een oppervlak, waarvan we de afbeelding op het tafereel willen bepalen.

Door een punt B van de rechte b_1 gaan ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, voortgebracht door de ∞^1 paren elkander in B rakende oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 .

Door een puntenpaar der involutie I_1^2 op b_3 gaat één oppervlak Φ_1^2 ; dit oppervlak wordt in B door slechts één oppervlak Φ_2^2 geraakt. Dit aan Φ_1^2 in B rakende oppervlak Φ_2^2 bepaalt op de rechte b_2 een puntenpaar van de involutie I_2^2 , welk puntenpaar we aan dat op b_3 toevoegen.

Eenzoo bepaalt een puntenpaar der I_2^2 op b_2 één oppervlak Φ_2^2 , waaraan in B door slechts één oppervlak Φ_1^2 geraakt wordt. Dit laatste oppervlak bepaalt op de rechte b_3 een puntenpaar van de I_1^2 , hetwelk aldus aan dat op b_2 is toegevoegd.

De puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 op b_3 en b_2 worden hierdoor met elkander in projectief verband gebracht, dus ook de stralen der waaiers (p) en (q) door welke ze afgebeeld worden. De beide waaiers brengen dus eene kegelsnede β^2 voort, die door de waaiertoppen P en Q gaat.

Door het gegeven punt B van b_1 gaat één kegelsnede van den bundel (c^2) in het vlak ϕ_{11} door A_1 en b_1 , dus één figuur ρ^3 van groep I en ook één kegelsnede van den bundel (c^2) in het vlak ϕ_{21} door A_2 en b_1 , dus één figuur ρ^3 van groep II. De kegelsnede β^2 gaat dus ook door de beide singuliere punten S_1 en S_2 . Wij kunnen haar voorstellen door $\beta^2 (P Q S_1 S_2)$.

Deze kromme is nu het beeld van het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een gegeven punt B van b_1 gaan.

Dit oppervlak zal nader onderzocht worden in § 7.

§ 6. De krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op een gegeven rechte l rusten, beschrijven een oppervlak; naar dit oppervlak willen we nu eerst een onderzoek instellen.

Een puntenpaar van de involutie I_1^2 op de rechte b_3 bepaalt één oppervlak Φ_1^2 . Dit oppervlak snijdt de gegeven rechte l in twee punten. Door elk dezer beide punten gaat één

oppervlak Φ_2^2 , dat met het eerstgenoemde oppervlak Φ_1^2 een kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengt, die op l rust.

De twee oppervlakken Φ_2^2 bepalen op de rechte b_2 twee puntenparen van de involutie I_2^2 , die op deze wijze aan het puntenpaar der I_1^2 , dat Φ_1^2 op b_3 insnijdt, zijn toegevoegd.

Evenzoo snijdt een gegeven oppervlak Φ_2^2 op de rechte b_2 een puntenpaar der involutie I_2^2 in, waaraan twee puntenparen der I_1^2 op b_3 zijn toegevoegd, die daarop ingesneden worden door de twee oppervlakken Φ_1^2 , welke elk gaan door één der beide snijpunten van de rechte l met het oppervlak Φ_2^2 .

De puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 op b_3 en b_2 worden hierdoor gerangschikt in eene verwantschap (2, 2), dus heeft dit ook plaats met de stralen der beide waaiers (p) en (q), welke ze in het tafereel afbeelden. Deze waaiers brengen dus een *kromme van den vierden graad*, λ^4 , voort, die de waaiertoppen P en Q tot dubbelpunten heeft.

In het vlak ϕ_{11} ligt één kegelsnede, die op l rust; evenzoo bezit de bundel (c^2) in het vlak ϕ_{21} één exemplaar, dat op l rust. Van elk der groepen I en II rust dus één ontaarde figuur ρ^3 op l . De kromme λ^4 gaat dus door de beide singuliere punten S_1 en S_2 . Zij kan derhalve voorgesteld worden door $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$.

Deze kromme nu is het beeld van het door alle op l rustende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gevormde oppervlak, dat we Λ zullen noemen en waarvan we den graad willen bepalen, door het aantal zijner snijpunten met een willekeurige rechte l' te berekenen.

De krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op de rechte l' rusten, vormen een oppervlak Λ' , dat afgebeeld wordt door een kromme $\mu^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$. Deze kromme snijdt $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ in $4 \times 4 = 16$ punten. Van deze vallen er 4 in P , 4 in Q , 1 in S_1 en 1 in S_2 , dus tien in de singuliere punten. De beide krommen hebben dus zes niet-singuliere snijpunten. Dat beteekent, dat er zes krommen van het oppervlak Λ zijn, die tevens op l' rusten; deze rechte snijdt Λ dus in zes punten; het is derhalve een *oppervlak van den zesden graad*, Λ^6 .

Uit het gevonden aantal van zes niet-singuliere snijpunten

der beide beeldkrommen λ^4 en μ^4 leiden wij tevens af, dat de congruentie *zes krommen bevat, die op twee gegeven rechten l en l' rusten.*

Er is één kromme ρ_1^3 der $[\rho^3]$, die de rechte l tot koorde heeft. De kromme λ^4 heeft in het beeldpunt dezer kromme ρ_1^3 een derde dubbelpunt. Zij is dus rationaal.

De rechte lijnen, die op het oppervlak Λ^6 gelegen zijn, kunnen uit de beeldfiguren in het tafereel worden gevonden.

De kromme $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ snijdt de kegelsnede $\beta^2(P Q S_1 S_2)$ in $8 - 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$ niet-singuliere punten. Er gaan dus door elk punt van b_1 , dus ook van b_2 en b_3 wegens de gelijkwaardigheid der drie lijnen b , twee krommen ρ^3 van het oppervlak Λ^6 . De lijnen b_1 , b_2 en b_3 zijn dus *dubbelrechten* op Λ^6 .

De kromme $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ gaat door de beide singuliere punten S_1 en S_2 en snijdt elk der stralen p_3 , p_4 , q_5 en q_6 in één niet-singulier punt. Hieruit volgt, dat de rechten d_{11} , d_{21} , d_{12} , d_{22} , d_{13} en d_{23} *enkelvoudig* op Λ^6 liggen.

De kromme $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ snijdt de kromme $\sigma^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ in $16 - 2 \times 4 - 2 \times 1 = 6$ niet-singuliere punten. Wij besluiten hieruit, dat op het oppervlak Λ^6 zes transversalen over de drie rechten b_1 , b_2 en b_3 gelegen zijn.¹⁾

De rechte l ligt ook op Λ^6 , terwijl de kromme ρ^3 , die l tot koorde heeft, *dubbelkromme* op Λ^6 is.

Het oppervlak Λ^6 bezit dus *drie dubbelrechten, dertien enkelvoudige rechten* en *één dubbelkromme* ρ^3 .

Verder liggen er op Λ^6 *twaalf kegelsneden*, die elk met één der twaalf enkelvoudige rechten — de rechte l niet medegerekend — eene ontaarde figuur ρ^3 vormen.

Twee oppervlakken Λ^6 , behoorende bij de rechten l en l' , hebben gemeen: de zes krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op beide rechten rusten, de drie dubbelrechten en de zes enkelvoudige rechten d . Hunne doorsnede is dus van den graad

$$6 \times 3 + 3 \times 4 + 6 \times 1 = 36.$$

¹⁾ Ook putten we hieruit het bewijs, dat de meetkundige plaats der ontaarde figuren ρ^3 van groep VII door de rechte l in *zes* punten gesneden wordt en dus een *oppervlak van den zesden graad*, Σ^6 , is.

§ 7. Het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een vast punt B van b_1 gaan, heeft tot beeld de in § 5 gevonden kegelsnede $\beta^2(P Q S_1 S_2)$.

Deze kegelsnede snijdt de kromme $\lambda^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ in twee niet-singuliere punten, hetgeen zeggen wil, dat de rechte l twee krommen ρ^3 van het door β^2 afgebeelde oppervlak draagt. Zij snijdt dit oppervlak dus in twee punten; de door B gaande krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ liggen dus op een *quadratisch oppervlak* B^2 .

Het oppervlak Γ^2 , gevormd door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door een vast punt C van b_1 gaan, heeft tot beeld eene kegelsnede $\gamma^2(P Q S_1 S_2)$. De beeldkrommen $\beta^2(P Q S_1 S_2)$ en $\gamma^2(P Q S_1 S_2)$ snijden elkaar in vier punten, die *alle singulier zijn*.

Wij leiden hieruit af, dat er door twee willekeurige punten van de rechte b_1 *geen enkele* kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ gaat.

Ook volgt hieruit, dat alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die door B gaan, de rechte b_1 in een *vast* tweede punt B' snijden.

Deze uitkomst behoeft ons echter niet te verwonderen, als we ons de gelijkwaardigheid der drie rechten b herinneren. Door een gegeven punt K_1 van b_2 gaat één oppervlak Φ_2^2 , dat b_2 in een tweede punt K_2 snijdt. De punten K_1 en K_2 vormen een paar van de involutie I_2^2 . Door een punt K_1 van b_2 gaan dus ook ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, alle gelegen op een oppervlak Φ_2^2 en ook alle gaande door een ander vast punt K_2 van b_2 .

Het oppervlak B^2 is echter geen exemplaar van één der beide bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) . Dit blijkt ten eerste al uit het feit, dat zijn beeld een *kegelsnede* is en geen *straal* van één der beide waaiers (p) en (q) . Bovendien ligt de rechte b_1 er niet op: het oppervlak B^2 snijdt deze rechte in de twee vaste punten, welke alle op B^2 gelegen krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ dragen.

Op B^2 liggen de rechten b_2 en b_3 , omdat door *elk* punt van b_2 en ook van b_3 één kromme ρ^3 gaat, die ook door B gedragen wordt.

De kegelsnede $\beta^2(P Q S_1 S_2)$ snijdt de kromme $\sigma^4(P^2 Q^2 S_1 S_2)$ in twee niet-singuliere punten. Op B^2 liggen dus twee *transversalen* over b_1 , b_2 en b_3 .

Daar verder de kegelsnede $\beta^2(P Q S_1 S_2)$ door de beide

singuliere punten S_1 en S_2 gaat, liggen de rechten d_{11} en d_{21} op B^2 .

Eindelijk liggen op B^2 vier kegelsneden, die met deze twee laatstgenoemde rechten en de beide transversalen over b_1 , b_2 en b_3 vier ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ vormen.

Twee oppervlakken B^2 en Γ^2 , behoorende bij de punten B en C van b_1 hebben gemeen: de beide basisrechten b_2 en b_3 en hunne transversalen d_{11} en d_{21} door A_2 en A_1 .

De doorsnede van twee zoodanige oppervlakken, die van den vierden graad is, bestaat dus uit deze vier rechten.

§ 8. Ten slotte willen wij nog onderzoeken, welk oppervlak gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die een gegeven vlak ϕ aanraken.

Een puntenpaar der involutie I_1^2 op b_3 draagt één oppervlak Φ_1^2 . Dit oppervlak snijdt een gegeven vlak ϕ volgens eene kegelsnede ϕ_1^2 , die gaat door de doorgangspunten van de basisrechten b_1 , b_2 , d_{13} en d_{23} van den bundel (Φ_1^2) met ϕ .

Een oppervlak Φ_2^2 snijdt het vlak ϕ volgens eene kegelsnede ϕ_2^2 , die gaat door de doorgangspunten van de basisrechten b_1 , b_3 , d_{12} en d_{22} van den bundel (Φ_2^2) met ϕ .

We noemen het doorgangspunt van de basisrechte b_1 , dat op beide kegelsneden ligt, D .

De twee oppervlakken Φ_1^2 en Φ_2^2 brengen eene kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voort, die het vlak ϕ snijdt in de drie buiten D vallende snijpunten der beide kegelsneden ϕ_1^2 en ϕ_2^2 .

De oppervlakken van den bundel (Φ_1^2) bepalen in het vlak ϕ een bundel kegelsneden (ϕ^2) , waarvan dus elk exemplaar de kegelsnede ϕ_1^2 behalve in D , nog snijdt in drie buiten D vallende punten, behoudens één exemplaar, dat in D aan ϕ_1^2 raakt, voor de beschouwing van welke aangelegenheid wij verwijzen naar hoofdstuk IV, § 6.

De bundel kegelsneden (ϕ_2^2) snijdt dus op de vaste kegelsnede ϕ_1^2 eene kubische involutie I^3 in. Deze heeft vier dubbelpunten; het komt dus vier maal voor, dat de kegelsnede ϕ_1^2 geraakt wordt door een exemplaar van den bundel (ϕ_2^2) .

Telkens echter als dit gebeurt, raakt ook de bijbehorende

kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ aan het vlak ϕ . Op het oppervlak Φ_1^2 liggen dus vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, welke uit het oppervlak Φ_1^2 gesneden worden door vier oppervlakken van den bundel (Φ_2^2) . Deze vier oppervlakken Φ_2^2 bepalen op de rechte b_2 vier puntenparen der involutie I_2^2 , welke aldus aan het door het oppervlak Φ_1^2 op b_3 bepaalde puntenpaar der I_1^2 zijn toegevoegd.

Op dezelfde manier kunnen we beredeneeren, dat op een gegeven oppervlak Φ_2^2 vier krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gelegen zijn, die aan het vlak ϕ raken. Het oppervlak Φ_2^2 bepaalt op de rechte b_2 één puntenpaar der involutie I_2^2 ; de vier oppervlakken Φ_1^2 , die uit het oppervlak Φ_2^2 de vier aan ϕ rakende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ snijden, bepalen op b_3 vier puntenparen der I_1^2 , welke aan het zoo juist genoemde puntenpaar der I_2^2 op b_2 zijn toegevoegd.

De puntenparen der involuties I_1^2 en I_2^2 op b_3 en b_2 worden hierdoor gerangschikt in eene verwantschap (4, 4), dus heeft dit ook plaats met de stralen der beide waaiers (p) en (q) in het beeldvlak α , welke deze puntenparen vertegenwoordigen. Zij brengen dus een *kromme van den achtsten graad*, π^8 , voort, die de beide waaiertoppen P en Q tot viervoudige punten heeft.

De vlakken ϕ_{11} en ϕ_{21} worden ieder door het vlak ϕ volgens eene rechte lijn gesneden. Van elk der bundels kegelsneden, die in de genoemde vlakken gelegen zijn, raken twee exemplaren aan die snijlijn met ϕ , dus aan ϕ ; deze twee exemplaren zijn bestanddeelen van krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, zoodat van elk der groepen I en II twee ontaarde figuren ρ^3 tot de aan ϕ rakende behooren. Hieruit volgt, dat de singuliere punten S_1 en S_2 dubbelpunten van π^8 zijn. We kunnen deze dus aanduiden door $\pi^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2)$. Zij is het beeld van het oppervlak II, dat beschreven wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die aan het gegeven vlak ϕ raken.

We gaan nu van dit oppervlak II den graad bepalen. Daartoe onderzoeken we weer, in hoeveel punten een willekeurige rechte l het snijdt.

De beeldkrommen $\pi^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2)$ en $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2)$ snijden elkaar in $8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 12$ niet-singu-

liere punten. Dat beteekent, dat er twaalf krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die zoowel aan een gegeven vlak ϕ raken als op een gegeven rechte l rusten. Het oppervlak Π wordt dus door een willekeurige rechte l in twaalf punten gesneden. Het is derhalve een *oppervlak van den twaalfden graad*, Π^{12} .

De beeldkrommen $\pi^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2)$ en $\tau^8 (P^4 Q^1 S_1^2 S_2^2)$ van twee oppervlakken Π^{12} , behoorende bij de vlakken ϕ en ψ , snijden elkaar in $64 - 2 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 = 24$ niet-singuliere punten. *Er zijn dus vier en twintig krommen ρ^3 der congruentie, die twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken.*

De beeldfiguren in het tafereel α wijzen ons ook nu weer aan, welke rechten er op het oppervlak Π^{12} liggen.

De kromme $\pi^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2)$ snijdt de kegelsnede $\beta^2 (P Q S_1 S_2)$ in $8 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 2 = 4$ niet-singuliere punten. Door elk punt van de rechte b_1 , dus ook van b_2 en van b_3 gaan dus vier krommen ρ^3 , die op Π^{12} liggen. De drie rechten b_1 , b_2 en b_3 zijn dus *viervoudige rechten* op Π^{12} .

De kromme $\pi^8 (P^4 Q^4 S_1^2 S_2^2)$ heeft de singuliere punten S_1 en S_2 tot dubbelpunten; zij snijdt de vier stralen p_3, p_4, q_5 en q_6 elk in twee niet-singuliere punten en heeft met de kromme $\sigma^4 (P^2 Q^2 S_1 S_2)$ gemeen $8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 12$ niet-singuliere punten.

Wij leiden uit een en ander af, dat de zes rechten $d_{11}, d_{21}, d_{12}, d_{22}, d_{13}$ en d_{23} *dubbelrechten* op Π^{12} zijn en dat op dit oppervlak *twaalf transversalen* over b_1, b_2 en b_3 liggen.

Op het oppervlak Π^{12} liggen dus *drie viervoudige rechten, zes dubbelrechten en twaalf enkelvoudige rechten.*

Verder zijn op Π^{12} gelegen *vier en twintig kegelsneden*, waarvan er twaalf met de zes dubbelrechten en twaalf met de twaalf enkelvoudige rechten ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ vormen.

Ter controleering van den graad van de doorsnede van twee oppervlakken Π^{12} , behoorende bij de vlakken ϕ en ϕ' , kunnen we opmerken, dat ze gemeen hebben: de vier en twintig krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die beide vlakken aanraken, de drie viervoudige rechten b en de zes dubbelrechten d .

De doorsnede van twee zoodanige oppervlakken is dus van den graad $24 \times 3 + 3 \times 16 + 6 \times 4 = 144$.

HOOFDSTUK VI.

Slotwoord.

§ 1. De onderzoekingen, die in de voorgaande hoofdstukken plaats gehad hebben, zijn voor uitbreiding vatbaar.

Wij kunnen bijvoorbeeld vragen naar den graad van het oppervlak Δ , dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op eene gegeven kegelsnede d^2 rusten. We zullen dit vraagstuk oplossen voor één der door ons behandelde congruenties en kiezen daarvoor het eerste bijzondere geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI, besproken in hoofdstuk II.

Door een punt C_1 van de rechte c_1 gaan ∞^1 krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, gelegen op den kegel K_2^2 , die door dit punt C_1 is bepaald. Deze kegel wordt door de kegelsnede d^2 in vier punten gesneden. Deze vier punten bepalen elk een kegel K_1^2 , die met den kegel K_2^2 eene kromme ρ^3 der $[\rho^3]$ voortbrengt, die door C_1 gaat en op d^2 rust, terwijl deze vier krommen ρ^3 op de rechte c_2 elk een punt bepalen. Aan C_1 op c_1 zijn in dit verband dus vier punten van c_2 toegevoegd.

Evenzoo is het duidelijk, dat door een punt C_2 van c_2 vier krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gaan, die op d^2 rusten en op c_1 vier aldus aan C_2 toegevoegde punten bepalen.

De puntenreeksen (C_1) en (C_2) op c_1 en c_2 worden nu gerangschikt in eene verwantschap $(4, 4)$. Het voortbrengsel der waaiers (p) en (q) , die de puntenreeksen (C_1) en (C_2) afbeelden, is dus eene *kromme van den achtsten graad* δ^8 , die de waaiertoppen P en Q tot viervoudige punten heeft, en de singuliere punten S_3 en S_4 tot dubbelpunten, omdat er in elk der vlakken ϕ_3 en ϕ_4 twee kegelsneden liggen, die op d^2 rusten, daar d^2 elk dezer beide vlakken in twee

punten snijdt. Van elk der groepen I en II behooren dus twee exemplaren tot de hier beschouwde. We kunnen het beeld van het oppervlak Δ dus aanduiden door $\delta^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$.

De krommen $\delta^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en $\lambda^4 (P^2 Q^2 S_3 S_4)$ snijden elkaar in $8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 12$ niet-singuliere punten. De rechte l ontmoet dus twaalf op d^2 rustende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$; zij snijdt het oppervlak Δ dus in twaalf punten, dus is dit een *oppervlak van den twaalfden graad*, Δ^{12} .

We besluiten hieruit tevens tot de volgende waarheid:

De congruentie bevat *twaalf krommen ρ^3 , die rusten op een gegeven rechte l en een gegeven kegelsnede d^2 .*

De krommen $\delta^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en $\phi^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en ook de krommen $\delta^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ en $\varepsilon^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$, welke laatste het beeld is van het oppervlak, gevormd door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op een gegeven kegelsnede ε^2 rusten, snijden elkaar in $8 \times 8 - 2 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 = 24$ niet-singuliere punten.

Wij leiden hieruit af:

1^o. dat er *vier en twintig krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die op een gegeven kegelsnede rusten en aan een gegeven vlak raken;*

2^o. dat er *vier en twintig krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn, die op twee gegeven kegelsneden rusten.*

De kromme $\delta^8 (P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2)$ heeft de singuliere punten S_3 en S_4 tot dubbelpunten, snijdt elk der stralen q_2 en p_1 in vier niet-singuliere punten, elk der stralen q_{24} , q_{23} , p_{14} en p_{13} in twee niet-singuliere punten en de kegelsnede $\sigma^2 (P Q S_3 S_4)$ in $8 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 2 = 4$ niet-singuliere punten. Eindelijk gaan er door elk punt van c_1 en ook van c_2 vier krommen ρ^3 van Δ^{12} .

Uit het bovenstaande volgt, dat op het oppervlak Δ^{12} gelegen zijn: *drie viervoudige rechten*, c_1 , c_2 en d_{12} ; *zes dubbel-rechten*, d_3 , d_4 , d_{24} , d_{23} , d_{14} en d_{13} en vier stralen van elk der waaiers $(A_2 c_1)$ en $(A_1 c_2)$, dat zijn dus *acht enkelvoudige rechten*.

Op Δ^{12} liggen behalve d^2 *vier en twintig kegelsneden*, waarvan er acht met elk der enkelvoudige rechten, twaalf met elk

der dubbelrechten en vier met de viervoudige rechte d_{12} ontaarde figuren ρ^3 der $[\rho^3]$ vormen. Bij de behandeling van het oppervlak Λ^6 , dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op een gegeven rechte l rusten en dat afgebeeld wordt door de kromme λ^4 ($P^2 Q^2 S_3 S_4$), hebben we opgemerkt, dat er één kromme ρ_1^3 der $[\rho^3]$ is, die l tot *koorde* heeft. Deze kromme ρ_1^3 is dientengevolge *dubbelskromme* op Λ^6 en haar beeld in het tafereel is dubbelpunt van λ^4 .

Ten aanzien van het oppervlak Δ^{12} kunnen we nu vragen naar het aantal krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die de kegelsnede d^2 *tweemaal* snijden. Dit aantal bedraagt *zeven*.

Immers: de kromme δ^8 ($P^4 Q^4 S_3^2 S_4^2$) is *rationaal*; zij bezit dus $\frac{1}{2} \times 7 \times 6 = 21$ dubbelpunten. De beide viervoudige punten P en Q zijn elk gelijkwaardig met $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ dubbelpunten, zoodat δ^8 behalve P , Q , S_3 en S_4 nog $21 - 2 \times 6 - 2 \times 1 = 7$ dubbelpunten heeft. Deze kunnen niet anders zijn dan beelden van krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die de kegelsnede d^2 *tweemaal* snijden.

Deze zeven krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ zijn *dubbelskrommen* op het oppervlak Δ^{12} . De doorsnede van twee oppervlakken Δ^{12} , behoorende bij de kegelsneden d^2 en e^2 , bestaat uit: de vier en twintig krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op beide kegelsneden rusten, de drie viervoudige rechten en de zes dubbelrechten. Zij is dus van den graad

$$24 \times 3 + 3 \times 16 + 6 \times 4 = 144.$$

§ 2. Zoo algemeen mogelijk gesteld luidt het vraagstuk nu: Welk oppervlak wordt gevormd door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op een gegeven kromme μ^p rusten?

We kunnen hieraan de voor de hand liggende vraag toevoegen:

Hoeveel krommen ρ^3 bevat de $[\rho^3]$, die rusten op twee gegeven krommen μ^p en μ^q ?

Om de eerste vraag te beantwoorden behoeft het geen verder betoog, dat de puntenreeksen (C_1) en (C_2) op c_1 en c_2 gerangschikt worden in eene verwantschap $(2p, 2p)$, zoodat het voortbrengsel hunner beeldstralen een *kromme van den*

graad $4p$, π^{4p} , is, met P en Q tot $2p$ -voudige punten.

Daar de vlakken ϕ_3 en ϕ_4 door de kromme μ^p elk in p punten gesneden worden, zijn de singuliere punten S_3 en S_4 p -voudige punten van de kromme π^{4p} . Deze kan dus voorgesteld worden door $\pi^{4p} (P^{2p} Q^{2p} S_3^p S_4^p)$.

Evenzoo zal het oppervlak, dat gevormd wordt door alle krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op een gegeven kromme μ^q rusten, afgebeeld worden door eene kromme $\pi^{4q} (P^{2q} Q^{2q} S_3^q S_4^q)$.

De krommen $\pi^{4p} (P^{2p} Q^{2p} S_3^p S_4^p)$ en $\pi^{4q} (P^{2q} Q^{2q} S_3^q S_4^q)$ snijden elkaar in $16p$ punten. Hiervan vallen er $4p$ in P , $4p$ in Q , p in S_3 en p in S_4 , dus $6p$ buiten de singuliere punten. De rechte l ontmoet dus $6p$ krommen ρ^3 van het oppervlak Π , dat door de op μ^p rustende krommen ρ^3 der $[\rho^3]$ gevormd wordt; dit is dus een oppervlak van den graad $6p$.

De tweede vraag kan nu ook gemakkelijk beantwoord worden.

De krommen $\pi^{4p} (P^{2p} Q^{2p} S_3^p S_4^p)$ en $\pi^{4q} (P^{2q} Q^{2q} S_3^q S_4^q)$ snijden elkaar in $16pq$ punten, waarvan er $10pq$ in, dus $6pq$ buiten de singuliere punten vallen.

Er zijn dus $6pq$ krommen ρ^3 der congruentie, die op twee gegeven krommen μ^p en μ^q rusten.

Stellen we $p = q = 1$, dan vinden we naar behooren het in hoofdstuk II gevonden getal zes voor het aantal krommen ρ^3 der $[\rho^3]$, die op twee gegeven rechten rusten.

Hiermede willen we onze beschouwingen beëindigen.

STELLINGEN.

1.

Volgens Dr. J. DE VRIES bevat de [ρ^3], die in zijn proefschrift, getiteld: **Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen**, als eerste bijzondere geval van de eerste algemeene congruentie van VENERONI behandeld wordt, 24 figuren, die uit drie rechten bestaan. Dit is foutief; het moet zijn 13.

2.

E. BOREL: **Leçons sur les fonctions entières.**

Op blz. 38 bovenaan staat vast:

$$e^{Q_m(z)} P_m(z) \rightarrow F(z), \text{ voor } m \rightarrow \infty,$$

uniform op ieder gesloten, eindig gebied.

Op blz. 40 onderaan heeft hij pas bewezen:

$$\frac{d}{dz} \left\{ e^{Q_m(z)} P_m(z) \right\} \rightarrow F'(z), \text{ voor } m \rightarrow \infty.$$

Dit bewijs is overbodig, wegens eene fundamenteele stelling van WEIERSTRASS.

3.

S. CHESIN zegt in zijn werk: **On the analytical theory of circular functions**, op blz. 288:

Als $f(z)$, hebbende eene reële periode, in 't eene uiteinde van een fundamenteelstrook eene *bepaalde* waarde aanneemt, dan doet zij dat ook in het andere uiteinde.

Dat is foutief; de functie $f(z) = \sin(e^z i)$ stelt de onjuistheid der bewering duidelijk in het licht.

4.

De bewering van DURÈGE in zijn **Elemente der Theorie der Functionen**, Einleitung, blz. 11, dat *jetzt allgemein angenommen wird*, dat voor $a > 0$ en $b > 0$ het product $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ gelijk is aan $\sqrt{ab}$, is onjuist.

5.

De bestudeering van de uiteenzetting van het begrip *bepaalde integraal*, gegeven door Prof. Dr. Hk. DE VRIES in zijn **Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening**, deel I § 48, kan leiden tot verwarring.

6.

De definitie van *convergent oneindig product*, gegeven in het in Stelling 5 genoemde werk, deel I § 83, is niet scherp.

7.

De afleiding van de formule voor den slingertijd, gegeven in het in Stelling 5 genoemde werk, deel I § 76, blz. 343, bevat eene leemte. De schrijver vindt voor $\frac{d\phi}{dt}$ een vierkantswortel en kiest zonder eenige verklaring den positieven, terwijl $\frac{d\phi}{dt}$ juist negatief is; door bij de hierop volgende integratie de grenzen verkeerd te plaatsen, wordt toch het goede eindresultaat verkregen.

8.

Het verdient geen aanbeveling, bij het onderwijs in de **Mechanica** op de H.B.S. de **Infinitesimaalrekening** toe te passen.

9.

Er is veel voor te zeggen, het leerplan der Gymnasia in dier voege te wijzigen, dat β -leerlingen niet alleen in de 5^e klasse, maar ook in de 6^e klasse onderwijs ontvangen in de **Kosmografie** en hierin worden geëxamineerd.

10.

Van de **Waarschijnlijkheidsrekening** zijn zelfs de beginselen te moeilijk voor Gymnasiaal en Middelbaar onderwijs.

