Asymptotische ontwikkeling van holomorfe functies in een halfvlak

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELING VAN HOLOMORFE FUNCTIES IN EEN HALFVLAK

A. VAN HASELEN

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELING VAN HOLOMORFE FUNCTIES IN EEN HALFVLAK

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELING VAN HOLOMORFE FUNCTIES IN EEN HALFVLAK

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Dr. H. TH. OBBINK, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 27 MEI 1929 DES NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR

ALBERTUS VAN HASELEN
GEBOREN TE LOOSDRECHT

P. NOORDHOFF — 1929 — GRONINGEN

AAN MIJN OUDERS

Aan het eind van mijn Academische studie gekomen zij het mij vergund, een woord van welgemeenden dank te richten tot U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier leiding ik steeds hoog heb gewaardeerd.

Ten allen tijde zal ik het op prijs stellen, dat U bij mij die belangstelling hebt weten op te wekken, die zoozeer noodig is om een studie tot een vruchtbare en aangename te maken.

Hooggeleerde DE VRIES, *die thans een welverdiende rust mag genieten, ook U wil ik mijn groote erkentelijkheid uitspreken voor het vele, wat ik van U heb mogen leeren. Steeds zal de aangename wijze, waarop U Uw lessen voordroeg, in mijn herinnering blijven.*

Hooggeleerde WOLFF, *hooggeachte promotor, door Uw boeiende lessen aangemoedigd, was het mij een behoefte te trachten, mijn Academische studiën met het schrijven van een proefschrift te voltooien. Dank zij de bijzonder vriendelijke wijze, waarop U mij steeds bij de samenstelling hiervan hebt willen ter zijde staan, is mij dit ook werkelijk mogen gelukken. Steeds zal ik met groote dankbaarheid gedenken, wat U gedurende mijn studie en speciaal dit laatste jaar voor mij hebt gedaan.*

INHOUD.

INLEIDING

HOOFDSTUK I. Bladz.

Algemeene eigenschappen van functies $w = u + vi$ van $z = x + yi$, holomorf voor $x > 0$ en waarvoor $u > 0$ is 2

HOOFDSTUK II.

De functies van de klasse met gegeven asymptotische ontwikkeling in het oneindige 13

HOOFDSTUK III.

Onderzoek naar het al of niet bepaald zijn van een functie der klasse door de gegeven asymptotische ontwikkeling. Algemeene uitdrukking voor die functies 26

INLEIDING.

In dit proefschrift wordt een door R. Nevanlinna in 1922 gepubliceerd onderzoek naar holomorfe functies met gegeven asymptotische ontwikkeling vereenvoudigd. Dit was in de eerste plaats mogelijk, doordat gebruik gemaakt kon worden van een verder strekkend theorema dan Julia's stelling, die Nevanlinna bij zijn onderzoek gebruikt.

Dit theorema is door J. Wolff in 1926 gepubliceerd, en wordt hier in § 7 uitgesproken.

In de tweede plaats kon voor de uniciteit van de oplossing als noodige en voldoende voorwaarde de divergentie van één enkele reeks, in plaats van die van twee reeksen, worden gevonden.

In de derde plaats kon de algemeene gedaante der gevraagde functies op vluggere wijze worden vastgesteld dan in Nevanlinna's werk.

Kettingbreukontwikkeling schijnt de natuurlijke voorstelling te zijn van functies, die in het rechterhalfvlak holomorf zijn en welker reëel deel positief is. (Zie ook een mededeeling van Denjoy in de C. R. van Jan. 1929).

HOOFDSTUK I.

Algemeene eigenschappen van functies $w = u + vi$ van $z = x + yi$, holomorf voor $x > 0$ en waarvoor $u > 0$ is.

§ 1. De eerste eigenschap, die we van de functies van bovengenoemde klasse willen behandelen, is de volgende:

Wanneer $w = f(z)$ een functie is, die tot onze klasse behoort, dan nadert $\frac{u}{x}$ tot een positieve limiet of tot nul, als z langs de reëele as tot ∞ nadert.

Dit is een directe toepassing van het volgende theorema van SCHWARTZ, dat we bekend onderstellen.

Als w een functie van onze klasse is, dan is

$$\left|\frac{w - w_1}{w - w_1'}\right| \leqslant \left|\frac{z - z_1}{z - z_1'}\right|$$

waarin

$$\begin{aligned} w &= u + vi = f(z) = f(x + iy) \\ w_1 &= u_1 + v_1 i = f(z_1) = f(x_1 + iy_1) \\ w_1' &= -u_1 + v_1 i \\ z_1' &= -x_1 + y_1 i. \end{aligned}$$

Het gelijkteeken treedt dán en dán alleen op, als w een lineaire functie van z is. Beschouwen we dit geval afzonderlijk, dan hebben we alleen rekening te houden met het $<$ teeken.

Passen we deze stelling nu toe voor het geval, dat z en z_1 beiden op de reëele as gelegen zijn, zoodat we ze mogen schrijven als x en x_1. Dan moet

$$\left|\frac{w - w_1}{w - w_1'}\right| < \frac{x - x_1}{x + x_1}$$

wanneer we veronderstellen dat $x > x_1$ is.

Uit het feit, dat:

$$\left|\frac{w-w_1}{w-w_1'}\right| > \frac{u-u_1}{u+u_1}$$

volgt nu:

$$\frac{u-u_1}{u+u_1} < \frac{x-x_1}{x+x_1}$$

Deze zelfde betrekking geldt ook, wanneer we 2 punten z en z_1 kiezen op een willekeurige lijn, die // aan de reëele as loopt.

Uit bovenstaande betrekking volgt nu wegens het positief zijn van de beide noemers, dat:

$$2xu_1 > 2x_1u$$

of:

$$\frac{u_1}{x_1} > \frac{u}{x} \text{ wanneer } x > x_1 \text{ is.}$$

$\frac{u}{x}$ daalt dus monotoon op iedere lijn // aan de reëele as.

Daar nu $\frac{u}{x}$ altijd positief is moet deze tot een limiet naderen, die positief of nul moet zijn.

Dat deze limiet ook werkelijk nul kan zijn, zien we aan de functie $w = z^{1/2}$, die tot onze klasse behoort.

Gaan we bij deze functie de limiet van $\frac{u}{x}$ opmaken, als x op de reëele as tot ∞ nadert, dan vinden we hiervoor

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^{1/2}}{x} = 0.$$

We zien dus, dat we hier wel degelijk het geval, dat de limiet nul is, in onze beschouwingen moeten opnemen.

§ 2. We willen nu aantoonen dat $\frac{u}{x}$ op iedere lijn // reëele as tot eenzelfde limiet nadert, als z langs zoo'n lijn tot ∞ nadert.

Bewijzen we daartoe, dat de limieten, die tot stand komen op de reëele as en op de lijn $y = b$, dezelfde zijn.

De cirkel, gaande door $z_0 = x_0 + iy_0$ en ten opzichte waarvan $z_1' = -x_1 + iy_1$ het beeld is van $z_1 = x_1 + iy_1$, nadert tot de lijn $x = x_0$, als z_1 langs de lijn $y = b$ tot ∞ nadert.

We weten nu dat:

$$\left|\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_1'}\right| < \left|\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_1'}\right|.$$

Daar nu ook

$$\frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} < \left|\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_1'}\right|$$

zal dus

$$\frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} < \left|\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_1'}\right|.$$

Stellen we nu dat de bovengenoemde cirkel de lijn $y = b$ in het punt $x = x_0 - \alpha$; $y = b$ snijdt, dan kunnen we bovenstaande vergelijking schrijven in den vorm:

$$\frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} < \frac{x_1 - x_0 + \alpha}{x_1 + x_0 - \alpha}.$$

Uitgewerkt levert dit wegens het positief zijn van beide noemers:

$$u_1 x_0 < u_1 \alpha + u_0 x_1$$

of

$$\frac{u_1}{x_1}\left(1 - \frac{\alpha}{x_0}\right) < \frac{u_0}{x_0}.$$

Dan volgt hieruit dus

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{u_1}{x_1} \leqslant \frac{u_0}{x_0}$$

want als x_0 tot ∞ nadert, nadert α tot nul.

Daar deze betrekking voor iedere x_0 geldt, zal dus ook:

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{u_1}{x_1} \leqslant \lim_{x_0 = \infty} \frac{u_0}{x_0}.$$

Op dezelfde manier bewijzen we:

$$\lim_{x_1=\infty} \frac{u_1}{x_1} \geqslant \lim_{x_0=\infty} \frac{u_0}{x_0}$$

dus moeten beide limieten aan elkaar gelijk zijn, wat we wilden aantoonen.

Dat dit bij de functie $w = z^{1/2}$ ook klopt is direct duidelijk.

§ 3. Uit het Theorema van SCHWARTZ kunnen we nu laten volgen:

In een willekeurig punt van het rechterhalfvlak zal

$$| f'(z) | \leqslant \frac{u}{x} \text{ zijn.}$$

Het theorema van SCHWARTZ zegt n.l.

$$\left| \frac{w' - w}{w' + u - vi} \right| < \left| \frac{z' - z}{z' + x - yi} \right|$$

waarin $w' = f(z')$ en $w = u + vi = f(z) = f(x + yi)$.

Maar dan moet ook

$$\left| \frac{w' - w}{z' - z} \right| < \left| \frac{w' - w + 2u}{z' - z + 2x} \right| \text{ zijn.} \quad (1)$$

Wanneer we nu z' tot z laten naderen, zullen beide leden van deze ongelijkheid tot een limiet naderen.

Het 1e lid nadert tot $| f'(z) |$ en het 2e lid nadert tot $\frac{u}{x}$.

We zien dus dat:

$$| f'(z) | \leqslant \frac{u}{x}. \quad (2)$$

In dit geval volgt uit onze redeneering niet, dat het uitgesloten is, dat in vergelijking (2) het gelijkteeken optreedt bij functies die niet lineair zijn.

In vergelijking (1) treedt alleen het gelijkteeken op wanneer we met een lineaire functie te doen hebben. Maar we kunnen hieruit niet laten volgen dat in verg. (2) het gelijkteeken alleen optreedt bij lineaire functies, daar we deze uit een limietovergang verkrijgen.

§ 4. In § 1 hebben we bewezen, dat $\frac{u}{x}$ tot een limiet nadert, als x op een lijn // aan de reëele as tot ∞ nadert. Zij l deze limiet.

Gaan we nu de functie $g(z) = s + ti = f(z) - lz$ bekijken.

Deze functie heeft de eigenschap, dat $\frac{s}{x} \to 0$ als z langs de reëele as tot ∞ nadert. Verder moet s overal positief of nul zijn. We weten n.l. volgens § 2 dat $\frac{u}{x}$ monotoon dalend tot l nadert, als x op de reëele as tot ∞ nadert, dus dat

$$\frac{u}{x} \geqslant l.$$

Voor iedere x van de reëele as is nu

$$u \geqslant lx.$$

Wanneer u ergens gelijk is aan lx, moeten we met een lineaire functie te doen hebben en moet dus

$$g(z) = lz$$

zijn, op hoogstens een constante na met reëel deel grooter of gelijk aan nul. Sluiten we voorloopig het geval:

$$f(z) = lz + c$$

uit dan weten we dat s overal positief moet zijn.

Onze functie $g(z)$ behoort dus tot de klasse.

De functie $g(z)$ moet nu een dekpunt van iteratie hebben in het rechterhalfvlak dat ook op de Y-as mag liggen.

Het punt ∞ kan geen dekpunt zijn, want wanneer het punt ∞ een dekpunt was, zou het beeld van een punt van het Z-vlak, gelegen op de lijn $x = x_0$, moeten liggen binnen het gedeelte van het W-vlak, rechts van de lijn $u = x_0$.

Maar dan zou ook $\frac{u_0}{x_0} \geqslant 1$ moeten zijn. In dit geval zou echter $\lim\limits_{x=\infty} \frac{u}{x}$ nooit nul kunnen zijn, daar deze betrekking voor iedere x_0 zou moeten gelden.

Stellen we nu, dat $x_1 + iy_1$ het dekpunt van iteratie van onze functie $g(z)$ is.

(Dit dekpunt mag ook op de Y-as gelegen zijn, dus x_1 mag ook nul zijn.)

We weten dan dat, wanneer z gelegen is op de lijn $y = y_1$, het punt $g(z)$ moet liggen binnen een cirkel, die door z en iy_1 gaat en den afstand van beide punten, zijnde x, tot middellijn heeft mits x voldoend groot is.

Hieruit volgt nu:

$$| g(z) - iy_1 |^2 \lesseqgtr xs.$$

Het gelijkteeken geldt weer dán en dán alleen als $g(z)$ een lineaire functie van z is.

Nu moet dus ook:

$$\left| \frac{g(z) - y_1 i}{z - y_1 i} \right| \leqslant \sqrt{\frac{s}{x}}.$$

Nadert z tot ∞ langs de lijn $y = y_1$, dan zal dus ook volgens het voorgaande:

$$\varphi(z) = \frac{g(z) - iy_1}{z - iy_1} \rightarrow 0.$$

§ 5. Om nu iets meer van $g(z)$ te kunnen zeggen, willen we eerst nog de volgende hulpstelling aantoonen:

Wanneer $f(z)$ begrensd en holomorf is binnen een gebied G, begrensd door de lijnen $y = ax$, $y = bx$ en den cirkel met O tot middelpunt en r tot straal en op de lijn $y = cx$ in dat gebied geheel binnen dien hoek gelegen, nadert $f(z)$ tot een limiet l, als z tot O nadert, dan zal, wanneer z op een lijn, binnen dien hoek gelegen, tot O nadert, de functie

$f(z)$ tot l naderen. Deze stelling is afkomstig van MONTEL.

Ze geldt ook als in het W-vlak een gebied is aan te wijzen waarin geen waarden van $f(z)$ liggen. De functie is dan namelijk begrensd op den bol.

Voor het bewijs van deze stelling gebruiken we de volgende uitbreiding van de groote stelling van WEIERSTRASS.

Wanneer in een gebied een rij begrensde holomorfe functies gegeven is, die in een zich in het inwendige van het gebied verdichtende puntverzameling tot een limiet nadert, zal de functierij in ieder punt van het gebied tot een limiet naderen, terwijl de grensfunctie weer holomorf is in dat gebied.

Hiermee bewijzen we bovengenoemde stelling als volgt:

Trekken we binnen den hoek de lijnen $y = dx$ en $y = ex$ zoodanig dat

$$a < d < c < e < b.$$

Trekken we nog 2 cirkels met stralen r_1 en r_2 zoodanig dat $r_1 < r_2 < r$.

We gaan nu in het gebied G′, begrensd door de lijnen $y = dx$ en $y = ex$ en de cirkels r_1 en r_2 de volgende functierij definieeren:

$$\varphi_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right).$$

Deze rij heeft de eigenschap, dat zij in ieder punt van de lijn $y = cx$ tot een limiet nadert, die voor alle punten dezelfde is. Dan zal de grensfunctie van deze rij holomorf moeten zijn en dus een constante zijn.

Maar dit wil niet anders zeggen, dan dat $f(z)$ op iedere lijn door O gelegen tusschen $y = dx$ en $y = ex$ tot dezelfde limiet l nadert.

Daar nu d en e willekeurig tusschen a en b gekozen zijn, volgt hieruit dus dadelijk, dat onze functie tot l nadert, wanneer z langs een willekeurigen straal eindigende in O en gelegen tusschen a en b tot O nadert.

Deze stelling geldt ook voor iedere kromme lijn, eindigende in O en die geheel gelegen is in het deel van G begrensd door de lijnen $y = (d + \varepsilon)x$ en $y = (e - \varepsilon)x$, waarin ε positief en $< {}^1/_2(e - d)$ is.

In het gebied G′ heeft onze functierij namelijk weer een limiet l in ieder punt van een oneindige puntverzameling, die zich minstens in een inwendig punt verdicht.

De grensfunctie moet dus weer holomorf zijn en is daarom gelijk aan l.

§ 6. In § 4 hebben we bewezen, dat de functie $\varphi(z)$ nadert tot nul, als z langs de lijn $y = y_1$ tot oneindig nadert.

We kunnen nu met behulp van de in § 5 bewezen stelling aantoonen, dat $\varphi(z) \to 0$ als z tot ∞ nadert langs een willekeurigen halfstraal l_1, geheel binnen het rechter halfvlak gelegen en niet // Oy.

Bewijzen we deze stelling eerst voor het geval, dat de lijn l_1 vertrekt van het punt $z = iy_1$.

In dit geval kunnen we 2 lijnen l_2 en l_3 trekken, gelegen binnen het rechter halfvlak, vertrekkende van het punt $z = iy_1$ en een hoek φ vormende waarbinnen de lijnen l_1 en $y = y_1$ gelegen zijn.

Beschouwen we nu een gebied G″, begrensd door de lijnen l_2 en l_3 en een cirkel met $z = iy_1$ tot middelpunt, dan kunnen we dit gebied door de transformatie $w = \dfrac{1}{z - iy_1}$ afbeelden op het door ons in § 5 genoemde gebied G.

De in § 5 afgeleide stelling leert ons nu, dat als z langs een willekeurige lijn, die door $z = y_1$ binnen G″ wordt getrokken, tot ∞ nadert, onze functie $\varphi(z)$ tot nul nadert.

Daar namelijk het argument van $z - iy_1$ gelegen is binnen een hoek $\varphi < \pi$, zal er een gebied van het W-vlak zijn in de omgeving van de negatieve reëele as, waarin geen waarden van $\varphi(z)$ gelegen zijn, en mogen we dus MONTEL toepassen.

De uitbreiding, die we aan deze stelling gegeven hebben, zegt ons verder, dat ditzelfde gebeurt langs iedere lijn geheel binnen G″ gelegen, mits die lijn niet evenwijdig aan de rechten l_2 en l_3 getrokken wordt.

Daar we nu echter geheel vrij zijn in de keuze van de lijnen l_2 en l_3 komen we ten slotte tot de stelling:

De functie $\varphi(z)$ nadert langs iedere lijn, die met de X-as een hoek maakt gelegen tusschen $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ en $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, tot nul, hoe klein we ε die positief moet zijn ook kiezen, als z langs die lijn tot ∞ nadert.

§ 7. In § 3 hebben we aangetoond:

In een punt z van het rechter halfvlak is voor iedere functie $f(z)$ van onze klasse:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{u}{x}.$$

Passen we dit toe op onze functie $\varphi(z)$ dan zal daar bij deze functie volgens § 6: $\frac{u}{x}$ tot nul nadert, ook $|\varphi'(z)| \longrightarrow 0$ als z op de in diezelfde § genoemde manier tot ∞ nadert. Gaan we nu onze functie $g(z)$ weer bekijken. Daar y_1 vast is in de uitdrukking voor $\varphi(z)$ in § 4, weten we dus:

$$\frac{g(z)}{z} \longrightarrow 0 \text{ als } z \longrightarrow \infty$$

dus
$$|g'(z)| \longrightarrow 0 \text{ als } z \longrightarrow \infty.$$

De functie $g(z)$ hebben we in § 4 gedefinieerd als $f(z) - lz$.

Daar nu $\frac{g(z)}{z}$ en $g'(z)$ naderen tot nul als z tot ∞ nadert, zullen ook $\frac{f(z)}{z}$ en $f'(z)$ naderen tot l als z tot ∞ nadert.

De stelling, die we in het voorgaande afgeleid hebben, kunnen we als volgt formuleeren. Zij $f(z)$ een functie van onze klasse, dan zullen, wanneer we z op de in § 6 aangeduide manier tot ∞ laten naderen, de grootheden $\frac{u}{x}$, $f'(z)$ en $\frac{f(z)}{z}$ allen tot dezelfde reëele limiet naderen, die positief of nul moet zijn, terwijl $\frac{u}{x}$ monotoon dalend tot die limiet nadert, als x op een lijn evenwijdig aan de reëele as tot ∞ nadert. (Zie over deze dingen het artikel van J. Wolff in de Ac. d. Sciences van 13 Sept. 1926).

§ 8. We willen dit hoofdstuk besluiten met het bewijs van de stelling:

Zij $f(z)$ een functie van onze klasse met de eigenschap, dat $zf(z)$ tot nul nadert als z langs een lijn, gelegen binnen het rechter halfvlak tot ∞ nadert. Dan moet $f(z)$ identiek nul zijn.

Volgens het gegeven is het reëele deel van $f(z)$ grooter of gelijk aan nul. Dan zal ook het reëele deel van $\frac{1}{f(z)}$ grooter of gelijk aan nul zijn.

Immers, om uit het punt $w = f(z)$ het punt $\frac{1}{f(z)}$ af te leiden moeten we het argument van $f(z)$ van teeken omkeeren en komt het dus ook weer tusschen $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$.

Nu zal volgens onze onderstelling

$$\frac{1}{zf(z)} \longrightarrow \infty \text{ als } z \longrightarrow \infty .$$

Stellen we $\frac{1}{f(z)}$ even voor door $u + vi$, dan zal volgens § 7 nu $\frac{u}{x}$ monotoon dalend tot ∞ naderen als x op een of andere lijn // reëele as tot ∞ nadert.

Dan moet u overal ∞ zijn en dus $f(z) \equiv 0$ wat we aan wilden toonen.

HOOFDSTUK II.

De functies van de klasse met een gegeven asymptotische ontwikkeling in het oneindige.

§ 9. Gaan we over tot het onderzoek van de functies, die de volgende eigenschappen bezitten.

1°. De functie $w = f(z)$ behoort tot de door ons beschouwde klasse.

2°. We kunnen voor iedere n onze functie voorstellen door de asymptotische ontwikkeling:

$$w = a_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \ldots + \frac{a_n}{z^{2n}} + \frac{\varepsilon_{2n}(z)}{z^{2n}}$$

of door

$$w = a_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \ldots + \frac{\beta_n}{z^{2n-1}} + \frac{\varepsilon_{2n-1}(z)}{z^{2n-1}}$$

waarin de a's zuiver imaginair en de β's reëel zijn, terwijl $\varepsilon(z)$ binnen iederen hoek

$$-\frac{\pi}{2} + a < arg z < \frac{\pi}{2} - a$$

aan den eisch moet voldoen, dat

$$\lim_{z=\infty} \varepsilon_{2n}(z) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{z=\infty} \varepsilon_{2n-1}(z) = 0$$

als a gelegen is tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$.

We zien dadelijk dat we onze functies hierdoor een zwaren eisch opleggen, daar de functie $z^{1/2}$, die we in het vorige hoofdstuk al eens ontmoetten, niet op een dergelijke manier in een reeks te ontwikkelen is.

Bekijken we eerst de voorwaarden waaraan de α_n en β_n moeten voldoen, om een dergelijke functie op te leveren.

Daar α_0 zuiver imaginair is, mag $\frac{\alpha_0}{i}$ positief of negatief zijn. Een verandering van α_0 heeft namelijk een verschuiving van het W-vlak in de richting van de imaginaire as ten gevolge. En dit is een afbeelding die het rechter halfvlak invariant laat.

We zullen nu aantoonen dat β_1 positief moet zijn. De functie $\frac{1}{f(z)-\alpha_0}$ is een functie, die tot onze klasse behoort. Volgens een voorgaande stelling (§ 7) zal nu $\frac{1}{z\{f(z)-\alpha_0\}}$ naderen tot een positieve limiet als we z tot ∞ laten naderen. Bedenken we nu, dat we $f(z)$ kunnen schrijven als:

$$\alpha_0+\frac{\beta_1}{z}+\frac{\alpha_1}{z^2}+\ldots+\frac{\varepsilon(z)}{z^{2n}}$$

dan zien we, dat $\frac{1}{z\{f(z)-\alpha_0\}}$ moet naderen tot $\frac{1}{\beta_1}$ als z tot ∞ nadert.

Hieruit volgt dus, dat β_1 positief moet zijn, daar $\frac{1}{\beta_1}$ positief is.

We zien hier ook dat $\alpha_0+\frac{\beta_1}{z}$ een functie is, die aan de gestelde voorwaarden voldoet, als β_1 positief is.

Verder zullen, wanneer $\beta_1=0$ is, alle volgende α's en β's nul moeten zijn, daar dan $z\{f(z)-\alpha_0\}$ tot 0 nadert, wanneer z tot ∞ nadert.

Maar dan moet $f(z)-\alpha_0\equiv 0$ zijn of moet $f(z)\equiv\alpha_0$ zijn (§ 8). Alle volgende α's en β's moeten dus nul zijn in dat geval.

§ 10. Om iets van de volgende α's en β's te kunnen zeggen gaan we $f(z)$ in een kettingbreuk ontwikkelen. Hiertoe schrijven we op:

$$\left(\frac{\beta_1}{z}+\frac{\alpha_1}{z^2}+\frac{\beta_2}{z^3}+\frac{\alpha_2}{z^4}+\ldots+\frac{\beta_n}{z^{2n-1}}+\frac{\varepsilon_{2n-1}(z)}{z^{2n-1}}\right)^{-1}.$$

Werken we dit uit, dan krijgen we iets van den vorm:

$$B_1 z + A_1 + \frac{\beta'_1}{z}+\frac{\alpha'_2}{z^2}+\frac{\beta'_2}{z^3}+\ldots+\frac{\varepsilon'_{2n-3}}{z^{2n-3}}$$

waarin A_1 en alle α'_n zuiver imaginair en B_1 en alle β'_n reëel moeten zijn, terwijl B_1 positief is.

We willen het rekenwerk dat we voor het bewijs hiervan noodig hebben, uitvoeren voor het geval $n = 2$ en merken dan op, dat het algemeene geval op een dergelijke manier te behandelen is.

Schrijven we op

$$\left(\frac{\beta_1}{z}+\frac{\alpha_1}{z^2}+\frac{\beta_2}{z^3}+\frac{\varepsilon_3(z)}{z^3}\right)^{-1}=\left(\frac{\beta_1}{z}\right)^{-1}\left(1+\frac{\alpha_1}{\beta_1 z}+\frac{\beta_2}{\beta_1 z^2}+\frac{\varepsilon_3(z)}{\beta_1 z^2}\right)^{-1}$$

dan zien we, dat we hiervoor kunnen schrijven:

$$\frac{z}{\beta_1}\left\{1-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1 z}+\frac{\beta_2}{\beta_1 z^2}+\frac{\varepsilon_3(z)}{\beta_1 z^2}\right)+\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1 z}+\frac{\beta_2}{\beta_1 z^2}+\frac{\varepsilon_3(z)}{\beta_1 z^2}\right)^2-\frac{\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1 z}+\frac{\beta^2}{\beta_1 z^2}+\frac{\varepsilon_3(z)}{\beta_1 z^2}\right)^3}{1+\frac{\alpha_1}{\beta_1 z}+\frac{\beta_2}{\beta_1 z^2}+\frac{\varepsilon_3(z)}{\beta_1 z^2}}\right\}$$

Noemen we een grootheid A even $o\left(\frac{1}{z^2}\right)$ als $\frac{A}{z^2}\to 0$ als $z\to\infty$, dan zien we bij uitwerken, dat we dezen vorm kunnen schrijven als:

$$\frac{z}{\beta_1}\left\{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1 z}+\left(\frac{\alpha_1{}^2}{\beta_1{}^2}-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\frac{1}{z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\}$$

daar alle termen, die de factor z^3 in den noemer hebben, te schrijven zijn als $o\left(\frac{1}{z^2}\right)$. We kunnen dus de uitkomst schrijven in den vorm:

$$B_1 z + A_1 + \frac{\beta'_1}{z} + \frac{\varepsilon'_1(z)}{z},$$

waarin $B_1 = \frac{1}{\beta_1}$ $\quad \beta'_1 = \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^3} - \frac{\beta_2}{\beta_1^2}$

$$A_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1^2}.$$

Hierin is B_1 positief, want β_1 is positief en A_1 zuiver imaginair, want α_1 is zuiver imaginair en β_1^2 reëel.

β'_1 wordt weer reëel, daar de α_n hierin weer tot een even macht verheven voorkomen. Voor het algemeene geval dat we aan het begin van deze paragraaf opschreven, kunnen we nu op dezelfde manier ook aantoonen, dat alle α'_n in deze ontwikkeling zuiver imaginair zijn, daar de α_n in iederen term, die optreedt, wanneer we een α' in de α_n en β_n uitdrukken, tot een oneven macht verheven voorkomen, terwijl bij de β' deze alleen met even machten voorkomen, zoodat de β'_n hierin reëel moeten zijn.

We gaan nu $f(z)$ in een kettingbreuk ontwikkelen in het geval dat $f(z)$ te schrijven is als:

$$\alpha_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \frac{\varepsilon_3(z)}{z^3}.$$

Hiertoe schrijven we:

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_0} = \left(\frac{\beta_1}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \frac{\varepsilon_3(z)}{z^3}\right)^{-1}.$$

Hiervoor kunnen we volgens het voorgaande schrijven:

$$\varphi(z) = B_1 z + A_1 + \frac{\beta'_1}{z} + \frac{\varepsilon'_1(z)}{z}.$$

Hierin is B_1 positief en A_1 zuiver imaginair. Dat B_1 positief moet zijn, volgt ook uit het feit dat B_1 reëel moet zijn en dat, daar $\varphi(z)\{= u + iv\}$ tot onze klasse moet behooren, $\frac{u}{x}$ monotoon dalend tot een positieve limiet moet naderen als z tot ∞ nadert. Deze limiet is in ons geval B_1, dus moet B_1 positief zijn.

Daar nu A_1 zuiver imaginair is, en $\frac{u}{x}$ monotoon dalend tot B_1 nadert, moet ook $\frac{\beta_1'}{z} + \frac{\varepsilon_1'(z)}{z}$ tot onze functieklasse behooren en kunnen we deze dus schrijven als:

$$\frac{1}{B_2 z + o_2(z)}$$

waarin om bovengenoemde reden B_2 positief is en $\frac{o_2(z)}{z} \to 0$ als $z \to \infty$.

We krijgen dus in dit geval voor $f(z)$ de kettingbreukontwikkeling:

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + o_2(z)}}.$$

Hierin zijn A_0, A_1, B_1 en B_2 functies van α_0, α_1, β_1 en β_2. De B's zijn hierin positief en de A's zuiver imaginair, terwijl $o_2(z)$ een functie is, die tot onze klasse behoort.

Op dezelfde manier kunnen we ook

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{z^{2n-1}} + \frac{\varepsilon(z)}{z^{2n-1}}$$

in een kettingbreuk ontwikkelen en vinden dan hiervoor:

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + A_2 + \ddots + \cfrac{1}{B_n z + o_n(z)}}} \quad (1)$$

waarin om bovengenoemde redenen alle B's positief en alle A's imaginair moeten zijn, terwijl $o_n(z)$ een functie van onze klasse is.

De eisch waaraan alle α_n en β_n van onze asymptotische ontwikkeling moeten voldoen is nu, dat alle A_n die we volgens het bekende rekenvoorschrift uit de α_n en β_n berekenen zuiver imaginair moeten zijn en alle B_n positief moeten zijn.

We zien hier tevens, dat, wanneer we een kettingbreuk van bovenstaanden vorm opschrijven, waarin we voor $o_n(z)$ nul invullen, en de A_n en B_n aan de bekende voorwaarden voldoen, we een functie van de klasse krijgen, die aan den eisch voldoet, dat hij een asymptotische ontwikkeling toelaat, eindigende met $\frac{\varepsilon(z)}{z^{2n-1}}$.

§ 11. Uit de formule (1) van § 10 zien we, dat er meerdere functies te vinden zijn, die bij ontwikkeling in een kettingbreuk met n schakels dezelfde A's en B's opleveren als $f(z)$.

Omtrent den samenhang van al deze functies kunnen we de volgende stelling bewijzen:

Zij $w = f(z)$ een functie van de door ons beschouwde klasse, die bovengenoemde kettingbreukontwikkeling toelaat, dan valt de waarde w_0, die de functie in een gegeven punt $z = z_0$ van het rechter halfvlak aanneemt, binnen of op den omtrek van een cirkel C_n waarvan de middellijn door de A_i en de B_i, die in de kettingbreukontwikkeling voorkomen, volkomen bepaald wordt.

In deze § behandelen we eerst het geval $n = 1$. De stelling wordt dan:

Zij $w = f(z)$ een holomorfe functie in het rechter halfvlak, die te schrijven is als:

$$\alpha_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\varepsilon_1(z)}{z}$$

waarin de grootheden de ons bekende beteekenis hebben; dan zal als z_0 een punt van het rechter halfvlak is, $w_0 = f(z_0)$ binnen een cirkel liggen, die de lijn $x = 0$ aanraakt in het punt a_0 en die $\frac{\beta_1}{x_0}$ tot middellijn heeft.

Om dit te bewijzen merken we op, dat we $f(z)$ kunnen schrijven in den vorm

$$f(z) = a_0 + \frac{\beta_1}{z + \eta(z)}$$

waarin

$$\eta(z) = -\frac{z\varepsilon_1(z)}{\beta_1 + \varepsilon_1(z)}.$$

Nu behoort $z + \eta(z)$ tot onze functieklasse, daar dit gelijk is aan

$$\frac{\beta_1}{f(z) - a_0}.$$

Maar dan ligt ook $\eta(z)$ in het rechter halfvlak, wat we al eenige malen gezien hebben.

In het punt z_0 ligt daarom $z + \eta(z)$ rechts van de lijn $x = x_0$.

Dan ligt $\frac{\beta_1}{z_0 + \eta(z_0)}$ binnen een cirkel die tot straal heeft $\frac{\beta_1}{2x_0}$ en de imaginaire as in O aanraakt.

Maar dan ligt $f(z)$ binnen een cirkel, die de imaginaire as in a_0 aanraakt en tot straal heeft $\frac{\beta_1}{2x_0}$ wat we wilden aan toonen.

Zij a zuiver imaginair.

De functie $a_0 + \frac{\beta_1}{z - a}$ beeldt, zooals we gemakkelijk inzien, de lijn $x = x_0$ af op den cirkel C_1, zoodat in dit geval met het punt z_0 een punt van den cirkelomtrek C_1 correspondeert.

Omgekeerd weten we ook dat, wanneer $f(z_0)$ op den cirkelomtrek valt, onze functie $f(z)$ den bovenstaanden vorm moet hebben.

§ 12. We zullen nu de in § 11 genoemde stelling bewijzen.

Hiertoe gaan we aantoonen, dat het punt $f(z_0)$ ligt binnen een cirkel C_2, waarvan de middellijn en de ligging afhankelijk zijn van A_0, A_1, B_1 en B_2.

We weten:

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + o_2(z)}}.$$

Uit de vorige § weten we, dat $A_1 + \dfrac{1}{B_2 z_0 + o_2(z_0)}$ gelegen is binnen een cirkel, die de imaginaire as in het punt A_1 aanraakt en die tot middellijn heeft $\dfrac{1}{B_2 x_0}$.

Nu ligt $B_1 z_0 + A_1 + \dfrac{1}{B_2 z_0 + o_2(z_0)}$ binnen een cirkel C_2' die $\dfrac{1}{B_2 x_0}$ tot middellijn heeft en de lijn $x = B_1 x_0$ aanraakt in het punt $x_0 + A_1$.

Daar nu $\dfrac{1}{f(z_0) - A_0}$ binnen den door ons gevonden cirkel C_2' ligt, moet ook $f(z_0)$ binnen een zeer bepaalden cirkel liggen, waarvan middellijn en ligging te bepalen zijn uit de gegeven A's en B's.

De cirkel C_2 raakt de lijn $x = B_1 x_0$, dus moet ook de cirkel C_2 raken aan den cirkel C_1, wat direct uit de constructie van onze C's volgt. Het punt $f(z_0)$ komt weer dàn en dàn alleen op den rand van C_2 te liggen als $f(z)$ te schrijven is als

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + A_2}}.$$

Op geheel dezelfde manier bewijzen we de stelling, die in § 11 genoemd is.

De C_n hebben zooals uit het voorafgaande volgt, de eigenschap, dat cirkel C_n den cirkel C_{n-1} aanraakt. Verder moet de cirkel C_n geheel binnen den cirkel C_{n-1} gelegen zijn.

§ 13. We gaan nu over tot het beantwoorden van de vraag: Wat is de noodzakelijke en voldoende voorwaarde, waaraan de α_n en β_n moeten voldoen, om een functie te leveren, die tot onze klasse behoort en waarbij voor iedere n een asymptotische ontwikkeling van genoemden vorm te geven is?

In het voorafgaande hebben we aangetoond:

Een noodzakelijke voorwaarde waaraan de α_n en β_n moeten voldoen is, dat alle A_n van de kettingbreukontwikkeling zuiver imaginair en alle B_n positief moeten zijn.

Wanneer één van de B_n nul wordt, zullen alle volgende A's en B's nul moeten zijn en hebben we dus met een rationale functie te doen.

We willen nu aantoonen, dat we hier werkelijk ook met een voldoende voorwaarde te doen hebben.

Daartoe gaan we de kettingbreukontwikkeling nader bekijken. Met een asymptotische ontwikkeling eindigende met $\dfrac{\beta_n + \varepsilon(z)}{z^{2n-1}}$ correspondeert de kettingbreuk:

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{B_n z + o_n(z)}}}.$$

We gaan nu de volgende functierij bekijken:

$$f_n(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \ddots + \cfrac{1}{B_n z + A_n}}.$$

We merken op dat iedere functie van deze rij gelegen is binnen het rechterhalfvlak. Dan is er volgens VITALI een deelrij te maken, die in het rechterhalfvlak convergeert tot een holomorfe functie $f(z)$.

We willen nu aantoonen, dat deze functie werkelijk aan alle gestelde eischen voldoet. In de eerste plaats ligt deze functie binnen het rechterhalfvlak, daar iedere functie van de rij binnen het rechterhalfvlak gelegen is.

Rest ons nog aan te toonen, dat onze functie werkelijk asymptotisch te ontwikkelen is. Hiertoe bewijzen we de volgende hulpstelling:

Als voor een zekere n geldt:

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + A_2 + \cdots + \cfrac{1}{B_n z + o_n(z)}}}$$

dan kunnen we voor iedere $k \leqq n$ voor $f(z)$ een asymptotische ontwikkeling geven van den vorm:

$$f(z) = a_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \ldots + \frac{a_k}{z^{2k}} + \frac{\varepsilon_{2k}(z)}{z^{2k}}.$$

Om deze stelling te bewijzen merken we op dat we

$$A_n + \frac{1}{B_n z + o_n(z)}$$

schrijven kunnen als $o_{n-1}(z)$, waarin $o_{n-1}(z)$ tegelijk met $o_n(z)$ een functie van de klasse is. We kunnen dus onze kettingbreuk schrijven in den vorm:

$$f(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + A_1 + \cdots + \cfrac{1}{B_k z + o_k(z)}}$$

waarin $o_k(z)$ weer een functie van de klasse is.

Door nu het rekenwerk van § 10 in omgekeerde volgorde uit te voeren, vinden we voor onze kettingbreuk de genoemde asymptotische ontwikkeling.

§ 14. Met deze stelling bewijzen we nu de in § 13 aangekondigde stelling als volgt: Zij $f(z)$ de limiet van een uit $f_n(z)$ gedistilleerde deelrij.

Uit de constructie van de rij $f_n(z)$ volgt dan dat we $f(z)$ kunnen schrijven als een convergente kettingbreuk

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots .)$$

waarin de φ_n fragmenten zijn van de kettingbreuk, waarvan we uitgingen.

(Ter voorkoming van misverstand zij hier opgemerkt, dat we met deze schrijfwijze bedoelen, dat we, wanneer we de schakels van de kettingbreuk, die in φ_1 voorkomen, opgeschreven hebben, die van φ_2 moeten laten volgen, daarna die van φ_3 enz.)

We kunnen nu wegens de convergentie van de rij

$$f_n(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots ., \varphi_n)$$

voor $f(z)$ schrijven:

$$f(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots ., \varphi_n + o_n(z))$$

waarin $o_n(z)$ een functie van de klasse is.

Willen we nu bewijzen, dat voor $f(z)$ de asymptotische ontwikkeling

$$a_0 + \frac{\beta_1}{z} + \dots . + \frac{a_m}{z^{2m}} + \frac{\varepsilon_{2m}(z)}{z^{2m}}$$

geldt, dan breken we de kettingbreukontwikkeling voor $f(z)$ zoodanig af, dat de volledig uitgeschreven kettingbreuk meer dan $2m$ schakels heeft.

De hulpstelling van § 13 zegt ons dan direct, dat $f(z)$ op de genoemde manier asymptotisch te ontwikkelen is.

Resumeerende geven nu de volgende stellingen het verband tusschen kettingbreuk en asymptotische ontwikkeling.

1°. Iedere functie van onze klasse die we asymptotisch kunnen ontwikkelen, is voor iedere n te schrijven als een kettingbreuk van n schakels, waarbij de laatste schakel te schrijven is als $B_n z + o_n(z)$. $o_n(z)$ is hierin een functie van de klasse. Verder is deze functie als een convergente kettingbreuk te schrijven.

2°. Voor iedere functie, die als een convergente kettingbreuk te schrijven is, kunnen we een asymptotische ontwikkeling geven, wanneer deze functie tot onze klasse behoort.

§ 15. Tot slot van dit hoofdstuk willen we nog laten zien, dat iedere functie van onze klasse, die door een asymptotische ontwikkeling voorgesteld wordt, in het in § 9 genoemde gebied, door deze asymptotische ontwikkeling voor te stellen is rechts van de lijn $x = \varepsilon$, welke positieve waarde we ook voor ε kiezen.

Hiertoe toonen we aan

$$\frac{f(z)}{z} \rightarrow 0 \text{ als } z \rightarrow \infty$$

terwijl z altijd rechts blijft van de lijn $x = \varepsilon$. Uit onze asymptotische ontwikkeling volgde de kettingbreuk:

$$f(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + o_1(z)}$$

waarin $o_1(z)$ een functie van onze klasse is.

De breuk $\dfrac{1}{B_1 z + o_1(z)}$ is begrensd rechts van de lijn $x = \varepsilon$, daar het reëele deel van den noemer in ieder geval grooter dan $B_1 \varepsilon$ is, waarin $B_1 > 0$ is.

$\frac{f(z)}{z}$ nadert dus tot nul als z, rechts blijvende van de lijn $x = \varepsilon$, tot ∞ nadert.

Kijken we nu naar de kettingbreukontwikkeling in § 10 opgeschreven.

Dan zal $o_n(z)$ te schrijven zijn als

$$A_n + \frac{1}{B_n z + o_{n+1}(z)}$$

Volgens het voorgaande zal nu $\frac{o_n(z)}{z}$ tot nul naderen, als z tot ∞ nadert, rechts blijvende van de lijn $x = \varepsilon$. Maar dan zal uit de manier, waarop we van kettingbreukontwikkeling tot asymptotische ontwikkeling kwamen (§ 13), volgen dat de asymptotische ontwikkeling ook geldt rechts van $x = \varepsilon$, wat we wilden aantoonen.

HOOFDSTUK III.

Onderzoek naar het al of niet bepaald zijn van een functie der klasse door de gegeven asymptotische ontwikkeling. Algemeene uitdrukking voor die functies.

§ 16. In het voorafgaande (§ 12) hebben we aangetoond dat, wanneer een functie gegeven is door een asymptotische ontwikkeling

$$f(z) = a_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^{2n}} + \frac{\varepsilon_n z}{z^{2n}}$$

de waarde, die deze functie in een punt z_0 aanneemt, ligt binnen een cirkel C_n, waarvan de straal r_n afhankelijk is van de a's, β's en z_0.

Wanneer nu r_n in z_0 tot nul nadert als n tot ∞ nadert, zal in dit punt de asymptotische ontwikkeling één enkele waarde voor $f(z_0)$ bepalen.

Gebeurt dit nu in een puntverzameling, die zich in een inwendig punt van ons gebied verdicht, dan zal er slechts één holomorfe functie zijn, die tot onze klasse behoort en die we op de bovengenoemde manier asymptotisch kunnen ontwikkelen.

We willen nu eerst den straal r_n van den cirkel C_n berekenen.

Hiertoe schrijven we voor de kettingbreuk

$$(A_0, A_1 + B_1 z, \ldots, A_n + B_n z)$$

even $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ en drukken dan r_n uit in de eerste n P's en Q's van de kettingbreuk, die op hun beurt weer in de α's, β's en z_0 zijn uit te drukken.

Om r_n werkelijk te berekenen gaan we de kettingbreukontwikkeling nader bezien.

We hebben in § 10 gevonden:

$$f(z) = \frac{P_{n-1}(z)\,(A_n + B_n z + o_n(z)) + P_{n-2}(z)}{Q_{n-1}(z)\,(A_n + B_n z + o_n(z)) + Q_{n-2}(z)}.$$

Hierin schrijven we volgens bovenstaanden afspraak $P_n(z)$ voor $P_{n-1}(z)\,(A_n + B_n z) + P_{n-2}(z)$ en vinden dan

$$f(z) = \frac{P_n(z) + o_n(z)\,P_{n-1}(z)}{Q_n(z) + o_n(z)\,Q_{n-1}(z)}$$

waarin $o_n(z)$ weer in het rechterhalfvlak ligt.

Gaan we nu kijken, binnen welken cirkel $f(z_0)$ komt te liggen.

De polinomen $P_n(z_0)$ enz. zijn constanten, daar z_0 vast is, waarom we in het vervolg hiervoor alleen P_n enz. zullen schrijven.

$o_n(z_0)$ kan een willekeurig punt van het rechterhalfvlak zijn, waarom we hiervoor even z schrijven.

Dan wordt

$$f(z) = \frac{P_n + z P_{n-1}}{Q_n + z Q_{n-1}} \qquad (1)$$

De straal van den cirkel r_n, waarbinnen $f(z_0)$ moet liggen, vinden we nu, wanneer we berekenen op welken cirkel $f(z)$, als functie van z beschouwd, het rechterhalfvlak afbeeldt. Immers, bij ieder punt z van het rechterhalfvlak hoort een voor $f(z_0)$ mogelijke waarde, die uit formule (1) te berekenen is.

Hiertoe berekenen we den straal r_n van den cirkel waarop (1) de lijn $x = 0$ afbeeldt. Daartoe schrijven we

$$f(z) = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{1}{Q_{n-1}\,(Q_{n-1} z + Q_n)}$$

en merken dan op dat r_n de straal van den cirkel is, waarop de functie

$$Q(z) = \frac{1}{Q_{n-1}(Q_{n-1}z + Q_n)} \text{ de lijn } x = 0 \text{ afbeeldt.}$$

Hiertoe merken we op dat, wanneer z de lijn $x = 0$ doorloopt, $Q_{n-1}z + Q_n$ een lijn doorloopt, die een hoek met de imaginaire as maakt, gelijk aan arg Q_{n-1}.

De afstand van de lijn $Q_{n-1}z + Q_n$ tot O wordt dus

$$| Q_n | \cos \arg (Q_{n-1} - Q_n)$$

en dus wordt de afstand van de lijn $Q_{n-1}(Q_{n-1}z + Q_n)$ tot O nu gelijk aan

$$| Q_n | | Q_{n-1} | \cos \arg (Q_{n-1} - Q_n).$$

Maar dit is gelijk aan het Reëele Deel van $Q_n\overline{Q}_{n-1}$ waarbij we onder $\overline{Q}_{n-1}$ de toegevoegd complexe van Q_{n-1} verstaan.

De middellijn van den cirkel r_n die we zoeken, wordt dus gegeven door de formule:

$$\frac{1}{2r_n} = RD(Q_n\overline{Q}_{n-1}).$$

Gaan we nu kijken, hoe $\frac{1}{2r_n}$ samenhangt met $\frac{1}{2r_{n-1}}$.

Daartoe schrijven we:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2r_n} &= RDQ_n\overline{Q}_{n-1} = RD[\{(A_n + B_nz)Q_{n-1} + Q_{n-2}\}\overline{Q}_{n-1}] = \\ &= RD\{(A_n + B_nz) \mid Q_{n-1}^2 \mid + Q_{n-2}\overline{Q}_{n-1}\} = \\ &= B_nx \mid Q_{n-1}^2 \mid + RDQ_{n-1}\overline{Q}_{n-2}.\end{aligned}$$

Bepalen we nu $\frac{1}{2r_2}$ dan kunnen we uit deze formule direct $\frac{1}{2r_n}$ opschrijven.

Hiertoe bekijken we

$$f(z) = A_0 + \frac{1}{B_1z + A_1 + o_1(z)}.$$

$f(z_0)$ ligt nu binnen een cirkel waarvan de middellijn gegeven wordt door:

$$\frac{1}{2r_2} = B_1 x_0.$$

Dit volgt uit het feit, dat A_1 zuiver imaginair is.

Maar nu is $| Q_1(z_0) | = 1$ zoodat we kunnen schrijven:

$$\frac{1}{2r_2} = B_1 x_0 \mid Q_1^2(z_0) \mid .$$

Ook is $\frac{1}{2r_1} = 0.$

We vinden dus voor r_n de betrekking:

$$\frac{1}{2r_n} = B_1 x_0 \mid Q_1^2(z_0) \mid + B_2 x_0 \mid Q_2^2(z_0) \mid + \ldots +$$
$$+ B_n x_0 \mid Q_n^2(z_0) \mid .$$

Zooals we in § 12 reeds opmerkten, komt $f(z_0)$ dàn en dàn alleen op den omtrek van onzen cirkel C_n te liggen, wanneer $o_n(z)$ een constante is.

§ 17. Uit dit alles volgt nu:

Wanneer de reeks, die we voor $\frac{1}{2r_n}$ vonden, divergeert in in een puntverzameling, die zich in een inwendig punt van het rechterhalfvlak verdicht, zal, daar alle termen positief zijn, r_n tot nul naderen in die puntenverzameling, en onze asymptotische ontwikkeling in die punten één enkele functiewaarde bepalen.

Daar nu een holomorfe functie volkomen bepaald is door de waarden, die zij in zoo'n puntenverzameling aanneemt, zal er slechts één holomorfe functie zijn die we door de genoemde asymptotische ontwikkeling kunnen voorstellen en die tot onze klasse behoort.

We willen nu het omgekeerde ook aantoonen:

Convergeert de reeks in een punt van het rechterhalfvlak, dan bepaalt de asymptotische ontwikkeling meer dan een functie van onze klasse.

Hiertoe veronderstellen we, dat de reeks convergeert in z_0.

Dan nadert in dat punt r_n tot een eindige limiet r.

Vullen we nu in de kettingbreukontwikkeling:

$$f(z) = (A_0, A_1 + B_1 z, \ldots, A_n + B_n z + o_n(z))$$

voor $o_n(z)$ eens $-A_n$ in, dan ligt volgens het voorgaande de zoo gedefinieerde functie $f_n(z)$ in het punt z_0 op den cirkelomtrek C_n, waarvan r_n de straal is.

Deze rij heeft volgens Vitali een deelrij $f_{n'}(z)$, die tot een holomorfe functie convergeert.

Vervolgens gaan we een andere deelrij $f'_{n'}(z_0)$ construeeren, door voor $o_n(z)$ een zoodanig zuiver imaginair getal te kiezen, dat $f'_{n'}(z_0)$ juist diametraal tegenover $f_{n'}(z_0)$ komt te liggen op C_n.

Dan kunnen we uit de rij $f'_{n'}$ zoodanige rangnummers γ kiezen, dat de rij $f'_\gamma(z)$ tot een holomorfe functie convergeert.

Bekijken we nu $f_\gamma(z)$ en $f'_\gamma(z)$.

Deze reeksen convergeeren beiden tot een holomorfe functie. Ze kunnen nooit tot dezelfde holomorfe functie convergeeren, daar altijd

$$| f_\gamma(z_0) - f'_\gamma(z_0) | = 2r_\gamma > 2r.$$

Er wordt dus in dit geval meer dan een functie van de klasse door de asymptotische ontwikkeling bepaald.

§ 18. Nu we gezien hebben, onder welke voorwaarden ons probleem meer dan één oplossing toelaat, willen we nog zien, hoe we in dit geval de algemeene oplossing kunnen voorstellen.

Dit vraagstuk kunnen we ook als volgt formuleeren:

Welke zijn de functies van onze klasse, die voor iedere n gelijk zijn aan:

$$\frac{P_n(z) + P_{n-1}(z)\, o_n(z)}{Q_n(z) + Q_{n-1}(z)\, o_n(z)} \quad (1)$$

waarin $\frac{P_n}{Q_n}$ en $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ de n^{de} en de $(n-1)^{ste}$ naderende breuk van de door ons gevonden convergente kettingbreukontwikkeling zijn en $o_n(z)$ een functie van onze klasse is.

Kiezen we eerst een vaste $z\ (= z_0)$.

Dan kunnen we volgens Osgood uit (1) een deelrij f_γ maken, zoodanig dat

$$f_\gamma(\zeta) = \frac{P_\gamma(z_0) + P_{\gamma-1}(z_0)\zeta}{Q_\gamma(z_0) + Q_{\gamma-1}(z_0)\zeta}.$$

voor iedere ζ van het rechter halfvlak convergeert.

Hiertoe moeten we voor $o_n(z)$ de functie z kiezen, die we, om verwarring te voorkomen, als ζ geschreven hebben.

Kiezen we nu een aftelbaar oneindige puntverzameling $z_0, z_1 \ldots . z_n \ldots .$ die zich minstens in één inwendig punt van het rechter halfvlak verdicht, dan kunnen we een deelrij γ' van γ maken zoodanig dat:

$$\Psi_{\gamma'}(\zeta) = \frac{P_{\gamma'}(z_1) + P_{\gamma'-1}(z_1)\zeta}{Q_{\gamma'}(z_1) + Q_{\gamma'-1}(z_1)\zeta} = \Psi_{\gamma'}(\zeta, z_1)$$

convergeert tot een holomorfe functie.

Hieruit maken we een deelrij γ'' die dezelfde eigenschap heeft in het punt z_2, hieruit dan een γ''' enz.

We krijgen op deze manier een dubbel oneindig schema van functies.

Daar de γ' rij een deelrij is van de γ rij convergeert ook de rij

$$\Psi_{\gamma'}(\zeta, z_0) = \frac{P_{\gamma'}(z_0) + P_{\gamma'-1}(z_0)\zeta}{Q_{\gamma'}(z_0) + Q_{\gamma'-1}(z_0)\zeta}.$$

Met de diagonaalmethode kunnen we nu een deelrij (l) van holomorfe functies maken, zoodanig dat deze rij

$$\frac{P_l(z) + P_{l-1}(z)\varphi(z)}{Q_l(z) + Q_{l-1}(z)\varphi(z)}$$

overal convergeert, voor iedere vaste $\varphi(z)$, die we in deze rij willen invullen, als $\varphi(z)$ een functie van de klasse is.

Om dit aan te toonen gaan we als volgt te werk.

In de punten $z_0, z_1 \ldots . z_n \ldots .$ heeft $\varphi(z)$ achtereenvolgens de waarden $\varphi(z_0), \varphi(z_1), \ldots . \varphi(z_n) \ldots .$ Nu zal, als we in de deelrij γ voor de ζ de waarde $\varphi(z_0)$ invullen, de rij γ in z_0 convergeeren. Daar de rij γ' een deelrij is van de rij γ zal, wanneer we voor ζ in het punt z_0 invullen $\varphi(z_0)$ en in het punt z_1 invullen $\varphi(z_1)$, de rij γ' in de punten z_0 en z_1 convergeeren.

Nu is de rij l vanaf de 2[de] term een deelrij van de rij γ' en zal deze dus ook in de punten z_0 en z_1 convergeeren.

Zoo verder redeneerend zien we, dat onze diagonaalrij in ieder punt van onze puntverzameling z_n convergeert.

De grensfunctie van deze rij is dus holomorf. Verder zien we aan de constructie, dat voor iedere Q van onze klasse onze diagenaalrij convergeert tot een holomorfe functie.

Ook is onze grensfunctie door de gegeven asymptotische ontwikkeling voor te stellen, daar deze een grensfunctie is van een deelrij uit de n-rij.

§ 19. Omgekeerd willen we aantoonen dat iedere functie van onze klasse als limiet van een dergelijke l-rij te schrijven is. Construeeren we daartoe voor een willekeurige $f(z)$ van de klasse een rij (l) die $f(z)$ tot limiet heeft.

Voor iedere n is $f(z)$ te schrijven als:

$$f(z) = \frac{P_n(z) + P_{n-1}(z)\, o_n(z)}{Q_n(z) + Q_{n-1}(z)\, o_n(z)}$$

dus is zeker $f(z)$ voor iedere l te schrijven als

$$f(z) = \frac{P_l(z) + P_{l-1}(z)o_l(z)}{Q_l(z) + Q_{l-1}(z)o_l(z)}.$$

Daar nu alle functies $o_l(z)$ gelegen zijn in het rechterhalfvlak, kunnen we uit de rij (l) een deelrij (q) maken, zoodanig dat $o_q(z)$ tot een holomorfe functie $o(z)$ convergeert.

Nu is voor iedere q

$$f(z) = \frac{P_q(z) + P_{q-1}(z)o_q(z)}{Q_q(z) + Q_{q-1}(z)o_q(z)}.$$

Maar volgens het voorgaande nadert ook de rij

$$\frac{P_q(z) + P_{q-1}(z)o(z)}{Q_q(z) + Q_{q-1}(z)o(z)}$$

tot een holomorfe functie $F(z)$.

Er blijft ons nu nog over, aan te toonen dat $f(z) = F(z)$.

Nemen we daartoe een punt z_0 vast aan in het rechterhalfvlak.

We weten dan dat

$$\frac{P_l(z_0) + P_{l-1}(z_0)\xi}{Q_l(z_0) + Q_{l-1}(z_0)\xi}$$

een in het rechterhalfvlak gelegen holomorfe functie van ξ is.

Hieruit volgt nu wegens de gelijke continuïteit (continuité égale) van onze functies, dat we bij iedere ε een ε' kunnen vinden, zoodanig dat:

$$\left| \frac{P_q(z_0) + P_{q-1}(z_0)o_q(z_0)}{Q_q(z_0) + Q_{q-1}(z_0)o_q(z_0)} - \frac{P_q(z_0) + P_{q-1}(z_0)o(z_0)}{Q_q(z_0) + Q_{q-1}(z_0)o(z_0)} \right| < \varepsilon$$

als $| o_q(z_0) - o(z_0) | < \varepsilon'$.

Maar nu zal bij iedere ε' te vinden zijn een E zoodanig dat $| o_q(z_0) - o(z_0) | < \varepsilon'$ als $q > E$.

We zien dus: Er is bij iedere ε een E zoodat

$$\left| \frac{P_q(z_0) + P_{q-1}(z_0)o(z_0)}{Q_q(z_0) + Q_{q-1}(z_0)o(z_0)} - f(z_0) \right| < \varepsilon \text{ voor } q > E.$$

Wegens de gelijke continuïteit van onze holomorfe functies is er nu bij iedere ε te vinden een E zoodanig dat:

$$\left|\frac{P_q(z_0) + P_{q-1}(z_0)\varrho(z_0)}{Q_q(z_0) + Q_{q-1}(z_0)\varrho(z_0)} - f(z_0)\right| < \varepsilon$$

als $q > E$ is, voor iedere z_0 liggende in een gebied, dat geheel binnen het rechterhalfvlak gelegen is.

Maar dit zegt nu:

$$f(z) = F(z)$$

wat we wilden aantoonen.

§ 20. We kunnen nu hieruit direct de algemeene uitdrukking opschrijven voor de functies, die ons vraagstuk oplossen.

Uit de vorige paragraaf volgt dat de rij $\dfrac{P_l(z)}{Q_l(z)}$ tot een limiet nadert. Noemen we deze limiet $\lambda(z)$.

Evenzoo zal $\dfrac{P_{l-1}(z)}{Q_{l-1}(z)}$ tot een limiet $\mu(z)$ naderen.

Verder zal voor een $k > 0$ ook

$$\frac{P_l(z) + kP_{l-1}(z)}{Q_l(z) + kQ_{l-1}(z)} \quad (1)$$

naderen tot een limiet $\varrho(z)$.

De rijen $P_l(z)$ en $\lambda(z)Q_l(z)$ hebben nu dezelfde limiet.

We schrijven dit nu als volgt:

$$P_l(z) \sim \lambda(z)Q_l(z)$$

Ook is: $\quad P_{l-1}(z) \sim \mu(z)Q_{l-1}(z).$

Hieruit volgt:

$$P_l(z) + kP_{l-1}(z) \sim \lambda(z)Q_l(z) + k\mu(z)Q_{l-1}(z).$$

We weten:

$$P_l(z) + kP_{l-1}(z) \sim \varrho(z)Q_l(z) + k\varrho(z)Q_{l-1}(z).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\lambda(z)Q_l(z) + k\mu(z)Q_{l-1}(z)}{\varrho(z)Q_l(z) + k\varrho(z)Q_{l-1}(z)} \longrightarrow 1.$$

Maar dan moet ook

$$\gamma_l(z) = \frac{\lambda(z) + k\mu(z)\dfrac{Q_{l-1}(z)}{Q_l(z)}}{\varrho(z) + k\varrho(z)\dfrac{Q_{l-1}(z)}{Q_l(z)}} \longrightarrow 1.$$

Hieruit volgt nu:

$$\frac{Q_{l-1}(z)}{Q_l(z)} = \frac{\gamma_l(z)\varrho(z) - \lambda(z)}{k\mu(z) - k\varrho(z)\gamma_l(z)}.$$

Maar dan zal ook

$$\frac{Q_{l-1}(z)}{Q_l(z)} \rightarrow \frac{\varrho(z) - \lambda(z)}{k(\mu(z) - \varrho(z))} = d(z).$$

Om te laten zien dat deze limietfunctie holomorf is moeten we nog laten zien, dat

$$\mu(z) \not\equiv \varrho(z).$$

Dit volgt uit het feit dat $\mu(z)$ een grensfunctie is van de rij (1) overeenstemmende met $k = \infty$ en $\lambda(z)$ overeenstemt met $k = 0$.

Volgens het voorgaande zijn deze functies niet aan elkaar gelijk.

Nu moet ook de rij $\dfrac{P_{l-1}(z)}{P_l(z)}$ tot een limietfunctie $c(z)$ naderen want

$$\frac{P_{l-1}(z) \,.\, Q_l(z)}{P_l(z) \,.\, Q_{l-1}(z)} \rightarrow \frac{\mu(z)}{\gamma(z)}.$$

Verder nadert ook $\dfrac{Q_{l-l}(z)}{P_l(z)}$ tot een limiet $a(z)$.

Ook nadert $\dfrac{Q_l(z)}{P_l(z)}$ tot een limiet $b(z)$.

Volgens het voorafgaande is $f(z)$ nu te schrijven als

$$\lim \frac{P_q(z) + P_{q-1}(z)\varphi(z)}{Q_q(z) + Q_{q-1}(z)\varphi(z)}.$$

Maar dan is ook

$$f(z) = \lim_{q \to \infty} \frac{1 + \dfrac{P_{q-1}(z)}{P_q(z)} \varphi(z)}{\dfrac{Q_q(z)}{P_q(z)} + \dfrac{Q_{q-1}(z)}{P_q(z)} \varphi(z)}.$$

Daar nu de q rij een deelrij is van de l rij kunnen we deze limiet direct opschrijven:

$$f(z) = \frac{1 + c(z)\,\varphi(z)}{b(z) + a(z)\,\varphi(z)}.$$

We hebben hier nu de algemeene gedaante van de functie f gevonden. We krijgen de geheele verzameling door r alle functies der klasse te laten doorloopen.

Hiermee willen we onze beschouwingen beëindigen.

Voor de toepassing van de eigenschappen van deze functieklasse op het momentenprobleem van STIELTJES zie men het artikel van R. NEVANLINNA: Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momentenproblem.

STELLINGEN.

I.

Een gevolg van de stelling van FATOU is:

Iedere holomorfe functie, begrensd binnen den eenheidscirkel is een integraal van LEBESGUE, over den eenheidscirkel berekend.

II.

Een uitbreiding hiervan is de stelling:

Een begrensde functie, holomorf in het rechterhalfvlak, die van positieve orde ten opzichte van $\frac{1}{z}$ tot nul nadert, kan geschreven worden als integraal van LEBESGUE over de imaginaire as.

III.

Wanneer $f(x)$ RIEMANN integreerbaar en $\varphi(x)$ absoluut continu en monotoon is op een interval ab, dan is $\int_a^b f d\varphi$, opgevat als STIELTJES-integraal, gelijk aan de LEBESGUE integraal $\int_a^b f\varphi'$.

IV.

Als $f(x)$ RIEMANN integreerbaar en positief is, terwijl $\varphi(x)$ monotoon stijgend is op een interval ab dan is de LEBESGUE integraal $\int_a^b f\varphi'$ kleiner of gelijk aan de STIELTJES-integraal $\int_a^b f d\varphi$.

—

V.

De som, die voorkomt in prijsvraag 4 (van 1929) van het Wiskundig Genootschap, kan dikwijls met voordeel als een STIELTJES-integraal geschreven worden.

VI.

Het is niet mogelijk, op middelbare scholen een strenge behandeling van de oppervlakkentheorie te geven.

VII.

De behandeling van wortelvormen kan op middelbare scholen niet streng gemaakt worden.

VIII.

De verzameling van de Transfinite getallen bestaat niet.

IX.

De logica is een hoofdstuk der wiskunde.

X.

Het is zeer moeilijk om meetkundig een algemeene definitie van een irreductibele ruimtekromme te geven.

XI.

Het is verkeerd, de Cosmografie als examenvak van het programma der Hoogere Burgerscholen af te voeren, daar hierdoor de behandeling van de populaire astronomie gemakkelijk in het gedrang kan geraken.

XII.

Het verdient aanbeveling, dat op de middelbare scholen de hoofdzaken van de radiotelefonie als een belangrijk deel der natuurkunde behandeld worden.