



Over den veranderlijken toestand van den galvanischen stroom gedurende zijn ontstaan

<https://hdl.handle.net/1874/291967>

II

3

OVER
DEN VERANDERLIJKEN TOESTAND
VAN DEN
GALVANISCHEN STROOM
GEDURENDE ZIJN ONTSTAAN.

(3)

O V E R
DEN VERANDERLIJKEN TOESTAND
VAN DEN
GALVANISCHEN STROOM
GEDURENDE ZIJN ONTSTAAN.

AKADEMISCH PROEFSCHRIFT,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. C. H. D. BUYS BALLOT,

Gewoon Hoogleraar in de Wis- en Natuurkundige Faculteit,

MET TOESTEMMING VAN DEN AKADEMISCHEN SENAAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

DOOR

FLORENTIUS GOSWIN GRONEMAN,

GEBOREN TE ZUTPHEN,

TE VERDEDIGEN,

op Donderdag den 25^{sten} Junij 1865, des namiddags te 2 ure.

UTRECHT,
T. DE BRUYN.
1865.

AAN MIJNE DIERBARE OUDERS

OPGEDRAGEN.

V O O R R E D E .

Bij het eindigen mijner akademische loopbaan is het mij een aangename plicht, U allen, Hoogleeraren in de Wis- en Natuurkundige Faculteit! mijn innigen dank te betuigen. Hebt dien dank voor hetgeen ik uit Uwe lessen leerde, en vooral voor de vriendschap, mij in Uwen persoonlijken omgang zoo ruimschoots bewezen.

Vooraf gevoel ik mij aan U verplicht, Hooggeschatte Promotor, Hooggeleerde VAN REES! Uwe heldere voorlichtingen, en de zorgvuldigheid, waarmede Gij mij leiddet, toen ik mijn proefschrift zamenstelde, zal ik steeds waar-

deren. Vergun mij, dat ik mij tot U om hulp wende, zoo dikwijls mijne krachten te kort schieten.

Het ga U wel, Akademie Vrienden! op de loopbaan die U wacht, of die gij reeds zijt ingetreden. Mogen wij nog menigmaal te zamen zijn, om onze oude vriendschap te hernieuwen, en vervlogen uren te herdenken!

I N H O U D.

EERSTE DEEL.

Bladz.

- I. De differentiaal-vergelijking voor de spanning in eene galvanische keten, gevonden 1^e. volgens OHM, en 2^e. met inachtneming van de wet van COULOMB 1.
- II. Integratie der gevonden differentiaal-vergelijking..... 13.
- III. Formules en wetten voor de betrekkelijke stroomsterkte en de betrekkelijke spanning. Grafische voorstelling dier wetten voor de betrekkelijke stroomsterkte..... 19.
-

TWEEDE DEEL.

Bladz.

- I. Geschiedkundig overzicht. Proeven van GAUGAIN en GUILLEMIN, die de wetten, uit de formules van OHM afgeleid, bevestigen..... 50.
- II. Ladingsverschijnselen; voornamelijk die, welke in onderzeesche of onderaardsche telegraalleidingen waargenomen worden. Hunne theorie door proeven bevestigd..... 51.

EERSTE DEEL.

I.

DE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKING VOOR DE SPANNING IN
EEN GALVANISCHE KETEN, GEVONDEN 1^o VOLGENS
OHM EN 2^o MET INACHTNEMING VAN DE
WET VAN COULOMB.

De hoeveelheid elektriciteit, welke in eenig geëlektriseerd ligchaam is opgehoopt, is niet altijd even groot. Naarmate zij in een zelfde ligchaam grooter is, zullen de werkingen, welke van haar uitgaan, krachtiger zijn. De toestand, waarin de elektriciteit dientengevolge verkeert, wordt door OHM in zijn werk „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet” afwisselend „elektroskopische Kraft, elektrische Kraft, Stärke der Elektrizität” genoemd. In navolging van GAUGAIN, in zijne vertaling van OHM's werk, zal ik daarvoor het woord *spanning* (tension) gebruiken ¹⁾.

1) Dat OHM zijne „elektroskopische Kraft” als gelijkbeduidend beschouwd heeft met hetgeen men thans door „digtheid” der elektriciteit verstaat, blijkt vooral uit pag. 95 van zijn werk, waar hij zegt: „Wir werden in der Folge die auf die Grösse der Elemente bezogene Summe der elektroskopischen Aeusserungen — worunter wir also das Produkt aus der Kraft in die Grösse des

Bestaat er voor de elektriciteit een coëfficiënt, overeenkomstig met die der warmte-capaciteit, dan moet die hierbij in aanmerking genomen worden.

De grondstellingen, waarop de theorie van OHM berust, zijn de volgende.

1^{ste}: Als twee naast elkaar gelegen elementen van eenig ligchaam zijn geëlektriseerd, en in beide verschillende spanningen heerschen, zal er zoodanig eene werking tusschen hen plaats grijpen, dat na eenigen tijd in beide dezelfde spanning bestaat. De hoeveelheid elektriciteit die tusschen twee zulke elementen in gelijke tijden overgaat, is evenredig aan het verschil tusschen beide spanningen.

Hebben de elementen verschillende uitgebreidheden, dan is die zelfde hoeveelheid elektriciteit nog evenredig aan het produkt $m m'$ van die uitgebreidheden, of, als men de elementen niet als zeer klein kan beschouwen, ten opzichte van hun onderlingen afstand, aan eene functie van dien afstand en de groottheden m en m' , welke functie door OHM met eene F wordt aangeduid.

2^{de}: De hoeveelheid elektriciteit, welke een geëlektriseerd ligchaam in den zelfden tijd door diffusie in de omgevende lucht verliest, is evenredig aan de spanning en een coëfficiënt, van den toestand der lucht afhankelijk. In de meeste gevallen kan echter deze storende invloed worden verwaarloosd, zoo als door mij in deze verhandeling is gedaan.

3^{de}: Twee ongelijkaardige lichamen, die elkander aanraken, vertoonen in hun aanrakingsplaats een onderscheid in hun elektrischen toestand. OHM noemt dit „elektrische Span-

»Raumes, worüber sie verbreitet ist, zu verstehen haben, im Falle dass an allen Stellen dieses Raumes einerlei Kraft sich befindet. -- Elektrizitätsmenge nennen, ohne dass wir dadurch etwas über die materielle Beschaffenheit der Elektrizität fest zu setzen beabsichtigen.

ning" of „elektrische Differenz der Körper." In navolging van GAUGAIN zal ik daarvoor de uitdrukking *elektromotorische kracht* gebruiken.

Deze drie grondstellingen zijn voldoende om daaruit de formule voor de spanningsverdeeling en de stroomsterkte af te leiden. Noemt men k het geleidend vermogen eener stof, dan is

$$k = q \cdot s,$$

waarin q de in de eenheid van tijd en bij de eenheid van spanningsverschil overgevoerde hoeveelheid elektriciteit is, en s de afstand der beide elementen. Maar volgens OHM's grondstellingen is de hoeveelheid elektriciteit, die in den tijd dt wordt overgevoerd, gelijk aan

$$\alpha m m' (u' - u) dt,$$

waarin α een coëfficiënt is, afhankelijk van den afstand s , terwijl u' en u de spanningen der beide elementen zijn. Stelt men $u' - u$ en dt beide gelijk 1, dan is

$$q = \alpha m m',$$

en dus

$$k = \alpha m m' s.$$

Substitueert men de door deze vergelijking gegeven waarde van $\alpha m m'$ in de bovenstaande formule, dan verkrijgt men voor de hoeveelheid elektriciteit, die in den tijd dt van het eene element op het andere overgaat:

$$\frac{k (u' - u) dt}{s}$$

Denken wij ons thans een homogenen cilindervormigen geleider, welks uiteinden een standvastig en eindig verschil in spanning vertoonen. Wij nemen de as van den cylinder als as der abscissen en beschouwen een schijfje van de dikte dx , loodregt op de as, en van eenig vast punt daarvan op den afstand x verwijderd. Laat u de spanning in

dat schijfje zijn op den tijd t , dan is u eene functie van x en t . Laat u' de waarde van u zijn voor eene abscis $= x + dx$, en u_1 die voor eene abscis $= x - dx$. Zij voorts nog ω de doorsnede van den cylinder, dan is de hoeveelheid elektriciteit, die het eerstgenoemde schijfje van het tweede ontvangt gelijk

$$\frac{k \omega (u' - u) dt}{dx};$$

terwijl die, welke er van het derde schijfje op overgaat, wordt voorgesteld door

$$\frac{k \omega (u_1 - u) dt}{dx}.$$

De hoeveelheid elektriciteit, die het in 't geheel opneemt is dus

$$\frac{k \omega (u' + u_1 - 2u) dt}{dx}.$$

Naarmate deze uitdrukking positief of negatief is, neemt de spanning in het schijfje toe of af.

Volgens het theorema van TAYLOR hebben wij nu, daar $u = f(x + dx)$ en $u_1 = f(x - dx)$ is,

$$u' = u + \frac{du}{dx} dx + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \dots$$

$$u_1 = u - \frac{du}{dx} dx + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{2} - \dots$$

Door optelling en aftrekking volgt hieruit

$$u' + u_1 - 2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \dots,$$

waardoor, met verwaarlozing der oneindig kleinen van hoogere orde, de boven verkregene uitdrukking overgaat in

$$k \omega \frac{d^2u}{dx^2} dx dt.$$

Indien men de diffusie in de lucht in aanmerking neemt,

moet aan deze uitdrukking nog een term daarvoor worden toegevoegd, waarover wij verder niet zullen spreken, daar wij die diffusie buiten rekening laten.

Eene tweede uitdrukking voor de verandering in de hoeveelheid elektriciteit in den tijd dt is

$$\gamma \omega \frac{du}{dt} dx dt,$$

waarin γ de coëfficiënt is, die met de warmtecapaciteit overeenkomt, en u ten opzichte van den tijd is gedifferentieerd. Door de verbinding van beide ontstaat de vergelijking

$$\gamma \frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Uit deze vergelijking kan u als functie van x en t worden bepaald.

Wanneer de spanningen aangroeijen in de rigting der abscissen, dan zal de overgang van elektriciteit juist in tegengestelde rigting plaats grijpen. De elektrische stroom zal dus in laatstgenoemde rigting gaan, als de uitdrukking

$$\frac{k \omega (u' - u) dt}{dx}$$

positief is. Plaatsen wij nu hierin voor u' hare waarde, uitgedrukt in de reeks van zoo even, dan gaat deze vorm over in

$$k \omega \frac{du}{dx} dt,$$

met verwaarloozing der oneindig kleinen van hoogere orde. Noemt men *stroomsterkte* op een gegeven oogenblik de hoeveelheid elektriciteit, die in de eenheid des tijds door eene doorsnede des draads zoude vloeijen, indien de stroom gedurende dien tijd onveranderd bleef, en duidt men die grootheid door S aan, zoo volgt uit de vorige formule:

$$S = k \omega \frac{du}{dx}.$$

Wanneer een ongeladen geleiddraad, welks eene uiteinde met de aarde verbonden is, plotseling met het andere uiteinde aan een conductor wordt verbonden, die tot eene constante spanning geladen is, dan vloeit de elektriciteit van den conductor door den draad in de aarde. De geleiddraad bevat dus nu elektriciteit die in beweging is. In elk punt van den draad heerscht een zekere spanning, die van het oogenblik der sluiting af aangroeit van 0 tot eene zekere eindwaarde, die voor elk punt verschillend is. Voordat deze eindwaarde in alle punten bereikt is, zal het verschil tusschen de spanningen van twee punten, die op den afstand dx van elkaar verwijderd zijn, veranderlijk zijn; derhalve ook het quotient $\frac{du}{dx}$. De veranderlijkheid verdwijnt

echter na eenigen tijd, na verloop van welken $\frac{du}{dx}$ over den geheelen geleider dezelfde waarde heeft. Uit de formule blijkt, dat in den eersten toestand ook S veranderlijk is, maar dat zij te gelijk met $\frac{du}{dx}$ standvastig wordt.

Het is duidelijk wat men dus door *veranderlijken* of *onveranderlijken staat der spanningen* te verstaan heeft. In de vergelijking

$$\gamma \frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2}$$

liggen deze toestanden beide opgesloten.

Noemen wij $\frac{k}{\gamma}$ eenvoudig k' , dan kunnen wij haar nog in deze gedaante schrijven

$$\frac{du}{dt} = k' \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Uit de bovenstaande opgave der wijze waarop OHM deze

vergelijking verkregen heeft, is het duidelijk, dat hij daarbij van hetzelfde gronddenkbeeld is uitgegaan, dat FOURIER in zijne „Théorie de la chaleur” bij de oplossing van het vraagstuk omtrent de voortplanting der warmte in vaste lichamen geleid heeft. OHM neemt aan, dat de beweging der elektriciteit in een geleider op de onderlinge werking der naaste elementen berust, zoodat elk deeltje dat meer elektriciteit bevat dan een aanliggend deeltje, daaraan eene zekere hoeveelheid elektriciteit mededeelt. „Wir tragen kein „Bedenken”, zegt hij uitdrukkelijk op pag. 107 van zijn werk, „die elektrische Wirkung eines Körperelements nicht „über die es zunächst umgebenden Elemente hinausreichen „zu lassen, so dass also die Wirkung in jeder endlichen „auch noch so kleinen Entfernung völlig verschwindet”. Te regt is echter door KIRCHHOFF in „Poggendorff's Annalen” (78. 506) opgemerkt geworden, dat deze veronderstelling in strijd is met de beginselen, waarop de verklaring van de verschijnselen der statische elektriciteit berust, en tot resultaten leidt, die met de waarneming strijden. Want in die veronderstelling zal, wanneer de digtheid der elektriciteit in alle punten eens geleiders even groot is, geen beweging der elektriciteit ontstaan, terwijl men toch weet, dat de elektriciteit zich dan geheel naar de oppervlakte begeeft. Ter zelfder plaatse is door KIRCHHOFF aangetoond, hoe men uit de theorie der statische elektriciteit, gegrond op de wet van COULOMB omtrent de afnemings der elektrische afstootingen en aantrekkingen in reden van het kwadraat des afstands, de wetten des galvanischen strooms kan afleiden. In twee latere verhandelingen (P. A. 100. 193 en 102. 529) heeft hij dit onderwerp uitvoeriger ontwikkeld. Het ligt buiten mijn bestek de ingewikkelde berekeningen van KIRCHHOFF hier mede te deelen en ik wil mij er slechts

toe bepalen, den weg aan te wijzen, langs welken de wet van COULOMB tot de vergelijking van OHM voeren kan. Om korter te zijn zal ik daarbij in plaats van twee elektrische vloeistoffen slechts één aannemen, en de negatieve elektriciteit als een gebrek aan elektriciteit beschouwen.

De gezamenlijke vrije elektriciteit, in een geleider aanwezig, oefent op elk punt van dien geleider eene werking uit, ten gevolge waarvan de aldaar aanwezige vrije elektrische vloeistof zich in de eene of andere rigting zal bewegen.

Noemen wij dm de hoeveelheid vrije elektriciteit, aanwezig in een ruimte-element, welks regthoekige coördinaten zijn a, b, c ; zoo is de afstooting, door dm op de eenheid elektriciteit in het punt (x, y, z) uitgeoefend, als r de afstand dier punten is,

$$= \frac{dm}{r^2}.$$

De composanten dier kracht, evenwijdig aan de drie assen, zijn

$$\frac{(x-a) dm}{r^3}, \quad \frac{(y-b) dm}{r^3} \quad \text{en} \quad \frac{(z-c) dm}{r^3}.$$

Integreert men deze uitdrukkingen over al de met vrije elektriciteit bedeelde lichamen, die op het punt werken, waarbij x, y en z als constant worden beschouwd, zoo vindt men voor de composanten der totale werking in het punt (x, y, z) de waarden:

$$X = \iiint \frac{(x-a) dm}{r^3}, \quad Y = \iiint \frac{(y-b) dm}{r^3}, \\ Z = \iiint \frac{(z-c) dm}{r^3}.$$

Deze drie waarden zijn echter de partiële differentiaalquotienten van eene en dezelfde functie van x, y en z . Stelt men namelijk

$$u = \iiint \frac{d m}{r},$$

zoo is
$$\frac{d u}{d x} = \iiint \frac{d}{d x} \frac{1}{r} \cdot d m.$$

Nu is $\frac{d}{d x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{d r}{d x}$, terwijl uit de vergelijking

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

volgt dat $\frac{d r}{d x} = \frac{x - a}{r}$ is.

Derhalve is ook $\frac{d}{d x} \frac{1}{r} = -\frac{x - a}{r^3}$.

Hierdoor wordt

$$\frac{d u}{d x} = -\iiint \frac{x - a}{r^3} d m,$$

of $X = -\frac{d u}{d x}$.

Op dezelfde wijze toont men aan dat

$$Y = -\frac{d u}{d y} \text{ en } Z = -\frac{d u}{d z}$$

is. De functie u wordt de *potentiaal* of ook wel de *potentiaal* genoemd van alle aanwezige vrije elektriciteit in het punt (x, y, z) . Zij is dus de functie, wier partiële differentiaalquotienten, genomen met het teeken $-$, de composanten zijn der kracht, welke, uitgaande van de gezamenlijke vrije elektriciteit, op het punt (x, y, z) werkt. Uit den vorm der vergelijkingen blijkt, dat u volkomen overeenstemt met hetgeen onm „elektrische of elektroskopische kracht” noemt.

Denken wij ons thans een cilindrischen draad, dien wij ons als regtlijnig kunnen voorstellen en welks as tot as der

X wordt aangenomen. Indien de radius des draads zeer klein is (zoo als meest altijd plaatsgrijpt) ten opzichte van zijne lengte, dan kunnen wij de beweging der electriciteit, loodregt op de as, verwaarloozen. De kracht, waarmede de in den draad en zijne omgeving aanwezige vrije electriciteit de éénheid van electriciteit in het punt (x, y, z) in de rigting der as drijft, is dan:

$$X = - \frac{du}{dx}.$$

Hierbij zoude gedurende den veranderlijken toestand nog gevoegd moeten worden de kracht der galvanische inductie in (x, y, z) , veroorzaakt door de verandering der stroomsterkte in den geheelen draad. Men kan die echter buiten rekening laten, daar de inductie volgens de uitkomsten van KIRCHHOFF, P. A. 102. 544 geen merkbaaren invloed heeft, wanneer de weerstand des draads, hetzij door zijne groote lengte of door zijn gering geleidend vermogen, zeer groot is; derhalve juist in die gevallen, waarin wij later de formule van OHM met de waarnemingen zullen vergelijken.

Zij nu ω de doorsnede des draads. Het is mogelijk dat u in verschillende punten van dezelfde doorsnede niet even groot is. Om deze zwaarigheid te ontwijken zullen wij door u niet de potentiaalfunctie in één bepaald punt der doorsnede, maar hare gemiddelde waarde in die doorsnede verstaan. Is dan i de stroomsterkte, dan is i evenredig aan de drijvende kracht, aan de doorsnede en aan het geleidend vermogen der stof, waaruit de draad bestaat. Stellen wij dit laatste voor door k , dan is

$$i = - k \omega \frac{du}{dx}.$$

Beschouwen wij nu een oneindig dun schijfje tusschen de doorsneden, wier abscissen zijn x en $x + dx$. De hoe-

veelheid elektriciteit, die er in den tijd dt door de eerste doorsnede intreedt, is $= i dt$, of

$$= -k\omega \frac{du}{dx} dt.$$

De hoeveelheid daarentegen, welke het schijfje door de andere doorsnede in den tijd dt verlaat, is $\left(i + \frac{di}{dx} dx\right) dt$ of

$$= -k\omega \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} dx\right) dt.$$

Het verschil dier beide hoeveelheden is

$$= k\omega \frac{d^2u}{dx^2} dx dt,$$

en stelt de vermeerdering van elektriciteit voor in het schijfje, gedurende den tijd dt . Zij voorts e de digtheid der elektriciteit in het schijfje op den tijd t . Daar zijn inhoud ωdx is, zoo is

$$e \omega dx$$

de hoeveelheid, die op den tijd t in het schijfje is, en

$$\left(e + \frac{de}{dt} dt\right) \omega dx$$

die, welke er zich op den tijd $t + dt$ in bevindt. Wij hebben dus als tweede uitdrukking voor de vermeerdering dier hoeveelheid, gedurende den tijd dt :

$$\frac{de}{dt} \omega dx dt,$$

en door deze aan de voorgaande gelijk te stellen, komen wij tot de vergelijking

$$\frac{de}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Om verder te gaan moeten wij e in functie van u kennen. Wij zagen hierboven, dat omm zijne elektroskopische kracht aan de digtheid evenredig stelde. Men behoeft dit

echter niet te doen, maar slechts aan te nemen dat beider differentiaalquotienten ten opzichte van den tijd evenredig zijn. Stelt men dus, γ een nader te bepalen constante zijnde,

$$\frac{de}{dt} = \gamma \frac{du}{dt},$$

dan wordt de vorige vergelijking, identisch met die van OHM, aldus:

$$\gamma \frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Ook KIRCHHOFF heeft (P. A. 102. 543) langs een anderen weg, en zonder gebruik te maken van de hypothese der evenredigheid van $\frac{de}{dt}$ en $\frac{du}{dt}$, eene vergelijking van denzelfden vorm gevonden voor het geval, dat de draad een zeer grooten weerstand heeft.

De constante γ kan zeer verschillende waarden hebben, naar gelang der omstandigheden. Vooral is hierbij van invloed, of de potentiaalfunctie in den draad alleen door de in hem aanwezige vrije elektriciteit wordt bepaald, dan wel of zich in de nabijheid des draads elektrische lichamen bevinden, die op hare waarde invloed uitoefenen. Dit laatste geval komt voor bij onderzeesche telegraafdraden, door gutta-percha van het omgevende water afgescheiden. De in den draad aanwezige elektriciteit verdigt de tegengestelde elektriciteit op de buitenzijde der gutta-percha-laag, zoodat de draad kan beschouwd worden als het binnenbekleedsel eener Leidsche flesch, waarvan het water het buitenbekleedsel is, en de gutta-percha de isolerende tusschenstof. Wij komen later op dit voor de theorie en de praktijk belangrijke geval terug, en gaan thans over tot de integratie der vergelijking van OHM, ten einde u in functie van x en t te bepalen.

INTEGRATIE DER GEVONDEN DIFFERENTIAAL-VERGELIJKING.

De vergelijking

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2}$$

gaat uit van de veronderstelling, dat men een homogeen cilindrischen geleider heeft, welke voorwaarde nagenoeg nooit vervuld is. Men kan haar echter toepassen op eenen geleiddraad, die b. v. de positieve pool eener batterij met de aarde verbindt, als de negatieve ook met deze verbonden is, of die de elektriciteit van een geladen conductor, welks spanning onveranderd wordt gehouden, naar de aarde afvoert.

In beide gevallen zal, zoodra de keten gesloten is, de elektriciteit in den draad overgaan en van hem in de aarde. Te gelijker tijd zal er zich in elk punt van den draad elektriciteit van eene zekere spanning bevinden, en zullen deze spanningen zoolang veranderen, tot de stroomsterkte overal gelijk is. In den onveranderlijken toestand is de stroomsterkte overal even groot, en verschillen de spanningen in punten, op gelijken afstand van elkander, overal evenveel. Dit blijkt uit de vergelijking

$$\frac{d u}{d t} = k' \frac{d^2 u}{d x^2}.$$

Door in haar u onafhankelijk van t te veronderstellen, wordt gevonden:

$$0 = k' \frac{d^2 u}{d x^2},$$

hetgeen door integratie geeft:

$$u' = C x + C',$$

waarin u' de spanning van het punt x aanduidt in den onveranderlijken toestand. Daar nu de spanningen aangroeijen met de positieve abscissen, zoo kunnen wij het punt, welks $x = 0$ is in het aarduiteinde van den draad plaatsen. Dan is de constante $C' = 0$, omdat u' in dat punt 0 is. Zij nu l de lengte des draads en a de spanning van de elektriciteitsbron, dan is, voor $x = l$, $a = C l$, of

$$C = \frac{a}{l}.$$

Hierdoor wordt de vergelijking

$$u' = \frac{a x}{l} \dots \dots \dots a). \quad a).$$

Ten einde u in functie van t en x te vinden, hebben wij het volgende:

Boven is gevonden

$$\frac{d u}{d t} = k' \frac{d^2 u}{d x^2} \dots \dots \dots b). \quad b).$$

Voor enig punt van de keten zal de spanning bij de sluiting des strooms 0 zijn en, terwijl zij langzamer of sneller aangroeit, voor eene genoegzaam groote waarde van t gelijk u' zijn. Stellen wij nu $u' + v = u$, dan beteekent daarin

u de spanning van eenig punt te eeniger tijd,
 u' die in den blijvenden toestand, en

v het onderscheid tusschen deze laatste en de eerste; allen met betrekking tot hetzelfde punt. Gelijk wij weten is

u eene functie van x en t . Voorts:

u' eene functie van x (vergl. a , vorige bladz.);

v is dus die functie van x en t , welke bij u' opgeteld zijnde u geeft tot som.

Daar de spanningen voortdurend toenemen van 0 tot w , is het duidelijk dat v negatief is.

Plaatsen wij nu in de vergelijking b) voor u de waarde $u' + v$; dan is, daar

$$\frac{d u'}{d t} = 0 \text{ en } \frac{d^2 u'}{d x^2} = 0 \text{ is,}$$

$$\frac{d v}{d t} = k' \frac{d^2 v}{d x^2} \dots \dots \dots c).$$

De vergelijking heeft geheel dezelfde gedaante als de vergelijking b), maar de afhankelijke veranderlijke v laat gemakkelijker eene integratie toe, omdat de voorwaarden, waaraan zij moet voldoen, eenvoudiger zijn. Deze voorwaarden zijn de volgende:

1^e. Wat ook t zij, moet, voor $x = 0$ en $x = l$, v altijd 0 zijn, daar aan de beide uiteinden de spanningen altijd 0 en a zijn.

2^e. Voor $t = 0$ is de spanning over de geheele lengte des geleiders gelijk 0, behalve voor $x = l$, waar zij a is.

Daar $u' = \frac{a x}{l}$ is, moet v dus overal $= -\frac{a x}{l}$ zijn, behalve voor $x = l$, waar zij 0 moet zijn. v is dus eene

onstadige functie van x , $= -\frac{a x}{l}$ voor alle waarden van x van 0 tot aan l , en $= 0$ voor de waarde $x = l$. Deze onstadigheid is het gevolg van die van u , voor $t = 0$.

FOURIER heeft in zijne „Théorie de la chaleur” eene ge-

schikte methode tot integratie van deze vergelijking gegeven, zooals ook van vele andere, voortspruitende uit mathematisch-physische theorieën.

Aan de vergelijking c) wordt voldaan door te stellen

$$v = (A \cos mx + B \sin mx) e^{-k' m^2 t},$$

waarin A en B nog onbepaalde constanten zijn. Passen wij er de eerste voorwaarde op toe, dan moeten

$$A = 0 \text{ en } B \sin ml = 0 \text{ wezen.}$$

Daar nu B niet gelijk 0 kan gesteld worden, omdat daardoor het geheele tweede lid zoude verdwijnen, zoo moet

$$\sin ml = 0 \text{ zijn,}$$

en dus ml een veelvoud zijn van π . Duiden wij door i een geheel getal aan, dan is

$$ml = i\pi \text{ of}$$

$$m = \frac{i\pi}{l}.$$

Hierdoor wordt onze vergelijking

$$v = B \sin \frac{i\pi x}{l} e^{-\frac{k' i^2 \pi^2 t}{l^2}}.$$

Nu moet aan de tweede voorwaarde worden voldaan. Hiertoe merkt men op dat B en i nog willekeurig zijn en de vergelijking dus eigenlijk een onbepaald aantal integralen levert, wier som, volgens de bekende eigenschap der lineaire vergelijkingen, ook aan de primitieve differentiaalvergelijking voldoet. Wanneer het teeken Σ zich tot alle geheele waarden van i uitstrekt, zullen wij dus hebben:

$$v = \Sigma \left(B \sin \frac{i\pi x}{l} e^{-\frac{k' i^2 \pi^2 t}{l^2}} \right) \dots \dots d).$$

Volgens de tweede voorwaarde is nu

$$-\frac{ax}{l} = \Sigma \left(B \sin \frac{i\pi x}{l} \right) \dots \dots \dots e).$$

voor alle waarden van x kleiner dan l , en

$$0 = \Sigma \left(B \sin \frac{i\pi x}{l} \right)$$

voor de waarde $x = l$. De constante B wordt dus door de eerste dezer twee vergelijkingen bepaald, daar aan de tweede voldaan is. Wij kunnen de eerste dus ook uitstrekken tot $x = l$.

Kunnen wij nu voor $-\frac{ax}{l}$ eene ontwikkeling vinden, die in vorm met het tweede lid overeenkomt, dan zal daardoor B gevonden zijn.

Hiertoe stelt ons de vergelijking

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \Sigma \left(\int_0^l \varphi(x') \sin \frac{i\pi x'}{l} dx' \right) \sin \frac{i\pi x}{l}$$

instaat, welke gevonden wordt bij POISSON, doch waarin wij a en x veranderd hebben in l en i 1).

Nemen wij $\varphi(x) = -\frac{ax}{l}$, dan vindt men gemakkelijk door partiële integratie:

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi(x') \sin \frac{i\pi x'}{l} dx' &= -\frac{a}{l} \int_0^l x' \sin \frac{i\pi x'}{l} dx' \\ &= \frac{al}{i} \cos i\pi \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$-\frac{ax}{l} = \Sigma \left(\frac{2a}{i\pi} \cos i\pi \sin \frac{i\pi x}{l} \right)$$

Vergelijkt men dit met e), dan ziet men dat de coefficient B overeenstemt met

$$\frac{2a}{i\pi} \cos i\pi.$$

1) *Traité de Mécanique*, I, pag. 647. FOURIER, *Théor. d. l. Chaleur*.

Plaatsen wij dit in de vergelijking d), dan gaat deze over in:

$$v = 2a \sum \left(\frac{1}{i\pi} \cos i\pi \sin \frac{i\pi x}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right) \dots f)$$

Nu is

$$\sin \frac{i\pi (l+x)}{l} = \cos i\pi \sin \frac{i\pi x}{l},$$

gelijk door ontwikkeling van den eersten dezer vormen blijkt.

Hierdoor kunnen wij voor v schrijven:

$$v = 2a \sum \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi (l+x)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right);$$

en eindelijk, daar $u = w + v$ is:

$$u = \frac{ax}{l} + 2a \sum \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi (l+x)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right) \dots g)$$

Deze vergelijking geeft OHM op pagina 175 van zijn reeds meermalen aangehaald werk, met dit onderscheid, dat onze a gelijk is aan wat hij $\frac{a}{2}$ noemt, daar beide de spanning van de bron van elektriciteit beduiden.

III.

FORMULES EN WETTEN VOOR DE BETREKKELIJKE STROOM-
STERKTE EN DE BETREKKELIJKE SPANNING. GRAFI-
SCHE VOORSTELLING DIER WETTEN VOOR DE
BETREKKELIJKE STROOMSTERKTE.

Uit de vergelijking

$$u = \frac{ax}{l} + 2a \Sigma \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi(l+x)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right)$$

volgt door differentiatie:

$$\frac{du}{dx} = \frac{a}{l} + \frac{2a}{l} \Sigma \left(\cos \frac{i\pi(l+x)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right).$$

Plaatsen wij deze uitdrukking ter vervanging van $\frac{du}{dx}$ in de formule, op pag. 5 voor de stroomsterkte gevonden, dan wordt

$$S = k\omega \frac{du}{dx} = k\omega \left[\frac{a}{l} + \frac{2a}{l} \Sigma \left(\cos \frac{i\pi(l+x)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right) \right] \dots a),$$

waardoor de stroomsterkte voor elken tijd en voor elk punt is gegeven.

Daar nu voor $t = \infty$ de factor $e^{-t} = 0$ wordt, zoo blijkt, dat daarvoor de vorm onder het summeringsteeken verdwijnt. Noemen wij de waarde, welke S in dezen toestand heeft, S , dan is

$$S = k\omega \frac{a}{l} \dots \dots \dots b).$$

Uit hetgeen hier gezegd is, blijkt het volgende:

De reeds meermalen vermelde veranderlijke toestand van de stroomsterkte duurt oneindig voort. Nimmer is de stroomsterkte door de geheele keten even groot, doch voor elk punt nadert zij voortdurend tot de algemeene eindwaarde S , zonder er ooit gelijk aan te worden.

Doelen wij de beide leden der vergelijking $a)$ door de overeenkomstige leden van de vergelijking $b)$, dan ontstaat eene belangrijke formule:

$$\frac{S}{S} = 1 + 2 \sum \left(\cos \frac{i\pi (l+x)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right), \dots c)$$

die de verhouding aangeeft van de stroomsterkte, welke op eenig oogenblik in eenig punt heerscht, tot die, welke in den blijvenden toestand door de geheele keten bestaat.

Wij zullen het quotient $\frac{S}{S}$ voortaan de *betrekkelijke stroomsterkte* noemen.

Uit deze formule kan men belangrijke wetten afleiden, waarvan er hier enkele volgen.

Stellen wij ons twee ketens voor. Laten bij beide de spanningen a der elektriciteitsbronnen even groot zijn, als ook de coëfficiënten k' , waardoor aan beide een even groot geleidend vermogen en gelijke coëfficiënten γ (zie pag. 6 en 12) worden toegekend. Dan kunnen de waarden van $\frac{S}{S}$

voor deze twee ketens alleen nog verschillen door de verschillende waarden die de quotienten

$$\frac{x}{l} \text{ en } \frac{t}{l^2}$$

hebben.

Wanneer wij echter voor beide het eerste dezer quotienten even groot stellen, dan vergelijken wij punten in de ketens, die met betrekking tot de lengten l denzelfden stand hebben, b. v. die in het midden of op $\frac{3}{4}$ der lengten zijn gelegen, en welke punten wij *overeenkomstige punten* zullen noemen. Uit de gelijkheid van $\frac{x}{l}$ voor beide ketens volgt ook die van den vorm

$$\cos \frac{i\pi (l+x)}{l}.$$

De waarden van $\frac{S}{8}$ zullen nu nog slechts afhangen van het quotient $\frac{t}{l^2}$. Wanneer wij de letters, die op de tweede keten betrekking hebben, accentueren, dan hebben wij voor overeenkomstige punten den regel:

„De betrekkelijke stroomsterkten zijn even groot na tijden, die tot elkaar staan als de vierkanten der lengten”,
daar in dit geval ook de quotienten

$$\frac{t}{l^2} \text{ en } \frac{t'}{l'^2}$$

gelijk zullen zijn.

Past men op twee zulke ketens de formule voor u toe, terwijl men daarbij weder dezelfde omstandigheden aanneemt, behalve de gelijkheid in beide ketens der grootheid door a voorgesteld, dan vindt men, na deeling door a ,

$$\frac{u}{a} = \frac{x}{l} + 2 \sum \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi (l+x)}{l} e^{-\frac{k^2 i^2 \pi^2 t}{l^2}} \right).$$

Noemen wij $\frac{u}{a}$ de betrekkelijke spanning, dan volgt uit deze formule, dat

„in overeenkomstige punten de betrekkelijke spanningen gelijk zullen zijn na tijden, die zich verhouden als de tweede magten der lengten.”

Beide deze wetten zijn door twee natuurkundigen onderzocht geworden en waar bevonden. Wij zullen in het tweede gedeelte op hunne belangrijke proefnemingen terugkomen.

Op gelijke wijze kan men bepalen, hoe de betrekkelijke stroomsterkten en spanningen afhangen van de constanten k , γ en ω . Wij zullen ook daarover in het tweede gedeelte uitweiden.

Niet onbelangrijk is het, uit de formules voor $\frac{S}{S}$ en $\frac{u}{a}$ kromme lijnen af te leiden, die deze grootheden tot ordinaten en de tijden tot abscissen hebben. Op de achter deze verhandeling gevoegde plaat zijn kromme lijnen afgebeeld, die uit de formule voor de betrekkelijke stroomsterkte worden afgeleid. Met aan te toonen hoe deze afleiding geschiedt, en welke gevolgtrekkingen men daarbij kan maken, zullen we deze afdeeling besluiten.

Stellen wij eens voor al

$$e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}} = z;$$

dan gaat de formule *e* pag. 20 over in:

$$\frac{S}{S} = 1 + 2 \sum \left(\cos \frac{i\pi (l+x)}{l} z^{i^2} \right) \dots \dots d).$$

Geven wij nu aan x eene bepaalde waarde, dan kan de vorm onder het teeken Σ ontwikkeld worden. In 't algemeen zal men daardoor eene reeks verkrijgen, wier som niet te bepalen is, maar die zoo sterk convergeert, dat men door enkele termen te berekenen, voldoende waarden van $\frac{S}{S}$ vindt.

Voor sommige punten wordt de reeks eenvoudiger, b. v. voor $x = 0$, $= \frac{1}{2} l$ en $= l$. Wij willen haar voor deze punten ontwikkelen.

Zij 1^e $x = 0$. Dan wordt

$$\frac{S}{S} = 1 + 2 \Sigma (\cos i\pi \cdot z^{i^2}).$$

Nu is $\cos i\pi = (-1)^i$ voor alle gcheele waarden van i , van 1 tot ∞ . Door ontwikkeling verkrijgen wij de reeks:

$$\frac{S}{S} = 1 + 2 (-z + z^4 - z^9 + z^{16} - \text{enz.}), \text{ of}$$

$$\frac{S}{S} = 1 - 2 (z - z^4 + z^9 - z^{16} + \text{enz.}).$$

Nu is $\frac{S}{S}$ nog alleen eene functie van t , omdat

$$z = e^{-\frac{k\pi^2 t}{l^2}}$$

is. De reeks convergeert snel, daar e^{-t} voor eenigzins groote waarden van t zeer klein wordt, en toch altijd kleiner dan 1 is.

Zij 2^e $x = \frac{1}{2} l$. De vergelijking d) gaat dan over in:

$$\frac{S}{S} = 1 + 2 \Sigma (\cos \frac{3}{2} i\pi \cdot z^{i^2}).$$

Nu is $\cos \frac{3}{2} i\pi$ voor alle onevene waarden van i gelijk aan 0;

voor alle waarden van i , welke door 4 deelbaar zijn, en dus begrepen zijn in den vorm $4n$, als n een positief geheel getal is, gelijk aan $+1$;

voor alle waarden van i , begrepen in den vorm $4n + 2$, gelijk aan -1 .

Door deze opmerking toe te passen vinden wij, door ontwikkeling, voor het midden des draads:

$$\frac{S}{s} = 1 - 2(z^4 - z^{16} + z^{36} - z^{64} \dots),$$

welke vergelijking ook aldus kan geschreven worden:

$$\frac{S}{s} = 1 - 2(z^4 - (z^4)^4 + (z^4)^9 - (z^4)^{16} + \dots).$$

Eindelijk gaat β^e , voor $x = l$, de vergelijking d) over in:

$$\frac{S}{s} = 1 + 2 \sum (\cos 2i\pi \cdot z^{i^2}).$$

Nu is voor alle geheele waarden van i , $\cos 2i\pi = +1$. Dientengevolge vindt men door ontwikkeling van dezen vorm voor het batterij-uiteinde van den draad:

$$\frac{S}{s} = 1 + 2(z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + \dots).$$

Ook deze reeks convergeert; *sterk*, als l eenigzins groote waarden heeft.

Om nu de bedoelde kromme lijn te kunnen teekenen, die b. v. uit de eerste der drie gevonden reeksen voortvloeit, hebben wij vooreerst uit de waarde van z , bladz. 22:

$$l = -\frac{l^2}{Mk'n^2} \log z,$$

waarin M de modulus der Briggiaansche logaritmen is. l en $\log z$ zijn dus aan elkaar evenredig. Geeft men dus aan $\log z$ waarden, die met gelijke verschillen afnemen, dan geeft de reeks

$$\frac{S}{s} = 1 - 2(z - z^4 + z^9 - z^{16} + \dots)$$

waarden van $\frac{S}{s}$, overeenkomende met tijden, die met gelijke verschillen toenemen. Daar de tijdseenheid willekeurig is, kunnen wij de tijden voorstellen door 1, 2, 3, enz. De vorm der kromme lijn is onafhankelijk van de constante

$$\frac{t^2}{Mk\pi^2}$$

Voor $t = 0$ is $z = 1$, derhalve $\log z = 0$.

Neemt men voor $t = 1$, $\log z = 9.95 - 10$,

dan is " $t = 2$, " $= 9.90 - 10$,

 " $t = 3$, " $= 9.85 - 10$,

en zoo vervolgens. Voor elke waarde van t kan men nu z vinden, en daar men bij deze berekening slechts 20 logarithmen noodig heeft, zoo vindt men de overeenkomstige waarden van $\frac{S}{s}$ zeer gemakkelijk. Bepaalt men zich tot 5 decimalen, dan heeft z^{16} al spoedig geen invloed meer. Bij $t = 28$ gaat die van z^4 verloren, zoodat van dit punt af de loop der kromme lijn met die eener logarithmische kromme overeenkomt. Voert men de berekening uit, dan verkrijgt men de volgende tabel:

Tijden.	Log z .	$z-z^2 + z^3 - \dots$	Verschillen.	$\frac{S}{S'}$.
1	9.95	0.50000		0.00000
2	9.90	0.49992	8	0.00016
3	9.85	0.49763	229	0.00474
4	9.80	0.48770	993	0.02460
5	9.75	0.46787	1983	0.06426
6	9.70	0.44007	2780	0.11986
7	9.65	0.40758	3249	0.18484
8	9.60	0.37325	3433	0.25350
9	9.55	0.33906	3419	0.32188
10	9.50	0.30626	3280	0.38748
11	9.45	0.27554	3072	0.44892
12	9.40	0.24721	2833	0.50558
13	9.35	0.22137	2584	0.55726
14	9.30	0.19795	2342	0.60410
15	9.25	0.17683	2112	0.64634
16	9.20	0.15786	1897	0.68428
17	9.15	0.14085	1701	0.71830
18	9.10	0.12564	1521	0.74872
19	9.05	0.11204	1360	0.77592
20	9.00	0.09990	1214	0.80020
21	8.95	0.08907	1083	0.82186
22	8.90	0.07939	963	0.84122
23	8.85	0.07077	862	0.85846
24	8.80	0.06308	769	0.87384
25	8.75	0.05622	686	0.88756
28	8.60	0.03981		0.92038
31	8.45	0.02818		0.94364
34	8.30	0.01995		0.96010
37	8.15	0.01412		0.96444
40	8.00	0.01000		0.98000
44	7.80	0.00631		0.98738
50	7.50	0.00316		0.99368

Uit de daarin voorkomende getallen, alsmede uit de daarnaar geconstrueerde kromme lijn (het is die, welke op de plaat in de onderste afdeeling voorkomt, en aldaar het krachtigste is aangegeven), blijkt het, dat de betrekkelijke stroomsterkte aan het aarduiteinde van de galvanische keten aanvankelijk langzaam en daarna vrij snel toeneemt. Ongeveer bij $t = 8$ (in de tabel) is een buigpunt gelegen. De toename geschiedt nu hoe langer hoe langzamer en de stroomsterkte nadert asymptotisch tot hare eindwaarde S . Voor $t = 40$ verschilt zij daarvan nog slechts $\frac{1}{50}$. Voor $t = 61$ nog maar $\frac{1}{500}$, zoodat reeds voor deze tijden de stroomsterkte bijkans als onveranderlijk kan worden aangemerkt.

Het is hier de plaats om eenige opmerkingen in te voegen, dienende om de inrigting der plaat op te helderen. Zoo als men ligt begrijpt, zijn op de daarop voorkomende, elkaar regthoekig snijdende lijnen, de abscissen en ordinaten der verschillende krommen afgemeten. De onderste (horizontale) lijn is de as der tijden. Zij is in 15 gelijke afdeelingen verdeeld, en niet in 50, zoo als men volgens de tabel zoude kunnen verwachten. De verticale as is die der betrekkelijke stroomsterkten. De eindstroomsterkte S is gelijk genomen aan 9 afdeelingen, zoodat de lijn, op dezen afstand en evenwijdig aan de as der tijden getrokken, de asymptoot is, tot welke de zoo even besproken kromme lijn der betrekkelijke stroomsterkten nadert. De afdeelingen der verticale as zijn kleiner dan die der horizontale, hetgeen niets tot de zaak doet, maar zoo gekozen is, om de plaat geschikte en betere afmetingen te doen verkrijgen, dan anders het geval zoude zijn. Over de flauwer geteekende gebroken lijnen zal eerst in het tweede gedeelte sprake zijn.

Ook uit de laatste der gevonden reeksen is het gemak-

kelijk, eene kromme lijn te berekenen en te teekenen. Wij kunnen echter een paar merkwaardige eigenschappen van deze kromme lijn uit de reeks zelve afleiden, en zullen dus de tabel der tijden en overeenkomstige waarden van $\frac{S}{s}$ voor het punt $x = l$ niet mededeelen.

Op de plaat is deze kromme echter geteekend; 't is die, welke in de bovenste afdeeling het sterkste is aangegeven. Wij kunnen de uitspraken der formule aan haar toetsen.

Stelt men in de reeks:

$$\frac{S}{s} = 1 + 2(z + z^4 + z^9 + z^{16} + \dots)$$

$t = 0$, dan wordt $z = e^{-\frac{k\pi^2 t}{l^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$. Daaruit volgt terstond, dat, voor het batterij-uiteinde des geleiders, bij het sluiten van den stroom, de stroomsterkte oneindig groot is.

Daar alle termen der reeks positief zijn, blijft $\frac{S}{s}$ steeds grooter dan 1, terwijl eerst voor $t = \infty$, $z = 0$ wordt en dus $\frac{S}{s} = 1$. Hierdoor wordt aangeduid, dat de stroomsterkte in het batterij-uiteinde des draads steeds afnemende is, van oneindig groot tot hare eindwaarde S . Uit de berekening blijkt, dat bij $t = 28$ de waarde der stroomsterkte nog slechts $\frac{1}{5}$ grooter is dan hare eindwaarde, bij $t = 50$ nog slechts $\frac{1}{25}$, enz.

Vergelijken wij de reeksen voor de punten $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}l$; schrijven wij daartoe de laatste in eene gewijzigde gedaante aldus:

$$\frac{S}{S} = 1 - 2(z^4 - (z^4)^4 + (z^4)^9 - (z^4)^{16} + \dots);$$

dan is haar vorm geheel overeenkomstig met de reeks voor $x = 0$:

$$\frac{S}{S} = 1 - 2(z - z^4 + z^9 - z^{16} + \dots).$$

De betrekkelijke stroomsterkten in het midden en het aarduiteinde des draads zullen dus gelijk zijn na tijden, waarvoor z^4 in de eerste reeks, gelijk wordt aan z in de tweede. Noemen wij deze tijden t_1 en t_2 , dan moet dus

$$\frac{4k'\pi^2 t_1}{l^2} = \frac{k'\pi^2 t_2}{l^2}$$

zijn. Dit zal plaats hebben als

$$4t_1 = t_2$$

is. Derhalve hebben wij de wet, dat

„de betrekkelijke stroomsterkten in de punten $x = \frac{1}{2}l$ en $x = 0$ gelijk zullen zijn na tijden, die tot elkaar staan als 1 : 4.”

Ontwikkelt men reeksen voor andere punten als die, waarvoor er hier boven zijn medegedeeld, dan zal men zien, dat zij zamengestelder zijn dan deze, en dikwijls vrij omslachtig om daaruit kromme lijnen door berekening af te leiden. Het zoude niet onbelangrijk zijn, voor punten, die niet ver van het batterij-uiteinde verwijderd zijn, de kromme lijnen te berekenen. Daar er echter geene proefnemingen gedaan zijn, zoover mij bekend is, die de juistheid der bedoelde kromme lijnen hebben aangetoond, zullen wij dit onderzoek niet verder voortzetten.

TWEEDE DEEL.

I.

GESCHIEDKUNDIG OVERZICHT. PROEVEN VAN GAUGAIN EN
GUILLEMIN, DIE DE WETTEN, UIT DE FORMULES VAN
OHM AFGELEID, BEVESTIGEN.

OHM heeft de wetten van den galvanischen stroom, die naar hem zijn genoemd, op proeven gebouwd, welke hij zelf genomen had. Hij gebruikte hierbij de galvanische kolom van VOLTA, welke toen nog niet door betere werktuigen was vervangen. In 1826 gaf hij er verslag van in SCHWEIGGER'S Journaal. In het daaropvolgende jaar zag zijne mathematische theorie het licht.

FECHNER nam ook vele proeven, die op OHM'S wet en daaruit afgeleide gevolgen betrekking hadden. Hij beschreef ze, en deelde zijne uitkomsten hoofdzakelijk mede in het jaar 1831 ¹⁾. Ook POUILLET hield zich met onderzoekingen over hetzelfde onderwerp bezig, die hij in

1) Massbestimmungen über die galvanische Kette, von G. T. FECHNER. Leipzig 1831.

eene verhandeling in 1837 publiceerde. Hij betwistte de prioriteit in deze ontdekkingen, doch ten onregte, aan de beide eerstgenoemde natuurkundigen, met wier proeven hij lang geheel onbekend schijnt te zijn geweest. KOHLRAUSCH gaf (P. A. 78.1) eene belangrijke verhandeling, aangaande de door hem in 't werk gestelde onderzoekingen over de elektroskopische eigenschappen der galvanische keten. Tot hiertoe hadden alle proefnemingen slechts op den onveranderlijken toestand betrekking.

Vele natuurkundigen namen proeven om de *snelheid* der elektriciteit te meten. Hunne uitkomsten waren zeer verschillend, omdat zij niet van één standpunt uitgingen en de omstandigheden, die op de voortplanting der elektriciteit invloed hebben, onbekend waren, of niet in aanmerking waren genomen. In hoeverre men bij de elektriciteit van *snelheid* spreken kan en welke omstandigheden er op inwerken, zal later ter sprake komen. De voornaamste der bedoelde proefnemingen zijn gedaan door WHEATSTONE, FIZEAU en GOUNELLE, MITCHEL en WALKER in Amerika, FARADAY, AERY en QUETELET en anderen.

In het belang der telegrafie zijn, vooral in Engeland, vele proeven genomen om de elektrishe werkingen te onderzoeken, die in onderzeesche kabels plaatsgrijpen. De theorie dier werkingen, door FARADAY, THOMSON en anderen ontwikkeld, en de proeven, die tot bevestiging dezer theorie dienen, zullen ons veel stof ter behandeling schenken. Het een en ander zal in deze verhandeling worden ter sprake gebracht.

De Fransche natuurkundigen GAUGAIN en GUILLEMIN hebben, de eerste met slechte geleiders, de tweede met lange telegraafdraden proeven genomen, die de formule van OHM en de daaruit afgeleide gevolgen bewijzen. Men vindt deze

proeven en uitkomsten, door GAUGAIN en GUILLEMIN zelf medegedeeld, in de Annales de Chim. et Phys. III^{me} Série, tomes 59—64. De eerste dezer geleerden hield zich voornamelijk bezig met het onderzoek van stroomen in slechte geleiders, waartoe hij mengsels van oliën, zijden linten, maar voornamelijk katoendraden gebruikte, zooals die van verschillende nummers in den handel voorkomen. De toestel zijner proeven was ingerigt als volgt:

De slechte geleider werd door een metalen draad aan de elektriciteits-bron verbonden. Men konde aannemen dat, als deze geladen was, de spanning bij de sluiting terstond onveranderd werd overgeplant in dit einde van den katoendraad, of wat er anders in de keten was gesteld. Evenzoo werd het andere uiteinde van den slechten geleider met de aarde in naauwe verbinding gesteld, zoodat men kon aannemen, dat de spanning aldaar steeds $= 0$ was.

Tot elektriciteits-bron werd door GAUGAIN een condensator aangewend, wiens onderplaat met de aarde in geleidende verbinding was, en wiens bovenplaat aan een goudblad-elektrometer was verbonden. Deze laatste was min of meer ingerigt als die van PECLLET, met een naar willekeur verdeelden graadboog, om de uiteenwijing der goudblaadjes te kunnen meten. Een geladen elektrophoor leverde de noodige elektriciteit, en door met een klein proefplaatje een weinig elektriciteit toe te voegen of weg te nemen, regelde men den stand der goudblaadjes. Hierdoor kon men dien stand vrij naauwkeurig onveranderd houden.

Het meten van stroomsterkten geschiedde op tweederlei wijze. Het is duidelijk dat de elektriciteit langs den slechten geleider in den grond wegvloede. Vóór men waarnam, werd de elektrometer eerst eenigen tijd op dezelfde ladings-hoogte gehouden (meestal 20° van zijne verdeling), om daardoor

den veranderlijken toestand der spanningen te laten voorbijgaan. Als deze voorbij was, werd de toestel aan zich zelf overgelaten en de tijd gemeten, welken de blaadjes besteedden om, b. v. tot 17° , zamen te vallen. Het is duidelijk, dat deze tijd omgekeerd aan de stroomsterkte evenredig is. Wilde GAUGAIN hierbij spanningen meten, dan werden op de vereischte punten elektrometers in de keten gesteld.

Ter onderscheiding van deze „*méthode des durées d'écoulement*” noemde GAUGAIN zijne andere wijze van proefneming „*méthode à décharges*.”

Een goudblad-elektrometer was zoo ingerigt, dat, bij zekere uiteenwijking der goudblaadjes, een dezer een knop aanraakte, die met de aarde in goed geleidende verbinding stond. Deze „*électromètre à décharges*” werd aan het aarduiteinde in de keten gesteld. De hoeveelheid elektriciteit, noodig om eene ontlading te veroorzaken, was steeds even groot. Bij meerderen toevoer van elektriciteit, dat is, bij sterkeren stroom, volgden de ontladingen elkaar sneller op. Door hare aantallen in even lange tijden te meten, kon men dus de stroomsterkten vergelijken.

In de „*Annales de Ch. et de Ph.*” (III^{me} Série, tom. 59) zijn de proeven van GAUGAIN beschreven, welke op den onveranderlijken toestand des strooms betrekking hebben. Wat moeten wij echter door „*onveranderlijken toestand*” in dit geval verstaan?

Bij het sluiten van den stroom zoude een elektrometer, ergens in de keten geplaatst, eene spanning $= 0$ aanwijzen, die van de sluiting af in zekeren tijd aangroeit tot de waarde, welke de spanning voor dat punt in den „*onveranderlijken toestand*” bereikt. Volgens de theorie is deze tijd oneindig, maar de uiteenwijking der goudblaadjes bereikt al spoedig eene grootte, die zij in 't vervolg onveranderd blijft be-

houden. Bij eene oneindig fijne gevoeligheid van den elektrometer zoude men steeds eene klimming in de spanning bemerken. Onze instrumenten bezitten echter alle eene begrensde gevoeligheid. Zoodra de spanning zoo weinig van hare eindwaarde verschilt, dat het verschil te klein is om door den elektrometer te worden aangewezen, schijnt ons de spanning onveranderlijk toe en dus de blijvende toestand ingetreden. Hét is deze toestand, waarin de volgende proeven genomen zijn.

De waarheden, door de formule

$$u = \frac{ax}{l}$$

uitgedrukt, werden op velerlei wijzen bewezen. Zij duidt aan, dat in den onveranderlijken toestand de spanningen in de keten gelijkmatig afnemen van het bovenste uiteinde der keten, als wij het zoo mogen noemen, alwaar zij a is, tot het onderste uiteinde ($x = 0$), waar de spanning 0 is.

In het midden van den geleider, als deze overal gelijk van doorsnede en geleidend vermogen is, moet volgens OHM's theorie de spanning $= \frac{1}{2} a$ zijn. GAUGAIN heeft dit bevestigd 1).

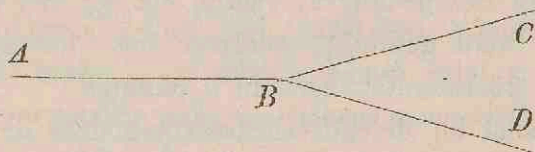
Hij nam twee goudblad-elektroskopen, die zoo veel mogelijk gelijk waren en stelde den eersten (n^o. 1) in verbinding met de aarde door een 3 meters langen katocndraad, die aan bovengenoemde voorwaarde zooveel mogelijk voldeed. Den tweeden (n^o. 2) verbond hij door een geheel overeenkomstigen draad met den eersten elektroskoop. Daarna voerde hij de spanning van n^o. 2 zoo hoog op, dat de goudblaadjes een hoek van 25° van de verdeeling met elkander maakten. Nadat deze spanning gedurende een vierendeeluurs onver-

1) Ann. de Ch. et de Ph., III Série 59, p. 26.

anderlijk op die hoogte was gehouden, zag hij dat de elektroskoop n^o. 1, die in het midden van den 6 el langen geleider stond, 14° aanwees. Om nu zeker te zijn, dat de daardoor aangewezen spanning juist de helft was van die, welke met 25° overeen kwam, nam hij de draden weg, ontladde den éénen elektroskoop, en laadde den anderen tot 25°. Daarna werden de elektroskopen met elkaar in aanraking gebracht, ten gevolge waarvan zich de elektriciteit gelijkelijk over beide moest verdeelen en de spanning van ieder juist $\frac{1}{2} a$ moest zijn, daar de instrumenten volkomen gelijk waren. Werkelijk was nu de elektroskoop die ongeladen was geweest weder 14° aan, zoodat hieruit blijkt, dat de proef de theorie bevestigt.

Ook eene andere proef bevestigt haar. Zij is de volgende:

Een geleider van den vorm der bijgaande teekening,



uit 3 zooveel mogelijk gelijke draden vervaardigd, werd in de keten gevoegd.

De stroom ging in het punt *A* in, verdeelde zich in *B* in twee even sterke deelen en trad aan de uiteinden *C* en *D* in den grond. Daarna werd de rigting veranderd; de einden *C* en *D* werden aan de elektriciteitsbron vastgemaakt en het uiteinde *A* naar den grond afgevoerd. Nu is het duidelijk, dat, als de spanning van de bron beide keeren gelijk a is, in de eerste proef het punt *B* eene spanning $= \frac{1}{3} a$ zal hebben, en in de tweede proef eene spanning $= \frac{2}{3} a$, omdat het dubbele gedeelte van den geleider de elektriciteit tweemaal zoo snel voortplant als het enkelvou-

dige, en met een enkelen geleider van de halve lengte gelijkstaat. De spanningen in B staan dus tot elkaar als 1 tot 2, hetgeen GAUGAIN, met de elektroskopen en op de wijze in de voorgaande proef vermeld, volkomen bewaarheid vond.

Wat de formule $S = \omega l \frac{a}{l}$ aangaat, zoo bewees de volgende proef, dat de stroomsterkte regtstreeks aan ω en omgekeerd aan l evenredig is.

GAUGAIN nam 4 draden van gelijke gesteldheid, elk 1^m,64 lang. Eerst verbond hij de bron van elektriciteit met den elektrometer „à décharges”, en nadat, onder eene onveranderlijk gehouden spanning van de bron, de stroom lang genoeg had geduurd om constant te zijn, telde hij het aantal ontladingen, in 3 minuten door den benedensten elektroskoop voortgebracht.

Uit twaalf waarnemingen, waarbij elk der vier draden op zijn beurt werd gebruikt, verkreeg men het gemiddelde aantal van 25,45 ontladingen in 3 minuten.

Nu verbond hij dezelfde electroskopen door de vier draden tegelijk, hen daarbij zoodanig zamenvoegende, dat hij twee draden van dubbele lengte verkreeg. Wanneer nu de overige omstandigheden dezelfde bleven als in de eerste proef, dan moest er in 3 minuten weder een even groot getal ontladingen waargenomen worden, daar de formule ω in den teller en l in den noemer heeft, en beide 2 maal grooter zijn geworden.

Uit 8 waarnemingen bleek, dat er in den blijvenden toestand des strooms 25,50 ontladingen in 3 minuten plaats grepen. Deze getallen komen genoeg overeen om de wet te bewijzen.

Nog door eene andere inrigting werd hetzelfde doel bereikt. GAUGAIN vulde langwerpige bakjes, die uit eene

isolerende stof waren gemaakt, met olie van zeker geleidend vermogen. De bakjes stonden op isolerende voetjes, om de laterale inductie te verzwakken. Hunne doorsnede was overal evengroot en de einden werden door metalen plaatjes gevormd, loodregt op de lengte-as geplaatst. Door met een dergelijk plaatje de kolom olie ergens anders af te sluiten, wijzigde hij de lengte van den geleider; door bepaalde hoeveelheden olie in de bakjes te gieten, veranderde hij zijne doorsnede. Hij gebruikte de methode waarbij de duur van uitstrooming werd gemeten (zie bladz. 33), waarin de elektrometer-blaadjes van 20 graden zamenvielen tot 17. Onder andere gaven zijne proeven:

bij de doorsnede 1, een uitstroomingsduur van 88,33 seconden;

bij eene doorsnede 3, een uitstroomingstijd van 30,25 seconden.

De uitstroomingstijd is dus omgekeerd evenredig aan de doorsnede, hetgeen ook uit de theorie volgt.

Dat deze getallen niet zoo geheel naauwkeurig zijn, ligt aan de waarneming of aan de inrigting, daar de stroom hier onmogelijk onveranderlijk zijn kan, omdat de spanning van de bron zelve reeds veranderlijk is.

GAUGAIN nam nog eene andere proef, welke aantoonde, dat de stroomsterkte evenredig is aan de spanning in de bron 1). Daar wij echter de spanningsverdecling bij den constanten stroom hebben besproken en de formule voor de stroomsterkte daaruit is afgeleid, gelooven wij deze proef te mogen voorbijgaan, om tot de beschouwing van de uitkomsten over te gaan, welke de proeven van GUILLEMIN en GAUGAIN opleverden, betreffende den veranderlijken toe-

1) Ann. de Ch. et de Ph. t. a. p. pag. 44 en vv.

stand. Wij moeten echter met betrekking tot de boven beschreven proeven nog opmerken, dat de invloed der lucht daarbij verwaarloosd werd. De inrigting van den toestel toch was zoo getroffen, dat er bij eene zwakke spanning toch eene vrij aanzienlijke hoeveelheid elektriciteit door de keten stroomde, en de aan de lucht blootgestelde oppervlakte zeer gering was.

De verhandelingen van GAUGAIN en GUILLEMIN over den veranderlijken toestand zijn te vinden in het 60^{ste} deel der Ann. de Chimie et de Physique (pag. 326 en 385). GUILLEMIN nam zijne proeven, bijgestaan door zijn vriend E. BURNOUF, op lange telegraafdraden, in het najaar van 1859. Hare inrigting beschrijven wij later. GAUGAIN gebruikte in 't algemeen dezelfde inrigting als bij zijne boven beschreven proeven. Om zijn onderzoek gemakkelijker te maken onderscheidt hij twee zaken, te weten:

Stel dat men in een keten, ingerigt, zooals vroeger beschreven is (bladz. 32), met een slechten geleider, aan het einde van dezen geleider of ergens anders een ongeladen elektrokoop plaatste; dat de bron van elektriciteit geladen was, en dat men nu de keten sloot; dan zoude er een zekere tijd verloopen, alvorens de blaadjes van den benedensten elektrokoop een vooraf bepaalden stand bereikten. Deze tijd noemt GAUGAIN den duur van voortplanting. Het is duidelijk, dat deze duur afhangt van de grootheden, vroeger door k , ω , a en x aangeduid. Bepaalde men echter de spanning niet absoluut, maar in betrekking tot de eindwaarde die zij in hetzelfde punt bereiken moet, b. v. het quotiënt van de eerste en tweede, dan zoude men eene andere tijddruimte krijgen, welke GAUGAIN „betrekkelijke duur van voortplanting” noemt, in onderscheiding van de voorgaande, die „volstreckte duur van voortplanting” heet.

Wanneer men de beteekenis van *onveranderlijken toestand*

opvat zooals vroeger is bepaald (pag. 33), dan is de tijd, die voor zijn begin verloopt, de duur van den veranderlijken toestand. Dezen te bepalen is zonder beteekenis. De theorie leert, dat hij oneindig is. Vergenoegt men zich met den tijd, na welken de spanningen nog slechts een breukdeel van hare eindwaarden afwijken, dan is de duur van den veranderlijken toestand nog slechts eene gewijzigde opvatting van den duur van betrekkelijke voortplanting.

GAUGAIN mat nu meest spanningen en wel voornamelijk in den veranderlijken toestand. Door zijne proeven dienen dus de gevolgen der vergelijking:

$$u = \frac{ax}{l} + 2a \sum \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi(x-l)}{l} e^{-\frac{k^2 i^2 \pi^2 t}{l^2}} \right)$$

bewezen te worden. Wij wenschen deze thans na te gaan.

Wanneer men in deze vergelijking aan de grootheden t , x , k' en l bepaalde waarde toekent, is het quotient $\frac{u}{a}$ ook bepaald, hetgeen, in woorden uitgedrukt, beteekent, dat bij dezelfde keten de spanning in eenig punt na denzelfden tijd evenredig is aan de spanning in de bron van elektriciteit. Geeft men dus in twee verschillende proeven verschillende spanningen aan de bron, dan zal, bij gelijkheid van alle andere grootheden, na den zelfden tijd, hetzelfde punt spanningen bezitten, die aan die van de bron evenredig zijn. Maar de eindwaarden der spanningen in beide gevallen zullen daaraan mede evenredig zijn, waaruit volgt, dat na denzelfden tijd de spanningen weder hetzelfde breukdeel harer eindwaarden zullen zijn. Hieruit blijkt ten slotte, dat de duur van den veranderlijken toestand onafhankelijk is van de spanning a .

Nu nam GAUGAIN, om deze wet te bewijzen, twee ongelijk groote elektroskopen. Den grootste verbond hij door een

katoendraad aan den kleinste, en dezen door een dergelijken draad met de aarde. Nu voerde hij de spanning van den eerste op, tot deze 25° wees; na voldoende tijd stond de kleinere stil; zijn standpunt werd door een teeken kenbaar gemaakt. Daarop werd de spanning des eerste tot 15° teruggebracht, en de stand van den tweede weder aangegeekend, toen die bleek niet meer te veranderen. Het is duidelijk, dat de spanningen der elektroskopen, op deze wijze bepaald, aan elkaar evenredig zijn.

De draden werden nu door andere vervangen, die beide even lang ($0^m,70$) en even dik waren. Nadat de bovenste elektroskoop op 15° was gebragt, werd de keten gesloten, door een aan den katoendraad vastgehechten metalen geleider met den elektroskoop in aanraking te brengen, terwijl de spanning door middel van het proefplaatje steeds op 15° werd gehouden. Met een seconde-slinger werd de tijd gemeten, tot dat de kleinere elektroskoop zijn standpunt, met 15° van den andere overeenkomende, had bereikt. Daarna werd de verbinding verbroken en, nadat alles weder ontladen was, de spanning van de bron op 25° gesteld. Door middel van den metalen geleider werd den stroom weder doorgang verleend, en weder de tijdsruimte gemeten, die er verliep, voor dat de kleinere elektroskoop zijn ander standpunt bereikt had. De waarneming gaf, onder de veelvuldige proefnemingen, op deze wijze gedaan, onder andere de volgende uitkomst:

Bij een spanning van de bron van 25° of 15°		
was de bedoelde tijd in de		
1 ^{ste} proef	38"	
2 ^{de} "		38"
3 ^{de} "	32"	
4 ^{de} "		34"
waaruit gemiddeld voortvloeit . . .	35" en	36"

Deze getallen stemmen naauwkeurig genoeg overeen, om voor de waarheid te pleiten.

Een ander gevolg van de vergelijking voor u betreft het geleidend vermogen. Stelt men twee vergelijkingen op voor twee ketens, waarin a , ω , γ , l en x gelijk worden verondersteld, dan is het duidelijk, dat de waarden van u_1 en u_2 dezelfde zullen zijn, indien nog aan de voorwaarden $k_1 t_1 = k_2 t_2$ voldaan is. Men kan dus deze wet stellen:

„De absolute tijd van voortplanting is omgekeerd evenredig aan het geleidend vermogen.”

Het is duidelijk, dat bij deze twee ketens de eindwaarden van de spanningen in punten van dezelfde x gelijk zullen zijn. De spanningen u_1 en u_2 zullen dus, als zij gelijk zijn, ook dezelfde breukdeelen harer eindwaarden zijn. Maar de tijd, na welken de spanning in eenig punt een gegeven breukdeel harer eindwaarde bereikt, is de „betrekkelijke duur van voortplanting.” Hierdoor wordt de zoo even uitgesproken regel aldus:

„De betrekkelijke duur van voortplanting is omgekeerd evenredig aan het geleidend vermogen.”

GAUGAIN deelt uit eene reeks van proeven de volgende mede, die geheel afdoende is. Om homogene geleiders te verkrijgen, gebruikte hij weder de bakjes met olie, die wij op pag. 36 hebben beschreven. Hij bezigde zuivere olijfolie, en een mengsel van olijfolie en papaverolie, en vond, dat de geleidingsvermogens van het mengsel en van de zuivere olie tot elkander stonden als 71,3 : 21. Door middel van zijn reeds dikwijls beschreven toestel bepaalde hij nu den duur van voortplanting, en vond daarbij voor het mengsel 25",6, voor de zuivere olijfolie 89". De wet dat $k_1 t_1 = k_2 t_2$ is, geeft nu

$$89 \times 21 = 71,3 \times 25,6,$$

welke produkten bijna gelijk zijn. In plaats van 25,6 geeft de rekening 26,2, welke getallen slechts $\frac{1}{42}$ hunner waarde van elkander verschillen.

Vooraf merkwaardig en gewigtig voor de kennis van stroomen in telegraaflijnen is het gevolg, dat wij reeds vroeger (pag. 21 en 22) uit de vergelijking voor u hebben afgeleid, en dat, zoo als wij aldaar zagen, mede voor stroomsterkte geldig is.

Herinneren wij ons wat wij betrekkelijke spanning hebben genoemd, dan is het duidelijk, dat het quotient van de spanning in eenig punt op een gegeven oogenblik en de eindwaarde, die de spanning in dat punt bereikt, evenredig is aan de betrekkelijke spanning voor dat punt op datzelfde oogenblik, omdat de eindwaarde der spanning evenredig is aan de spanning in de bron. De wet, dat de betrekkelijke spanningen en stroomsterkten in overeenkomstige punten van twee ketens gelijk zullen zijn na tijden evenredig aan de vierkanten der lengten ¹⁾, kan dus eenigzins in vorm worden gewijzigd voor de proeven van GAUGAIN even als voor die van GUILLEMIN.

Voor de tijden, na welke de betrekkelijke spanningen gelijk zijn, komt de betrekkelijke duur van voortplanting in de plaats, of, als buitendien nog de grootheden a dezelfde zijn, de volstreekte duur van voortplanting.

GAUGAIN zocht om zijne proef te nemen twee draden uit, die zooveel mogelijk gelijk en even lang waren. Hij bepaalde den volstrekten duur van voortplanting van elk dezer draden in het bijzonder, en toen van de beide draden, aaneengevoegd tot één draad van dubbele lengte. Hij gebruikte hierbij twee elektroskopen, wier capaciteiten zich verhielden als 1 tot 2, en wel den eerste bij den draad van enkele,

1) Wanneer overigens de grootheden k, γ en m gelijk zijn.

den tweede bij dien van dubbele lengte. De noodzakelijkheid van het verschil dezer elektroskopen betoogt GAUGAIN in eene voorafgaande redenering ¹⁾, welke wij hier kunnen overslaan. Insgelijks gebruikte hij elektroskopen van gelijken inhoud, maar die zoo klein waren (zij hadden b. v. goudblaadjes van 1^{mm} breedte en 15^{mm} lengte), dat hunne uitgebreidheden konden verwaarloosd worden. De spanning van de bron werd in deze proef onveranderlijk op dezelfde hoogte gehouden. Met de eerste elektroskopen verkreeg GAUGAIN gemiddeld uit vele waarnemingen:

	Duur van voortplanting.
Bij den enkelen draad.	25,5 seconden,
„ „ dubbelen „	98,1 „

Passen wij de wet der vierkanten toe, dan had het laatste getal 102 moeten zijn. De ongelijkheid der draden en de waarnemingsfouten kunnen in dit geval gemakkelijk dit verschil van ongeveer $\frac{1}{30}$ veroorzaken.

Bij het gebruik van de kleine elektroskopen vond GAUGAIN bij een draad van

	Duur van voortplanting.
enkele lengte, gemiddeld . . .	11 seconden; bij eenen
van dubbele „ „ . . .	44 „

Deze getallen komen naauwkeurig met de wet der quadraten overeen.

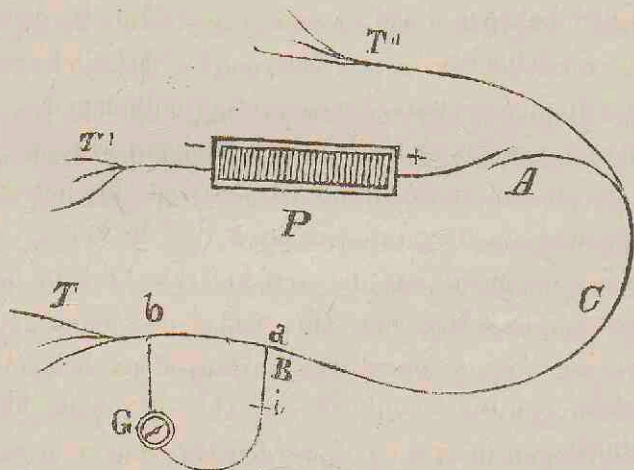
Wat aangaat de slechte geleiders en wel voornamelijk katoendraden, mag men de wet voor bewezen houden:

„Voor het uiteinde des geleiders en onder overigens gelijke omstandigheden is de duur van voortplanting evenredig aan het vierkant der lengte.”

Ook de belangrijke proefnemingen van GUILLEMIN en BUR-

1) Ann. de Ch. et de Phys., III Série, Tom. 60, pag. 339.

NOUF hebben over deze wet iets geleerd, hoewel niet met zeer veel strengheid. Zooals wij reeds vroeger vermeldden, gebruikten deze natuurkundigen latige telegraafdraden, voorkomende in het Fransche telegrafien-net. Wij kunnen echter hunne, ook in andere opzichten leerrijke proeven niet volgen, zonder in korte trekken den toestel geschetst te hebben, die daarbij werd gebezigd en de wijze waarop de waarnemingen geschieden. De nevenstaande schematische voorstelling, uit de verhandeling van GUILLEMIN overgenomen, zal ons de inrigting duidelijk maken.



De stroom werd opgewekt in de galvanische batterij *P*, gewoonlijk als die van BUNSEN, soms als die van DANIELL ingerigt, en naar gelang van de proefneming uit meerdere of mindere elementen bestaande. Wanneer de keten in *A* gesloten is, gaat de stroom door *A C B* (den telegraafdraad) naar *T*, om aldaar in de aarde over te gaan, terwijl de negatieve pool der batterij steeds met deze in *T* verbonden is. Bij *B* is de keten vertakt en gaat de stroom regtstreeks door *ab*, of tevens door den zijtak *BG*, op welchen weg hij den galva-

nometerdraad in G doorloopt, alwaar dus de stroomsterkte wordt bepaald.

De keten is echter in de punten A en i niet altijd gesloten. In A geschiedt het sluiten en openen beurtelings en met gelijke tusschenpoozen, welke men naar verkiezing langer of korter kan maken. Gewoonlijk wisselen het sluiten en openen elkander zeer snel af. Het gevolg hiervan is, dat er telkens na denzelfden tijd een stroom ontstaat, die steeds gedurende een even langen tijd de keten doorstroomt.

Van het oogenblik der sluiting in A af neemt de stroom in het gedeelte ab in sterkte toe, tot de blijvende toestand is bereikt geworden. Als er een gegeven tijd na de sluiting in A is verlopen, wordt in het punt i de zijtak gesloten, waardoor in het deel aGb een stroom ontstaat, die, wegens de kortheid van dit gedeelte, mag gerekend worden terstond zijn volle sterkte te bezitten, en welke sterkte evenredig is aan die tusschen de punten a en b van de keten. De galvanometer G meet dus de stroomsterkte, die in het aarduiteinde van de keten heerscht, nadat de stroom gedurende een zekeren (bij de proef zeer korten, doch bekenden) tijd is gesloten geweest.

De sluitingen in A en i ¹⁾ worden geregeld door een werktuig, dat voornamelijk bestaat uit een rol, bedekt met geleidende en niet geleidende deelen, waarop veeren drukken. De werking van dien rol komt met die van sommige stroomverbrekers of comutators overeen. Deze rol wordt met een gelijkmatige snelheid rondgedraaid om hare as, en door een aan haar verbonden toestel van raderen wordt het aantal omwentelingen aangegeven. Men kan den tijd, die er verloopt

1) De uiteinden A en B van den telegraafdraad kwamen in het laboratorium uit, waar de proefnemingen geschieden.

tusschen de sluitingen in A en i , steeds naar willekeur binnen zekere grenzen veranderen, en zijn lengte steeds met naauwkeurigheid bepalen. De verschijnselen hebben nu in de volgende orde plaats:

1^e. Sluiting in A ; na een bekenden tijd:

2^e. " " i ; meting van de stroomsterkte in G ; deze sluiting houdt slechts een oogenblik aan, gedurende hetwelk men kan aannemen, dat de stroomsterkte in a en b onveranderd blijft; dus, bijna terstond na de sluiting in i :

3^e. Opening in i en A ;

4^e. Verbinding van de keten met den draad T' , waardoor de elektriciteit, welke in den telegraafdraad is opgehoopt, door T en T' in de aarde kan wegvloeijen en de draad ontladen is, vóór dat de keten in A weder gesloten wordt.

5^e. Opening in T' en sluiting in A enz.

Wat is nu de uitwerking van al die oogenblikkelijke stroompjes van gelijke sterkte, die elkaar regelmatig opvolgen, op den galvanometer?

Één enkel stroompje zoude een uitslag te weeg brengen, veel sterker dan met zijne stroomsterkte overeenkwam, daar de stroom zoude werken als een stoot. Daar nu echter de naald vele zulke stooten krijgt, die elkaar snel en met gelijke tusschenpoozen opvolgen, zoo is het duidelijk, dat zij op de naald als een gelijkmatig aanhoudende stroom van iets minder sterkte moeten werken. De naald schommelt misschien in de eerste oogenblikken; spoedig neemt zij een vasten stand aan, die de maat voor de stroomsterkte in a en b aangeeft.

De duur van den veranderlijken toestand werd op de volgende wijze gemeten. Door eene inrigting aan de rol kon men, terwijl de rol snel rondwentelde, tragsgewijze den tijd veranderen tusschen de sluitingen in A en i . Hoe korter

deze tijd was, hoe korter de stroom had aangehouden vóór hij in G gemeten werd. Was nu die tijd eerst zeer kort, dan gaf G slechts een zwakken stroom te kennen; doch naarmate de tijd aangroeide, nam ook de stroom in sterkte toe. Was de tijd gelijk aan den duur van den veranderlijken toestand geworden, dan werd de afwijking niet grooter meer, als men den genoemden tijd deed aangroeijen. Zoodra dus, ondanks de toename van den tijd tusschen de sluitingen in A en z , de stroomsterkte onveranderd bleef, had men den duur van den onveranderlijken toestand bereikt.

GUILLEMIN deelt eenige uitkomsten aangaande de wet der quadraten mede, door hem op verschillende telegraaflijnen verkregen (Ann. de Chim. et de Ph., 60, pag. 445). Zij zijn de volgende:

Lengte der lijn in kilometers.	Duur van den veranderlijken toestand in seconden.
280	0,0045
380	0,0100
570	0,0180
1004	0,0280

De hierbij gebruikte batterij bestond uit ongeveer 60 Bunsensche elementen, waarvan het zink ongeveer 100 vierk. centimeters oppervlakte had.

Deze getallen zijn echter zeer onzeker. Behalve vele andere oorzaken daarvan, gelegen in den toestand des dampkrings, onvolkomen isolering, gebreken in de geleiding, temperatuur ¹⁾ enz., is vooral ook de gevoeligheid van den gebruikten galvanometer zeer veranderlijk en van grooten invloed op den waargenomen duur van den veranderlijken toestand. Het eerste en het laatste getal, daar voor opgegeven, zijn bovendien te klein, aangezien de draad, waardoor de stroom liep, heen

1) Stroomingen in de aardoppervlakte.

en terug over dezelfde palen was geleid. Hierdoor wekte elk der beide stroomingen door inductie in den anderen draad een stroom op, in de tegengestelde rigting, die den reeds aldaar bestaanden stroom noodwendig versterkte, en zodoende den onveranderlijken toestand van den stroom eerder te voorschijn riep. Nemen wij echter de opgegeven waarden als juist aan, en drukken wij hare verhoudingen uit in kleinere getallen, dan verkrijgen wij:

Verhoudingen der lengten.	1	1,36	2,04	3,59
Quadraten daarvan.	1	1,85	4,16	12,89
Verhoudingen der tijden.	1	2,2	4	6,22

Men ziet uit deze getallen, dat de duur van den veranderlijken toestand meer evenredig is aan de vierkanten dan aan de enkele lengten der geleiders, en hetgeen GUILLEMIN en BURNOUF gevonden hebben, nadert tot de door ons besproken wet der quadraten.

Jammer is het, dat in GUILLEMIN's verhandeling eenige druk- en rekenfouten voorkomen. Zoo moet 0",0010 (A. d. Ch. et de Ph. pag. 445, regel 19 v. o.) stellig 0",0100 zijn, zooals daarvoor door mij is opgegeven. Ook de bovenstaande tabel komt bij GUILLEMIN voor, doch met vele fouten. Zoo geeft hij b. v. de verhouding der quadraten aldus op:

1	1,60	3,73	11,11.
---	------	------	--------

Wij hebben in het eerste deel dezer verhandeling (bladz. 23 en vv.) een paar kromme lijnen beschouwd, die uit de theoretische formules zijn afgeleid, en de verandering te kennen gaven der betrekkelijke stroomsterkte in de beide uiteinden van de keten. GUILLEMIN nam de verandering der stroomsterkten in de beide uiteinden van een telegraafdraad met zijn toestel waar. Hij mat echter de absolute stroomsterkten. De uitslag dezer waarneming wordt door hem in zijne verhande-

ling opgegeven. De tijden, die er na de sluiting verlopen zijn, en de op die tijden waargenomen stroomsterkten worden voor elke proefneming opgegeven, als ook eenige omstandigheden, die op den toestand en de afmetingen van den gebezigten telegraafdraad en de weersgesteldheid bij de proef betrekking hebben. Zijne bevindingen zijn in volkomen overeenstemming met de theorie. De galvanometer aan het aarduiteinde van den draad week in het eerste oogenblik na de sluiting niet af (Zie de reeksen in GUILLEMIN's verhandeling onder n°. 1 en n°. 3—12). De stroomsterkte groeide daarop van 0 tot een zeker maximum aan, waarboven zij niet klom, ook al liet men den stroom onafgebroken doorgaan. Dat was dus de stroomsterkte van den onveranderlijken toestand. In het batterij-uiteinde des draads wees de galvanometer in het eerste oogenblik eene buitengewoon groote stroomsterkte aan, die, eerst zeer snel en daarna langzamer afnemende, steeds naderde tot die, welke door den geheelen draad in den blijvenden toestand heerschte. In plaats van deze reeksen deelen wij op de plaat hare grafische voorstellingen mede. Het zijn de flauwer geteekende lijnen, welke aldaar voorkomen. De lijnen in de onderste afdeeling hebben op het aarduiteinde, die in de bovenste op het batterij-uiteinde betrekking. GUILLEMIN geeft meerdere reeksen; wij kozen de beste uit 1). De overeenkomst dezer lijnen met de beide krommen, uit de formules voor dezelfde punten afgeleid, is weder een bewijs voor de dougdzaamheid der theorie. De teekening is met eene zekere willekeurigheid geteekend. De duur van den veranderlijken toestand was door omstandigheden bij de

1) Het nummer bij elke lijn is ook dat van de door GUILLEMIN medegedeelde reeks, waaruit zij is afgeleid.

meeste proefnemingen verschillend. De abscissen zijn alle gereduceerd voor een gelijken duur van dien toestand; zoo zijn ook de eindstroomsterkten alle gelijk genomen, en de overige stroomsterkten daarvoor herleid. Op de teekening werd die eindstroomsterkte gelijk genomen aan die voor de beide theoretische kromme lijnen, en voorts, als zoekende, de duur van den veranderlijken toestand zóó genomen, dat men de beste overeenkomst tusschen de door theorie en door proefneming verkregen lijnen had. De reeksen, die GUILLEMIN opgeeft, laten geene naauwkeurige bepaling toe van de ligging van het buigpunt; anders zoude hieruit misschien eene juistere maat voor den duur des veranderlijken toestands gevonden zijn. De kromme lijn n^o. 3 schijnt in het begin zeer onregelmatig. Welligt is bij deze proefneming de stroom, door toevallige invloeden, in het begin versterkt geworden.

II.

LADINGSVERSCHIJNSELEN; VOORNAMELIJK DIE, WELKE IN
ONDERZEESCHE OF ONDERAARDSCHIE TELEGRAAFLEIDIN-
GEN WORDEN WAARGENOMEN. HUNNE THEORIE
DOOR PROEVEN BEVESTIGD.

Tot nog toe hebben wij niet over den invloed gesproken, dien elektrische lichamen, in de nabijheid van een galvanischen stroom geplaatst, op dien stroom uitoefenen. Op bladz. 12 is gezegd, dat de coëfficiënt γ zeer verschillende waarden kan hebben. Deze waarden hangen o. a. af van zulke, in de nabijheid van den stroom geplaatste geleiders, die door influentie elektrisch worden. Op dezelfde plaats werden de onderzeesche kabels als voorbeeld van stroom-geleiders genoemd, die andere geleiders in hunne nabijheid hebben. Wij zullen thans de verschillende elektrische werkingen nagaan, die hun ontstaan aan zulk eene combinatie te danken hebben. Daar zij van storenden invloed zijn op de goede werking der telegrafen, is het ook van praktisch belang, hare wetten te kennen. Voor wij tot hare uitzetting overgaan, willen wij eenige geschiedkun-

dige bijzonderheden over de telegraafkabels en de daarin plaatsgrijpende *ladingsverschijnselen* mededeelen.

Bij de uitbreiding van het telegrafien-net over Europa bleef het langen tijd tot de vrome wenschen behooren, de wereldsteden Londen en Parijs telegrafisch te verbinden. De kunst om den galvanischen stroom een geïsoleerden weg te banen, dwars door breede wateren en zeeën, was nog niet gevonden. De eer van dit te hebben gedaan komt aan WHEATSTONE toe. In 1840 legde hij de verklaring af, dat hij de mogelijkheid inzag, om b. v. door het kanaal heen, van Dover naar Calais, een telegram te zenden.

Ter uitvoering van dit plan waren alle middelen reeds beraamd, toen COOKE, met wien hij zich tot de exploitatie had verbonden, hem in den steek liet. Zoodoende werd eerst eenige jaren later, en wel in 1850, tusschen Dover en kaap Grinez een telegraafkabel gelegd, die weldra door zijne goede diensten bewees, dat WHEATSTONE's denkbeelden gegrond waren. Sedert heeft men hetzelfde herhaaldelijk, en over veel grootere afstanden gedaan ¹⁾; dikwijls met, maar zeer dikwijls ook zonder goed gevolg. Men is echter door al de bezwaren, bij het vervaardigen, leggen en gebruiken van deze werktuigen, op de gebreken, die daarin waren, opmerkzaam gemaakt. Telkens werden verbeteringen aangebragt in de vormen, afmetingen en vervaardiging der kabels, in de wijze om hen op den bodem der zee neêr te laten en hen aldaar tegen invloeden van buiten te beschermen. Deskundigen zijn het er over eens, dat, zoo men alle voorzorgen, die thans voor de vervaardiging, het nederlaten en de instandhouding der kabels worden voorgeschre-

1) Tegenwoordig zijn er 15176,5 Eng. mijlen onderzecsche kabel. (III. London News, Febr. 1868, pag. 206).

ven, in acht neemt, deze ondernemingen even gelukkig zullen slagen, als zij tot heden ongelukkig waren 1).

Een onderzeesche telegraafkabel, en in het algemeen elke geleider door water of onder den grond, bestaat uit drie deelen, die elkaar omgeven. Het binnenste deel strekt tot eigenlijken geleider. Het bestaat uit één of meer koperdraden, wier afmetingen en aantal naar omstandigheden verschillen. Deze draden zijn omgeven door een niet geleidende stof, het tweede hoofddeel, den niet-geleider. Hiertoe wordt meestal gutta percha of caoutchouc gebruikt; ook mengsels van deze stoffen met andere, van welke mengsels die van WRAY en van CHATTERTON het meest worden aangewend. De derde laag is die, welke dient om den kabel de noodige sterkte te geven bij het zinken in zee, en om hem tegen den invloed van stroomingen en het schuren tegen rotsen en klippen bestand te doen zijn. Zij bestaat meestal uit eene bekleeding met vlechtwerk van hennep, of uit ijzerdraden, spiraalsgewijze om den kabel heen gewonden.

Bij het gebruiken der telegraafkabels ondervond men reeds spoedig moeilijkheden in het telegraferen, waarvan men de reden niet terstond konde aangeven, en waarop men ook reeds in het telegraferen door onderaardsche draden was gestuit. In 1850 ontdekte W. SIEMENS (in onderaardsche telegraafdraden in Pruissen), dat het influentie-verschijnselen waren. Hij nam waar, dat er electriciteit in den draad achterbleef, nadat de verbinding met de batterij was verbroken. In 1852 ontdekte LATIMER CLARK, telegrafien-ingenieur in Engeland, de vertraging of verlenging in duur van den stroom, als gevolg van het vorige verschijnsel. Hij deed

1) Report of the joint committee, appointed to inquire into the construction of submarine telegraph cables. London 1861, pag. XXXVI.

zijne proeven in de werkplaatsen der Gutta-Percha-Company, en zij werden bijgewoond en herhaald door AIRY en FARADAY. De laatste hield er eene verhandeling over in eene bijeenkomst der Royal Institution. Daarom worden, in leerboeken der elektriciteit, de proeven van CLARK dikwijls op naam van FARADAY gesteld ¹⁾.

Gaan wij thans tot eene juistere uiteenzetting der elektrische *neven-verschijnselen*, als wij ze zoo noemen mogen, over.

Er zijn twee hoofdredeenen waardoor zij ontstaan. De eerste is, dat de gutta percha, of welke andere stof deze vangt, altijd eenige elektriciteit opneemt, en niet terstond weder afgeeft. Deze elektriciteit wordt onttrokken aan den stroom. Het is eene werking, overeenkomende met de dispersie van elektriciteit in de lucht, welke wij in deze verhandeling niet in rekening gebragt hebben, waarom wij er ook niet veel meer van spreken zullen. Daar men in het bezit is van vrij goede isolatoren, en de stroomen, die bij het seinen worden gebruikt, altijd kort duren, zoo kan de invloed van de geleiding der gutta percha in de praktijk meestal worden verwaarloosd.

Het tweede verschijnsel zal ons langer bezig houden. Geleijk uit de beschrijving der onderzeesche kabels blijkt, is er veel overeenkomst tusschen hunne inrigting en die eens condensators. Beide bestaan toch uit drie deelen: twee geleiders, gescheiden door een niet-geleidende tusschenlaag. Bij de kabels is de geleiddraad de eene, het water of de vochtige aarde de andere geleider, van elkander gescheiden door den isolator. Wat is het gevolg van deze inrigting?

1) Zie Report. enz. pag. 305, § 67 en FARADAY's Verhandeling, Phil. Mag. (4) 7.197.

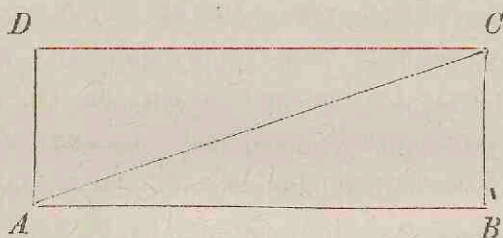
Zoodra een elektrische stroom in den kabel wordt opgewekt, moet de elektriciteit daarvan eene gelijke hoeveelheid, van tegengesteld teeken, op de buiten-oppervlakte der gutta pereha verdigten. De hoeveelheid der op die wijze verdigte elektriciteit neemt toe tot de grenswaarde, die zij naar omstandigheden kan bereiken. Het is duidelijk, dat hierdoor de stroom aanmerkelijk wordt verzwakt en de duur van den veranderlijken toestand wordt verlengd. Maar dit niet alleen. Zoodra de verbinding met de batterij wordt verbroken, zal de geheele draad, door den telegraafstoestel heen, ontladen worden, zoodat deze hierdoor seinen geeft, die volstrekt niet bedoeld zijn. Zoo zal hij b. v. een lange streep geven, wanneer eene reeks van korte streepen is geëind geworden. De omstandigheden, die dit verschijnsel begunstigen, zijn: groote weerstand van den geleider, geringe dikte van den isolator, en een groot influencerend vermogen.

Wanneer een geleider doorstroomd wordt, bevat hij elektriciteit. De geheele hoeveelheid, die een geleider op die wijze bevat, noemt men zijne *lading*. Ook wanneer de geleider met eene pool eener batterij wordt verbonden, maar overigens geheel is geïsoleerd, zal hij eene lading ontvangen.

Bij elken geleider, die in een der beide gevallen verkeert, ontstaat dus eene lading. Is de geleider een onderzeesche telegraafkabel, dan wordt die lading veel sterker, door de influentie die daarin plaats grijpt. Met GAUGAIN zullen wij de lading, die in het eerste geval plaats grijpt, de *dynamische*, en die in het tweede geval de *statische* noemen. Het komt er op aan, de grootte dezer lading te kennen, in functie van de elektromotorische kracht der batterij, de dikten

des geleiddraads en der isolerende laag, het specifiek influenserend vermogen en de lengte des geleiders. Wij zullen hierover eerst eenige even naauwkeurige als belangrijke onderzoekingen volgen van GAUGAIN. In zijne reeds meermalen vermelde verhandelingen vinden wij proeven, die op de lading van een geleider betrekking hebben, die in de lucht is geplaatst, in welken toestand de lading steeds zeer gering blijft.

Bij deze geleiders is het duidelijk, dat de *dynamische* lading de helft moet zijn van de *statische*. Zij in de onderstaande figuur AB de draad en laat BC de spanning van de bat-



terij voorstellen. Wanneer het uiteinde A geïsoleerd is, stelt rechthoek BD de *statische* lading des draads voor. Is A met de aarde verbonden, dan nemen de spanningen volgens de lijn CA af, en stelt driehoek ABC de *dynamische* lading voor ¹⁾. Bij het meten dezer ladingen van een $2^m,34$ langen katoendraad door zijne vroeger vermelde „*méthode à décharges*”, vond GAUGAIN ²⁾ 11 ontladingen voor

1) In den statischen toestand zal de spanningsverdeeling wel niet zóó zijn als door rechthoek BD wordt aangewezen; evenmin duidt driehoek ABC die in den dynamischen toestand aan. Men kan de verdeeling in geen der gevallen juist bepalen; maar zij zal in het eerste geval naar evenredigheid evenveel van rechthoek BD als in het tweede van driehoek ABC verschillen.

2) Zie zijne verhandeling, Ann. de Chim. et de Phys., 3^e Série, tome 59, pag. 26. § 23.

de statische en 5,4 ontladingen voor de dynamische lading des draads.

De sterkte dezer ladingen hangt alleen in zooverre af van de grootte der doorsnede, loodrecht op de lengte-as, als daarmede tevens de omtrek van grootte of gedaante verandert.

Zoo gaven b. v. 1) 12 draden, alle op eenigen afstand evenwijdig aan elkaar geplaatst, eene dynamische lading van 12 ontladingen. Vereenigde men ze tot een bundel, waarbij de doorsnede niet, maar de oppervlakte wel in grootte veranderde, dan was die lading slechts 6 ontladingen groot. Waarom dit zoo is, volgt duidelijk uit hetgeen in het begin dezer verhandeling (pag 7) is aangetoond, namelijk, dat in den onveranderlijken toestand des strooms alle vrije elektriciteit (die te zamen genomen de dynamische lading uitmaakt) zich op de oppervlakte bevindt. De hoeveelheid vrije elektriciteit, die deze kan bevatten, hangt van den vorm en de grootte van de oppervlakte af. Een tweede proef 2) toont hetzelfde nog duidelijker aan. Een zijden lint werd in de lengte opgerold en zodoende tot een langwerpigen zak of buis gemaakt. Hiervan werd de *dynamische* lading gemeten op 7,14 ontladingen. Daarop werden er twee dergelijke linten ingestoken, waardoor de uitwendige vorm en de omtrek der oppervlakte niet veranderden, maar wel de grootte van de doorsnede. Thans werd weder de dynamische lading gemeten, en gelijk 7,40 ontladingen gevonden.

Deze waarneming bevestigt dus de zienswijze, waarvan wij, met inachtneming der wetten van de statische elektriciteit, uitgingen, om tot de formule van ONM te geraken, terwijl

1) Zie aangeh. verh. § 52.

2) Zie aangeh. verh. § 55.

zij tegen de stelling van OHM strijdt, dat in den blijvenden toestand des strooms de digtheid der elektriciteit in alle punten van dezelfde doorsnede even groot zoude zijn. In dat geval toch moest de dynamische lading aan de doorsnede evenredig en onafhankelijk van haren vorm zijn. Het tegengestelde is waar, en zeer verklaarbaar wordt dit door de aanname, dat in den blijvenden toestand alle vrije elektriciteit zich aan de oppervlakte bevindt.

Ladingscoëfficiënt noemt GAUGAIN het getal, dat de lading aangeeft eens geleiders van de lengte 1, die met een elektriciteitsbron van de spanning 1 verbonden en overigens geïsoleerd is. Hij hangt van vormen grootte van de oppervlakte af. OHM kende hem volstrekt niet, maar de coëfficiënt γ kan gehouden worden hem te bevatten. Indien men γ in dezen zin wijzigt, kan men uit de formules, vroeger voor de betrekkelijke stroomsterkten en de betrekkelijke spanningen gevonden, de wetten opsporen, volgens welke deze grootheden van den ladingscoëfficiënt afhangen. Wij stellen dan in de eerste formule van bladz. 12:

$$\frac{de}{dt} = c\gamma \frac{du}{dt},$$

waarin c den ladingscoëfficiënt beduidt, en komen dan tot de vergelijking:

$$\gamma \frac{du}{dt} = \frac{k}{c} \frac{d^2u}{dx^2}.$$

De vergelijking van bladz. 18 wordt dan:

$$u = \frac{ax}{l} + 2a \Sigma \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi(x+l)}{l} e^{-\frac{k i^2 \pi^2 t}{c l^2}} \right),$$

waaruit volgt 1), dat de betrekkelijke duur van voortplanting

1) Over de wijze hoe dit er uit volgt, zie bladz. 39.

evenredig is aan den ladingscoëfficiënt. GAUGAIN heeft deze wet bewezen in de volgende proef 1).

Hij nam 4 katoendraden van 1,06 meters lengte, en bepaalde hun ladingscoëfficiënt in het geval, dat zij op gelijke afstanden tusschen twee metalen stangetjes waren gespannen, zoodat de stroom hen allen in de lengte doorliep; en in het geval dat zij, aan dezelfde stangetjes bevestigd, tot een bundel bij elkaar gevoegd waren. Door het bepalen der dynamische ladingen vond GAUGAIN, dat de ladingscoëfficiënten tot elkaar stonden als 2 tot 1.

Voor het geval dat de draden evenwijdig op een afstand van 0,06 meters waren geplaatst, werd de betrekkelijke duur van voortplanting gemeten op 21,8 seconden; en, als de draden tot een bundel vereenigd waren, werd hij bevonden 11 seconden. Deze getallen zijn gemiddeld uit 3 waarnemingen. Men ziet, dat de getallen 21,8 en 11 nagenoeg tot elkaar staan als 2 tot 1, en mag derhalve de wet voor bewezen houden.

Door de influentie ook in den coëfficiënt γ op te nemen, verkrijgt hij eene nog uitgebreider beteekenis. In het geval der onderzeesche kabels wordt de lading door influentie veel sterker. De proeven die met, of voor de telegrafie, of voor de wetenschap, belangrijke doeleinden genomen zijn, en die betrekking hebben op de lading van geleiders onder water of onder de aarde en op zaken, die daarmee in verband staan, zijn zeer talrijk. Die, welke hier behandeld zullen worden, kunnen in drie afdeelingen verdeeld worden.

De eerste afdeeling vormen de proeven, die genomen zijn om de *snelheid* der electriciteit te meten; de tweede groep heeft de *vertraging* 2) des strooms in lange geleiders en in

1) Ann. de Chim. et de Phys., 3^e Serie, tome 60. pag. 350, § 93.

2) Ik gebruik dit woord in navolging van het in Engeland geijkte *retardation*.

onderzeesche kabels tot onderwerp. De laatste afdeling bestaat uit de onderzoekingen en metingen van de ladingen van onderzeesche of onderaardsche geleiders.

Uit de wijze, waarop de elektrische werking in een geleider wordt voortgeplant, blijkt, dat men bij elektriciteit evenmin als bij warmte van *snelheid* kan spreken, in den zin, waarin men bij geluid en licht daarvan spreekt. De golven, door geluid en licht, in de middenstoffen die hen voortplanten verwoekt, bewegen zich werkelijk voort, met eene snelheid, afhankelijk van den aard der middenstof; en een geluid of een licht wordt op een verwijderd punt eerst eenigen tijd *na* zijn ontstaan waargenomen, maar *terstond* met die sterkte, waarmede het daar onveranderlijk wordt gehoord of gezien. Anders is het bij de geleiding van warmte en elektriciteit. Wanneer het eene einde eens geleiders tot eene zekere temperatuur wordt verheven, plant zich de warmte in den geleider langzaam voort, waarbij de temperatuur in elk punt eerst een tijd lang toenemende is, alvorens zij standvastig wordt. Eveneens gaat het met de spanning der elektriciteit, die in een geleider wordt voortgeplant. De formules voor beide gevallen leeren, dat zich reeds terstond aan het einde des geleiders warmte of elektriciteit moet bevinden. Door de begrensde gevoeligheid onzer thermo- en elektrometers, kunnen wij die echter niet terstond waarnemen. Eerst wanneer de werking in dat uiteinde krachtig genoeg is, om op de meet-instrumenten zichtbaar te werken, wordt zij door ons waargenomen. Het is dus gemakkelijk in te zien, dat de tijd, die er tusschen het sluiten van den stroom en het waarnemen van elektriciteit aan het andere uiteinde van de keten verloopt, o. a. afhangt van de gevoeligheid des elektrometers en van de spanning des elektrometers. Van daar, dat elke nieuwe poging om de *snelheid*

der elektriciteit in verschillende geleiders te meten, weder andere uitkomsten gaf; uitkomsten, zoozeer van elkander verschillend ¹⁾, dat men reeds daardoor op de vraag moest komen, of de omstandigheden, die op de voortplanting invloed uitoefenen, wel alle in aanmerking waren genomen?

WHEATSTONE's proef bestond in het ontladen van een Leidsche flesch, door middel van een 800 el langen draad, welke aan de uiteinden en in het midden zóó was afgebroken, dat aldaar bij de ontlading vonken oversprongen. Door middel van zijn bekend draaijend spiegeltje nam hij waar, dat de middelste vonk $\frac{1}{1152000}$ seconde later kwam dan de beide uiterste. Hij besloot hieruit, dat de snelheid der elektriciteit in koperdraad ongeveer 460,000 Ned. mijlen in de seconde was. De gevonden duur van $\frac{1}{1152000}$ seconde was de tijd, dien de spanningen bij de middelste interruptie van den draad noodig hadden, om zoo hoog te klimmen, dat aldaar een vonk kon overspringen. Ware de wijfde, waarover de vonk heen moest springen, grooter geweest, dan zoude WHEATSTONE ook een grooter getal dan $\frac{1}{1152000}$ hebben gevonden. AIRY en QUETELET vonden tusschen Greenwich en Brussel eene snelheid van 4300 Ned. mijlen, dus veel minder dan WHEATSTONE; maar in deze keten was de kabel opgenomen, die door de zee tusschen België en Engeland liep, en aan welks invloed de geringe snelheid, die zij vonden, wel zal te wijten zijn. FIZEAU paste met COUNELLE zijne methode, om de lichtsnelheid te meten, op de elektriciteit toe. Een geleiddraad verbond de positieve pool eener batterij met de aarde; de negatieve pool stond ook daarmede

1) Zie hierover „Die Anwendung des Elektromagnetismus“ von Dr. JULIUS DUB, pag. 234. De door verschillende natuurkundigen gevonden getallen loopen zoover uiteen, dat zij tusschen de grenzen 1 en 107 begrepen zijn.

in verbinding. De geleidraad was op twee plaatsen, aan het begin en aan het einde, afgebroken. Door middel van een ronddraaijende schijf, wier rand afwisselend met hout en platina was ingelegd, werd gelijktijdig in die beide punten de keten beurtelings geopend en gesloten. Men verwachtte, dat men, door genoegzame snelheid aan dien om-draaijenden stroomverbreker te geven, het zoover kon brengen, dat elke stroom, die bij het sluiten aan het batterij-uiteinde in den draad vloeyde, aan het andere uiteinde door een houten afdeeling werd opgevangen, zoodat op den galvanometer, daar achter geplaatst, geene werking werd bespeurd. Intusschen bleek uit de proef, dat geene snelheid hoegenaamd deze uitkomst gaf. Altijd wees de galvanometer een stroom aan, welke, zoo als duidelijk is, ontstaat uit de lading des draads. Op deze wijze is het dus onmogelijk om iets te verkrijgen, dat op snelheid gelijk.

Vele proeven van LATIMER CLARK, FARADAY en anderen komen in zeker opzicht met de vorige overeen. Zij zijn echter met meerdere kennis der omstandigheden genomen, en hadden niet meer ten doel de *snelheid* der elektriciteit te meten, maar de *vertraging*, welke de stroom ondergaat, wanneer in de telegraaflijn een onderzeesche kabel is opgenomen. LATIMER CLARK nam zijne proeven in 1853 1). 100 Engelsche mijlen van een telegraafkabel werden op eene drooge plaats in groote rollen nedergelegd en een uiteinde geïsoleerd. Daarop werd het andere uiteinde met de eene pool van een batterij verbonden, wier andere pool naar de aarde was afgeleid. Een bij de batterij aan den kabel ver-

1) Zie Report enz. Appendix, n^o. 2, § 66 en vv. Vele dezer proeven zijn beschreven door FARADAY, (Phil. Mag. (4) 7.197 en 396). (Zie ook POGG. Ann. 92, 152).

bonden galvanometer week niet merkbaar af, wanneer de verbinding met de batterij tot stand kwam, en evenmin, wanneer de geladen kabel met de aarde verbonden werd; dit bewijst dat die lading zeer gering was. Toen men den kabel door een anderen, van gelijke afmetingen en aard, maar onder water gedompeld, verving, week de galvanometerdraad èn bij de sluiting èn bij de opening van de keten zeer sterk af, en gaf in het eerste geval een stroom aan, die in den kabel vloeyde, in het tweede een even sterken stroom, die uit den kabel in de aarde overging. De onder water gedompelde kabel nam dus eene grootere en zeer merkbare hoeveelheid elektriciteit in zich op.

De onderaardsche telegraafdraden tusschen Londen en Manchester werden bij andere proeven door CLARK gebezigd. Er liepen 8 draden tusschen genoemde steden, wier uiteinden naar willekeur konden verbonden worden. Bij onderstaande proef ¹⁾ geschiedde dit als volgt. De zinkpool eener batterij werd met de aarde, de koperpool, met tusschenvoeging van een galvanometer, met het begin van een der draden verbonden. De keten liep nu onder den grond door naar Manchester en terug, dan nog weer naar Manchester en terug en kwam dan in de werkplaats uit. Hier was weder een galvanometer ingevoegd, waarna de keten door de 4 overige draden tweemaal naar Manchester liep en terugkwam. Het einde van den achtsten draad werd aan een derden galvanometer verbonden en deze met de aarde. De stroom doorliep op deze wijze eene lengte van 1490 Engelsche mijlen.

Wanneer nu de eerste draad met de koperpool der batterij werd verbonden, wees de aldaar geplaatste galvanometer met

1) Report, App. n^o. 2, § 72 en volgg.

een plotselinge afwijking van bijna 90° een sterken stroom aan, die in den kabel vloeide. Na verloop van meer dan een geheele seconde week de naald van den tweeden galvanometer, doch zonder aanmerkelijke snelheid, af, en bleef eindelijk staan op 40 à 50 graden. Na weder eenig tijdsverloop week de derde galvanometernaald af, doch hoogstens tot 15 à 20° . Wanneer de verbinding met de batterij werd verbroken, keerde de eerste galvanometer het eerst tot 0° terug; dan de tweede, en eindelijk de derde.

Uit deze proef blijkt, dat de elektriciteit, die den kabel binnentreedt, terstond gebonden wordt en dat dus de stroom voortgaat, naarmate de lading van den kabel hare volle grootte heeft bereikt.

Wanneer de beide uiteinden van den 1490 mijlen langen geleidraad op hetzelfde oogenblik met de beide polen der batterij werden verbonden, wezen de twee aldaar geplaatste galvanometers twee stroomen aan, een negatieven en een positieven, die beide in den draad vloeiden. De middelste galvanometer bleef eerst rustig, maar na eenigen tijd wezen alle drie een stroom aan en weken alle drie evenveel af.

De draden konden de elektriciteit die zij opnamen, eenigen tijd bewaren. Was namelijk een uiteinde geïsoleerd, en het andere òf met de aarde òf met de batterij verbonden, altijd met tusschenvoeging van een galvanometer, dan vloeide er, zoo de laatste verbinding tot stand kwam, elektriciteit in. Men verbrak, als de stroom ophield, deze verbinding en hield het uiteinde des draads geïsoleerd gedurende korteren of langeren tijd, b. v. eenige seconden (bij proeven met een draad van 100 mijlen lengte wel 5 minuten; bij andere gelegenheden langer); wanneer men dat einde nu met de aarde verbond, vloeide de in den draad opgenomen elektriciteit daarin weg, hetgeen door eene plotselinge af-

wijking des galvanometers werd kenbaar gemaakt. Later, als over het meten van de lading eens kabels gesproken wordt, zal deze proef worden aangehaald.

CLARK gebruikte nog eene andere wijze van waarnemen, die nog meer licht verspreidt over het toe- en afnemen der stroomsterkte, dat in bovenstaande proeven door de galvanometers slechts niet naauwkeurig werd aangetoond.

Om een door middel van een uurwerk gelijkmatig ronddraaijende rol was een papier vastgemaakt, bevochtigd met eene oplossing van ferrocyankalium. Op dit papier drukten drie ijzeren stiften. Zoodra er een stroom van een stift door het papier in de rol overging, ontstond er een streep van Berlijnsch blaauw. Naarmate de stroom sterker was, werd de streep breder, terwijl de plaats, waar een streep begon of eindigde, den tijd deed kennen, waarop de stroom aanving of ophield. De eerste stift was verbonden met een lokaal-batterij, wier stroom door een doelmatig ingerigten sleutel op hetzelfde oogenblik als de stroom, die den onderaardschen draad laden moest, gesloten werd. De eerste stift teekende dus een streep, zoolang de stroom uit de hoofd-batterij in en door den draad vloeide. Werd de sleutel weder anders gesteld, dan hield deze stroom, en die van de lokaal-batterij, op, terwijl dit uiteinde van den draad verbonden werd met de aarde, door middel van de tweede stift. Het andere uiteinde des draads was door de derde stift in voortdurende verbinding met de aarde.

Bij ééne proef was de uitkomst als volgt:

De batterij werd met den draad verbonden, hetgeen terstond door het aanvangen van eene overal even breede streep der eerste stift werd aangeduid. Na ongeveer $1\frac{1}{2}$ seconde begon de derde stift een flauwe streep te teekenen, die gedurende 2 à 3 seconden in dikte aangroeide en dan gelijk-

matig bleef. Op de tiende seconde werd de verbinding met de batterij verbroken en hield dus de eerste stift op met het teekenen van een streep; maar terstond werd dit uiteinde van den draad met de aarde verbonden door de tweede stift. Deze begon op hetzelfde oogenblik een krachtige streep te teekenen, die, eerst afnemende, na ongeveer $\frac{4}{5}$ seconde plotseling toenam in breedte, maar daarna allengs weder afnam; acht seconden na de verbinding met de aarde hield deze stift op een streep te teekenen, hetgeen de derde stift reeds 2 seconden eerder had gedaan.

Hieruit blijkt, dat eerst in $1\frac{1}{2}$ seconde de geheele draad geladen is, omdat eerst dan een stroom uit het aarduiteinde in de aarde overgaat. Hebben lading en stroom hun maxima bereikt, dan wordt het batterij-uiteinde met de aarde verbonden. De stroom, die hieruit ontstaat, is terstond zeer sterk, neemt eerst af, wordt dan, als met een ruk, weder veel sterker, en verzwakt daarna allengs, om in 8 seconden geheel op te houden, zooals de stroom door het andere einde reeds 2 seconden vroeger deed.

Wanneer men het batterij-uiteinde, telkens 2 seconden, afwisselend met de batterij en met de aarde verbond, verscheen er aan het aarduiteinde een stroom, die slechts weinig in sterkte toe- en afnam. Maakte men de afwisseling sneller, dan verscheen er geen enkel teeken aan het aarduiteinde 1).

CLARK onderzocht ook, of de vermeerdering van de elektromotorische kracht, die een sterkere lading doet ontstaan, ook verandering gaf in den tijd, waarna men de eerste teekenen van stroom in het aarduiteinde waarnam. Daartoe veranderde hij de sterkte zijner batterij van 16 cellen tot

1) Zie Report, App. n^o. 2, § 82.

31 maal 16 cellen. Hij nam geen verandering in genoemden tijd waar.

Een ander ingenieur, c. v. WALKER, mat dezen tijd bij den 2300 (Eng.) mijlen langen Atlantischen kabel, toen deze, deels op de werf te Keyham, deels aan boord van de „Niagara” en van de „Agamemnon” was. Zijne uitkomsten zijn van gelijken aard als de vorige. Bij het gebruik van 24 cellen was het genoemde tijdsverloop 1,78 seconde. Bij het gebruik van 288 cellen 1,8 seconde ¹⁾.

Er zijn vele middelen beproefd, om dezen tijd te bekorten, aangezien de snelheid, waarmede gescind kan worden, hiervan geheel afhangt. Het vermeerderen der elektromotorische kracht brengt te weeg, dat men spoediger denzelfden telegraafstoel zal doen werken, dan bij het aanwenden van minder cellen, omdat alsdan de tijd, waarna de spanning en de stroomsterkte aan het aard-uiteinde eene bepaalde waarde bereiken, korter is. De maximum-waarde zal echter steeds na denzelfden tijd worden verkregen, onafhankelijk van de batterij-sterkte, omdat die maximum-waarde daaraan zelve evenredig is.

Het aanwenden van inductie-rollen schijnt bevorderlijk te zijn tot dat doel. Zoo verkreeg WALKER ²⁾ met den Atlantischen telegraafkabel, en bij het gebruik van „reversals,” dat terstond zal besproken worden, *zonder* inductie-rollen per minuut 15 afzonderlijke stroomen, *met* inductie-rollen echter veel meer, en wel, bij het aanwenden van 2 cellen voor den inducerenden stroom, 37 stroomen, bij 4 cellen 44, bij 6 cellen 49 en hoogstens 65 stroomen per minuut.

1) Report, Minutes of evidence, pag. 95, questions 2249—2254.

2) Report, t. a. p. quest. 2255.

Het gebruik van inductie-rollen schijnt gevaarlijk voor de kabels te zijn en het spoedig onbruikbaar worden van vele kabels (o. a. den Atlantischen), waarbij zij werden aangewend, wordt er zelfs aan toegeschreven. De stroom, die door den kabel gaat, is die van den geïnduceerden draad.

De bovengenoemde methode der „reversals” bestaat hierin, dat men afwisselend stroomen in de ééne en in de andere rigting gebruikt, of, wat hetzelfde is, afwisselend positieve en negatieve stroomen in dezelfde rigting. Eigenaardig ingerigte sleutels maken dit gemakkelijk. De werking is duidelijk. De elektriciteit van elken stroom neutraliseert die van den voorgaanden. De ladingen worden dus spoediger vernietigd en de stroom vindt dus ook spoediger doorgang. Zooals reeds uit de proef van CLARK (pag. 66) bleek, kan het echter gebeuren, dat bij het gebruik van eene eenigzins groote snelheid in deze korte stroomen, aan het aarduiteinde volstrekt geen stroom wordt bemerkt, welke zwarigheid door de „reversals” nog eerder optreedt. Dat de „reversals” echter nuttiger zijn, dan het aanwenden van stroomen van hetzelfde teeken, afgewisseld door ontladingen des kabels in de aarde, toont o. a. de volgende proef van WHITEHOUSE aan 1).

De 6 koperdraden van een 166 Eng. mijlen langen kabel werden met hunne uiteinden verbonden tot één doorlopende keten, van nagenoeg 1000 mijlen lengte. Deze ontving door middel van een secondeslinger elke seconde een positieven stroom. Aan het andere uiteinde wees de galvanometer een gelijkmatigen stroom aan. Nu werden „reversals” aangewend, zoodat de stroomen, om den anderen, positief en negatief waren. Een groot deel van elken stroom ging nu door het neutraliseren van den voorgaanden verloren; de

1) Report, Minutes of evidence. Whitehouse. Quest. 1726.

rest werd als een signaal merkbaar en kon dus daarvoor gebruikt worden.

Hoe de genoemde tijd, tusschen het sluiten des strooms, en het waarnemen van het sein, afhangt van de afmetingen van den kabel, kan eerst bij het behandelen der lading ter sprake komen.

Wij zijn nu genaderd tot het onderzoek hoe de lading eens kabels afhangt van de radii van den geleiddraad en de isolerende omgeving, van het specifiek influencerend vermogen, de elektromotorische kracht der batterij en de lengte des geleiddraads. Door theoretische beschouwingen zal weder eene formule worden gevonden, die wij aan THOMSON verschuldigd zijn; hare uitspraken zullen door proeven van prof. WHEATSTONE en anderen gestaafd worden.

Passen wij de leer der potentialen toe op een geleiddraad, uit een cylindrischen koperdraad bestaande, omgeven met een, overal even dikke laag van gutta percha of een anderen niet-geleider. Laat deze onder water gedompeld zijn, zóó, dat de toestel als een Leidsche flesch kan werken. Zij de draad zeer lang, een uiteinde geïsoleerd, en het andere met een bron van constante potentiaal $1) u$ verbonden. Alsdan zal over de geheele lengte des draads, de potentiaal op zijn oppervlak ook u zijn, en op de buitenbekleeding $= 0$.

Noemen wij v de potentiaal in eenig punt des niet-geleiders, R en R' de radii van den draad en de buitenoppervlakte der gutta percha; dan moet v aan drie voorwaarden voldoen.

1^{ste}. Voor een afstand van de as des draads $= R$, moet $v = u$ zijn.

2^{de}. Voor dien afstand $= R'$, moet $v = 0$ zijn.

1) *Potentiaal* en *spanning* kunnen hier voor synoniem gehouden worden.

3^{de}. Volgens een bekende eigenschap der potentialen is, in den toestand van evenwigt, in het punt (x, y, z) ,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

In het door ons beschouwde geval is v blijkbaar alleen afhankelijk van den afstand van het punt (x, y, z) tot de as des draads. Daaruit volgt terstond:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0,$$

als de as der x met de genoemde as zamenvalt.

Stellen wij den pas genoemden afstand door r voor, dan is

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

en

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}.$$

Wij hebben nu $v = f(r)$, waaruit volgt:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} \frac{dv}{dr};$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dy^2} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{y}{r^2} \frac{dr}{dy} \right) \frac{dv}{dr} + \frac{y}{r} \frac{d}{dr} \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dy}, \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \frac{dv}{dr} + \frac{y^2}{r^2} \frac{d^2v}{dr^2}. \end{aligned}$$

Evenzoo:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \frac{dv}{dr} + \frac{z^2}{r^2} \frac{d^2v}{dr^2}.$$

Telt men dit 2^{de} diff.-quotient bij het vorige op, dan verkrijgt men, met toepassing van de derde voorwaarde:

$$\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} = 0.$$

Door integratie komt er:

$$v = C \log r + C'.$$

De constanten C en C' worden uit de twee eerste voorwaarden bepaald:

$$u = C \log R + C', \quad 0 = C \log R' + C'.$$

Men vindt:

$$v = \frac{\log \frac{R'}{r}}{\log \frac{R'}{R}} u \dots \dots \dots a).$$

Uit deze vergelijking wordt die voor de lading des draads afgeleid. Zij daartoe ρ de digtheid der electriciteit voor $r = R$. Dan heeft men, volgens eene bekende stelling der potentialen,

$$4\pi\rho = -\frac{dv}{dr},$$

voor $r = R$. Nemen wij $\frac{dv}{dr}$ uit de vergelijking $a)$, dan vinden wij:

$$4\pi\rho = \frac{u}{R \log \frac{R'}{R}},$$

waaruit volgt:

$$\rho = \frac{u}{4\pi R \log \frac{R'}{R}}.$$

Om de lading te verkrijgen moeten wij ρ met de oppervlakte vermenigvuldigen. Die oppervlakte is $= 2\pi Rl$. Zij nog het specifiek influencerend vermogen der gutta percha I, dan is de lading

$$L = \frac{I \cdot l \cdot u}{2 \log \frac{R'}{R}}.$$

Uit de formule blijkt terstond hoe de lading van de verschillende groottheden afhangt, die er invloed op hebben.

Een paar proeven van CLARK, WHEATSTONE en anderen zullen hare waarheid aantonen.

De lading wordt gemeten door eene inrigting als bij de tweede proef op bladzijde 64. Er worden meestal korte kabels gebruikt om de zoogenoemde vertraging, d. i. den duur van den veranderlijken toestand, zoo kort mogelijk te maken. Hierdoor schiet de elektriciteit bijna plotseling den kabel binnen of verlaat dien weêr terstond, zoo de verbinding met de batterij verbroken wordt, en die met de aarde tot stand komt. De stroomsterkte wordt alsdan gemeten door den sinus van den halven hoek van uitslag, of de koorde van den geheelen hoek, omdat de tijd, gedurende welken de stroom aanhoudt, zeer kort is ten opzichte van den slingertijd der galvanometernaald. Soms kan men met genoegzame naauwkeurigheid in plaats van de koorde den boog stellen, zooals door CLARK werd gedaan in zijne proeven.

De invloed der elektromotorische kracht werd bij eenige kabels van verschillende lengten bepaald. Hij kan uit de onderstaande tabel, door CLARK medegedeeld, worden afgeleid, als ook die van de lengte des kabels. Elk getal is het midden uit vijf waargenomen getallen 1).

Aantal Elementen.	Ladingen bij eene lengte van			
	1 mijl.	2 mijlen.	3 mijlen.	4 mijlen.
4	0,96	1,92	3,00	3,92
8	1,96	3,82	5,86	7,78
16	3,92	7,94	11,88	15,66
32	8,10	15,82	28,60	31,22
64	15,54	31,40	47,16	63,36
128	31,00	63,96	100,04	„
256	62,02	„	„	„

1) Zie Report, Append. n^o. 2, § 96.

Ook proeven van WHEATSTONE, in het Report medegedeeld, (App. n^o. 1), bevestigen hetgeen uit deze tabel volgt, namelijk, dat de lading evenredig is aan de elektromotorische kracht, zoowel als aan de lengte des kabels.

Daar de elektromotorische kracht in dit geval gelijk is aan de spanning of de potentiaal in het batterij-uiteinde, verminderd met die in de aarde, en deze laatste gelijk 0 is, zoo is hier de potentiaal evenredig aan de elektromotorische kracht. Eigenlijk nam men bij de proef de *lading* en de *ontlading* waar (charge and discharge), en was de laatste altijd iets zwakker, wegens de elektriciteit die door de slechte isolatie van de gutta percha verloren ging. Wij hebben alleen de grootte der lading aangegeven.

Vergelijkt men deze uitkomst omtrent de elektromotorische kracht, met hetgeen daarover op bladz. 67 is gezegd, dan blijkt er uit, dat er allcen dán eene grootere snelheid wordt verkregen in het overbrengen van een telegrafische sein, wanneer men steeds met hetzelfde relais blijft werken en de batterij sterker maakt. Gebruikte men relais, wier gevoeligheid omgekeerd evenredig was aan de elektromotorische kracht, die den stroom veroorzaakte, dan zoude men geene verandering in genoemden tijd waarnemen.

WHEATSTONE heeft belangrijke proeven genomen, en deelt de uitkomsten daarvan mede in het Report ¹⁾. Zij hadden o. a. betrekking op den noemer, $\log \frac{R'}{R}$ van de formule voor de lading.

WHEATSTONE ontving van de Gutta Percha Company negen telegraaflijnen, uit koperdraad met gutta percha overtrokken bestaande. Zij waren elk één Eng. mijl lang. De dikten

1) Report, Append. n^o. 1, § 8 en vlg.

der koperdraden en der gutta-percha-lagen waren verschillend. Drie koperdraden waren $\frac{2}{32}$ duim in diameter, drie andere $\frac{4}{32}$ en de drie laatste $\frac{6}{32}$ duim. Elk der drie koperdraden van dezelfde dikte was met gutta percha bedekt, tot verschillende dikten. Bij den eersten van elk drietal was die dikte $\frac{6}{32}$, bij den tweeden $\frac{6}{32}$, bij den derden $\frac{1}{32}$ Eng. duim. Bij elken draad was dus de combinatie eene andere. Echter waren de medegedeelde afmetingen niet over de geheele lengte der draden even juist, waardoor dan ook de getallen, in de proefneming verkregen, niet zeer juist met de theorie kunnen overeenstemmen, als men de bovenstaande afmetingen in rekening brengt. De verschillende mededeelingen van WHEATSTONE zijn in onderstaande tabel vereenigd. De daarin opgenomen proeven werden met verschillende galvanometers en op verschillende tijden volbracht. De sterkte der gebruikte batterijen is telkens opgegeven in

Nommer van den draad.	R.	R'.	Nep. log. $\frac{R'}{R}$	Batterijsterkten.					
				512.	512.	128.	128.	64.	512.
1	1	4	1,39	62	97	138	220	113	78
2	1	7	1,95	43	67	97	162	74	52
3	1	13	2,56	32	50	78	121	52	43
4	2	5	0,92	104	156	216	342	190	121
5	2	8	1,39	69	102	139	233	113	78
6	2	14	1,95	43	71	104	169	78	61
7	4	7	0,56	136	207	267	446	258	160
8	4	10	0,92	104	156	216	350	190	126
9	4	16	1,39	69	104	144	233	117	82

het aantal cellen. De zes laatste kolommen bevatten de waargenomen ladingen, uitgedrukt in de koorden van den boog, door de galvanometernaald doorloopen bij den oogblikkelijken stroom, die ontstond, als het eene uiteinde des

draads met de batterij werd verbonden. Het andere uiteinde was geïsoleerd.

Men ziet uit de tabel, dat de ladingen van de kabels 1, 5 en 9, van 2 en 6 en van 4 en 8 in elke kolom vrij wel overeenstemmen. Bij die draden heeft $\log \frac{R'}{R}$ echter dezelfde waarde; dit komt dus met de uitspraak der formule overeen. Overigens kan men gemakkelijk nagaan, dat voor twee draden de ladingen omgekeerd evenredig zijn (ten minste ten naastenbij) met de waarden van $\log \frac{R'}{R}$, voor die draden. De uitkomsten door WILKINSON verkregen, stemmen dus met de theorie overeen.

Ten opzichte van de grootheden I en l is het niet noodig de waarheid der formule voor de ladingscoëfficiënt aan te toonen. Zij zijn daaraan toegevoegd, omdat de ondervinding de noodzakelijkheid daarvan heeft geleerd. Een ander punt, dat verdient door proefnemingen toegelicht te worden, is, of ook bij onderzeesche kabels de dynamische lading de helft is van de statische, en of dus die opmerking van GAUGAIN ook voor hen doorgaat. GUILLEMIN ¹⁾ heeft door zijne waarnemingen deze vraag met ja beantwoord. Hij nam proeven met kabels, bestaande uit een koperdraad van 55 à 56 ellen lengte en 1 mm. diameter, overdekt met een niet-geleidende laag, die aan de buitenzijde met een omhulsel van bladtin was bekleed, dat den buitensten geleider uitmaakte. Ten einde de werking van de, wegens de geringe lengte, niet zeer groote lading op den galvanometer te versterken, maakt GUILLEMIN hierbij gebruik van een toestel, zamengesteld uit vier raderen, op dezelfde as bevestigd, die op hunne om-

1) Comptes rendus de l'Académie. 1860, t. LI, pag. 554.

trekken afwisselende metalen en ivoren gedeelten hadden; wanneer deze raderen werden rondgedraaid, dan werden de polen der batterij afwisselend met de beide bekleedsols van den kabel verbonden, zoodanig, dat deze in ééne seconde honderd tot honderdtwintig malen geladen en ontladen werd.

Even als bij zijne proeven over den veranderlijken toestand, ontvangt de naald een groot aantal gelijke schokken, met gelijke tusschentijden. Door hare traagheid, neemt de naald spoedig een vasten stand aan. Door vooraf gedane onderzoekingen was het GUILLEMIN gebleken, dat zijn nagebootste onderzoesche kabel in dien korten tusschentijd volkomen geladen werd. Zooals ik reeds zeide, vond GUILLEMIN werkelijk, dat de dynamische lading de helft was van de statische.

Komen wij thans terug op de zoogenaamde *seinsnelheid*, dan kunnen wij een vorm vinden, waaraan zij evenredig moet zijn. De spoed, waarmede men een sein kan verkrijgen, is omgekeerd evenredig aan den ladingscoëfficiënt. Maar zij is regtstreeks evenredig aan de doorsnede en het geleidend vermogen des draads. Wij hebben dus voor genoemden vorm

$$kR^2 \log \frac{R'}{R},$$

als k het geleidend vermogen en R' en R de vroegere betekenissen hebben.

Nemen wij nu aan, dat R' gegeven is; dan kan men door differentiatie ten opzichte van R vinden, voor welke waarde van R de gegeven vorm een maximum bereikt. Men vindt alsdan daarvoor:

$$R = \frac{R'}{\sqrt{e}} = \frac{R'}{1,649}.$$

B E S L U I T.

Vatten wij de hoofdzaken, die in dit proefschrift zijn behandeld, in korte bewoordingen te zamen, dan mogen wij het volgende vaststellen.

1^e. Wanneer een galvanische keten gesloten wordt, neemt de spanning in elk punt toe, van 0 (verondersteld zijnde, dat de keten vóór de sluiting ongeladen was) tot eene zekere eindwaarde, die voor elk punt eene andere is, en bepaald wordt door de vergelijking:

$$w' = \frac{ax}{l} \dots \text{(zie bladz. 14).}$$

2^e. De spanning, die in eenig punt heerscht, vóórdat zij hare eindwaarde heeft bereikt, wordt bepaald door de vergelijking:

$$u = \frac{ax}{l} + 2a \sum \left(\frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi (l+x)}{l} e^{-\frac{k' i^2 \pi^2 t}{l^2}} \right) \dots$$

(zie bladz. 18),

waarvan de voorgaande slechts het bijzondere geval is voor

$$t = \infty.$$

3^e. Wanneer de keten gesloten wordt, is de stroomsterkte in

elk punt veranderlijk, totdat zij overal dezelfde waarde heeft bereikt, hetgeen plaats heeft, als de spanning in elk punt niet meer verandert. In dezen toestand wordt de stroomsterkte uitgedrukt door de formule:

$$S = k\omega \frac{a}{l} \dots \text{(zie bladz. 20);}$$

in genen toestand door:

$$S = k\omega \frac{du}{dx} = k\omega \left[\frac{a}{l} + \frac{2a}{l} \sum \left(\cos \frac{i\pi(x+l)}{l} e^{-\frac{k'i^2\pi^2 t}{l^2}} \right) \right] \text{(zie bladz. 20).}$$

4^e. Tot de gevolgen dezer formules behoort o. a.:

De duur van den veranderlijken toestand is oneindig groot. Bij het sluiten van den stroom neemt de stroomsterkte in het aarduiteinde der keten toe, van 0 tot hare eindwaarde S . In het batterij-uiteinde neemt zij af van ∞ tot de eindwaarde S . De eindwaarde wordt in beide gevallen eerst na een oneindigen tijd bereikt. De begrensde gevoeligheid onzer instrumenten doet het voorkomen, dat die tijd eindig en meestal zeer klein is.

5^e. De formules zijn afgeleid uit de differentiaal-vergelijking:

$$r \frac{du}{dt} = k \frac{d^2 u}{dx^2}, \text{ (zie bladz. 12),}$$

het eerst gevonden door OHM. Toen later OHM's grondstellingen verkeerd bleken te zijn, heeft KIRCHHOFF dezelfde vergelijking weergevonden, uitgaande van de wet van COULOMB.

6^e. De betrekkelijke duur van voortplanting (zie bladz. 38) is onafhankelijk van de elektromotorische kracht, omgekeerd evenredig aan het geleidend vermogen en regtstreeks aan

den ladingcoëfficiënt (zie bladz. 58) en (ten minste voor het uiteinde van den geleider) aan het vierkant der lengte.

7°. De statische lading is het dubbel van de dynamische (zie bladz. 57 en 75) bij den zelfden geleider, en onder overigens gelijke omstandigheden.

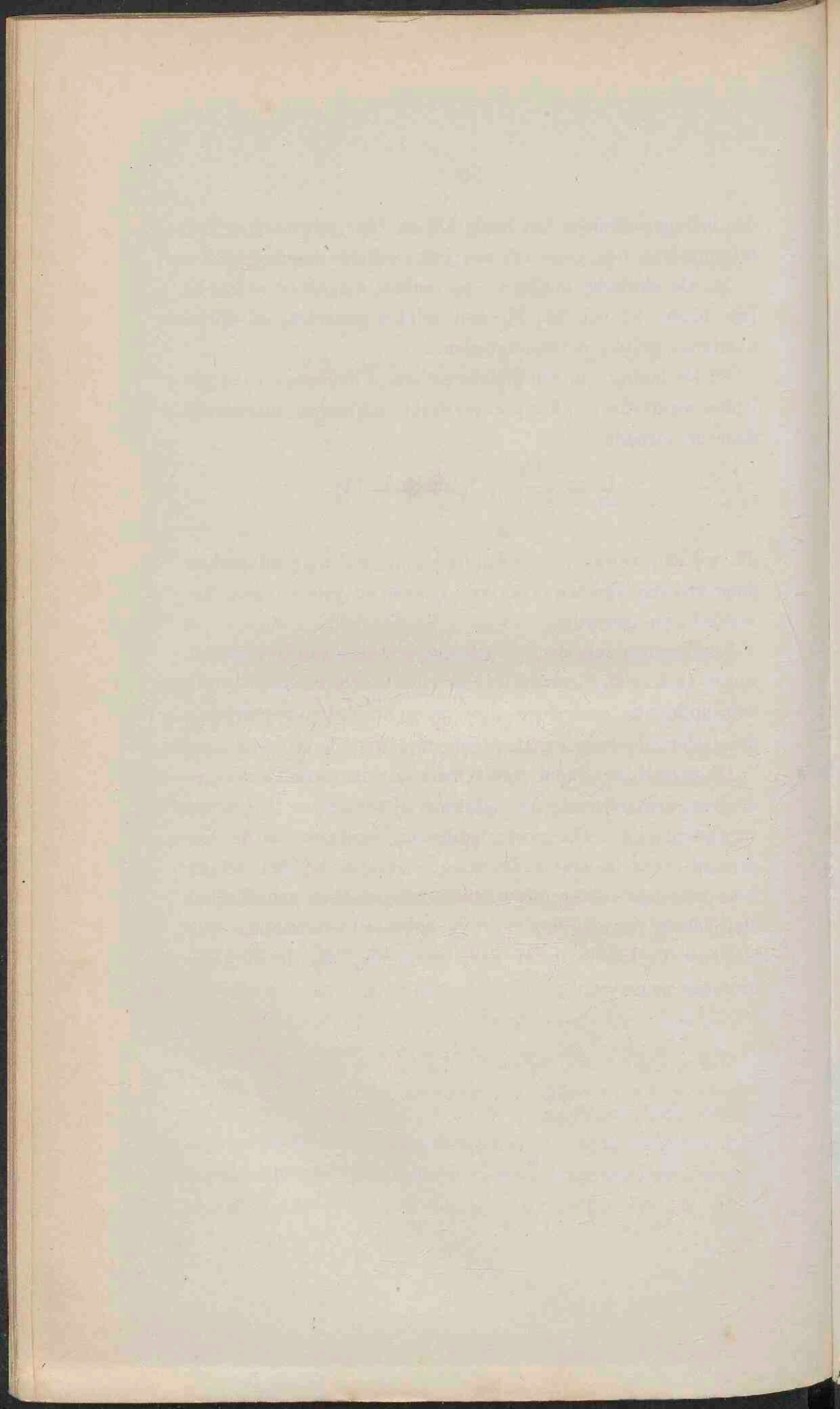
8°. De lading van een onderzeeschen of onderaardschen geleider wordt door influentie versterkt. Zij wordt uitgedrukt door de formule:

$$L = \frac{Ilu}{2 \log \frac{R'}{R}} \dots (\text{zie bladz. 71}),$$

die wij aan THOMSON verschuldigd zijn, en wier uitspraken door proeven van WHEATSTONE, CLARK en vele anderen bevestigd zijn geworden.

9°. Wanneer zulk een geleider met een bron van elektriciteit wordt verbonden, stroomt de elektriciteit er binnen, en wordt door influentie vastgelegd, daar zij op de buiten-oppervlakte der isolerende laag tegengestelde elektriciteit verdigt.

De eigenlijke stroom wordt merkbaar in verschillende gedeelten, achtereenvolgend, naarmate zij verder van de batterij verwijderd zijn. De groote lading bij onderzeesche en onderaardsche geleiders is de reden, dat men bij het seinen daar door met zoovele bezwaren te kampen heeft gehad. Men mag echter vertrouwen, dat deze bezwaren overwonnen zijn, als men de kabels inrigt naar de regels, die de formules daarvoor aangeven.



S T E L L I N G E N .

I.

Om de wetten van OHM aan proefnemingen te toetsen, moct men er van afzien, om den duur van den veranderlijken toestand te bepalen, maar, in plaats daarvan, den betrekkelijken duur van voortplanting meten.

II.

Geleiding en niet-geleiding zijn twee uitersten van ééne en dezelfde werking; zij moeten in de mathematische theorie van de elektriciteit als gevallen van denzelfden aard worden beschouwd.

III.

Men moet het woord *influentie* gebruiken, in plaats van *inductie*, wanneer men van verschijnselen van de statische elektriciteit spreekt.

IV.

Bij het telegraferen verbrcidt de elektriciteit zich, van de

aardplaten uit, door de aarde, en bestaat er geen stroom tusschen de aardplaten.

V.

De mathematische theorie van de voortplanting der elektriciteit sluit de aanname uit, dat elektriciteit een trillingsverschijnsel is.

VI.

Het is onjuist, eene lijn een *geheel van punten* te noemen.

VII.

De leer der *limieten* moet in de lagere wiskunde ingevoerd worden.

VIII.

Het is van meer belang, dat men overal en ten allen tijde hetzelfde talstelsel gebruike, dan wel, welk talstelsel men daartoc kiest.

IX.

Er zijn minstens twee elementen.

X.

Het is niet schadelijk voor de wetenschap, als men voor de atoomgewigten afgeronde getallen gebruikt.

XI.

Men kan de mineralc wateren nimmer zoo juist namaken, dat de namaaksels dezelfde werking op het gestel uitoefenen als de natuurlijke.

XII.

De methode van DUMAS, tot het bepalen van dampdigtheid, verdient in het algemeen de voorkeur boven die van GUY-LUSSAC; bij lage temperaturen is echter de laatste de verkieslijke.

XIII.

Het is verkeerd een lucht- en een damp-atmosfeer aan te nemen, wier drukkingen onafhankelijk van elkaâr zijn.

XIV.

Bij de hagelvorming ontstaan de korrels uit water, dat beneden 0° is afgekoeld, en plotseling bevriest.

XV.

De methode van FOUCAULT, om de parallaxis der zon te bepalen, is tot heden toe de beste, indien men zijne wijze, om de lichtsnelheid te bepalen, door eene betere vervangt.

XVI.

De *Lepidosiren* is een reptiel.

XVII.

Levensverschijnselen zijn gevolgen van krachten, die ook in de doode natuur werkzaam zijn.

XVIII.

De mensch is gelijktijdig met den *Elephas primigenius* en den *Ursus spelaeus* op aarde geweest.

XIX.

De theorie van DARWIN moet, zoo zij voor het dierenrijk doorgaat, ook voor het plantenrijk gelden.

XX.

Onder de gymnasiale leervakken behooren de beginselen der natuurwetenschappen te worden opgenomen.

LUNEN,
afgeleid uit de theorie van

OHM

en uit proeven van

GUILLEMIN,

betreffende de veranderlijkheid der
stroomsterkte, aan het begin
en aan het einde eens
geleiders.

