



Het verschijnsel van Purkinje

<https://hdl.handle.net/1874/292353>

a. g. m. 192, 1928.

HET VERSCHIJNSEL VAN PURKINJE

DOOR

J. C. THODEN VAN VELZEN

Velzen

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

**HET VERSCHIJNSEL
VAN PURKINJE**

UNIVERSITEIT UTRECHT
BIBLIOTHEEK

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT



0558 2808

Diss. Utrecht 1928

HET VERSCHIJNSEL VAN PURKINJE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN
GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUUR-
KUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE
UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNI-
FICUS DR. B. J. H. OVINK HOOGLEERAAR IN
DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBE-
GEERTE VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAA
DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN
VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 27 FE-
BRUARI 1928 DES NAMIDDAGS TE 3 UUR DOOR

JOHANNA CORNELIA THODEN VAN VELZEN
GEBOREN TE LEEUWARDEN

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXVIII

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT

21. FEB. 1928

UTRECHT.

Nu ik weldra den eindpaal mijner studie aan de Universiteit zal hebben bereikt, gevoel ik mij gedrongen mijn dank te brengen aan allen, wier onderricht ik gedurende die jaren heb mogen genieten.

En wie kan onder die vele geleerden grootere aanspraken op mijne dankbaarheid doen gelden dan gij, Dr. J. VAN DER BILT? Toen ik het Zwolsche gymnasium had verlaten en mijne studie aan deze Universiteit begon, hebt gij mij eerst in de roeisport ingewijd en in staat gesteld om, als heilzame verpoozing na ernstige studie, de schoonste streken van ons schoone vaderland op onvergetelijke tochten te leeren kennen. Maar tevens zijt gij mijn *dux et auspex* in mijn wetenschappelijk werk geworden en gebleven; ondanks uwe eigene vele en velerlei werkzaamheden hebt gij uw kostbaren tijd, uw onuitputtelijk geduld en uwe onvergelykelijke *ars docendi* steeds te mijner beschikking gesteld, wanneer ik met mijne moeilijkheden tot u kwam. Aldus hebt gij de liefde voor de astronomie in mij gewekt en aangekweekt en zijt gij het ten slotte geweest, die mij het onderwerp van mijn proefschrift als geschikt voor mijne krachten hebt aangewezen. Moge ik u met deze weinige woorden mijne erkentelijkheid betuigen voor alwat ik u verschuldigd ben in mijn leven en werken!

U, Hooggeleerde NIJLAND, zeer geachte Promotor, zeg ik dank voor de groote bereidwilligheid, waarmee gij van mijn *specimen* hebt willen kennisnemen: uwe scherpzinnige kritiek is daaraan op vele plaatsen ten goede gekomen.

Dat ik, Hooggeleerde ORNSTEIN, mijn werk aan uw oordeel heb mogen onderwerpen, dat gij daaraan uw tijd en aandacht hebt willen schenken en het door uwe waardevolle aanvulling hebt willen verrijken, zal ik steeds dankbaar blijven gedenken.

Dat ik in 1925/26 als assistente van de Ned. Eclipscommissie heb mogen deelnemen aan de expeditie naar Sumatra en daarbij onder uwe leerzame leiding, Hooggeleerde MOLL en PANNEKOEK, Zeergeleerde VAN DER BILT en MINNAERT, wetenschappelijk werk heb mogen verrichten, zal ik steeds op hoogen prijs blijven stellen.

Ten slotte breng ik mijn dank aan de professoren der Faculteiten der Wis- en Natuurkunde te Utrecht en te Amsterdam voor hetgeen zij door hunne hooggewaardeerde colleges tot mijne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

INHOUD

INLEIDING — GRONDBEGRIPPEN	Blz. 1
HOOFDSTUK I — OVER DE WERKZAME ENERGIE EN DE KLEUR VAN HET LICHT	9
HOOFDSTUK II — NIEUWE OPVATTING OVER DEN HEL- DERHEIDSINDRUK VAN HET LICHT	14
HOOFDSTUK III — KORTE BESPREKING VAN ENKELE ON- DERZOEKINGEN VAN KÖNIG EN EXNER; TOETSING AAN HET EXPERIMENT	25
HOOFDSTUK IV — UITBREIDING VAN DE KLEURENRUIMTE VAN SCHRÖDINGER	60
HOOFDSTUK V — HET VERSCHIJNSEL VAN PURKINJE IN DE STERREKUNDE	85

INLEIDING

De beschouwingen, in dit proefschrift neergelegd, vinden haar oorsprong in eene bestudeering van de lichtwisseling der roode veranderlijke ster U (= V4) Cygni. Daarbij moesten de helderheidsschattingen van een betrekkelijk groot aantal waarnemers verwerkt worden tot materiaal voor een homogene lichtkromme. De moeilijkheid deed zich daarbij voor, dat de helderheidsindruk van een waarnemer afhankelijk bleek van de opening van zijn kijker en dat de verschillende waarnemers der, opvallend gekleurde, ster helderheidsindrukken bleken te ontvangen, die onderling, tot een volle grootteklasse toe, uiteenliepen.

Dit, overigens zeer bekende, verschijnsel wordt geacht te zijn een uiting van den invloed van de kleur der ster op den door haar opgewekten helderheidsindruk, een invloed, die verschillend is voor verschillende oogen.

Het kwam ons daarom belangrijk voor te trachten een verklaring voor dit verschijnsel te vinden door een onderzoek betreffende de wijze, waarop een door het oog ontvangen helderheidsindruk moet samenhangen met de energie en de kleur van het licht. Op het bestaan van een dergelijken samenhang werd het eerst gewezen in 1825 door PURKINJE ¹⁾ in de volgende bewoordingen (l. c. blz. 109):

„Objectiv hat der Grad der Beleuchtung groszen Einfluss

¹⁾ J. PURKINJE. Beobachtungen und Versuche zur Physiologie der Sinne. Zweites Bändchen. Berlin 1825.

„auf die Intensität der Farbenqualität. Um sich davon „recht lebendig zu überzeugen, nehme man vor Anbruch „des Tages, wo es eben schwach zu dämmern beginnt, die „Farben vor sich. Anfangs sieht man nur schwarz und grau. „Gerade die lebhaftesten Farben, das Roth und das Grün „erscheinen am schwärzesten. Das Gelb kann man von Rosen- „roth lange nicht unterscheiden. Das Blau war mir zuerst „bemerkt. Die rothen Nüancen, die sonst beim Tageslichte „am hellsten brennen, nämlich Carmin, Zinnober und „Orange zeigen sich lange am dunkelsten, durchaus nicht „im Verhältnisse ihrer mittleren Helligkeit. Das Grün er- „scheint mehr bläulich, und eine gelbe Tinte entwickelt „sich erst mit zunehmenden Tage.“

Uit de latere litteratuur is het ons duidelijk geworden, dat de mededeelingen van PURKINJE ertoe geleid hebben om twee verschillende verschijnselen op zijn naam te stellen, nl:

1°. EEN SCHEMERINGSVERSCIJNSEL, veroorzaakt door de omstandigheid, dat bij zeer zwak licht de staafjes van het netvlies actief zijn, terwijl bij toenemende energie de kegels deze functie gaan overnemen en kleurindrukken mogelijk worden. De helderheidsindruk nu, dien de staafjes naar de hersenen zenden, is een andere dan de indruk, dien de kegels geven. Het feit dat dit verschil afhankelijk is van de verdeling der lichtenergie over de verschillende golflengten, is één verschijnsel waarop PURKINJE de aandacht heeft gevestigd.

In de meeste physiologische handboeken verstaat men onder den naam van „verschijnsel van PURKINJE” uitsluitend het hierboven genoemde.

2°. EEN DAGLICHTVERSCIJNSEL, hierin bestaande, dat de helderheidsindruk van de verschillende kleuren op ver-

schillende wijze wisselt met de energie van het licht. Dit is o. i. het verschijnsel, dat PURKINJE in den eersten zin van zijn hierboven door ons aangehaalde woorden heeft aangeduid. Het is later door een aantal onderzoekers, vooral door A. KÖNIG, omstreeks 1890 quantitatief onderzocht. F. ARGELANDER en J. A. C. OUDEMANS vestigden er omstreeks 1856 de aandacht der astronomen op. Zij constateerden nl., dat een roode ster, in een bepaalden kijker even helder geschat als een witte, zich in een kijker met een grootere opening helderder voordoet. Dit verschijnsel wordt bij MÜLLER ¹⁾ met den naam van PURKINJE bestempeld. Het feit, dat een waarnemer in staat is de kleur van een ster op te merken, wijst erop, dat men hier te doen heeft met een functie der kegels, zoodat wij dit verschijnsel hier ter plaatse en niet sub 1. noemen. Hoe dit verschijnsel den astronomen op onverwachte wijze parten kan spelen, is gebleken uit de zonneparallaxbepaling met behulp van de planeet Mars in 1924 aan de Kaapsche Sterrewacht ²⁾.

In den loop van dit werk zullen wij met onder naam „verschijnsel van PURKINJE” steeds het sub 2. genoemde verschijnsel bedoelen.

Wij zullen deze inleiding besluiten met een overzicht van den inhoud der verschillende hoofdstukken.

Hoofdstuk I is gewijd aan de formuleering van het begrip „kleur”, waarna in hoofdstuk II getracht wordt een formuleering te geven van den „helderheidsindruk”, die bepaald wordt door de energie en de kleur van het licht.

In hoofdstuk III hebben wij gemeend een bespreking te

¹⁾ G. MÜLLER. Die Photometrie der Gestirne, blz. 10.

²⁾ Zie hierover hoofdstuk V, blz. 87.

moeten geven van de onderzoeken van EXNER, omdat deze het verschijnsel van PURKINJE, zooals wij het hebben opgevat, niet aanvaardt. Wij meenen in staat te zijn de argumenten voor zijne opvatting te ontzenuwen.

Tevens worden in dit hoofdstuk de reeds eerder genoemde quantitatieve onderzoeken van KÖNIG behandeld. Het blijkt dat zij de door ons, in het 2e hoofdstuk, gegeven formulering van den helderheidsindruk bevestigen.

SCHRÖDINGER heeft in 1920 een kleurenruimte opgebouwd, waarin het verschijnsel van PURKINJE buiten beschouwing gelaten is. Wij hebben in hoofdstuk IV getracht dit onderzoek aan te vullen door aan zijn kleurenruimte een zoodanige uitbreiding te geven, dat er voor het bewuste verschijnsel wèl plaats is.

Ten slotte hebben wij in het laatste hoofdstuk den invloed van het verschijnsel van PURKINJE op de helderheidsschattingen van sterren nagegaan, en ook daarbij een overeenstemming tusschen onze theorie en de praktijk kunnen aantonen.

GRONDBEGRIPPEN

Het is ons gebleken, dat bij verschillende onderzoekers het woord *helderheid* een verschillende beteekenis heeft. Daar, zonder een scherpe formuleering van de gebruikte begrippen, verwarring en misverstand niet kunnen uitblijven, hebben wij gemeend aan onze beschouwingen enkele definities te moeten laten voorafgaan.

1 — DE OBJECTIEVE ENERGIE. Deze kan worden voorgesteld door de betrekking:

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} d\lambda$$

Hierin geeft ε_{λ} de energie aan, gelegen tusschen de golflengten λ en $\lambda + d\lambda$. Deze energie kan objectief, met behulp van physische instrumenten, gemeten worden.

2 — WERKZAME ENERGIE EN KLEURINDRUK. De energie ε , die op het netvlies valt, wordt opgenomen door de lichtgevoelige elementjes, die zich hier bevinden en wel door de kegels of de staafjes, naar gelang van de hoeveelheid opvallende energie. Wat de kegels betreft, zullen wij vasthouden aan de opvatting, dat daarin drie functies werkzaam zijn, die de energie opnemen, en dat elke van deze grondfuncties haar eigen grondkleurindruk naar de hersenen zendt. De hoeveelheid energie, welke elke functie opneemt, hangt af van de verdeling der energie over de verschillende golflengten. Wij hebben voor de, door de

drie functies opgenomen energie de benaming „werkzame energie” ingevoerd ¹⁾).

De verhouding van de drie hoeveelheden werkzame energie bepaalt den „kleurindruk”, door het opvallende licht gewekt.

3 — DE HELDERHEID. De kegels geven, met behulp van de werkzame energie, een prikkel aan de vezels der gezichtszenuw, die door de kegels in aantal verre worden overtroffen. Men heeft tot dusverre geen onderscheid gemaakt tusschen dezen prikkel en de werkzame energie. Wij hebben gemeend, terwille van een verklaring van het verschijnsel van PURKINJE, tusschen de beide begrippen verschil te moeten maken. Het eerstgenoemde (den prikkel) hebben wij ook met den naam *helderheid* (*h*) van het licht aangeduid.

4 — DE HELDERHEIDSINDRUK. Ten slotte ontstaat er in de hersenen een *helderheidsindruk* (*H*). Deze volgt de wet van WEBER, die FECHNER in het bijzonder voor het zien heeft onderzocht. Deze wet zegt, dat een verandering van den prikkel, gedeeld door den prikkel zelf, een maat is voor de verandering van den indruk, d. w. z.:

$$dH (:) \frac{dh}{h}$$

Daar wij eerst het verband tusschen de objectieve en de

¹⁾ De benamingen *lichtintensiteit*, *lichtsterkte* en *lichtkracht* zijn vermeden op grond van de volgende overwegingen:

Het woord *lichtintensiteit* wordt in de litteratuur nu eens gebruikt voor de „objectieve energie”, dan weer voor de „werkzame energie” van een hoeveelheid licht, wat verwarrend werkt. De „werkzame energie” hadden wij gevoegelijk *lichtsterkte* of *lichtkracht* kunnen noemen, ware het niet dat in de Sterrenkunde beide woorden tevens voor andere begrippen worden gebezigd (de „lichtsterkte” van een kijker en de „lichtkracht” of „absolute grootte” eener ster).

werkzame energie zullen uitwerken en daarna dat tusschen de werkzame energie en de helderheid, zullen wij tot een verband komen tusschen den helderheidsindruk H en de samenstelling van de objectieve energie ϵ .

Het hierboven gezegde geldt voor de kegels. Zoodra de energie ter plaatse zóó gering is geworden, dat er van het onderscheiden van kleuren geen sprake meer is en de kegels uitgeschakeld worden, nemen de staafjes hun taak over. De lichtindruk, dien de hersenen hiervan krijgen, hangt op een geheel andere wijze van de energieverdeeling ϵ_λ af. Wij willen dezen indruk den *schemeringsindruk* noemen, maar hem in ons werk verder buiten beschouwing laten.

Curiositeitshalve vermelden wij nog, dat door verschillende schrijvers de vier, door ons gedefiniëerde, grondbegrippen achtereenvolgens met den naam helderheid bestempeld zijn:

HILLEBRAND ¹⁾ noemt het door ons als schemeringsindruk gedefiniëerde begrip: „de helderheid van het licht.”

EXNER ²⁾ noemt het door ons als werkzame energie gedefiniëerde begrip: „de helderheid van het licht.”

KÖNIG ³⁾ geeft aan de grootheid, die wij als „helderheid” aanduiden, eveneens den naam helderheid.

De ASTRONOMEN spreken van „de helderheid” van een ster en bedoelen daarmee, wat wij „helderheidsindruk” genoemd hebben.

¹⁾ F. HILLEBRAND, Über die spezifische Helligkeit der Farben. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. 98, III, 19 (1889).

²⁾ Zie hoofdstuk III^a.

³⁾ Zie hoofdstuk III^a.

Het is duidelijk, dat dergelijke verschillende opvattingen van eenzelfde woord „helderheid” tot verwarring en misverstand aanleiding hebben moeten geven.

Wij willen aan de formuleering der groundbegrippen nog de volgende opmerkingen toevoegen:

1 — De *objectieve energie* ε_λ kunnen wij, zooals reeds gezegd is, met een bolometer of thermozuil meten.

2 — Indien het oog van twee, op verschillende wijze verkregen, lichtmengsels, gelijkheid constateert, zoowel wat kleur als wat helderheidsindruk betreft, dan zijn de drie gedeelten, waaruit de werkzame energie is opgebouwd voor de beide mengsels gelijk. Van het onderzoek over mengsels kunnen wij dus iets leeren over de *werkzame energie*. De uitkomst daarvan geldt echter alleen voor het oog van den waarnemer.

3 — Indien men van twee verschillend gekleurde lichtsoorten de energie zóó verandert, dat ze een gelijke helderheidsindruk maakt, dan hebben die beide lichtsoorten een gelijke H en zijn dus ontstaan uit een even grooten prikkel h . Onderzoekingen omtrent dergelijke verschijnselen leeren dus iets over het verband tusschen de energie en de *helderheid* van het licht. Dit verband is eveneens afhankelijk van het oog van den waarnemer.

4 — Tenslotte wordt door de astronomen direct het verschil in *helderheidsindruk* van twee sterren geschat. Dit verschil is in hooge mate afhankelijk van het oog van den waarnemer.

HOOFDSTUK I

OVER DE WERKZAME ENERGIE EN DE KLEUR VAN HET LICHT

Wanneer een hoeveelheid lichtenergie het oog treft, krijgt de waarnemer van dat licht een bepaalden helderheids- en een bepaalden kleurindruk. Deze indrukken worden bepaald door de verdeling der objectieve energie over de verschillende golflengten.

Het is gebleken, dat iedere kleur verkregen kan worden als een mengsel van drie elementaire kleuren ¹⁾. Hieruit heeft men afgeleid, dat het menschelijke oog drieërlei organen bevat, die elk, als ze door licht geprikkeld worden, een zekeren grondkleur-indruk naar de hersenen zenden. De verhouding van die drie hoeveelheden grondkleur bepaalt dan den totalen kleurindruk.

Het onderscheid tusschen de begrippen elementaire kleur en grondkleur kan dus als volgt gedefiniëerd worden: het eerste begrip is aan de *praktijk* ontleend, het tweede ontstaat pas bij het opbouwen van een *theorie* over het opnemen van lichtprikkels door het oog.

Als organen voor het zien noemden wij reeds „de kegels” en „de staafjes”. Is de hoeveelheid licht ter plaatse voldoende groot, dan gebruiken wij daar de kegels, terwijl de staafjes geen dienst doen. Zelfs het beeld van een lichtbron, zóó klein, dat slechts één kegeltje (2 tot 4 μ) getroffen wordt, kan nog

¹⁾ Zie hoofdstuk III, blz. 30.

in verschillende kleuren gezien worden. Daaruit blijkt, dat in ieder kegeltje de drie soorten organen die de verschillende grondkleurindrukken opwekken, werkzaam zijn. Bij kleurenblinden, dichromaten, resp. monochromaten, denkt men zich één, resp. twee der soorten organen afwezig. Er zijn ook monochromaten, die de kegels geheel missen en dus uitsluitend met de staafjes zien.

Bij toenemende verzwakking van het licht komt er een oogenblik, waarop de kegels geen indruk meer kunnen doorzenden. Dan komen de veel gevoeliger staafjes in werking, welke niet in staat zijn tot het maken van een kleurenonderscheid.

Om nu een theorie op te bouwen over de wijze waarop het oog de prikkels ten gevolge van de lichtenergie ontvangt, kan men zich voorstellen, dat iedere kegel drie resonatoren bevat, elk met een eigen trillingsgetal en een zekere demping. Het opvallende licht brengt hen in trilling en zij zenden ieder een *grondkleurindruk* naar de hersenen.

Verder onderstellen wij, dat de energie, waarmee de resonatoren zijn gaan medetrillen, een maat is voor de sterkte van den grondkleurindruk, die naar de hersenen gezonden wordt. Deze energie is een zeker gedeelte van de opvallende energie en wij hebben haar den naam „*werkzame energie*” gegeven ¹⁾. De verhouding van de hoeveelheden werkzame energie der drie soorten resonatoren bepaalt den kleurindruk van het opvallende licht.

De energie, waarmee de resonatoren gaan medetrillen hangt af van hun eigen-frequentie, ν_r , ν_g , ν_b , en van hun dempingscoëfficiënten δ_r , δ_g , δ_b , waarbij met de indices

¹⁾ Zie blz. 5.

r, g en b de resonatoren, die een rooden, resp. groenen en blauwen kleurindruk naar de hersenen zenden, aangeduid zijn. Vervolgens is deze afhankelijk van de frequentie ν en de energie ϵ_ν van het opvallende licht, en van een mogelijke selectieve absorptie in het oog, zoodat de energie ϵ_ν hierdoor verminderd wordt tot $\alpha_\nu \epsilon_\nu$.

Indien wij de energie, waarmede de „roode” resonator trilt, $\rho\epsilon$ noemen en de beide andere hoeveelheden werkzame energie resp. $\gamma\epsilon$ en $\beta\epsilon$, waarin ϵ de totale opvallende energie voorstelt, dan leert de berekening¹⁾:

$$\begin{aligned}\rho\epsilon &(:) \int_0^\infty \frac{\nu^2}{(\nu_r^2 - \nu^2)^2 + 4\delta_r^2 \nu^2} \alpha_\nu \epsilon_\nu d\nu \\ \gamma\epsilon &(:) \int_0^\infty \frac{\nu^2}{(\nu_g^2 - \nu^2)^2 + 4\delta_g^2 \nu^2} \alpha_\nu \epsilon_\nu d\nu \\ \beta\epsilon &(:) \int_0^\infty \frac{\nu^2}{(\nu_b^2 - \nu^2)^2 + 4\delta_b^2 \nu^2} \alpha_\nu \epsilon_\nu d\nu\end{aligned}\tag{1}$$

Het totale werkzame gedeelte van de lichtenergie $\epsilon = \int_0^\infty \epsilon_\nu d\nu$ wordt dus voorgesteld door

$$i = \rho\epsilon + \gamma\epsilon + \beta\epsilon\tag{2}$$

terwijl de kleur bepaald wordt door de verhouding

$$\rho : \gamma : \beta$$

Deze theorie moet nu getoetst worden aan de experimen-

¹⁾ Zie o. a. Handwörterbuch der Naturwissenschaften. VIII. S. 1115.

ten. Dit hebben AIGNER ¹⁾ en EXNER ²⁾, onafhankelijk van elkaar gedaan, zij het voor een ietwat andere formule ³⁾; het verschil is echter gering, zoodat hun onderzoekingen hier overgenomen kunnen worden. Zij komen hierop neer, dat nagegaan wordt, of de „grondkleurkrommen” van KÖNIG ⁴⁾ het verloop van de werkzame energie kunnen voorstellen voor bepaalde waarden van de eigen-frequenties en de dempingscoëfficiënten. Hierbij is de transmissie-coëfficiënt, α_v , gelijk aan één aangenomen.

Het resultaat is voor de roode en de groene kromme tamelijk bevredigend terwijl de blauwe kromme van KÖNIG te onzeker was ⁴⁾, om daaruit eenige conclusies te mogen trekken.

Wij ontleenen aan EXNER's uitkomsten de volgende waarden

$$\delta_r = 3.78 \times 10^{14} \quad \nu_r = 2\pi \times 5.22 \times 10^{14} \quad \lambda_r = 576 \mu\mu$$

$$\delta_g = 3.06 \times 10^{14} \quad \nu_g = 2\pi \times 5.44 \times 10^{14} \quad \lambda_g = 551 \mu\mu$$

en maken nog de opmerking, dat wellicht een betere overeenstemming tusschen de door deze getallen bepaalde resonantie krommen en de krommen van KÖNIG zou kunnen gevonden worden, indien men de absorptie in het oog als functie van de golflengte kende. De absorptie is er wellicht ook voor aansprakelijk, dat het oog, zelfs van de grootste hoeveelheid ultraviolet of infrarood geen lichtindruk kan krijgen.

¹⁾ F. AIGNER, Zur Resonanz-theorie des Farbensehens. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, **131**, 299 (1922).

²⁾ F. M. EXNER, Versuch einer Theorie des Farbensehens. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, **131**, 615 (1922).

³⁾ Het schijnt ons mogelijk, dat hierbij niet in aanmerking is genomen, dat de amplitude van de kracht tengevolge van de electromagnetische lichttrillingen evenredig is met de frequentie.

⁴⁾ Zie hoofdstuk III, blz. 30..

Het tweede maximum van rood in het gebied der korte golflengten zou men misschien door het aannemen van een tweede eigen-frequentie der „roode” resonatoren kunnen verklaren. Het berekenen van de grondkleurkrommen van KÖNIG uit de elementaire-kleurkrommen is echter te onzeker om deze eigen-frequentie met eenige nauwkeurigheid daaruit te kunnen berekenen.

HOOFDSTUK II

NIEUWE OPVATTING OVER DEN HELDERHEIDSINDRUK VAN HET LICHT

Wij zullen in dit hoofdstuk onderzoeken, hoe de in de hersenen ontvangen *helderheidsindruk* H , afhangt van de drie hoeveelheden *werkzame energie*,

$$\rho\varepsilon, \gamma\varepsilon \text{ en } \beta\varepsilon$$

die wij in het vorige hoofdstuk gedefiniëerd hebben.

1 — Tot dusverre heeft men steeds de verandering van den helderheidsindruk H ten gevolge van een verandering van de energie ε van het licht evenredig gesteld aan het procentueele bedrag van deze verandering, dit is dus het quotient van de verandering en de waarde van de energie.

$$dH = D \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

dus

(3)

$$H = D \lg \frac{\varepsilon}{d}$$

De evenredigheidsfactor D is een maat voor de gevoeligheid van den helderheidsindruk voor een bepaalde energieverandering. De integratieconstante d is de z.g. *drempelwaarde* voor de energie. Indien nl. $\varepsilon = d$ is geworden, is $H = 0$. Wordt de energie nog kleiner, zoodat $\varepsilon < d$, dan zijn de kegels niet meer in staat van deze energie iets op

te nemen; zij blijven in rust, de helderheidsindruk H blijft nul. Wel beginnen de staafjes hier nu te functionneeren, doch met den indruk, dien zij naar de hersenen zenden, hebben wij ons niet verder bezig gehouden.

Deze formuleering is echter niet voldoende om van de, het eerst door PURKINJE opgemerkte en later door KÖNIG quantitatief onderzochte bijzonderheid, dat de verandering van den helderheidsindruk afhankelijk is van de kleur, rekenschap te geven. Wij willen (3) dus opvatten als een eerste benadering en trachten een nauwkeuriger formuleering te vinden.

2 — Zooals wij reeds op blz. 6 opmerkten, hebben wij gedaan dit door onderscheid te maken tusschen den *prikkel* h en de *werkzame energie* i .

De daar reeds genoemde wet van FECHNER geldt voor den *prikkel*, zoodat

$$dH = D \frac{dh}{h}$$

dus

(4)

$$H = D \lg \frac{h}{d}$$

Vatten wij den prikkel op als de som van de drie afzonderlijke prikkels, tengevolge van de drie soorten werkzame energie, dus

$$h = h_r + h_g + h_b \quad (5)$$

dan komt de sub 1. genoemde opvatting daarop neer, dat zoowel de prikkel, als de werkzame energie, evenredig met de objectieve energie zouden zijn. De procentueele verande-

ringen van beide zouden dus *gelijk* zijn aan die van de objectieve energie, dus

$$\frac{dh_r}{h_r} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\frac{dh_g}{h_g} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\frac{dh_b}{h_b} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

Wij zullen nu echter uitgaan van de volgende werkhypothese:

De procentueele verandering van iederen prikkel is *evenredig* aan die van de objectieve energie.

Hiermede wordt dH inderdaad een functie van de kleur ¹⁾.

Deze onderstelling beteekent nl.:

$$D \frac{dh_r}{h_r} = R \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$D \frac{dh_g}{h_g} = G \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$D \frac{dh_b}{h_b} = B \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

(6)

¹⁾ Wij hebben ook de mogelijkheid

$$\frac{dh_r}{h_r} = \frac{d\rho\varepsilon}{\rho\varepsilon} \text{ enz.,}$$

waarin ρ , γ en β afhankelijk van de energie zouden zijn, onder de oogen gezien. In deze onderstelling zou de resonantie-theorie door een andere vervangen moeten worden. Zij is echter niet houdbaar, omdat KÖNIG (zie blz. 30) opgemerkt heeft, dat de door hem opgestelde kleurvergelijkingen onafhankelijk waren van energieverandering, en omdat ook EXNER de constantheid van ρ , γ en β heeft bevestigd, daar zijn „Weiszwert“ (zie blz. 35) onafhankelijk van de energie bleek te zijn.

Wij onderstellen verder, dat de hier ingevoerde verhoudingen, $\frac{R}{D}$, $\frac{G}{D}$, $\frac{B}{D}$, weinig van één verschillen, zoodat het begrijpelijk is, dat de sub 1. genoemde formuleering van dH in eerste benadering is ontstaan. Naar analogie van D, kan men de grootheden R, G en B opvatten als een maat voor de, voor energieveranderingen der drie grondkleuren verschillende, gevoeligheid van het oog.

Uit (6) volgt:

$$h_r = (c_r \varepsilon)^{R/D}$$

$$h_g = (c_g \varepsilon)^{G/D}$$

$$h_b = (c_b \varepsilon)^{B/D}$$

Aangezien de prikkel h_r alleen veroorzaakt wordt door de roode werkzame energie $\rho \varepsilon$, en aangezien de eenheid, waarin de energie uitgedrukt wordt, door de machtsverheffing van essentieel belang is geworden, stellen wij de integratie-constanten:

$$c_r = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$c_g = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

$$c_b = \frac{\varepsilon_0}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\varepsilon_0}$$

Wij hebben hier de eenheid ε_0 voor de drie werkzame energiehoeveelheden dezelfde genomen. Indien het later, bij toetsing aan de experimenten, noodig zou blijken daarvoor verschillende waarden aan te nemen, kan dit altijd

nog geschieden; tot dusverre hebben wij daartoe echter geen aanleiding gevonden.

Met

$$\begin{aligned} h_r &= \left(\frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{R/D} \\ h_g &= \left(\frac{\gamma \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{G/D} \\ h_b &= \left(\frac{\beta \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{B/D} \end{aligned} \quad (7)$$

blijkt dus, volgens (4) en (5), de uitdrukking voor den helderheidsindruk H te worden:

$$H = D \lg \frac{1}{d} \left[\left(\frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{R/D} + \left(\frac{\gamma \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{G/D} + \left(\frac{\beta \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{B/D} \right] \quad (8)$$

Opdat ook in het gebied der zeer zwakke energie, waarvan de kegels nauwelijks meer in staat zijn, een indruk naar de hersenen te zenden, deze formule bruikbaar blijve, moeten wij een kleine wijziging aanbrengen.

De kleur van het licht wordt nl. beter dan door de verhouding

$$\rho : \gamma : \beta$$

beschreven door:

$$\left(\rho - \frac{r}{\varepsilon} \right) : \left(\gamma - \frac{g}{\varepsilon} \right) : \left(\beta - \frac{b}{\varepsilon} \right) \quad z. E.$$

Hierin zijn r , g en b zeer klein, zoodat meestal $\frac{r}{\varepsilon}$ naast ρ te verwaarloozen is, en evenzoo $\frac{g}{\varepsilon}$ naast γ en $\frac{b}{\varepsilon}$ naast β .

Wanneer de energie echter zoo klein geworden is dat $\frac{r}{\varepsilon}$ van

dezelfde orde als ρ is geworden, begint deze term zijn invloed te doen gelden en wordt de kleur van het licht veranderlijk met de energie. Is ten slotte de energie zóó klein geworden, dat $\rho \leq \frac{r}{\varepsilon}$, dus $\rho\varepsilon \leq r$ is, dan zijn de kegels niet meer in staat, hiervan een rooden grondkleurindruk naar de hersenen te zenden. Dezelfde redeneering geldt voor groen en blauw. Wij noemen r , g en b drempelwaarden van de roode groene en blauwe werkzame energie.

Hiermede wordt formule (8) verbeterd tot:

$$H = D \lg \frac{1}{d} \left[\left(\frac{\rho\varepsilon - r}{\varepsilon_0} \right)^{R/D} + \left(\frac{\gamma\varepsilon - g}{\varepsilon_0} \right)^{G/D} + \left(\frac{\beta\varepsilon - b}{\varepsilon_0} \right)^{B/D} \right] \quad (8^*)$$

Indien de kleur van een licht nu een zoodanige samenstelling heeft, dat

$$\frac{\rho}{r} > \frac{\gamma}{g} \text{ en } \frac{\rho}{r} > \frac{\beta}{b}$$

dan zal er, bij verzwakking der energie, een oogenblik komen, waarop de groene en de blauwe werkzame energie onder de drempelwaarde zijn gezonken en de roode nog niet.

Dan is:

$$H = R \lg \frac{\rho\varepsilon - r}{\varepsilon_0 d_r} \text{ waarin } d_r = d^{D/R}$$

In dit geval is het dus mogelijk een zuiveren, hoewel zeer zwakken grondkleurindruk te krijgen. Van deze mogelijkheid heeft EXNER (zie hoofdstuk III) partij getrokken.

Ten slotte verdwijnt de kleurindruk geheel als de energie de laatste drempelwaarde

$$\varepsilon = \frac{r + \varepsilon_0 d_r}{\rho}$$

heeft bereikt.

De kegels houden nu op te functionneeren en de staafjes nemen hunne taak over.

Wij willen nog terloops opmerken, dat men dus nooit kan spreken over de drempelwaarde van een zekere kleur, daar iedere lichtsoort ten slotte, tot één van de drie grondkleuren geworden, onder de bijbehorende drempelwaarde zinkt. Alleen als het licht zoodanig is samengesteld, dat

$$\rho : \gamma : \beta = r : g : b$$

dan worden de drie opbouwende deelen *gelijktijdig* „*unterschwellig*” en verdwijnt het licht, zonder van kleur te zijn veranderd. Dit is gebleken een eigenschap van wit licht te zijn ¹⁾. In het derde hoofdstuk zal ook nog op een geheel andere wijze blijken, dat voor wit licht

$$\rho_w : \gamma_w : \beta_w = r : g : b$$

Korthedshalve zullen wij in het vervolg formule (8) blijven gebruiken, maar wij wijzen er met nadruk op dat deze in het gebied der zeer zwakke energie door (8*) moet vervangen worden.

Wij vragen ons nu af, of formule (8) inderdaad in staat is, kwalitatief rekenschap te geven van het verschijnsel van PURKINJE. Dit is als volgt te formuleeeren: hebben twee verschillend gekleurde lichten dezelfde helderheid, dan veroorzaakt eenzelfde procentueele vergrooting der energie een grootere helderheidsvermeerdering voor het licht, dat meer rood bevat.

¹⁾ Hierbij is gereflecteerd zonlicht bij een zonshoogte van ongeveer 36° bij definitie wit genoemd.

Wij schrijven om dit te onderzoeken:

$$dh = \left[\frac{R}{D} \left(\frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{R/D} + \frac{G}{D} \left(\frac{\gamma \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{G/D} + \frac{D}{B} \left(\frac{\beta \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{B/D} \right] \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

in den vorm

$$dh = \left[\frac{R-B}{D} \left(\frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{R/D} + \frac{G-B}{D} \left(\frac{\gamma \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{G/D} + \frac{B}{D} h \right] \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

Bij constante waarde van h en $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ wordt alleen wanneer

$R > B$ is de waarde van dh grooter naarmate men ρ grooter maakt.

Op analoge wijze blijkt $R > G$ te moeten zijn, om van het verschijnsel van PURKINJE kwalitatief rekenschap te kunnen geven.

Om na te gaan of (8) dit ook quantitatief kan, willen wij de uitdrukking voor H in een anderen vorm brengen. Wij zullen trachten ze te ontwikkelen naar machten van de logarithme van de energie.

Daar wij hebben aangenomen dat $\frac{R}{D}$, $\frac{G}{D}$ en $\frac{B}{D}$ weinig van de eenheid verschillen, stellen wij deze factoren voor door

$$\frac{R}{D} = 1 + \varphi, \quad \frac{G}{D} = 1 + \chi, \quad \frac{B}{D} = 1 + \psi \quad (9)$$

waarin φ , χ en ψ klein zijn ten opzichte van één.

Wij maken verder gebruik van de volgende reeksontwikkeling

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{R/D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{\varphi} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left(1 + \varphi \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{\varphi^2}{2} \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \right)$$

die geldt voor iedere eindige waarde van $\varphi \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$.

Voor $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{G/D}$ en $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{B/D}$ bestaat een analoge reeksontwikkeling.

Bedenken wij verder dat

$$\lg(1 + \kappa) = \kappa - \frac{\kappa^2}{2} + \dots \quad \text{als } -1 < \kappa \leq 1 \text{ is}$$

en noemen wij ten slotte

$$\rho^{R/D} = \Re \quad \gamma^{G/D} = \mathfrak{G} \quad \beta^{B/D} = \mathfrak{B} \quad (10)$$

dan kunnen wij de uitdrukking voor den helderheidsindruk H als volgt ontwikkelen:

$$\begin{aligned} H &= D \left[\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \lg \frac{1}{d} \left[\Re \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^\varphi + \mathfrak{G} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^\chi + \mathfrak{B} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^\psi \right] \right] \\ &= D \left(\left[\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \lg \frac{1}{d} + \lg \left[\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B} + \left(\Re \varphi + \mathfrak{G} \chi + \mathfrak{B} \psi \right) \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\Re \varphi^2 + \mathfrak{G} \chi^2 + \mathfrak{B} \psi^2 \right) \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \right] \right) \\ &= D \left[\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \lg \frac{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}}{d} + \lg \left[1 + \frac{\Re \varphi + \mathfrak{G} \chi + \mathfrak{B} \psi}{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}} \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\Re \varphi^2 + \mathfrak{G} \chi^2 + \mathfrak{B} \psi^2}{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}} \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \right] \right] \\ &= D \left[\lg \frac{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}}{d} + \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{\Re \varphi + \mathfrak{G} \chi + \mathfrak{B} \psi}{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}} \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\Re \varphi^2 + \mathfrak{G} \chi^2 + \mathfrak{B} \psi^2}{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}} \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Re \varphi + \mathfrak{G} \chi + \mathfrak{B} \psi}{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}} \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \right] \\ &= D \left[\lg \frac{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}}{d} + \left(1 + \frac{\Re \varphi + \mathfrak{G} \chi + \mathfrak{B} \psi}{\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B}} \right) \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\Re \mathfrak{G}(\varphi - \chi)^2 + \mathfrak{G} \mathfrak{B}(\chi - \psi)^2 + \mathfrak{B} \Re(\psi - \varphi)^2}{(\Re + \mathfrak{G} + \mathfrak{B})^2} \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Noemen wij

$$\begin{aligned} \lg \frac{\Re + \mathcal{G} + \mathfrak{B}}{d} = L \quad 1 + \frac{\Re\varphi + \mathcal{G}\chi + \mathfrak{B}\psi}{\Re + \mathcal{G} + \mathfrak{B}} = M \\ \frac{\Re\mathcal{G}(\varphi - \chi)^2 + \mathcal{G}\mathfrak{B}(\chi - \psi)^2 + \mathfrak{B}\Re(\psi - \varphi)^2}{(\Re + \mathcal{G} + \mathfrak{B})^2} = N \end{aligned} \quad (11)$$

dan kan de helderheidsindruk worden voorgesteld door

$$\boxed{H = D \left[L + M \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2} N \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \right]} \quad (12)$$

indien voldaan is aan de voorwaarde

$$-1 < \frac{\Re\varphi + \mathcal{G}\chi + \mathfrak{B}\psi}{\Re + \mathcal{G} + \mathfrak{B}} \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2} \frac{\Re\varphi^2 + \mathcal{G}\chi^2 + \mathfrak{B}\psi^2}{\Re + \mathcal{G} + \mathfrak{B}} \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \dots \leq +1$$

of in de notatie van (11)

$$-1 < (M-1) \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2} (N - (M-1)^2) \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \leq +1 \quad (13)$$

Wij hebben de reeksontwikkeling tot en met de tweede macht van $\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ voortgezet en daarbij dus ondersteld, dat de derde machten van φ , χ en ψ reeds zoo klein waren, dat de termen waarin zij voorkwamen verwaarloosd mochten worden. De vraag of wellicht nog hoogere machten dan de tweede behooren te worden medegenomen, hebben wij in hoofdstuk III onderzocht. Bij het toetsen van onze theorie aan de waarnemingen is gebleken, dat men bij de tweede machten van φ , χ en ψ mag blijven staan, om rekenschap van de werkelijkheid te kunnen geven.

Ten slotte maken wij nog de opmerking, dat in overeen-

stemming met formule (8*) de formule (12) den helderheidsindruk H nauwkeuriger kan weergeven, indien de beteekenis van $\Re$, $\mathcal{G}$ en $\mathfrak{B}$ is:

$$\Re = \left(\rho - \frac{r}{\varepsilon} \right)^{R/D}; \quad \mathcal{G} = \left(\gamma - \frac{g}{\varepsilon} \right)^{G/D}; \quad \mathfrak{B} = \left(\beta - \frac{b}{\varepsilon} \right)^{B/D} \quad (10*)$$

HOOFDSTUK III

KORTE BESPREKING VAN ENKELE ONDERZOEKINGEN VAN KÖNIG EN EXNER; TOETSING AAN HET EXPERIMENT.

In dit hoofdstuk zullen wij in het kort het ontstaan en de beteekenis der „grondkleurkrommen” van KÖNIG behandelen. Hierna zullen wij de onderzoekingen van EXNER bespreken en aantoonen dat EXNER door een verkeerde interpretatie van zijn eigen uitkomsten tot een onjuiste opvatting omtrent het verschijnsel van PURKINJE werd geleid. Ten slotte zullen de metingen van KÖNIG over het verschijnsel van PURKINJE beschreven worden en zal onze theorie getoetst worden aan de door hem verkregen uitkomsten.

1 — DE GRONDKLEURKROMMEN VAN KÖNIG

Het ligt niet in onze bedoeling een volledig overzicht van KÖNIG's ¹⁾ onderzoekingen te geven. Wij willen slechts in het kort mededeelen, op welke onderstellingen zijn grondkleurkrommen berusten. Deze toch hebben dienst gedaan bij de ontwikkelingen van hoofdstuk I en zullen ook verder gebruikt worden.

Uit onderzoekingen van NEWTON is reeds gebleken, dat

¹⁾ A. KÖNIG, Die Grundempfindungen in normalen und anomalen Farbensystemen. Gesammelte Abhandlungen XXI. Leipzig, 1903.

men zich alle kleuren opgebouwd kan denken uit drie *elementaire*¹⁾ kleuren. Benoemt men de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek met deze drie kleuren, dan stelt ieder punt binnen den driehoek een kleur voor. De verhouding van de afstanden van dat punt tot de drie zijden van den driehoek geven daarbij de verhouding aan, waarin men de drie elementaire kleuren moet mengen om de aangeduide kleur te krijgen. De eenheden, waarin de drie elementaire kleuren gemeten worden, zijn zoo gekozen, dat wit, het licht, dat bij een zonshoogte van ongeveer 36° door een bewolkten hemel wordt gereflecteerd, door het zwaartepunt wordt voorgesteld. Alle punten op een lijn door het zwaartepunt, aan denzelfde kant hiervan gelegen, zijn van dezelfde nuance, echter in mindere verzadiging, naarmate ze dichter bij wit liggen. Alle punten op deze zelfde lijn, aan den anderen kant van het zwaartepunt gelegen, zijn complementair aan de eerstgenoemde punten; d. w. z. in de goede verhouding gemengd, vormen zij wit. Een mengsel van twee kleuren vindt men uit een zwaartepuntsconstructie. Alle bestaande kleuren moeten door punten binnen den driehoek voorgesteld kunnen worden. Het continue spectrum van zonlicht kan voorgesteld worden door een lijn, als in Fig. 1 is aangegeven. De volgende overwegingen leiden daartoe:

1 — De spectraalgebieden, waarin $\gamma > 655 \mu\mu$ en $< 430 \mu\mu$ is, leveren elk, voor zoover zichtbaar, slechts één kleurindruk van verschillende sterkte. De genoemde golflengten kunnen dus gevoegelijk, als „elementaire kleuren”, twee der hoekpunten van den driehoek vormen, R en V.

2 — Aan de sub 1. genoemde grenzen twee spectraalgebie-

¹⁾ Zie ook blz. 30.

den, $655 \mu\mu$ — $630 \mu\mu$ en $430 \mu\mu$ — $475 \mu\mu$, van kleuren, die, gemengd met de aangrenzende elementaire kleur, alle daartusschen liggende spectraalkleuren kunnen leveren. Deze gebieden bestaan dus uit mengsels van deze elementaire kleur met een derde elementaire kleur G en wel voor beide genoemde gebieden dezelfde, daar er anders vier elementaire kleuren zouden zijn, hetgeen tot nu toe nog niet noodig bevonden is. Deze gebieden moeten dus worden voorgesteld door stukken van de zijde RG en VG.

3 — In het geheele gebied, gelegen in de sub 2. besproken gebieden, is het mengsel van twee spectraalkleuren altijd minder verzadigd, dan de daartusschen gelegen spectraalkleur van dezelfde nuance. De punten, die de spectraalkleuren van dit middengebied vertegenwoordigen, liggen dus op een kromme, die haar holle zijde naar het zwaartepunt gekeerd houdt, en wel zoo, dat alle spectraalkleuren, in de goede verhouding gemengd, samen wit vormen.

De ruimte tusschen G en de spectraalkromme bevat geen kleurpunten, daar kleuren, meer verzadigd dan de spectraalkleuren niet voorkomen.

KÖNIG heeft nu het nauwkeurige verloop van de kromme nagegaan.

Hij maakte daartoe den kleurindruk van een mengsel van twee spectraalkleuren, λ_1 en λ_2 , gelijk aan dien van een mengsel van twee andere spectraalkleuren, λ en λ' . Als de energie in het spectrum van de golflengte λ door L_λ wordt voorgesteld en a, b en c mengingscoëfficiënten zijn, krijgt hij kleurvergelijkingen van den vorm:

$$aL_{\lambda_1} + bL_{\lambda_2} = L_\lambda + cL_{\lambda'}$$

Daar de beide mengsels volkomen dezelfde kleur geven,

gelden deze vergelijkingen ook voor ieder van de elementaire kleuren afzonderlijk, zoodat:

$$aR_{\lambda_1} + bR_{\lambda_2} = R_{\lambda} + cR_{\lambda'}$$

$$aG_{\lambda_1} + bG_{\lambda_2} = G_{\lambda} + cG_{\lambda'}$$

$$aV_{\lambda_1} + bV_{\lambda_2} = V_{\lambda} + cV_{\lambda'}$$

waarin R_{λ} de hoeveelheid elementair rood, G_{λ} de hoeveelheid elementair groen en V_{λ} de hoeveelheid elementair violet is, waaruit de spectraalkleur λ opgebouwd kan gedacht worden.

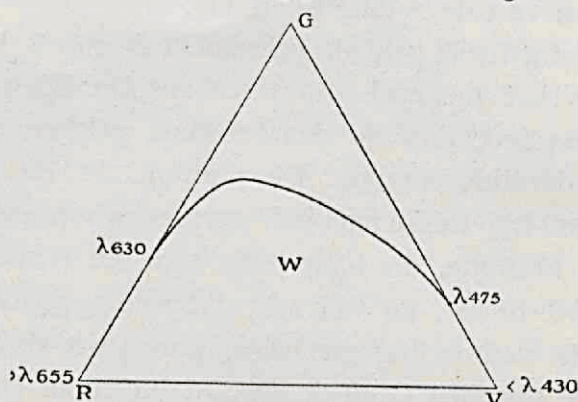


FIG. I

De waarden van R_{λ} , G_{λ} en V_{λ} , afgezet tegen λ , vormen dan de drie elementaire kleurkrommen. Hun verhouding bepaalt de plaats in den kleurendriehoek.

Het berekenen van de groene elementaire-kleurkromme is het eenvoudigste. Indien men n.l. mengsels maakt uit $\lambda_1 \geq 655\mu$ met λ_2 enerzijds en $\lambda' = 430\mu$ met λ anderzijds, dan gaat de kleurvergelijking, daar

$$G_{\lambda_1} = 0 \quad \text{en} \quad G_{\lambda'} = 0$$

is, over in

$$G_{\lambda} = bG_{\lambda_2}$$

Op deze wijze is men in staat de waarde voor iedere G_{λ} uit te drukken in G_{λ_2} als eenheid.

In de praktijk is de zaak evenwel niet zóó eenvoudig. De gelijkheid van twee mengsels toch kan alleen dan scherp beoordeeld worden, wanneer zij van een tamelijk groote verzadiging zijn. Men moet dus mengsels maken van kleuren die niet te veel van elkaar verschillen en daartoe is het noodig andere waarden voor λ_1 en λ' te kiezen. G_{λ_1} en $G_{\lambda'}$ zijn dan niet nul en moeten uit voorloopige metingen volgens bovenstaande methode, benaderd worden. Hiermede berekent KÖNIG dan een elementaire-kleurkromme in eerste benadering; deze levert het materiaal voor een tweede benadering en zoo verder, totdat een nieuwe benadering geen verandering meer geeft.

Het berekenen van de roode elementaire-kleurkromme brengt meer moeilijkheden met zich, daar het roode deel van het spectrum niet besloten ligt tusschen twee gedeelten, die geen rood bevatten.

Het is daarom noodig direct met een eerste benadering voor R_{λ_1} te beginnen; deze vindt KÖNIG uit complementaire kleurmetingen. Denkt hij zich n.l. de drie elementaire-kleurkrommen zóó geteekend, dat ze denzelfden inhoud hebben, waardoor de eenheden waarin R_λ , G_λ en V_λ resp. uitgedrukt worden, zoo gekozen zijn, dat voor het witte licht

$$R_w = G_w = V_w,$$

dan is de complementaire kleur van het elementaire violet het licht van de golflengte, waarvoor

$$R_\lambda = G_\lambda$$

Voor deze golflengte is de waarde van R_λ dus bekend.

KÖNIG teekent nu, als eerste benadering, een R-kromme van denzelfden inhoud als de G-kromme, die bij $\lambda = 720\mu\mu$

en bij $\lambda = 430\mu\mu$ de waarde nul nadert en door het gevonden snijpunt met de G-kromme gaat. Hiermede werkt hij weer op dezelfde wijze voort als bij de G-kromme, en benadert steeds beter de gezochte kromme, tot een verdere benadering geen verandering meer brengt.

Ook voor de V-kromme volgt KÖNIG een dergelijk proces. Daar in het gebied der grootere golflengten de kleurvergelijkingen zeer ongevoelig bleken voor toevoeging van violet licht, kan deze kromme niet met dezelfde zekerheid getrokken worden.

Als eindresultaat, verkreeg KÖNIG na veel tijdroovend rekenwerk *drie elementaire-kleurkrommen*, uitgedrukt in onbekende eenheden, welker verhouding zóó gekozen was, dat de inhouden der krommen aan elkaar gelijk waren, dus

$$\int_0^{\infty} R_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} G_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} V_{\lambda} d\lambda$$

Dit beteekent, dat voor zonlicht, het bij definitie witte licht,

$$R_w = G_w = V_w$$

Opmerking:

Deze arbeid bracht tevens het door ons in hoofdstuk II aangehaalde feit aan het licht, dat de door KÖNIG opgestelde kleurvergelijkingen onafhankelijk zijn van de totale licht-energie van het spectrum. Hierbij moeten verblindend groote energie en zeer geringe hoeveelheid energie (in de buurt van de drempelwaarden) uitgesloten worden.

De conclusie, die KÖNIG uit bovenstaande resultaten kon trekken, n.l. dat inderdaad drie elementaire kleuren noodig en voldoende zijn om er alle bestaande kleuren uit op te bou-

wen, berusten geheel op experimenteele onderzoeken, zonder dat er eenige theorie aan ten grondslag gelegd is.

Om nu over te gaan van de elementaire kleuren naar de *theoretische grondkleuren*, heeft KÖNIG verband tusschen deze beide gezocht. Hij heeft zulk een verband gevonden, uitgaande van de onderstelling, dat de twee grondkleurkrommen van dichromaten ¹⁾ identiek moeten zijn aan twee van de drie grondkleurkrommen der trichromaten. Identiek moet *cum grano salis* worden opgevat, daar ieder oog kleine persoonlijke afwijkingen vertoont ten opzichte van een gemiddelde kromme.

Hij stelt dus iedere elementaire kleur voor door een homogene lineaire functie van de drie grondkleuren en bepaalt de coëfficiënten uit bovengenoemde onderstelling; zoo goed en zoo kwaad als dit ging, daar deze voorwaarde niet voldoende was om alle coëfficiënten te leveren.

Hiermede construeert KÖNIG nu de *drie grondkleurkrommen* in het zonnenspectrum. Zie Fig. II.

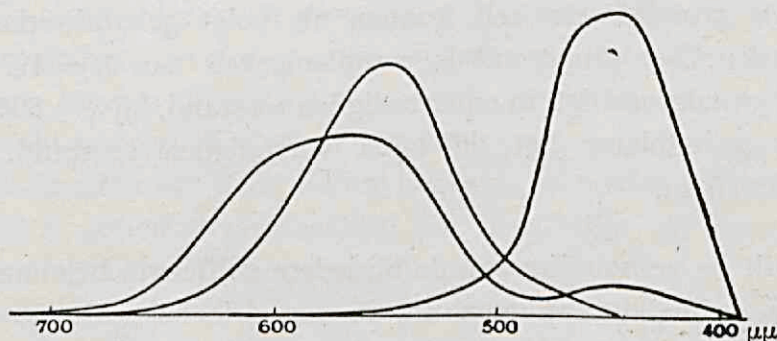


FIG. II

Deze krommen geven dus de drie hoeveelheden grondkleur,

¹⁾ Zie blz. 10.

waaruit licht van een zekere golflengte λ opgebouwd kan worden gedacht, dus de drie hoeveelheden werkzame energie, die dat licht in ons oog opwekt. In onze notatie geven dus de ordinaten de waarden van

$$\rho_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}, \quad \gamma_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \quad \text{en} \quad \beta_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}$$

in onbekende eenheden.

De verhouding dier eenheden is zoo gekozen dat

$$\rho_w = \gamma_w = \beta_w$$

Nu is uit onderzoeken van EXNER¹⁾ gebleken, dat de aldus door KÖNIG gekozen eenheden zich verhouden als de drempelwaarden r , g en b .

De ordinaten van de drie grondkleurkrommen verhouden zich dus als

$$\frac{\rho_{\lambda}}{r} : \frac{\gamma_{\lambda}}{g} : \frac{\beta_{\lambda}}{b}$$

Opmerking:

De grondkleuren zelf kunnen als volgt gekarakteriseerd worden: het grondrood is complementair aan $\lambda = 497 \mu\mu$, het grondgroen ligt, in onverzadigden toestand, bij $\lambda = 505 \mu\mu$, het grondblauw ligt, in bijna verzadigden toestand, bij $\lambda = 470 \mu\mu$.

Uit de verhouding van de bij iedere golflengte behorende drie ordinaten kan men nu, in een driehoek, die de drie grondkleuren tot hoekpunten heeft, de kromme, die het spectrum van zonlicht karakteriseert, construeeren.

¹⁾ Zie blz. 35.

2 — ONDERZOEKINGEN VAN F. EXNER

A — Een onderzoek over de grondkleuren

F. EXNER¹⁾ heeft getracht de keuze van de hierboven besproken grondkleuren van KÖNIG te toetsen aan uitkomsten, te verkrijgen volgens een, van die van KÖNIG volkomen onafhankelijke, methode. Deze berust op het „verschijnsel van BEZOLD-BRÜCKE”, dat men als volgt kan beschrijven. Wanneer men een spectrum steeds zwakker maakt, komt er een oogenblik, waarop van de groote verscheidenheid der kleuren slechts drie kleuren zijn overgebleven, n.l. rood, groen en blauw. Deze hebben zich over een steeds grooter gedeelte van het spectrum uitgebreid, en grenzen ten slotte aan elkaar. Dit verschijnsel wordt begrijpelijk, indien men veronderstelt, dat in het roode gedeelte de blauwe en groene bestanddeelen, waaruit, met het rood, de kleur van de beschouwde golflengten was opgebouwd, onder de drempelwaarde zijn gezonken. Alleen het grondrood is overgebleven; en evenzoo in de andere gedeelten grondgroen en grondblauw.

De golflengten der grenzen tusschen de verschillende gebieden konden door EXNER met vrij groote nauwkeurigheid bepaald worden. Zij bleken zóó nabij overeen te komen met de snijpunten der door KÖNIG bepaalde grondkleurkrommen, dat men, gezien de onzekerheid der bepalingen, de overeenstemming als volkomen mag beschouwen.

EXNER concludeerde hieruit, dat de onderstelling, die KÖNIG gemaakt heeft om de grondkleuren uit de elementaire kleuren te bepalen, de juiste is geweest.

¹⁾ F. EXNER, Über die Grundempfindungen im YOUNG-HELMHOLTZschen Farbensystem. Sitzungs-Berichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. **111**. 857. (1902).

In onze notatie kunnen wij het verschijnsel van BEZOLD-BRÜCKE als volgt beschrijven.

Volgens hoofdstuk II blz. 4 zal in het golflengte-gebied waar

$$\frac{\rho}{r} > \frac{\gamma}{g} \text{ en } \frac{\rho}{r} > \frac{\beta}{b}$$

is, bij het zwakker worden van de energie op een zeker oogenblik

$$\gamma \leq \frac{g}{\epsilon} \text{ en } \beta \leq \frac{b}{\epsilon}$$

zijn geworden, terwijl nog

$$\rho > \frac{r}{\epsilon}$$

is.

De lichtindruk, dien het oog ontvangt, is dan alleen die van het grondrood $\rho\epsilon$.

In het gebied, waar $\frac{\gamma}{g} > \frac{\rho}{r}$ en $\frac{\gamma}{g} > \frac{\beta}{b}$ is, verkrijgt men, volgens dezelfde redeneering, bij verzwakking van de energie, een oogenblik, waarop men alleen het grondgroen ziet.

De grens tusschen beide gebieden is de golflengte, waar

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\gamma}{g}$$

Nu EXNER heeft gevonden, dat deze grenspunten dezelfde zijn als de snijpunten van de grondkleur-krommen van KÖNIG, heeft deze dus blijkbaar de verhouding van de eenheden, waarin de hoeveelheden grondkleur uitgedrukt worden, gekozen als die van r , g en b .

De verhouding van de drie ordinaten in de grondkleurkrommen geeft dus voor iedere golflengte de verhouding

$$\frac{\rho_{\lambda}}{r} : \frac{\gamma_{\lambda}}{g} : \frac{\beta_{\lambda}}{b}$$

Voor *wit* licht waren de drie ordinaten aan elkaar gelijk en dus blijkt

$$\rho_w : \gamma_w : \beta_w : = r : g : b \quad (13)$$

te zijn.

B — Exner's onderzoek betreffende de helderheid van kleuren

Bij zijn onderzoek betreffende de helderheid van verschillende kleuren¹⁾ heeft EXNER een grootheid bepaald, die eigen bleek aan iedere bepaalde kleur en die hij „Weiszwert” of helderheid noemde. Aangezien wij in de vorige hoofdstukken het begrip helderheid geformuleerd hebben (zie verg. (8)) is het van belang na te gaan of wij onder het woord helderheid hetzelfde verstaan als EXNER en zoo niet, welke beteekenis dan gehecht moet worden aan de, door hem ingevoerde, grootheid.

EXNER geeft de volgende definitie:

„Wurde eine Steigerung der Helligkeit durch einen Sectorwinkel α der Zusatzfarbe hervorgebracht, so kann dieselbe „Helligkeitssteigerung auch durch einen Weiszsector vom Winkel β erreicht werden; der Quotient β/α ist das, was wir die Helligkeit, oder den Weiszwert der Zusatzfarbe „nennen.”

Dit kan ons nog geen antwoord geven op de gestelde

¹⁾ F. EXNER, Einige Versuche und Bemerkungen zur Farbenlehre. Sitzungs-Berichte der Akad. der Wiss. in Wien. IIa. 127. 1829. (1918)

vraag. Dit moeten wij trachten te vinden door de methode volgens welke hij de waarde van den „Weiszwert” voor de verschillende kleuren bepaald heeft, na te gaan.

Volgens de meeste onderzoekers is een directe helderheidsvergelijking van twee verschillende kleuren zeer bezwaarlijk, zoo niet onmogelijk, uit te voeren ¹⁾. Ook EXNER is deze meening toegedaan en heeft daarom een methode ontwikkeld, waarbij deze moeilijkheid ontweken wordt.

Hij maakt hiertoe twee mengsels van de te onderzoeken kleur met wit, zoodat ze onderling slechts weinig verschillen en wel alleen in verzadiging en hij bepaalt polarimetrisch in welke verhouding de lichtenergie van het mengsel, dat den grootsten helderheidsindruk maakt, verzwakt moet worden, opdat beide mengsels ononderscheidbaar zijn geworden. Essentieel hierbij is dus, dat hij beide mengsels zoo weinig verschillend neemt, dat het steeds mogelijk is, door een energieverandering alleen, het verschil voor het oog op te heffen.

EXNER bedient zich bij zijn proeven van gekleurde papieren, zooals die door het instituut van HERING zijn uitgegeven, en plakt deze op een, bij tal van optische onderzoekingen gebruikte, kleurenschijf. Dit is een schijf, waarop het gekleurde en het witte papier in sectoren van de gewenschte verhouding geplakt worden. Door de schijf te verdeelen in concentrische ringen, kan men op dezelfde schijf een aantal verschillende mengsels samenstellen. De schijf wordt nu in zulk een snelle rotatie gebracht, dat men de kleuren niet meer afzonderlijk kan onderscheiden, maar slechts mengsels ziet.

Laten nu de beide mengsels gekarakteriseerd worden door

$$W_1 + F_1 \quad \text{en} \quad W_2 + F_2$$

¹⁾ Op blz. 59 zullen wij zien, dat de mogelijkheid wel bestaat.

waarin W voorstelt het aantal graden van den witten sector, en F dat van den gekleurden sector, terwijl

$$W_1 - W_2 = F_2 - F_1 = 0$$

klein is.

Indien nu x , de Weiszwert van de onderzochte kleur, de verhouding van de helderheid van één graad van den gekleurden sector tot één graad van den witten is, dan stelt

$$\frac{W_1 + xF_1}{W_2 + xF_2}$$

de *verhouding van de helderheden* der beide mengsels voor.

EXNER vergelijkt beide mengsels in zijn polarimeter. De *energieverhouding* van de beide velden hierin, wordt door draaiïng van een oculair met nicol over een hoek α in reden van $\text{tg}^2 \alpha$ veranderd. Hij bepaalt nu den hoek α zoo, dat beide mengsels ononderscheidbaar zijn geworden.

En op het oogenblik waarop EXNER

$$\frac{W_1 + x F_1}{W_2 + x F_2} = \text{tg}^2 \alpha \quad (14)$$

stelt, *stelt hij dus een helderheidsverhouding a priori identiek aan een energieverhouding.*

Indien hij later het bestaan van het verschijnsel van PURKINJE loochent, aangezien hem gebleken is, dat de helderheid evenredig met de energie verloopt, dan hebben wij hier op de plaats gewezen, waar hij deze evenredigheid bij definitie reeds in zijn beschouwingen heeft neergelegd.

Nu wij aangetoond hebben, dat EXNER met den Weiszwert uit verg. (14) bepaald, niet de helderheid meet, zooals wij

deze gedefinieerd en geformuleerd hebben, vragen wij ons af, wat dan wel de beteekenis van dezen Weiszwert kan zijn.

Wij noemen de energie, waarmede de schijf per graad bestraald wordt, ε . Laat het witte papier hiervan zooveel reflecteeren, dat de werkzame energie in de drie resonatoren ten gevolge van één graad wit

$$\rho_w \varepsilon, \gamma_w \varepsilon, \beta_w \varepsilon$$

bedraagt, terwijl die van één graad gekleurd papier,

$$\rho_F \varepsilon, \gamma_F \varepsilon, \beta_F \varepsilon$$

is.

De werkzame energiehoeveelheden van het eerste mengsel zijn dan:

$$\begin{aligned} \rho_1 \varepsilon &= W_1 \rho_w \varepsilon + F_1 \rho_F \varepsilon \\ \gamma_1 \varepsilon &= W_1 \gamma_w \varepsilon + F_1 \gamma_F \varepsilon \\ \beta_1 \varepsilon &= W_1 \beta_w \varepsilon + F_1 \beta_F \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

Die van het tweede mengsel, nadat deze in den polarimeter verzwakt zijn, zijn:

$$\begin{aligned} \rho_2 \varepsilon &= (W_2 \rho_w \varepsilon + F_2 \rho_F \varepsilon) \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \gamma_2 \varepsilon &= (W_2 \gamma_w \varepsilon + F_2 \gamma_F \varepsilon) \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \beta_2 \varepsilon &= (W_2 \beta_w \varepsilon + F_2 \beta_F \varepsilon) \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

De volgens de beide vergelijkingen (15) en (16) samengestelde werkzame energieën geven dus aan het oog lichtindrukken, die noch in kleur noch in helderheid van elkaar te onderscheiden zijn.

Waren beide mengsels strikt aan elkaar gelijk, dan zou tegelijkertijd:

$$\rho_1 = \rho_2; \gamma_1 = \gamma_2; \beta_1 = \beta_2; \rho_1 + \gamma_1 + \beta_1 = \rho_2 + \gamma_2 + \beta_2$$

zijn. Dit is echter niet het geval, daar EXNER van twee verschil-

lende mengsels is uitgegaan. Hij moet dus op één van die vier gelijkheden hebben ingesteld. Welke van die vier is echter niet uit te maken, daar ze, als ϑ maar klein genoeg is, alle vier aanleiding geven tot waarden van $\text{tg}^2\alpha$, die onderling weinig verschillen. Dit blijkt, wanneer wij $\text{tg}^2\alpha$ als: $1 + \vartheta \left(\frac{1 - x}{W_2 + xF_2} \right)$ schrijven. Als $\vartheta < 4^\circ$ is, geven de vier verschillende beteekenissen, die men aan x kan toekennen, waarden aan $\text{tg}^2\alpha$, waarvan de verschillen binnen de waarnemingsonzekerheid liggen.

Om voor de hand liggende redenen zal men aan de vierde gelijkheid de voorkeur geven. Uit zijn latere onderzoekingen zal deze keuze blijken de goede te zijn geweest ¹⁾.

Substitueeren wij dus in $\rho_1 + \gamma_1 + \beta_1 = \rho_2 + \gamma_2 + \beta_2$ de waarden uit verg. (15) en (16) en berekenen dan de waarde van x volgens (14), dan blijkt, dat

$$x = \frac{\rho_F + \gamma_F + \beta_F}{\rho_W + \gamma_W + \beta_W}. \quad (17)$$

Uit EXNERS methode om den Weiszwert te bepalen, volgt dus dat daaraan de volgende beteekenis moet worden gehecht:

De Weiszwert van een kleur is de verhouding van de werkzame energie van één graad van die kleur tot die van één graad wit.

In het onderzoek, waarop wij boven doelden, is op fraaie wijze door EXNER van de invoering van het begrip Weiszwert gebruik gemaakt ²⁾. Hij bepaalt hiermede de verhou-

¹⁾ Zie blz. 43.

²⁾ F. EXNER, Zur Kenntnis der Grundempfindungen im Helmholtz'schen Farbensystem. Sitz. Ber. der Ak. der Wiss. Wien. IIa 129. 27. (1920).

ding van de hoeveelheden grondrood, grondgroen en grondblauw waaruit men wit licht opgebouwd kan denken.

Hij stelt, op de kleurenschijf, uit een mengsel van rood, groen en blauw, welke kleuren zóó gekozen zijn, dat ze alleen door geringere verzaadiging van de grondkleuren verschillen, wit licht samen. Ter vergelijking maakt hij wit van dezelfde helderheid uit een mengsel van zwart en wit papier. Hij vindt de benodigde verhouding dus in graden van de sectoren, die hij met de verschillende gekleurde papieren moet beplakken.

Deze verhouding is echter niet de verhouding van de drie grondkleuren, die in wit aanwezig zijn, daar ieder van de gebruikte kleuren, in een zekere onbekende verhouding, wit bevat. Om deze hoeveelheden wit te meten, vergeleek hij in een spectrophotometer voor iedere golflengte de hoeveelheid energie die door een even groot oppervlak van het gekleurde en van het witte papier werd teruggekaatst. Met behulp van deze energieverhouding kon EXNER uit de door KÖNIG opgestelde grondkleurkrommen voor wit licht de grondkleurkrommen voor de kleur, die hij onderzocht, opmaken. Aangezien de gekozen kleuren alleen door geringere verzaadiging afweken van de grondkleur, moesten twee der inhoud en onderling gelijk en kleiner dan de derde zijn. Het drievoud van dien kleinsten inhoud, gedeeld door den totalen inhoud van de grondkleurkrommen van wit licht, geeft dan de verhouding, waarin de onderzochte kleur wit bevat.

Vervolgens wordt de Weiszwert van de onderzochte kleur bepaald.

Het verschil van beide is de Weiszwert van de zuivere grondkleur.

EXNER vermenigvuldigt nu elk van deze drie waarden met het aantal graden van den hoek waarbij hij de kleuren tot wit gemengd heeft, en vindt daarmede, op grond van zijn eigen definitie, de verhouding van de helderheid der drie grondkleuren, die samen wit vormen.

De uitkomsten der metingen zijn opgenomen in de volgende tabel.

Papier	Mengver- houding	Weisz- wert	Verhou- ding wit	Vershil	Product v/d 2e en 5e kolom
rood	127°.1	0.420	0.287	0.133	16.90
groen	193°.6	0.450	0.384	0.066	12.78
blauw	39°.2	0.120	0.110	0.010	0.39

De bedoelde verhouding bleek dus te zijn

$$16.90 : 12.78 : 0.39$$

$$= 43.33 : 32.76 : 1.00$$

Om deze uitkomst te contrôleeren, werden de grondkleurkrommen van KÖNIG zóó geteekend, dat hare inhouden bovenstaande verhouding hadden. Voor eenige golflengten werden nu de drie ordinaten bij elkaar opgeteld. Deze som moet in een constante verhouding staan tot den Weiszwert van het licht van de beschouwde golflengte. Dit bleek inderdaad binnen de grenzen der waarnemingsfouten het geval te zijn. Wel moest EXNER, om goede overeenstemming te verkrijgen, de krommen van KÖNIG iets veranderen, maar dit is begrijpelijk, daar deze voor het oog van KÖNIG gelden, terwijl de Weiszwert-bepalingen der verschillende golflengten met EXNER's oog waren geschied.

Dit resultaat geeft vertrouwen in de gebruikte methode om den Weiszwert te bepalen, welke methode ons, in verband met hetgeen wij op blz. 39 opmerkten, tamelijk ongevoelig scheen.

Wij zullen er nu toe overgaan, dit onderzoek van EXNER te beoordeelen aan de hand van onze notaties en de door ons veranderde beteekenis van het begrip Weiszwert.

De inhouden van de drie grondkleurkrommen, die hij voor de onderzochte kleur F opmaakte, verhouden zich (zie blz. 32) als

$$\frac{\rho_F}{r} : \frac{\gamma_F}{g} : \frac{\beta_F}{b}$$

Bij het roode papier bleek dat

$$\frac{\gamma_F}{g} = \frac{\beta_F}{b}$$

was. Indien

$$\frac{\rho'_F}{r} = \frac{\gamma_F}{g}$$

is het percentage wit in de onderzochte kleur voor te stellen door:

$$p = \frac{\rho'_F + \gamma_F + \beta_F}{\rho_w + \gamma_w + \beta_w}$$

De Weiszwert van diezelfde kleur is

$$x = \frac{\rho_F + \gamma_F + \beta_F}{\rho_w + \gamma_w + \beta_w}$$

Het verschil $\frac{\rho_F - \rho'_F}{\rho_w + \gamma_w + \beta_w} = \frac{\rho_R}{\rho_w + \gamma_w + \beta_w}$ is de Weisz-

wert, dus de werkzame energie van de hoeveelheid grondrood, die één graad van de onderzochte kleur bevat, in verhouding tot de werkzame energie van één graad wit papier.

R graden onderzochte kleur bevatten dus R maal zooveel roode werkzame energie.

Op dezelfde wijze berekent EXNER uit het product van

$$\frac{\gamma_G}{\rho_w + \gamma_w + \beta_w} \times G^\circ$$

de hoeveelheid groene werkzame energie en uit

$$\frac{\beta_B}{\rho_w + \gamma_w + \beta_w} \times B^\circ$$

de hoeveelheid blauwe werkzame energie, die te samen met de berekende hoeveelheid roode werkzame energie wit vormen.

Uit EXNER's onderzoeken volgt dus, dat

$$\rho_w : \gamma_w : \beta_w = 43.33 : 32.76 : 1.00 \quad (18)$$

Wij hebben bij het genoemde onderzoek eenigszins uitvoerig stilgestaan omdat, behalve dat de verkregen resultaten van belang zijn, dit er bovendien op wijst, dat van de op blz. 39 genoemde vier interpretaties van het begrip Weiszwert de door ons gekozen de eenige mogelijke is. Hadden wij n.l. EXNER's Weiszwert als

$$x = \frac{\rho_F}{\rho_w}$$

willen interpreteren, hetgeen in verband met de wel verkondigde meening, dat de helderheidsindruk in hoofdzaak door het roodgehalte in een kleur veroorzaakt wordt, denkbaar ware geweest, dan zou de Weiszwert voor het grondgroen en het grondblauw nul hebben moeten zijn, welke waarde door EXNER niet gevonden is.

*C — Exner's onderzoekingen over het verschijnsel
van Purkinje¹⁾*

Aangezien EXNER den Weiszwert ook den naam helderheid gaf en hij voor den Weiszwert eener kleur een waarde vond, onafhankelijk van de energie, waarbij deze bepaald werd, concludeerde hij hieruit, dat de helderheid eener kleur niet verandert met de energie en dat dus het verschijnsel van PURKINJE, zooals wij dat sub 2 (blz. 2) genoemd hebben, niet aanwezig is. De uitkomsten van KÖNIG, die wèl op een dergelijke afhankelijkheid wezen, schuift hij op rekening van de „Brillanz” der kleur, welke een juiste schatting van de helderheid van verschillende kleuren zou beletten.

Dit komt ons voor slechts woordenspel te zijn. Immers, of men aan een hoeveelheid lichtenergie van zekere kleur een constante grootheid, (die men met den naam helderheid bestempelt), plus een grootheid („Brillanz”), die met de energie verandert, toekent, dan wel of men deze beide grootheden samen helderheid noemt, (die dan wèl varieert met de energie) komt in het wezen van de zaak op hetzelfde neer.

Ook langs een meer directen weg tracht EXNER nog het bestaan van het verschijnsel van PURKINJE na te vorschen. Deze methode berust waarschijnlijk op een vergissing.

Hij stelt daartoe op een kleurenschijf een mengsel van φ° rood en $360-\varphi^\circ$ zwart samen en een tweede mengsel van ψ° rood en $360-\psi^\circ$ zwart. Bovendien maakt hij het verschil tusschen beide mengsels grooter, door ze met verschillende, bekende, hoeveelheden energie, ε_1 en ε_2 , te be-

¹⁾ F. EXNER. Zur Kenntnis des Purkinje'schen Phenomens. Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien. IIa, 128, 71 (1919).

stralen. De hoeveelheden lichtenergie, die het oog van beide mengsels opvangt, verhouden zich dus als

$$\varphi\varepsilon_1 \text{ tot } \psi\varepsilon_2$$

Volgens het verschijnsel van PURKINJE is bij dezelfde energievermeerdering de helderheidstoename voor rood anders dan voor blauw. De helderheid is dus niet evenredig met de energie, zoodat de helderheidsverhouding dier beide mengsels niet gelijk aan hun energieverhouding $\frac{\varphi\varepsilon_1}{\psi\varepsilon_2}$ is. Om nu na te gaan of deze ongelijkheid al dan niet bestaat, wil EXNER deze helderheidsverhouding meten, maar hij gebruikt hiervoor zijn polarimeter, waarin hij slechts energieverhoudingen meten kan. Dat hij hierbij dezelfde waarden vindt, bewijst niets omtrent het al of niet bestaan van het verschijnsel van PURKINJE.

Hiermede gelooven wij voldoende aangetoond te hebben, dat op deze gronden het verschijnsel van PURKINJE niet ontkend mag worden en gaan wij over tot de onderzoekingen van anderen over dit verschijnsel.

3 — KÖNIG'S METINGEN OVER HET VERSCHIJNSEL VAN PURKINJE

KÖNIG ¹⁾ heeft in 1891 metingen over het verschijnsel van PURKINJE gepubliceerd. Wij zullen in dit hoofdstuk nagaan of zijn resultaten overeenstemmen met wat uit de door ons opgestelde theorie verwacht mocht worden. Ingeval

¹⁾ A. KÖNIG. Ueber den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. Ges. Abh. zur Physiol. Optik. XX. Leipzig. 1903.

van overeenstemming zullen wij trachten uit de genoemde metingen eenige getallenwaarden voor de door ons ingevoerde grootheden te verkrijgen.

Wij moeten daartoe aanvangen met een kort overzicht van KÖNIG's methode van onderzoek.

Hij koos in een gaslichtspectrum, verkregen met een spleet van bepaalde breedte, de helderheid van het golflengtegebied 535μ als vergelijkingsobject en onderzocht, met behulp van een tweede spectrum, welke spleetbreedte hij voor andere gebieden moest instellen, om daarvan eenzelfde helderheidsindruk te krijgen. Dit is buitengewoon lastig te constateeren en pas na veel oefening verkrijgt men eenige zekerheid in de schattingen. Waar een verandering van de spleetbreedte alleen niet meer gebruikt mocht worden, daar anders het onderzochte licht niet meer voldoende monochromatisch zou zijn, heeft hij andere middelen gebezigd, om de energie meetbaar te versterken, en daarna deze veranderingen omgerekend tot de theoretische spleetbreedten, waaruit ze konden worden beschouwd te zijn ontstaan. Wij zullen de bijzonderheden van deze werkwijze in het midden laten en ook het door hem gebruikte toestel niet beschrijven, daar dit in zijn eigen publicatie uitvoerig is geschied. Genoeg zij het te vermelden, dat hij er in slaagde een reeks „gelijkwaardige spleetbreedten” te verkrijgen voor verschillende golflengten. Hij herhaalde deze metingen telkens bij een andere energie van 535μ .

In tabel I geven wij eenige van zijn uitkomsten. In de kolommen 2—9 vindt men, telkens voor een andere energie van 535μ , de gelijkwaardige spleetbreedte s_{λ} voor de verschillende golflengtegebieden aangegeven.

TABEL I

$\mu\mu$	A	B	C	D	F	F	G	H
650	87.57	13.86	5.978	1.948	0.991	0.667	0.547	0.420
605	8.600	4.291	2.073	0.869	0.451	0.321	0.289	0.274
555	1.232	1.069	1.037	0.876	0.702	0.621	0.603	0.590
535	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
490	2.996	3.057	3.332	4.934	7.971	8.91	9.53	10.06
470	6.486	7.220	7.748	11.033	20.71	22.95	26.65	
430	115.4	85.90	119.2	137.9	150.8			

Gelijkwaardige spleetbreedten S_λ , uitgedrukt in die voor $535\mu\mu$ als eenheid

De energie van $535 \mu\mu$ in geval A, welke wij met ϵ_A aanduiden, was zóó klein dat er bijna geen kleuren meer in het spectrum te onderscheiden waren. De energie van $535 \mu\mu$ in geval B is $2^4 \times \epsilon_A$ en die voor de gevallen C—H resp. 2^8 , 2^{10} , 2^{12} , 2^{14} , 2^{16} en 2^{18} maal ϵ_A .

In deze getallenwaarden is het verschijnsel van PURKINJE duidelijk aanwezig. Het zou n.l. doen verwachten, dat de gebieden, die meer grondrood bevatten dan $535\mu\mu$, bij een vergroting van de energie sneller helderder worden dan $535\mu\mu$ en dus een telkens kleinere spleetbreedte nodig hebben voor een gelijken helderheidsindruk, en dat voor de gebieden met een kleinere roodresonantie dan $535\mu\mu$, de benoodigde spleetbreedte steeds groter zou zijn.

De in de drie bovenste rijen afdalende, in de drie onderste rijen opklimmende getallen in de tabel van KÖNIG bevestigen deze verwachting.

Deze getallenwaarden gelden nu voor het speciale geval van een gaslichtspectrum, met bepaalde dispersie verkregen.

Om ze hiervan onafhankelijk te maken moeten wij ze zoodanig reduceeren, dat over het geheele spectrum de eenheid van spleetbreedte eenzelfde hoeveelheid energie vertegenwoordigt. KÖNIG heeft de energieverdeeling in het door hem gebruikte spectrum medegedeeld (zie tabel II), waardoor wij gelegenheid hadden de „gelijkwaardige spleetbreedten” s_λ tot gelijkwaardige energiehoeveelheden” p_λ , om te rekenen. Wij hebben deze uitgedrukt in ϵ_A als eenheid en de logaritmen hiervan in tabel III gegeven.

TABEL II

$\mu\mu$	650	605	555	535	490	470	430
	8.88	3.99	1.48	1.00	0.370	0.251	0.114

Energieverdeling in het spectrum van gaslicht

TABEL III

$\mu\mu$	A	B	C	D	E	F	G	H
650	2.89	3.29	4.13	4.25	4.56	4.99	5.50	5.99
605	1.53	2.44	3.33	3.55	3.87	4.32	4.88	5.46
555	0.26	1.41	2.59	3.12	3.63	4.18	4.77	5.36
535	0.00	1.20	2.41	3.01	3.61	4.21	4.82	5.42
490	0.04	1.26	2.50	3.27	4.08	4.73	5.36	5.99
470	0.21	1.46	2.70	3.45	4.23	4.97	5.64	
430	1.12	2.19	3.54	4.21	4.85			

Logarithme van de gelijkwaardige energiehoeveelheden in ϵ_A als eenheid

Hiermede hebben wij alle gegevens verzameld, om onze theorie te kunnen toetsen aan het experiment.

Daartoe vragen wij ons af, welk verband er, volgens de door ons in het tweede hoofdstuk ontwikkelde theorie, moet bestaan tusschen de „gelijkwaardige energiehoeveelheden,” dat wil zeggen, tusschen de energiehoeveelheden ϵ_λ der verschillende golflengtegebieden, die denzelfden helderheidsindruk $H_\lambda = H_{535}$ geven.

Volgens de ontwikkeling (12) op blz. 23 is aan deze voorwaarde voldaan als

$$L_\lambda + M_\lambda \lg \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_0} + \frac{1}{2} N_\lambda \left(\lg \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_0} \right)^2 \dots = L_{535} + M_{535} \lg \frac{\epsilon_{535}}{\epsilon_0} + \frac{1}{2} N_{535} \left(\lg \frac{\epsilon_{535}}{\epsilon_0} \right)^2 \dots \quad (19)$$

Hierin zijn, zooals wij zagen, L , M en N functies van de kleur van het licht, en van de kleine grootheden φ , χ en ψ , die verband houden met de gevoeligheid van het oog voor de drie grondkleuren. De coëfficiënt N , die de tweede machten van φ , χ en ψ bevat, is reeds een zeer klein getal en voordat wij de reeksontwikkeling verder voortzetten, willen wij eerst nagaan of de boven gegeven formuleering wellicht reeds voldoende rekenschap van de uitkomsten van KÖNIG kan geven.

$$\text{Indien wij } \lg \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_0} \text{ door } \lg \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_A} + \lg \frac{\epsilon_A}{\epsilon_0} = \lg \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_A} + f \text{ vervangen} \quad (20)$$

en verder Briggsche logarithmen invoeren, $\log e = m$ noemend, dan gaat (19) over in

$$\left(L_\lambda + \frac{M_\lambda}{m} f + \frac{1}{2} \frac{N_\lambda}{m^2} f^2 \right) + \left(\frac{M_\lambda}{m} + \frac{N_\lambda}{m^2} f \right) \log \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_A} + \frac{1}{2} \frac{N_\lambda}{m^2} \left(\log \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_A} \right)^2 = \left(L_{535} + \frac{M_{535}}{m} f + \frac{1}{2} \frac{N_{535}}{m^2} f^2 \right) + \left(\frac{M_{535}}{m} + \frac{N_{535}}{m^2} f \right) \log \frac{\epsilon_{535}}{\epsilon_A} + \frac{1}{2} \frac{N_{535}}{m^2} \left(\log \frac{\epsilon_{535}}{\epsilon_A} \right)^2 \quad (21)$$

Stelt men:

$$\begin{aligned} \log \frac{\varepsilon_{535}}{\varepsilon_A} &= \xi & \frac{M_{535}}{m} + \frac{N_{535}}{m^2} f &= D & \frac{N_{535}}{m^2} &= A \\ \log \frac{\varepsilon_\lambda}{\varepsilon_A} &= \eta & \frac{M_\lambda}{m} + \frac{N_\lambda}{m^2} f &= E & \frac{N_\lambda}{m^2} &= C \end{aligned} \quad (22)$$

$$2\left(L_{535} + \frac{M_{535}}{m} f + \frac{1}{2} \frac{N_{535}}{m^2} f\right) - 2\left(L_\lambda + \frac{M_\lambda}{m} f + \frac{1}{2} \frac{N_\lambda}{m^2} f\right) = F$$

dan krijgt de vergelijking den vorm

$$A\xi^2 - C\eta^2 + 2D\xi - 2E\eta + F = 0 \quad (23)$$

Daar, zooals uit de beteekenis van N in (11) blijkt, de coëfficiënten A en C positief zijn, is (23) de vergelijking van een hyperbool, waarvan het middelpunt tot coördinaten heeft:

$$\xi_m = -\frac{D}{A}, \quad \eta_m = -\frac{E}{C} \quad (24)$$

Daar A en D alleen afhankelijk zijn van de kleur van $535\mu\mu$ en dus constant zijn, bepalen de vergelijkingen (23) voor de verschillende golflengten een stelsel hyperbolen, welker middelpunten en toppen op de lijn

$$\xi = -\frac{D}{A}$$

liggen.

In Fig. III en IV hebben wij de, aan Tabel III ontleende, coördinaten ξ en η tegen elkaar afgezet. Het bleek inderdaad mogelijk, door de zoo verkregen punten hyperbolen, voldoende aan de boven gevonden eischen, te trekken.

Hiermede is dus aangetoond, dat de uitkomsten van de proeven van KÖNIG de door ons in het tweede hoofdstuk ont-

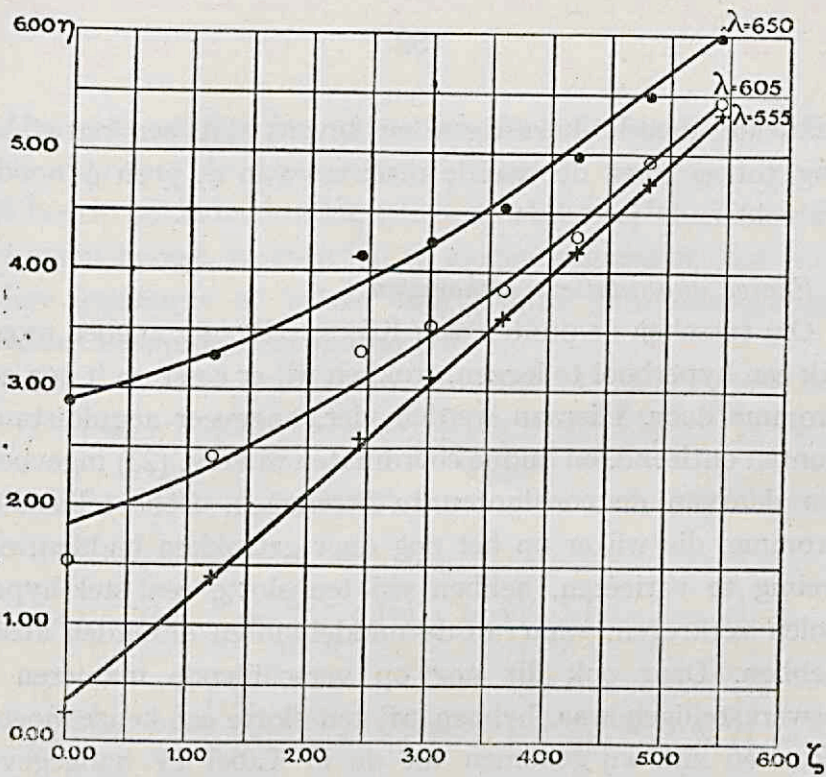


FIG. III

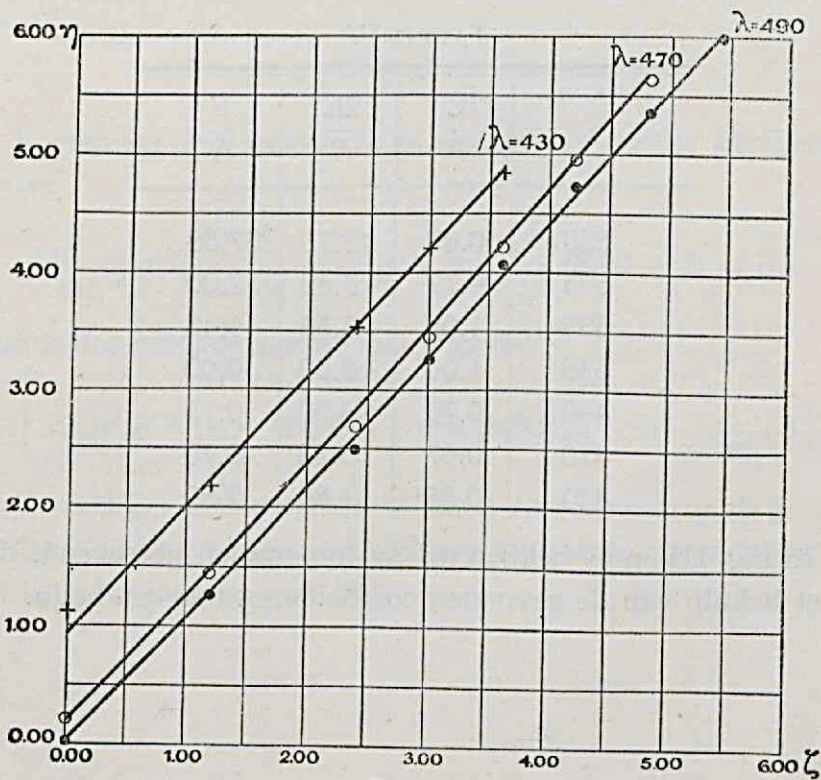


FIG. IV

wikkelde theorie bevestigen en tevens dat een ontwikkeling tot en met de tweede machten van φ , χ en ψ noodig en voldoende is.

Eenige quantitative uitkomsten

Om tusschen de punten van KÖNIG telkens zoo goed mogelijk een hyperbool te leggen, trokken wij er eerst op 't oog een kromme door. Hieraan werden vier, ongeveer aequidistante punten ontleend, en hunne coördinaten in verg. (23) ingevoerd om daarvan de constanten te berekenen. Door telkens de kromme, die wij er op het oog door getrokken hadden, een weinig te varieeren, hebben wij ten slotte een stel hyperbolen verkregen, waarvan de middelpunten dezelfde abscis hebben. Daar ook dit nog op verschillende manieren te bewerkstelligen was, hebben wij ten slotte een keuze moeten doen en zijn wij gekomen tot de in Tabel IV aangegeven waarden voor de constanten.

TABEL IV

λ	$\frac{C}{A}$	$\frac{2E}{A}$	$\frac{F}{A}$
650	0.43	11.75	37.58
605	0.79	7.80	17.00
555	1.09	3.55	1.45
535	1.00	3.50	0.00
490	0.75	3.50	0.17
470	0.67	3.22	0.70
430	0.85	1.80	2.50

In Fig. III en IV hebben wij de hyperbolen geteekend, die met behulp van de gevonden coëfficiënten berekend zijn.

De reeksontwikkeling (12) bldz. 23 leidt dus tot overeenstemming met de experimenten. Daar de formulering van het begrip helderheid in het 2de hoofdstuk op plausibele overwegingen berust, meenen wij te mogen aannemen, dat voor iedere golflengte en iedere door KÖNIG gebruikte energie voldaan is aan de voorwaarde (13)

$$-1 < \left[M_{\lambda} - 1 \right] \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2} \left[N_{\lambda} + (M_{\lambda} - 1)^2 \right] \left(\lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \leq +1$$

Voeren wij de notatie (22) in, dan kunnen wij hiervoor schrijven

$$\begin{aligned} -1 < \left[\left(\frac{1}{m} \frac{E}{A} - \frac{1}{m} \frac{C}{A} f \right) N_{535} - 1 \right] \left[\frac{1}{m} \left(\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_A} + f \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{C}{A} N_{535} + \left[\left(\frac{1}{m} \frac{E}{A} - \frac{1}{m} \frac{C}{A} f \right) N_{535} - 1 \right]^2 \right] \left[\frac{1}{m} \left(\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_A} + f \right) \right]^2 \leq +1 \end{aligned}$$

De grootste door KÖNIG gebruikte energie is bepaald door

$$\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_A} = 6.00$$

Voeren wij deze waarde in en noemen wij verder korttheids-halve

$$\frac{f}{m} = g, \quad \frac{1}{m} \frac{E}{A} - \frac{C}{A} g = p, \quad \frac{1}{m} (6.00 + f) = q$$

dan is dus voldaan aan de voorwaarde:

$$-1 < \frac{1}{2} p^2 q^2 N_{535}^2 + (pq + \frac{1}{2} \frac{C}{A} q^2 - pq^2) N_{535} + \frac{1}{2} q^2 - q \leq +1 \quad (25)$$

Hoewel het niet mogelijk is, uit deze voorwaarde de groot-heden N_{535} en g te bepalen, stelt zij ons toch in staat daarvoor plausibele waarden aan te geven.

Wij kunnen voor g een bepaalde waarde aannemen en voor een bepaalde golflengte berekenen welke waarden N_{535} moet hebben, opdat de vorm (25) gelijk aan $+1$ en -1 wordt. Probeeren wij deze gelijk -1 te maken, dan blijkt, dat dit niet mogelijk is voor reële waarden van N_{535} . Wij behoeven dus alleen een gelijkstelling aan $+1$ verder te onderzoeken en bepalen de waarden N_{535} bij eenige onderstellingen voor g . Voor iedere golflengte van Tabel IV vinden wij een kromme, die de bij elkaar behorende waarden van g en N_{535} geeft. Wij geven de krommen voor de beide uiterste golflengten, $430\mu\mu$ en $650\mu\mu$. De mogelijke waarden van N_{535} liggen blijkbaar binnen het gedeelte van het vlak, dat door de krommen van alle golflengten omsloten wordt.

Zie Figuur V.

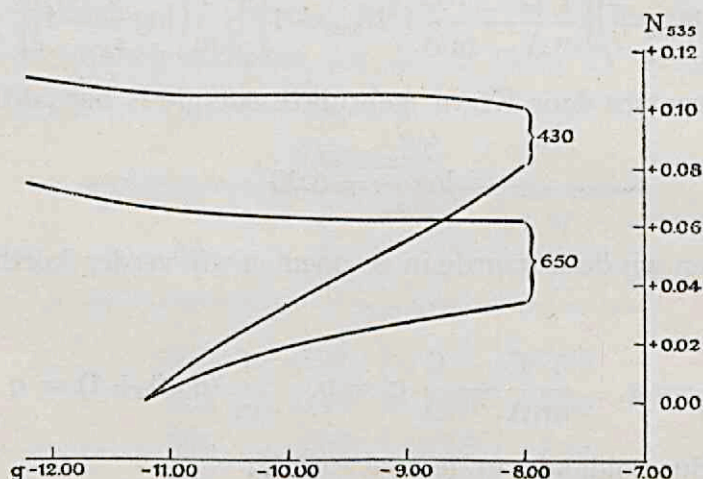


FIG. V

Hoe kleiner g is, voor een des te grooter energie-gebied geldt de voorwaarde (25).

Wij hebben, om een denkbeeld van de grootheden L , M en N te kunnen krijgen, voor N_{535} de aanvankelijk constante

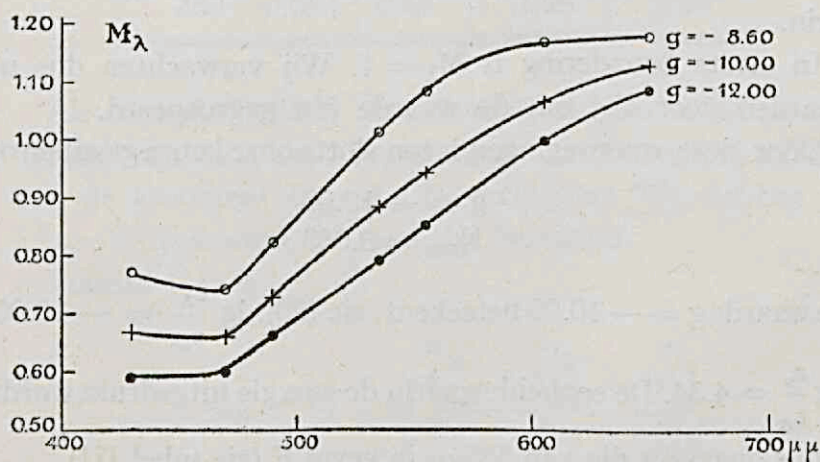
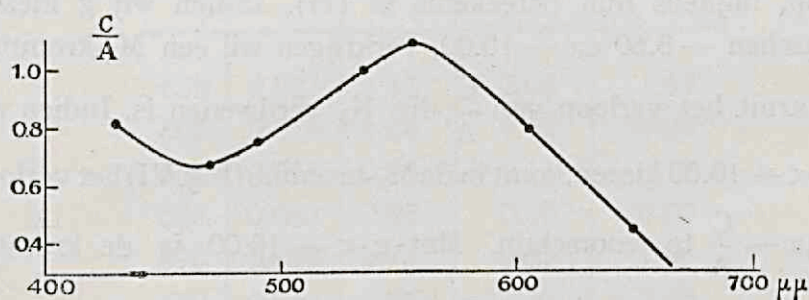
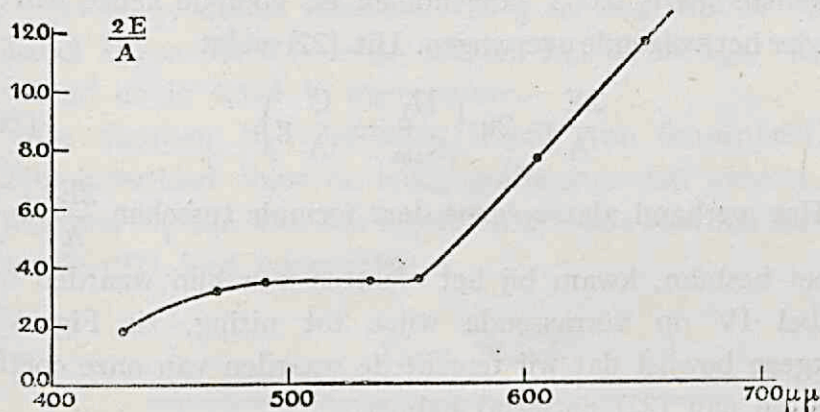


FIG. VI

bovenste grens 0.063 aangenomen en voor de keuze van g verder het volgende overwogen. Uit (22) volgt

$$\frac{2E}{A} = 2m \left(\frac{M_\lambda}{N_{535}} + \frac{C}{A} g \right). \quad (26)$$

Het verband, dat volgens deze formule tusschen $\frac{2E}{A}$ en $\frac{C}{A}$ moet bestaan, kwam bij het afzetten van hun waarden uit Tabel IV op verrassende wijze tot uiting, zie Fig. VI, hetgeen bewijst dat wij terecht de waarden van onze coëfficiënten aan (22) ontleend hebben.

Wij verwachten voor M_λ en N_λ een zeer verschillend verloop, blijkens hun beteekenis in (11). Indien wij g kiezen tusschen -8.60 en -10.00 , verkrijgen wij een M_λ -kromme, waaruit het verloop van $\frac{C}{A}$, dus N_λ verdwenen is. Indien wij $g < -10.00$ kiezen, komt in de M_λ -kromme (Fig. VI) het verloop van $-\frac{C}{A}$ te voorschijn. Met $g < -10.00$ is de kromme dus overgecorrigeerd en deze waarden voor g zijn zeker te klein.

In eerste benadering is $M_\lambda = 1$. Wij verwachten dus nu waarden voor M_λ , om de waarde één gegroepeerd.

Door deze overwegingen is ten slotte onze keuze gevallen op

$$g = -10.00$$

$$N_{535} = 0.063$$

De waarde $g = -10.00$ beteekent, zie (20), $\lg \frac{\epsilon_A}{\epsilon_0} = -10.00$; $\log \frac{\epsilon_0}{\epsilon_A} = 4.34$. De eenheid, waarin de energie uitgedrukt wordt, is dus ongeveer die van $535\mu\mu$ in geval F (zie tabel III).

Met de gevonden waarden voor g en N_{535} hebben wij uit Tabel IV en uit (22) de grootheden N_λ , M_λ en $L_{535} - L_\lambda$ berekend en in tabel V weergegeven.

De waarden M_λ verschillen weinig van de eenheid, en zijn inderdaad voor de lange golflengten het grootst. De waarden N_λ zijn van een lagere orde dan de waarden $M_\lambda - 1$, zooals (22) deed verwachten.

TABEL V

λ	N_λ	M_λ	$L_{535} - L_\lambda$	$L'_{535} - L'_\lambda$
650	0.027	1.12	2.05	1.69
605	0.050	1.06	1.12	0.33
555	0.069	0.94	— 0.11	— 0.13
535	0.063	0.88	0.00	0.00
490	0.047	0.73	0.81	1.86
470	0.043	0.66	1.30	2.33
430	0.054	0.67	1.96	2.84

Als contrôle hebben wij getracht, althans in eerste benadering, een, van het bovenstaande onafhankelijke schatting van de grootheid $L_{535} - L_\lambda$ te verkrijgen. Wij hebben deze $L'_{535} - L'_\lambda$ genoemd, en als volgt berekend.

Volgens (11) is

$$L_{535} - L_\lambda = \lg \frac{\rho_{535}^{R/D} + \gamma_{535}^{G/D} + \rho_{535}^{B/D}}{\rho_\lambda^{R/D} + \gamma_\lambda^{G/D} + \beta_\lambda^{B/D}}$$

Door $\frac{R}{D}$, $\frac{G}{D}$ en $\frac{B}{D}$ gelijk aan één te stellen kunnen wij een eerste benadering hiervan berekenen:

$$L'_{535} - L'_{\lambda} = \lg \frac{\rho_{535} + \gamma_{535} + \beta_{535}}{\rho_{\lambda} + \gamma_{\lambda} + \beta_{\lambda}}$$

Uit de ordinaten van de grondkleurkrommen van KÖNIG (blz. 31), vermenigvuldigd met de coëfficiënten van EXNER, zie (18) en gereduceerd op gelijke energie voor alle golflengten ¹⁾, kunnen wij de waarden van ρ , γ en β berekenen, uitgedrukt in een onbekende eenheid. De waarden voor $L'_{535} - L'_{\lambda}$, die hieruit volgde, hebben wij in de laatste kolom van Tabel V gegeven. De overeenstemming is bevredigend; zij is beter dan wanneer wij voor g de waarde -8.60 hadden aangenomen en de afwijking is in de richting, die men verwachten kan. Dit geeft ons vertrouwen in de gemaakte onderstellingen.

Al geeft tabel V dus niet de juiste waarden voor de door ons in het tweede hoofdstuk ingevoerde coëfficiënten, zoo mogen wij toch wel concludeeren, dat ze zeer plausibel zijn.

Wij besluiten dit hoofdstuk met de volgende conclusies:

1 — de door ons ontworpen theorie heeft recht van bestaan,

2 — tabel V geeft zeer plausibele waarden voor de door ons ingevoerde grootheden,

3 — de heterochrome helderheidsverge-

¹⁾ Wij gebruikten hiertoe de door F. AIGNER gegeven energieverdeling in the zonnenspectrum. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien. IIa 131, 304. Tabel IV.

lijkingen van KÖNIG zijn betrouwbaar, een dergelijke heterochrome vergelijking is dus mogelijk¹⁾ en de helderheid van een kleur is een mathematisch definieerbaar begrip²⁾.

¹⁾ Zie hoofdstuk III, blz. 36.

²⁾ Zie hoofdstuk IV, blz. 63.

HOOFDSTUK IV

UITBREIDING VAN DE KLEURENRUIMTE VAN SCHRÖDINGER

SCHRÖDINGER ¹⁾ heeft een niet-Euclidische kleurenmeetkunde ontwikkeld, zoodanig dat de lengte en de richting der vectoren een maat zijn voor den helderheidsindruk en de kleur van een door de coördinaten bepaalde lichtsoort. Hij legt er sterk den nadruk op, dat hij bij den opbouw hiervan geen rekening gehouden heeft met het verschijnsel van PURKINJE. Daar onze theorie zich juist bezig houdt met de formuleering van dat verschijnsel, kwam het ons gewenscht voor, de „Farbenmetrik” van SCHRÖDINGER in overeenstemming met onze werkhypothese uit te breiden.

Een kort overzicht van de wijze, waarop SCHRÖDINGER zijn kleurenmeetkunde opbouwt, is daartoe noodzakelijk.

Hij merkt allereerst op, dat de kleuren gebleken zijn een verzameling te vormen, waarin de begrippen gelijkheid, optelling en vermenigvuldiging met een getal ondubbelzinnig gedefinieerd zijn, en dat bij normale oogen de verzameling van kleurpunten drie-dimensionaal is. Al deze eigenschappen zijn aangetoond door proeven, die berusten op het constateren van gelijkheid van kleurenmengsels. (Vergelijk b.v. KÖNIG's onderzoeken blz. 30). SCHRÖDINGER neemt als coördinaat-assen de drie grondkleuren van KÖNIG (zie het

¹⁾ E. SCHRÖDINGER, Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. *Annalen der Physik.* **63** 397, 427, 481 (1920).

derde hoofdst. blz. 31) en drukt de coördinaten (x_1 x_2 x_3) in dezelfde eenheden uit, als deze, zoodat de coördinaten van wit licht zich verhouden als 1 : 1 : 1. Het licht van iedere golflengte in het spectrum van zonlicht wordt voorgesteld door een punt in de kleurenruimte, waarvan de coördinaten door KÖNIG bepaald zijn.

Wij wijzen er terloops op, dat deze coördinaten in onze notatie evenredig zijn aan de waarden der drie werkzame energiehoeveelheden, en in zoodanige eenheden zijn uitgedrukt, dat

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\rho\varepsilon}{r} : \frac{\gamma\varepsilon}{g} : \frac{\beta\varepsilon}{b}$$

Ware deze kleurenruimte Euclidisch en werd dus de lengte van den vector gemeten als de wortel uit de som van de quadraten der coördinaten, dan zou de lengte van den vector, dus de helderheidsindruk, tweemaal zoo groot worden, als men de coördinaten, dus de energie van het licht, tweemaal vergrootte. Dit is echter niet in overeenstemming met de waarneming, daar de helderheidsindruk logaritmisch toeneemt met de energie. De kleurenruimte is dus niet-Euclidisch. SCHRÖDINGER tracht nu een kleurenruimte op te bouwen, die aan deze voorwaarde wèl voldoet.

Volgens RIEMANN is de meetkunde voor een driedimensionale puntenverzameling geheel vastgelegd door de coëfficiënten a_{ik} in de uitdrukking voor het lijnelement ds :

$$ds^2 = \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i dx_k \quad (27)$$

Deze coëfficiënten zijn functies van x_1 x_2 x_3 , waarbij

$a_{ik} = a_{ki}$ ¹⁾. SCHRÖDINGER tracht nu deze functies zoodanig te kiezen, dat zij rekenschap geven van de eigenschappen van den helderheidsindruk van het licht.

1 — Indien men alleen de energie van het licht van een zekere kleur verandert, krijgt men wel een anderen helderheids-, doch geen anderen kleur-indruk. Dit wil in de taal der kleurenruimte zeggen, dat, als men een kleurpunt $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ in de richting, bepaald door

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = x_1 : x_2 : x_3$$

laat bewegen, de kleur dezelfde blijft. De kleur wordt dus bepaald door de richting van den vector.

Indien men daarentegen het kleurpunt in een richting, die in Riemannschen zin loodrecht op genoemde richting staat, laat bewegen, dus over het vlakke-element

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_i dx_k = 0 \quad (28)$$

dan kan men dit als een zuivere kleurverandering opvatten, waarbij de helderheid constant blijft.

Indien men het kleurpunt van de plaats, die het nu bereikt heeft, weer langs het daarbij behoorende vlakje van constante helderheid laat gaan en zoo verder, dan beweegt het zich langs een weg van constante helderheid. Wil het begrip helderheid bestaansrecht hebben, dan moet dit kleurpunt na eenige omzwervingen altijd weer in het uitgangspunt terug kunnen komen. Er moet dus een oppervlak van constante helderheid bestaan, m. a. w. het linker lid van verg. (28)

¹⁾ In de Euclidische meetkunde is $a_{ik} = 0$ voor $i \neq k$
en $a_{ik} = 1$ voor $i = k$.

moet, na vermenigvuldiging met een integreerenden factor

$$\mu = f(x_1 x_2 x_3)$$

integreerbaar zijn:

$$\int \mu \sum_i \sum_k a_{ik} x_i dx_k = h \quad (29)$$

Hierin is h een maat voor de helderheid.

De vergelijking $h = \text{constant}$ stelt het oppervlak van constante helderheid voor, dat SCHRÖDINGER met den naam „isolychne” bestempelt.

De integreerbaarheid van (29) legt aan de coëfficiënten a_{ik} zekere voorwaarden op, en het is de vraag of hieraan voldaan wordt, of m. a. w. het begrip helderheid der praktijk een mathematisch definieerbaar begrip is. Om dit te onderzoeken zou men de coëfficiënten a_{ik} voor ieder kleerpunt proefondervindelijk moeten bepalen en dan nagaan of zij aan de gestelde voorwaarden voldoen. Een zoodanig uitgebreid onderzoek is echter ondoenlijk. Daarom heeft SCHRÖDINGER, uit een beperkt aantal proeven dienaangaande, het bestaan van een mathematisch definieerbaar begrip „helderheid” als vaststaand aangenomen¹⁾. Hij wijst er echter nadrukkelijk op, dat dit een *conditio sine qua non* is.

Uit (29) volgt

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \mu \sum_i a_{ik} x_i \quad \text{voor } k = 1, 2, 3 \quad (30)$$

2 — Hij tracht nu op grond van verschillende overwegingen aan de coëfficiënten a_{ik} den waarschijnlijksten vorm te geven, en gaat daarna na of deze aldus verkregen voor-

¹⁾ Naar onze resultaten (zie blz. 59) heeft hij dit terecht gedaan.

stelling in overeenstemming met de ervaring is. Wij zullen de overwegingen, die tot dit doel leiden, in een vorm geven, die van dien van SCHRÖDINGER eenigszins afwijkt.

Als eenvoudigste onderstelling neemt hij aan, dat

$$a_{ik} = 0 \quad \text{voor} \quad i \neq k.$$

Dan wordt

$$ds^2 = \sum_i a_{ii} dx_i^2 \quad (27')$$

$$h = \int \mu \sum_i a_{ii} x_i dx_i \quad (29')$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \mu a_{ii} x_i \quad (30')$$

3 — Vervolgens houdt hij rekening met het volgende ervaringsfeit. Uit de onderzoeken van EXNER (Zie blz. 33) en anderen leidt hij af, dat de helderheid, althans in eerste benadering, een additieve eigenschap der kleuren moet zijn. zoodat, als men uit een aantal even heldere kleuren mengsels van die kleuren twee aan twee maakt, deze mengsels onderling weer even helder zijn. Daar SCHRÖDINGER, zooals reeds gezegd, het verschijnsel van PURKINJE niet in zijn beschouwingen opneemt, heeft hij de helderheidsopvatting van EXNER aan zijn beschouwingen ten grondslag gelegd en dus h voorgesteld door

$$h = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

EXNER heeft (zie blz. 41) voor de verhouding der coëfficiënten α

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 43.33 : 32.76 : 1$$

gevonden.

SCHRÖDINGER denkt in het vervolg de coördinaten uit gedrukt in zoodanige eenheden, dat de verhouding van de

drie coördinaten, die wit licht representeren, gelijk wordt aan de door EXNER gevondene en noemt $\alpha_1 x_1$, $\alpha_2 x_2$ en $\alpha_3 x_3$ in zijn verdere werk x_1 , x_2 en x_3 .

Daar de door EXNER gevonden verhouding die van $r : g : b$ is, verhouden in onze notatie de nieuwe coördinaten zich als $\rho\varepsilon : \gamma\varepsilon : \beta\varepsilon$.

Hiermede wordt

$$h = x_1 + x_2 + x_3 \quad (31)$$

Uit (30) volgt

$$a_{11} = \frac{1}{\mu x_1}$$

en de vorm van het lijnelement,

$$ds^2 = \frac{1}{\mu} \sum_i \frac{dx_i^2}{x_i} \quad (32)$$

is nu bepaald op den factor μ na.

4 — Het is nog noodig rekenschap te geven van de wet van FECHNER. Deze luidt: de verandering van den helderheidsindruk is evenredig aan de procentueele verandering van den prikkel.

Verwaarloost men, zooals SCHRÖDINGER doet, het verschijnsel van PURKINJE, dan is (zie! blz. 15) de prikkel evenredig aan de energie en hun beider procentueele verandering dus dezelfde.

Dit leidt dus tot de voorwaarde, dat voor

$$dx_1 = x_1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad dx_2 = x_2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad dx_3 = x_3 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$ds = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

moet zijn.

Hierbij denken wij ds in een zoodanige eenheid gemeten, dat de evenredigheidsfactor één is.

Daar in dat geval (zie (32))

$$ds^2 = \frac{1}{\mu} \sum_i x_i \left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2$$

blijkt

$$\mu = \sum_i x_i = h \quad (33)$$

te zijn.

Het lijnelement van SCHRÖDINGER heeft nu den vorm:

$$ds^2 = \frac{1}{h} \sum \frac{dx_k^2}{x_k} = \frac{\frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3}}{x_1 + x_2 + x_3}. \quad (34)$$

en daarmede is de kleurenmeetkunde bepaald.

Het verschil tusschen twee kleuren, K en C , die niet oneindig weinig van elkaar verschillen, wordt gemeten door

$$s = \int_K^C ds$$

langs den kortsten weg geïntegreerd.

Herinneren wij ons nu, dat KÖNIG (zie blz. 46) de energie van een golflengte λ zoo regelde, dat de helderheidsindruk gelijk was geworden aan dien van een zekere hoeveelheid energie van golflengte $535 \mu\mu$, dan kunnen wij dit moeilijk anders opvatten dan als een instelling op „grootste overeenstemming” van die beide kleuren. In de kleurenruimte wordt het licht van $535 \mu\mu$ voorgesteld door een punt K , dat van λ door een punt C ; dit laatste punt wordt langs zijn vector voortbewogen, tot het op „kortsten afstand” van K is gekomen. SCHRÖDINGER stelde de vraag of het punt C zich in deze

positie nu ook op de isolychne door K bevindt; m. a. w. of in zijn kleurenruimte een instelling op grootste overeenstemming inderdaad een instelling op gelijke helderheid is.

Wij kunnen dit probleem als volgt stellen:

Tusschen twee punten K en C is de afstand

$$s = \int_K^C ds = \int_K^C \sqrt{\frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3}} \\ x_1 + x_2 + x_3$$

Het punt K is vast en het punt C bewegelijk langs den vector

$$\begin{cases} x_2 = \alpha x_1 \\ x_3 = \beta x_1 \end{cases}$$

Langs welke kromme moet s geïntegreerd worden en waar moet het punt C liggen, opdat s minimum zij?

Dit probleem, dat tot het gebied der variatie-rekening behoort, zullen wij behandelen volgens een methode, die formeel van die van SCHRÖDINGER afwijkt. Zij zal ons later in staat stellen het probleem zóó uit te breiden, dat van het verschijnsel van PURKINJE rekenschap gegeven kan worden.

Ter vereenvoudiging worden de volgende transformaties ingevoerd:

$$x_1 = \xi_1^2, \quad x_2 = \xi_2^2, \quad x_3 = \xi_3^2 \quad (35)$$

$$\xi_1 = r \cos \varphi \cos \vartheta, \quad \xi_2 = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad \xi_3 = r \sin \vartheta.$$

Hiermede wordt

$$ds^2 = 4 \frac{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = 4 \left[\left(\frac{dr}{r} \right)^2 + d\vartheta^2 + \cos^2 \vartheta d\varphi^2 \right].$$

of, daar

$$2 \frac{dr}{r} = 2 d \lg \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = d \lg (x_1 + x_2 + x_3) = d \lg h = dH^1)$$

is, wordt $ds^2 = dH^2 + 4d\vartheta^2 + 4 \cos^2 \vartheta d\varphi^2$

$$s = \int_K^c \sqrt{\left(\frac{dH}{d\varphi}\right)^2 + \left(2 \frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 + 4 \cos^2 \vartheta} d\varphi \quad (36)$$

$$= \int_K^c F d\varphi$$

Deze afstand is minimum langs een kromme, die bepaald wordt door de twee vergelijkingen van EULER:

$$\frac{\partial F}{\partial H} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial H'} = 0 \quad (37); \quad \frac{\partial F}{\partial \vartheta} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial \vartheta'} = 0 \quad (38)$$

waarin $H' = \frac{dH}{d\varphi}$ en $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{d\varphi}$.

Verg. (37) geeft, daar $\frac{\partial F}{\partial H} = 0$ is

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{H'}{\sqrt{H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4 \cos^2 \vartheta}} = 0$$

of

$$(H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4 \cos^2 \vartheta) H'' - H' (H'H'' + 4\vartheta'\vartheta'' - 4 \cos \vartheta \sin \vartheta \vartheta') = 0 \quad (39')$$

dus

$$\frac{H''}{H'} = \frac{\vartheta' (\vartheta'' - \cos \vartheta \sin \vartheta)}{\vartheta'^2 + \cos^2 \vartheta} \quad (39)$$

Vergelijking (38) geeft, daar

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \frac{-4 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\sqrt{H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4 \cos^2 \vartheta}}$$

¹⁾ Zie blz. 66 regel 1 van boven.

en

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta'} = \frac{4\vartheta'}{\sqrt{H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4\cos^2 \vartheta}},$$

dus

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial \vartheta'} = \frac{4[\vartheta''(H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4\cos^2 \vartheta) - \vartheta'(H'H'' + 4\vartheta'\vartheta'' - 4\cos \vartheta \sin \vartheta \cdot \vartheta')]}{[H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4\cos^2 \vartheta]^2}$$

is, dat

$$(4\vartheta'' + 4\cos \vartheta \sin \vartheta)(H'^2 + 4\vartheta'^2 + 4\cos^2 \vartheta) - 4\vartheta'(H'H'' + 4\vartheta'\vartheta'' - 4\cos \vartheta \sin \vartheta \cdot \vartheta') = 0$$

of met behulp van (39')

$$\frac{H''}{H'} = \frac{\vartheta'' + \cos \vartheta \sin \vartheta}{\vartheta'} \quad (40)$$

Door uit (39) en (40) H te elimineeren, vinden wij een verband tusschen ϑ en φ :

$$\vartheta'^2 (\vartheta'' - \cos \vartheta \sin \vartheta) = (\vartheta'' + \cos \vartheta \sin \vartheta) (\vartheta'^2 + \cos^2 \vartheta)$$

of

$$\vartheta'' + 2\vartheta'^2 \operatorname{tg} \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \quad (41)$$

Stelt men hierin $\operatorname{tg} \vartheta = t$, dan gaat (41) over in

$$t'' + t = 0$$

waarvan de oplossing is

$$t = \operatorname{tg} \vartheta = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi \quad (42)$$

De constanten c_1 en c_2 zijn bepaald, doordat dit oppervlak de punten C en K moet bevatten.

Een combinatie van (15) met (14) geeft dan het verband tusschen H en φ .

$$\frac{H''}{H'} = -2\vartheta' \operatorname{tg} \vartheta$$

of

$$\frac{H''}{H'} = 2 \frac{\frac{d \cos \vartheta}{d\varphi}}{\cos \vartheta}$$

of

$$H' = c_3^* \cos^2 \vartheta$$

met (42)

$$H = c_3^* \int \frac{d\varphi}{1 + (c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi)^2} + c_4$$

Deelt men teller en noemer van de breuk onder het integraalteeken door $\cos^2 \varphi$, dan wordt deze een functie van $\operatorname{tg} \varphi$ alleen en integreerbaar:

$$H = c_3 \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{(1 + c_2^2) \operatorname{tg} \varphi + c_1 c_2}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \quad (43)$$

In onze oorspronkelijke coördinaten blijkt de geodetische lijn, d. i. de kromme waarlangs de afstand s minimum is, voorgesteld te worden door de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} c_1 \sqrt{x_1} + c_2 \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} &= 0 \\ \lg(x_1 + x_2 + x_3) &= c_3 \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{(1 + c_2^2) \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + c_1 c_2}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

De constanten $c_1 c_2 c_3 c_4$ zijn functies van de coördinaten van K en C , door welke de geodetische lijn moet gaan.

Voeren wij ten slotte de volgende coördinaten in:

$$X = \lg(x_1 + x_2 + x_3) = H$$

$$Y = \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{(1 + c_2^2) \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + c_1 c_2}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_2^2}}$$

$$Z = c_1 \sqrt{\frac{x_1}{x_3}} + c_2 \sqrt{\frac{x_2}{x_3}}$$

dan zijn de vergelijkingen van de geodetische lijn:

$$X = c_3 Y + c_4$$

$$Z = 1$$

De (X Y Z) ruimte is blijkbaar Euclidisch; derhalve is de afstand s tusschen twee punten K en C bepaald door:

$$s^2 = (X_C - X_K)^2 + (Y_C - Y_K)^2$$

Voor het invoeren van de minimum-voorwaarde voor s bedenken wij, dat C zich beweegt langs den vector

$$\begin{cases} x_2 = \alpha x_1 \\ x_3 = \beta x_1 \end{cases}$$

dus langs de lijn

$$Y_C = \text{constant}, Z_C = 1$$

Immers ook de waarden c_1 en c_2 zijn functies van de verhouding van de coördinaten van K en C.

De afstand s is dus minimum als

$$X_C = X_K$$

of als

$$H_C = H_K$$

Inderdaad blijkt dus, dat in de door SCHRÖDINGER ontworpen kleurenruimte een kleurpunt C dat langs zijn vector bewogen wordt, den kortsten afstand tot een vast kleurpunt K bereikt, wanneer het op de isolyche door dat punt gekomen is.

Anders gezegd:

Indien men, door energie-verandering van een kleur C, deze instelt op grootste overeenstemming met

een bepaalde kleur K , dan heeft men gelijke helderheid voor beide kleuren verkregen.

Hiermede hebben wij den eenvoudigen vorm van een kleurenruimte behandeld, zooals deze door SCHRÖDINGER op gesteld is. Wij moeten erbij opmerken, dat alle ruimten, die men door homogene lineaire transformatie uit deze bijzondere ruimte ($a_{ik} = 0$ voor $i \neq k$) kan verkrijgen, eveneens aan deze, voor een kleurenruimte gestelde, eischen voldoen.

Wij zullen nu, in aansluiting aan het bovenstaande, een kleurenruimte trachten op te bouwen op de door ons, in het tweede hoofdstuk, afgeleide helderheidsfunctie, welke in tegenstelling met die van SCHRÖDINGER wél van het verschijnsel van PURKINJE rekenschap geeft.

Ook hierin zullen noodzakelijkerwijze kortste afstand en gelijke helderheid identieke begrippen moeten zijn. Immers, KÖNIG heeft al zijn instellingen gemaakt op grootste overeenstemming tusschen twee verschillende kleuren, d. i. op kortsten afstand tusschen hun kleurpunten. En juist om het verschijnsel van PURKINJE, dat zich in deze metingen openbaart, te kunnen verklaren, hebben wij een andere uitdrukking voor de helderheid gezocht. Wij hebben dus a priori hierin een identiteit van beide begrippen voorop gesteld en in een eventueel op te bouwen kleurenruimte moet deze identiteit aanwezig zijn.

1 — Wij kunnen nu het blz. 62, sub 1 gezegde overnemen en hieraan ontleenen:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \mu \sum_i a_{ik} x_i \quad \text{voor } x = 1, 2, 3 \quad (30)$$

2 — De onderstelling sub 2 gemaakt, kunnen wij hier niet overnemen. Wij vervangen deze door de bovengenoemde identiteitsvoorwaarde.

3 — Indien wij aan $x_1 x_2 x_3$ de beteekenis toekennen (verg. blz. 65)

$$x_1 = \frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad x_2 = \frac{\gamma \varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad x_3 = \frac{\beta \varepsilon}{\varepsilon_0},$$

dan kunnen wij de uitdrukking voor de helderheid, die zooals in het 2e en 3e hoofdstuk gebleken is, rekenschap geeft van het verschijnsel van PURKINJE, aldus formuleeren:

$$h = x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3} \quad (31^*)$$

waarin

$$p_1 = \frac{R}{D}, \quad p_2 = \frac{G}{D}, \quad p_3 = \frac{B}{D}$$

Hiermede volgt uit (30):

$$p_k x_k^{p_k-1} = \mu (a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3) \text{ voor } x = 1, 2, 3$$

Wij kunnen hieruit a_{kk} oplossen en deze in ds^2 substitueeren.

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(\frac{p_1 x_1^{p_1-1}}{x_1 \mu} - a_{12} \frac{x_2}{x_1} - a_{13} \frac{x_3}{x_1} \right) dx_1^2 + \left(\frac{p_2 x_2^{p_2-1}}{x_2 \mu} - a_{21} \frac{x_1}{x_2} - \right. \\ & \left. - a_{23} \frac{x_3}{x_2} \right) dx_2^2 + \left(\frac{p_3 x_3^{p_3-1}}{x_3 \mu} - a_{31} \frac{x_1}{x_3} - a_{32} \frac{x_2}{x_3} \right) dx_3^2 \\ & + 2a_{12} dx_1 dx_2 + 2a_{23} dx_2 dx_3 + 2a_{31} dx_3 dx_1. \end{aligned} \quad (32^*)$$

4 — Weer houden wij rekening met de op blz. 65 genoemde wet van FECHNER, waarin nu echter de prikkel niet evenredig

aan de energie mag genomen worden (vergelijk blz. 16).

Dit leidt dus tot de voorwaarde, dat voor

$$dx_1 = x_1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad dx_2 = x_2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad dx_3 = x_3 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$ds = \frac{dh}{h}$$

moet zijn.

Deze voorwaarde voert tot

$$\mu = \frac{\left(\sum_i x_i p_i \right)^2}{\sum_i p_i x_i p_i}$$

Hiermede is het lijn-element bepaald op de coëfficiënten a_{12} , a_{23} , a_{31} na.

Wij maken nu de opmerking, dat aan de genoemde identiteitsvoorwaarde voldaan is, als de geodetische lijn in deze kleurenruimte wordt voorgesteld door

$$\begin{aligned} c_1 \sqrt{x_1} + c_2 \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} &= 0 \\ \lg(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) &= c_3 \operatorname{tg} \frac{(1 + c_2^2) \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + c_1 c_2}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \end{aligned} \quad (44*)$$

In dat geval toch kan men geheel dezelfde redeneering als die van blz. 70 volgen.

Om na te gaan of inderdaad, voor bepaalde waarden van a_{12} , a_{13} , a_{23} , de door (44*) bepaalde kromme een geodetische

lijn in de door ons besproken kleurenruimte kan zijn, moeten wij het lijnelement berekenen, waaruit deze geodetische lijn volgt.

Wij schrijven dit als volgt:

$$ds^2 = dH^2 + 4d\vartheta^2 + 4 \cos^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (36^*)$$

waarin weer

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\frac{x_3}{x_1 + x_2}}, \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad (35^*)$$

terwijl nu $H = \lg (x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3})$ is.

Hieruit zou n.l., volgens geheel dezelfde redeneering als die van blz. 7 e.v., vergelijking (44*) volgen.

Met behulp van (35*) schrijven wij (36) als functie van x_1 , x_2 en x_3 en vinden

$$ds^2 = dH^2 + \frac{\frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3}}{x_1 + x_2 + x_3} - \left(\frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{x_1 + x_2 + x_3} \right)^2$$

of

$$ds^2 = \frac{\frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3}}{x_1 + x_2 + x_3} + (d \lg h)^2 - (d \lg i)^2 \quad (34^*)$$

waarin i de werkzame energie en h de helderheid of de prikkel voorstelt (zie de hoofdstukken I en II).

Indien wij dezen vorm voor het lijnelement vergelijken met (32*), nadat de waarde van μ uit (33*) daarin is ingevoerd,

dan blijkt deze laatste in (34*) over te gaan, als de coëfficiënten a_{ik} de volgende beteekenis hebben:

$$a_{ik} = \frac{p_i x_i^{p_i-1} \cdot p_k x_k^{p_k-1}}{\left(\sum_1 x_l^{p_l}\right)^2} - \frac{1}{\left(\sum_1 x_l\right)^2} \quad \text{voor } i \neq k.$$

Hiermede wordt

$$a_{ii} = \frac{\frac{1}{x_i}}{\sum_1 x_l} + \left(\frac{p_i x_i^{p_i-1}}{\sum_1 x_l^{p_l}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sum_1 x_l} \right)^2$$

De ruimte, waarin (44*) de vergelijking voor de geodetische lijn voorstelt, voldoet dus aan alle voorwaarden, die men aan een kleurenruimte moet stellen. Bovendien is het duidelijk, dat andere ruimten, die door een affine transformatie der coördinaten uit deze afgeleid kunnen worden, niet aan alle gestelde voorwaarden voldoen. Dan zou niet meer (zie blz. 70)

$$X = H$$

zijn en dus niet meer aan de identiteitsvoorwaarde voldaan zijn.

De kleurenruimte, bepaald door het lijnelement (39*), heeft boven die van SCHRÖDINGER twee voordeelen.

- 1 — Zij geeft rekenschap van het verschijnsel van PURKINJE.
- 2 — Zij laat geen vrijheid in de keuze der coördinaatassen toe. Dit laatste is een voordeel omdat wij ook in de keuze der grondkleuren geen vrijheid bezitten.

Tot slot zullen wij de kleurenruimte opbouwen in een meer algemeenen zin dan waarin SCHRÖDINGER ons deze gegeven heeft.

1 — Wij denken ons een ruimte met coördinaten $x_1 x_2 x_3$, waarin het lijnelement wordt voorgesteld door

$$ds^2 = \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i dx_k \quad (45)$$

Hierin zijn a_{ik} functies van de coördinaten.

Aan ieder punt van deze ruimte is een vector $\mathfrak{B}$ toegevoegd, met componenten

$$\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3,$$

waarin μ een functie is van de coördinaten.

2 — De eerste voorwaarde, waaraan wij het vectorveld $\mathfrak{B}$ moeten onderwerpen, is, dat de vectoren een potentiaal h , dien wij helderheid noemen, bezitten. Zoodat, langs een gesloten kromme,

$$\int \mathfrak{B}_s ds = 0$$

Dit wordt

$$\int \sum_i \sum_k \mu x_i a_{ik} dx_k = 0$$

Deze voorwaarde kan geschreven worden in den vorm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \mu (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} &= \mu (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} &= \mu (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) \end{aligned} \quad (46)$$

3 — De tweede voorwaarde, die wij aan de ruimte opleggen, is, dat de wet van FECHNER moet gelden. D. w. z. langs een lijnelement met componenten

$$\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$$

waarin δ een oneindig kleine grootheid is, moet

$$ds = \frac{dh}{h}$$

Hierin is, volgens (45)

$$ds^2 = \delta^2 \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k,$$

hetgeen volgens (46)

$$ds^2 = \frac{\delta^2}{\mu} \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} x_i$$

wordt.

Verder is, voor dit geval:

$$\frac{dh}{h} = \frac{\delta}{h} \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} x_i$$

zoodat uit de genoemde voorwaarde volgt

$$\mu = \frac{h^2}{\sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}} \quad (47)$$

Met behulp van deze voorwaarden kunnen wij het lijnelement schrijven als een functie van de helderheid h , en van de drie, nog onbekende, coëfficiënten a_{12} , a_{23} , a_{31} .

Hiertoe drukken wij, met behulp van (46), de coëfficiënten a_{11} , a_{22} , a_{33} in de genoemde grootheden uit:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\mu x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} - a_{12} \frac{x_2}{x_1} - a_{13} \frac{x_3}{x_1} \\ a_{22} &= \frac{1}{\mu x_2} \frac{\partial h}{\partial x_2} - a_{21} \frac{x_1}{x_2} - a_{23} \frac{x_3}{x_2} \\ a_{33} &= \frac{1}{\mu x_3} \frac{\partial h}{\partial x_3} - a_{31} \frac{x_1}{x_3} - a_{32} \frac{x_2}{x_3} \end{aligned} \quad (46^*)$$

en substitueeren deze, nadat de waarde van μ uit (47) is ingevoerd, in ds^2 . Wij vinden dan:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{dh}{h} \right)^2 + \left[\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2} - a_{12} \right] \frac{x_2^3}{x_1} \left(d \frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_3} - a_{23} \right] \frac{x_3^3}{x_2} \left(d \frac{x_2}{x_3} \right)^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} - a_{31} \right] \frac{x_1^3}{x_3} \left(d \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (48)$$

4 — De laatste voorwaarde, die wij aan het lijnelement willen opleggen, is de volgende. Indien een punt K_1 vast is en een punt K_2 zich beweegt langs zijn vector, dan moet de kortste afstand $K_1 K_2$ bereikt zijn, als K_2 gekomen is in het punt, waar de potentiaal h dezelfde is als in K_1 .

Aan deze voorwaarde is voldaan, als ds^2 van den vorm is:

$$ds^2 = dH^2 + f_1(y, z) dy^2 + f_2(y, z) dy dz + f_3(y, z) dz^2 \quad (49)$$

waarin

$$y = \frac{x_1}{x_2}, z = \frac{x_2}{x_3}, H = \text{functie van } h.$$

Immers, in dat geval is de afstand $K_1 K_2$.

$$s = \int_{K_1}^{K_2} \sqrt{\left(\frac{dH}{dz}\right)^2 + f_1(y, z) \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + f_2(y, z) \frac{dy}{dz} + f_3(y, z)} dz$$

$$s = \int_{K_1}^{K_2} \sqrt{\left(\frac{dH}{dz}\right)^2 + f(y', y, z)} dz = \int_{K_1}^{K_2} F dz \quad (50)$$

langs de kromme geïntegreerd, die s minimum maakt. Dit probleem der variatierekening wordt, zooals wij reeds zagen, opgelost met behulp van de vergelijkingen van EULER. De bewuste kromme, de geodetische lijn, wordt bepaald door:

$$\frac{\partial F}{\partial H} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial H'} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (II)$$

waarin $H' = \frac{dH}{dz}$, $y' = \frac{dy}{dz}$.

Wij kunnen hieruit den vorm van de vergelijking der geodetische lijn vinden, zonder dat wij den vorm der functies f en H kennen.

Uit (I) volgt nl., daar $\frac{\partial F}{\partial H} = 0$ is

$$\frac{\partial F}{\partial H'} = \frac{1}{c}$$

dus

$$H' = c \sqrt{H'^2 + f(y', y, z)}$$

$$H' = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2} f(y', y, z)}$$

$$H = C_1 \int \sqrt{f(y', y, z)} dz + C_2. \quad (III)$$

Hiermede is ook F als functie van y' , y en z bepaald.

Substitueeren wij deze functie voor F in vergelijking II, dan ontstaat een differentiaal vergelijking, die leidt tot een verband tusschen y en z :

$$Z(y, z) = 0 \quad (\text{IV})$$

Noemen wij

$$\int \sqrt{f} dz = Y(y, z)$$

dan wordt de *geodetische lijn* dus voorgesteld door de vergelijkingen

$$\begin{cases} H = C_1 Y + C_2 \\ Z = 0 \end{cases}$$

Dit is een rechte lijn in de (H, Y, Z) ruimte, welke laatste dus Euclidisch is. De afstand $K_1 K_2$ is gegeven door

$$s^2 = (H_1 - H_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$$

Beweegt K_2 zich langs zijn vector, dus langs $y = \text{const.}$ $z = \text{const.}$ dus langs de lijn

$$\begin{cases} Y = \text{constant}, \\ Z = 0 \end{cases}$$

dan is de *afstand* s *minimum* als

$$H_1 = H_2$$

dus als de helderheden h van beide kleuren aan elkaar gelijk zijn. Q. E. D.

Aan de gestelde voorwaarde is dus voldaan als het lijnelement van den vorm (49) is. Dit legt aan de coëfficiënten a_{12} , a_{23} , a_{31} , de volgende beperking op (zie (48)):

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{1}{x_2^2} G_{12} \\ a_{23} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_3} - \frac{1}{x_3^2} G_{23} \\ a_{31} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{x_1^2} G_{31} \end{aligned} \quad (51)$$

waarin G een functie van de verhoudingen der coördinaten voorstelt. G_{12} , G_{23} en G_{31} moeten door cyclische verwisseling der coördinaten uit elkaar te verkrijgen zijn. Bovendien moet

$$\text{zijn.} \quad \frac{x_2^2}{x_1^2} G_{12} = G_{21}.$$

Hieruit volgt dat G van den vorm

$$\frac{1}{x_2^2} G_{12} = \frac{g_{12}}{b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2c(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}$$

moet zijn. Een analoge uitdrukking vinden wij voor G_{23} en G_{31} . Hierin stellen g_{ik} functies van de verhouding der coördinaten voor, door cyclische verwisseling uit elkaar te verkrijgen, waarbij $g_{12} = g_{21}$, is. De coëfficiënten b en c zijn constanten.

Met het lijnelement

$$ds^2 = \left(\frac{dh}{h}\right)^2 + \frac{\frac{x_2}{x_1} \left(d\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \cdot g_{12} + \frac{x_3}{x_2} \left(d\frac{x_2}{x_3}\right)^2 \cdot g_{23} + \frac{x_1}{x_3} \left(d\frac{x_3}{x_1}\right)^2 \cdot g_{31}}{b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2c(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)} \quad (52)$$

hebben wij nu een kleurenruimte bepaald, waarin de helderheidsfunctie nog in het midden is gelaten, en waarin wij de keuze van de functies g en de factoren b en c nog in onze hand hebben.

De *eenvoudigste* onderstelling voor deze laatste is wel

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 1$$

$$b = c = 1.$$

Deze onderstelling leidt tot de door SCHRÖDINGER ontworpen en tevens tot de door ons uitgebreide kleurenruimte.

Ook voor de helderheid kunnen wij een „eenvoudigheids-onderstelling” maken.

Drukken wij n.l. uit (46*) de waarden voor a_{11} , a_{22} en a_{33} in de functie h uit met behulp van (51) dan blijkt:

$$a_{11} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\frac{x_2 g_{12} + x_3 g_{13}}{x_1}}{b(x_1 + x_2 + x_3) + 2c(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)}$$

$$a_{22} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\frac{x_1 g_{21} + x_3 g_{23}}{x_2}}{b(x_1 + x_2 + x_3) + 2c(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)}$$

$$a_{33} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\frac{x_1 g_{31} + x_2 g_{32}}{x_3}}{b(x_1 + x_2 + x_3) + 2c(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)}$$

Als $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ is, is $\sqrt{a_{11}} = \frac{\partial \lg h}{\partial x_1}$

$$\text{dus } \left[h = e^{\int \sqrt{a_{11}} dx_1} \right]_{\substack{x_2 = 0 \\ x_3 = 0}}$$

Als *eenvoudigste* onderstelling voor een helderheidsfunctie kunnen wij aannemen dat

$$\left[a_{11} = \frac{1}{x_1^2} \right]_{\substack{x_2 = 0 \\ x_3 = 0}}$$

Dus

$$\left[h = x_1 \right]_{\substack{x_2 = 0 \\ x_3 = 0}}$$

Uit analoge redeneeringen voor a_{22} bij $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ en voor a_{33} bij $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ volgt dan

$$h = x_1 + x_2 + x_3$$

Deze helderheidsfunctie is gebleken niet volkomen reken-schap te kunnen geven van de experimenten. Het verschijnsel van PURKINJE n.l. kon hiermede niet verklaard worden.

Wij beproeven daartoe de *volgende eenvoudigste onderstelling*:

$$\left[a_{11} = \frac{P_1^2}{x_1^2} \right]_{\substack{x_2 = 0 \\ x_3 = 0}}$$

waarmede

$$\left[h = x_1^{p_1} \right]_{\substack{x_2 = 0 \\ x_3 = 0}}$$

Deze onderstelling geeft aanleiding tot

$$h = x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3}$$

In het voorgaande hoofdstuk is gebleken, dat deze helderheidsfunctie goed aan de praktijk voldoet. De exponenten p behooren weinig van één te verschillen.

HOOFDSTUK V

HET VERSCHIJNSEL VAN PURKINJE IN DE STERREKUNDE

In het midden der vorige eeuw werd, onder aanmoediging en leiding van ARGELANDER, de waarneming van veranderlijke sterren krachtig ter hand genomen. In den loop der jaren traden daarbij verschillende physiologische foutenbronnen aan het licht. HAGEN heeft hieraan in zijn bekende werk „Die veränderlichen Sterne” ¹⁾ een afzonderlijk hoofdstuk gewijd. Door physiologische oorzaken ontstaan de volgende fouten:

1 — de u r h o e k - f o u t. Een geschat helderheidsverschil tusschen twee sterren hangt af van den hoek tusschen de verbindingslijn en die der oogen.

2 — de a f s t a n d - f o u t. Het helderheidsverschil kan des te nauwkeuriger geschat worden, naarmate de sterren dichter bij elkaar gezien worden.

3 — de i n t e r v a l - f o u t. De som van de geschatte helderheidsverschillen tusschen de sterren a en b, en b en c is meestal grooter dan het direct geschatte verschil tusschen a en c.

4 — de h e l d e r h e i d s - f o u t. Bij het schatten van helderheidsverschillen gebruikt men het kleinste nog zichtbare verschil als eenheid. ARGELANDER noemde deze (natuurlijk

¹⁾ Specola Astronomica Vaticana V (1921).

subjectieve) eenheid een „Stufe”, een woord, dat wij in navolging van vele waarnemers hier over zullen nemen. De helderheidsfout nu bestaat hierin, dat een bepaalde energieverhouding van twee heldere sterren wordt geschat als een grooter aantal Stufen dan dezelfde verhouding van twee zwakke sterren.

5 — de kleur-fout. In 1856 vestigde OUDEMANS¹⁾ op dit verschijnsel in de volgende bewoordingen de aandacht:

„Etwas Eigenthümliches muss ich schon hier mittheilen, „das wahrscheinlich auch bereits andern Beobachtern aufgefallen ist, nämlich die verschiedene Helligkeit, welche „die farbigen Sterne zu haben scheinen, je nachdem man „sie durch stärkere oder schwächere Fernröhren sieht. Dies „war besonders auffallend bei dem so rothen Stern T „Cancri” Gezien in den refractor van 15 c.m. opening der Leidsche Sterrewacht overtrof voor OUDEMANS de helderheid die, welke de ster in vergelijking met een witte ster in den zoeker bezat, soms met meer dan een grootte-klasse.

ARGELANDER, SCHÖNFELD en andere nauwgezette waarnemers maakten spoedig opmerkingen van dienzelfden aard. Het verschijnsel was geen ander, dan dat waarop PURKINJE, ongeveer 30 jaar te voren gewezen had²⁾, maar dat zijn weg nog niet gevonden had in de astronomische litteratuur.

Het behoeft nauwelijks betoog, dat dit verschijnsel van PURKINJE het verkrijgen van homogene uitkomsten van hel-

¹⁾ J. A. C. OUDEMANS. Zweijährige Beobachtungen der meisten jetzt bekannten veränderlichen Sterne. Abh. der math.-phys. Classe der Königl. Niederl. Akad. von Wissenschaften.

²⁾ Zie de noot op blz. 1.

derheidsschattingen van sterren in den weg staat. Het eenige, wat objectief is, zijn de energie van het door den kijker opgevangen licht en hare, met de temperatuur daarvan samenhangende, verdeling over de verschillende golflengten. Wij kunnen in den regel echter hierover slechts een oordeel krijgen door middel van ons oog. Daar de gevoeligheid daarvan niet dezelfde is voor alle kleuren, en deze afhankelijkheid weder wisselt met de hoeveelheid energie, en zich ook daarbij weder het subject van den waarnemer openbaart, kan het niet anders of het bedoelde verschijnsel moet tot groote verwickelingen voeren. Vandaar dan ook, dat de lichtwisseling eener gekleurde veranderlijke ster, die door een aantal waarnemers met kijkers van verschillende openingen is waargenomen, zoo goed als nooit door een homogene lichtkromme kan worden weergegeven.

Hoe het verschijnsel van PURKINJE ongemerkt in de waarnemingen kan binnensluipen en daardoor den astronomen parten spelen, moge nog blijken uit het volgende.

In 1924 heeft men aan de Kaapsche sterrewacht de zonne-parallax trachten te vinden uit heliometer-waarnemingen van de planeet Mars omtrent het tijdstip van hare oppositie ¹⁾. Daarbij werden schermen van metaalgaas van drie verschillende dikten gebruikt, om het, door de eene objectiefhelpt geleverde, beeld van Mars zoodanig te verzwakken, dat het door de andere objectiefhelpt geleverde beeld eener ster zonder bezwaar in het middelpunt der Mars-schijf gebracht kon worden. De verschillende dikten van

¹⁾ H. SPENCER JONES and J. HALM. Determination of the Solar Parallax from observations of Mars secured at the Royal Observatory, Cape of Good Hope, near the opposition of 1924. II. Heliometer observations. Monthly Notices R. A. S. LXXXV, 845 (1925):

de schermen waren noodig, omdat de helderheid der vergelijkingssterren wisselde van de 6de tot de 8ste grootteklasse.

De waarnemingen leverden een zooveel kleinere waarde voor de zonne-parallax dan de door dezelfde waarnemers photographisch bepaalde, dat men er aanleiding in vond te gaan zoeken naar de eene of andere stelselmatige fout, waar mede de metingen konden zijn aangedaan. Men heeft deze inderdaad gevonden. Door de kleurschifting in onzen dampkring is het beeld der planeet uitgerekt tot een klein spectrum met het blauwe einde naar het zenith gekeerd. De waarnemer beschouwt het voor hem helderste gedeelte hiervan als de plaats van de planeet. De door het gebruik der schermen veroorzaakte energievermindering deed den helderheidsindruk van het roode gedeelte van het spectrum meer afnemen dan dien van het blauwe gedeelte, zoodat het punt van maximalen helderheidsindruk, en dus de schijnbare plaats van de planeet naar het blauwe gedeelte, dus naar het zenith verschoven werd. De gemeten zenithsafstand werd daardoor te klein, wat een te kleine waarde voor de parallax ten gevolge had. De fout was niet meer te herstellen en het met moeite verkregen waarnemingsmateriaal moest worden ter zijde gelegd.

De sub 1—3 genoemde physiologische fouten passen niet in het kader van ons onderzoek. De beide laatstgenoemde echter blijken logisch uit de helderheidsopvatting te volgen, die wij in het tweede hoofdstuk ontwikkelden, en in het derde hoofdstuk bevestigd vonden.

1 — *De helderheidsfout*

Deze komt tot uiting als men van het in Stufen

uitgedrukte helderheidsverschil over wil gaan op het verschil in grootteklassen, dat volgens definitie een maat is voor de energieverhouding.

Schat een waarnemer het verschil in helderheidsindruk tussen twee gelijkgekleurde sterren, a en b,

$$H_a - H_b = p \text{ Stufen}$$

dan is blijkens formule (12)

$$p = D \left[M \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} + \frac{1}{2} N \left(\left(\lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^2 - \left(\lg \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \right]$$

of

$$p = D \left(M + \frac{1}{2} N \lg \frac{\varepsilon_a \varepsilon_b}{\varepsilon_0^2} \right) \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} \quad (53)$$

Het verschil in grootteklassen m daarentegen is bij definitie bepaald door

$$\Delta m = 1.085 \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} \quad (54)$$

De hieruit volgende *Stufenwaarde*

$$s = \frac{\Delta m}{p}$$

wordt dan

$$s = \frac{1.085}{D} \frac{1}{M + \frac{1}{2} N \lg \frac{\varepsilon_a \varepsilon_b}{\varepsilon_0^2}} \quad (55)$$

Deze is een functie van de energie der beschouwde sterren en wordt kleiner als men haar bepaalt uit helderder sterren.

Dit is in overeenstemming met de ervaring. FETLAAR

heeft in zijn „Contribution to the theory of eclipsing binaries”¹⁾ de Stufenwaarde van NIJLAND voor verschillende helderheidsintervallen bepaald. Hij vindt hiervoor het volgende:

TABEL VI

m	s ²⁾
3.6	0.083
5.9	0.092
8.0	0.099
10.5	0.107
11.3	0.110

Om te zien in hoeverre dit verloop zich aan formule (55) aanpast, schrijven wij hiervoor

$$\frac{1}{s} = D \left(\frac{M}{1.085} + N \frac{m_0 - m_a + m_0 - m_b}{2} \right)$$

$$\frac{1}{s} = \frac{D}{1.085} M + DN (m_0 - m) \quad (56)$$

Uit de door KÖNIG voor de lichtsterkte van ε_A opgegeven eenheid en het door ons in het derde hoofdstuk bepaalde verband tusschen ε_0 en ε_A n.l. $\lg \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_A} = 10.00$, vinden wij schat-tenderwijs, dat

$$m_0 = 5^m$$

Vergelijking (56) geeft dan aanleiding tot vijf vergelijkingen, in de onbekenden

$$x = \frac{D}{1.085} M \quad y = DN$$

¹⁾ Recherches Astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht. IX (I).

²⁾ Tabel 6 op blz. 13. Wij hebben de laatste groep weggelaten, aangezien deze volgens den schrijver onzeker is.

Wij vinden hiervoor

$$x = 11.44 \pm 0.11$$

$$y = 0.402 \pm 0.03$$

Daar gemiddeld de Stufenwaarde als 0^m1 mag worden aangenomen, maken wij de plausibele onderstelling, dat

$$D = 0.1$$

Hiermede wordt

$$M = 1.24$$

$$N = 0.040$$

Beide deze waarden zijn van dezelfde orde van grootte als die welke wij in het derde hoofdstuk vonden (zie tabel V), een resultaat, dat tot voldoening stemt.

De Stufenwaarde s is blijkens (55) ook des te kleiner naarmate men met een grooteren kijker waarneemt; bovendien is zij afhankelijk van M en N , dus van het oog van den waarnemer en van de kleur der sterren. Natuurlijk zijn de sterren waaruit de Stufenwaarde voor verschillende grootteklassen wordt afgeleid, niet alle gelijk gekleurd. Maar aangezien in de praktijk deze waarde voor een bepaald helderheidsinterval verkregen wordt als gemiddelde uitkomst, en daarna meestal nog door graphische vereffening wordt aangepast aan die, welke voor andere intervallen geldt, kan zij geacht worden voor een gemiddelde kleur bepaald te zijn en kan formule (55), zooals ook gebleken is, toch een denkbeeld geven van het verloop der Stufenwaarde met de energie.

2 — De kleurfout

A. Het geval van één waarnemer met kijkers van verschillende opening.

Het verschil in helderheidsindruk tusschen twee ver-

schillend gekleurde sterren is, volgens formule (12)

$$H_a - H_b = D \left[L_a - L_b + M_a \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} - M_b \lg \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} N_a \left(\lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^2 - \frac{1}{2} N_b \left(\lg \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (57)$$

Alvorens te onderzoeken hoe deze uitdrukking van de opening van den kijker afhangt, moeten wij het volgende bedenken. Zooals reeds op blz. 24 gezegd is, komt er bij zwakker worden der energie een oogenblik, waarop de grootheden L , M en N niet meer als onafhankelijk van de energie mogen beschouwd worden. Bij sterren waarvan de kleur het dichtste een grondkleur nadert, dus bij roode sterren, treedt dit verschijnsel het eerste op, en nooit bij sterren, die licht van dezelfde kleur als zonlicht uitzenden. (zie blz. 20).

Wij beschouwen eerst de formule (57) in het energiegebied, waarin L , M en N constant zijn.

Indien de waarnemer ditzelfde helderheidsverschil schat in een kijker met een objectief van $q \times$ grooter oppervlak, dan schat hij

$$(H_a - H_b)_q = D \left[L_a - L_b + M_a \lg \frac{q\varepsilon_a}{\varepsilon_0} - M_b \lg \frac{q\varepsilon_b}{\varepsilon_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} N_a \left(\lg \frac{q\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^2 - \frac{1}{2} N_b \left(\lg \frac{q\varepsilon_b}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

of

$$(H_a - H_b)_q - (H_a - H_b) = \\ D \left[(M_a - M_b + N_a \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} - N_b \lg \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0}) \lg q + \frac{1}{2} (N_a - N_b) (\lg q)^2 \right] \quad (58)$$

De reductieterm, $(H_a - H_b)_q - (H_a - H_b)$, waarmee de waarnemingen met den kleinsten kijker op den grootsten gereduceerd worden, is dus afhankelijk van de kleur en de energie der beide sterren en verandert quadratisch met de logarithme van de kijker-opening.

Is a een veranderlijke ster, dan zet men gewoonlijk den reductieterm af tegen de waarden $(H_a - H_b)$. Het verband tusschen beide moet volgens bovenstaande gegevens parabolisch zijn.

Schrijven wij nl. voor (57)

$$H_a - H_b = X = \alpha + \beta \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} + \gamma \left(\lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^2$$

en voor (58)

$$(H_a - H_b)_q - (H_a - H_b) = Y = a + b \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}$$

en elimineert men hieruit $\lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}$, dan vindt men

$$X = \alpha + \frac{\beta}{b} (Y - a) + \frac{\gamma}{b^2} (Y - a)^2$$

waarin γ positief is.

Dit stelt een parabool voor, waarvan de as evenwijdig loopt aan de X -as en die open is aan den kant van grootere X , dus grootere helderheid van de veranderlijke.

Een dergelijk verloop hebben wij inderdaad kunnen constateeren in waarnemingen, welke Prof. NIJLAND zoo vriendelijk was te onzer beschikking te stellen. *R Camelopardalis*, een veranderlijke van de kleur 2^e.6, naar de schaal van OSTHOFF, is meermalen in den refractor van 261 mm. opening en diens zoeker van 74 mm. gelijktijdig geschat. De

gegevens, die wij hiervan kregen, waren uitgedrukt in Stufen, vermenigvuldigd met een zekere constante en gereduceerd op een photometrische schaal. De waarnemer noemt het product een aantal grootteklassen. Indien dit werkelijk grootteklassen waren, zouden de verschillen tusschen de waarnemingen met de twee kijkers nul moeten zijn. Om misverstand te vermijden, hebben wij deze benaming hier niet gebruikt en de getallen onbenoemd gelaten.

Wij hebben de verschillen tusschen beide schattingen gegroepeerd naar de helderheid van de veranderlijke in den zoeker, in gebieden telkens met 0.50 opklimmend, en voor ieder van die groepen een gemiddelde waarde opgemaakt.

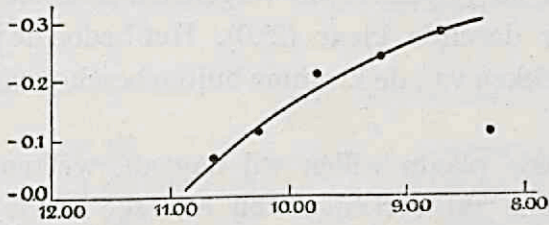
Wij noemen den helderheidsindruk in den zoeker Z , dien in den refractor R , en geven de uitkomsten in Tabel VII en Fig. VII (1).

TABEL VII

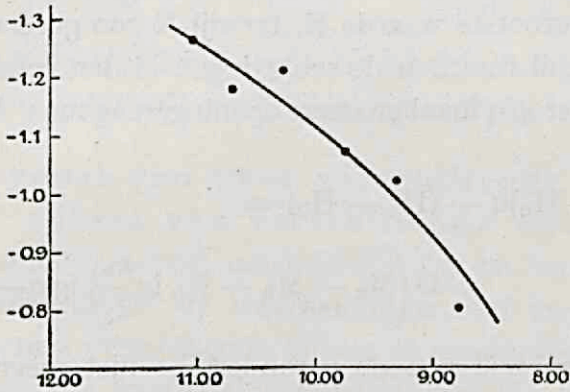
Z	$R - Z$
8,28	—0,11
8,71	—0,28
9,21	—0,24
9,75	—0,21
10,24	—0,11
10,63	—0,07

Zooals men ziet, kan men door de gevonden punten zeer goed een parabool trekken, die aan de bovengenoemde eischen voldoet. Alleen de reductie behorende bij 8.28 valt er buiten. Wij vermoedden, dat dit geweten kon worden aan een gekleurde vergelijgingsster. Bij navraag dienaan-

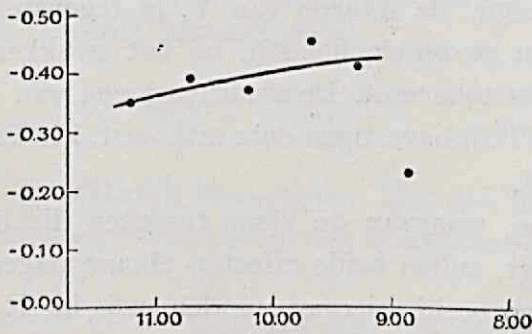
FIG. VII. Reductiekrommen van waarnemingen met een 74 mm. op die met een 261 mm. refractor.



(1) *R Camelopardalis* ($2^c 6$)



(2) *S Cephei* ($9^c 3$)



(3) *R Aquilae* ($5^c 1$)

gaande deelde de waarnemer ons mede, dat hij inderdaad in dat gebied de veranderlijke vergeleken had met een ster van ongeveer dezelfde kleur ($2^{\circ}.0$). Het bedoelde punt moet dus bij het trekken van de kromme buiten beschouwing blijven.

In de tweede plaats willen wij nagaan, welken vorm de reductiekromme zal verkrijgen bij een zóó roode ster, dat voor haar één of twee der grondkleuren onder de drempelwaarde zijn gezonken of op het punt zijn dit te doen. In dit geval nadert bij het zwakker worden der ster de grootheid M tot haar grootste waarde R , terwijl N zoo goed als nul is.

Het verschil tusschen de schattingen in den eersten kijker en in dien met $\sqrt{q}$ maal grootere opening, mag men dus schrijven als:

$$Y = (H_a - H_b)q - (H_a - H_b) =$$

$$= D \left(M_a - M_b - N_b \lg \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} \right) \lg q - \frac{N_b}{2} (\lg q)^2$$

waarin de energie van de veranderlijke niet meer expliciet voorkomt, doch alleen impliciet in de waarde van M_a . Wij kunnen over het verloop van Y niet in bijzonderheden treden, doch merken alleen op dat, daar M_a grooter wordt bij afname der energie, de waarde van Y , in tegenstelling met wat wij zooeven gevonden hebben, bij het zwakker worden der veranderlijke toeneemt. De waarnemingen van NIJLAND van S Cephei ($9^{\circ}.3$) bevestigen deze uitkomst. Zie Tabel VIII en Fig. VII (2).

Bij de sterren, waarvan de kleur tusschen die der beide besprokene inligt, zullen beide effecten elkaar nagenoeg opheffen. Een voorbeeld hiervan vinden wij in R Aquilae ($5^{\circ}.1$). Zie Tabel IX en Fig. VII (3).

TABEL VIII

Z	R — Z
8,77	—0,80
9,32	—1,02
9,74	—1,07
10,29	—1,21
10,71	—1,18
11,05	—1,26

TABEL IX

Z	R — Z
8,79	+0,23
9,27	+0,41
9,67	+0,45
10,20	+0,37
10,70	+0,39
11,19	+0,35

Ook hier is de afwijkende reductie bij 8.86 het gevolg van een eenigszins gekleurde vergelykingsster (2^c.5).

B — Het geval van twee verschillende waarnemers met kijkers van verschillende opening.

Het is, jammer genoeg, noodzakelijk om bij het bewerken van een veranderlijke de waarnemingen van verschillende waarnemers met verschillende kijkers te combineeren. Hier-toe moet men alle waarnemingen op die van één waarnemer reduceeren.

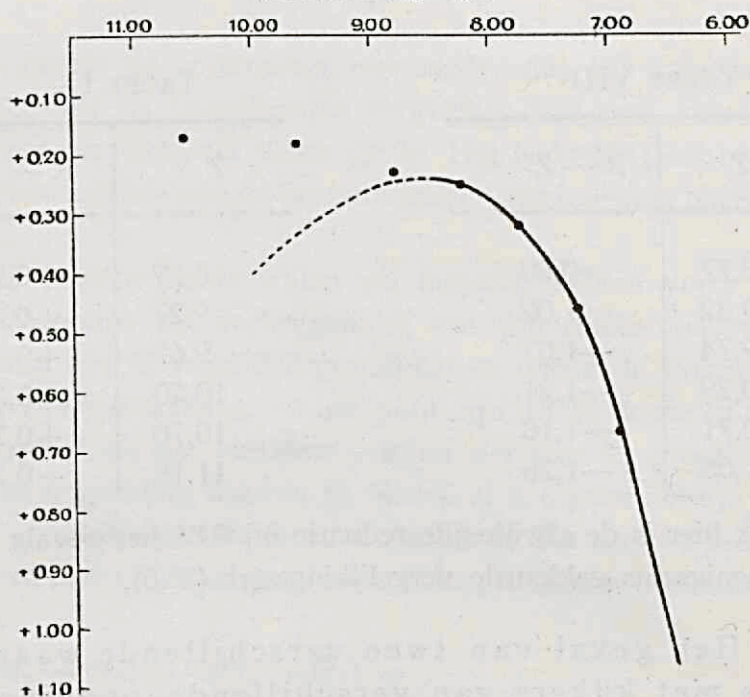
Het spreekt vanzelf, dat ook voor dit geval de reductie-kromme een parabool moet zijn. De richting van de as van deze parabool wordt bepaald door

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{N_2 - N_1}{N_1}$$

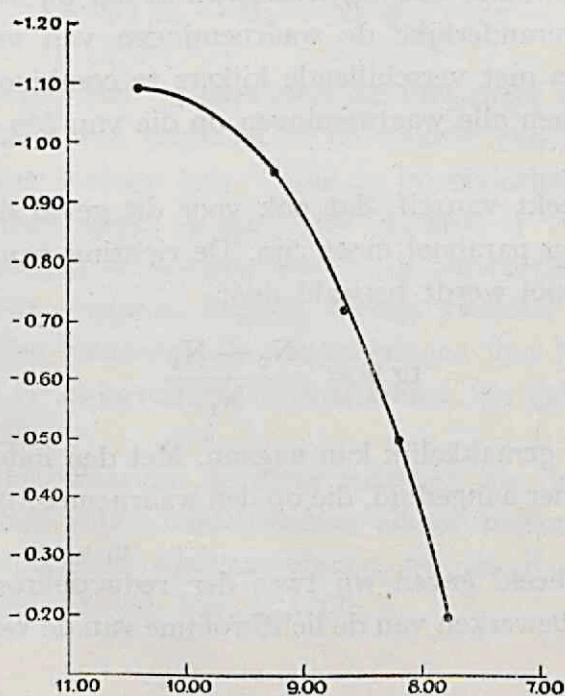
zooals men gemakkelijk kan nagaan. Met den index 1 is hier de waarnemer aangeduid, die op den waarnemer 2 gereduceerd wordt.

Als voorbeeld geven wij twee der reductiekrommen, die wij bij het bewerken van de lichtkromme van de veranderlijke

FIG. VIII U Cygni. (8°)



(1) Reductiekromme v. d. B. op de R.



(2) Reductiekromme de R. op M.

U Cygni (8°) berekend hebben. De eerste geeft de reductie van de waarnemingen van VAN DER BILT met een $4''.5$ refractor, op die van DE ROY, met een $8''$ reflector, de tweede die van DE ROY op die van MARKWICK, met een $8''.5$ reflector. Zie Tabel X en Fig. VIII (1) en (2).

TABEL X

B	R — B	R	M — R
6,93	+0,67	7,77	—0,20
7,26	+0,46	8,18	—0,50
7,74	+0,32	8,64	—0,72
8,23	+0,25	9,25	—0,95
8,80	+0,23	10,40	—1,09
9,62	+0,18		
10,58	+0,17		

Fig. VIII (1) geeft de eerstgenoemde reductiekromme, waarin wij voor de abscis en ordinaat een verschillende schaal gebruikt hebben. Duiden wij de waarden in kolom B aan met X, die in kolom R — B met Y, dan wordt het eerste gedeelte van de reductiekromme voorgesteld door de parabool

$$(X - Y)^2 - 16.66 X + 6.17 Y + 71.95 = 0$$

Het laatste gedeelte is hier niet in opgenomen. Dit heeft zijn reden in het op blz. 92 genoemde verschijnsel, dat, wanneer de energie een zekere drempelwaarde bereikt heeft, de grootheden L, M en N niet meer constant blijven. Blijkbaar treedt dit hier op even voordat de helderheidsindruk, aangeduid met 9.00, bereikt is.

Het tweede voorbeeld geven wij in Figuur VIII (2). Wij

hebben door de gevonden punten de volgende parabool kunnen leggen:

$$(X + 0.47 Y)^2 - 18.80 X - 12.50 Y + 84.49 = 0$$

De afwijking van de parabool begint hier bij zwakkere energie van de veranderlijke, daar MARKWICK en DE ROY beiden een kijker van groote opening gebruiken.

Wij meenen in het bovenstaande te hebben aangetoond, dat het beschikbare waarnemingsmateriaal onze theorie bevestigt.

Uit al deze beschouwingen is nu wel afdoende gebleken, dat de helderheidsschattingen met het oog een zeer persoonlijk karakter dragen en dat het zeer wenschelijk is, de energie-verhouding van twee sterren *objectief* te kunnen meten.

Met een photometer kan men de energie eener ster alleen dan in een objectieve maat uitdrukken als men in staat is de kleur van de kunstmatige ster gelijk te maken aan die van de te meten ster. In een photometer verzwakt men n.l. de energie der kunstmatige ster k op meetbare wijze ($\cos^2 \alpha$), totdat deze denzelfden helderheidsindruk maakt, als de te vergelijken ster a . Men maakt dus

$$H_k = H_a$$

Volgens formule (12) is dan

$$L_k + \left(M_k + \frac{1}{2} N_k \lg \frac{\varepsilon_k \cos^2 \alpha}{\varepsilon_0} \right) \lg \frac{\varepsilon_k \cos^2 \alpha}{\varepsilon_0} = L_a + \left(M_a + \frac{1}{2} N_a \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right) \lg \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \quad (60)$$

Is de kleur der kunstmatige ster dezelfde als die van de ster a , dan is dus

$$L_k = L_a; \quad M_k = M_a; \quad N_k = N_a$$

en aan de vergelijking wordt voldaan door

$$\varepsilon_k \cos^2 \alpha = \varepsilon_a$$

Deze uitkomst is geheel objectief.

Voor een tweede ster b vindt men op dezelfde wijze

$$\varepsilon_k \cos^2 \beta = \varepsilon_b$$

en inderdaad geeft $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$ de verhouding van de energiehoeveelheden, die wij van de sterren a en b opvangen.

Zijn echter de kleuren van beide objecten verschillend, dan

geeft $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$ niet meer de verhouding $\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}$ direct, maar een

functie hiervan en van andere grootheden, waarin het kleurverschil en een persoonlijk element een rol spelen.

Was men dus in staat de kleur van een kunstmatige ster gelijk te maken aan die van elke werkelijke ster, dan zouden, wegens hun objectieve karakter, metingen der energieverhouding met een photometer verre te verkiezen zijn boven het schatten van verschillen in helderheidsindruk met het oog. Tot nu toe zijn echter de pogingen hiertoe mislukt.

Wij willen derhalve dit hoofdstuk besluiten met de opmerking, dat alleen van directe metingen van de energie eener ster met behulp van een thermozuil objectieve uitkomsten te verwachten zijn. In deze richting heeft men de laatste jaren aan verschillende sterrewachten reeds goede vorderingen gemaakt.

The following is a list of the names of the persons who have been elected to the office of the President of the United States since the year 1789. The names are given in the order in which they were elected, and the year of their election is given in parentheses. The names are given in the order in which they were elected, and the year of their election is given in parentheses.

George Washington (1789)
John Adams (1797)
Thomas Jefferson (1801)
James Madison (1809)
James Monroe (1817)
John Quincy Adams (1825)
Andrew Jackson (1829)
Martin Van Buren (1837)
Franklin Pierce (1853)
Abraham Lincoln (1861)
Andrew Johnson (1865)
Ulysses S. Grant (1869)
Rutherford B. Hayes (1877)
James A. Garfield (1881)
Chester A. Arthur (1881)
Grover Cleveland (1895)
William McKinley (1897)
Theodore Roosevelt (1901)
Woodrow Wilson (1913)
Calvin Coolidge (1925)
Herbert Hoover (1929)
Franklin D. Roosevelt (1933)
Dwight D. Eisenhower (1953)
John F. Kennedy (1961)
Lyndon B. Johnson (1963)
Richard M. Nixon (1969)
Jimmy Carter (1977)
Ronald Reagan (1981)
George H. W. Bush (1989)
Bill Clinton (1993)
George W. Bush (2001)
Barack Obama (2009)
Donald Trump (2017)

ERRATA

Blz. 6 noot regel 1 v. o. de woorden „of absolute grootte” te schrappen.

„ 7 regel 12 v. o. voor „de vier” lees „vier der”.

„ 12 regel 12 v. b. voor „conlusies” lees „conclusies”.

„ 15 regel 13 v. b. voor „gedaan dit” lees „dit gedaan”.

„ 17 regel 5 v. o. voor $\frac{\varepsilon_0}{\beta}$ lees $\frac{\beta}{\varepsilon_0}$.

„ 18 De uitdrukking op regel 4 v. o. vervangen door:

$$\left(\rho - \frac{r}{\varepsilon} + \frac{r\varepsilon}{F}\right) : \left(\gamma - \frac{g}{\varepsilon} + \frac{g\varepsilon}{F}\right) : \left(\beta - \frac{b}{\varepsilon} + \frac{b\varepsilon}{F}\right)$$

en de twee volgende regels door:

Hierin zijn r , g en b zeer klein en is F een factor, zóó dat meestal $-\frac{r}{\varepsilon} + \frac{r\varepsilon}{F}$ naast ρ te verwaarloo-

zen is en evenzoo $-\frac{g}{\varepsilon} + \frac{g\varepsilon}{F}$ naast γ en $-\frac{b}{\varepsilon} + \frac{b\varepsilon}{F}$

naast β . Wanneer echter de energie steeds grooter

wordt, komt er een oogenblik waarop de term $\frac{r\varepsilon}{F}$

begint mede te tellen. De toenemende energie

krijgt ten slotte waarden, waarbij nu ρ ten op-

zichte van $\frac{r\varepsilon}{F}$ verwaarloosd kan worden; evenzoo

γ ten opzichte van $\frac{g\varepsilon}{F}$ en β ten opzichte van $\frac{b\varepsilon}{F}$.

In dat geval nadert de kleur van het licht tot een grenswaarde, bepaald door

$$r : g : b$$

Deze verhouding stelt, zooals wij op blz. 35 zullen zien, wit voor. Daar wij ons niet met zeer groote energiehoeveelheden hebben bezig gehouden, hebben wij in onze verdere beschouwingen de tweede correctietermen $\frac{\rho\varepsilon}{F}$, $\frac{\gamma\varepsilon}{F}$ en $\frac{\beta\varepsilon}{F}$ weggelaten.

„ 21 regel 2 v. b. voor: $\frac{D}{B}$ lees: $\frac{B}{D}$.

„ 22 regel 6 v. o. de term $+ \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ aan het einde van den regel te schrappen.

„ 23 formule (13). voor:

$$\left(N - (M - 1)^2 \right) \text{ lees: } \left(N + (M - 1)^2 \right).$$

„ 24 Na formule (10) toe te voegen:

Bij zeer zwakke energie worden de grootheden L , M en N dus veranderlijk met deze.

„ 26 regel 6 v. o. voor: γ lees: λ .

„ 27 regel 10 v. b. voor: in de sub 2. lees: tusschen de sub 2.

„ 30 regel 1 v. b. voor: $\lambda = 430 \mu\mu$ lees: $\lambda = 475 \mu\mu$.

„ 39 regel 3 v. b. voor: echter lees: nu nog.

„ 49 regel 1 v. o. voor: $\frac{1}{2} \frac{N_{535}}{m^2} \left(\log \frac{\varepsilon_{535}}{\varepsilon_A} \right)$ lees: $\frac{1}{2} \frac{N_{535}}{m^2} \left(\log \frac{\varepsilon_{535}}{\varepsilon_A} \right)^2$.

„ 53 regel 10 v. o. voor: is lees: blijft onder de waarde,

„ 55 De bovenste kromme M_λ geldt voor $g = -12.00$, de onderste voor $g = -8.60$.

„ 56 regel 3 v. o. na: zie (20) in te lasschen: en blz. 53.

voor: $\lg \frac{\epsilon_A}{\epsilon_0} = -10.00$ lees: $\lg \frac{\epsilon_A}{\epsilon_0} = -4.34$

regel 2 v. o. voor: 4.34 lees: 1.88.

den laatsten regel te vervangen door:

is dus de energie van 535 $\mu\mu$ gelegen tusschen die van de gevallen B en C (zie Tabel III).

„ 69 regel 4 v. b. den exponent van den noemer te vervangen door $\frac{3}{2}$.

regel 3 v. o. voor: (15) met (14) lees: (40) met (41).

„ 76 regel 6 v. o. voor: (39*) lees: (34*).

„ 82 de formule (52) moet luiden:

$$ds^2 = \left(\frac{dh}{h}\right)^2 + \frac{\frac{x_2^3}{x_1} \left(d\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \cdot g_{12} + \frac{x_3^3}{x_2} \left(d\frac{x_2}{x_3}\right)^2 \cdot g_{23} + \frac{x_1^3}{x_3} \left(d\frac{x_3}{x_1}\right)^2 \cdot g_{31}}{b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2c(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)} \quad (52)$$

„ 90 regel 6 v. o. voor: 10.00 lees: 4.34.

„ 96 regel 14 v. b. voor $(H_a - H_b)q$ lees $(H_a - H_b)_q$.

STELLINGEN

I

De in de praktijk gebruikte „grotteklasse” is een andere eenheid dan de, als zoodanig, gedefinieerde.

II

Het is niet waarschijnlijk, dat Pulfrich met den stereospectraal-photometer de helderheid van verschillend gekleurde velden meet.

Die Naturwissenschaften 1922.

III

H. Spencer Jones en J. Halm komen bij hunne discussie tot de slotsom: „.....that a reliable determination of the sun's parallax by heliometric observations of Mars is impossible”.

Deze bewering is, in haar algemeenheid, onjuist.

Monthly Notices R. A. S. 85 852 (1925).

IV

De meening van ten Bruggencate, dat de stand van het aequatorvlak van een bolvormige sterrenhoop niet samenhangt met den afstand tot het melkwegvlak, is niet gerechtvaardigd.

P. ten Bruggencate. Sternhaufen blz. 80.

V

De afplatting der aard-ellipsoïde kan niet uitsluitend uit graadmetingen gevonden worden.

VI

De thans voor ballonwaarnemingen gebruikte theodoliet is ondoelmatig gebouwd.

VII

De door Ising bedoelde natuurlijke grens voor de gevoeligheid van een galvanometer, is in beginsel voor overschrijding vatbaar.

Philosophical Magazine 1926 blz. 827.

VIII

Het is, ook in het spectrum van een onrustige lichtbron, mogelijk de verhouding van lijnintensiteiten direct te meten.

Physikalische Zeitschrift 28 602 (1927).

IX

In de opstelling van Gallisot en Bellemin voor het bestudeeren der scintillatie kan men het bi-prisma met voordeel vervangen door een scherm.

Journal de Physique 8 29 (1927).
