Radiale randlimieten van holomorfe functies

https://hdl.handle.net/1874/292977

RADIALE RANDLIMIETEN
VAN HOLOMORFE FUNCTIES

RADIALE RANDLIMIETEN VAN HOLOMORFE FUNCTIES

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. H. TH. OBBINK, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 6 MEI 1929, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR,

DOOR

WILLEM ANTONIUS MARIA BURGERS

GEBOREN TE NIJMEGEN

N.V. CENTRALE DRUKKERIJ — NIJMEGEN

Aan mijn Ouders

Bij de voltooiing van mijn academische studies voel ik me gedrongen een woord van oprecht gemeenden dank te richten tot U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, die tot mijn academische vorming hebben bijgedragen:

tot U, Hooggeleerde DE VRIES, voor Uw colleges die U steeds zoo aangenaam wist in te kleeden;

tot U, Hooggeleerde ORNSTEIN, voor Uw leiding en gereede hulpvaardigheid bij mijn practisch werk op Uw Laboratorium, waarbij ik tevens meen te mogen insluiten U, Hooggeleerde MOLL;

tot U, Hooggeleerde KRAMERS, voor de liefhebberij, die U wist op te wekken voor de moderne Theoretische Natuurkunde;

tot U, Hooggeleerde NIJLAND, voor het inzicht, dat U op zoo aangename wijze wist te geven in de problemen der Astronomie.

Tenslotte mijn zeer bijzonderen dank aan U, Hooggeleerde WOLFF, hooggeachte promotor.

Uw colleges, waar U steeds de moeilijkheden zoo smakelijk wist te belichten en op te lossen, zullen me steeds een aangename herinnering zijn.

Weest overtuigd van mijn blijvende erkentelijkheid voor Uw belangelooze hulpvaardigheid en welwillende leiding, die ik bij de samenstelling van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

INHOUD.

INLEIDING.

De belangrijkheid van de kennis der randwaarden van functies, die holomorf zijn in een zeker gebied, wordt wel sterk in 't licht gesteld door het *probleem van Dirichlet,* dat thans voor het binnengebied van een willekeurige Jordansche kromme is opgelost.

Dit probleem luidt als volgt:

— Construeer een functie, harmonisch binnen een willekeurig gesloten contour Γ, zonder dubbelpunten, die op die contour *voorgeschreven* continue waarden aanneemt. —

Daar nu de oplossing voor den cirkel werd uitgedrukt door de **integraal van Poisson**

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2}\, u(\varphi)\, d\varphi$$

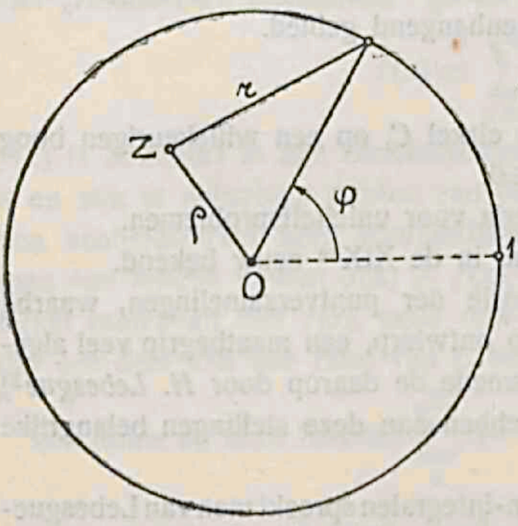

Fig. 1.

waarin $u(\varphi)$ de waarden voorstelt, die $u(z)$ moet aannemen op den rand C en r en ϱ, grootheden in fig. 1 aangegeven, kon dit probleem gelijkwaardig geformuleerd worden als volgt:

— Kan men een enkelvoudig samenhangend gebied G, begrensd door een willekeurigen, gesloten contour Γ, zonder dubbelpunten, conform afbeelden op een cirkel? —

Het bevestigend antwoord levert daarom een belangrijke vereenvoudiging op bij de studie van holomorfe functies, daar men zich nu, zonder aan de algemeenheid te kort te doen, mag beperken tot functies holomorf in een cirkel.

Doch ook de integraalstelling van Cauchy laat ons zien, hoe belangrijk de rol is, die de randwaarden spelen bij holomorfe functies.

Deze stelling luidt n.l.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\, dt}{t-z},$$

waarbij deze Riemann-integraal moet genomen worden in de positieve richting langs den contour Γ. Deze stelling drukt dus uit, dat de waarden in het gebied G bepaald worden door de **waarden op den rand.** Wanneer we nu nog even in herinnering mogen brengen het voortzettingstheorema van *Schwartz* en de stelling, dat als een holomorfe functie nul is in een puntverzameling, die zich verdicht in een inwendig punt van zijn holomorfie-gebied, die functie identiek nul is, dan komen we onmiddellijk tot de volgende belangrijke stellingen:

I. — Als twee functies $f_1(z)$ en $f_2(z)$, holomorf in den cirkel C, op den rand van C dezelfde waarden aannemen, dan zijn ze identiek —

of anders uitgedrukt:

— Als $f(z)$, holomorf in den cirkel C, op den rand van C de waarde nul aanneemt, dan is $f(z) \equiv 0$ —

en dit geldt dus natuurlijk ook, als we den cirkel vervangen door een willekeurig enkelvoudig samenhangend gebied.

Bovendien:

II. Als $f(z)$, holomorf in den cirkel C, op een willekeurigen boog van den rand nul is, dan is $f \equiv 0$.

De randwaarden zijn dus criteria voor uniciteitsproblemen.

Deze stellingen waren echter al in de XIX^de^ eeuw bekend.

De ontwikkeling van de theorie der puntverzamelingen, waarbij *E. Borel*[1]) een nieuw maatbegrip ontwierp, een maatbegrip veel algemeener dan dat van *Jordan*, alsmede de daarop door *H. Lebesgue*[2]) ontwikkelde integraalrekening, hebben aan deze stellingen belangrijke uitbreidingen gegeven.

Ter onderscheiding van Riemann-integralen spreekt men van Lebesgue-integralen. Aangezien echter elke Riemann-integreerbare functie, ook Lebesgue integreerbaar is en dan dezelfde waarde geeft, willen we afspreken, dat we steeds de Lebesgue-integraal bedoelen. De differentiaal, die bij deze integraalrekening geen zin heeft, willen we echter aanhouden, om de integratievariable aan te geven.

In verband hiermede is nu ook van groot belang de studie van *Fatou* in de Acta Mathematica, tome 30, getiteld: „Séries trigonométriques et séries de Taylor" over het gedrag van de integraal van Poisson, als men die integraal opvat als Lebesgue-integraal.

Fatou komt daarin tot de volgende conclusies:

---

1) Zie *Borel:* Leçons sur la théorie fonctions.

2) Zie Annali di Mathematica 1902 „Intégrale, longueur, Aire".
C. van Os, Moderne integraalrekening.

I. — Als $u(1, \varphi)$ begrensd en sommeerbaar is, stelt

$$u(\varrho, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2} u(1, \varphi)\, d\varphi$$

een harmonische functie voor, die op een volle φ-maat een bepaalde waarde aanneemt als het punt (ϱ, φ) nadert tot den rand langs een willekeurigen weg, mits deze niet in het eindpunt aan den rand raakt. —

II. — Als $u(\varphi)$ sommeerbaar en niet begrensd is, dan nadert op volle maat $u(\varrho, \Theta)$ tot een bepaalde limiet als $\varrho \to 1$.

Ook in het z.g. **voortzettingsprobleem** spelen de randlimieten een voorname rol. *Hadamard* onderzocht dit aan de hand van de coëfficienten van de Taylorontwikkeling der functie. Als typisch voorbeeld van „Hadamard's Lückensatz" geven we:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$$

$f(x)$ is holomorf in den eenheidscirkel en in geen grooteren. De vraag is nu, zijn er misschien punten van den omtrek, waar de functie over den eenheidscirkel heen voortzetbaar is? Men bedoelt hiermee: kan men een functie vinden $\psi(x) \not\equiv f(x)$, die in een deelgebied van den cirkel samenvalt met $f(x)$, maar ook nog holomorf is in een gebied, dat een deel van den rand van C bevat?

Beschouw nu onze functie: $\sum_0^{\infty} x^{n!}$ en trek een rationale straal d.w.z. een straal met een argument $\alpha = 2\pi \frac{p}{q}$, p en q geheel en onderling ondeelbaar. $\quad x = \varrho e^{2\pi \frac{p}{q} i}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{q-1} x^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} x^{n!}$$

Het eerste deel is begrensd, het tweede deel kunnen we als volgt schrijven: $\varrho^{q!} + \varrho^{(q+1)!} + \ldots > \varrho^{q!} + \varrho^{(q+1)!} + \ldots \varrho^{(q+A)!}$ waarin A willekeurig.

Maar dit is grooter dan $A + 1$ als $\varrho \to 1$.

Dus op een overal dichte φ-verzameling is de randlimiet ∞, waarmee tegelijk de onmogelijkheid van de voortzetting is aangetoond.

* * *

We willen ons bij de randlimieten beperken tot de waarden 0 en ∞. Door een kleine redactie-wijziging kan men dan gemakkelijk de analoge stellingen afleiden voor eindige waarden.

Achtereenvolgens willen we dan bespreken in hoofdstuk I:

de stellingen van Fatou en Riess.

In hoofdstuk II: de functie van Fatou, die ook verder een belangrijke rol speelt.

Daarna levert hoofdstuk III ons de behandeling van het door Fatou gestelde probleem, zoals dit door Lusin en Priwaloff is uitgewerkt.

Deze constructie wordt dan vervangen door een andere, die zijn uitbreiding vindt in hoofdstuk IV en daar de constructie van Lusin aanmerkelijk vereenvoudigt.

In hoofdstuk V tenslotte eenige uitbreidingen op meervoudig samenhangende gebieden.

HOOFDSTUK I.

§ 1. De stelling van Fatou.

Zij gegeven een functie $\psi(z)$, holomorf in een cirkel om den oorsprong met straal R. Onderstellen we voorloopig niet anders dan $|\psi(z)| < M$.

$$\text{Stel } z = Rx \qquad \psi(z) = \psi(Rx) = \varphi(x)$$

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{M}$$

$f(x)$ is dan holomorf in den eenheidscirkel

$$|f(x)| < 1.$$

De stelling van Fatou luidt nu:

Op een volle maat bestaat de radiale limiet naar den rand.

We onderzoeken n.l.

$$F(z) = \int_0^z f(t)\,dt \text{ als } z \text{ een punt in den cirkel of een punt}$$

van den omtrek C is.

De integraal bestaat op het gesloten interval $(0 - z)$, omdat op het open vak de functie gelijkmatig begrensd is. Welke waarde we $f(t)$ toekennen op den rand C, doet aan de waarde van $F(z)$ niets af.

We weten nu echter wel dat:

$$|F(z) - F(z')| \leq \int_{z'}^{z} |f(t)|\,dt \leq |z - z'|, \quad \begin{array}{l} |z| < 1 \\ |z'| < 1 \end{array}$$

$F(z)$ is dus continu in den cirkel $|z| \leq 1$.

Neem nu 2 randpunten α en β. Daar van $f(x)$ op den rand niets bekend is, moeten we als volgt te werk gaan: Stel $\varrho_n \to 1$ als $n \to \infty$

$$\left| \frac{F(\varrho_n \alpha) - F(\varrho_n \beta)}{\varrho_n(\alpha - \beta)} \right| < 1 \text{ dus tot de limiet overgaande}$$

$$\left| \frac{F(\alpha) - F(\beta)}{\alpha - \beta} \right| \leq 1$$

$F(z)$ heeft dus voor $|x| \leq 1$ een begrensd differentiequotient.

$F(z)$ is continu voor $|x| \leq 1$.

Op den rand kunnen we $F(z)$ opvatten als functie van $\varphi: G(\varphi)$.

$G(\varphi)$ heeft een begrensd differentiequotient. We willen nu weten, of er misschien punten van den rand zijn, waar de afgeleide bestaat.

Denk eerst $G(\varphi)$ reëel.

Zij $R(\varphi)$ de rechterbovenafgeleide d.w.z. $\overline{\lim}_{\triangle\varphi\to 0} \frac{G(\varphi+\triangle\varphi)-G(\varphi)}{\triangle\varphi}$

en $r(\varphi)$ de rechterbenedenafgeleide d.w.z. $\underline{\lim}_{\triangle\varphi\to 0} \frac{G(\varphi+\triangle\varphi)-G(\varphi)}{\triangle\varphi}$

$R(\varphi)$ en $r(\varphi)$ zijn sommeerbaar, want ze zijn begrensd en limieten van sommeerbare functies.

Na deze, we zouden haast zeggen: mislukte differentiatie, beschouwen we
$$\psi(\varphi) = \int_a^\varphi R(t)\,dt$$

$\psi(\varphi)$ is **absoluut continu,** d.w.z. als men het φ interval verdeelt in een willekeurig aantal vakken, twee aan twee buiten elkaar gelegen, en de som neemt van de variatie van ψ in die vakken, dan is die som kleiner dan een voorafgegeven getal $\varepsilon > 0$, als de som van de vakken maar klein genoeg is.

Nu is $R(\varphi)$ op een volle maat **approximatief continu,** d.w.z. dat de verzameling punten φ', waarvoor geldt:
$$R(\varphi)-\varepsilon < R(\varphi') < R(\varphi+\varepsilon) \text{ in } \varphi \text{ de dikte 1 heeft.}$$

In die volle maat geldt nu: $\psi'(\varphi) = R(\varphi)$.

De rechterbovenafgeleide van:
$$G(\varphi)-\psi(\varphi) \text{ is nu op volle maat: } 0.$$

Maar óók: $G(\varphi)-\psi(\varphi)$ is absoluut continu. Maar dan is $G(\varphi)-\psi(\varphi)$ constant op het heele vak.
$$G(\varphi)-\psi(\varphi) = G(a)-\psi(a) = G(a)$$
$$G(\varphi) = \psi(\varphi) + G(a).$$

Op een volle maat geldt dus: $\psi'(\varphi) = G'(\varphi) = R(\varphi) = r(\varphi)$ m.a.w.

$G(\varphi)$ **is op een volle maat differentiëerbaar.**

Resumeerend:

Als $f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$, begrensd is voor $|z| < 1$, dan geldt: $F'(z) = f(z)$ binnen den cirkel.

Op volle maat van den rand bestaat $F'(\varphi)$.
$$F(z) = \int_0^z f(t)dt.$$

$F(z) = F(\varrho e^{\varphi i})$. Op den rand: $F(e^{\varphi i}) = U(1, \varphi) + iV(1, \varphi) = G(\varphi)$

$\left|\frac{\Delta F}{\Delta \varphi}\right| < 1$ dus:

$$\left|\frac{\Delta U}{\Delta \varphi} + i\frac{\Delta V}{\Delta \varphi}\right| < 1 \text{ dus } \left|\frac{\Delta U}{\Delta \varphi}\right| \text{ en } \left|\frac{\Delta V}{\Delta \varphi}\right| < 1$$

dus op volle maat bestaan: $\frac{dU}{d\varphi}$ en $\frac{dV}{d\varphi}$, dus ook $G'(\varphi)$.

Om nu verder te komen gaan we de hulp inroepen van de **integraal van Poisson.**

U en V zijn harmonisch, dus geldt:

$$U(\varrho, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2} \cdot U(1, \varphi)\, d\varphi$$

$$V(\varrho, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2} \cdot V(1, \varphi)\, d\varphi,$$

$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2} G(\varphi)\, d\varphi$ en we schenken onze aandacht aan die volle φ-maat waar $G'(\varphi)$ bestaat. Zij A een punt daarvan. $G'(A) = \lambda$ dan is $|\lambda| \leqq 1$.

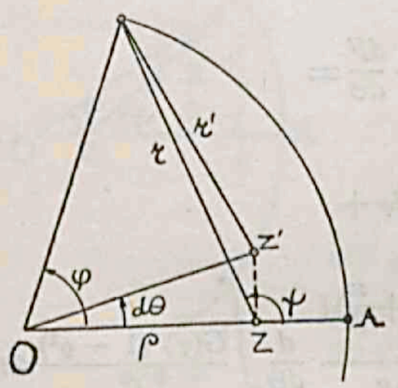

Fig. 2.

$f(z) = F'(z)$. Nemen we z op OA. Nu mogen we in den cirkel in willekeurige richting differentiëeren. We doen dit echter niet langs den straal, om de typische uitdrukking $(1 - \varrho^2)$ te behouden. We differentiëeren daarom loodrecht op OA

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{dF}{e^{(\Theta + \frac{\pi}{2})i}\varrho\, d\Theta},$$

waarin Θ het argument van A is.

$$f(z) = F'(z) = \frac{dF}{e^{(\Theta + \frac{\pi}{2})i}\varrho\, d\Theta} =$$

$$= e^{-(\Theta + \frac{\pi}{2})i} \cdot \frac{1}{2\pi\varrho}\frac{d}{d\Theta}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2} G(\varphi)\, d\varphi\right\}.$$ Nu is bij

de differentiatie ϱ constant, r niet, zoodat men zonder meer krijgt:

$$f(z) = -\frac{e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}}{2\pi\varrho} \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)\,(1-\varrho^2)}{r^3}\, d\varphi \cdot \frac{\delta r}{\delta\Theta}$$

Voeren we den hoek ψ in, dan mogen we schrijven

$$\frac{\delta r}{\varrho\,\delta\Theta} = \sin\psi$$

Dus:

$$f(z) = -\frac{e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)\,(1-\varrho^2)\sin\psi}{r^3}\, d\varphi$$

Voor het gemak nemen we arg $A = 0$, dus $G'(0) = \lambda$

$\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{G(\varphi)-G(0)}{\varphi} = \lambda$ en dus ook $\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{G(\varphi)-G(0)}{\sin\varphi} = \lambda$. Bij gegeven $\varepsilon > 0$, kunnen we om A een boog $\alpha\beta$ leggen zóó, dat daarop geldt: $G(\varphi) = G(0) + \lambda\sin\varphi + \Theta.\varepsilon.\varphi$, waarbij dan $|\,\Theta\,| < 1$.

Dit gebruiken we nu op den minorboog $\alpha\beta$ in de formule:

$$f(z) = \frac{e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}}{\varrho} \cdot \frac{dF}{d\Theta} =$$

$$= -\frac{e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}}{\pi} \int\limits_{\text{over den majorboog}} \frac{G(\varphi)\,(1-\varrho^2)\sin\psi}{r^3}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}}{2\pi\varrho} \frac{d}{d\Theta} \int\limits_{\text{over den minorboog}} \frac{G(\varphi)\,(1-\varrho^2)}{r^2}\, d\varphi$$

Schatten we den eersten term, onderzoeken we meteen of $\lim\limits_{\varrho\to 1}$ bestaat.

Die schatting geeft: $\left| \dfrac{e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}}{\pi} \displaystyle\int \dfrac{G(\varphi)\,(1-\varrho^2)\sin\psi}{r^3}\, d\varphi \right| <$

$$< \frac{M(1-\varrho^2)\cdot 2}{h^3} \xrightarrow[\varrho\to 1]{} 0 \qquad \begin{array}{c} |\,G(\varphi)\,| < M \\ r > h \end{array}$$

Nu den tweeden term. Daar vullen we voor $G(\varphi)$ de formule in, die we afleidden. Zoo krijgen we:

$$e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}\frac{d}{\varrho d\Theta}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} G(0)\,\frac{1-\varrho^2}{r^2}\,d\varphi < e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}\frac{d}{\varrho d\Theta}\,G(0)=0$$

Verder: $$e^{-(\Theta+\frac{\pi}{2})i}\frac{d}{2\pi\varrho d\Theta}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\lambda}{\varrho}\,.\,\varrho\sin\varphi\,\frac{1-\varrho^2}{r^2}\,d\varphi$$

Maar nu is $\varrho\sin\varphi$ harmonisch, n.l. de loodlijn op OA.

De differentiatie levert dus λ.

Tenslotte nog

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\text{over den minorboog}}\frac{\Theta\,.\,\varepsilon\,.\,\varphi(1-\varrho^2)\sin\psi}{r^3}\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int_{\alpha}^{\beta}\frac{|\varphi|\,(1-\varrho^2)\,|\sin\psi|}{r^3}\,d\varphi$$

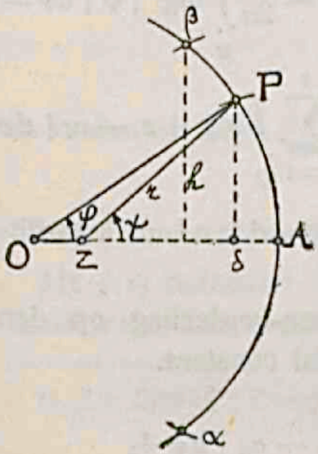

Fig. 3.

Nu is steeds $r\,|\sin\psi|<|\varphi|$, dus

$$\leqslant \varepsilon\int_{\alpha}^{\beta}\frac{|\varphi|^2\,(1-\varrho^2)}{r^4}\,d\varphi$$

Maar

$$\frac{|\varphi|}{r}=\left|\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right|.\left|\frac{\sin\varphi}{r}\right|<\frac{\pi}{2} \text{ want } \frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin\varphi}{\varphi}<1$$

op $(0,\frac{\pi}{2})$ en $\left|\frac{\sin\varphi}{r}\right|=\left|\frac{\delta P}{r}\right|<1.$ (Fig. 3.)

Vullen we dit in, dan krijgen we:

$$\leqslant \varepsilon\,.\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\pi^2}{4}\,.\,\frac{(1-\varrho^2)}{r^2}\,d\varphi \leqslant \varepsilon\,\frac{\pi^2}{4}\int_{0}^{2\pi}\frac{(1-\varrho^2)}{r^2}\,d\varphi=\varepsilon\,\frac{\pi^3}{2}.$$

Maar dan hebben we aangetoond, dat er in A een radiale limiet is.

Als dus $f(z)$ holomorf is en $|f(z)|$ begrensd in den eenheidscirkel, dan bestaat op volle maat de radiale limiet naar den rand.

In 1916 vonden de Gebr. Riess de volgende uitbreiding:
Een bepaalde limiet bestaat slechts op een stralenverzameling met maat nul.

We leiden dan eerst even de volgende betrekking af:

$$\log |f(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\varrho \log |f|\, d\varphi, \text{ onderstellend}$$

dat $f(0) \neq 0$, $f(z)$ holomorf voor $|z| < R$, $\varrho < R$.

Het gelijkteeken geldt als $f(z) \neq 0$ in cirkel ϱ, dan immers is $\log |f(0)|$ harmonisch.

Stel dus $f(z)$ heeft in den cirkel R de nulpunten:
$a_1, \ldots a_n$, zóó dat: $0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \ldots. |a_{n-1}| \leqq |a_n|$.

Let op de nulpunten binnen ϱ. (Kies ϱ zóó, dat op ϱ géén nulpunten liggen.) Stel het zijn: $a_1, \ldots a_k$ geteld volgens hun moduli.

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-a_1)\ldots.(z-a_k)} \text{ is dan holomorf}$$

voor $|z| < R$ en $\neq 0$ in de punten $a_1, \ldots a_k$.

Dus geldt:

$$\log |\varphi(0)| = \log |f(0)| - \sum_{i=1}^{k} \log |a_i| = \frac{1}{2\pi}\int_\varrho \log |\varphi|\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\varrho \log |f|\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_\varrho \log |z - a_i|\, d\varphi$$

Maar $\int_\varrho \log |z - a_n|\, d\varphi = \int_\varrho \log r\, d\varphi = 2\pi \log \varrho$ d.i. n.l. de logarithmische potentiaal veroorzaakt door een massa-verdeeling op den cirkelomtrek. Binnen den cirkel is die potentiaal constant.

$$\log |f(0)| = \sum_{i=1}^{k} \log |a_i| - \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\int \log |z - a_n|\, d\varphi + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_\varrho \log |f|\, d\varphi$$

of $\log |f(0)| = \sum_{i=1}^{k} \log |a_i| - k \log \varrho + \frac{1}{2\pi}\int_\varrho \log |f|\, d\varphi$

Maar $|a_n| < \varrho$

$\log |a_n| < \log \varrho$ en dus

$$\log |f(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\varrho \log |f|\, d\varphi$$

Stel nu dat de limiet 0 op positieve maat bestaat. In de verzameling E, $\mu E > 0$, is de radiale limiet van $f(z): 0$. Dan is er een verzameling $E^1 < E$,[1] $\mu E^1 > 0$, waarop gelijkmatige convergentie tot nul is.

Zij $\varrho = 1 - \frac{1}{n}$.

Geef $\varepsilon > 0$, willekeurig, en bepaal N zóó dat als $n \geqslant N$, geldt:

$$| f(z) | < \varepsilon \text{ op } E^1, \ | z | \geqq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\log | f(0) | \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E^1} \log | f | \, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(E^1)^1} \log | f | \, d\varphi$$

als $(E^1)^1$ het complement is van E^1.

Nu is $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(E^1)^1} \log | f | \, d\varphi < \log M$ want $| f | < M$.

Dus geldt: $\log | f(0) | - \log M \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E^1} \log | f | \, d\varphi$

$$-A \leqslant -\mu E^1 \log \frac{1}{\varepsilon}$$

$$A > 0$$

$$A \geqslant \mu E^1 \log \frac{1}{\varepsilon}$$

en vinden we aldus de contradictie dat $\mu E^1 \leqslant \dfrac{A}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$

We kunnen de stelling van Riess dus als volgt inkleeden:

Als $f(z)$ holomorf is voor $| z | < 1$ en $| f(z) | < M$ en de radiale limiet naar den rand op positieve maat nul is, dan is $f(z) \equiv 0$.

---

[1]) Zie *Egoroff:* Comptes Rendues 1911, tome 152, p. 244—246.

HOOFDSTUK II.

§ 1. Bij het onderzoek van Fatou naar het gedrag van de integraal van Poisson, als deze integraal opgevat wordt als Lebesgue integraal, construeerde hij een functie, harmonisch en positief in den eenheidscirkel, die tot $+\infty$ nadert op een perfecte verzameling met maat nul. We willen deze functie hier bespreken, daar we er onmiddellijk toepassingen van kunnen maken op holomorfe functies.

Geef op een willekeurig segment AB een perfecte puntverzameling P, met maat nul. Zooals bekend, is deze puntverzameling niet aftelbaar en is zijn complement opgebouwd te denken uit aftelbaar vele, twee aan twee buiten elkaar gelegen intervallen $a_n\, b_n$, de z.g. „intervalles contigus" van Baire.[1])

Op het segment $a_n\, b_n$ construeeren we nu een sommeerbare, continue functie, die positief is en waaraan we in P de waarde $+\infty$ zullen toekennen.

Beschouw n.l. $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ in $a_n\, b_n$

$\varphi(x) = +\infty$ in P.

We zorgen nu dat

1°. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x)\, dx$ convergeert,

2°. $\lim_{n \to \infty} \min \varphi_n(x) = +\infty$, dan is $\varphi(x)$ óók sommeerbaar en continu.

Zij de lengte van $a_n b_n : s_n$

$$\int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x)\, dx = s_n y_n + \text{oppervl. geharc. gebied.}$$

Nu kunnen we zorgen dat $y_n \to \infty$ terwijl toch $\sum_{n=1}^{\infty} s_n\, y_n$ convergeert, (zie *Borel:* Leçons sur les series à termes positifs) daar $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ convergeert.

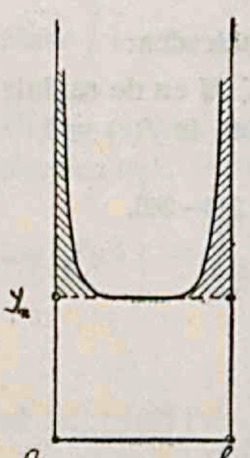

Fig. 4.

De oppervlakten van die geharceerde gebieden hebben we dan nog

[1]) Borel: Leçons sur la théorie des fonctions.

geheel in de hand, zoodat we dus voor de convergentie van de som van die gebieden gemakkelijk kunnen zorgen.

Dat $\varphi(x)$ continu is in het complement van P ten opzichte van AB is duidelijk. Onderzoeken we nog even of dit ook geldt voor x in P.

Zij dan $x_1, \ldots. x_n \ldots.$ een puntverzameling die convergeert naar een punt van P.

Dan moeten òf $x_1, \ldots. x_n \ldots.$ punten van P zijn, en dan is

$$\lim_{n=\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_n) = +\infty = \varphi(x)$$

òf alle x_n zijn punten van P' dus in intervallen $a_n b_n$. Hier moeten we nog onderscheiden: 1°. de nummers van die intervallen zijn begrensd, maar dan moet x_n naderen tot een randpunt en ook dan is $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_n) = +\infty$; 2°. die rangnummers zijn niet begrensd, maar dan is $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_n) \geqq \lim\limits_{n=\infty} \min \varphi(x_n) = +\infty$.

We beschouwen nu

$$F(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2} \varphi(u)\, du,$$

als $\varphi(x)$ de bovengeconstrueerde functie is.

$F(r, \Theta)$ is harmonisch en positief in den eenheidscirkel. Onderzoeken we de eventueele limiet van $F(r, \Theta)$ als (r, Θ) nadert tot een punt $(1, \Theta_0)$ van P.

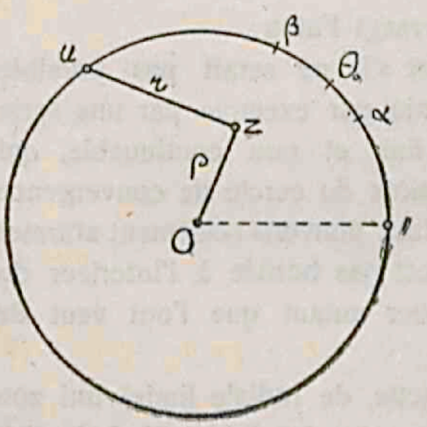

Fig. 5.

$f(\Theta_0) = +\infty$. Om Θ_0 is een omgeving waar $f(\Theta) > M$

$M > 0$ en willekeurig.

$$F(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \frac{1-\varrho^2}{r^2} \varphi(u)\, du + $$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_\beta^\alpha \frac{1-\varrho^2}{r^2} \varphi(u)\, du.$$

Hiervan onderzoeken we de limiet als $(\varrho, \Theta) \rightarrow (1, \Theta_0)$. Het tweede deel nadert dan tot 0, want $r > h$, dus geldt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\beta^\alpha \frac{1-\varrho^2}{r^2} \varphi(u)\, du < \frac{1-\varrho^2}{2h^2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u)\, du < \frac{1-\varrho^2}{2h^2\pi} . G,$$ want $\varphi(u)$ is sommeerbaar.

Voor het eerste deel geldt:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1-\varrho^2}{r^2} \varphi(u)\, du \right| > \frac{M}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1-\varrho^2}{r^2}\, du = \frac{M}{2\pi} \left(\int_{0}^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2}\, du - \right.$$

$$\left. - \int_{\text{over den majorboog}} \frac{1-\varrho^2}{r^2}\, du \right) = \frac{M}{2\pi} - \underset{\varrho \to 1}{(\to 0)}.$$

Als (ϱ, Θ) dus dicht genoeg bij $(1, \Theta_0)$ is, is deze uitkomst grooter dan $\frac{M}{2\pi}$. In Θ_0 is de limiet dus $+\infty$, onverschillig op welke manier (ϱ, Θ) tot $(1, \Theta_0)$ nadert, m.a.w. de tweedimensionale limiet is oneindig.

§ 2. Zij nu $G(r, \Theta)$ harmonisch in den eenheidscirkel, geconjugeerd aan $F(r, \Theta)$

$\varphi(z) = F(r, \Theta) + i\, G(r, \Theta)$ is dan holomorf

voor $|z| < 1$, $RD\, \varphi(z) > 0$.

Als $|z| \to 1$ in de perfecte puntverzameling P, $\mu P = 0$, dan nadert $RD\, \varphi(z) \to +\infty$.

Beschouw bovendien $e^{-\varphi(z)}$, holomorf van $|z| < 1$

$e^{-\varphi(z)}$ nadert tot 0 als $z \to P$.

§ 3. Aan het eind van zijn artikel vraagt Fatou:

— „On pourrait même se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir une fonction analytique définie par exemple par une serie de Taylor à rayon de convergence fini, et non continuable, qui prenne la valeur zéro en tous les points du cercle de convergence suivant les rayons qui y aboutissent. Nous pouvons seulement affirmer que si une telle fonction existe elle n'est pas bornée à l'interieur du cercle et même qu'elle peut s'approcher autant que l'ont veut de toute valeur donnée à l'avance". —

Dat bij een begrensde holomorfe functie, de radiale limiet nul zou bestaan op het heele segment $(0, 2\pi)$, zonder dat die functie indentiek nul zou zijn, is reeds weerlegd in het eerste hoofdstuk, door de stelling van de Gebr. Riess.

In een artikel van *N. Lusin* en *J. Priwaloff* getiteld: „Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques" in de Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 1925 tome 42, wordt deze vraag onder de oogen gezien.

In Chap. II § 14 vindt men:

Gegeven op $|z| = 1$ een verzameling M van punten A, $\mu M > 0$. Stel $f(z)$, holomorf voor $|z| < 1$, heeft de randlimiet nul, als $z \rightarrow A$ langs willekeurigen weg, die in zijn eindpunt niet raakt aan $|z| = 1$. Dan volgt $f(z) \equiv 0$.

Bovendien construeert men in Chap. IV, §§ 33, 34 **een functie $\Omega(z)$, holomorf voor $|z| < 1$, die op volle maat de radiale limiet nul heeft.**

$\Omega(z)$ is niet identiek 0.

Alvorens tot de bespreking van die functie over te gaan, willen we eerst even een functie beschouwen, die in datzelfde artikel voorkomt: Chap. I, § 3.

We willen die constructie dan vervangen door een andere, die eenvoudiger is, maar bovendien, zooals nog blijken zal, zich meer leent tot uitbreiding.

HOOFDSTUK III.

§ 1. We gaan nu bespreken de constructie van een functie $f(z)$, holomorf voor $|z| < 1$.

$|f(z)|$ nadert uniform tot oneindig, als z tot den rand nadert in concentrische ringen.

Beschouw n.l.

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, . \, z^{\lambda^2_n \mu_n}$$

$$\lambda_n, \mu_n \text{ geheel, } \lim_{n=\infty} \lambda_n = \lim_{n=\infty} \mu_n = \infty$$

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots . < \lambda_n < \lambda_{n+1} \ldots .$$
$$0 < \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 \ldots . < \mu_n < \mu_{n+1} \ldots .$$

(1) .... $\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(z) + \lambda_n z^{\lambda^2_n \, . \, \mu_n}$ als we onder

$\varphi_i(z)$ verstaan $\sum_{n=0}^{i} \lambda_n . z^{\lambda^2_n \mu_n}$

(2) .... Voor $|z| < 1$ geldt: $|\varphi_n(z)| \leqq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ en

(3) .... $|\varphi_n(z)| \geqq \lambda_n \, . \, |z|^{\lambda^2_n . \mu_n} - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$

In den ring:

$$\left\{ (1 - \frac{1}{\lambda^2_n \mu_n}), \, 1 \right\} \text{ geldt:}$$

$$|\varphi(z)| \geqq \lambda_n \left(1 - \frac{1}{\lambda^2_n \, . \, \mu_n}\right)^{\lambda^2_n . \mu_n} - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$$

Maar $(1 - \frac{1}{m})^m$ stijgt monotoon met m tot $\frac{1}{e}$,

(4) .... waaruit volgt dat op den duur: $(1 - \frac{1}{m}) > \frac{1}{3}$, terwijl ook $(1 - \frac{1}{m}) < \frac{1}{2}$

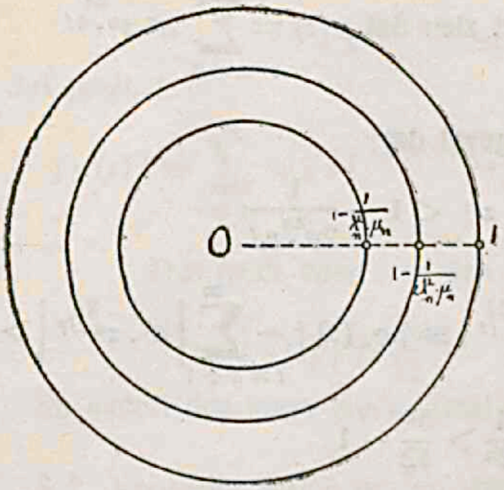

Fig. 6.

(5) .... Hieruit volgt:

$$|\varphi_n(z)| \geqslant \frac{\lambda_n}{3} - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$$

Beschouw nu den cirkel

$$\left\{ 0, \left(1 - \frac{1}{2\lambda^2_n \, . \, \mu_n}\right) \right\}$$

Daarin geldt:

(6) .... $\left| \lambda_{n+1} \, . \, z^{\lambda^2_{n+1} \, . \, \mu_{n+1}} \right| \leqslant$

$$\leqslant \lambda_{n+1} \left(1 - \frac{1}{2\lambda^2_n \, \mu_n}\right)^{\lambda^2_{n+1} \, . \, \mu_{n+1}} =$$

$$= \lambda_{n+1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2\lambda^2_n \, . \, \mu_n}\right)^{2\lambda^2_n \, . \, \mu_n} \right\}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^2 . \, \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}} <$$

$$< \lambda_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^2 . \, \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}}$$ gebruik makend van de ongelijkheden (4) pag. 24.

Kies nu b.v. $\lambda_n = a^n$, neem $a_n \geqslant 5$
en $\lambda_n = n!$ Men ziet dat deze getallen aan de gestelde eischen voldoen.

De ongelijkheden gaan dan over in:

(5) in (7) .... $|\varphi_n(z)| \geqslant \frac{a^n}{3} - (1 + a + \dots a^{n-1}) =$

$$= \frac{a^n}{3} - \frac{a^n - 1}{a - 1} > a^n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{a-1}\right) > \frac{a^n}{12}$$

mits z ligt in den ring:

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{a^{2n} \, . \, n!}\right), 1 \right\}$$

(6) in (8) .... $\left| \lambda_{n+1} \, z^{\lambda^2_{n+1} \, . \, \mu_{n+1}} \right| < a^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{a^2(n+1)} =$

$$= \left(\frac{a}{2^{\frac{a^2}{2}}}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

mits $|z| < 1 - \frac{1}{2a^{2n} \, . \, n!}$

Ongelijkheid (8) laat ons direct zien dat $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{a^{2n}.n!}$ holomorf is voor $|z| < 1$.

Letten we nu speciaal op het geval dat

$$1 - \frac{1}{a^{2n}\cdot n!} < |z| < 1 - \frac{1}{2a^{2n}\cdot n!}$$

$$|\varphi(z)| = |\varphi_n(z) + \sum_{i=n+1}^{\infty} a^i z^{a^{2i}.i!}| \geqq |\varphi_n(z)| - \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| a^i . z^{a^{2i}.i!} \right| >$$

$$> \frac{a^n}{12} - \frac{1}{2^n} > \frac{5^n}{12} - 1$$

Maar dan is $\lim_{n=\infty} |\varphi(z)| = \infty$.

Hiermede is die functie dus geconstrueerd. In § 4 van Chap. I, behandelen Lusin en Priwaloff de radiale limiet langs een straal met

argument: $k . \frac{2\pi}{\lambda^2_n . \mu_n}$ $\quad$ k geheel, n vast.

Die radiale limiet is oneindig.

Een opmerking vooraf. De nullen van zoo'n functie moeten elk punt van $|z| = 1$ tot verdichtingspunt hebben. Anders zou er een punt α van den omtrek zijn in welks omgeving $\frac{1}{f}$ holomorf was. Maar dan zou men twee stralen OA en OB kunnen trekken, met eindpunten A en B, die in de buurt van α liggen, waarop $\frac{1}{f} \to 0$, terwijl ook $\frac{1}{f} \to 0$ op cirkelbogen, met middelpunt O, die tusschen OA en OB loopen. Waaruit onmiddellijk volgt dat $\frac{1}{f} \equiv 0$ zou zijn.

De nullen van deze functie liggen dus in de ringen:

$$1 - \frac{1}{2\lambda^2_n . \mu_n},\ 1 - \frac{1}{\lambda^2_{n+1} . \mu_{n+1}}$$

Beschouw nu $\qquad \varphi(z) = \varphi_{n-1}(z) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_\nu z^{\lambda^2_\nu . \mu_\nu}$

$$z = |z|\, e^{\frac{2k\pi}{a^{2n}.n!}} \qquad \lambda_\nu z^{\lambda^2_\nu . \mu_\nu} = \lambda_\nu |z|^{\lambda^2_\nu . \mu_\nu} e^{\frac{2k\pi}{\lambda^2_n.\mu_n} . \mu_\nu . \lambda^2_\nu i}$$

Maar als $\nu \geqq n$ dan is $\frac{\mu_\nu \lambda_\nu^2}{\mu_n . \lambda_n^2}$ geheel en geldt:

$\lambda_\nu z^{\lambda_\nu^2 . \mu_\nu} = \lambda_\nu \mid z \mid^{\mu_\nu \lambda_\nu^2}$ en zijn alle termen dus positief.

$$\mid \varphi(z) \mid \geqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_\nu \mid z \mid^{\lambda_\nu^2 . \mu_\nu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu > \lambda_n \mid z \mid^{\lambda_n^2 \mu_n} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu$$

Dus geldt voor z in den ring $\left\{ (1 - \frac{1}{\lambda_n^2 . \mu_n}), 1 \right\}$

$\mid \varphi(z) \mid > \frac{a^n}{12}$ volgens (7) pagina 25.

En nadert dus langs zoo'n straal $\mid \varphi(z) \mid$ tot oneindig.

§ 2. Vooreerst willen we nu deze constructie vervangen door een andere die eenvoudiger is.

We geven in den eenheidscirkel de concentrische cirkels met stralen

$$0 < r_1 < R_1 < r_2 < \dots . r_k < R_k < r_{k+1} \dots \xrightarrow[k=\infty]{} 1$$

Bij elke k bepalen we dan de getallen A_k en n_k zóó, dat

$$A_k r_k^{n_k} < \frac{1}{k^2} \text{ en } A_k R_k^{n_k} = 3$$

Dit is voor elke k mogelijk, want de combinatie van die twee voorwaarden geeft

$(\frac{r_k}{R_k})^{n_k} < \frac{1}{3k^2}$, waaruit n_k. Met behulp van n_k en $A_k R_k^{n_k} = 3$ vinden we dan A_k.

We beschouwen nu: $f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - A_k x^{n_k})$.

De eerste vraag is natuurlijk: Stelt dit ∞-product in den eenheidscirkel een holomorfe functie voor?

Daartoe onderzoeken we of voor: $\mid x \mid \leqslant \Theta < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \mid A_k x^{n_k} \mid$ gelijkmatig convergeert.

Er is echter een rangnummer k te kiezen zoodanig dat $\Theta < r_k$, want $\lim_{k=\infty} r_k = 1$.

Dan geldt dus na dat rangnummer:

$$\mid A_k x^{n_k} \mid < A_k r_k^{n_k} < \frac{1}{k^2}$$

$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - A_k x^{n_k})$ stelt dus in den eenheidscirkel een holomorfe functie voor. Hoewel nu de suite (r_k, R_k) geheel willekeurig was, kunnen we nu het volgende reeds afleiden:

Beschouw $$R_p < | x | < r_{p+1}$$

Zij $k \leq p$.

$$| A_k x^{n_k} | > A_k R_k^{n_k} = 3$$

Dus $| 1 - A_k x^{n_k} | > 2$ en tenslotte $| \prod_{k=1}^{p} (1 - A_k x^{n_k} | > 2^p$

Zij $k > p$.

$$| A_k x^{n_k} | < A_k r_k^{n_k} < \frac{1}{k^2}$$

$$| 1 - A_k x^{n_k} | > 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dus $| \prod_{k=p+1}^{\infty} (1 - A_k x^{n_k}) | > \prod_{k=p+1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k^2}) > \prod_{k=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{k^2}) = C > 0$

terwijl C ònafhankelijk is van p.

In den ring: (R_p, r_{p+1}) geldt dus:

$$| f(x) | > C \,.\, 2^p$$

$$\lim_{p=\infty} | f(x) | = \infty.$$

Deze functie nadert dus in ringen uniform tot oneindig.

De nulpunten van deze functie volgen uit:

$$1 - A_k x^{n_k} = 0$$

$$x = \sqrt[n_k]{\frac{1}{A_k}}$$

$$\left| \sqrt[n_k]{\frac{1}{A_k}} \right| = \frac{R_k}{3^{\frac{1}{n_k}}} < R_k \text{ en óók: } \left| \sqrt[n_k]{\frac{1}{A_k}} \right| > k^{\frac{2}{n_k}} r_k \geq r_k.$$

De nulpunten liggen dus in de ringen (r_k, R_k). Ze verdichten zich natuurlijk naar den omtrek $| z | = 1$. Zij nu α_k een wortel van $A_k x^{n_k} = 1$. Om de wortels α_k leggen we cirkels met stralen $\frac{1}{n_k^2}$.

Beschouw nu $| x^n - 1 |$ als $| x - 1 | = \frac{1}{n^2}$

$$x = 1 + \frac{1}{n^2} \,.\, e^{\varphi i}$$

en $$x^n = 1 + \frac{1}{n} \,.\, e^{\varphi i} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^4} e^{2\varphi i} + \dots \frac{1}{n^{2n}} \,.\, e^{n\varphi i}$$

$$x^n - 1 = \frac{1}{n} e^{\varphi i} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^4} \,.\, e^{2\varphi i} + \dots \frac{1}{n^{2n}} \,.\, e^{n\varphi i}$$

$$|x^n - 1| = \left| \frac{1}{n} e^{\varphi i} + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!\,n^2} e^{2\varphi i} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!\,n^3} e^{3\varphi i} + \right.$$

$$\left. + \ldots \frac{1}{n^{2n}} e^{n\varphi i} \right|$$

Nu is $\left| \frac{1-\frac{1}{n}}{2!\,n^2} e^{2\varphi i} + \ldots \frac{1}{n^{2n}} e^{n\varphi i} \right| < \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) < \frac{e-1}{n^2}$.

$|x^n - 1| > \frac{1}{n} - \frac{e-1}{n^2} > \frac{M}{n^2}$ waarin M onafhankelijk van n.

Dit passen we toe op ons ∞-product.

$$\left| 1 - A_k x^{n_k} \right| = \left| A_k a_k^{n_k} - A_k x^{n_k} \right| =$$

$$= A_k a_k^{n_k} \left| 1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^{n_k} \right| \leqq \frac{M}{n_k}$$

voor $|x - a_k| = \frac{|a_k|}{n^2_k}$

We gaan nu de suite (r_k, R_k) eenigszins specialiseeren en kiezen

$$r_k = \mu^{\frac{1}{2k}},\ R_k = \mu^{\frac{1}{2k+1}},\ 0 < \mu < 1$$

Deze μ is verder nog geheel willekeurig.

$\left(\frac{r_k}{R_k}\right)^{n_k} < \frac{1}{3k^2}$ is een voorwaarde voor n_k.

Kies $n_k \backsim k^3$.

Dan geldt voor de stralen van de cirkels om de nulpunten:

$$\gamma_k \backsim \frac{1}{k^6}.$$

Er is nu een rangnummer k te kiezen, zóó groot, dat na dat nummer die cirkels liggen in de ringen (R_{k-1}, R_{k+1}) want $r_k - R_{k-1} =$

$$= \mu^{\frac{1}{2k-1}} \left(\mu^{-\frac{1}{2k(2k-1)}} - 1\right) \backsim \mu^{-\frac{1}{2k(2k-1)}} - 1 =$$

$$= e^{\frac{1}{2k(2k-1)} \log \frac{1}{\mu}} - 1 \backsim \frac{\log \frac{1}{\mu}}{4k^2}.$$ En we zien dus dat

$$\lim_{k=\infty} \frac{\gamma_k}{(r_k - R_{k-1})} = 0.$$

In den ring (R_{k-1}, r_{k-1}) geldt op den rand, dat overal

$|f(z)| > 2^{k-1} \cdot \frac{M}{k^3} \cdot C$. Dus ook in den heelen ring.

In het overblijvende gebied d.i. den cirkel min de cirkels om de nulpunten a_k, nadert $f(z)$ dus tot oneindig, uniform voor $|z| \to 1$.

Na zeker rangnummer k liggen al deze cirkels buiten elkaar. In elken ring (r_k, r_{k+1}) vindt men er k^3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k^6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Dus convergeert ook de som der hoeken, waaronder we die cirkels zien. Kies een zoo hoog rangnummer N, dat de som van de hoeken waaronder we de cirkels zien met rangnummer $\geqq N$, $< \varepsilon$ als $\varepsilon > 0$, een willekeurig vooraf gegeven getal is. Neem dan een straal uit de verzameling met maat $(2\pi - \varepsilon)$ bestaande uit stralen buiten die sectoren gelegen.

Deze straal wordt slechts door hoogstens eindig vele cirkels gesneden en dus geldt:

Op een stralenverzameling met maat $(2\pi - \varepsilon)$, is de radiale limiet oneindig.

Of daar ε willekeurig was:

Op een volle maat is de radiale limiet oneindig.

In het reeds genoemde artikel van Lusin en Priwaloff wordt in Chap. II, § 15, de volgende stelling bewezen:

Als een functie holomorf is voor $|z| < 1$, en tot een bepaalde tweedimensionale limiet nadert, die $+\infty$ is, op een puntverzameling M van den rand, $\mu M > 0$, dan is die functie $\equiv \infty$.

Deze stelling doet ons nu ook de volgende eigenschap begrijpen:

Geef een willekeurig complex getal B.

$f(z) = B$ heeft dan binnen elken sector met top 0, oneindig veel wortels.

Deze stelling drukt dus uit, dat van een bepaalde randlimiet op positieve maat geen sprake kan zijn.

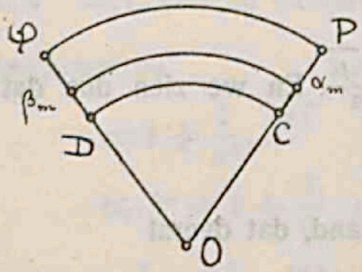

Fig. 7.

Het bewijs is eenvoudig.

Stel $f(z) - B \neq 0$ in den sector OPQ, voorbij den boog CD. In $PQ\,DC$ geldt dan: $f(z) - B \neq 0$.

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - B} \text{ holomorf.}$$

Op volle stralenmaat is de radiale limiet

limiet van $f(z):\infty$, dus die van $\varphi(z):0$. Dan is $\varphi(z)$ echter over den rand heen voortzetbaar en zou dus volgen $\varphi\equiv 0$.

Die voortzetbaarheid kan men als volgt even inzien:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_m\beta_m DC\alpha_m}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\lim_{m:\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_m\beta_m DC\alpha_m}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

als $\lim\limits_{m=\infty} 0\,\alpha_m = 0P$ en $\alpha_m\beta_m$ een cirkelboog is waarop $|f|>\varepsilon_m$

$$\lim_{m=\infty}\varepsilon_m=+\infty.$$

Dan mogen we gerust onderstellen dat langs $0R$ en $0Q$ de radiale limiet van $|f|:+\infty$ is

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C^{\alpha_m}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}+\int_D^{C}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}-\int_D^{\beta_m}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}+\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\right\}$$

Gaan we nu tot de limiet over dan wordt de 4e term nul, de tweede blijft dezelfde functie van z.

De drie eerste termen zijn **overal** holomorf **buiten** de integratieweg.

§ 3. Beschouwen we de functie van § 2, hoofdstuk III, die in gegeven concentrische ringen (R_k, r_{k+1}) tot oneindig nadert.

We willen aantoonen, dat we door een goede keuze der (r_k, R_k) suite, de groei van die functie met $1-\frac{1}{|z|}$ willekeurig in de hand hebben.

Anders uitgedrukt:

Zij $\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$ een willekeurige, positieve monotoon groeiende functie van $|z|$.

We beweren dan, dat we de (r_k, R_k) suite zóó kunnen kiezen, dat

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{f(z)}{\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)}=\infty.$$

Om dat in te zien beschouwen we $\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$ op het vak $(0,1)$.

Op de ψ-as, zoeken we de geheele getallen $1, 2, 3 \dots n \dots$ op en noemen de daarbij behoorende abscissen resp. $R_2, R_3, R_4 \dots R_{n+1}\dots$ De getallen $r_1, r_2, r_3 \dots$ kiezen we dan volgens constructievoorschrift willekeurig tusschen de R_k in.

Beschouw nu $\quad R_p\leqq |z|\leqq r_{p+1}>R_{p+1}$

Dan geldt: $\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)<\psi(R_{p+1})=p.$

$$\text{Dus} \lim_{p\to\infty} \frac{2^p}{\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)} \geqq \lim_{|z|\to 1} \frac{2^{\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)}}{\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)}=\infty$$

waarmede deze eigenschap is aangetoond.

§ 4. Beschouw nog eens op het vak (0, 1) een willekeurige monotoon stijgende functie $\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$.

Beschouw tegelijkertijd $\psi'\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$, dan is $\psi'\left(1-\frac{1}{|z|}\right)>0$.

We teekenen nu de punten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho_n \ldots$, zóó gekozen dat $\psi\left(1-\frac{1}{\varrho_k}\right)=k$.

Op elk vak $(\varrho_k, \varrho_{k+1})$ onderzoeken we nu $\psi'\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$.

Onderstellen we ψ' eindig, dan is er een geheel getal te vinden: E_k zóó gekozen dat $E_k>\psi'\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$ en

$$>k+1, \text{ voor } \varrho_k \leqq |z| \leqq \varrho_{k+1}.$$

We verdeelen dan het interval $(\varrho_{k-1}, \varrho_{k+1})$ in E_k gelijke deelen. Als dit is uitgevoerd voor alle k, $k=1, 2, 3 \ldots$, dan noemen we de zoo verkregen deelpunten: $R_1, R_2, R_3 \ldots R_n \ldots$

Daarna kiezen we de r_k, $R_{k-1}<r_k<R_k$ b.v. $r_k=\frac{1}{2}(R_k-R_{k-1})$.

Bij deze suite $(r_k\, R_k)$ bepalen we nu op de bekende wijze A_k en n_k en tenslotte de functie

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-A^k z^{n_k}\right)$$

Aangezien het nummer van de p^{de} ring altijd grooter is dan de waarden die ψ aanneemt in dat vak, geldt voor deze functie natuurlijk óók, dat ze sneller groeit dan de functie $\psi\left(1-\frac{1}{|z|}\right)$.

Nu gaan we om de nulpunten cirkels leggen met stralen: $\frac{1}{n_k^2}$.

In den ring (R_k, R_{k+1}) geldt dan

$$f| > \frac{2 \cdot q^{k-1}}{n_k} \quad \text{als } q \text{ vast is.}$$

Hoe gedraagt zich n_k dan?

$$\left(\frac{r_k}{R_k}\right)^{n_k} = \frac{1}{3k^2}. \text{ Stel } r_k = R_k - \varepsilon_k$$

Alle $\varepsilon_k > 0$. $\lim\limits_{k=\infty} \varepsilon_k = 0$.

$$n_k \log \frac{R_k - \varepsilon_k}{R_k} = \log \frac{1}{3k^2}$$

$$n_k = \frac{\log 3k^2}{-\log\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{R_k}\right)} = \frac{\log 3k^2}{\frac{\varepsilon_k}{2R_k} + \frac{\varepsilon^2{}_k}{4R_k^2} + \ldots} = \frac{\log 3k^2}{\dfrac{\frac{\varepsilon_k}{2R_k}}{1 - \frac{\varepsilon_k}{2R_k}}} =$$

$$= \frac{(2R_k - \varepsilon_k)\log 3k^2}{\varepsilon_k}$$

Dus $n_k \backsim \dfrac{\log 3k^2}{\varepsilon_k}$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}(R_k - R_{k-1}) = \frac{\varrho_k - \varrho_{k-1}}{2E_k}$$

Maar $\psi(\varrho_k) - \psi(\varrho_{k-1}) = \dfrac{\varrho_k - \varrho_{k-1}}{\varrho_k\, \varrho_{k-1}}\, \psi'(\Theta)$ als $\varrho_{k-1} \leqslant \Theta \leqslant \varrho_k$

$$1 = \frac{\varrho_k - \varrho_{k-1}}{\varrho_k\, \varrho_{k-1}}\, \psi'(\Theta)$$

Waaruit dus volgt dat $\varrho_k - \varrho_{k-1} \backsim \dfrac{1}{E_k}$

en $\varepsilon_k \backsim \dfrac{1}{E_k^2}$ en tenslotte:

$$n_k \backsim E_k^2 \log 3k^2$$

Maar door de keuze der $R_1, \ldots R_k \ldots$ geldt steeds in elk vak, dat het nummer van den ring òòk grooter is dan de waarden die ψ' in dat vak kan aannemen.

In het gebied $(R_k \cdot R_{k+1})$ buiten de cirkels γ_k om de nulpunten geldt dus:

$$|f| > \frac{E_k}{\frac{2\,.\,q}{E_k^2 \log 3k^2}}$$ en komen we dus tot de

conclusie, dat in het gebied $\{\, |z| < 1$ min de cirkels $\gamma_k \,\}$ onze functie uniform tot oneindig nadert.

We leidden vroeger reeds af (pag. 30) dat in elken sector, elke willekeurige waarde oneindig vaak moest worden aangenomen. Deze waarden verdichten zich dus naar de nullen en liggen op den duur in de cirkels γ_k.

De afstand van twee naburige nulpunten in denzelfden ring, gedraagt zich op den duur als $\frac{2\pi}{n_k}$.

Op den duur liggen dus de cirkels van denzelfden ring buiten elkaar.

$R_k - R_{k-1} \backsim \frac{1}{E_k^2}$. D.w.z. de afstand van twee nulpunten uit twee naburige ringen gedraagt zich als $\frac{1}{E_k^2}$. Maar $\frac{1}{n_k^2} \backsim \frac{1}{E_k^4 (\log 3k^2)^2}$, dus zullen op den duur alle cirkels γ_k buiten elkaar liggen. Bovendien volgt uit deze schatting dat de som van de hoeken waaronder we die cirkels vanuit 0 zien convergeert.

Onze conclusie is dus:

Geef een willekeurige functie: $\psi\left(1 - \frac{1}{|z|}\right)$.

Men kan de (R_k, r_k) **suite zòò kiezen, dat de bij die suite hoorende functie**

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - A_k z^{n_k}) \text{ op volle maat}$$

de radiale limiet oneindig heeft, terwijl zelfs:

$$\lim_{|z|=1} f(z) : \psi\left(1 - \frac{1}{|z|}\right) \to \infty.$$

HOOFDSTUK IV.

§ 1. We willen nu overgaan tot de constructie van de functie genoemd in hoofdstuk II, pag. 23.

Daartoe gaan we in den eenheidscirkel de volgende naaldengroep construeeren. We verdeelen den omtrek $| z | = 1$ in 60 gelijke deelen.

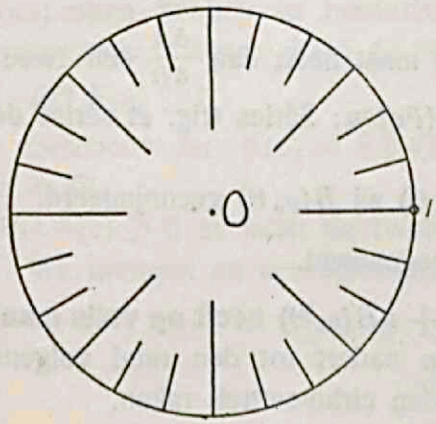

Fig. 8.

In elk deelpunt trekken we een straal met lengte $\frac{1}{2}$. De totale lengte van die stralen is dan 30.

Vervolgens verdeelen we elk vak weer in 60 deelen. In elk deelpunt zij de lengte van den straal $\frac{1}{3}$. Al deze stralen hebben dan de totale lengte: $60 \times 59 \times \frac{1}{3}$. Zoo gaan we steeds door. Algemeen dus: Verdeel de 60 vakken met lengte $\frac{2\pi}{60^{n-2}}$ in 60 gelijke deelen. Richt in elk deelpunt een straal op met lengte $\frac{1}{n}$. Het is duidelijk dat de lengten van dit aftelbaar aantal naalden een reeks vormen die divergeert.

Beschouwen we nu een punt M van $| z | = 1$, dat niet samenvalt met een deelpunt. Dan moet elke weg, die in dat punt eindigt en geheel gelegen is in het gebied $G : \{ \, | z | \leqq 1$ min die naaldengroep$\}$ in dat punt raken aan den straal $0M$. Immers, bij zoo'n punt verdichten zich naalduiteinden. Stel nu eens dat we die eindpunten verbonden met M. Voor elken n geldt dan $tg\alpha < \frac{2\pi}{60^{n-1}} \, . \, n \rightarrow 0$.

Nu gaan we dit gebied G afbeelden op den cirkel $| u | \leqq 1$. Zij $z = \varphi(u)$ de afbeeldingsfunctie

$$\varphi(u) \text{ is continu voor } | u | \leqq 1$$

Zij: $z = Re^{i\Phi}$, zij $u = \varrho e^{i\Theta}$

$$Re^{i\Phi} = \varphi(\varrho\, e^{i\Theta}) \qquad \log \varphi(u) = \log R + i\Phi$$

$$- i \log \varphi(u) = \Phi - i \log R$$

$A(\varrho, \Theta) = \Phi(\varrho, \Theta) - \Theta$ is harmonisch in $|u| < 1$, als verschil van twee harmonische functies, continu voor $|u| \leqq 1$.

$$A(\varrho_0, \Theta_0) = \lim_{r_0 \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A(r_0, \varphi)(r_0^2 - \varrho^2)}{r_0^2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r_0 \to 1} A(r_0\, \varphi) \frac{1 - \varrho^2}{r^2} d\varphi$$

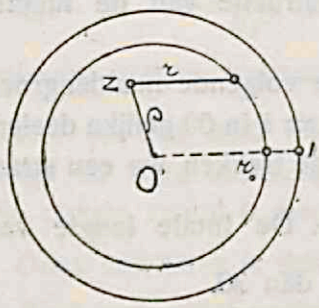

Fig. 9.

$\lim\limits_{\varrho \to 1} \{ \Phi - \Theta \}$ heeft op volle maat een afgeleide.

In die volle maat heeft dan $\frac{\delta A}{\delta \Theta}$ een twee-dim. limiet (*Fatou*: Séries trig. et séries de Taylor).

Aan $A(\varrho, \Theta)$ zij $B(\varrho, \Theta)$ geconjugeerd.

Aan $\frac{\delta A}{\delta \Theta}$ is dan op volle maat $\frac{\delta B}{\delta \Theta}$ toegevoegd.

M.a.w. **De functie $\Omega(u) = A(\varrho, \Theta) + i\, B(\varrho, \Theta)$ heeft op volle maat van $|u| = 1$, een afgeleide,** mits u nadert tot den rand volgens wegen die niet in hun eindpunt aan den cirkelomtrek raken.

$$\Omega(u) = i \log \varphi(u) + i \log u$$

$$\Omega(u) = i \log \frac{\varphi(u)}{u}$$

$$\varphi(u) = u\, e^{i\, \Omega(u)}$$

$$\varphi'(u) = e^{i\, \Omega(u)} + ui\, e^{i\, \Omega(u)} \,.\, \Omega'(u)$$

De afgeleide $\varphi'(u)$ heeft dus op een volle maat van $|u| = 1$ een tweedimensionale limiet, mits de weg in het eindpunt niet raakt aan den omtrek.

Nu kan de limiet nul, hoogstens op een verzameling van de maat nul bestaan. Is dat n.l. niet het geval, dan zou volgens hoofdstuk II, § 3, $\varphi \equiv 0$.

Dan kunnen we dus zeggen:

Bij deze afbeelding blijft de hoekvastheid nog op een volle maat van den rand bewaard.

Bovendien volgt nu echter:

De omtrek $|z| = 1$, correspondeert met een perfecte puntverzameling van de maat nul.

Immers stel $\mu P > 0$, dan zou de doorsnede van P met de volle maat, waar $\varphi'(u)$ bestaat en niet nul is, niet leeg zijn. Beschouw dan een punt van die doorsnede. Aangezien daar de hoek bij een afbeelding onveranderd blijft, correspondeeren met twee wegen in $|u| < 1$, die in dat punt elkaar onder een positieven hoek snijden, twee wegen in G, die elkaar in het eindpunt onder positieven hoek snijden, in strijd met hetgeen afgeleid werd op pag. 35.

We kunnen zelfs zeggen: Het beeld P van $|z| = 1$, moet vallen in de vereeniging der twee verzamelingen: waar $\varphi'(u)$ niet bestaat, en waar $\varphi'(u) = 0$.

We beschouwen nu in $|u| \leq 1$ de functie van Fatou, die we besproken hebben in hoofdstuk II, § 1. Zij P de perfecte puntverzameling, waarin $F(u)$ de tweedimensionale limiet $+\infty$ heeft.

$RD\, F(u) > 0$

Beschouw nu: $\Phi(z) = F[\varphi(z)]$. $\Phi(z)$ is holomorf voor alle punten z in G.

$RD\, \Phi(z) > 0$ en heeft **de tweedimensionale limiet** ∞ **als** $|z| \to 1$.

We brengen nu een stelsel cirkels aan om 0 met stralen R_k:

$$\frac{1}{2} < R_1 < R_2 < R_3 < \dots$$

$$\lim_{n=\infty} R_n = 1$$

Deze cirkels snijden uit de naaldengroep een aftelbaar aantal naaldsegmenten. Zij die groep aangegeven door

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$$

Onderzoeken we nu

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

$K_n(z)$ is holomorf buiten δ_n. We bedoelen hier de integraal genomen aan weerszijden van δ_n. De waardengroep aan die kanten is natuurlijk continu-opeenvolgend.

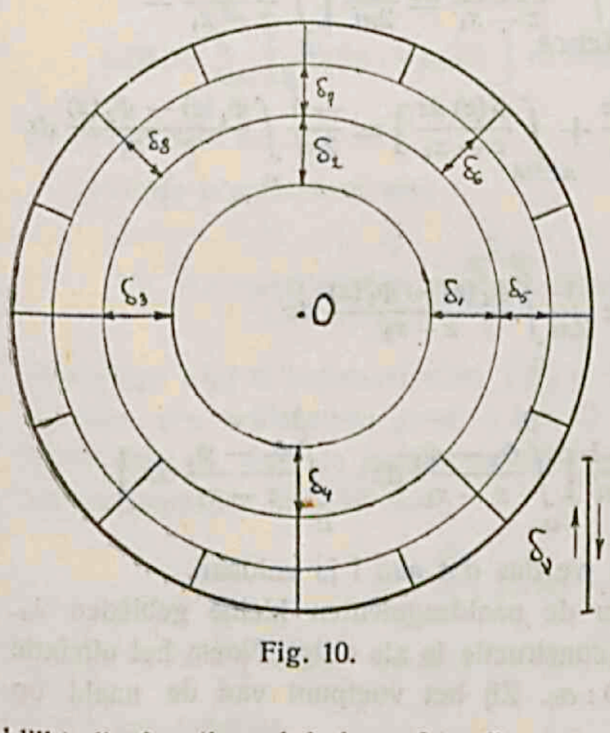

Fig. 10.

Wanneer we nu beschouwen

$$\Phi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ dan}$$

blijkt die functie ook holomorf te zijn op δ_n. Daarvoor is het voldoende aan te toonen dat voor alle x_1 en x_2 geldt:

$$\text{I} \ldots\ldots 0 = \left[\Phi(x_1) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_n} \frac{\Phi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - x_1}\right] - \left[\Phi(x_2) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_n} \frac{\Phi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - x_2}\right]$$

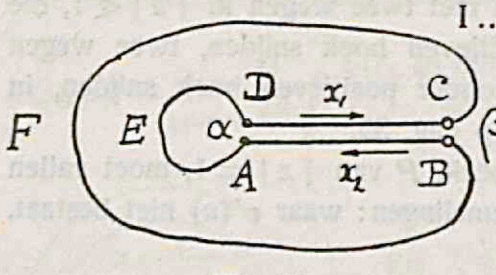

Fig. 11.

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\delta_n} \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_2} - \int_{\delta_n} \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\alpha^\beta \frac{\Phi_2(z)\,dz}{z - x_2} + \int_\beta^\alpha \frac{\Phi_1(z)\,dz}{z - x_2} - \int_\alpha^\beta \frac{\Phi_2(z)\,dz}{z - x_1} + \int_\alpha^\beta \frac{\Phi_1(z)\,dz}{z - x_1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\alpha^\beta \frac{\Phi_2(z) - \Phi_1(z)}{z - x_2}\,dz - \int_\alpha^\beta \frac{\Phi_2(z) - \Phi_1(z)}{z - x_1}\,dz\right]$$

als $\Phi_1(z)$ en $\Phi_2(z)$ de waarden voorstellen die $\Phi(z)$ aan het linker- respectievelijk rechternaaldsegment aanneemt.

Beschouw nu

$$-\Phi(x_1) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{FBAEDCF} \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_1} = \frac{-1}{2\pi i}\left[\int_B^A \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_1} - \right.$$

$$\left. - \int_C^D \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_1} + \int_{BCFB} \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_1} + \int_{AEDA} \frac{\Phi(z)\,dz}{z - x_1}\right] = \frac{-1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\Phi_1(z) - \Phi_2(z)}{z - x_1}\,dz$$

Evenzoo vindt men

$$\Phi(x_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\Phi_1(z) - \Phi_2(z)}{z - x_2}\,dz$$

En dus volgt:

$$\Phi(x_1) - \Phi(x_2) = \frac{-1}{2\pi i}\left[\int_\alpha^\beta \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{z - x_1}\,dz - \int_\alpha^\beta \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{z - x_2}\,dz\right]$$

Vullen we dit in, dan zien we dus dat aan I is voldaan.

Nu construeeren we om de naaldsegmenten kleine gebieden λ_n. Zoo hoort λ_n bij δ_n. Deze constructie is als volgt. Noem het uiteinde van δ_n, het dichtste bij $0 : a_n$. Zij het voetpunt van de naald op $|z| = 1 : b_n$.

Leg om a_n een cirkel met straal ϱ'_n, om b_n een cirkel met straal ϱ''_n en trek de twee uitwendige raaklijnen. Door deze vier lijnen is dan λ_n bepaald, n.l. het gebied begrensd door den cirkel om a_n tot aan de snijpunten met de twee raaklijnen, door de twee raaklijnen tot aan hun snijpunten met $|z|=1$ en door dat deel van $|z|=1$, gelegen tusschen die twee snijpunten in (zie figuur 12).

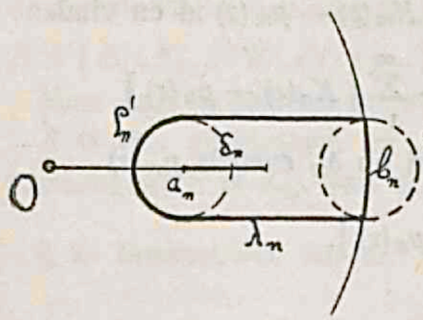

Fig. 12.

Bovendien onderstellen we dat $\sum\limits_1^\infty \varrho'_n$ en $\sum\limits_1^\infty \varrho''_n$ convergeeren.

Nu is $K_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\delta_n} \dfrac{\Phi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ holomorf buiten λ_n en dus in

[$|z|=1$ min λ_n] gelijkmatig te benaderen door een polynoom $p_n(z)$.

Zorg dus voor alle n, dat

$$\left| K_n(z) - p_n(z) \right| < \frac{1}{n!} \text{ buiten } \lambda_n \text{ en binnen } |z| = 1.$$

$$L(z) = \sum_1^\infty \Big[K_n(z) - p_n(z) \Big] \text{ is dan holomorf binnen } |z| = 1$$

en buiten alle λ_n.

Tenslotte beschouwen we:

$$\omega(z) = \Phi(z) - \sum_1^\infty \Big[K_n(z) - p_n(z) \Big]$$

Bewering: $\omega(z)$ is holomorf voor $|z| < 1$.

Neem een willekeurig punt z van G. Op den duur ligt dit punt buiten alle λ_n, daar de punten a_n zich verdichten naar $|z|=1$. Na dat rangnummer M geldt dus

$$\sum_M^\infty [\, K_n(z) - p_n(z) \,] \text{ holomorf}$$

terwijl ook: $\sum\limits_1^M [\, K_n(z) - p_n(z) \,]$ holomorf is als eindige som van holomorfe functies.

Dus ook $\omega(z)$ holomorf in G.

Neem nu z op δ_m. We zonderen dan $K_m(z) - p_m(z)$ af en vinden:

$$\omega(z) = \Phi(z) - K_m(z) + p_m(z) - \sum_1^{\infty}{}' \left[K_n(z) - p_n(z) \right]$$

Maar $\Phi(z) - K_n(z)$ is holomorf op δ_m evenals $p_m(z)$

en $\sum_1^{\infty}{}' \left[K_n(z) - p_n(z) \right]$.

Dus ook $\omega(z)$.

Opm. Met $\sum_1^{\infty}{}' \left[K_n(z) - p_n(z) \right]$ bedoelen we: n doorloopt alle waarden van $1 - \infty$ behalve m.

De som van de hoeken waaronder we de cirkels ϱ'_n en ϱ''_n zien, convergeeren, daar $\sum_1^{\infty} \varrho'_n$ en $\sum_1^{\infty} \varrho''_n$ convergeeren.

Dus zijn de λ_n, na zeker rangnummer, opgeborgen in een sectorverzameling met maat $< \varepsilon$ als $\varepsilon > 0$, willekeurig is. Men kan dus een stralenverzameling vinden met maat $> 2\pi - \varepsilon$ opgebouwd uit stralen die hoogstens door eindig vele λ_n wordt gesneden. Na het hoogste rangnummer van die λ_n, die zoo'n straal OA snijdt, geldt dat OA geheel buiten $\sum' \lambda_n$ ligt. In dit gebied is $L(z)$ begrensd. $RD\, \Phi(z) > 0$, nadert echter tot $+\infty$.

Dus $\omega(z) \to \infty$ als $|z| \to 1$.

Op een volle stralenmaat is dus de radiale limiet oneindig.

We kunnen nu nog iets beweren over die volle maat. De naaldeindpunten zijn n.l. aftelbaar. Daar $\sum \varrho''_n$ convergeert en elke naald aftelbaar veel δ_l bevat, zal op den duur dat deel van de contour λ_n, dat samenvalt met $|z| = 1$, een maat hebben $< \frac{\varepsilon}{2p}$ als $\varepsilon > 0$, willekeurig is, evenals p. Nummer nu de naaldeindpunten en beschouw de vereeniging van $(p^k{}_n\, q^k{}_n)$ als $\mu\,(p^k{}_n\, q^k{}_n) < \frac{\varepsilon_l}{2^n}$. $p^k{}_n\, q^k{}_n$ hoort bij eindpunt n en contour λ_k, k zoo gekozen dat $\mu\,(p^k{}_n\, q^k{}_n) < \frac{\varepsilon_l}{2^n}$ $\varepsilon_l < 0$ en vast.

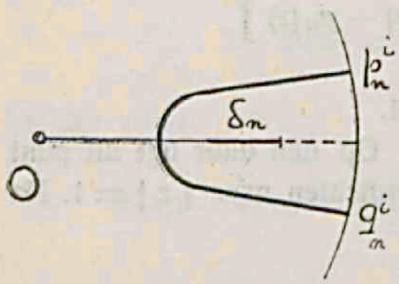

Fig. 13.

Die vereeniging noemen we E_l.

Nu laten we $\varepsilon_i \to 0$. Voor een punt van de volle maat, waarop de radiale limiet oneindig is geldt dan, dat het behoort tot:

$$E = [E_1 . E_2 \ldots . E_i . E_{i+1} \ldots]' = E_1' \dot{+} E_2' \dot{+} \ldots . E_i' \dot{+} E'_{i+1} \dot{+} \ldots .$$

Maar daar de naaldeindpunten overal dicht liggen is E_i nergens dicht. E is dus opgebouwd uit aftelbaar vele nergens dichte puntver zamelingen; **E is z.g. van de 1e categorie.**[1])

§ 2. Beschouwen we nu

$$\Omega(z) = e^{-\omega(z)}$$

$\Omega(z)$ is holomorf voor $|z| < |$. Op volle 2π-maat is de radiale limiet voor $|z| \to 1$, nul.

De verzameling is van de 1e categorie.

§ 3. Het is nu betrekkelijk eenvoudig om met behulp van de ons bekende functies, tot een functie te komen die in een positieve maat tot nul nadert, waarbij die puntverzameling van de 2e categorie is. We volgen de methode van Lusin in § 35 van Chap. IV.

$\Omega_1(z)$ is holomorf voor $|z| < 1$,

$\Omega_1(z) \to 0$ als z radiaal nadert tot $|z| = 1, -\pi \leqq \arg z \leqq 0$. Dan moeten we alleen op het beeld van den naaldengroep onder de X-as de funtie $F(u)$ van Fatou tot $+\infty$ laten naderen (zie pag. 37)

$\Omega_1(z) \to$ eindige limiet als $|z| \to 1$ boven de X-as.

Construeer nu een funtie $\Omega_2(z)$, een functie van Fatou, die zijn kritische verzameling heeft boven de X-as in $|z| = 1$. Deze verzameling E_2 is van de 2e categorie.

$\Pi(z) = \Omega_1(z). \Omega_2(z)$ nadert dan tot nul in $E_1 \dot{+} E_2$.

Maar $E_1 \dot{+} E_2$ is dan van de 2e categorie.

§ 4. Met behulp van de constructie, aangegeven in § 2 van Hoofdstuk III, kunnen we nu de in §§ 1 en 2 van Hoofdstuk IV behandelde constructie van Lusin en Priwaloff vervangen door een andere die veel eenvoudiger is.

We kozen op pag. 29:

$$r_k = \mu^{\frac{1}{2k}}, \quad R_k = \mu^{\frac{1}{2k+1}} \quad 0 < \mu < 1$$

Met de eischen:

$$\left(\frac{r_k}{R_k}\right)^{n_k} < \frac{1}{3k^2} \qquad A_k R_k^{n_k} = 3 \text{ vonden we dan dat}$$

[1]) Een verzameling heet van de 2e categorie, als zijn complement van de 1e categorie is.

$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - A_k z^{n_k})$ op volle maat tot oneindig nadert en eveneens uniform in het gebied, dat overblijft als we om de nullen cirkels leggen met straal $\frac{1}{n_k^2}$.

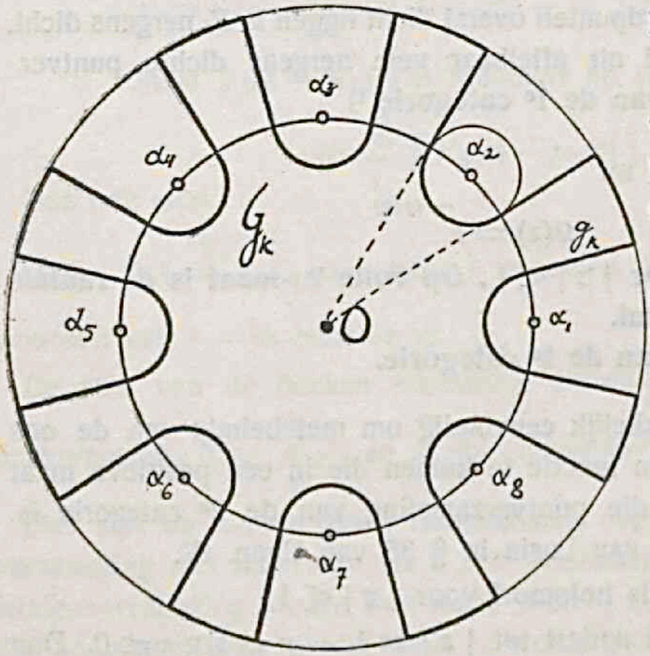

Fig. 14.

Nu vormen de hoeken, waaronder we die cirkels zien, vanuit O een convergente reeks.

Beschouw de k-de ring, (r_k, R_k), waarin de n_k nulpunten met hun cirkels γ_k. Vanuit O trekken we aan al die cirkels raaklijnen, die we verlengen tot ze $|z| = 1$ snijden.

Zij G_k het gebied begrensd door een lijn g_k opgebouwd uit: de deelen van de omtrekken der cirkels γ_k, gelegen tusschen de raakpunten, aan den kant van O, de raaklijnen, tusschen het raakpunt en het snijpunt ervan met $|z| = 1$ en het gedeelte van den omtrek van $|z| = 1$ gelegen tusschen twee opeenvolgende raaklijnen van twee verschillende cirkels γ_k (zie figuur 14).

In G_k is $\log(1 - A_k z^{n_k})$ een holomorfe functie. Er is dus een polynoom te vinden: $P_k(z)$ zóó dat

I..... $|\log(1 - A_k z^{n_k}) - P_k(z)| < \frac{1}{2^k}$ voor alle z van G_k

$$P_k(z) = u_k(z) + i\, v_k(z)$$

$u_k(z)$ is in het heele eindige vlak harmonisch.

II..... $u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ convergeert uniform voor $|z| < \varrho < 1$.

Want er is een rangnummer te kiezen zóó hoog dat na dat rangnummer z buiten alle G_k ligt.

Dan geldt:

$$\text{III.....} \qquad \left| \log \left| 1 - A_k z^{n_k} \right| - u_k(z) \right| < \frac{1}{2^k}$$

terwijl eveneens op den duur $|z| < r_k$ en dus

$$\left| \log \left| - A_k z^{n_k} \right| \right| < A_k r_k^{n_k} + \frac{A_k^2 r_k^{2n_k}}{2} + \ldots < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{k^2 - 1}.$$

Dan convergeert II dus uniform in den eenheidscirkel d.w.z.

$u(z)$ **is harmonisch voor** $|z| < 1$.

Vanwege de convergentie van de reeks der hoeken waaronder we de cirkels γ_k zien, volgt, dat er een volle stralenmaat is van stralen die slechts door hoogstens eindig vele g_k worden gesneden.

Dan ligt zoo'n straal op den duur dus in alle G_k en dan geldt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{k-1} u_k + \sum_{k=k}^{\infty} u_k.$$

Het eerste deel is begrensd op den straal OA. Voor het 2[de] deel geldt:

$$\sum_{k=k}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=k}^{\infty} \log \left| 1 - A_k z^{n_k} \right| + \Theta$$

als $|\Theta| < 1$.

Maar voor $z \to A$ heeft men $\sum_{k=1}^{\infty} \log \left| 1 \;\; A_k z^{n_k} \right| =$

$= \log |f| \to \infty$, dus moet

$$\lim_{|z|=1} \sum_{k=k}^{\infty} \log \left| 1 - A_k z n_k \right| = +\infty.$$

Maar dan volgt: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \xrightarrow[|z| \to 1]{} +\infty$.

Zij nu $v(z)$ de functie geconjugeerd aan $u(z)$.

Voor: $\qquad e^{-\{u(z) + iv(z)\}}$

geldt dan, dat op volle maat de radiale limiet nul is.

§ 5. Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| < 1$.

Stel $f(z) \to 0$ op een volle φ-maat: E.

Dan moet E **de vereeniging zijn van een aftelbaar aantal nergens dichte verzamelingen** z.g. van de 1[e] categorie van Baire.

Om dit aan te toonen beschouwen we de open φ-verzameling: $E_n(M)$ waarop:

$$\left| f\left\{ \left(1-\frac{1}{n}\right) e^{\varphi i} \right\} \right| > M, \qquad M \text{ willekeurig.}$$

Als k een willekeurig getal is dan noemen we

$$F_k(M) \equiv \dot{\sum_{k=k}^{\infty}} E_k(M)$$

$F_k(M)$ is natuurlijk open, maar ook overal dicht, want anders zou er een boog AB zijn te vinden waarin geen $E_\nu(M)$ meer doordringt voor $\nu \geqslant k$. Dat interval bevat dan twee stralen van E, stralen waarop de radiale limiet nul is: OC en OD.

Maar dan is in den sector $OCDO$, $f(z)$ begrensd terwijl op positieve maat de radiale limiet nul is, wat een contradictie is volgens de stelling van Riess.

Dus is F_k open en overal dicht.

$E_1 = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} E_n(M) = F_1 . F_2 . F_3 \ldots . F_k \ldots$ is dus de doorsnede van overal dichte open puntverzamelingen.

Beschouw nu $M_1, M_2, \ldots . M_k \ldots . \rightarrow 0$.

$$E = E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} E_3 \dot{+} \ldots . \qquad E_i = \overline{\lim_{n=\infty}} E_n(M_i)$$

$$(E)' = (E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} E_3 \dot{+} \ldots) . (E_2 \dot{+} E_3 \dot{+} E_4 \dot{+} \ldots) . (E_3 \dot{+} E_4 \dot{+} E_5 \dot{+} \ldots) \ldots .$$

want $E_k \geqslant E_{k+1}$.

Maar dan is $(E)'$ de doorsnede van overal dichte open puntverzamelingen, dus E zelf de vereeniging van aftelbaar vele nergens dichte verzamelingen, dus van de 1e categorie.

§ 6. Ten slotte vindt men in het artikel van Lusin en Priwaloff nog de volgende stelling (§ 38 Chap. IV):

Zij E een puntverzameling die op zekere boog AB van de 2e categorie is, en op elke portie van AB een positieve maat heeft.

Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| < 1$.

Als nu de radiale limiet van $f(z)$, voor $|z| \rightarrow 1$ op E, nul (of ∞) is, dan is $f(z) \equiv 0$ (resp. $\equiv \infty$).

Het bewijs van deze stelling ligt opgesloten in dat van § 5. Immers daarin kunnen we de onderstelling: „$f \rightarrow 0$ als z radiaal nadert tot $|z| = 1$ op volle maat" vervangen door: „$f \rightarrow 0$ als z radiaal nadert tot $|z| = 1$ op positieve maat van een φ-interval AB, overal dicht op AB".

HOOFDSTUK V.

§ 1. We willen nu nog eenige uitbreidingen geven op meervoudig samenhangende gebieden. Geef in den eenheidscirkel een eindig aantal cirkels met middelpunten α_k en stralen ϱ_k. Noem de daarbij hoorende cirkelomtrekken γ_k. Zij $f(z)$ een functie die op volle maat een radiale limiet oneindig heeft als $|z| \rightarrow 1$

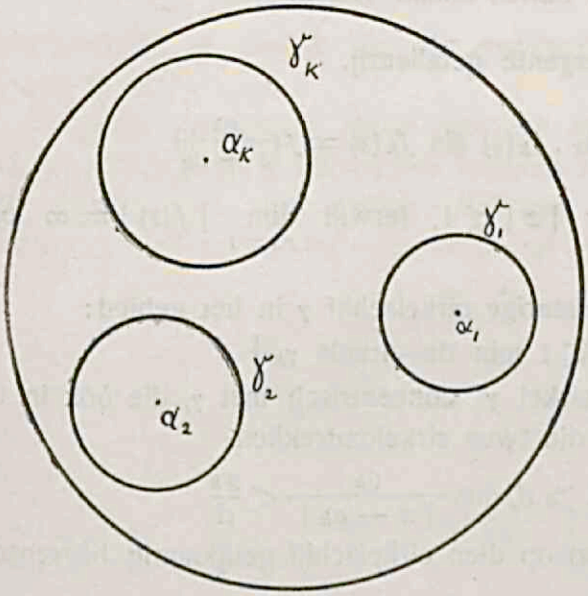

Fig. 15.

$$f_k(z) = f\left(\frac{\varrho_k}{z - \alpha_k}\right)$$

$f(z)$ is holomorf voor $|z| < 1$, dus $f\left(\frac{\varrho_k}{z - \alpha_k}\right)$ voor $\frac{\varrho_k}{|z - \alpha_k|} < 1$

d.w.z. voor $|z - \alpha_k| > \varrho_k$

Beschouw dan

$f(z) \cdot f_1(z) \cdot f_2(z) \ldots\ldots f_k(z) = G(z)$

dan is $G(z)$ holomorf voor $|z| > 1$, tenminste als z buiten de cirkels γ_k ligt.

Stel z nadert radiaal tot γ_k. In de buurt van γ_k is $f(z) \cdot f_1(z) \ldots\ldots f_{k-1}(z)$ holomorf dus begrensd.

Maar $|f_k(z)| \rightarrow \infty$. Dus $|G(z)|$ nadert tot oneindig als z radiaal nadert tot den rand van het gebied gevormd door [$|z| < 1$ min de cirkels γ_k.]

§ 2. Beschouw nogmaals het gebied, geconstrueerd volgens § 1. Zij nu $g(z)$ een functie die op volle maat de radiale limiet nul heeft.

$$g_k(z) = g\left(\frac{\varrho_k}{z - \alpha_k}\right)$$

$g\left(\frac{\varrho_k}{z - \alpha_k}\right)$ is dan holomorf buiten γ_k en binnen $|z| = 1$.

Ook nu geldt dus dat $F(z) = \prod_{k=0}^{k=p} f_k(z)$ holomorf is in het gebied

[$|z| < 1$ min de cirkels γ_k] en op volle maat de radiale limiet nul heeft.

§ 3. Beschouw den eenheidscirkel en geef daarin een geïsoleerde puntverzameling $a_1, a_2, \ldots\ldots a_k, \ldots\ldots$

Geef bij elke a_k een getal ϱ_k zóó dat de cirkels om a_k met ϱ_k als straal binnen $|z| = 1$ en buiten elkaar vallen.

Zij $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ een convergente getallenrij.

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \,.\, f_k(z) \text{ als } f_k(z) = f\left(\frac{\varrho_k}{z - a_k}\right)$$

en $f(z)$ holomorf is voor $|z| < 1$, terwijl $\lim\limits_{|z|=1} |f(z)| = \infty$ op volle maat.

Neem nu eens een willekeurige cirkelschijf γ in het gebied:

$$[\, |z| < 1 \text{ min de cirkels } \gamma_k \,]$$

Dan is er een grootere cirkel γ' concentrisch met γ, die òòk in G ligt. Zij d de afstand van die twee cirkelomtrekken.

$$|z - a_k| > d, \text{ dus } \frac{\varrho_k}{|z - a_k|} < \frac{\varrho_k}{d}$$

Dan zijn echter alle $f_k(z)$ op dien cirkelschijf gelijkmatig begrensd, want $\lim\limits_{k=\infty} \frac{\varrho_k}{d} = 0$.

Bijgevolg stelt $H(z)$ een holomorfe functie voor in G.

Wanneer we nu een bepaalde γ_k uitkiezen, dan is er een $\gamma'_k > \gamma_k$ die buiten alle andere γ_k valt. Op γ_k stelt dan $H(z) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' A_k \, f_k(z)$ een holomorfe functie voor terwijl $\lim\limits_{|z| \to \varrho_k} |f_k(z)| = +\infty$.

M.a.w. $H(z)$ heeft op volle maat de radiale limiet oneindig als z radiaal nadert tot den rand van G.

§ 4. Beschouw nogmaals het gebied G van § 3.

Geef de stralen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots\ldots \varrho_k \ldots\ldots$ Zij $f(z)$ een functie, die holomorf is voor $|z| < 1$ en op volle maat de radiale limiet nul heeft. Stel bovendien $f(0) \neq 0$ en $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k$ convergent.

Dan beschouwen we

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{f\left(\frac{\varrho_k}{z - a_k}\right)}{f(0)}$$

$H(z)$ is holomorf in G. Immers, op een cirkelschijf, geheel in G gelegen geldt evenals in § 3, dat:

$$\left|\frac{\varrho_k}{z-a_k}\right| < \frac{\varrho_k}{d}, \text{ waarin } d \text{ weer vast is.}$$

Dan gedraagt $\dfrac{f\left(\dfrac{\varrho_k}{z-a_k}\right)}{f(0)}$ zich voor groote k als $1 + M\varrho_k$, waarin M onafhankelijk is van k. En dan convergeert dat oneindig product overal in G.

Aangezien de radiale limiet van één factor nul is bij elke γ_k en het oneindig product der andere factoren een holomorfe functie is in de omgeving van dien cirkel, volgt voor $H(z)$, dat de radiale limiet naar den rand van G op volle maat nul is.

* * *

Zonder meer is niet duidelijk of een dergelijk resultaat voor geheele functies bestaat. Men bevindt zich in het gebied der geheele functies in geheel andere omstandigheden dan bij functies die in een cirkel holomorf zijn.

We kunnen dat direct door een sprekend voorbeeld duidelijk maken. Zoo zijn er n.l. geheele functies die voor $r \to \infty$ bij elk constant gehouden argument tot nul naderen[1]), terwijl de eenige functie holomorf voor $|x| < 1$, die voor *ieder constant argument van een nog zoo klein interval* tot nul nadert voor $r \to 1$, de functie is die $\equiv 0$.

Wilde men de hierboven ontwikkelde methode uitbreiden tot geheele functies, dan zou men moeten weten dat $\dfrac{1}{1-x}$ uniform benaderd kan worden door een geheele functie in ieder oneindig gebied, bepaald door een cirkel om het punt 1 en de twee raaklijnen vanuit 0 aan dien cirkel onbepaald verlengd.

We willen volstaan met te zeggen dat zulks mogelijk is door als geheele functie te kiezen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\sigma n}} \qquad \sigma > 0.$$

Over dit soort functies vindt men een bespreking in E. Lindelöf: Le calcul des Résidus.

Toch vindt men zich hier voor eigenaardige moeilijkheden geplaatst, daar nu het gebied, waar de uniforme benadering *niet* geldt, ook

[1]) Zie E. Lindelöf: Le Calcul des Résidus, pag. 122.

oneindig groot is. In dat gebied zal die geheele functie dus, mits men geen voorzorgen neemt, roet in het eten kunnen werpen en men moet dan ook eerst aantoonen, dat de constructie met de $(r_k\ R_k)$ suite, toegepast op geheele functies, ons in staat stelt te bereiken dat als, $\psi(r) \rightarrow +\infty$ voor $r \rightarrow \infty$, (de groei van ψ geheel willekeurig te bepalen) een volgens het voorschrift van § 2 Hoofdstuk III geconstrueerde geheele functie $g(x) = g(re^{\varphi i})$ bij goede keuze der suite (r_k, R_k) de eigenschap heeft dat

$$| f(x) | \left[\psi(r) \right]^{-1} \rightarrow +\infty \text{ op een volle maat.}$$

En het feit, dat de groei van ψ geheel naar willekeur is te bepalen, stelt ons dan in staat de bovengenoemde uitbreiding te geven voor geheele functies.

Dit onderzoek valt echter buiten de lijn der dissertatie, zoodat we ons meer tot deze kennisgeving willen bepalen.

STELLINGEN

I.

In het artikel van N. Lusin en J. Priwaloff, getiteld: *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques* Annales scientifiques de l'Ecole Normale superieur 1925, tome 42, worden de schattingen op pag. 170 en 171 onjuist gebruikt.

II.

In hetzelfde artikel zijn de bewijzen op pag. 146 en 152 vaag.

III.

Het begrip *singuliere integraal* wordt bij de behandeling van de differentiaal-vergelijkingen dikwijls niet juist gesteld.

IV.

Met behulp van de constructie aangegeven in § 2 van hoofdstuk III van dit proefschrift, kan men geheele functies construeeren van willekeurig hoog geslacht, zelfs van oneindig geslacht, die op volle maat de radiale limiet oneindig hebben.

V.

Spreken van 1e en 2e categorie van Baire bij puntverzamelingen kan verwarring stichten.

VI.

Populaire geschriften als „Calculus made easy" en „Le calcul intégral et attrayant" stichten kwaad.

VII.

Het afbeelden van congruenties op oppervlakken heeft in veel gevallen geen nut.

VIII.

Bij vlakke rationale krommen kunnen alleen dàn alle singuliere punten keerpunten zijn als $n \leqslant 4$.

Bij niet-rationale krommen moet voor:

$$2 \leqslant n \leqslant 6 \qquad p \geqslant \frac{1}{8}(n-2)(n-4)$$

en voor $n > 6$ $\qquad p \geqslant \frac{1}{6}(n-2)(n-3)$ als p het geslacht van die kromme voorstelt.

IX.

Een juiste doorvoering van het c.g.s. stelsel laat in vele leerboeken der Physica te wenschen over.

X.

De definitie van specifieke weerstand, zooals die o.a. gegeven wordt in Grimsehl deel II pag. 130, is niet logisch.

XI.

De afleiding in Bertrand: *Calcul des Probabilités* op pag. 91 is onjuist.