



Inwendige grensverzamelingen

<https://hdl.handle.net/1874/294177>

Aⁿ 192

1929

INWENDIGE
GRENSVERZAMELINGEN

DOOR

J. H. G. NAGEL

u.
2

INWENDIGE
GRENZVERZAMELINGEN

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



3914 7446

INWENDIGE GRENSVERZAMELINGEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN
GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUUR-
KUNDE AAN DE RIJKS UNIVERSITEIT TE
UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAG-
NIFICUS DR H. TH. OBBINK, HOOGLEERAAR IN
DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOL-
GENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVER-
SITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE
FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE
VERDEDIGEN OP MAANDAG 6 MEI DES NAMID-
DAGS TE DRIE UUR DOOR

JOHANNES HENDERIKUS GERHARDUS NAGEL

GEBOREN TE GRONINGEN

H. J. PARIS
AMSTERDAM — MCMXXIX

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

AAN MIJN OUDERS
EN MIJN VROUW

Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij een aangename taak U, Hoogleraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen dank te zeggen voor het onderwijs, dat ik van U heb ontvangen.

Uwe boeiende en levendige colleges, Hooggeleerde Barrau, zullen bij mij steeds in dankbare herinnering blijven.

U, Hooggeleerde Wolff, Hooggeachte Promotor betuig ik in 't bijzonder mijn erkentelijkheid voor de groote welwillendheid en warme belangstelling die ik steeds van U heb mogen ondervinden.

INHOUD

INLEIDING.	1
--------------------	---

HOOFDSTUK I

REGULIERE VERZAMELINGEN	11
-----------------------------------	----

HOOFDSTUK II

INWENDIGE GRENSVERZAMELINGEN	16
--	----

HOOFDSTUK III

INWENDIGE GRENSVERZAMELINGEN (VERVOLG)	27
--	----

HOOFDSTUK IV

TOEPASSINGEN OP DE LEER DER REËLE FUNCTIES . .	36
--	----

HOOFDSTUK V

TOEPASSING VAN RESIDUELS OP DE COMPLEXE FUNCTIE- THEORIE	53
---	----

INLEIDING

Onder een *verzameling* van punten verstaan wij een veelheid van punten in onderling verband, onverschillig welk. Indien wij 1 punt hebben noemen wij dit per definitie ook een „verzameling”. Bij vele stellingen zal het noodig zijn de toevoeging te maken: „als de verzameling bestaat”. Om dit te vermijden verklaren we per definitie de uitdrukking: „de verzameling bestaat niet” en „de verzameling is leeg” identiek.

Indien een verzameling A_1 deel uitmaakt van een andere verzameling A_2 , schrijven we dit als $A_1 \subset A_2$ of $A_2 \supset A_1$.

Onder een *lineair interval* (ab) verstaan we alle punten van een lijn, die t. o. v. die lijn als coördinaatas en een punt O als nulpunt tot coördinaten x hebben, die voldoen aan $a < x < b$. Onder een *twee-dimensionaal interval* (aba_1b_1) verstaan we alle punten, die ten opzichte van een twee-dimensionaal assenstelsel tot coördinaten hebben x_1 en x_2 , die voldoen aan $a_1 < x_1 < b_1$ en $a_2 < x_2 < b_2$. Evenzoo kan een *n-dimensionaal interval* gedefinieerd worden.

Een punt P heet *inwendig punt* van een verzameling A , als er een interval bestaat, dat P bevat en een deel is van A .

Onder een *omgeving* van P verstaan we iedere verzameling U , die alleen uit inwendige punten bestaat en die P bevat.

Een *doorsnede* van twee verzamelingen A en B noemen we de verzameling van punten, die zoowel in A als in B liggen, en we schrijven dit $D = AB$.

Onder de *vereeniging* van twee verzamelingen A en B verstaan we de verzameling van punten, die, òf tot A òf tot B òf tot beiden behooren, en we schrijven dit $V = A \cup B$.

Een belangrijk begrip in de leer der puntverzamelingen is dat van *verdichtingspunt*. We noemen een punt P verdichtingspunt van een verzameling, indien iedere omgeving van dat punt minstens één van P verschillend punt der verzameling bevat.

Hieruit volgt, dat iedere omgeving van dat punt een oneindig aantal punten van de verzameling bevat. Dus een eindige verzameling kan geen verdichtingspunt hebben.

Opdat een punt verdichtingspunt zij, is niet noodzakelijk, blijkens de definitie, dat het punt tot de verzameling behoort.

Heeft een verzameling de eigenschap, dat al zijn verdichtingspunten punten van de verzameling zijn, zoo heet ze *gesloten*.

Is ieder punt van een verzameling verdichtingspunt, dan heet de verzameling *dicht in zichzelf*.

Een verzameling, die gesloten en dicht in zichzelf is, heet *perfect*.

Een puntverzameling heet *open*, als ieder punt van de verzameling inwendig punt van de verzameling is.

Onder het *complement* A' van een verzameling A verstaan we de verzameling van alle punten van de ruimte, die niet tot A hooren. Het complement A' van een open verzameling A is, in het geval ze niet leeg is, gesloten, want een verdichtingspunt P van het complement kan niet tot A hooren, daar er dan een interval te vinden was, dat P bevat en geheel binnen A ligt.

Evenzoo is te bewijzen, dat het complement A' van een gesloten verzameling A, in het geval, dat ze niet leeg is,

open is; immers als P een punt is van A' , dan hoort P niet tot A en vanwege de geslotenheid van A , kan P geen verdichtingspunt van A zijn.

Dus om P is een interval, waarin geen punt van A voorkomt, dus A' is open.

Onder de *grens* van een puntverzameling A verstaat men de doorsnede van de vereeniging van A met zijn verdichtingspunten en de vereeniging van A' met zijn verdichtingspunten of $(A \vdash H_A) (A' \vdash H_{A'})$ als H voorstelt de verzameling van verdichtingspunten.

Onder een n -dimensionaal segment verstaan we een n -dimensionaal interval vermeerderd met zijn grens.

Een verzameling A heet *niet dicht in een segment*, indien ieder segment, dat een deel is van het oorspronkelijke segment, een segment bevat, dat geen punt van A bevat.

Een verzameling A heet *dicht in een segment*, indien ieder segment, dat een deel is van het oorspronkelijk segment, punten van A bevat.

Een verzameling dicht in zichzelf, behoeft niet dicht te zijn in een segment, b.v. de perfecte verzameling, gedefinieerd door Cantor, door het segment $0 - 1$ in drie gelijke deelen te verdeelen en de punten binnen het middelste segment weg te laten. Bij de twee overblijvende segmenten van de drie gelijke deelen weer de punten binnen het middelste segment weg te laten, enz.

Indien A een willekeurige puntverzameling is en P een punt der ruimte, dan verstaan we onder de *afstand* van P tot A de onderste grens van de afstanden van P tot een willekeurig punt van A .

Onder de afstand van twee verzamelingen A en B verstaan we de onderste grens van de afstand van P tot Q , als

P een willekeurig punt van A en Q een willekeurig punt van B is.

Twee verzamelingen heeten van dezelfde *machtigheid*, als men aan ieder element van de eene 1 element en ook maar één van de andere toevoegen kan.

Hebben we een aftelbaar oneindige rij van puntverzamelingen $A_1 A_2 \dots$, dan verstaan we onder de *limes superior* van A de doorsnede $V_1 V_2 V_3 \dots V_k \dots$, waarin $V_k = A_k \dot{+} A_{k+1} \dot{+} A_{k+2} \dot{+} \dots$.

Onder de *limes inferior* van A verstaan we de vereeniging $D_1 \dot{+} D_2 \dot{+} D_3 \dot{+} \dots \dot{+} D_k \dot{+} \dots$, waarin D_k de doorsnede $A_k A_{k+1} A_{k+2} \dots$ is.

Een oneindig voortlopende rij van puntverzamelingen heeft per definitie een *limiet*, als limes superior A = limes inferior A.

Onderstaande stellingen worden in het volgende meermalen gebruikt.

STELLING 1 — *De vereeniging van eindig of aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen is weer een open puntverzameling.*

Wij geven het bewijs voor een aftelbaar oneindig aantal.

Zij $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ een aftelbare rij open puntverzamelingen.

Zij $A = A_1 \dot{+} A_2 \dots \dot{+} A_n \dots$.

Neem een willekeurig punt P van A. P is een punt van minstens één van de A's, b.v. A_k . Om P is een omgeving te construeeren, die alleen punten van A_k bevat, dus alleen punten van A. Bijgevolg is P een inwendig punt van A. Dus A is een open puntverzameling.

STELLING 2 — *De vereeniging van een eindig aantal gesloten puntverzamelingen is weer een gesloten puntverzameling.*

Zij $A_1, A_2, \dots, A_k$ een rij van k gesloten puntverzamelingen.

Zij $A = A_1 \dot{+} A_2 \dots \dot{+} A_k$.

Zij P een verdichtingspunt van A . De bewering is, dat P hoort tot A . Iedere omgeving van P bevat oneindig veel punten van A , dus oneindig veel punten van minstens één van de A_k 's.

Dus P is een verdichtingspunt van A_k ; $P \in A_k$ en bijgevolg $P \in A$.

De vereeniging van aftelbaar oneindig vele gesloten verzamelingen behoeft niet gesloten te zijn, b.v. de punten der ruimte met rationale coördinaten vormen een niet gesloten puntverzameling, hoewel ze te beschouwen zijn als de vereeniging van aftelbaar oneindig veel gesloten verzamelingen, ieder uit één punt bestaande.

STELLING 3 — *De doorsnede van een eindig of aftelbaar oneindig aantal gesloten verzamelingen is weer gesloten of leeg.*

Het bewijs wordt gegeven voor een aftelbaar oneindig aantal.

Zij $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ een rij van aftelbaar oneindig veel gesloten verzamelingen.

Zij $D = A_1 A_2 \dots A_n \dots$

De bewering is: D is gesloten. Stel P een verdichtingspunt van D . Iedere omgeving van P bevat een van P verschillend punt van D , dus een punt van $A_k, k = 1, 2, 3, \dots$. Dus P is een verdichtingspunt van A_k , bijgevolg P hoort tot A_k , onverschillig wat k is. Dus $P \in D$.

Gevolg: De grens van een puntverzameling A is blijkens de bepaling de doorsnede van twee gesloten verzamelingen. Dus volgens de hierboven genoemde stelling is de grens van een puntverzameling een gesloten verzameling.

We noemen verder de twee volgende overdekkingsstellingen.

(Voor bewijs zie o.a. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, blz. 45 en 46).

OVERDEKKINGSSTELLING VAN BOREL: Indien aan ieder punt P van een begrensde afgesloten puntverzameling A een bepaalde omgeving Ω_P is toegewezen, dan kan men steeds een eindig aantal van deze omgevingen $\Omega_{P_1}, \Omega_{P_2}, \dots, \Omega_{P_k}$ uitkiezen, zoodat ieder punt van A in minstens één van die omgevingen ligt.

OVERDEKKINGSSTELLING VAN LINDELÖF: Indien aan ieder punt P van een willekeurige puntverzameling A een bepaalde omgeving Ω_P is toegewezen, dan is er een hoogstens aftelbare rij van de omgevingen $\Omega_{P_1}, \Omega_{P_2}, \dots, \Omega_{P_n}, \dots$ uit te kiezen, zoodat ieder punt van A in minstens één van die omgevingen ligt.

STELLING 4 — *Zij $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ een aftelbare rij niet leege, gesloten puntverzamelingen, zoodanig dat $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ en zij A_1 begrensd, dan is $D(A_1 A_2 \dots A_n \dots) \neq 0$.*

Was $D = 0$, dan was aan ieder punt P van A_1 een kleinste getal k_P toe te voegen, zoodat P niet hoort tot A_{k_P} , dus P hoort tot het complement van A_{k_P} , dat we aan zullen duiden door A'_{k_P} . A'_{k_P} is open, omdat A_{k_P} gesloten is.

Dus aan ieder punt P van A_1 is een omgeving A'_{k_P} toe te voegen, waarin A_{k_P} niet doordringt. Daar A_1 begrensd en gesloten is, is volgens de overdekkingsstelling van Borel A_1 door een eindig aantal van dergelijke omgevingen te overdekken. Dus men kan eindig veel getallen $k_1 k_2 \dots k_m$ vinden, zoodat ieder punt van A_1 in minstens één van $A'_{k_1} A'_{k_2} \dots A'_{k_m}$ ligt. Zij k de grootste van de indices $k_1 k_2 \dots k_m$, dan is A_k een deel van ieder van de verzamelingen $A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_m}$ omdat $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$

A'_k bevat dus ieder van de puntverzamelingen $A'_k, A'_k, \dots, A'_m$ en dus ook A_1 zelf. Dus $A_1 \cdot A_k$ moet nul zijn, wat in tegenspraak is met het gegevene, dat A_k niet leeg en een deel van A_1 is.

Hiermede is dus de stelling bewezen ¹⁾.

STELLING 5 — *Iedere perfecte verzameling E heeft de machtheid van het continuüm.*

De stelling is duidelijk, als E een interval bevat. Dus we kunnen ons beperken tot het geval, dat E geen interval bevat, m. a. w. dat E nergens dicht is.

Voor het geval, dat E niet begrensd is, gaat dezelfde bewijsvoering door voor een begrensd deel van E.

1 — Zij E de perfecte verzameling, niet dicht in een segment.

Zij M een punt van het segment, niet hoorende tot E. Daar E perfect is, is M geen verdichtingspunt van E, dus zijn er intervallen, die M bevatten en waarbinnen geen punt van E ligt.

Kies het grootste interval, dat geen punt van E bevat.

Men kan om ieder punt van het segment, niet hoorende tot E een zoodanig interval construeeren. Twee intervallen kunnen geen uiteinde gemeenschappelijk hebben, want dan was dat punt een geïsoleerd punt van E, wat onmogelijk is. Twee intervallen kunnen geen deel gemeen hebben, want dan was het grootste interval, wat mogelijk is, niet gekozen.

We beweren nu, dat een perfecte verzameling E niet dicht in een segment, tot complement heeft met betrekking tot dat segment een aftelbare oneindige verzameling van intervallen, die geen uiteinde gemeen hebben.

Er kunnen geen eindig aantal zijn, want dan zou E geen niet dichte verzameling kunnen zijn. Het aantal intervallen

1) Zie Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, blz. 54.

waarvan de lengte > 1 is eindig, omdat de intervallen geen deel gemeen hebben. Het aantal intervallen, waarvan de lengte < 1 en $> \frac{1}{2}$ is eindig, om dezelfde reden. Indien we zoo voort gaan, komt ieder interval voor; dus het complement van E ten opzichte van het segment is een aftelbaar oneindig aantal intervallen. Men noemt de intervallen *contigu* aan E .

2 — E is niet aftelbaar. Zij P_1 een punt van E . Kies een interval I , dat P_1 bevat. We zullen nu bewijzen, dat IE al onaftelbaar is.

Stel IE aftelbaar, dus $IE = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$

Construeer om P_2 een segment $\bar{I}_1$ zoodanig, dat P_1 niet hoort tot dat segment $\bar{I}_1$. Binnen het segment is een interval I_1 te kiezen, P_2 bevattend, dat dezelfde eigenschap heeft. P_2 is als punt van E een verdichtingspunt, dus in I_1 liggen een aftelbaar oneindig aantal punten van E . Er is bijgevolg een punt met de kleinste index. Zij P_{n_2} dat punt (we noemen nu $P_2 : P_{n_1}$).

Om P_{n_2} is een segment $\bar{I}_2$ te kiezen, dat ligt in I_1 en waar $P_2 = P_{n_1}$ buiten ligt. Binnen dat segment is weer een interval I_2 te kiezen met dezelfde eigenschap. We gaan door, zoodat P_{n_k} steeds het punt is met de kleinste index, dat in I_k ligt.

We beweren nu, dat de index $n_k > k$.

Het is waar voor $k = 1$, immers $n_1 = 2 > 1$.

Stel de bewering is waar voor k , dus $n_k > k$.

Aan te toonen is nu, dat $n_{k+1} > k + 1$.

Uit $n_k > k$ volgt $n_k \geq k + 1$.

$$n_{k+1} > n_k \text{ dus } n_{k+1} > k + 1.$$

De begrensde aftelbare puntverzameling $P_{n_1}P_{n_2}\dots P_{n_k}\dots$ heeft dus een verdichtingspunt $H \notin I$.

Daar E gesloten is, hoort H tot E , dus $H \in IE$. IE is verondersteld te bestaan uit $P_1 P_2 \dots P_n \dots$ dus H is b.v. P_k .

Kies een omgeving Ω_H , die H bevat.

In Ω_H ligt b.v. P_{n_k} waarin

$$k > k + 1; P_{n_k} \in I_k, I_k \in I_{k+1} \text{ dus } P_{n_k} \in I_{k+1}.$$

Iedere omgeving van H bevat een punt van I_{k+1} dus zeker van $\bar{I}_{k+1}$ dat verschilt van P_k , dus H is verdichtingspunt van punten hoorende tot $\bar{I}_{k+1}$ dus $H \in \bar{I}_{k+1} \in I_k$.

$H \in I_k$ of $P_k \in I_k$ wat onmogelijk is, daar $n_k > k$ en P_{n_k} het eerste element van I_k is. Dus EI is niet aftelbaar; dus E is niet aftelbaar.

3 — Rangschikken we de intervallen contigu aan E in een rij $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$.

Zij A en B de eindpunten van E (eventueel van een deel van E). We zullen nu de perfecte verzameling afbeelden op de punten van het segment $0 - 1$.

Met A laten we correspondeeren het punt 0 , met B het punt 1 , met de twee uiteinden van δ_1 het punt $\frac{1}{2}$, met de twee uiteinden van δ_2 het punt $\frac{1}{4}$ of $\frac{3}{4}$ al naar gelang δ_2 ligt tusschen A en δ_1 of tusschen δ_1 en B . Enz. Met een δ_n correspondeert een punt $\frac{p}{2^k}$ van het segment $0 - 1$ en omgekeerd.

Het aantal punten van E , die eindpunten zijn van intervallen contigu aan E is aftelbaar. Zooals onder (2) gebleken is, is de perfecte verzameling niet aftelbaar. Zij M een punt van E dat geen eindpunt van een interval contigu aan E is, dan is er een aftelbare rij van intervallen contigu aan E aan te wijzen $\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \dots$ zoodat M hun limiet is. Met de rij $\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \dots$ correspondeert een aftelbare rij van punten van

$0 - 1$, die een verdichtingspunt γ hebben. We laten nu γ correspondeeren met M . Op deze manier correspondeert met ieder punt van E één punt van $0 - 1$.

Omgekeerd kiezen we van $0 - 1$ een punt met tot coördinaat $\frac{p}{2^n}$ dan correspondeeren daarmee twee eindpunten van een interval contigu aan E . Kiezen we een ander punt van $0 - 1$, dan is dat punt op te vatten, als verdichtingspunt van een aftelbare rij punten met tot coördinaten $\frac{p}{2^n}$, dus daarmee correspondeert een aftelbare rij van intervallen contigu aan E , die weer een limietpunt M hebben dat hoort tot E , want M is verdichtingspunt van eindpunten van die intervallen contigu aan E en E is gesloten.

Dus E heeft de continue machtigheid.

HOOFDSTUK I

REGULIERE VERZAMELINGEN

Een verzameling E heet van de maat 0, als alle punten van E tot intervallen behooren, waarvan de som der lengten, oppervlakten enz. kleiner is dan ε , waarbij ε ieder willekeurig getal > 0 voorstelt.

Een verzameling E van de maat 0 heet *regulier*, als ze gedefinieerd kan worden op de volgende manier:

Zij $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ een rij van een aftelbaar oneindig aantal punten. A_n hoort tot omgevingen $\Omega_n^1 \Omega_n^2 \dots \Omega_n^h \dots$, waarbij $\Omega_n^{h+1} \subset \Omega_n^h$ terwijl $\lim_{n=\infty} \Omega_n^h = A_n$. Van $\Omega_1^h \Omega_2^h \dots \Omega_n^h \dots$ vormen de lengten (resp. oppervlakten, inhouden enz. naar gelang het aantal dimensies) een convergente reeks voor iedere h .

Als E_h de verzameling van punten voorstelt, hoo- rende tot minstens één van de Ω_n^h ($n = 1, 2, 3 \dots$) dan verstaan we onder de reguliere verzameling E de doorsnede $D(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \dots)$.

De punten $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ heeten fundamenteal- punten.

E. Borel is de eerste geweest, die in zijn „Leçons sur la théorie des fonctions”, blz. 44 op deze verzamelingen heeft gewezen. Hij beschouwt t. a. p. de intervallen met tot eind- punten

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3},$$

waarin q gelijk is aan $1, 2, 3, \dots$

„ p „ „ „ $1, 2, 3, \dots, q-1$

„ n „ „ „ $1, 2, 3, \dots$

Onder E_1 wordt verstaan de verzameling der punten, hoorende tot één van de intervallen $\left\{ \frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3} \right\}$.

Onder E_n de verzameling der punten binnen de intervallen $\left\{ \frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right\}$.

E_1 bevat E_2 en in het algemeen E_n bevat E_{n+1} .

Men beschouwt nu de verzameling E bestaande uit de punten, die hooren tot iedere E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

$E = D(E_1 \cdot E_2 \dots E_n \dots)$.

E is blijkbaar een verzameling van de maat 0, die regulier is.

Gaan we de machtigheid van E na, dan blijkt, daar E de punten $\frac{p}{q}$ bevat, dat de machtigheid minstens de aftelbaarheid is.

We kunnen echter aantoonen, dat E de machtigheid van het continuüm bezit. Daarvoor is voldoende te bewijzen, dat E nog een verzameling punten bevat, die de continue machtigheid heeft. Die punten zijn de punten met tot coördinaten de getallen van Liouville ξ , gedefinieerd door

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n},$$

zoodanig, dat voor iedere waarde van n er een oneindig aantal waarden $\frac{p}{q}$ zijn, die voldoen aan de ongelijkheid. Nemen

we een punt met coördinaat ξ . Krachtens de definitie zijn er dus oneindig veel waarden q , waarvoor

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^4} \text{ of } \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq^3},$$

want q kan steeds grooter dan n verondersteld worden. Dus hoort ξ tot E_n .

Op deze manier kan bewezen worden, dat ieder getal ξ tot E_n hoort, onverschillig welke n .

De verzameling van punten ξ heeft de continue machtingheid ¹⁾.

Dus E heeft de continue machtingheid.

Het blijkt dus, dat de reguliere verzameling, die tot fundamentealpunten heeft de punten met rationale coördinaten van het segment $0 - 1$ en tot intervallen de bovengenoemde, de continue machtingheid bezit.

De vraag rijst nu, of de reguliere verzameling, die dezelfde fundamentealpunten heeft als de bovengenoemde, maar waarbij we de lengten van de intervallen om ieder punt op een andere manier tot 0 laten naderen ook de continue machtingheid bezit.

Dit is inderdaad het geval, zooals Borel aantoonst door middel van de theorie van de monotone functies (zie „Leçons sur les fonctions Monogènes, blz. 83—86).

De stelling kan echter nog verder uitgebreid worden tot:

Indien de fundamentealpunten van een reguliere verzameling dicht zijn in een interval, heeft de verzameling de machtingheid van het continuüm.

Borel geeft daarvan in „Leçons sur les fonctions Monogènes” blz. 94—124 een zeer uitvoerig bewijs, eerst voor het platte vlak, daarna voor de ruimte.

1) Zie Borel: Leçons sur la théorie des Fonctions, blz. 26—29.

Door middel van de volgende hulpstelling kan het bewijs korter gegeven worden.

Zij E_n een verzameling van segmenten, twee aan twee buiten elkaar gelegen ($n = 1, 2, 3, \dots$). Binnen ieder segment van E_n liggen 2 segmenten van E_{n+1} .

Bewering: De doorsnede $D(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \dots)$ is perfect.

Bewijs — 1 De doorsnede is niet leeg; want nemen we één van de segmenten S_1 , waaruit E_1 bestaat. Zij S_2 een segment van E_2 zoodanig dat $S_1 \supset S_2$. Op deze wijze voortgaande krijgen we $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \dots$.

S_1 is begrensd; dus volgens stelling 4 uit de inleiding is $D(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \dots) \neq 0$.

2 — De doorsnede D is dicht in zichzelf, m. a. w. ieder punt van D is verdichtingspunt van punten van D . Zij Q een punt van D , Ω een willekeurige omgeving om Q .

Q hoort tot E_n , onverschillig welke n , dus Q hoort tot segmenten, die steeds in lengte afnemen en tot 0 naderen. Er is bijgevolg een E_n , zóó dat één van zijn segmenten binnen Ω ligt.

Dat segment bevat weer twee segmenten van E_{n+1} . Beide segmenten bevatten minstens één punt van D (volgens de stelling genoemd onder 1 van dit bewijs) dus $\Omega \cap D \neq \emptyset$ is niet leeg.

3 — De doorsnede D is gesloten.

Want de doorsnede van aftelbaar oneindig veel gesloten verzamelingen is weer een gesloten verzameling volgens Inleiding stelling 3.

De stelling: „Indien de fundamentealpunten van een reguliere verzameling dicht zijn in een interval, heeft de verzameling de machtigheid van het continuüm”, wordt nu als volgt bewezen:

Noemen we de reguliere verzameling E , haar fundamenteaalpuncten $A_1, A_2, A_3, \dots$, de omgevingen om $A_n: \Omega_n^h$ ($h = 1, 2, 3, \dots$) voor iedere n .

Onder E_h verstaan we $\Omega_1^h \vdash \Omega_2^h \vdash \Omega_3^h \vdash \dots$.

$E = D(E_1 \cdot E_2 \dots E_n \dots)$.

Zij A_k een fundamenteaalpunct van E . A_k ligt binnen een omgeving Ω_k hoorende tot E_1 . Binnen Ω_k^1 is een segment σ_1 te kiezen, zoodanig dat $A_k \notin \sigma_1$. Daar de fundamenteaalpuncten overal dicht liggen, kunnen we binnen σ_1 twee fundamenteaalpuncten kiezen, die we zullen noemen A_{k1} en A_{k2} . Daar $\lim_{h \rightarrow \infty} \Omega_n^h = A_n$, onverschillig welke n , zijn er binnen

σ_1 2 omgevingen, hoorende tot eenzelfde E_n te bepalen, die buiten elkaar liggen. Binnen de twee gekozen omgevingen liggen twee segmenten σ_{21} en σ_{22} .

Op deze manier kunnen we doorgaan.

De voorwaarden van de hulpstelling zijn vervuld: de doorsnede bevat een perfect deel of de reguliere verzameling bevat een perfect deel.

Volgens de stelling: iedere perfecte verzameling heeft de machtigheid van het continuüm (zie Inleiding, stelling 5) heeft dus de reguliere verzameling E , waarvan de fundamenteaalpuncten dicht liggen op $0 - 1$ de continue machtigheid.

Daar in bovenstaande bewijzen geen gebruik is gemaakt van een bijzonderheid zich voordoende in een bepaalde R_n gelden ze dus voor iedere R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

HOOFDSTUK II

INWENDIGE GRENSVERZAMELINGEN

Een inwendige grensverzameling is de doorsnede van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen, waarbij we mogen aannemen, dat ieder de volgende bevat:

Voorbeelden:

1 — Zij A_1 de verzameling van punten, waarvan x voldoet aan
— $1 < x < 1$.

Zij A_2 de verzameling van punten, waarvan x voldoet aan
— $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Zij A_n de verzameling van punten, waarvan x voldoet aan
— $\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$

enz.

De inwendige grensverzameling $D (A_1 . A_2 A_n)$ is één punt.

2 — Zij A_1 de verzameling van punten, waarvan x voldoet aan
— $1 < x < 1 + 1$.

Zij A_2 de verzameling van punten, waarvan x voldoet aan
— $\frac{1}{2} < x < 1 + \frac{1}{2}$.

Zij A_n de verzameling van punten, waarvan x voldoet aan
— $\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$.

enz.

De doorsnede $D (A_1 . A_2 A_n)$ is blijkbaar de door-

snede van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen, dus een inwendige grensverzameling, die in dit geval perfect is, n.l. het segment $0 - 1$.

We zullen nu eenige stellingen afleiden.

STELLING 1 — *Iedere open puntverzameling Ω is een inwendige grensverzameling*; ze is immers te beschouwen, als de doorsnede van aftelbaar oneindig veel gelijke verzamelingen Ω .

STELLING 2 — *De punten met irrationale coördinaten van het segment $0 - 1$ vormen een inwendige grensverzameling*.

Noem Ω_1 alle punten van het interval $0 - 1$. Zij r_1 het eerste punt verkregen bij nummering van de aftelbaar oneindig vele punten met rationale coördinaten van het segment $0 - 1$.

r_1 verdeelt Ω_1 in 2 open deelen, waarvan de vereeniging Ω_2 weer open is (zie stelling 1 uit de inleiding).

Zij r_2 het tweede punt verkregen bij de nummering. r_2 verdeelt Ω_2 in deelen, waarvan de vereeniging, die weer open is, Ω_3 genoemd zal worden. Indien zoo wordt voort gegaan, wordt ieder rationaal punt bij een bepaalde n buiten Ω_{n+1} gehouden.

De doorsnede $D (\Omega_1 . \Omega_2 \Omega_n)$ bevat alle punten met irrationale coördinaten, terwijl ze de rationale punten niet bevat.

D is als doorsnede van aftelbaar vele open puntverzamelingen een inwendige grensverzameling.

STELLING 3 — *Een geïsoleerde puntverzameling is een inwendige grensverzameling*.

Onder een geïsoleerde verzameling E verstaan we een verzameling van punten, zoodanig dat om ieder punt P een omgeving Ω_P geconstrueerd kan worden, zoodanig dat

$$\Omega_P E - P = 0.$$

Dus daar aan ieder punt een bepaalde omgeving toegevoegd kan worden is het mogelijk, volgens de overdekkingsstelling van Lindelöf (zie Inleiding, blz. 6) een aftelbaar aantal omgevingen te kiezen, zoodat

$$\begin{aligned} A &\subset \Omega_{P_1} \cup \Omega_{P_2} \cup \Omega_{P_3} \cup \dots \\ \text{of } A &= A\Omega_{P_1} \cup A\Omega_{P_2} \cup A\Omega_{P_3} \cup \dots \\ \text{of } A &= P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \end{aligned}$$

m. a. w. iedere geïsoleerde verzameling is aftelbaar oneindig of eindig.

Dat een geïsoleerde verzameling E een inwendige grensverzameling is, blijkt door ieder punt P_n te beschouwen, als de limiet van een aftelbaar oneindig aantal omgevingen $\Omega_n^1, \Omega_n^2, \Omega_n^3, \dots$ alle gelegen binnen Ω_{P_n} .

Zij $E_1 = \Omega_1^1 \cup \Omega_2^1 \cup \dots$ in het algemeen

$$E_h = \Omega_1^h \cup \Omega_2^h \cup \dots \cup \Omega_n^h \cup \dots$$

E_h ($h = 1, 2, 3, \dots$) is volgens stelling 1 uit de Inleiding een open puntverzameling. $E = D(E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot \dots)$; dus de geïsoleerde verzameling E is een inwendige grensverzameling.

STELLING 4 — *Een reguliere verzameling is een inwendige grensverzameling.*

Immers de in de definitie van reguliere verzameling genoemde E_h is de vereeniging van aftelbaar veel open puntverzamelingen, dus E_h is open. E_{h+1} hoort tot E^h .

Een reguliere verzameling is de doorsnede van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen, waarbij ieder de volgende bevat. Dus een reguliere verzameling is een inwendige grensverzameling.

STELLING 5 — *Een gesloten verzameling is een inwendige grensverzameling* ¹⁾.

1) Zie Hausdorff: Mengenlehre, 2e Auflage, blz. 117.

Zij A de gesloten verzameling. Om ieder punt $P \notin A$ als middelpunt leggen we een open puntverzameling: cirkel, bol, enz. al naar gelang het aantal dimensies met straal ϱ .

De vereeniging van alle cirkels, bollen enz. om alle punten $P \notin A$ met straal ϱ noemen we $U(A, \varrho)$.

$U(A, \varrho)$ is een open puntverzameling. (Volgens de overdekkingsstelling van Lindelöf en Stelling 1 uit de Inleiding).

Nu is $A = U(A, 1) \cdot U(A, \frac{1}{2}) \cdot U(A, \frac{1}{3}) \dots$, want een punt $P \notin A$ hoort tot ieder van de $U(A, \varrho)$, dus tot hun doorsnede.

Omgekeerd zij Q een punt, hoorende tot

$$U(A, 1) \cdot U(A, \frac{1}{2}) \cdot U(A, \frac{1}{3}) \dots$$

dan beweren we dat Q tot A hoort.

Immers Q kan zijn een middelpunt van de gekozen cirkels, bollen, enz. dus dan hoort Q zeker tot A .

Indien Q geen middelpunt is, kiezen we Q als middelpunt van een cirkel, bol, enz. C_1 met straal 1.

Daar $Q \notin U(A, 1)$ is er minstens één middelpunt van een cirkel, bol, enz. van $U(A, 1)$ met straal 1 gelegen binnen C_1 ; dus minstens één punt van A .

Evenzoo kunnen we Q als middelpunt kiezen van een cirkel, bol, enz. C_2 met straal $\frac{1}{2}$. Daar $Q \notin U(A, \frac{1}{2})$ is er dus minstens één middelpunt van één van de cirkels, bollen, enz. van $U(A, \frac{1}{2})$ gelegen binnen C_2 . Dus ligt er behalve Q nog een punt van A binnen C_2 . Dit geldt voor iedere n , dus Q is verdichtingspunt van A , A is gesloten, dus $Q \notin A$.

STELLING 6 — *Een aftelbare puntverzameling, die geen deel heeft dat dicht in zichzelf is, is een inwendige grensverzameling.*

Een kort bewijs hiervoor is gegeven door Brouwer ¹⁾ en

1) Verslagen Kon. Akademie Amsterdam, Deel 23, blz. 1325.

ook door Hobson ¹⁾. Beiden maken echter gebruik van de transfinitie ordinaalgetallen.

Bij het door Wolff ²⁾ gegeven bewijs wordt daarvan geen gebruik gemaakt.

1 — Als $E_1, E_2, \dots$ inwendige grensverzamelingen zijn, als verder iedere E_k deel is van een open verzameling Ω_k , terwijl de Ω_k twee aan twee geen punten gemeen hebben, dan is ook de vereeniging $E_1 + E_2 + \dots$ een inwendige grensverzameling.

We mogen namelijk schrijven:

$$E_k = \Omega_{k1}\Omega_{k2} \dots, k = 1, 2, \dots$$

waarmee we bedoelen, dat E_k de verzameling is van de punten, die in Ω_{ki} liggen, voor iedere i . De Ω_{ki} zijn open puntverzamelingen, waarvan we mogen veronderstellen, dat ze allen in Ω_k liggen.

De puntverzameling

$$(\Omega_{11} + \Omega_{21} + \dots) (\Omega_{12} + \Omega_{22} + \dots) \dots$$

bevat $E_1 + E_2 + \dots$ maar geen punt daarbuiten, daar $\Omega_{ki}\Omega_j = 0$, voor $k \neq j$. Hiermee is de hulpstelling bewezen.

2 — We zeggen, dat een puntverzameling E inwendige grensverzameling in een punt P is, als er een dat punt bevattende open puntverzameling bestaat, zoodat het daarin gelegen deel van E een inwendige grensverzameling is. Dat geldt dan ook voor het deel van E gelegen in een willekeurige open puntverzameling, die deel is van de genoemde.

3 — Als een aftelbare puntverzameling E inwendige grensverzameling is in ieder van haar punten, dan is E een inwendige grensverzameling.

We noemen de punten van E : $P_1, P_2, \dots$

1) Proc. London M. S. (2)₂, blz. 316—323.

2) Verslagen Amsterdam, Deel 32, blz. 150—151.

Om P_k als middelpunt leggen we een interval (vierkant, kubus, enz. al naar het aantal dimensies van de ruimte, waarin E gegeven is) zoodat EI_k een inwendige grensverzameling is, waarbij wij zorgen, dat de rand van I_k geen punt van E bevat, hetgeen wegens de aftelbaarheid van E mogelijk is.

Met I_k bedoelen we het open interval, door $\bar{I}_k$ zullen we het afgeslotene aanduiden, door een accent het complement van een verzameling. Nu is

$$E = EI_1 + EI_2 (\bar{I}_1)' + EI_3 (\bar{I}_1)' (\bar{I}_2)' + \dots$$

Dat E inwendige grensverzameling is, volgt nu onmiddellijk uit no. 1.

4 — Zij E aftelbaar en geen inwendige grensverzameling. Dan is volgens no. 3 de verzameling D van de punten E , waarin E niet inwendige grensverzameling is, niet leeg. Zij P een punt van D en I een interval met P tot middelpunt. EI is volgens no. 2 geen inwendige grensverzameling, dus evenmin $EI - P$. Want was $EI - P$ een inwendige grensverzameling, dan zou daar P ook te beschouwen is, als de doorsnede van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen, ook de vereeniging $EI - P$ en P een inwendige grensverzameling zijn. (zie de hieronder blz. 23 bewezen stelling 9) wat onmogelijk is.

Dus $EI - P$ bevat volgens no. 3 een punt Q , waarin $EI - P$ niet inwendige grensverzameling is, dus E is ook niet inwendige grensverzameling in Q , zoodat Q in D ligt. Hieruit volgt, dat D dicht in zichzelf is en daaruit de te bewijzen stelling.

STELLING 7 — *Indien $P_1, P_2, P_3, \dots$ enz. voorstellen een aftelbare verzameling van gesloten verzamelingen, dan is het complement een inwendige grensverzameling.*

Bewijs:

Zij $Q_1 = P_1$, $Q_2 = P_1 \dot{+} P_2$, $Q_n = P_1 \dot{+} P_2 \dot{+} \dots \dot{+} P_n$.

Volgens de stelling 2 uit de Inleiding is de vereeniging van een eindig aantal gesloten verzamelingen gesloten

Dus Q_n is gesloten voor iedere n . Het complement is de doorsnede van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen, is dus een inwendige grensverzameling.

Gevolg: *Het complement van iedere aftelbare verzameling is een inwendige grensverzameling.*

P_n bestaat dan voor iedere n uit één punt.

Als toepassing moge hier vermeld worden, dat de punten met irrationale coördinaten van het segment $0 - 1$ een inwendige grensverzameling vormen. Immers de punten met rationale coördinaten van het segment $0 - 1$ vormen een aftelbare verzameling van gesloten verzamelingen, ieder uit één punt bestaande. Zie ook stelling 2, blz. 17, waar een ander bewijs gegeven is.

STELLING 8 — *De doorsnede van een eindig of een aftelbaar oneindig aantal inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling.*

Wij geven het bewijs voor een aftelbaar oneindig aantal.

Zij $U_1 = D(U_{11} \cdot U_{12} \dots U_{1n} \dots)$

Zij $U_2 = D(U_{21} \cdot U_{22} \dots U_{2n} \dots)$

Zij $U_n = D(U_{n1} \cdot U_{n2} \dots U_{nn} \dots)$

Enz., waarin U_{mn} voor iedere m en n een open puntverzameling voorstelt. We beweren nu:

$D(U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \dots U_n \dots) = D(U_{11} \cdot U_{12} \cdot U_{21} \cdot U_{13} \cdot U_{22} \cdot U_{31} \dots)$.

Want een punt hoorende tot $D(U_1 \cdot U_2 \dots)$ hoort tot U_n voor iedere n , dus tot U_{mn} voor iedere m en n , dus tot

$D(U_{11} \cdot U_{12} \cdot U_{21} \cdot U_{13} \dots)$

Een punt hoorende tot $D(U_{11} \cdot U_{12} \cdot U_{21} \dots)$ hoort tot

U_{mn} voor iedere m en n , dus tot U_n voor iedere n , bijgevolg tot $D(U_1 \cdot U_2 \dots)$.

Dus de doorsnede $D(U_1 \cdot U_2 \dots U_n \dots)$ van een aftelbaar oneindig aantal inwendige grensverzamelingen, is weer een inwendige grensverzameling.

STELLING 9 — *De vereeniging van een eindig aantal inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling.*

Wij geven een bewijs voor de vereeniging van twee inwendige grensverzamelingen.

Zij $U = U_1 \cdot U_2 \dots U_n \dots$ waarin U_n voor iedere n een open puntverzameling is.

Zij $V = V_1 \cdot V_2 \dots V_n \dots$ waarin V_n voor iedere n een open puntverzameling is.

Men kan nu de vereeniging $U \vdash V$ schrijven als:

$(U_1 \vdash V_1) (U_2 \vdash V_2) \dots (U_n \vdash V_n) \dots$ dus als doorsnede van aftelbaar veel open puntverzamelingen, want ieder punt P van U ligt in $U_1 \cdot U_2 \dots$ dus hoort tot $U_n \vdash V_n$ voor iedere n .

Ieder punt Q van V ligt in $V_1 \cdot V_2 \dots$ dus hoort tot $U_n \vdash V_n$ voor iedere n

Omgekeerd, ieder punt P tot

$$(U_1 \vdash V_1) \cdot (U_2 \vdash V_2) \dots (U_n \vdash V_n) \dots$$

hoorend, ligt in $U_n \vdash V_n$ voor iedere n , dus òf in U_k voor oneindig veel k 's òf in V_k voor oneindig veel k 's òf in beide voor oneindig veel k 's. Dus punt P ligt in U òf in V òf hoort tot beide verzamelingen U en V .

Gevolg: *Een inwendige grensverzameling, vermeerderd met een eindig aantal punten, is weer een inwendige grensverzameling.*

Immers een eindig aantal punten vormen een geïsoleerde verzameling, dus een inwendige grensverzameling. Hun

vereeniging is weer een inwendige grensverzameling.

Tot slot zullen we een hulpstelling aantoonen, noodzakelijk voor een in het volgende hoofdstuk te bewijzen stelling.

Zij E een puntverzameling.

Zij Ω_k een open puntverzameling voor $k = 1, 2, 3, \dots$, terwijl $\Omega_k \not\subset \Omega_{k+1}$.

Zij verder $E\Omega_k$ een inwendige grensverzameling voor $k = 1, 2, 3, \dots$ en $\Omega = \lim_{k=\infty} \Omega_k$.

De bewering is, dat $E\Omega$ een inwendige grensverzameling is.

Bewijs:

1 — Zonder de algemeenheid te schaden, kunnen we Ω_k vervangen door U_k waarin U_k een open of leeg deelverzameling is van Ω_k .

U_k bestaat uit de punten, die een afstand $> \frac{1}{k} \times \varepsilon$ van de grens van Ω_k hebben (ε is een willekeurig getal > 0).

We zullen de grens van Ω_k : Γ_k noemen en die van

$$U_k: \Delta_k, k = 1, 2, 3, \dots$$

Γ_k en Δ_k zijn gesloten (zie Inleiding, stelling 3, gevolg).

2 — $\bar{U}_k \not\subset U_{k+1}$.

Immers zij P een punt van U_k , dan ligt P verder dan $\frac{\varepsilon}{k}$ van Γ_k , dus verder dan $\frac{\varepsilon}{k}$ van Γ_{k+1} , dus zeker verder dan

$\frac{\varepsilon}{k+1}$ van Γ_{k+1} m. a. w. $P \not\subset U_{k+1}$ of $U_k \not\subset U_{k+1}$.

Zij P een punt van Δ_k , dan ligt P op een afstand van $\frac{\varepsilon}{k}$ van Γ_k , dus op een afstand grooter of gelijk aan $\frac{\varepsilon}{k}$ van Γ_{k+1} ,

dus zeker verder dan $\frac{\varepsilon}{k+1}$ van Γ_{k+1} m. a. w. $P \notin U_{k+1}$ of $\Delta_k \notin U_{k+1}$.

Bijgevolg $\bar{U}_k \notin U_{k+1}$.

3 — Naarmate k grooter is, wordt de afstand tusschen de grenzen van Ω_k en U_k kleiner dan één van te voren te geven bedrag.

Dus daar $\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_k$ is ook $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = \Omega$.

4 — We kunnen nu schrijven:

$$E\Omega = EU_1 + E(U_2 - U_1) + E(U_3 - U_2) + \dots$$

U_k is een open puntverzameling, dus een inwendige grensverzameling.

$E\Omega_k$ is een inwendige grensverzameling, dus ook de doorsnede van $E\Omega_k$ en U_k dat is EU_k is een inwendige grensverzameling.

$$E(U_{k+1} - U_k) = EU_{k+1} U'_k = EU_{k+1} \bar{U}'_k + EU_{k+1} \Delta_k$$

$$\text{of } E\Omega = EU_1 + \sum_{k=1}^{\infty} EU_{k+1} \bar{U}'_k + \sum_{k=1}^{\infty} EU_{k+1} \Delta_k.$$

$\bar{U}'_k$ is een open puntverzameling, dus een inwendige grensverzameling en EU_{k+1} eveneens, dus $EU_{k+1} \bar{U}'_k$ is ook een inwendige grensverzameling.

De open verzamelingen $U_1, U_2 \bar{U}'_1, U_3 \bar{U}'_2$ enz. hebben twee aan twee geen punt gemeen, dus volgens de onder 1 van stelling 6, blz. 20 bewezen stelling is $EU_1 + \sum_{k=1}^{\infty} EU_{k+1} \bar{U}'_k$ een inwendige grensverzameling.

Het derde lid $EU_{k+1} \Delta_k$ is ook een inwendige grensverzameling, onverschillig wat k is.

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ enz. hebben twee aan twee geen punt gemeen, want $\bar{U}_k \notin U_{k+1}$, dus $\Delta_k \notin U_{k+1}$, dus ieder punt van Δ_k is een inwendig punt van U_{k+1} .

Δ_{k+1} hoort niet tot U_{k+1} , dus $\Delta_k \Delta_{k+1} = 0$.

Wij kunnen bijgevolg Δ_k insluiten in een open ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) zoodat $\omega_k \omega_l = 0$ voor $k \neq l$, dus ook $U_2 \Delta_1, U_3 \Delta_2, \dots$ hebben twee aan twee geen punt gemeen, dus volgens de onder 1, stelling 6, blz. 20 genoemde stelling is $\sum_{k=1}^{\infty} EU_{k+1} \Delta_k$ een inwendige grensverzameling.

De vereeniging van 2 inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling.

Dus $E\Omega$ is een inwendige grensverzameling; waarmee de hulpstelling is aangetoond.

HOOFDSTUK III

INWENDIGE GRENSVERZAMELINGEN

(*Vervolg*)

We zullen in dit hoofdstuk een noodzakelijke en voldoende voorwaarde afleiden, dat een gegeven puntverzameling een inwendige grensverzameling is.

Zij een puntverzameling E inwendige grensverzameling in ieder van haar punten.

De bewering luidt, dat E een inwendige grensverzameling is.

Bewijs: We geven het bewijs voor 2 afmetingen; het is echter geldig voor alle afmetingen.

Zij P een punt van E . Er is dus krachtens het gegevene een gebied, waartoe P hoort en waarin E inwendige grensverzameling is.

Zij G_P het grootste gebied met die eigenschap.

G_P kan als volgt geconstrueerd worden. Verdeel het platte vlak door middel van twee stel evenwijdige lijnen, die onderling loodrecht staan, in vierkanten, waarvan de lengten der zijden a cM. is.

a is zoo te kiezen, dat er een gebied, P bevattend, te vinden is, bestaande uit zulke vierkanten en waarbinnen E inwendige grensverzameling is. Zij $G(a)$ het grootste gebied met de eigenschap, dat $E \cdot G(a)$ inwendige grensverzameling is.

Nemen we lijnen evenwijdig aan de vorige lijnen, zoodat vierkanten ontstaan met tot lengten der zijden $\frac{1}{2} a$ cM. Er zijn gebieden te vinden, P bevattend, bestaande uit de vierkanten met zijden $\frac{1}{2} a$ en waarbinnen E inwendige grensverzameling is.

Zij $G(\frac{1}{2} a)$ het grootste gebied met de eigenschap, dat $E \cdot G(\frac{1}{2} a)$ inwendige grensverzameling is. Op deze manier

gaan we verder. $G_P = \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

G_P kan geen punt van E op zijn grens hebben, want een punt van E is middelpunt van een interval I, zoodat $E \cdot I$ inwendige grensverzameling is.

Volgens de in het vorige hoofdstuk afgeleide hulpstelling is $E \cdot G_P$ inwendige grensverzameling.

De vereeniging $G_P \vdash E \cdot I$ zou dus weer een inwendige grensverzameling zijn, dus zou G_P vergroot kunnen worden, wat onmogelijk is, bijgevolg G_P heeft op zijn grens geen punt van E.

Bij ieder punt P van E bestaat een G_P : dus volgens de overdekkingsstelling van Lindelöf kunnen we schrijven:

$$E = E \cdot G_{P_1} \vdash E \cdot G_{P_2} \vdash \dots \dots \dots (1)$$

$$E = E \cdot G_{P_1} + E \cdot G_{P_2} \cdot \bar{G}'_{P_1} + E \cdot G_{P_3} \cdot \bar{G}'_{P_1} \cdot \bar{G}'_{P_2} + \dots (2)$$

Met $\bar{G}_P$ bedoelen we het afgesloten gebied; door een accent duiden we het complement van een verzameling aan.

We moeten aantoonen, dat ieder punt van E in het 2e lid van reeks (2) voorkomt.

Zij Q een punt van E, dan hoort Q tot $E \cdot G_{P_n}$ voor zekere n.

Is $n = 1$, dan hoort Q tot $E \cdot G_{P_1}$ dus tot het 2e lid van (2).

Is $n \neq 1$, dan is er onder de $E \cdot G_{P_n}$ een nummer aan te

wijzen, dat het kleinste is. Dus $Q \notin E \cdot G_{P_n}$ en niet tot $E \cdot G_{P_{n-1}}$, $E \cdot G_{P_{n-2}}$ enz.

Op de grens van $G_{P_{n-1}}$ kan geen punt van E liggen, dus Q ligt niet op de grens van $E \cdot G_{P_{n-1}}$ dus $Q \notin E \cdot \bar{G}'_{P_{n-1}}$.

Eveneens $Q \notin E \cdot \bar{G}'_{P_{n-2}}$ enz.

Q hoort nu tot $E \cdot G_{P_n} \cdot \bar{G}'_{P_{n-1}} \cdot \bar{G}'_{P_{n-2}} \dots$

Dus ieder punt van E hoort tot minstens één van de termen van het 2e lid van (2).

We kunnen verder aantoonen, dat de termen van (2) onderling geen punt gemeenschappelijk hebben, immers zou een punt R hooren tot $E \cdot G_{P_n} \cdot \bar{G}'_{P_{n-1}} \cdot \bar{G}'_{P_{n-2}} \dots$ en tot $E \cdot G_{P_m} \cdot \bar{G}'_{P_{m-1}} \cdot \bar{G}'_{P_{m-2}} \dots$ dan zou, indien $m < n$, R hooren tot G_{P_m} en tot $\bar{G}'_{P_m}$ wat onmogelijk is.

Eveneens indien $n < m$.

De termen van (2) zijn inwendige grensverzamelingen; $E \cdot G_{P_1}$ is een inwendige grensverzameling, $E \cdot G_{P_2}$ eveneens, $\bar{G}'_{P_1}$ is een open puntverzameling, dus een inwendige grensverzameling, bijgevolg is ook $E \cdot G_{P_2} \cdot \bar{G}'_{P_1}$ een inwendige grensverzameling.

Evenzoo kan bewezen worden, dat $E \cdot G_{P_n} \cdot \bar{G}'_{P_{n-1}} \cdot \bar{G}'_{P_{n-2}} \dots$ een inwendige grensverzameling is.

Aan de voorwaarden van de onder (1) blz. 20 genoemde stelling is voldaan, daar de open verzamelingen

$$E \cdot G_{P_n} \cdot \bar{G}'_{P_{n-1}} \dots \bar{G}'_{P_1}$$

twee aan twee geen punt gemeen hebben. Dus hiermee is bewezen, dat als E inwendige grensverzameling is in ieder van haar punten E een inwendige grensverzameling is.

Omgekeerd, indien E een inwendige grensverzameling is, dan is E inwendige grensverzameling in ieder van haar punten.

Zij P een punt hoorende tot E .

Zij Ω een open puntverzameling, P bevattend.

Iedere open puntverzameling is een inwendige grensverzameling; de doorsnede van twee inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling, dus $E \cdot \Omega$ is een inwendige grensverzameling, dus E is inwendige grensverzameling in P .

Het bovenstaande geldt voor iedere R_n onverschillig welke n .

Hiermee is dus bewezen, dat een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat E een inwendige grensverzameling is, is dat E inwendige grensverzameling is in ieder van haar punten.

Voor het lineaire geval is de stelling ook op de volgende manier te bewijzen.

Zij E een lineaire puntverzameling, geen interval bevattend.

Zij E inwendige grensverzameling in ieder van haar punten.

De bewering is, dat E een inwendige grensverzameling is.

Bewijs: Om ieder punt P van E brengen we een interval I_P waarin E inwendige grensverzameling is, terwijl de eindpunten niet in E liggen. Het laatste is mogelijk, doordat gegeven is, dat E geen interval bevat.

Volgens de overdekkingsstelling van Lindelöf is

$$E = E \cdot I_{P_1} \dot{+} E \cdot I_{P_2} \dot{+} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{of } E = E \cdot I_{P_1} + E \cdot I_{P_2} \cdot \bar{I}'_{P_1} + E \cdot I_{P_3} \cdot \bar{I}'_{P_2} \cdot \bar{I}'_{P_1} + \dots (2)$$

Met I_P bedoelen we het open interval, met $\bar{I}_P$ het afgesloten, en door een accent duiden we het complement van een verzameling aan.

We moeten aantoonen, dat ieder punt van E in één van de termen van (2) voorkomt.

Zij Q een punt van E , dan hoort Q tot $E \cdot I_{P_n}$.

Is n gelijk aan 1, dan hoort Q tot $E \cdot I_{P_1}$ dus Q komt voor in één van de termen van de reeks (2).

Hoort Q niet tot $E \cdot I_{P_1}$ dan is er onder de $E \cdot I_{P_n}$, waartoe Q hoort, een nummer aan te wijzen, dat het kleinste is, dus Q hoort tot $E \cdot I_{P_n}$ en niet tot $E \cdot I_{P_{n-1}}$ etc.

Op de grens van $I_{P_{n-1}}$ kan geen punt van E liggen, dus Q ligt niet op de grens van $E \cdot I_{P_{n-1}}$ dus $Q \notin E \cdot \bar{I}'_{P_{n-1}}$.

Eveneens $Q \notin E \cdot \bar{I}'_{P_{n-2}}$ enz. Q hoort nu tot

$$E \cdot I_{P_n} \cdot \bar{I}'_{P_{n-1}} \cdot \bar{I}'_{P_{n-2}} \dots$$

Dus ieder punt van E hoort tot minstens één van de termen van het 2e lid van (2).

We kunnen verder aantoonen, dat de termen van (2) onderling geen punt gemeenschappelijk hebben; immers zou een punt R hooren tot $E \cdot I_{P_n} \cdot \bar{I}'_{P_{n-1}} \cdot \bar{I}'_{P_{n-2}} \dots$ en tot $E \cdot I_{P_m} \cdot \bar{I}'_{P_{m-1}} \cdot \bar{I}'_{P_{m-2}} \dots$ dan zou indien $m < n$, R hooren tot I_{P_m} en tot $\bar{I}'_{P_m}$, wat onmogelijk is. Eveneens indien $n < m$.

De termen van (2) zijn inwendige grensverzamelingen. $E \cdot I_{P_1}$ is een inwendige grensverzameling, $E \cdot I_{P_2}$ eveneens $\bar{I}'_{P_1}$ is een open puntverzameling, dus een inwendige grensverzameling, bijgevolg is ook $E \cdot I_{P_2} \cdot \bar{I}'_{P_1}$ een inwendige grensverzameling.

Evenzoo kan bewezen worden, dat $E \cdot I_{P_n} \cdot \bar{I}'_{P_{n-1}} \cdot \bar{I}'_{P_{n-2}} \dots$ een inwendige grensverzameling is.

Aan de voorwaarden van de onder (1), blz. 20 genoemde stelling is voldaan, dus hiermee is bewezen, dat als E inwendige grensverzameling is in ieder van haar punten en geen interval bevat, E een inwendige grensverzameling is.

We laten nu de voorwaarde, dat E geen interval bevat, vallen en bewijzen dezelfde stelling.

Zij E een lineaire puntverzameling en inwendige grensverzameling in ieder van haar punten.

De bewering is: E is een inwendige grensverzameling.

Bewijs: $E = \text{eventuele intervalverzameling } \Omega + e$.

De verzameling Ω bestaat volgens een stelling van Cantor:

„Een verzameling van gescheiden gelegen gebieden kan hoogstens aftelbaar zijn” ¹⁾ uit hoogstens aftelbaar oneindig veel intervallen. Daar de vereeniging van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen weer open is, (zie Inleiding, blz. 4) is Ω een open puntverzameling, dus Ω is een inwendige grensverzameling.

e bevat geen interval. We toonen aan, dat e in ieder van haar punten inwendige grensverzameling is van e .

Zij P een punt van e .

E is inwendige grensverzameling in P , dus er is een interval I_P zoodat $E \cdot I_P$ inwendige grensverzameling is.

$$E \cdot I_P = \Omega \cdot I_P + e \cdot I_P.$$

$$e \cdot I_P = \Omega' \cdot E \cdot I_P.$$

$E \cdot I_P$ is een inwendige grensverzameling; Ω' is gesloten, dus ook een inwendige grensverzameling.

De doorsnede $\Omega' \cdot E \cdot I_P$ ook, dus $e \cdot I_P$ is een inwendige grensverzameling. Bijgevolg e is inwendige grensverzameling in ieder van haar punten. e bevat geen interval, derhalve e is een inwendige grensverzameling.

Dus E is te beschouwen, als de vereeniging van twee inwendige grensverzamelingen, dus volgens stelling 9, blz. 23 een inwendige grensverzameling.

Omgekeerd, indien E een inwendige grensverzameling is,

1) Zie b.v. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, blz. 226.

dan is E inwendige grensverzameling in ieder van haar punten.

Zij P een punt hoorende tot E .

Zij Ω een open puntverzameling, P bevattend.

Iedere open puntverzameling is een inwendige grensverzameling; de doorsnede van twee inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling, dus $E \cap \Omega$ is een inwendige grensverzameling, dus E is inwendige grensverzameling in P .

Hiermee is dus voor het lineaire geval bewezen, dat een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat E een inwendige grensverzameling is, is dat E inwendige grensverzameling is in ieder van haar punten.

Bovenstaand bewijs kan niet zonder meer voor R_n voor $n > 1$ gegeven worden.

Immers in het lineaire geval is van een verzameling E eerst weg te laten de intervalverzameling, (die ook leeg kan zijn) waarna rest een verzameling e , waarin geen interval voorkomt. Om ieder punt van e is een interval te kiezen, zoodanig dat de eindpunten niet tot e hooren.

Datzelfde is niet het geval in R_n voor $n > 1$.

Leggen we b.v. om een punt P een vierkant, kubus, enz. al naar gelang het aantal dimensies, dan is het niet zonder meer mogelijk er steeds voor te zorgen, dat de grens van het vierkant eventueel kubus enz. geen punt van de verzameling bevat, b.v. de verzameling van punten van een kromme lijn gaande door P .

Uit het voorgaande kunnen we laten volgen:

Als een puntverzameling E geen inwendige grensverzameling is, dan is de verzameling D van de punten, waarin E niet inwendige grensverzameling is, niet leeg.

Zij P een punt van D en I een interval P bevattend, $E \cdot I$ is dus geen inwendige grensverzameling.

Dus evenmin $E \cdot I - P$; want was $E \cdot I - P$ een inwendige grensverzameling, dan zou, daar P beschouwd kan worden als de doorsnede van aftelbaar oneindig veel open puntverzamelingen, ook de vereeniging van $E \cdot I - P$ en P een inwendige grensverzameling zijn (volgens stelling 9, blz. 23). Dit is onmogelijk, dus $E \cdot I - P$ is geen inwendige grensverzameling.

Bijgevolg is er een punt Q te vinden, zoodanig dat $E \cdot I - P$ geen inwendige grensverzameling is in Q .

Ook E is niet inwendige grensverzameling in Q , want was E wel inwendige grensverzameling in Q , dan zou er een omgeving O zijn, Q bevattend, zoodanig dat $E \cdot O$ inwendige grensverzameling is. P hoort niet tot $E \cdot O$, want dan was er om P een omgeving, zoodat de punten van E daarin gelegen een inwendige grensverzameling vormden.

Was $E \cdot O$ inwendige grensverzameling, dan ook de doorsnede van $(E \cdot O, I)$ of van $(E \cdot O, E \cdot I)$ of (daar P niet hoort tot $E \cdot O$) van $(E \cdot O, E \cdot I - P)$, hetgeen in strijd is met het feit, dat $E \cdot I - P$ geen inwendige grensverzameling is in Q . Daar E dus niet inwendige grensverzameling is in Q , hoort Q tot D .

Hieruit volgt, dat de verzameling D dicht in zichzelf is. We krijgen de volgende stelling:

De punten van E , waarin E niet inwendige grensverzameling is, vormen een verzameling dicht in zichzelf.

Bijgevolg is iedere verzameling E te splitsen in een inwendige grensverzameling I en een deel D dicht in zichzelf.

Een verzameling E , die geen inwendige grensverzameling is, kan door toevoeging van de verdichtingspunten van D die niet

hooren tot E, tot een inwendige grensverzameling gemaakt worden.

Immers een gesloten verzameling is een inwendige grensverzameling (zie stelling 5, blz. 18) en de vereeniging van twee inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling (zie stelling 9, blz. 23).

Hiermee is dus weer bewezen een stelling van Young, waarvan Brouwer in Proceedings Amsterdam, deel 18, pag. 48 en 49 een bewijs gegeven heeft door middel van de transfinitie ordinaal-getallen.

HOOFDSTUK IV

TOEPASSINGEN OP DE LEER DER REËLE FUNCTIES

Zij $f(P)$ een functie van de coördinaten van een punt in een ruimte met willekeurig aantal afmetingen.

STELLING: *De punten, waar f continu is, vormen een inwendige grensverzameling.*

Bewijs ¹⁾: f is continu in P , als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving U_P te vinden is, die P bevat, zoodanig dat voor ieder willekeurig puntenpaar x en y van U_P geldt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Kiezen wij $\varepsilon = 1$.

Zij $C(1)$ de verzameling van punten P , die een omgeving U_P hebben, zoodanig dat voor ieder puntenpaar x en y van U_P geldt $|f(x) - f(y)| < 1$.

$C(1)$ is open, want ieder punt $P \in C(1)$ hoort tot een omgeving U_P waarin $|f(x) - f(y)| < 1$.

Ieder punt Q van U_P hoort tot $C(1)$, want Q hoort tot een U_Q die een deel vormt van U_P waarvoor dus ook

$$|f(x) - f(y)| < 1.$$

Dus ieder punt van $C(1)$ is een inwendig punt van $C(1)$ m. a. w. $C(1)$ is een open puntverzameling.

In het algemeen: $C\left(\frac{1}{n}\right)$ is de verzameling van punten P , die een omgeving U_P hebben, zoodanig dat voor ieder puntenpaar x en y van U_P geldt

1) Hausdorff: Mengenlehre, 2e Auflage, blz. 251.

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Evenals bij $C(1)$ kan aangetoond worden, dat ook $C\left(\frac{1}{n}\right)$ een open puntverzameling is.

Zij C de verzameling van continuïteitspunten van $f(x)$.

Dan is $C = C(1) \cdot C\left(\frac{1}{2}\right) \cdot C\left(\frac{1}{3}\right) \dots C\left(\frac{1}{n}\right) \dots$ dus een inwendige grensverzameling.

Immers bij een punt Q hoorende tot C is een omgeving U_n te kiezen, waarin voor ieder willekeurig puntenpaar x en y geldt $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$

dus $Q \in C\left(\frac{1}{n}\right)$ $n = 1, 2, 3, \dots$

dus $Q \in C(1) \cdot C\left(\frac{1}{2}\right) \cdot C\left(\frac{1}{3}\right) \dots$

Omgekeerd ieder punt R hoorende tot $C(1) \cdot C\left(\frac{1}{2}\right) \cdot C\left(\frac{1}{3}\right) \dots$ heeft een omgeving U_n , waarin voor ieder willekeurig puntenpaar x en y geldt $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Dus f is continu in R m. a. w. $R \subset C$.

Young ¹⁾ heeft laten zien, dat *bij iedere inwendige grensverzameling E , die men op een lineair interval geeft, een functie in dat interval behoort, die continu is in ieder punt van E en discontinu in ieder ander punt.*

Door Wolff ²⁾ is hiervan een eenvoudig bewijs gegeven, dat onmiddellijk geldig is voor ruimten met willekeurig aantal afmetingen.

1) W. H. Young: Wiener Sitzungsber., Vol. 112, Abt. IIa, blz 1307.

2) J. Wolff: Verslagen Amsterdam, Deel 32, blz. 148—149.

1 — Gegeven moge dus zijn een puntverzameling E als doorsnee van aftelbaar veel open puntverzamelingen Ω_n , waarbij Ω_{n+1} deel, (niet noodzakelijk echt deel) van Ω_n is.

We definiëren $f(P)$ voor ieder punt der ruimte als volgt: ten eerste $f(P) = 0$, als P in E ligt. Zij nu P een punt, dat niet in E ligt, n_P de kleinste waarde van n , waarvoor Ω_n het punt P niet bevat.

$$\text{Wij stellen } f(P) = \frac{\psi(P)}{n_P} \dots \dots \dots (1)$$

waarin $\psi(P)$ de functie is, die in ieder punt der ruimte, waarvan alle coördinaten rationaal zijn, gelijk is aan 1, in ieder ander punt der ruimte gelijk is aan -1 .

We kunnen zeggen, dat (1) ook doorgaat voor de punten van E , als we daar $n_P = \infty$ denken.

2 — Wij zullen nu aantoonen, dat $f(P)$ continu is in de punten van E en discontinu daarbuiten.

Onderstellen we eerst, dat P tot E behoort. Dan is $f(P) = 0$.

Is ε een willekeurig positief getal, dan kunnen we het natuurlijke getal v zoodanig kiezen dat

$$\frac{1}{v} < \varepsilon. \dots \dots \dots (2)$$

Daar P in Ω_v ligt en Ω_v open is, bestaat er een omgeving U van P , die ook in Ω_v ligt. Voor ieder punt Q van U is derhalve $n_Q > v$ zoodat wegens (1) en (2)

$$|f(Q)| < \varepsilon.$$

Dus f is continu in ieder punt van E .

Nemen we nu P in het complement van E . Als P niet op de grens van Ω_{n_P} ligt, heeft P een omgeving U , die geen punt met Ω_{n_P} gemeen heeft en in Ω_{n_P-1} ligt, of buiten Ω_1 .

Voor ieder punt Q van U , is dan $n_Q = n_P$. Dus

$$|f(Q)| = |f(P)|.$$

Daar de punten, waar f positief is, zoowel als die waar f negatief is, overal dicht op U liggen, is de schommeling van f in P gelijk aan $2 |f(P)|$.

Als echter P op de grens van Ω_{n_P} ligt, bevat iedere omgeving U van P een deel van Ω_{n_P} . Voor ieder punt Q van dat deel is $n_Q > n_P$, dus

$$|f(Q) - f(P)| \leq \frac{1}{n_P} - \frac{1}{n_P + 1} \dots \dots (3)$$

Daar nu de punten Q waarvoor de ongelijkheid (3) geldt, zich in P verdichten, is P een discontinuïteitspunt van f .

Hiermee is de stelling geheel bewezen.

Een inwendige grensverzameling is, of leeg, of een aftelbare verzameling zonder deel dicht in zichzelf, of heeft een perfect gedeelte en bezit dan dientengevolge de continue machtigheid. (Voor bewijs zie Carathéodory „Vorlesungen über Reelle Funktionen, blz. 69).

In aansluiting hiermee kunnen de reële functies verdeeld worden in 3 soorten:

1e. De functie bezit geen continuïteitspunten. We kunnen zoo'n functie *totaal discontinu* noemen b.v. de functie van Dirichlet gedefinieerd op het segment $0 - 1$ als volgt: De functie is 0 in de punten met irrationale coördinaten, 1 in de punten met rationale coördinaten.

2e. De functie bezit een hoogstens aftelbare verzameling van continuïteitspunten. Deze verzameling kan volgens de bovengenoemde stelling van Carathéodory geen deel bevatten dicht in zichzelf. Dus de punten met rationale coördinaten van een segment kunnen niet uitsluitend continuïteitspunten zijn.

Als voorbeeld geven we de volgende functie:

We definiëren op het segment $0 - 1$ een perfecte verzameling E , die nergens dicht is op $0 - 1$. Er is nu (zie pag. 7) een aftelbare verzameling van intervallen contigu aan E .

De functie zij nu gelijk aan 2 in ieder punt van E ; in ieder irrationaal punt van een interval contigu aan E gelijk aan de coördinaat van het punt, en in ieder rationaal punt van een interval contigu aan E gelijk aan de waarde van de coördinaat van het midden van het betreffende interval.

Deze functie is discontinu in de punten van E ; immers zij P een punt hoorende tot E . In ieder interval om P ligt een interval contigu aan E , waarin de functie hoogstens 1 is, dus P is een discontinuïteitspunt van de functie.

De punten, hoorende tot intervallen contigu aan E , kunnen in 2 soorten verdeeld worden, n.l. die punten, die het midden van de bedoelde intervallen zijn en diegene, die het niet zijn. In de laatste punten is de functie discontinu; immers zij Q één van die punten met irrationale coördinaat; $f(Q) =$ coördinaat van Q . In ieder interval om Q liggen rationale punten, waar de functie gelijk is aan de coördinaat van het midden van de contigu, waarin Q ligt.

Is Q' een punt met rationale coördinaat, dan is er een vast bedrag $\varepsilon > 0$ te bepalen, zoodanig dat in ieder interval om Q' punten met irrationale coördinaten liggen, waar de functie meer dan ε van $f(Q')$ verschilt. Dus Q en Q' zijn discontinuïteitspunten.

De middens van de bedoelde intervallen vormen continuïteitspunten. Immers de onderste grens van de bovenste grenzen van de functie in intervallen, het midden van een contigu bevattend, is gelijk aan de functie in het midden, dus de functie is in het midden half continu naar boven. Evenzoo is de bovenste grens van de onderste grenzen van

de functie in intervallen, het midden bevattend, gelijk aan de functie in het midden, dus de functie is in het midden half continu naar beneden.

Bijgevolg: De functie is continu in de middens van de intervallen contigu aan E.

Het aantal intervallen contigu aan E is aftelbaar (zie blz. 7) dus er zijn een aftelbaar aantal continuïteitspunten. De continuïteitspunten liggen nergens dicht op $0 - 1$, want in een interval, contigu aan E, is een interval te beschrijven, waarin geen continuïteitspunt van de functie ligt. Ieder continuïteitspunt is een geïsoleerd punt, dus de verzameling van continuïteitspunten bevat geen deel dicht in zichzelf.

3e. De verzameling van continuïteitspunten is van de machtigheid van het continuum.

Hierbij zijn 3 gevallen te onderscheiden.

a. Ieder punt van een gebied is continuïteitspunt van de functie: de functie heet *continu* in dat gebied.

b. de continuïteitspunten zijn nergens dicht in een gebied. De functie heet dan *punctueel continu* in dat gebied.

Als voorbeeld geven we de volgende functie:

Zij P een perfecte, nergens dichte, verzameling in het segment $0 - 1$; de waarde der functie in ieder punt van P zij 0.

De verzameling van intervallen contigu aan P bevat irrationale en rationale punten. In de irrationale punten zij de functie eveneens 0. In de rationale punten zij de functie gelijk aan de afstand van het punt tot één van de twee uiteinden van het interval contigu aan P, waarin het punt gelegen is, en wel gelijk aan de kleinste van de twee. In ieder punt p van P is de functie continu, want voor ieder positie-

getal ε is om p een interval te construeeren, zoodanig dat voor ieder punt q in dat interval $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$.

De rationale en irrationale punten van de intervallen contigu aan P zijn discontinuïteitspunten; zij Q een dergelijk punt.

Q hoort tot een interval I geheel gelegen binnen een interval contigu aan P . In dat interval I liggen zoowel rationale als irrationale punten. Dus Q is een discontinuïteitspunt van de functie.

De continuïteitspunten van de gedefinieerde functie vormen dus een op $0 - 1$ nergens dichte perfecte verzameling, die de continue machtheid bezit.

c. De continuïteitspunten zijn overal dicht in een gebied, terwijl er punten zijn, waar de functie niet continu is. We noemen deze functie *punctueel discontinu* in dat gebied.

Als voorbeeld van een punctueel discontinue functie kan genoemd worden de door Baire ¹⁾ gedefinieerde functie op het segment $0 - 1$.

Voor $x = 0$ en $x = 1$ is $f = 1$

$$x = \frac{1}{2} \qquad f = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \qquad f = \frac{1}{4}.$$

In het algemeen voor $x = \frac{p}{2^v}$, p en v een geheel getal zijnde, en de breuk $\frac{p}{2^v}$ niet vereenvoudigbaar, is de functie $= \frac{1}{2^v}$.

Voor alle punten, waarvoor $x \neq \frac{p}{2^v}$ stellen we $f = 0$. Zij A één van deze laatste punten, zij $\varepsilon > 0$, v een geheel

1) Baire: Leçons sur les fonctions discontinues, blz. 76.

positief getal, zoodanig dat $\frac{1}{2^v} < \varepsilon$. We kunnen dan een interval kiezen, dat A bevat en geen enkel punt $\frac{p}{2^h}$, als $h \leq v - 1$; in ieder punt van dat interval is $0 \leq f \leq \frac{1}{2^v} < \varepsilon$.

Dus de functie is continu in A; de continuïteitspunten vormen een overal dichte verzameling op $0 - 1$.

In een punt A', waar de functie $= \frac{1}{2^v}$ is de functie blijkbaar discontinu.

We kunnen nu aantoonen, dat de discontinuïteitspunten van een eindige punctueel discontinue functie, gedefinieerd op een segment, een verzameling van de eerste categorie vormen, bestaande uit gesloten verzamelingen.

Onder een verzameling van de eerste categorie, gedefinieerd op een puntverzameling E verstaan we de vereeniging van een aftelbaar oneindig aantal op E nergens dichte verzamelingen. Zij f de eindige punctueel discontinue functie gedefinieerd op het segment PQ.

Zij ω de schommeling van de functie in een punt A van het segment PQ, waaronder we verstaan het verschil tusschen de bovenste en onderste limesfunctie, mits beiden eindig zijn, in het punt A.

Onder de bovenste limesfunctie in het punt A verstaan we de onderste grens van de bovenste grenzen van de functie in omgevingen, die A bevatten. Evenzoo verstaan we onder de onderste limesfunctie in het punt A de bovenste grens van de onderste grenzen van de functie in omgevingen, die A bevatten.

Zij G_1 de verzameling van punten, waar f een schommeling $\omega \geq 1$ heeft. G_1 is een gesloten verzameling. Zij A_0 een

verdichtingspunt van punten $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ in ieder, waarvan $\omega(A_n) \geq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

De bewering is, dat $\omega(A_0) \geq 1$.

Daar in ieder interval om A_0 punten A_n voorkomen, waar $\omega(A_n) \geq 1$, is dus de bovenste grens van ω in ieder interval om $A_0 \geq 1$.

Dus ook de onderste grens van de bovenste grenzen van ω in intervallen om $A_0 \geq 1$. Daar ω een half continue functie is naar boven ¹⁾, is de onderste grens van de bovenste grenzen van ω in omgevingen, die A_0 bevatten, gelijk aan $\omega(A_0)$ dus ook $\omega(A_0) \geq 1$.

Eveneens is de verzameling G_2 van punten, waar f een schommeling heeft $\omega \geq \frac{1}{2}$ een gesloten verzameling.

In het algemeen is G_n een gesloten verzameling, waar

$$\omega \geq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

G_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) is nergens dicht op PQ , want was G_n dicht in een interval hoorende tot PQ , dan zou, daar G_n gesloten is, ieder punt van het interval tot G_n hooren, wat onmogelijk is, daar de continuïteitspunten (dus $\omega = 0$) overal dicht op PQ liggen.

De verzameling van discontinuïteitspunten van f is de vereeniging van $G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \dots G_n \dot{+} \dots$ waarin G_n voor $n = 1, 2, 3$, enz. een gesloten niet dichte verzameling voorstelt op PQ ; dus *de verzameling van discontinuïteitspunten van een eindige punctueel discontinue functie gedefinieerd op een segment PQ is een verzameling van de eerste categorie met betrekking tot PQ , bestaande uit gesloten verzamelingen.*

Deze stelling kan ook afgeleid worden met behulp van het begrip residuel.

1) Zie b.v. Baire: Leçons sur les fonctions discontinues, blz. 73.

Een residuel is de doorsnede van open puntverzamelingen, waarvan ieder overal dicht ligt in een interval M .

Een residuel is dus een inwendige grensverzameling. Het omgekeerde is niet altijd waar; wel kunnen we bewijzen de volgende stelling:

Een inwendige grensverzameling, die hoort tot een interval M en overal dicht is in dat interval M , is een residuel.

Zij E de inwendige grensverzameling.

$E = D(E_1 \cdot E_2 \dots E_n \dots)$ waarin E_n voor $n = 1, 2, 3 \dots$ een open puntverzameling voorstelt.

E_n is voor iedere n overal dicht op M ; immers was dit niet het geval, dan was er een interval aan te wijzen, hoorende tot M , waarin geen punt van E_n voorkomt, dus geen punt van E .

E was dan niet overal dicht in M , hetgeen onmogelijk is. Dus E is een residuel.

(De in hoofdstuk I behandelde Borelsche verzamelingen zijn allen blijkbaar residuels).

De continuïteitspunten van een eindige punctueel discontinue functie vormen dus een residuel; immers ze vormen een overal dicht liggende inwendige grensverzameling.

Het complement van een residuel ten opzichte van een segment PQ is een verzameling van de eerste categorie met betrekking tot PQ , bestaande uit gesloten verzamelingen.

Dus de discontinuïteitspunten van een eindige punctueel discontinue functie vormen een verzameling van de eerste categorie bestaande uit gesloten verzamelingen.

Het voorgaande gaat onveranderd door, indien het segment PQ vervangen wordt door een perfecte verzameling.

Baire heeft in „Leçons sur les Fonctions discontinues”, blz. 124 een noodzakelijke en voldoende voorwaarde afgeleid,

dat een functie limiet is van continue functies. Die voorwaarde is, dat de functie punctueel discontinu is op iedere perfecte verzameling.

Deze stelling kan in verband met het voorgaande ook als volgt geformuleerd worden: *De continuïteitspunten van een eindige functie, die limiet is van continue functies vormen een residuel met betrekking tot iedere perfecte verzameling*, terwijl de discontinuïteitspunten een verzameling van de eerste categorie vormen met betrekking tot iedere perfecte verzameling ¹⁾.

We hebben dus gezien, dat de continuïteitspunten van een reële functie een inwendige grensverzameling vormen. Echter niet alleen de continuïteitspunten van een reële functie vormen een inwendige grensverzameling, het kan ook zijn, dat de halfcontinuïteitspunten b.v. naar boven van een functie een inwendige grensverzameling vormen, b.v. de functie, die 1 is in de irrationale punten van het segment $0 - 1$ en 0 is in de rationale punten is half continu naar boven in de irrationale punten, die zooals bekend is (zie blz. 17) een inwendige grensverzameling vormen.

Niet altijd vormen de half-continuïteitspunten naar boven een inwendige grensverzameling, b.v. de functie die 0 is in de irrationale punten van het segment $0 - 1$ en 1 is in de rationale punten, is half continu naar boven in de rationale punten, die echter geen inwendige grensverzameling vormen.

Hoewel de continuïteitspunten van een reële functie een inwendige grensverzameling vormen, behoeft niet iedere verzameling, die een deel der continuïteitspunten bevat, een inwendige grensverzameling te zijn. Wel geldt de volgende stelling.

1) Denjoy: Journal de Math. pures et appliquées 1915, blz. 125.

Een naar boven half continue functie, gedefinieerd op een segment, is continu in de punten, waar de functie gelijk is aan de onderste grens van de functie op het segment, en deze punten vormen wel een inwendige grensverzameling.

Zij f een reële functie half continu naar boven op het segment A . Zij g de onderste grens van f op A .

De bewering is, dat de punten waar $f = g$ continuïteitspunten van de functie zijn.

Bewijs: Zij x_0 een punt van A , waar $f(x_0) = g\{f, A\}$.

In iedere omgeving Ω van x_0 is dan de onderste grens van $f(x, \Omega) = g\{f, A\}$, dus ook de bovenste grens van de onderste grenzen in omgevingen, die x_0 bevatten is $g\{f, A\}$. Dus de functie is in x_0 half continu naar beneden en krachtens het gegeven half continu naar boven, dus de punten, waar $f = g$ zijn continuïteitspunten van de functie.

Deze punten nu vormen een inwendige grensverzameling, hetgeen als volgt aangetoond kan worden:

Noemen we $C(1)$ de verzameling van punten, waar $f < g+1$

Zij P een punt hoorende tot $C(1)$, dus $f(P) < g+1$.

Daar de functie half continu naar boven in P is, is er een omgeving Ω , P bevattend, te vinden, zoodanig dat de bovenste grens van de functie in $\Omega \cong f(P)$ en $< g+1$, dus de waarde van de functie voor ieder punt x , hoorende tot Ω , is $< g+1$.

$C(1)$ is bijgevolg een open puntverzameling.

Eveneens is $C\left(\frac{1}{n}\right)$ als verzameling van punten, waar $f < g + \frac{1}{n}$ open, $n = 1, 2, 3, \dots$. Noemen we C de verzameling van punten, waar $f = g$, dan is

$$C = C(1) \cdot C\left(\frac{1}{2}\right) \cdot C\left(\frac{1}{3}\right) \dots$$

Immers zij Q een punt hoorende tot C , dan hoort Q tot $C\left(\frac{1}{n}\right)$ onverschillig welke n .

Zij R een punt hoorende tot $C\left(\frac{1}{n}\right)$ $n = 1, 2, 3 \dots$ dan is $f(R) < g + \frac{1}{n}$ onverschillig welke n .

$f(R) \leq g$ dus $f(R) = g$ m. a. w. $R \in C$.

C is bijgevolg een inwendige grensverzameling en we hebben dus nu bewezen de stelling: Bij een naar boven half continue functie, gedefinieerd op een segment, vormen de punten, waar de functie gelijk is aan de onderste grens van de waarden der functie op het segment, een inwendige grensverzameling.

Evenzoo kan aangetoond worden: Bij een naar onderen half continue functie, gedefinieerd op een segment, vormen de punten, waar de functie gelijk is aan de bovenste grens van de waarden der functie op het segment, een inwendige grensverzameling.

De verzameling van punten, waarin de rechterbovenafgeleide van een eindige en continue functie, gedefinieerd op een segment, gelijk is aan $+\infty$ is een inwendige grensverzameling ¹⁾.

Bewijs: 1. Zij $R(x)$ de rechterbovenafgeleide van $f(x)$ in het punt x : $a \leq x \leq b$.

Zij $\psi(x, \alpha)$ de bovenste grens van $\frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k}$ voor $k = 1, 2, 3 \dots$ terwijl h_k voorstelt één van de termen van een aftelbare rij positieve getallen $h_1, h_2, h_3, \dots$, die overal dicht liggen in het interval $0 < h < \alpha$.

De verzameling van de punten, waar $R(x) = +\infty$ is

1) Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, blz. 527—529.

identiek met de verzameling van de punten, waar

$$\psi(x, 1) = +\infty.$$

We zullen eerst aantoonen, dat in een punt x , waar $R(x) = +\infty$, ook $\psi(x, 1) = +\infty$.

$R(x)$ is de onderste grens van de bovenste grenzen van $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ voor $0 < h < a$.

Er is dus in het interval $0 < h < 1$ een h' te bepalen, zoodanig dat $\frac{f(x+h') - f(x)}{h'} > M$, waarbij $M < +\infty$.

Daar $f(x)$ continu is, is ook $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ een continue functie van h .

Het is dus mogelijk een omgeving om h' te bepalen, zoodanig dat voor ieder punt van deze omgeving

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > M.$$

$h_1, h_2, h_3, \dots, h_k, \dots$ bezit zeker punten binnen deze omgeving, dus er is een h_k aan te wijzen, zoodanig dat

$$\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} > M.$$

Bijgevolg is ook de bovenste grens van

$$\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} > M.$$

Daar voor M ieder willekeurig getal gekozen kan worden, is dus $\psi(x, 1)$ zijnde de bovenste grens van $\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}$ voor $0 < h_k < 1$, gelijk aan $+\infty$.

Omgekeerd als $\psi(x, 1) = +\infty$ dan is ook $R(x) = +\infty$.

In een punt x , waarin $\psi(x, 1) = +\infty$ moet voor

$$0 < \beta < 1 \text{ ook } \psi(x, \beta) = +\infty.$$

Immers van een eindige en continue functie, gedefinieerd op een begrensde afgesloten puntverzameling, is de bovenste grens op die verzameling een eindig getal ¹⁾.

Zij G de bovenste grens van $|f|$ op ab dan is voor $\beta \leq h < 1$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{2G}{\beta}, \text{ dus een eindig getal.}$$

Daar $\psi(x, 1) = +\infty$ is er dus een h_k te vinden, zoodanig dat voor $0 < h_k < \beta$: $\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} > M > \frac{2G}{\beta}$.

Daar voor M ieder willekeurig getal gekozen kan worden, is $\psi(x, \beta) = +\infty$.

Daar $\psi(x, \beta) = +\infty$ voor $0 < \beta < 1$ is dus steeds de bovenste grens van $\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}$ voor $0 < h_k < \beta$ gelijk aan $+\infty$, dus à fortiori is de bovenste grens van

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ voor } 0 < h < \beta \text{ gelijk } +\infty.$$

Bijgevolg ook de onderste grens van de bovenste grenzen van $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, m. a. w. $R(x) = +\infty$.

2 — We zullen nu aantoonen, dat $\psi(x, 1)$ half continu is naar onderen.

$\psi(x_0, 1)$ kan niet $-\infty$ zijn, want $f(x)$ is eindig.

Is $\psi(x_0, 1) > -\infty$, dan kan er een getal λ gekozen worden, zoodanig dat $\psi(x_0, 1) > \lambda$.

We kunnen dus een h_k bepalen, zoodanig dat

$$\frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} > \lambda$$

en tengevolge van de continuïteit van $f(x)$ een omgeving

Ω om x_0 , zoodanig dat $\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} > \lambda$ voor $x \in \Omega$.

1) Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, blz. 139.

Daar $\psi(x, 1)$ voor ieder punt x de bovenste grens is van $\frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k}$ ($0 < h_k < 1$) is $\psi(x, 1) > \lambda$ voor $x \notin \Omega$.

De onderste grens van $\psi(x, 1)$ voor $x \notin \Omega$ is dus $\equiv \lambda$ voor iedere $\lambda < \psi(x_0, 1)$.

De bovenste grens van de onderste grenzen van $\psi(x, 1)$ voor x , hoorende tot omgevingen, waartoe x_0 hoort, is dus $\equiv \psi(x_0, 1)$.

Daar de onderste grens van $\psi(x, 1)$ voor omgevingen, die x_0 bevatten, nooit grooter kan zijn dan $\psi(x_0, 1)$ is de bovenste grens van de onderste grenzen van $\psi(x, 1)$ voor omgevingen, die x_0 bevatten, gelijk aan $\psi(x_0, 1)$. m. a. w. $\psi(x, 1)$ is in het punt x_0 half continu naar onderen.

3 — De verzameling A_k van punten x , waarvoor $\psi(x, 1) > k$ is open.

Zij x_0 een punt, zoodanig dat $\psi(x_0, 1) > k$.

Daar $\psi(x, 1)$ half continu is naar onderen, is $\psi(x_0, 1)$ de bovenste grens van de onderste grenzen van $\psi(x, 1)$ in omgevingen, die x_0 bevatten. Er is dus een omgeving Ω om x_0 , waarin de onderste grens van $\psi(x, 1) > k$.

Voor een punt $x' \notin \Omega$ is $\psi(x', 1) > k$, of x_0 is een inwendig punt van A_k . m. a. w. A_k is een open puntverzameling.

4. De verzameling A van de punten, waar $R(x) = +\infty$ is identiek met de verzameling van de punten, waar

$$\psi(x, 1) = +\infty \text{ (zie no. 1).}$$

De verzameling A_k van punten, waar

$$\psi(x, 1) > k \text{ is open (zie no 3.).}$$

Dus $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots$ of A is een inwendige grensverzameling.

Op dezelfde manier kan aangetoond worden: De verzameling van punten, waarvan de linkerbovenafgeleide van een

eindige en continue functie gedefinieerd op een segment ab gelijk is aan $+\infty$ is een inwendige grensverzameling.

Analoge stellingen gelden voor de rechterbeneden- en linkerbenedenafgeleide.

We kunnen alles aldus samenvatten:

De verzamelingen, waarin één van de bovenafgeleiden van een eindige en continue functie, gedefinieerd op een segment, gelijk is aan $+\infty$, of één van de benedenafgeleiden gelijk is aan $-\infty$, zijn inwendige grensverzamelingen.

HOOFDSTUK V

TOEPASSING VAN RESIDUELS OP DE COMPLEXE FUNCTIE-THEORIE

*Lusin en Priwaloff*¹⁾ hebben een functie gemaakt, holomorf voor $|z| < 1$ en die op een verzameling E van stralen met φ -maat 2π de radiale limiet 0 vertoont voor $|z| \rightarrow 1$.

Het complement van E ten opzichte van de cirkelomtrek is een residuel.

De constructie is de volgende:

1 — We gaan uit van een kromme Z , geconstrueerd als volgt:

Verdeel den cirkelomtrek $|z| = 1$ in 60 gelijke deelen en trek door ieder verdeelingspunt een stuk van de straal met lengte $\frac{1}{2}$.

We verdeelen ieder van die 60 deelen weer in 60 gelijke deelen en trekken door de nieuwe verdeelingspunten stukken van stralen met lengten $\frac{1}{3}$. Enz.

Z is nu de kromme, gevormd door $|z| = 1$ en door alle boven beschreven segmenten op de stralen, die we naalden zullen noemen.

Z is een Jordansche kromme, want Z is te beschouwen als het één-éénduidig en continue beeld van een cirkelomtrek W .

Deze $\{1; 1\}$ correspondentie kan op de volgende manier worden tot stand gebracht.

1) Annales Scient. de l'Ecole normale supérieure, t. 42, 1925, blz. 183.

Met de naalden ter lengte van $\frac{1}{2}$ laten we correspondeeren 60 intervallen op de cirkelomtrek buiten elkaar gelegen.

Met de naalden ter lengte van $\frac{1}{3}$ laten we correspondeeren hetzelfde aantal intervallen allen geheel buiten elkaar en buiten de eerst gekozen intervallen op de cirkelomtrek W gelegen enz.

Met de punten $|z| = 1$ correspondeert dan een perfecte nergens dichte verzameling op de cirkelomtrek W.

De kromme Z, zijnde een Jordansche kromme verdeelt het platte vlak in twee gebieden ¹⁾. Het gebied G, door de kromme Z ingesloten, is een enkelvoudig samenhangend gebied, want iedere gesloten kromme gelegen in G sluit slechts punten van G in.

Volgens een fundamenteele stelling uit de leer der conforme afbeeldingen kan een enkelvoudig samenhangend gebied G op het gebied binnen een cirkel één-éénduidig en conform afgebeeld worden.

Zij $u = q(z)$ de functie, die deze conforme afbeelding geeft van het gebied G door de kromme Z ingesloten op de punten binnen de cirkel $|u| < 1$.

Daar Z een Jordansche kromme is, is de afbeelding ook aan de rand eenduidig en continu, volgens een stelling eenvoudig bewezen o. a. door Lindelöf ²⁾.

De kromme Z is dus in continue $\{1; 1\}$ correspondentie te brengen met de cirkelomtrek $|u| = 1$. Met de naalden ter lengte van $\frac{1}{2}$ correspondeeren dus weer intervallen geheel buiten elkaar gelegen; met de naalden ter lengte van $\frac{1}{3}$ correspondeeren dus weer intervallen geheel buiten elkaar en

1) Zie b.v. een nieuw bewijs bij Denjoy: Kon. Acad. v. Wetenschappen Amsterdam, Deel 27, blz. 146—151.

2) Comptes Rendus 1914, blz. 245.

buiten de vorige intervallen gelegen, enz. Met de cirkelomtrek $|z| = 1$ een perfecte verzameling van de maat 0 op $|u| = 1$, die we A noemen.

2—Op de cirkelomtrek $|u| = 1$ construeeren we een functie $\varphi(u)$ volgens een methode van Fatou²⁾. Zij a_nb_n een interval contigu aan de perfecte nergens dichte verzameling A op de cirkelomtrek $|u| = 1$ terwijl $\lim_{n=\infty} a_nb_n = 0$.

In dat interval construeeren we een continue positieve functie $\varphi_n(u)$, die $+\infty$ wordt in de uiteinden van a_nb_n en Lebesgue-integreerbaar is tusschen a_n en b_n en in ieder interval a_nb_n een minimum bereikt.

Zij $\varphi(u) = \varphi_n(u)$ in a_nb_n en $\varphi(u) = +\infty$ voor alle punten van A.

Opdat $\varphi(u)$ Lebesgue-integreerbaar is op de cirkelomtrek, is noodzakelijk, dat

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(u) du + \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(u) du + \dots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(u) du + \dots$$

een convergente reeks vormt.

Zij m_n het minimum van $\varphi_n(u)$ in a_nb_n en $\lim_{n=\infty} m_n = +\infty$.

We kunnen nu aantoonen, dat de functie $\varphi(u)$ continu is op de cirkelomtrek $|u| = 1$:

1e. In de intervallen contigu aan A.

2e. In de punten van A.

Een functie is continu in een punt, als zijn schommeling $\omega = 0$ is.

Deze definitie geldt ook voor punten, waarin de functie $+\infty$ wordt, mits we $+\infty - (+\infty) = 0$ en $+\infty - a = +\infty$ stellen (a een eindig getal zijnde).

2) Acta Mathematica, XXX, blz. 342—345.

Het 1e is vanzelf sprekend.

Het 2e kan als volgt bewezen worden.

Zij u' een punt van A , $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ een rij van punten, zoodanig dat $\lim_{n=\infty} u_n = u'$.

We kunnen nu 2 gevallen onderscheiden.

1e geval: Vanaf een zeker n ligt u_n in een contigu. Het rangnummer daarvan blijft eindig; u' is dan het eindpunt van een contigu, dus $\lim_{n=\infty} \varphi(u_n) = +\infty$; of het rangnummer daarvan nadert tot ∞ en daar het minimum van $\varphi_n(u)$ nadert tot $+\infty$, als n nadert tot $+\infty$, is dus ook in dit geval $\lim_{n=\infty} \varphi(u_n) = +\infty$.

2e geval: Voor ∞ veel waarden van n ligt u_n in A . Voor die nummers is $\lim_{n=\infty} \varphi(u_n) = +\infty$.

Voor de andere nummers ook wegens 1e geval, dus $\lim_{n=\infty} \varphi(u_n) = +\infty$.

Bijgevolg $\varphi(u)$ is continu ook in de punten van A .

3 — We beschouwen nu de integraal van Poisson

$$F(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta-u) + r^2} \varphi(u) du,$$

waarin r en ϑ de poolcoördinaten zijn van punten gelegen binnen $|u| = 1$, $\varphi(u)$ de in (2) geconstrueerde functie.

Er kan aangetoond worden, dat $F(r, \vartheta)$ een positieve harmonische functie voorstelt binnen de cirkel en dat $F(r, \vartheta)$ nadert tot $+\infty$, als een punt binnen de cirkel nadert tot een punt van A op de cirkelomtrek ¹⁾.

Beschouwen we de met $F(r, \vartheta)$ geconjugeerde functie $\Phi(r, \vartheta)$ die voorgesteld kan worden door

1) Zie Fatou: Acta Mathematica, Deel XXX, blz. 339—341.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(\vartheta - u)}{1 - 2r \cos(\vartheta - u) + r^2} \varphi(u) du.$$

Krachtens de bepaling van geconjugéerd zijn, is ook deze functie harmonisch.

De functie $f(u) = F(r, \vartheta) + i\Phi(r, \vartheta)$ is regulier binnen de cirkel $|u| = 1$, want krachtens het geconjugéerd zijn van F en Φ is $\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$ en $\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, wat ook de noodzakelijke en voldoende voorwaarde is, dat $f(u)$ regulier is binnen de cirkel $|u| = 1$. $f(u)$ wordt nooit 0 binnen de cirkelomtrek, omdat $F(r, \vartheta)$ positief blijft en $f(u)$ nadert tot $+\infty$ in de punten van A .

4 — We transformeeren de binnen de cirkelomtrek $|u| = 1$ geconstrueerde holomorfe functie door middel van de in (1) vastgestelde conforme afbeelding op het gebied binnen de kromme Z .

De getransformeerde functie $P(z) = f(q(z))$ is holomorf in het gebied ingesloten door de kromme Z , het reële gedeelte blijft positief en nadert tot $+\infty$, als $|z|$ nadert tot 1.

We beschrijven binnen de cirkelomtrek $|z| = 1$ concentrische cirkels met stralen $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ zoodanig dat $R_1 < R_2 < R_3 \dots$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1$ terwijl $R_1 > \frac{1}{2}$. De uiteinden van de naalden, die de kromme Z vormen, worden gerekend niet tot de cirkelomtrekken te hooren.

De cirkelomtrekken verdeelen iedere naald in een aftelbaar aantal deelen. Noemen we de deelen van de k^{de} naald

$$\delta_1^k, \delta_2^k, \dots, \delta_n^k, \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

5 — We construeeren nu een functie $\omega(z)$ holomorf voor $|z| < 1$ en zoodanig dat $\omega(z)$ de radiale limiet $+\infty$ ver-

toont voor een verzameling van de φ -maat 2π . ($z = re^{i\varphi}$).

Daartoe beschouwen we

$$K_n^k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_n^k} \frac{P(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

veronderstellende, dat δ_n^k 2 kanten heeft.

$K_n^k(z)$ is overal holomorf uitgezonderd op δ_n^k zelf.

Volgens een stelling van Runge ¹⁾ kan men een polynoom $P_n^k(z)$ zoodanig kiezen, dat voor ieder punt z hoorende tot $|z| < 1$ en buiten een gebied λ_n^k

$$|K_n^k(z) - P_n^k(z)| < \frac{1}{k \cdot n!}$$

Het gebied λ_n^k wordt verkregen als volgt:

δ_n^k heeft 2 uiteinden. Zij a_n datgene, dat het dichtst bij het middelpunt van $|z| = 1$ ligt. Zij C'_n een cirkel met straal ϱ'_n en middelpunt a_n , C''_n een cirkel met straal ϱ''_n en tot middelpunt het snijpunt van het verlengde van δ_n met de cirkelomtrek $|z| = 1$.

Zij λ_n^k de convexe contour gevormd: 1e door een gedeelte van C'_n ; 2e door de gemeenschappelijke raaklijnen aan C'_n en C''_n doorgetrokken tot aan hun snijpunt met de cirkelomtrek $|z| = 1$; 3e het gedeelte van de cirkelomtrek $|z| = 1$ gelegen geheel binnen C''_n . ϱ'_n en ϱ''_n kiezen we zóó dat $\lambda_n^k \subset \lambda_n^k \subset \lambda_{n+1}^k$, voor vaste k , onverschillig welke n . Verder wordt verondersteld dat $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho'_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho''_n$ convergente reeksen zijn.

Van de functie $P(z) - K_n^k(z)$, die holomorf is in G kan aangetoond worden, dat ze ook holomorf is op δ_n^k .

1) Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie, blz. 552.

Zij z_1 en z_2 twee veranderlijke punten, aan weerszijden van de coupure δ_n^k en zoo dicht als men wil bij een punt ξ van δ_n^k .

$$\begin{aligned} K_n^k(z_1) - K_n^k(z_2) &= \left|_{z_2}^{z_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_n^k} \frac{P(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) \right. \\ &= \left|_{z_2}^{z_1} \frac{1}{2\pi i} \int_a^\beta \frac{P_1(\zeta) - P_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right. \end{aligned}$$

als a en β voorstellen de uiteinden van δ_n^k en P_1 en P_2 de waarden van $P(\zeta)$ aan weerszijden van δ_n^k .

$$\int_a^\beta \frac{P_1(\zeta) - P_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \{P_1(\xi) - P_2(\xi)\} \int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\left|_{z_2}^{z_1} \int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta - \int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z_2} d\zeta \right.$$

$\int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta$ waarin Γ_1 een kromme voorstelt van a naar β aan de kant van z_2 .

$\int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z_2} d\zeta = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\zeta - z_2} d\zeta$ waarin Γ_2 een kromme voorstelt van a naar β aan de kant van z_1 .

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta - \int_a^\beta \frac{1}{\zeta - z_2} d\zeta &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\zeta - z_2} d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\zeta - z_2} d\zeta \quad (\Gamma_2 \text{ van } \beta \text{ naar } a). \end{aligned}$$

Daar z_1 en z_2 tot elkaar naderen, is de som van deze integralen zoo weinig als men wil, verschillend van $\int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$, waarin

$$I = I_1 \text{ (van } a \text{ naar } \beta) + I_2 \text{ (van } \beta \text{ naar } a). \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } K_n^k(z_1) - K_n^k(z_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \times 2\pi i [P_1(\xi) - P_2(\xi)] = P(z_1) - P(z_2). \end{aligned}$$

De functie $P(z) - K_n^k(z)$ neemt op δ_n^k aan weerszijden dezelfde waarden aan, is dus een holomorfe functie op δ_n^k .

We formeeren nu de functie $\omega(z) = P(z) - L(z)$, waarin

$$L(z) = \sum_{\substack{n=1 \\ k=1}}^{\infty} (K_n^k(z) - p_n^k(z)).$$

$L(z)$ convergeert gelijkmatig in een gebied G_1 buiten alle λ_n^k $k = 1, 2, 3, \dots$ en geheel in G gelegen. Want zij z een willekeurig punt in G_1 , dan is vanaf een van z onafhankelijk getal n iedere term

$$|K_n^k(z) - p_n^k(z)| < \frac{1}{k \cdot n!}$$

De getallen $\frac{1}{k \cdot n!}$ zijn positief en vormen een convergente reeks.

Dus $L(z)$ convergeert gelijkmatig in G_1 (Criterium voor gelijkmatige convergentie, Osgood, blz. 96).

Voor ieder gebied G' binnen G gelegen is een van z onafhankelijk getal n' aan te wijzen, zoodat G' ligt buiten alle λ_n^k , $k = 1, 2, 3, \dots$

Dus volgens een stelling van Weierstrass (Osgood, blz. 303) stelt $L(z)$ een in G holomorfe functie voor, bijgevolg $\omega(z)$ is een in G holomorfe functie.

$\omega(z)$ is ook holomorf op ieder deel δ_n^k .

Immers

$$\omega(z) = P(z) - K_n^k(z) + p_n^k(z) - \sum' \{K_n^{k'}(z) - p_n^{k'}(z)\}.$$

De laatste som, waarin $K_n^k(z) - p_n^k(z)$ niet voorkomt,

bestaat uit functies, die allen holomorf zijn op δ_n^k en die een gelijkmatige convergente reeks vormen; dus stelt Σ' een op δ_n^k holomorfe functie voor.

$P(z) - K_n^k(z)$ is holomorf op δ_n^k volgens het voorgaande.

$p_n^k(z)$ is eveneens holomorf op δ_n^k .

Dus $\omega(z)$ is holomorf voor ieder punt z , $|z| < 1$.

6 — We zullen nu aantoonen, dat op een verzameling van stralen met φ -maat 2π de radiale limiet van $\omega(z)$ voor $z \rightarrow 1$ gelijk is aan ∞ .

Er zijn punten P op de omtrek $|z| = 1$ aan te geven, zoodanig dat OP slechts een eindig aantal contouren λ_n^k snijdt. (O is het middelpunt van de cirkel $|z| = 1$). Dus als z is op OP , zijn de moduli van alle termen van $L(z)$

vanaf een zekere term $< \frac{1}{n!}$, dus de functie $L(z)$ is begrensd op OP ; bijgevolg $\omega(z)$ nadert tot $+\infty$, als z langs OP tot P nadert.

De bewering is nu, dat de φ -maat van stralen OP gelijk is aan 2π , hetgeen als volgt aangetoond kan worden.

Om ieder eindpunt Q van een naald, gelegen op de cirkelomtrek kan een interval I_1 op de cirkelomtrek beschreven worden, waarbinnen alleen punten liggen, waarvan de bijbehorende stralen minstens de bij de naald hoorende λ_1 snijden.

Eveneens een interval I_2 waarbinnen alleen punten liggen waarvan de bijbehorende stralen minstens λ_2 snijden.

In het algemeen: Er is een interval I_n om Q te beschrijven, waarbinnen alleen punten liggen, waarvan de bijbehorende stralen minstens λ_n snijden.

De vereeniging van alle I_n beschreven om alle eindpunten

van naalden, is een open verzameling, onverschillig wat n is.

Dus de verzameling van punten gelegen op de cirkelomtrek $|z| = 1$, waarvan de bijbehorende stralen allen oneindig veel contouren λ_n snijden is een inwendige grensverzameling, die dicht is op de cirkelomtrek, dus een residuel E' .

De maat is 0, daar de reeksen $\Sigma \varphi'_n$ en $\Sigma \varphi''_n$ convergeeren.

De punten van $|z| = 1$ niet hoorende tot het genoemde residuel, zijn punten, die verbonden met het middelpunt stralen geven, die slechts een eindig aantal contouren λ_n snijden. De φ -maat van de verzameling E van deze stralen is dus 2π .

De functie $\omega(z)$ is dus een holomorfe functie binnen de cirkel $|z| = 1$, naderend tot $+\infty$, als z nadert langs de stralen tot een punt van de genoemde verzameling E , terwijl $\omega(z)$ eindig blijft, als z nadert tot een punt van het residuel E' .

7 — De functie $e^{-\omega(z)}$ is dan een holomorfe functie binnen de cirkel $|z| = 1$, die nadert tot 0, als z nadert langs de stralen tot een punt van de bovengenoemde verzameling E met φ -maat 2π .

Hiermede is dus aangetoond het bestaan van een functie, die holomorf is binnen de cirkel $|z| = 1$ en op een verzameling E van stralen met φ -maat 2π de radiale limiet 0 vertoont.

Het complement van E ten opzichte van de cirkelomtrek is een residuel.

Dat het complement van de verzameling E ten opzichte van de cirkelomtrek een residuel is, is een bijzonder geval van de volgende stelling:

Zij $f(z)$ een functie holomorfe voor $|z| < 1$.

Op een verzameling E van stralen met φ -maat 2π is

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\varphi}) = 0.$$

De bewering is, dat het complement van E ten opzichte van de cirkelomtrek een residuel is.

Bewijs: Zij E_n de interval-verzameling van de waarden van φ waarvoor $\left| f \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{i\varphi} \right\} \right| > M$, M een willekeurig positief getal zijnde.

$$\text{Zij } \sum_{n=m}^{\infty} E_n = H_m.$$

Men kan bewijzen, dat H_m overal dicht is voor iedere m , want was H_m niet overal dicht, dan zou $\left| f \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{i\varphi} \right\} \right|$ naar boven begrensd zijn op $r = 1 - \frac{1}{n}$, $n = m, m+1, \dots$

$\varphi' < \varphi < \varphi''$, φ' en φ'' vast.

Daar E de maat 2π heeft, mag worden aangenomen dat φ' en φ'' tot E behooren.

Dan is $\left| f \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{i\varphi} \right\} \right|$ begrensd op de beide stralen OA en OB met argumenten φ' en φ'' , dus op sector OAB . Dus $f(z)$ is holomorfe en begrensd op sector OAB en heeft op een positieve maat van boog AB de radiale lim. 0.

Uit de hieronder genoemde stelling van Fatou-Riess volgt, dat $f(z)$ dan identiek nul moet zijn voor $|z| < 1$. Daar dit niet het geval is, is H_m overal dicht.

$$\text{Zij } \lim_{m \rightarrow \infty} H_m = A_M \text{ of } A_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup E_n.$$

Iedere waarde van φ , hoorende tot E_n hoort tot een interval met dezelfde eigenschap, tengevolge van het holomorfe

zijn der functie. E_n is open. H_m is de vereeniging van aftelbaar veel open puntverzamelingen, dus zelf open.

$A_M = H_1 \cdot H_2 \dots H_m \dots$ is dus de doorsnede van aftelbaar veel open puntverzamelingen, dus A_M is een inwendige grensverzameling en daar $H_1, H_2, \dots$ overal dicht zijn, is A_M een residuel. Het complement van E is de doorsnede van $A_M, A_{1/2M}, A_{1/3M}, \dots, A_{1/nM}, \dots$ dus de doorsnede van aftelbaar veel residuels, bijgevolg het complement van de verzameling E van φ 's, waarvoor $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\varphi}) = 0$ is een residuel.

De hierboven genoemde stelling van Fatou-Riess is door Wolff ¹⁾ zeer eenvoudig bewezen.

Fatou's stelling: „als $f(z)$ holomorfe en begrensd is voor $|z| < 1$ dan bestaat $\lim_{\varphi \rightarrow 1} f(\varrho e^{i\varphi})$ behalve misschien voor waarden van φ , welker verzameling de maat nul heeft” is door de Gebr. Riess als volgt gecompleteerd (Congres Stokholm 1916): „is a een willekeurig getal, dan is deze limiet slechts voor een φ -verzameling van de maat nul gelijk aan a ”.

Dit resultaat wordt door Wolff afgeleid zonder van Lebesgue integralen gebruik te maken.

Zonder de algemeenheid te schaden, nemen we aan dat $f(0) \neq a$.

Zij overal $|f| < M$, dan is voor $0 < \varrho < 1$

$$2\pi \lg |f(0) - a| \leq \int_0^{2\pi} \lg |f(\varrho e^{i\varphi}) - a| d\varphi \quad (1)$$

Zij $1 > \varepsilon > 0$ en E_n , de intervalverzameling der waarden van φ waarvoor

$$\left| f \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{i\varphi} \right\} - a \right| < \varepsilon.$$

¹⁾ Verslagen Kon. Acad. van Wetenschappen Amsterdam, Deel 36, no. 10.

Is μE_n de maat van E_n , dan volgt uit (1) en uit $|f - a| < 2M$, dat

$$2\pi \lg |f(0) - a| \leq \mu E_n \cdot \lg \varepsilon + 2\pi \lg (2M)$$

dus

$$\mu E_n \leq \frac{C}{\lg \frac{1}{\varepsilon}}, n = 1, 2, \dots; C \text{ constant.}$$

De waarden van φ waarvoor $\lim_{\varrho \rightarrow 1} f(\varrho e^{i\varphi}) = a$, behooren tot de limes inferior van E_n voor $n \rightarrow \infty$.

Dus de maat van de verzameling dier waarden is hoogstens $\frac{C}{\lg \frac{1}{\varepsilon}}$ en daar ε willekeurig tusschen 0 en 1 kan worden

gekozen, is deze maat nul.

Gevolg: *Als $f(z)$ holomorfe en begrensd is in een cirkelsector AOB en op een positieve maat van boog AB de radiale limiet nul heeft, dan is $f(z)$ identiek nul.*

Bewijs: Zij AOB een cirkelsector gelegen in het z -vlak ($z = \varrho e^{i\varphi}$) begrensd door OA ($\varphi = 0$) en OB ($\varphi = \alpha$) en de boog AB van de cirkel $|z| = 1$ ($0 \leq \varphi \leq \alpha$).

We trachten nu AOB conform af te beelden op een cirkel $|t| = 1$ van een t -vlak.

De transformatie $u = \frac{1 + z \frac{\pi}{\alpha}}{1 - z \frac{\pi}{\alpha}}$ beeldt de cirkelsector conform af op het gedeelte van het u -vlak ($u = re^{i\psi}$) ingesloten

door $\psi = 0$ en $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Immers met punt O van het z -vlak correspondeert het punt O' met tot coördinaten $r = 1, \psi = 0$.

Loopt z van O naar A , dan loopt u van O' naar $+\infty$.

Loopt z van O naar B , dan loopt u van O' naar de oorsprong van het u -vlak.

Met de cirkelboog BA correspondeert de $as \psi = \frac{\pi}{2}$ van het u -vlak.

Immers $z^{\frac{\pi}{a}} = \frac{-1+u}{1+u}$. Als u zuiver imaginair is, kan

$u = i \operatorname{tg} p$ gesteld worden (p van $0 \rightarrow \frac{1}{2}\pi$).

$$z^{\frac{\pi}{a}} = \frac{-1+i \operatorname{tg} p}{1+i \operatorname{tg} p} = -\frac{\cos p - i \sin p}{\cos p + i \sin p} = -\frac{e^{-pi}}{e^{+pi}} = -e^{-2pi}.$$

Dus als p van $0 \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ gaat, dan loopt φ van a naar 0 langs boog BA .

De transformatie $v = u^2$ transformeert de hoek ingesloten door $\psi = 0$ en $\psi = \frac{\pi}{2}$ in het u vlak op het bovenste halfvlak van v .

De transformatie $v = \frac{t+i}{t-i} \frac{1-i}{1+i}$ transformeert de cirkel $|t| = 1$ van het t -vlak op het bovenste halfvlak van v .

Dus $t = \frac{iv+1}{v+i}$ het bovenste halfvlak van v op de cirkel $|t| = 1$ van het t -vlak.

$$\text{Bijgevolg } t = \frac{i \left(\frac{1+z^{\frac{\pi}{a}}}{1-z^{\frac{\pi}{a}}} \right)^2 + 1}{\left(\frac{1+z^{\frac{\pi}{a}}}{1-z^{\frac{\pi}{a}}} \right)^2 + i} \text{ transformeert de cirkel-}$$

sector OAB van het z -vlak op de cirkel $|t| = 1$ van het t -vlak.

$f(z)$ gaat daarbij over in $\varphi(t)$, holomorf en begrensd voor $|t| < 1$.

Op een positieve maat van boog AB heeft $f(z)$ de radiale limiet nul.

Met de verzameling van punten met positieve maat op boog AB correspondeert een verzameling van punten met positieve maat op $|t| = 1$.

Dus de holomorfe en begrensde functie $\varphi(t)$ heeft op een verzameling van punten met positieve maat de radiale limiet nul.

Uit de stelling van Fatou-Riess volgt, dat de verzameling van punten, waarvoor de radiale limiet nul is, hoogstens de maat nul heeft.

Dus moet $\varphi(t) \equiv 0$ zijn, en bijgevolg ook $f(z) \equiv 0$.

STELLINGEN

I

De definitie van een „leege verzameling” wordt dikwijls foutief gegeven.

II

Naast de definitie van een leege verzameling dient men ook „verzameling uit 1 punt bestaande” te definiëren.

III

De afleiding door Osgood van de coëfficiënten van een reeks, waarin een harmonische functie binnen een ring kan ontwikkeld worden, is foutief.

Zie Osgood: „Lehrbuch der Funktionentheorie”, pag. 661.

IV

De op blz. 393 van Carathéodory „Vorlesungen über Reelle Funktionen”, afgeleide stelling moet luiden:

Is een functie $f(P)$ op een meetbare puntverzameling E meetbaar en daar aequivalent met een functie $Q(P)$, dan is $Q(P)$ eveneens meetbaar op E , mits $Q(P)$ op E gedefinieerd is.

V

Het bewijs van de stelling van Dini voorkomende in Gour-sat: „Cours d'Analyse” deel III, blz. 453, kan vereenvoudigd worden.

VI

De door Mohrmann (Math. Ann., 79, 1919) gegeven classificatie der lijnenquadrupels berust op een onjuiste grondslag.

VII

Naast de uitspraak van Klein kan geplaatst worden:

De driehoeksmetkunde is de studie van de invarianten van 4 punten uit het complexe vlak, waarbij één der punten een bijzondere plaats inneemt ten opzichte van de 3 anderen.

Zie Klein: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus” deel II, blz. 322.

VIII

De eisch, die door Hjelmlev aan zijn: „Axioma's” gesteld wordt, is onhoudbaar.

Zie J. Hjelmlev: „Die natürliche Geometrie”.

IX

Het onderwijs in de Mechanica dient niet in het leer-
vak Natuurkunde te worden opgenomen.

X

De opvatting, die Duhem heeft van physische theoriën is niet juist.

Zie Pierre Duhem: „La Théorie physique, son objet et sa structure”, 2e Edition, pag. 23 en 24.



A.