



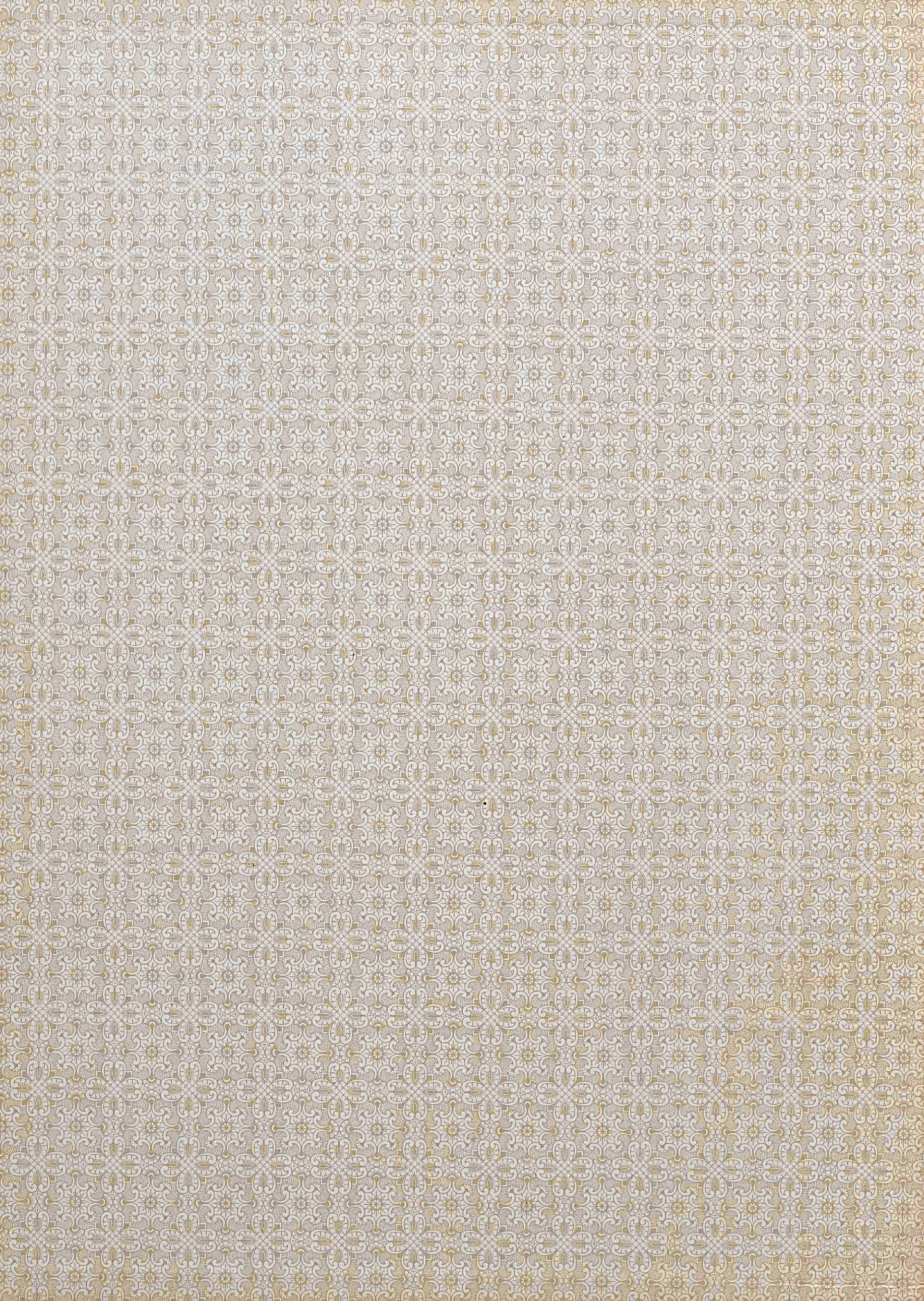
Over een algemeen gemiddelde en de integralen die samenhangen met de foutenwet van het meetkundig gemiddelde

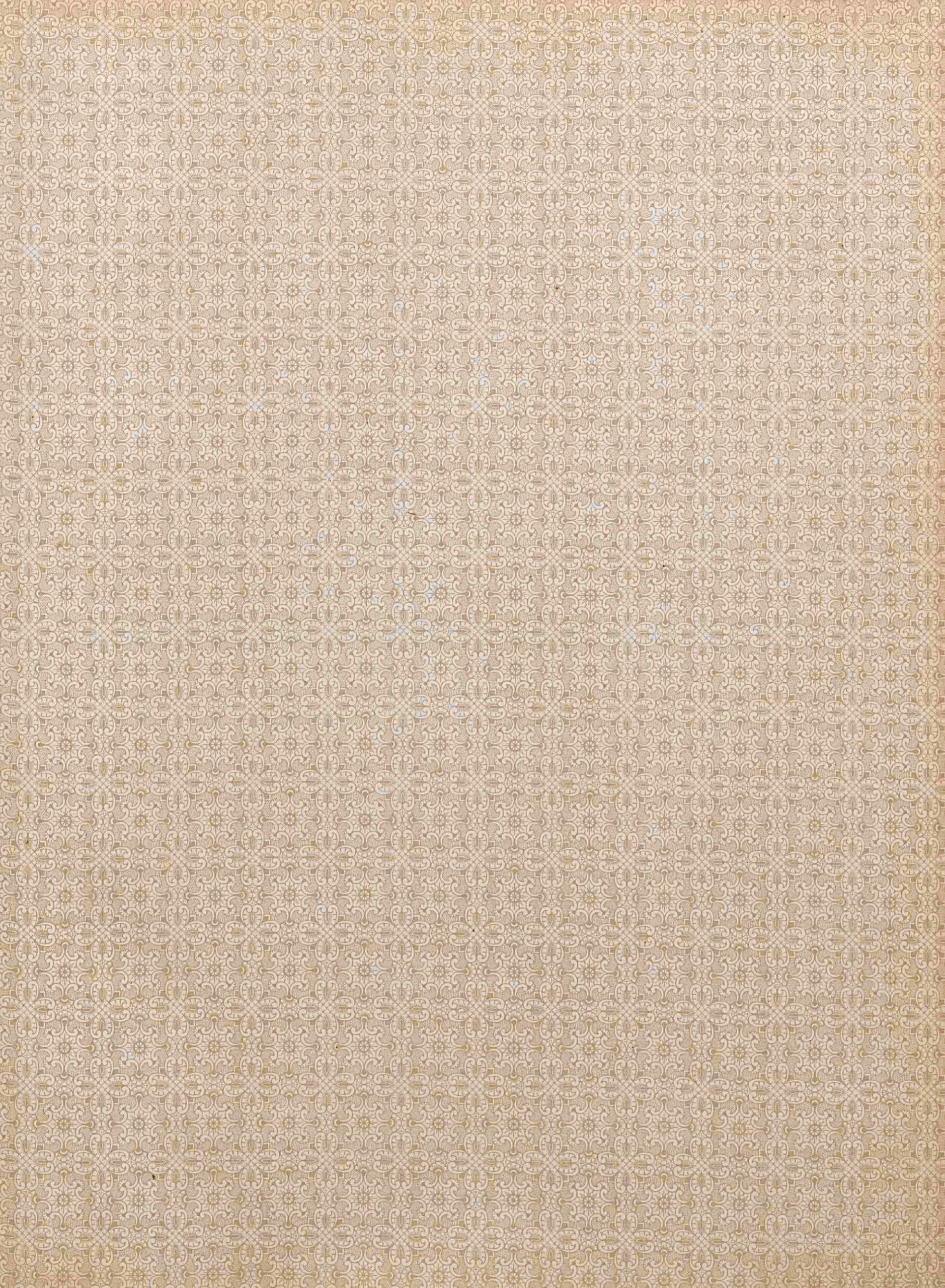
<https://hdl.handle.net/1874/294714>

A^o 192 114
1901.

OVER EEN ALGEMEEN GEMIDDELDE
EN DE
INTEGRALEN DIE SAMENHANGEN MET DE FOUTENWET
VAN HET
MEETKUNDIG GEMIDDELDE

P. I. HELWIG





OVER EEN ALGEMEEN GEMIDDELDE
EN DE
INTEGRALEN DIE SAMENHANGEN MET DE FOUTENWET
VAN HET
MEETKUNDIG GEMIDDELDE.

Over een Algemeen Gemiddelde en de Integralen die
samenhangen met de Foutenwet van het Meetkundig Gemiddelde

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. A. A. W. HUBRECHT

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN

op Woensdag 18 December 1901

des namiddags te 4 uren

DOOR

PAUL IWAN HELWIG

geboren te Enkhuizen

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

AMSTERDAM
DELSMAN & NOLTHENIUS
1901

Aan mijnen Vader

en

aan de Nagedachtenis mijner Moeder.

Bij het besluit mijner studie aan de Universiteit gevoel ik behoefte hier openlijk mijnen dank uit te spreken aan allen, die hebben bijgedragen tot het bereiken van dit doel.

Niet het minst gevoel ik mij aan U verplicht, Hooggeleerde W. KAPTEIJN, Hooggeschatte Promotor! Uw belangwekkend onderricht heeft mij veel liefde voor Uw wetenschap gegeven.

Hooggeleerde V. A. JULIUS, Hooggeleerde D. J. KORTEWEG en Zeergeleerde W. VAN LOGHEM, de herinnering aan Uwe persoonlijkheden en lessen vervult mij steeds met groote dankbaarheid.

AMSTERDAM, Dec. 1901.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING	1.

EERSTE AFDEELING.

Het gemiddelde in het algemeen	2.
--	----

TWEEDE AFDEELING.

OVER DE INTEGRAAL DER FOUTENWET VAN HET MEETKUNDIG GEMIDDELDE EN HARE VERWANTEN.

Eerste Hoofdstuk	24.
Tweede Hoofdstuk.	48.

INLEIDING.

De navolgende onderzoeken danken haar ontstaan aan eene aesthetische theorie door mij in 1897 gepubliceerd ¹⁾, waarin ik getracht heb duidelijk te maken dat men, aannemende dat in den menschelijken geest uit het ervaringsmateriaal onbewust gemiddelden worden gevormd en aannemende dat deze gemiddelden schoonheidsmaxima voorstellen, ook inderdaad verscheidene aesthetische verschijnselen kan verklaren. Ik werd toen natuurlijk ook geleid tot de vraag, welke mathematische gedaante dat gemiddelde zou kunnen aannemen en voerde argumenten aan, die de keuze op het meetkundig gemiddelde deden vallen. Vergelijking met erkende feiten en proeven bewees dat deze keuze voldeed. Toch kan ik thans, ook naar aanleiding van eene belangrijke opmerking van Prof. V. A. JULIUS, omtrent de wijze waarop ik destijds tot het meetkundig gemiddelde besloot, niet meer beweren dat die wijze mij bevredigt en heb dan ook uitgezien naar eene andere. Men vindt haar vermeld in § 9 van dit proefschrift.

De studie van het meetkundig gemiddelde voerde mij daarna tot een onderzoek naar de eigenschappen van gemiddelden in het algemeen, waarvan ik eenige hoofdzaken, vooral voor zoover zij samenhangen met de speciale foutenwet, die ieder gemiddelde met zich meesleept, in dit geschrift zal vooropstellen. Medegaande met den gedachtengang, die GAUSS tot de opstelling zijner arithmetische foutenwet voerde, kan men toch ook, eens in het bezit zijnde van eene uitdrukking voor een algemeen gemiddelde, zich de vraag stellen, welke gedaante de foutenwet heeft, als men uitgaat van de onderstelling dat het algemeen gemiddelde van een stel gemeten of experimenteel bepaalde waarden eener grootheid de meeste kans heeft de juiste waarde dier grootheid weer te geven. Zoo sleept het meetkundig gemiddelde ook zijn eigen foutenwet mede, die in de taal mijner aesthetische opvattingen overgebracht, de kans aanwijst, dat een gegeven lid eener naar haar schoonheid beoordeelde rij objecten van één veranderlijke, het schoonste vertegenwoordigt.

¹⁾ P. I. HELWIG. Eine Theorie des Schönen. Amsterdam. Delsman en Nolthenius. 1897.

INLEIDING.

Natuurlijk hangt de kans om eene aesthetische fout binnen gegeven grenzen te maken daarmede onmiddellijk samen en de mathematische uitdrukking ervan, een bepaalde integraal zijnde, bracht mij ongedwongen tot het onderzoek van de bepaalde integraal $\int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx$, die ik aan het hoofd van dit geschrift heb gesteld. De opvallende gedaante van de oneindige dubbelreeks waarvan zij het symbool is, beloofde reeds op het eerste gezicht een betrekkelijk ruimen oogst van bepaalde integralen op te leveren en voerde mij tot een stel reducties in dit proefschrift vermeld.

Ik hoop, dat het mij gelukken zal te doen zien dat deze integraal weder een dier mathematische middelpunten voorstelt, waaruit tal van verwanten hun oorsprong nemen. Dat eene psychologische onderzoeking de eerste aanleiding tot het vinden dier groote hoeveelheid bepaalde integralen geweest is, moge een bewijs zijn voor den inwendigen samenhang der wetenschappen en een welkom argument voor allen, die de nuttigheid der wiskunde voor de wijsbegeerte en der wijsbegeerte voor de wiskunde bepleiten.

EERSTE AFDEELING.

HET GEMIDDELDE IN HET ALGEMEEN.

§ 1. Zoodra het wenschelijk of noodzakelijk is om in plaats van een rij speciaalwaarden

$$f(x_1) \quad f(x_2) \quad f(x_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x_n)$$

van eene functie $\mathcal{F}(x)$ slechts één enkele waarde $\mathcal{F}(x_m)$ te beschouwen, omdat men of de n waarden der functie van $\mathcal{F}(x_1)$ tot en met $\mathcal{F}(x_n)$ niet tegelijk kan gebruiken of geen reden heeft om de eene speciaalwaarde $\mathcal{F}(x_p)$ wel en eene andere $\mathcal{F}(x_q)$ niet te kiezen, dan kan men zich van een nieuwe functiewaarde $\mathcal{F}(x_m)$ bedienen en deze op de volgende wijze definiëren:

$$n\bar{f}(x_m) = \bar{f}(x_1) + \bar{f}(x_2) + + \bar{f}(x_n) \quad (1)$$

In deze definitie ligt de gedachte opgesloten dat $\mathcal{F}(x_m)$ die waarde van $\mathcal{F}(x)$ is, die voor $\mathcal{F}(x_1)$, $\mathcal{F}(x_2)$ tot en met $\mathcal{F}(x_n)$ in de plaats gesteld zijnde, hun som niet wijzigt.

Noemt men x_m het gemiddelde van de soort $F(x)$ van de waarden $x_1, x_2, \dots, x_n$ der variabele x dan is dus volgens het axioma der algebra het gemiddelde x_m onafhankelijk van de volgorde, waarin $x_1, x_2, \dots, x_n$ tot den bouw van dat gemiddelde hebben meegewerkt.

Het gemiddelde van een rij functies van x , bijv. van $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)$ en weder van de soort $\mathcal{F}(x)$ kan echter op twee wijzen worden opgevat. Vooreerst bepaald door

$$n\bar{F}q_m(x) = \bar{F}q(x_1) + \bar{F}q(x_2) + \dots + \bar{F}q(x_n) \dots \dots \dots (2).$$

Maar ook kan men zeggen dat $\varphi(x)$ dan een gemiddelde waarde van de soort $\mathcal{F}(x)$ zal aannemen wanneer $x = x_n$ uit (1) daarin gesubstitueerd wordt.

Dit komt nu hierop neer dat men in $y = \varphi(x)$ in het eerste geval de y als onafhankelijk variabele beschouwt en haar een gemiddelde waarde laat aannemen en in het tweede geval met x zoo handelt. Men krijgt zoo twee waarden voor het gemiddelde van de soort $\mathcal{F}(x)$ van een functie $\varphi(x)$ van één variabele, die in het algemeen verschillend zijn.

In mijne Theorie des Schönen voert deze opmerking tot de oplossing van de vraag: hoe een rechte van gegeven lengte op het schoonst in twee deelen kan verdeeld worden. Men vindt twee oplossingen: 1°. De lijn wordt door midden gedeeld en 2°. de lijn wordt in twee ongelijke stukken gedeeld in een verhouding zeer nabij die der gulden snede gelegen.

Uit de gegeven definitie volgt nu ook direct, dat het rekenkundig, het meetkundig, het kwadratisch ¹⁾, het harmonisch gemiddelde van $x_1, x_2 \dots x_n$ respectievelijk zijn van de soort: $x; lx; x^2; \frac{1}{x}$.

§ 2. Wat de geschiedenis van het onderzoek naar de eigenschappen van gemiddelden betreft, is het bekend, dat vooral de begeerte om rationeele grondslagen te vinden voor de Gauss'sche foutenwet en de daartoe noodige pogingen om het plausibele van de hypothese van het rekenkundig gemiddelde op den voorgrond te doen treden, aanleiding waren tot verscheidene nasporingen vooral van LAGRANGE, LAPLACE, SCHIAPARELLI, DE MORGAN, FERRERO en anderen, welke allen in het voortreffelijk boek van CZUBER ²⁾ uitvoerig besproken en met zeer volledige litteratuur-opgaven zijn voorzien.

Men gaat gewoonlijk bij genoemde onderzoekingen zóo te werk, dat men het gemiddelde van eenige waargenomen grootheden $l_1, l_2 \dots l_n$ als een functie $f(l_1, l_2 \dots l_n)$ definieert en van f eischt dat zij in betrekking tot $l_1, l_2 \dots l_n$ symmetrisch zij, eenwaardig en continu tusschen de uiterste waarden der waargenomen $l_1, l_2 \dots l_n$ verloope en voor $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$ zich tot de waarde $f = l$ reduceere.

Afgezien van het feit dat het begrip van „gemiddelde eener bepaalde soort”, waarvan het voordeel ons spoedig zal blijken, hierin niet optreedt, heeft deze definitie m. i. nog het nadeel van te wijd te zijn, daar ook bijv. functies van den vorm $f(l_1 l_2, l_1 l_3, l_2 l_3 \dots)$ er aan kunnen voldoen, waarin onderlinge betrekkingen tusschen de waargenomen grootheden $l_1, l_2 \dots l_n$ als nieuwe variabelen optreden, wat met de absolute onafhankelijkheid van $l_1, l_2 \dots l_n$ strijdig is, of minstens genomen moeilijk kan verwacht worden.

Ik besloot ook daarom tot de definities in (1) en (2) met opname van het *soort*begrip.

Dat men met de definitie (1) die ik vooropstelde ook o.a. het zeer belangrijke resultaat, waartoe FERRERO kwam, gemakkelijker en strenger kan bereiken, moge de volgende uiteenzetting bewijzen.

¹⁾ Zie HERTZ. Principien der Mechanik. Leipzig. BARTH. 1894. § 28.

²⁾ CZUBER. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig. TEUBNER. 1891. Vergelijk ook Jahresbericht d. Deutsch. Math. Vereinig. Leipzig. 1899.

§ 3. FERRERO heeft getracht aan te toonen, dat hoe minder de resultaten der waarneming van een grootheid van elkaar afwijken, ook des te enger alle gemiddelden daaruit opgebouwd zich om het rekenkundig gemiddelde ervan scharen en dat dus de keuze van het rekenkundig gemiddelde des te meer gemotiveerd is naarmate de waarnemingen beter zijn. Om dit nu uit onze definitie (1) te bewijzen, stellen wij, aannemende dat de waarden van $x_1, x_2, \dots, x_n$ onderling en elk weinig van a verschillen, in

$$n\mathcal{F}(x_m) = \mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_2) + \dots + \mathcal{F}(x_n)$$

voor $x_1 = a + \delta_1, x_2 = a + \delta_2, \dots, x_n = a + \delta_n$. Dan is

$$n\mathcal{F}(x_m) = \mathcal{F}(a + \delta_1) + \mathcal{F}(a + \delta_2) + \dots + \mathcal{F}(a + \delta_n)$$

of, ontwikkeling volgens het theorema van TAYLOR mogelijk veronderstellend:

$$n\mathcal{F}(x_m) = n\mathcal{F}(a) + [\delta]\mathcal{F}'(a) + \frac{[\delta^2]}{2!}\mathcal{F}''(a) + \frac{[\delta^3]}{3!}\mathcal{F}'''(a) + \dots$$

waarin de gebruikelijke notatie $[\delta^p] = \delta_1^p + \delta_2^p + \dots + \delta_n^p$ is ingevoerd.

Voeren wij het symbool $\underline{\mathcal{F}}$ in volgens deze definitie $\underline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(a) = a$, dan is dus

$$x_m = \underline{\mathcal{F}} \left\{ \mathcal{F}(a) + \frac{[\delta]}{n}\mathcal{F}'(a) + \frac{[\delta^2]}{2n}\mathcal{F}''(a) + \frac{[\delta^3]}{3!n}\mathcal{F}'''(a) + \dots \right\}.$$

Onderstellen wij weer de ontwikkeling mogelijk, dan is dus:

$$x_m = \underline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(a) + \left(\frac{[\delta]}{n}\mathcal{F}'(a) + \frac{[\delta^2]}{2n}\mathcal{F}''(a) + \dots \right) \underline{\mathcal{F}}'\mathcal{F}(a) + \frac{1}{2} \left(\frac{[\delta]}{n}\mathcal{F}'(a) + \frac{[\delta^2]}{2n}\mathcal{F}''(a) + \dots \right)^2 \underline{\mathcal{F}}''\mathcal{F}(a) + \dots$$

of

$$x_m = a + \frac{[\delta]}{n}\mathcal{F}'(a)\underline{\mathcal{F}}'\mathcal{F}(a) + \frac{[\delta^2]}{2n}\mathcal{F}''(a)\underline{\mathcal{F}}'\mathcal{F}(a) + \frac{1}{2} \frac{[\delta]^2}{n^2} [\mathcal{F}'(a)]^2 \underline{\mathcal{F}}''\mathcal{F}(a) + \text{termen van 3^{en} en hooger graad in } \delta.$$

Nu is $\underline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(a) = a$, dus $\underline{\mathcal{F}}'\mathcal{F}(a) \cdot \mathcal{F}'(a) = 1$ en $\underline{\mathcal{F}}''\mathcal{F}(a) \cdot \mathcal{F}'(a)^2 + \underline{\mathcal{F}}'\mathcal{F}(a) \cdot \mathcal{F}''(a) = 0$. Dus dit invoerend en opmerkend, dat $na + [\delta] = [x]$ is, vinden wij, termen van 3^{en} en hooger graad in δ verwaarloozend:

$$x_m = \frac{[x]}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{[\delta^2]}{n} - \frac{[\delta]^2}{n^2} \right) \frac{\mathcal{F}''(a)}{\mathcal{F}'(a)} \dots \dots \dots (3)$$

Hieruit blijkt reeds, dat elk gemiddelde opgevat kan worden als opgebouwd uit het rekenkundig gemiddelde en uit grootheden onder meer ook afhankelijk van de soort $\mathcal{F}(x)$ van het gemiddelde.

Wijken nu de waarnemingen in 't geheel niet van elkaar af, dan is dus $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$ en derhalve $[\delta] = n\delta$ en $[\delta^2] = n\delta^2$ en $[\delta]^2 = n^2\delta^2$. Dit levert in (3) gesubstitueerd $x_m = \frac{[x]}{n}$.

Wijken de waarnemingen wel onderling af, dan zullen zij des te meer elkaar nabij

komen naarmate in $\frac{\delta_1}{\delta} = \varepsilon_1, \frac{\delta_2}{\delta} = \varepsilon_2 \dots \frac{\delta_n}{\delta} = \varepsilon_n$ de ε 's dichter tot de eenheid naderen. Dan is dus ook $[\delta] = \delta[\varepsilon]$, $[\delta^2] = \delta^2[\varepsilon^2]$ en $[\delta]^2 = \delta^2[\varepsilon]^2$ en dit in (3) gesubstitueerd geeft:

$$x_m = \frac{[x]}{n} + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{[\varepsilon^2]}{n} - \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} \right) \frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Naarmate echter de ε 's meer tot de eenheid naderen, wordt de factor $\frac{[\varepsilon^2]}{n} - \frac{[\varepsilon]^2}{n^2}$ nader tot nul gebracht, waarmee de stelling bewezen is.

FERRERO koos voor a het rekenkundig gemiddelde. Daardoor werd $[\delta] = 0$ en $[\delta^2] + [\delta_i \delta_j] = 0$ en wordt onze formule

$$x_m = \frac{[x]}{n} - \frac{[\delta_i \delta_j]}{2n} \frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{[x]}{n} + \frac{[\delta^2]}{2n} \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

en zoo vond FERRERO $x_m = \frac{[x]}{n} + \frac{[\delta^2]}{2} (Q - R)$, waarin $Q = \frac{\partial^2 f}{\partial l_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial l_2^2} = \dots = \frac{\partial^2 f}{\partial l_n^2}$ en $R = \frac{\partial^2 f}{\partial l_1 \partial l_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial l_1 \partial l_3} = \dots$ van de functie $f(l_1, l_2, \dots, l_n)$ die hij als gemiddelde beschouwt. Na aangetoond te hebben dat $(Q - R)n$ nooit een functie toenemende met n is, leidde hij daaruit zijn stelling af.

Daar hij echter $a = \frac{[x]}{n}$ stelt, noemt hij dus *dan* de waarnemingen nauwkeuriger en dus de δ 's kleiner naarmate die waarnemingen minder van hun rekenkundig midden afwijken en dit is ter motiveering van het rekenkundig gemiddelde eene petitio principii.

Onze formule (3) heeft nog een ander voordeel boven die van FERRERO, dat de soort van gemiddelde er expliciet in voorkomt en dus elke gegeven soort direct naar haar afwijking van het arithmetisch midden kan beoordeeld worden. Zoo is voor

$$f(a) = a^2 \text{ dus } \frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{1}{a} \quad ; \quad f(a) = a \text{ dus } \frac{f''(a)}{f'(a)} = 0 \quad ; \quad f(a) = la \text{ dus } \frac{f''(a)}{f'(a)} = -\frac{1}{a}$$

$$f(a) = \frac{1}{a} \text{ dus } \frac{f''(a)}{f'(a)} = -\frac{2}{a} \quad ; \quad f(a) = e^a \text{ dus } \frac{f''(a)}{f'(a)} = 1 \quad ; \quad f(a) = \sqrt{a} \text{ dus } \frac{f''(a)}{f'(a)} = -\frac{1}{2a}.$$

Dit ter rechtvaardiging van onze invoering van het soortbegrip bij gemiddelden.

§ 4. Zoolang men te doen heeft met een discontinue rij $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ zal het gemiddelde van de soort $f(x)$ bepaald moeten worden door $\varphi_m(r)$ uit (2) of door $\varphi(x_m)$ uit (1) te berekenen.

Dit wordt anders zoodra men reden of recht heeft om aan te nemen dat ook andere functiewaarden $\varphi(x_1 + \Delta x)$, $\varphi(x_1 + 2\Delta x)$, $\varphi(x_2 + \Delta x)$ enz. evenzeer geacht moeten worden tot de gegeven functierij te behooren.

Dit zal bijv. het geval zijn als men de gemiddelde waarde eener kinetische energie tusschen twee uitersten wil bepalen en alle tusschengelegen waarden in aanmerking komen.

Dit is ook o. a. het geval als men het schoonheidsmaximum volgens genoemde opvatting wil bepalen uit alle verhoudingen tusschen gegeven grenzen.

Zoodra dergelijke gevallen zich voordoen, zullen wij spreken van een *continu* gemiddelde, in tegenstelling met die uit (1) of (2), die wij voortaan *discontinue* gemiddelden noemen.

De vormverandering, die het gemiddelde dan ondergaat, vinden wij aldus:

Zij gegeven $\varphi(x)$ als continu veranderende functie, $\mathcal{F}(x)$ als soort en moge x van x_1 tot x_2 continu verlopen, dan zal, als Δx tot nul en als n tot gelijktijdige limiet ∞ nadert:

$$n\mathcal{F}\varphi_m(x) = \mathcal{F}\varphi(x_1) + \mathcal{F}\varphi(x_1 + \Delta x) + \mathcal{F}\varphi(x_1 + 2\Delta x) + \dots + \mathcal{F}\varphi(x_1 + [n-1]\Delta x).$$

$\mathcal{F}(x)$ moet dus ook zoodanig zijn dat $\mathcal{F}\varphi(x)$ voor geen dezer waarden discontinu of ∞ wordt; evenzoo $\varphi(x)$. Dan is dus

$$\mathcal{F}\varphi_m(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_1}^{x_1 + (n-1)\Delta x} \mathcal{F}\varphi(x).$$

Daar $x_1 + (n-1)\Delta x = x_2$ is $\frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{x_2 - x_1 + \Delta x}$, zoodat bij limietovergang wij vinden:

$$\mathcal{F}\varphi_m(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}\varphi(x) dx \quad (5)$$

Zoo is dus ook

$$\mathcal{F}(x_m) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x) dx,$$

zoodat als wij weer $\mathcal{F}\mathcal{F}(x) = x$ stellen,

$$\varphi(x_m) = \varphi \left[\mathcal{F} \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x) dx \right) \right] \quad \text{en} \quad \varphi_m(x) = \mathcal{F} \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}\varphi(x) dx \right).$$

Het continu gemiddelde zal over 't algemeen meer voeren tot theoretische waarden, omdat men zich daarin heeft losgemaakt van de toevalligheden, die tot het ontstaan der discontinue functierij aanleiding kunnen zijn. Toch is het continu gemiddelde slechts een specialisatie van het discontinue.

§ 5. Daar $\varphi_m(x)$ en $\varphi(x_m)$ in het algemeen verschillend zijn, zullen zij toch in bepaalde gevallen kunnen samenvallen. Dan is $\varphi_m(x) = \varphi(x_m)$ en wij willen onderzoeken wanneer dat het geval is. Beginnen wij met het geval dat x_1 en x_2 de twee eenige speciaalwaarden van x zijn, dan is dus

$$\varphi_m(x) = \underline{F}\left(\frac{\underline{F}\varphi(x_1) + \underline{F}\varphi(x_2)}{2}\right) = \varphi\left[\underline{F}\left(\frac{\underline{F}(x_1) + \underline{F}(x_2)}{2}\right)\right] = \varphi(x_m)$$

en wij hebben dus hieruit de gedaanten van $\varphi(x)$ op te sporen.

Om deze functionaalvergelijking op te lossen, differentieeren wij haar achtereenvolgens partieel naar x_1 en x_2 en ter bekorting $\frac{\underline{F}\varphi(x_1) + \underline{F}\varphi(x_2)}{2} = a$ en $\frac{\underline{F}(x_1) + \underline{F}(x_2)}{2} = b$ stellend, vinden wij vooreerst

$$\underline{F}'(a) \cdot \underline{F}'\varphi(x_1) \cdot \varphi'(x_1) = \varphi'\underline{F}(b) \cdot \underline{F}'(b) \cdot \underline{F}'(x_1)$$

en ten tweede

$$\underline{F}'(a) \cdot \underline{F}'\varphi(x_2) \cdot \varphi'(x_2) = \varphi'\underline{F}(b) \cdot \underline{F}'(b) \cdot \underline{F}'(x_2).$$

Deelen wij beide gelijkheden op elkaar, dan is na kleine omzetting:

$$\frac{\underline{F}'\varphi(x_1) \cdot \varphi'(x_1)}{\underline{F}'(x_1)} = \frac{\underline{F}'\varphi(x_2) \cdot \varphi'(x_2)}{\underline{F}'(x_2)}.$$

Nu zijn x_1 en x_2 volkomen onafhankelijk van elkaar, zoodat aan deze betrekking niet anders kan voldaan worden dan door

$$\frac{\underline{F}'\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}{\underline{F}'(x)} = \text{constante} = c_1$$

te stellen.

Daaruit volgt $\frac{d}{dx}[\underline{F}\varphi(x)] = c_1 \underline{F}'(x)$ of $\underline{F}\varphi(x) = c_1 \underline{F}(x) + c_2$, waarin c_2 weer eene constante is.

Hiermee is dus $\varphi(x) = \underline{F}[c_1 \underline{F}(x) + c_2]$ bepaald en blijkt af te hangen van de soort $\underline{F}(x)$.

Dat deze waarde nu algemeen aan $\varphi_m(x) = \varphi(x_m)$ voldoet, is direct te zien, want dan is

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \underline{F} \frac{\underline{F}\varphi(x_1) + \dots + \underline{F}\varphi(x_n)}{n} = \underline{F} \frac{c_1 \underline{F}(x_1) + c_2 + \dots + c_1 \underline{F}(x_n) + c_2}{n} = \\ &= \underline{F} \left[c_1 \frac{\underline{F}(x_1) + \dots + \underline{F}(x_n)}{n} + c_2 \right] = \underline{F}[c_1 \underline{F}(x_m) + c_2] = \varphi(x_m). \end{aligned}$$

Maar ook geldt deze waarde bij het continu gemiddelde, want ook dan is:

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \underline{F} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \underline{F}\varphi(x) dx = \underline{F} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [c_1 \underline{F}(x) + c_2] dx = \\ &= \underline{F} \left[\frac{c_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \underline{F}(x) dx + c_2 \right] = \underline{F}[c_1 \underline{F}(x_m) + c_2] = \varphi(x_m). \end{aligned}$$

Uit deze twee bewijzen lezen wij echter ook een eigenschap van de soort $\underline{F}(x)$ af en wel deze:

Het gemiddelde van een functie $\varphi(x)$ van de soort $\underline{F}(x)$ is gelijk aan het gemiddelde van $\varphi(x)$ van de soort $c_1 \underline{F}(x) + c_2$. Het gemiddelde is dus lineair invariant in zijn soort.

§ 6. Wij zagen, dat het continu gemiddelde van de soort $\mathcal{F}(x)$ van een functie $\varphi(x)$ de twee vormen $\varphi_m(x)$ en $\varphi(x_m)$ kan aannemen. $\varphi_m(x) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}\varphi(x) dx\right)$ en $\varphi(x_m)$ wordt hieruit door het bijzonder geval $\varphi(x) = x$ berekend. Alleen als $\varphi(x) = \mathcal{F}[c_1 \mathcal{F}(x) + c_2]$ is, vallen zij samen.

Wij zullen nu voor $\varphi_m(x)$ het algemeen symbool

$$\mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}\varphi(x) dx\right)$$

invoeren en spreken daarbij af, dat dan steeds dezelfde soort $\mathcal{F}(x)$ beschouwd wordt.

Wil men ook andere soorten $\mathcal{F}_1(x)$ en $\mathcal{F}_{11}(x)$ invoeren, dan moet men zich van verschillende lettersoorten van $\mathcal{M}$ bedienen, zoodat dezelfde $\mathcal{M}$ steeds op dezelfde soort van gemiddelde wijst. Wij kunnen nu deze eigenschappen vermelden:

I. $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) = \mathcal{M}_{x_2}^{x_1} \varphi(x)$. Dit is direct in te zien.

II. $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(ax + b) = \mathcal{M}_{ax_1+b}^{ax_2+b} \varphi(x)$, als a en b constanten zijn.

Bewijs: $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(ax + b) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}\varphi(ax + b) dx\right) = \mathcal{F}\left(\frac{a}{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)} \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} \mathcal{F}\varphi(x) dx\right)$

Stelt men $ax + b = y$, dan is $adx = dy$ en derhalve

$$\mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(ax + b) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)} \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} \mathcal{F}\varphi(y) dy\right) = \mathcal{M}_{ax_1+b}^{ax_2+b} \varphi(x).$$

Bijzonder geval $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ geeft $\mathcal{M}_0^1 \varphi(ax + b) = \mathcal{M}_b^{a+b} \varphi(x)$, waaruit voor $b = x_1$ $a + b = x_2$

volgt $\mathcal{M}_0^1 \varphi\{(x_2 - x_1)x + x_1\} = \mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x)$. Men kan dus de grenzen tot 0 en 1 reduceeren.

III. $(x_2 - x_1) \mathcal{F}_{x_1}^{x_2} \mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) = (a - x_1) \mathcal{F}_{x_1}^a \mathcal{M}_{x_1}^a \varphi(x) + (b - a) \mathcal{F}_a^b \mathcal{M}_a^b \varphi(x) + \dots + (q - p) \mathcal{F}_p^q \mathcal{M}_p^q \varphi(x) + (x_2 - q) \mathcal{F}_q^{x_2} \mathcal{M}_q^{x_2} \varphi(x)$
als $a, b, \dots, p, q$ constant zijn.

Bewijs:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1) \mathcal{F}_{x_1}^{x_2} \mathcal{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) &= \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}\varphi(x) dx = \left(\int_{x_1}^a + \int_a^b + \dots + \int_p^q + \int_q^{x_2} \right) \mathcal{F}\varphi(x) dx = \\ &= (a - x_1) \mathcal{F}_{x_1}^a \mathcal{M}_{x_1}^a \varphi(x) + (b - a) \mathcal{F}_a^b \mathcal{M}_a^b \varphi(x) + \dots + (x_2 - q) \mathcal{F}_q^{x_2} \mathcal{M}_q^{x_2} \varphi(x). \end{aligned}$$

Door deze eigenschap kan dus een gemiddelde gesplitst worden.

Bijzondere gevallen.

1°. $a - x_1 = b - a = x_2 - b$. Dan is $3a = 2x_1 + x_2$, $3b = x_1 + 2x_2$, dus $a - x_1 = b - a = x_2 - b = \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$. Derhalve is, door $x_2 - x_1$ deelen:

$$3\mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) = \mathcal{FM}_{x_1}^{\frac{1}{3}(2x_1+x_2)}\varphi(x) + \mathcal{FM}_{\frac{1}{3}(2x_1+x_2)}^{\frac{1}{3}(x_1+2x_2)}\varphi(x) + \mathcal{FM}_{\frac{1}{3}(x_1+2x_2)}^{x_2}\varphi(x).$$

Zoo is ook
$$2\mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) = \mathcal{FM}_{x_1}^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\varphi(x) + \mathcal{FM}_{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}^{x_2}\varphi(x).$$

Door bijzondere eigenschappen van de soort $\mathcal{F}(x)$ kunnen deze formules nog geheel andere gedaanten aannemen.

In het algemeen lezen wij er ook nog deze eigenschap uit af:

Het continu gemiddelde van $\varphi(x)$ van de soort $\mathcal{F}(x)$ is vervormbaar tot het discontinu gemiddelde van dezelfde soort $\mathcal{F}(x)$ voor die speciaalwaarden van $\mathcal{M}_{p_{n-1}}^{p_n}\varphi(x)$, die men verkrijgt door de $(n+1)$ waarden van p te bepalen uit:

$$p_0 = x_1 \quad p_1 - x_1 = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \dots = p_{n-1} - p_{n-2} = x_2 - p_{n-1} \quad p_n = x_2.$$

2°. Dit belangrijk geval doet zich voor als $a = b$ is. Dan is

$$(x_2 - x_1)\mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) = (a - x_1)\mathcal{FM}_{x_1}^a\varphi(x) + (x_2 - a)\mathcal{FM}_a^{x_2}\varphi(x)$$

of:

$$x_2\mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) - (x_2 - a)\mathcal{FM}_a^{x_2}\varphi(x) = x_1\mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) - (x_1 - a)\mathcal{FM}_a^{x_1}\varphi(x).$$

Stellen wij:

$$\psi(x) = x\mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) - (x - a)\mathcal{FM}_a^x\varphi(x), \text{ dan staat er dus}$$

dat:

$$\psi(x_2) = \psi(x_1).$$

De functie $\psi(x)$ heeft dus vooreerst de eigenschap, dat zij voor argumenten gelijk aan de grenzen van het gemiddelde $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}\varphi(x)$ dezelfde waarde aanneemt.

Zij heeft echter meer eigenschappen. Differentieeren wij $\psi(x)$ naar x , dan is:

$$\psi'(x) = \mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) - \mathcal{FM}_a^x\varphi(x) - (x - a)\frac{d}{dx}\mathcal{FM}_a^x\varphi(x).$$

Nu is:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{FM}_a^x(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \mathcal{F}\varphi(x) dx\right) = \frac{-1}{(x-a)^2}\int_a^x \mathcal{F}\varphi(x) dx + \frac{\mathcal{F}\varphi(x)}{x-a} = \frac{\mathcal{F}\varphi(x) - \mathcal{FM}_a^x\varphi(x)}{x-a}$$

Substitueeren wij dit, dan is dus:

$$\psi'(x) = \mathcal{FM}_{x_1}^{x_2}\varphi(x) - \mathcal{F}\varphi(x).$$

Wij lezen hieruit onmiddellijk af, dat $\psi(x)$ dan *maximaal*, *minimaal* of *stationnair* wordt, als $\varphi(x)$ haar gemiddelde waarde $\bar{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x)$ aanneemt.

De bepaling, die wij van $\psi(x)$ gaven, onderstelt blijkbaar, dat het gemiddelde als constante wordt beschouwd. Dit zal in de meeste gevallen geoorloofd zijn, omdat juist dan een gemiddelde waarde eener functie verlangd wordt, wanneer men zich los wil maken van de speciale waarden, die de functie kan aannemen.

Wij kunnen dus dit theorema uitspreken:

Bij elke soort van gemiddelde van een functie $\varphi(x)$ laat zich een functie $\psi(x)$ construeren, die maximaal, minimaal of stationnair wordt, zoodra $\varphi(x)$ de constant gemiddelde waarde, bij die soort behorende, aanneemt.

Het is echter ook direct duidelijk, dat $\psi(x)$ niet de eenige functie is, die aan dien eisch voldoet. Immers $e^{\psi(x)}$ en $\varphi(\psi(x))$ bijv. zullen er ook aan voldoen en bovendien treedt in $\psi(x)$ nog de willekeurige constante a op.

Het is mijn voornemen om later de mechanische beteekenis van dit theorema nader te onderzoeken.

De functie $\psi(x)$ heeft echter nog een derde eigenschap:

Gesteld, wij weten twee speciaalwaarden x_4 en x_3 zóó te kiezen dat:

$$\psi(x_4) = \psi(x_3),$$

wat steeds binnen perken mogelijk zal zijn, dan zal dus:

$$x_4 \bar{F} \bar{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) - (x_4 - a) \bar{F} \bar{M}_a^{x_4} \varphi(x) = x_3 \bar{F} \bar{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) - (x_3 - a) \bar{F} \bar{M}_a^{x_3} \varphi(x)$$

of:

$$(x_4 - x_3) \bar{F} \bar{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) = \int_a^{x_4} \bar{F} \varphi(x) dx + \int_{x_3}^a \bar{F} \varphi(x) dx = \int_{x_3}^{x_4} \bar{F} \varphi(x) dx.$$

Derhalve:

$$\bar{M}_{x_1}^{x_2} \varphi(x) = \bar{M}_{x_3}^{x_4} \varphi(x).$$

Wij zien dus, dat het gemiddelde van de soort $\bar{F}(x)$ van een functie $\varphi(x)$ niet verandert, wanneer het bepaald wordt tusschen die paren van grenzen x_i en x_j , die besloten liggen in de vergelijking:

$$\psi(x_i) = \psi(x_j).$$

Het gemiddelde blijkt dus in dien zin onafhankelijk te zijn van gegeven grenzen en blijft dezelfde waarde behouden, als men de grenzen vervangt door een willekeurig stel waarden x_i en x_j mits zij voldoen aan laatstgenoemde betrekking. Tevoren heb ik gezegd, dat dit binnen perken mogelijk zou zijn en dat is nu duidelijk. Immers geeft men bijv. x_i dan zal het niet altijd mogelijk zijn uit $\psi(x_i) = \psi(x_j)$ een bijbehorende x_j te bepalen. Is $\bar{F}\varphi(x)$ con-

tinu en eindig, dan is dit binnen de uiterste grenzen x_1 en x_2 steeds mogelijk. Hiermede is nu ook nader gemotiveerd, waarom het gemiddelde dikwijls als constant mag beschouwd worden; het is reeds onafhankelijk van een bepaald grenzenpaar. Wij zullen in het vervolg nog een kenmerkende eigenschap van $\varphi(x)$ leeren kennen. Wegens het belang, dat $\varphi(x)$ voor het gemiddelde heeft, stel ik voor haar de *grensfunctie* te noemen.

Enkele voorbeelden mogen de gedaante dezer grensfunctie $\varphi(x)$ nader verduidelijken.

Soort.	Continu gemiddelde.	Grensfunctie.
$\mathcal{F}(x) = x$	$x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$	$\varphi(x) = \frac{1}{2}(2xx_m - x^2 + a^2)$
$\mathcal{F}(x) = x^2$	$x_m^2 = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$	$\varphi(x) = \frac{1}{3}(3xx_m^2 - x^3 + a^3)$
$\mathcal{F}(x) = lx$	$x_m = \frac{1}{e} \left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$	$\varphi(x) = l \left(\frac{ex_m}{x} \right)^x + l \left(\frac{a}{e} \right)^a$
$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{x}$	$x_m = \frac{x_2 - x_1}{lx_2 - lx_1}$	$\varphi(x) = \frac{x}{x_m} - lx + la$
$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{x^2}$	$x_m^2 = x_1x_2$	$\varphi(x) = \frac{x}{x_m^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$
$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x_m = \left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \right)^2$	$\varphi(x) = \frac{x}{2\sqrt{x_m}} - \sqrt{x} + \sqrt{a}$
$\mathcal{F}(x) = e^x$	$x_m = l \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$	$\varphi(x) = xe^{x_m} - e^x + e^a$

§ 7. Wij gaan thans over tot een stelling, die ons de karakteristieke functionaal-vergelijkingen der onderscheidene soorten van gemiddelden zal aanbrengen.

Ter vereenvoudiging nemen wij $\varphi(x) = x$ als functie, waarvan het gemiddelde van de soort $\mathcal{F}(x)$ zal bepaald worden en deelen het aantal pn der speciaalwaarden $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}; \dots, x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn}$ der variable x in p -groepen, elk van n speciaalwaarden en bepalen van elke groep het gemiddelde. Dan is

$$\begin{aligned} n\mathcal{F}(x_{1m}) &= \mathcal{F}(x_{11}) + \mathcal{F}(x_{12}) + \dots + \mathcal{F}(x_{1n}) \\ n\mathcal{F}(x_{2m}) &= \mathcal{F}(x_{21}) + \mathcal{F}(x_{22}) + \dots + \mathcal{F}(x_{2n}) \\ &\vdots \\ n\mathcal{F}(x_{pm}) &= \mathcal{F}(x_{p1}) + \mathcal{F}(x_{p2}) + \dots + \mathcal{F}(x_{pn}). \end{aligned}$$

Daaruit volgt, als we elk gemiddelde x_{im} als functie zijner toebehoorende speciaalwaarden van x beschouwen:

$$x_{1m} = f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) = \frac{\mathcal{F}(x_{11}) + \mathcal{F}(x_{12}) + \dots + \mathcal{F}(x_{1n})}{n}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2m} &= f(x_{21}, x_{22} \dots x_{2n}) = \underline{f} \frac{\mathcal{F}(x_{21}) + \mathcal{F}(x_{22}) + \dots + \mathcal{F}(x_{2n})}{n} \\
 &\vdots \\
 x_{pm} &= f(x_{p1}, x_{p2} \dots x_{pn}) = \underline{f} \frac{\mathcal{F}(x_{p1}) + \mathcal{F}(x_{p2}) + \dots + \mathcal{F}(x_{pn})}{n}
 \end{aligned}$$

Bewerken wij nu deze vergelijkingen met $\mathcal{F}$, dan vinden wij na optelling en deeling door p

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{F}(x_{1m}) + \mathcal{F}(x_{2m}) + \dots + \mathcal{F}(x_{pm})}{p} &= \frac{1}{n} \left[\frac{\mathcal{F}(x_{11}) + \dots + \mathcal{F}(x_{p1})}{p} + \frac{\mathcal{F}(x_{12}) + \dots + \mathcal{F}(x_{p2})}{p} + \dots + \frac{\mathcal{F}(x_{1n}) + \dots + \mathcal{F}(x_{pn})}{p} \right] = \\
 &= \frac{\mathcal{F}(x_{m'1}) + \mathcal{F}(x_{m'2}) + \dots + \mathcal{F}(x_{m'n})}{n} \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

waarin dus m op de groepen van n , en m' op de groepen van p -leden betrekking heeft.

Derhalve is $\mathcal{F}(x_{m'm})_{m'} = \mathcal{F}(x_{m'm})_m$

waarin de indices op dezelfde groepeeringsdoelen.

Met $\underline{f}$ bewerkende, vinden wij

$$[x_{m'm}]_{m'} = [x_{m'm}]_m.$$

Hier staat dus: Bij gegeven soort $\mathcal{F}(x)$ is het gemiddelde van p gemiddelden elk van n speciaalwaarden van x gelijk aan het gemiddelde van n gemiddelden elk van p speciaalwaarden van x , mits men ze uit dezelfde pn speciaalwaarden opbouwt.

Om hieruit nu de functionaalvergelijkingen van de verschillende soorten van gemiddelden af te leiden moeten wij elke soort afzonderlijk behandelen. Wij zullen de gebruikelijkste soorten kiezen.

$\mathcal{F}(x) = x$, het rekenkundig gemiddelde.

Wij stellen $x_{11} = 2x_1$ $x_{21} = 2x_2 \dots x_{n1} = 2x_n$; $x_{12} = 2y_1$ $x_{22} = 2y_2 \dots x_{n2} = 2y_n$, dan is

$$x_{m'1} = \frac{2}{n} [x_1 + x_2 + \dots + x_n] \quad x_{m'2} = \frac{2}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n] \quad \text{en}$$

$$x_{1m} = x_1 + y_1 \quad x_{2m} = x_2 + y_2 \dots x_{nm} = x_n + y_n.$$

Nu is dus $\frac{x_{m'1} + x_{m'2}}{2} = \frac{x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm}}{n}$ als in (1) $n = 2$ en $p = n$ wordt gesteld.

Stellen wij derhalve $x_{m'1} = f(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{p1})$ enz. dan is dus

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Het is wenschelijk om dit functioneel verband de functionaal vergelijking van het rekenkundig gemiddelde te noemen. Gewoonlijk ¹⁾ noemt men $f(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) =$

¹⁾ CZUBER. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig. Teubner. 1891.

$= f(x_1, x_2 \dots x_n) + a$ aldus, welke vergelijking direct uit de voorgaande volgt, als men $y_1 = y_2 = \dots = y_n = a$ stelt.

$\mathcal{F}(x) = lx$, het meetkundig gemiddelde.

Wij stellen $x_{11} = x_1^2$ $x_{12} = y_1^2$ $x_{21} = x_2^2$ $x_{22} = y_2^2 \dots x_{n1} = x_n^2$ $x_{n2} = y_n^2$; dan is

$$lx_{m'1} = \frac{2}{n} [lx_1 + lx_2 + \dots + lx_n] \quad lx_{m'2} = \frac{2}{n} [ly_1 + ly_2 + \dots + ly_n] \quad \text{en}$$

$$lx_{1m} = lx_1 + ly_1 \quad lx_{2m} = lx_2 + ly_2 \dots lx_{nm} = lx_n + ly_n.$$

Dus $\frac{lx_{m'1}}{2} + \frac{lx_{m'2}}{2} = \frac{lx_{1m} + lx_{2m} + \dots + lx_{nm}}{n}$ als in (1) $n = 2$ en $p = n$ wordt gekozen.

In dit geval is dus $lf(x_1, x_2 \dots x_n) + lf(y_1, y_2 \dots y_n) = lf(x_1y_1, x_2y_2, \dots x_ny_n)$ of

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) \cdot f(y_1, y_2 \dots y_n) = f(x_1y_1, x_2y_2, \dots x_ny_n).$$

Wij zullen deze betrekking de functionaalvergelijking van het meetkundig gemiddelde noemen.

Stellen wij
$$y_1 = \frac{1}{z_1} \quad y_2 = \frac{1}{z_2} \dots y_n = \frac{1}{z_n}$$

dan is
$$f(x_1, x_2 \dots x_n) \cdot f\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots \frac{1}{z_n}\right) = f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \dots \frac{x_n}{z_n}\right)$$

en stellen wij $x_1y_1 = x_2y_2 = \dots = x_ny_n = 1$ dan is $f(x_1, x_2 \dots x_n) \cdot f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}\right) = f(1, 1, \dots 1) = 1$.

Combineeren wij beide eigenschappen, dan is dus

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)}{f(z_1, z_2, \dots z_n)} = f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \dots \frac{x_n}{z_n}\right).$$

Wij leiden uit deze betrekkingen ook onmiddellijk af, dat het meetkundig gemiddelde van een product gelijk is aan het product der meetkundige gemiddelden; bovendien de overeenkomstige eigenschap voor het quotient.

Voor $y_1 = y_2 = \dots = y_n = a$ krijgen wij $af(x_1, x_2 \dots x_n) = f(ax_1, ax_2, \dots ax_n)$ ook eene bekende eigenschap.

$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{x}$, het harmonisch gemiddelde.

Wij stellen $x_{11} = 2x_1$ $x_{12} = 2y_1$ $x_{21} = 2x_2$ $x_{22} = 2y_2 \dots x_{n1} = 2x_n$ $x_{n2} = 2y_n$ dan is

$$\frac{1}{x_{m'1}} = \frac{2}{n} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right] \quad \frac{1}{x_{m'2}} = \frac{2}{n} \left[\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n} \right]$$

$$\frac{1}{x_{1m}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} \quad \frac{1}{x_{2m}} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} \dots \frac{1}{x_{nm}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}.$$

Derhalve is

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_{m'1}} + \frac{1}{x_{m'2}} \right] = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{x_{1m}} + \frac{1}{x_{2m}} + \dots + \frac{1}{x_{nm}} \right]$$

als in (1) $n = 2$ en $p = n$ wordt gesteld.

Of daar $x_{1m} = \frac{x_1 y_1}{x_1 + y_1}$ is enz., vinden wij

$$f\left(\frac{x_1 y_1}{x_1 + y_1}, \frac{x_2 y_2}{x_2 + y_2}, \dots, \frac{x_n y_n}{x_n + y_n}\right) = \frac{x_{m'1} x_{m'2}}{x_{m'1} + x_{m'2}} = \frac{f(x_1, x_2 \dots x_n) \cdot f(y_1, y_2 \dots y_n)}{f(x_1, x_2 \dots x_n) + f(y_1, y_2 \dots y_n)}.$$

Wij kunnen deze betrekking de functionaalvergelijking van het harmonisch gemiddelde noemen.

Voor $y_1 = y_2 = \dots = y_n = a$ is dus $f\left(\frac{ax_1}{a+x_1}, \frac{ax_2}{a+x_2}, \dots, \frac{ax_n}{a+x_n}\right) = \frac{af(x_1, x_2 \dots x_n)}{a+f(x_1, x_2 \dots x_n)}.$

Het afleiden van de functionaalvergelijkingen van andere gemiddelden laten wij aan den lezer over.

Het spreekt nu van zelf, dat men dan eerst streng genomen het recht heeft om van eene functionaalvergelijking van een gemiddelde van bepaalde soort te spreken, indien die functionaalvergelijking alleen reeds voldoende is om de soort van gemiddelde er ondubbelzinnig uit af te leiden en het bleek mij, dat een functionaalvergelijking eerst dan aan dien eisch kan voldoen, als er minstens 2 onafhankelijk variabelen in optreden.

Functionaalvergelijkingen als deze:

$$f(x) + a = f(x + a); \quad af(x) = f(ax); \quad f\left(\frac{ax}{a+x}\right) = \frac{af(x)}{a+f(x)},$$

waarin $f(x)$ ter bekorting voor $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ is geschreven, leveren nooit uitsluitend functies, die gelijk zijn aan de soort van gemiddelde, waarbij zij behooren. Dat een functionaalvergelijking met 2 onafhankelijk variabelen dit wel doet, moge het volgende betoog voor die van het meetkundig gemiddelde aantoonen. Wegens het belang voor mijne aesthetische theorie kies ik juist dit geval.

Laat dus gegeven zijn de functionaalvergelijking $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ van het meetkundig gemiddelde, dan is het dus de vraag of wij kunnen aantoonen, dat $\mathcal{F}(x) = clx + c_1$ de algemeenste soortvorm is van het gemiddelde, dat tot deze functioneele eigenschap voert. Wij moeten $\mathcal{F}(x)$ zoo voorstellen met twee constanten, omdat het gemiddelde van een lineaire functie van de soort, gelijk is aan dat van de soort zelve, wat wij tevoren reeds aantoonde. Het komt er dus op aan om $\mathcal{F}(x)$ te bepalen uit deze functionaalvergelijking:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{n}\left[\mathcal{F}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{x_2}{y_2}\right) + \dots + \mathcal{F}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right]\right\} = \frac{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{n}\left[\mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_2) + \dots + \mathcal{F}(x_n)\right]\right\}}{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{n}\left[\mathcal{F}(y_1) + \mathcal{F}(y_2) + \dots + \mathcal{F}(y_n)\right]\right\}}.$$

Bepalen wij ons tot $\underline{F}\left\{\frac{1}{2}\left[\underline{F}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \underline{F}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right]\right\} = \frac{\underline{F}\left\{\frac{1}{2}[\underline{F}(x_1) + \underline{F}(x_2)]\right\}}{\underline{F}\left\{\frac{1}{2}[\underline{F}(y_1) + \underline{F}(y_2)]\right\}}$

dan is, als wij ter bekorting

$$\frac{1}{2}\left[\underline{F}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \underline{F}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right] = a \quad \frac{1}{2}[\underline{F}(x_1) + \underline{F}(x_2)] = b \quad \frac{1}{2}[\underline{F}(y_1) + \underline{F}(y_2)] = c \quad \text{stellen,}$$

partieel differentieerend naar x_1

$$\underline{F}'(a) \underline{F}'\left(\frac{x_1}{y_1}\right) \frac{1}{2y_1} = \frac{\underline{F}'(b)}{\underline{F}'(c)} \cdot \frac{\underline{F}'(x_1)}{2} \quad \dots \quad (1)$$

naar x_2

$$\underline{F}'(a) \underline{F}'\left(\frac{x_2}{y_2}\right) \frac{1}{2y_2} = \frac{\underline{F}'(b)}{\underline{F}'(c)} \cdot \frac{\underline{F}'(x_2)}{2} \quad \dots \quad (2)$$

naar y_1

$$\underline{F}'(a) \underline{F}'\left(\frac{x_1}{y_1}\right) \frac{-x_1}{2y_1^2} = \frac{\underline{F}'(b)}{\{\underline{F}'(c)\}^2} \underline{F}'(c) \cdot \frac{-\underline{F}'(y_1)}{2} \quad \dots \quad (3)$$

naar y_2

$$\underline{F}'(a) \underline{F}'\left(\frac{x_2}{y_2}\right) \frac{-x_2}{2y_2^2} = \frac{\underline{F}'(b)}{\{\underline{F}'(c)\}^2} \underline{F}'(c) \cdot \frac{-\underline{F}'(y_2)}{2} \quad \dots \quad (4)$$

Deelen wij (1) door (2) en (3) door (4)

$$\text{dan is} \quad \frac{\underline{F}'\left(\frac{x_1}{y_1}\right)}{\underline{F}'\left(\frac{x_2}{y_2}\right)} = \frac{y_1 \underline{F}'(x_1)}{y_2 \underline{F}'(x_2)} \quad \text{en} \quad \frac{\underline{F}'\left(\frac{x_1}{y_1}\right)}{\underline{F}'\left(\frac{x_2}{y_2}\right)} = \frac{y_1^2 \underline{F}'(y_1)}{x_1 \underline{F}'(y_2)} \quad \text{Derhalve}$$

$$x_1 \underline{F}'(x_1) \cdot y_2 \underline{F}'(y_2) = x_2 \underline{F}'(x_2) \cdot y_1 \underline{F}'(y_1).$$

Was $\underline{F}'(x) = 0$ of $\underline{F}(x) = \text{constant}$, dan wordt hieraan voldaan en men zou dit met sommige Duitschers de „triviale” oplossing kunnen noemen. Sluiten wij dit geval uit, dan wordt aan deze vergelijking algemeen voldaan door te stellen

$$x \underline{F}'(x) = \text{constant} = c.$$

Door $x_2 = y_1 = y_2 = 0$ te stellen, blijkt dit ook direct. Wij vinden derhalve

$$\underline{F}(x) = clx + c_1.$$

Door toepassing op de algemeene vergelijking blijkt zij te voldoen en daarmee is het bewijs geleverd.

§ 8. Wij moeten nu nog een en ander vermelden van gemiddelden van functies van twee onafhankelijk variabelen van gegeven soort.

Zij gegeven een functie $\varphi(x, y)$, waarvan np speciaalwaarden $\varphi(x_1, y_1)$, $\varphi(x_2, y_1)$, $\varphi(x_1, y_2)$ enz. bekend zijn, dan kan men daaruit een gemiddelde van de soort $\underline{F}(z)$ op deze wijze opbouwen:

$$\begin{aligned}
np \mathcal{F} \varphi_m(x, y) &= \mathcal{F} \varphi(x_1, y_1) + \mathcal{F} \varphi(x_2, y_1) + \dots + \mathcal{F} \varphi(x_n, y_1) + \\
&+ \mathcal{F} \varphi(x_1, y_2) + \mathcal{F} \varphi(x_2, y_2) + \dots + \mathcal{F} \varphi(x_n, y_2) + \\
&+ \dots + \\
&+ \mathcal{F} \varphi(x_1, y_p) + \mathcal{F} \varphi(x_2, y_p) + \dots + \mathcal{F} \varphi(x_n, y_p).
\end{aligned}$$

Dit gemiddelde $\varphi_m(x, y)$ moet weer nauwkeurig onderscheiden worden van den vorm $\varphi(x_m, y_m)$, dien men verkrijgt door in $\varphi(x, y)$ voor de onafhankelijk variabelen hun gemiddelden van de soort $\mathcal{F}(z)$ te substitueeren.

Wil men het gemiddelde van alle waarden, die $\varphi(x, y)$ doorloopt tusschen de grenzen x_1 en x_2 voor x en tusschen y_1 en y_2 voor y bepalen, dan vindt men analoog met § 4

$$np \mathcal{F} \varphi_m(x, y) = \sum_{y=y_1}^{y=y_1+(p-1)\Delta y} \sum_{x=x_1}^{x=x_1+(n-1)\Delta x} \mathcal{F} \varphi(x, y).$$

Daar $y_2 = y_1 + (p-1)\Delta y$ $x_2 = x_1 + (n-1)\Delta x$ en dus

$$\frac{1}{pn} = \frac{\Delta y}{y_2 - y_1 + \Delta y} \cdot \frac{\Delta x}{x_2 - x_1 + \Delta x},$$

vindt men bij limietovergang

$$\mathcal{F} \varphi_m(x, y) = \frac{1}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F} \varphi(x, y) dy dx.$$

Wij stellen nu weer symbolisch $\overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{M}} \varphi(x, y) = \mathcal{F} \left(\frac{1}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F} \varphi(x, y) dy dx \right)$

afsprekende dat men met dezelfde M ook steeds dezelfde soort aanwijst.

Wij kunnen nu deze herleiding maken, daar de grenzen constant zijn:

$$\overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{\mathcal{F} M}} \varphi(x, y) = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} dy \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F} \varphi(x, y) dx \right] = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{\mathcal{F} M}} \varphi(x, y) dy = \overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{\mathcal{F} M M}} \varphi(x, y)$$

of

$$\overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{M}} \varphi(x, y) = \overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{M M}} \varphi(x, y)$$

wanneer wij dit zóo opvatten dat eerst in $\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}} \varphi(x, y)$ de y constant wordt gehouden en daarna van het resultaat met veranderlijke y het gemiddelde van de soort $\mathcal{F}$ tusschen de grenzen y_1 en y_2 wordt bepaald.

Wij besluiten nu ook dat $\overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{M}} \varphi(x, y) = \overset{y_2, x_2}{\underset{y_1, x_1}{M M}} \varphi(x, y) = \overset{x_2, y_2}{\underset{x_1, y_1}{M M}} \varphi(x, y).$

Geheel analoog met de bewijzen bij functies van een variabele vinden wij hier

$$\text{I. } \mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) = \mathop{\mathcal{M}}_{y_2, x_1}^{y_1, x_2} \varphi(x, y) = \mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_2}^{y_2, x_1} \varphi(x, y) = \mathop{\mathcal{M}}_{y_2, x_2}^{y_1, x_1} \varphi(x, y).$$

$$\text{II. } \mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(ax + b, a'y + b') = \mathop{\mathcal{M}}_{y_1, ax_1 + b}^{y_2, ax_2 + b} \varphi(x, a'y + b') = \mathop{\mathcal{M}}_{a'y_1 + b}^{a'y_2 + b'} \mathop{\mathcal{M}}_{ax_1 + b}^{ax_2 + b} \varphi(x, y).$$

$$\begin{aligned} \text{III. } (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) &= (a - x_1)(a' - y_1) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{a', a} \varphi(x, y) + (a - x_1)(b' - a') \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{a_1, x_1}^{b', a} \varphi(x, y) + \\ &+ (a - x_1)(y_2 - b') \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{b', x_1}^{y_2, a} \varphi(x, y) + (b - a)(a' - y_1) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, a}^{a', b} \varphi(x, y) + (b - a)(b' - a') \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{a', a}^{b', b} \varphi(x, y) + \\ &+ (b - a)(y_2 - b') \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{b', a}^{y_2, b} \varphi(x, y) + (x_2 - b)(a' - y_1) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, b}^{a_1, x_2} \varphi(x, y) + (x_2 - b)(b' - a') \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{a', b}^{b', x_2} \varphi(x, y) + \\ &+ (x_2 - b)(y_2 - b') \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{b', b}^{y_2, x_2} \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Het bewijs wordt met gebruikmaking van III § 6 geleverd.

Men zou hier nu ook een functie analoog met de *grensfunctie* bij een variabele verwachten. Zij bestaat hier echter in het algemeen niet. Zonder twijfel kan men analoog met $\psi(x)$ bij één variabele, hier een functie $\psi(x, y)$ zoo definiëren dat

$$\psi(x, y) = xy \mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) - (x - a)(y - b) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{b, a}^{y, x} \varphi(x, y)$$

en men vindt dan dat

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = y \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) - (y - b) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_b^y \varphi(x, y) \quad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = x \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) - (x - a) \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_a^x \varphi(x, y)$$

en dat

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} = \mathop{\mathcal{F}}\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) - \mathcal{F} \varphi(x, y).$$

Maar dit voert, in tegenstelling met $\psi(x)$, tot de eigenschap, dat $\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$ is als $\varphi(x, y)$ de gemiddelde waarde $\mathop{\mathcal{M}}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y)$ aanneemt. Ook corresponderende eigenschappen aangaande de grenzen heeft deze functie niet.

Men kan echter den anderen weg gaan. Ook $\varphi(x_m, y_m)$ kan als gemiddelde van $\varphi(x, y)$ worden beschouwd. Is nu $\psi(x)$ de grensfunctie van $x_m = \mathop{\mathcal{M}}_{x_1}^{x_2} x$ en $\psi(y)$ de grensfunctie van $y_m = \mathop{\mathcal{M}}_{y_1}^{y_2} y$, beiden van de soort $\mathcal{F}(x)$, dan kan men de functie

$$\varphi[\psi(x), \psi(y)]$$

construeeren en deze heeft weer de eigenschap van maximaal, minimaal of stationnair te worden als de veranderlijken erin constant gemiddelde waarden aannemen. Immers, dan is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi' \cdot \psi'(x) \text{ en } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi' \cdot \psi'(y) \text{ en deze worden beide nul voor } x = x_m \text{ en } y = y_m.$$

Er is slechts één geval, waarin een dergelijke eigenschap ook bestaat bij $\varphi_m(x, y)$ en wel natuurlijk dit, dat $\varphi_m(x, y) = \varphi(x_m, y_m)$ is. Wij zullen daartoe nog nagaan, welke gedaante $\varphi(x, y)$ dan eigen is.

§ 9. Zij dus gegeven, dat $\varphi_m(x, y) = \varphi(x_m, y_m)$ is, dan zullen wij de gedaante van $\varphi(x, y)$ hieruit bepalen, uitgaande van het discontinu gemiddelde van $\varphi(x, y)$ voor x_1, x_2, y_1, y_2 als speciaalwaarden bij $\mathcal{F}(z)$ als soort. Dan moet dus

$$\underline{\mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{4} \left[\mathcal{F}\varphi(x_1, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x_1, y_2) + \mathcal{F}\varphi(x_2, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x_2, y_2) \right] \right\} = \varphi \left[\underline{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_2)}{2}, \underline{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}(y_1) + \mathcal{F}(y_2)}{2} \right].$$

Ter bekorting stellen wij het argument van $\underline{\mathcal{F}}$ in het eerste lid gelijk a en $\frac{\mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_2)}{2} = b$.

Wij differentieeren nu de vergelijking partieel naar x_1 en vinden

$$\frac{1}{4} \underline{\mathcal{F}}'(a) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mathcal{F}\varphi(x_1, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x_1, y_2) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\mathcal{F}}(b)} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}(b)}{\partial b} \cdot \frac{\mathcal{F}'(x_1)}{2}$$

en partieel naar x_2

$$\frac{1}{4} \underline{\mathcal{F}}'(a) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mathcal{F}\varphi(x_2, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x_2, y_2) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\mathcal{F}}(b)} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}(b)}{\partial b} \cdot \frac{\mathcal{F}'(x_2)}{2}.$$

Deelen wij ze op elkaar, dan is na omzetting:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mathcal{F}\varphi(x_1, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x_1, y_2) \right]}{\mathcal{F}'(x_1)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mathcal{F}\varphi(x_2, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x_2, y_2) \right]}{\mathcal{F}'(x_2)}$$

Daar nu x_1 en x_2 evenals de y_1 en y_2 geheel onafhankelijk zijn, volgt hieruit, als k_1 een absolute constante voorstelt, dat

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{F}\varphi(x, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x, y_2) \right] = k_1 \mathcal{F}'(x).$$

Differentieerden wij evenzoo partieel naar y_1 en naar y_2 , dan is voor k_2 als absolute constante

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\mathcal{F}\varphi(x_1, y) + \mathcal{F}\varphi(x_2, y) \right] = k_2 \mathcal{F}'(y).$$

Integreeren wij beide vergelijkingen, dan is met inachtneming van den vorm ter bepaling der constanten:

$$\mathcal{F}\varphi(x, y_1) + \mathcal{F}\varphi(x, y_2) = k_1 \mathcal{F}(x) + f_1(y_1) + f_1(y_2) + k_3 \quad \text{en} \quad \dots \quad (1)$$

$$\mathcal{F}\varphi(x_1, y) + \mathcal{F}\varphi(x_2, y) = k_2 \mathcal{F}(y) + f_2(x_1) + f_2(x_2) + k_4 \quad \dots \quad (2)$$

waarin de f 's en k 's willekeurige functies en absolute constanten voorstellen.

Wij differentieëren de eerste dezer twee vergelijkingen eerst partieel naar y_1 en dan partieel naar y_2 , dan is na deeling der resultaten op elkaar:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y_1} \mathcal{F}\varphi(x, y_1)}{f'_1(y_1)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y_2} \mathcal{F}\varphi(x, y_2)}{f'_1(y_2)}.$$

Daaruit volgt echter weer $\mathcal{F}\varphi(x, y) = k_5 f_1(y) + k_6 + f_3(x)$ waarin de k 's en f 's den zelfden zin als boven hebben. Ter bepaling der vorm van de f 's krijgen wij dus uit (1) en (2)

$$k_1 \mathcal{F}(x) + f_1(y_1) + f_1(y_2) + k_3 = k_5 f_1(y_1) + k_5 f_1(y_2) + 2f_3(x) + 2k_6$$

$$k_2 \mathcal{F}(y) + f_2(x_1) + f_2(x_2) + k_4 = 2k_5 f_1(y) + f_3(x_1) + f_3(x_2) + 2k_6.$$

Dus $P\mathcal{F}(x) = f_3(x) + k_7$ en $Q\mathcal{F}(y) = k_5 f_1(y) + k_8$ zoodat, als P , Q , R absolute constanten zijn, wij vinden $\mathcal{F}\varphi(x, y) = P\mathcal{F}(x) + Q\mathcal{F}(y) + R$ waaruit volgt dat

$$\varphi(x, y) = \mathcal{F}[P\mathcal{F}(x) + Q\mathcal{F}(y) + R].$$

Deze functie voldoet nu ook in 't algemeen aan het discontinu gemiddelde en ook aan het continu gemiddelde. Dit laatste zullen wij nog laten zien:

Dan is derhalve

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, y) &= \mathcal{M}_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \varphi(x, y) = \mathcal{F} \frac{1}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (P\mathcal{F}(x) + Q\mathcal{F}(y) + R) dy dx = \\ &= \mathcal{F} \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} P\mathcal{F}(x) dx + \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} Q\mathcal{F}(y) dy + R \right] = \\ &= \mathcal{F} \left[P\mathcal{F} \mathcal{M}_{x_1}^{x_2} x + Q\mathcal{F} \mathcal{M}_{y_1}^{y_2} y + R \right] = \varphi \left[\mathcal{M}_{x_1}^{x_2} x, \mathcal{M}_{y_1}^{y_2} y \right] = Q(x_m, y_m). \end{aligned}$$

Voor meer variabelen zal deze functie natuurlijk zijn:

$$Q(x, y, z, u) = \mathcal{F}[P\mathcal{F}(x) + Q\mathcal{F}(y) + R\mathcal{F}(z) + S\mathcal{F}(u) + T].$$

Nemen wij als voorbeeld $\mathcal{F}(x) = lx$, dan is $\mathcal{F}(x) = e^x$, zoodat wij bij het meetkundig gemiddelde vinden $Q(x, y) = e^{Plx + Qly + R} = kx^Py^Q$.

Hieruit blijkt, dat ook de functie $\frac{x}{y}$ er onder thuis behoort, een feit, dat voor mijne aesthetische theorie van gewicht is. Immers, waar de menschelijke geest bij uitstek geschikt is om proporties te onthouden, is de verwachting gewettigd dat, indien inderdaad aesthetische maxima gemiddelden zijn, ook gemiddelden van verhoudingen zullen gevormd worden.

Bovendien mag men het als psychologisch noodzakelijk beschouwen, dat schoonste verhoudingen uit verhoudingen van schoonste leden bestaan, omdat men in het tegenovergestelde geval stellig met geen aesthetisch *maximum* of wil men *maximum maximorum* te doen heeft. Hieruit volgt echter onmiddellijk, dat de soort van het gemiddelde, die men naar deze opvattingen verwachten kan, gebonden moet zijn aan deze functioneele eigenschap: $M_{\mathcal{F}}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{M_{\mathcal{F}}(x)}{M_{\mathcal{F}}(y)}$ waarin $M_{\mathcal{F}}$ het gemiddelde van de soort $\mathcal{F}(x)$ voorstelt. In § 7 heb ik bewezen, dat alleen het meetkundig gemiddelde hieraan voldoet, waarmede nu tevens de gronden zijn uiteengezet, waarop ik thans de keuze van het meetkundig gemiddelde in mijne schoonheidstheorie zou willen rechtvaardigen ¹⁾.

§ 10. Wij zullen nu, aan het einde onzer algemeene beschouwingen genaderd zijnde, nog eene eigenschap der grensfunctie meedeelen en daarmede tevens de eigenaardige positie, die zij ten opzichte van het gemiddelde waarbij zij behoort bekleedt, in het licht kunnen stellen.

Wij kunnen toch, indien $\mathcal{F}(x)$ de soort van het gemiddelde en $\psi(x)$ de grensfunctie van de functie x , waarvan het gemiddelde wordt gevormd, voorstellen, deze eigenschap uitspreken: De foutenwet. d.i. de kans om de grootheid x te vinden of te kiezen, wanneer de gemiddelde x_m van de soort $\mathcal{F}(x)$ de grootste kans om gevonden of gekozen te worden moet geacht worden te bezitten, wordt uitgedrukt door de functie

$$e^{k\psi(x)}$$

waarin k eene constante is.

Alvorens tot het bewijs hiervan over te gaan is het niet ondienstig om op te merken dat, waar de foutenwet van GAUSS haar ontstaan dankt aan de behoefte om uit een gegeven stel metingen van één grootheid die waarde van haar op te sporen of uit te kiezen, die op de meest rationeele gronden mag verwacht worden, dit toch een betrekkelijk zeer speciaal geval is van het algemeener probleem, waarin het vervat is.

Immers dezelfde behoefte, die tot de kennis van het gemiddelde uit een rij speciaalwaarden $x_1, x_2, \dots, x_n$ der variabele x drijft, sleept steeds deze vraag mede: Welke plaats nemen dan die speciaalwaarden ten aanzien van dat gemiddelde in? Men behoeft in het geheel niet aan een fout of afwijking te denken; reeds het feit dat uit die speciaalwaarden, hetzij zij eindig of oneindig in aantal zijn, een gemiddelde is opgebouwd, ontlokt de vraag, hierboven gesteld.

Zonder twijfel kan dit probleem als het zoeken naar de foutenwet, die bij de gegeven

¹⁾ Vergel. hiermede: P. I. HELWIG. Die combinatorisch-aesthetische Function und die Formeln der symbolischen Logik. Archiv für systemat. Philosophie Band IV. Heft 4.

soort van gemiddelde hoort, behandeld worden en zullen wij het ook aldus aanvatten; maar dit is meer een hulpmiddel dan essentieel voor de vraag. Al blijft ook de mathematische behandeling volmaakt onveranderd, wenschelijk is het om voor oogen te houden, dat deze kwestie door hare algemeenere beteekenis ook algemeenere waarde heeft.

Overgaande tot het bewijs der stelling, denken wij ons, dat elke speciaalwaarde een bepaalde kans heeft om als gemiddelde te worden beschouwd; dan zal voor het gemiddelde zelf als speciaalwaarde beschouwd, die kans natuurlijk maximaal zijn. Elke speciaalwaarde x_i wijkt echter voor een bedrag $\xi_i = x_m - x_i$ van het gemiddelde af en de bedoelde kans staat derhalve gelijk met de kans om een afwijking ξ_i te maken of te vinden. Beschouwen wij in navolging van GAUSS deze kans als functie der afwijking, dan zal dus als $\vartheta(\xi) = \vartheta(x_m - x)$ die functie is, ook aan de bekende Gauss'sche conditie

$$\frac{\vartheta'(x_m - x_1)}{\vartheta(x_m - x_1)} + \frac{\vartheta'(x_m - x_2)}{\vartheta(x_m - x_2)} + \dots + \frac{\vartheta'(x_m - x_n)}{\vartheta(x_m - x_n)} = 0 \quad (1)$$

zoodanig moeten voldaan worden, dat x_m daarin het gemiddelde van x van de soort $\mathcal{F}(x)$ voorstelt en dus tegelijkertijd

$$\mathcal{F}(x_m) - \mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_m) - \mathcal{F}(x_2) + \dots + \mathcal{F}(x_m) - \mathcal{F}(x_n) = 0 \text{ is.} \quad (2)$$

De afleiding van betrekking (1), hoewel soms niet onberispelijk, is in elk leerboek over foutenrekening te vinden en kunnen wij hier bekend veronderstellen.

Gevraagd wordt nu om door middel van (1) en (2) de $\vartheta(\xi)$ te bepalen.

Stellen wij $\frac{\vartheta'(x_m - x)}{\vartheta(x_m - x)} = f(x_m - x)$ dan moeten wij bij de verdere bewerking x_m als constante beschouwen, wat op gronden bij de behandeling der grensfunctie aangegeven, geoorloofd is.

Differentieeren wij nu (1) en (2) dan is

$$f'(x_m - x_1) dx_1 + f'(x_m - x_2) dx_2 + \dots + f'(x_m - x_n) dx_n = 0 \quad \text{en}$$

$$\mathcal{F}'(x_1) dx_1 + \mathcal{F}'(x_2) dx_2 + \dots + \mathcal{F}'(x_n) dx_n = 0.$$

Daar de x_1, x_2 enz. onafhankelijk zijn, kan hieraan niet anders voldaan worden dan als

$$f'(x_m - x) = k_1 \mathcal{F}'(x)$$

waarin k_1 constante is. Wij vatten dan tevens x als continu variabel op. Integreerend is

$$f(x_m - x) = \frac{d}{dx} l \vartheta(x_m - x) = k_1 \mathcal{F}(x) + k_2.$$

Nu kan de constante k_2 uit (2) met behulp van (1) bepaald worden en is $k_2 = -k_1 \mathcal{F}(x_m)$ zoodat als wij weer integreeren gevonden wordt:

$$\vartheta(x_m - x) = e^{k_1 \int_a^x \mathcal{F}(x) dx - k_1 x \mathcal{F}(x_m)}$$

als wij de integratie-constante in den ondergrens der bepaalde integraal opnemen.

Nu is de *grensfunctie* van x van de soort $\mathcal{F}(x)$ volgens § 6

$$\psi(x) = x \mathcal{F} \underset{x_1}{\overset{x_2}{M}} x - (x - a) \mathcal{F} \underset{a}{M} x = x \mathcal{F}(x_m) - \int_a^x \mathcal{F}(x) dx$$

zoodat wij na substitutie vinden:

$$\vartheta(\xi) = \vartheta(x_m - x) = e^{k \psi(x)} = e^{k \psi(x_m - \xi)}$$

als wij $-k_1 = k$ stellen, waarmede de stelling bewezen is.

Daar reeds in $\psi(x)$ de willekeurige constante a zit, heeft de foutenwet dus in het algemeen 2 constanten. De kennis der grensfunctie voert dus onmiddellijk tot die der foutenwet.

Het is nu, evenals bij de Gauss'sche foutenwet, ook evenzoo in te zien, dat de kans op een afwijking, die inligt tusschen 0 en ξ wordt voorgesteld door

$$\Phi(\xi) = \int_0^\xi e^{k \psi(x_m - \xi)} d\xi$$

waarin men de constante a ook voor het integraalteeken kan plaatsen.

Hiermede eindigen wij onze algemeene beschouwingen over gemiddelden om ons in het tweede deel te wijden aan de speciale behandeling van de integraal der foutenwet behorende bij het meetkundig gemiddelde.

TWEEDE AFDEELING.

OVER DE INTEGRAAL DER FOUTENWET VAN HET MEETKUNDIG GEMIDDELDE EN HARE VERWANTEN.

EERSTE HOOFDSTUK.

§ 11. Wij vonden in § 6 voor de grensfunctie van x van de soort lx de uitdrukking

$$\psi(x) = l \left(\frac{ex_m}{x} \right)^x + l \left(\frac{a}{e} \right)^a.$$

Daardoor neemt de foutenwet in dit geval volgens § 10 deze gedaante aan:

$$\vartheta(\xi) = \left(\frac{a}{e} \right)^a \left(\frac{ex_m}{x_m - \xi} \right)^{-k_1(x_m - \xi)}$$

of als wij $\left(\frac{a}{e} \right)^a = k_2$ stellen

$$\vartheta(\xi) = k_2 \left(\frac{x_m - \xi}{ex_m} \right)^{k_1(x_m - \xi)} \dots \dots \dots (1)$$

Wij stellen ons voor om deze foutenwet met de Gauss'sche foutenwet te vergelijken en ontwikkelen daartoe (1) volgens de reeks van MACLAURIN naar opklimmende machten van ξ , zoodat

$$\vartheta(\xi) = \vartheta(0) + \xi \vartheta'(0) + \frac{\xi^2}{1.2} \vartheta''(0) + \frac{\xi^3}{1.2.3} \vartheta'''(0) + \text{enz.}$$

en vinden achtereenvolgens door differentiatie en door daarna $\xi = 0$ te stellen

$$\vartheta(0) = k_2 e^{-k_1 x_m}$$

$$\vartheta^I(0) = 0$$

$$\vartheta^{II}(0) = \frac{k_1}{x_m} \vartheta(0)$$

$$\vartheta^{III}(0) = \frac{k_1}{x_m^2} \vartheta(0)$$

$$\vartheta^{IV}(0) = \left(\frac{3k_1^2}{x_m^2} + \frac{2k_1}{x_m^3} \right) \vartheta(0)$$

enz.

Derhalve is

$$\vartheta(\xi) = k_2 e^{-k_1 x_m} \left\{ 1 + \frac{k_1}{2x_m} \xi^2 + \frac{k_1}{3! x_m^2} \xi^3 + \frac{3k_1^2 x_m + 2k_1}{4! x_m^3} \xi^4 + \dots \right\}$$

Hierin is ξ de afwijking of fout, die bij elke foutenrekening een kleine grootheid is, zoodat bijv. derde en hogere machten van ξ buiten beschouwing kunnen blijven, daar anders de waarnemingen te onnauwkeurig zijn. Voert men echter deze verwaarloozing in, dan laat zich

$$\vartheta(\xi) = k_2 e^{-k_1 x_m} \left(1 + \frac{k_1}{2x_m} \xi^2 \right) = k_2 e^{\frac{k_1}{2x_m} \xi^2 - k_1 x_m}$$

schrijven en blijkt dus deze foutenwet de gedaante der Gauss'sche foutenwet aan te nemen.

Waar het nu oppervlakkig beschouwd wenschelijk scheen om de geheele foutenrekening volgens deze foutenwet om te rekenen, bevrijdt ons deze opmerking van een taak, die anders aanzienlijke moeilijkheden zou opleveren. Wenscht men wel hogere machten dan ξ^2 in rekening te brengen, dan kan deze opmerking wel geen dienst meer doen, maar verliest de foutenrekening ook haar rationeelen zin.

§ 12. Zoo ongewenscht al $\vartheta(\xi)$ als uitgangspunt eener nieuwe foutenrekening is, zoo eigenaardig zijn daartegenover de eigenschappen die

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{ex_m}{x_m - \xi} \right)^{k(x_m - \xi)} d\xi$$

heeft, wanneer men haar uit een zuiver mathematisch oogpunt gaat beschouwen.

Stellen wij $x_m - \xi = x$ $x_m - \xi_1 = x_1$ $x_m - \xi_2 = x_2$ $ex_m = c$ en geven wij de waarde die de integraal heeft tusschen de grenzen x_1 en x_2 symbolisch weer door $-\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(c, k, 0)$, waarin de nul later begrijpelijk zal worden, dan is

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(c, k, 0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{c}{x} \right)^{kx} dx.$$

Voor alle eindige bepaalde waarden van x is $\left(\frac{c}{x}\right)^{kx}$ eindig als c en k ook eindig zijn en bovendien c niet nul bij negatieven exponent, welk geval ($c = 0$) uit den aard der zaak niet voorkomt, dan is ook bij $x = 0$ $\left\{\left(\frac{c}{x}\right)^{kx}\right\}_{x=0} = 1$. Want gelijk men weet is $(x^x)_{x=0} = 1$. Wij kunnen dus veilig zonder nader onderzoek deze vervorming toepassen:

$$\bar{V}_{x_1}^{x_2}(c, k, 0) = \int_0^{x_2} \left(\frac{c}{x}\right)^{kx} dx - \int_0^{x_1} \left(\frac{c}{x}\right)^{kx} dx = \bar{V}_0^{x_2}(c, k, 0) - \bar{V}_0^{x_1}(c, k, 0).$$

Stellen wij $x = x_2 v$ in de eerste en $x = x_1 v$ in de tweede dezer integralen, dan is

$$\bar{V}_{x_1}^{x_2}(c, k, 0) = x_2 \int_0^1 \left(\frac{c}{x_2 v}\right)^{kx_2 v} dv - x_1 \int_0^1 \left(\frac{c}{x_1 v}\right)^{kx_1 v} dv = x_2 \bar{V}_0^1\left(\frac{c}{x_2}, kx_2, 0\right) - x_1 \bar{V}_0^1\left(\frac{c}{x_1}, kx_1, 0\right).$$

Hieruit blijkt, dat elke $\bar{V}_{x_1}^{x_2}(c, k, 0)$ zich steeds laat reduceeren tot een verschil, waarin steeds integralen van den vorm $\bar{V}_0^1(a, b, 0)$ optreden. Wij laten nu in het symbool $\bar{V}_0^1(a, b, 0)$ in het vervolg de grenzen weg en houden ons verder bezig met

$$V(a, b, 0) = \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx$$

Wij gaan deze integraal bepalen door middel van reeksontwikkeling na vooraf $x = e^{-t}$ te hebben gesteld. Dan is $dx = -e^{-t} dt$ en

$$\begin{aligned} V(a, b, 0) &= \int_0^\infty a^{be^{-t}} e^{tbe^{-t}} e^{-t} dt = \int_0^\infty a^{be^{-t}} e^{-t} \left[1 + bte^{-t} + \frac{b^2}{2!} t^2 e^{-2t} + \frac{b^3}{3!} t^3 e^{-3t} + \dots\right] dt = \\ &= \int_0^1 e^{b lae^{-t}} \left[e^{-t} + bte^{-2t} + \frac{b^2}{2!} t^2 e^{-3t} + \frac{b^3}{3!} t^3 e^{-4t} + \frac{b^4}{4!} t^4 e^{-5t} + \dots\right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[1 + b lae^{-t} + \frac{b^2 (la)^2}{2!} e^{-2t} + \frac{b^3 (la)^3}{3!} e^{-3t} + \dots\right] \left[e^{-t} + bte^{-2t} + \frac{b^2}{2!} t^2 e^{-3t} + \frac{b^3}{3!} t^3 e^{-4t} + \dots\right] dt. \end{aligned}$$

Voeren wij de vermenigvuldiging dezer twee absoluut convergeerende reeksen uit, dan ontstaan er voortdurend gamma-functies van de gedaante

$$\frac{\Gamma(n)}{p^n} = \int_0^\infty e^{-py} y^{n-1} dy$$

zoodat wij vinden:

$$\begin{aligned}
V(a, b, 0) &= \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx = \left(\Gamma(1) + b \frac{\Gamma(2)}{2^2} + \frac{b^2}{2!} \frac{\Gamma(3)}{3^3} + \frac{b^3}{3!} \frac{\Gamma(4)}{4^4} + \frac{b^4}{4!} \frac{\Gamma(5)}{5^5} + \dots \right) + \\
&+ bla \left(\frac{\Gamma(1)}{2} + b \frac{\Gamma(2)}{3^2} + \frac{b^2}{2!} \frac{\Gamma(3)}{4^3} + \frac{b^3}{3!} \frac{\Gamma(4)}{5^4} + \frac{b^4}{4!} \frac{\Gamma(5)}{6^5} + \dots \right) + \\
&+ \frac{b^2 (la)^2}{2!} \left(\frac{\Gamma(1)}{3} + b \frac{\Gamma(2)}{4^2} + \frac{b^2}{2!} \frac{\Gamma(3)}{5^3} + \frac{b^3}{3!} \frac{\Gamma(4)}{6^4} + \frac{b^4}{4!} \frac{\Gamma(5)}{7^5} + \dots \right) + \\
&+ \frac{b^3 (la)^3}{3!} \left(\frac{\Gamma(1)}{4} + b \frac{\Gamma(2)}{5^2} + \frac{b^2}{2!} \frac{\Gamma(3)}{6^3} + \frac{b^3}{3!} \frac{\Gamma(4)}{7^4} + \frac{b^4}{4!} \frac{\Gamma(5)}{8^5} + \dots \right) + \text{enz.};
\end{aligned}$$

de regel is duidelijk.

Door $\Gamma(n) = (n-1)!$ in te voeren vinden wij ten slotte:

$$\begin{aligned}
V(a, b, 0) &= \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx = \left(1 + \frac{b}{2^2} + \frac{b^2}{3^3} + \frac{b^3}{4^4} + \frac{b^4}{5^5} + \dots \right) + \\
&+ la \left(\frac{b}{2} + \frac{b^2}{3^2} + \frac{b^3}{4^3} + \frac{b^4}{5^4} + \dots \right) + \frac{(la)^2}{2!} \left(\frac{b^2}{3} + \frac{b^3}{4^2} + \frac{b^4}{5^3} + \frac{b^5}{6^4} + \dots \right) + \dots \text{enz.}
\end{aligned}$$

en ontmoeten hier een dubbel oneindige reeks van zeer bijzondere gedaante en uitgesproken regelmaat.

De convergentie dezer dubbelreeks is gemakkelijk te bewijzen. Stellen wij daartoe

$$x_n(b) = \frac{b^n}{n+1} + \frac{b^{n+1}}{(n+2)^2} + \frac{b^{n+2}}{(n+3)^3} + \frac{b^{n+3}}{(n+4)^4} + \dots$$

waarin $n \geq 0$ is, dan wordt

$$V(a, b, 0) = x_0(b) + la x_1(b) + \frac{(la)^2}{1 \cdot 2} x_2(b) + \frac{(la)^3}{3!} x_3(b) + \dots$$

en kunnen wij beginnen met de convergentie der reeks $x_n(b)$. De p^{de} term u_p van $x_n(b)$ is

$$\begin{aligned}
\frac{b^{n+p}}{(n+p)^p} \text{ dus } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{u_{p+1}}{u_p} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b(n+p)^p}{(n+p+1)^{p+1}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b \left(1 + \frac{n}{p}\right)^p}{(n+p+1) \left(1 + \frac{n}{p} + \frac{1}{p}\right)^p} = \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{be^n}{(n+p+1)e^n} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b}{n+p+1} = 0 \text{ voor elke eindige, bepaalde } b.
\end{aligned}$$

Alle x -reeksen zijn dus convergent, en het is zelfs gemakkelijk om een waarde te bepalen, die stellig grooter is dan $x_n(b)$. Daar n steeds positief wordt gedacht, is

$$x_n(b) < b^{n-1} \left(\frac{b}{n+1} + \frac{b^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{b^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{b^4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots \right)$$

dus *a fortiori* is

$$x_n(b) < b^{n-1} \left(b + \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right)$$

Derhalve is

$$x_n(b) < b^{n-1} (e^b - 1).$$

Deze waardegrens bewijst nu tevens de convergentie der reeks $V(a, b, 0)$, want nu is

$$V(a, b, 0) < \frac{1}{b} (e^b - 1) + la(e^b - 1) + \frac{(la)^2}{1 \cdot 2} (be^b - b) + \frac{(la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (b^2 e^b - b^2) + \dots$$

of e^{bla} invoerend, die convergent als a niet nul en a en b eindig zijn, vinden wij

$$V(a, b, 0) < \frac{a^b}{b} (e^b - 1)$$

waarmede de convergentie van $V(a, b, 0)$ verzekerd is voor elke a , die niet nul is en elke a en b die eindig zijn. Ook als a en b complexe getallen zijn, levert $V(a, b, 0)$ convergeerende reeksen op.

§ 13. Wij beginnen nu met eenige eigenschappen der $x_n(b)$ functies. Wij stelden

$$x_n(b) = \frac{b^n}{n+1} + \frac{b^{n+1}}{(n+2)^2} + \frac{b^{n+2}}{(n+3)^3} + \frac{b^{n+3}}{(n+4)^4} + \dots$$

Wij vermenigvuldigen deze reeks met b en differentieeren naar b wat geoorloofd is.

Dan is

$$\frac{d}{db} b x_n(b) = b^n + \frac{b^{n+1}}{n+2} + \frac{b^{n+2}}{(n+3)^2} + \frac{b^{n+3}}{(n+4)^3} + \dots = b^n + x_{n+1}(b)$$

of uitgeschreven

$$b x'_n(b) = b^n + x_{n+1}(b) - x_n(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Deze eigenschap zal ons in 't vervolg herhaaldelijk van dienst zijn; wij vergenoegen er ons echter niet mede, maar vervuldigen weer met b en differentieeren dan naar b . Dan is

$$\frac{d}{db} b \frac{d}{db} b x_n(b) = (n+1)b^n + \frac{d}{db} b x_{n+1}(b) = (n+1)b^n + b^{n+1} + x_{n+2}(b).$$

Stellen wij nu de bewerking $b \frac{d}{db}$ symbolisch door bD voor, dan staat er dus in 1)

$$[bD] b x_n(b) = b^{n+1} + b x_{n+1}(b)$$

en in de volgende formule

$$[bD]^2 b x_n(b) = (n+1)b^{n+1} + b^{n+2} + b x_{n+2}(b).$$

Zoo is ook

$$[bD]^3 b x_n(b) = (n+1)^2 b^{n+1} + (n+2)b^{n+2} + b^{n+3} + b x_{n+3}(b),$$

zoodat in het algemeen

$$[bD]^p b x_n(b) = (n+1)^{p-1} b^{n+1} + (n+2)^{p-2} b^{n+2} + \dots + \\ + (n+p-2)^2 b^{n+p-2} + (n+p-1) b^{n+p-1} + b^{n+p} + b x_{n+p}(b) \dots \dots \dots (2)$$

In deze formule leeren wij dus $x_{n+p}(b)$ uitdrukken in de $x_n(b)$ en p afgeleiden.

Zoo is ook

$$[bD]^n b x_p(b) = (p+1)^{n-1} b^{p+1} + (p+2)^{n-2} b^{p+2} + \dots + \\ + (n+p-2)^2 b^{n+p-2} + (n+p-1) b^{n+p-1} + b^{n+p} + b x_{n+p}(b).$$

Wij kunnen uit deze en de vorige formule $x_{n+p}(b)$ en de gemeenschappelijke termen elimineeren en houden dan een betrekking over tusschen de 0^{de} tot p^{de} afgeleide van $x_n(b)$ en de 0^{de} tot n^{de} afgeleide van $x_p(b)$. Alleen in het geval dat $p=0$ is, levert de eliminatie niets nieuws. Toch is dit geval belangrijk en wij zullen het daarom wat meer van naderbij bezien. Voor $p=0$ vinden wij

$$[bD]^n b x_0(b) = b + 2^{n-2} b^2 + 3^{n-3} b^3 + \dots + (n-2)^2 b^{n-2} + (n-1) b^{n-1} + b^n + b x_n(b) \dots (3)$$

Hierdoor wordt dus $x_n(b)$ uitgedrukt in $x_0(b)$ en n achtereenvolgende afgeleiden ervan. Dit is van groot voordeel bij de berekening, want

$$x_0(b) = 1 + \frac{b}{2^2} + \frac{b^2}{3^3} + \frac{b^3}{4^4} + \frac{b^4}{5^5} + \frac{b^5}{6^6} + \dots$$

en alle afgeleiden leveren termen op, waarin de breuken $\frac{1}{n^n}$ steeds met geheele getallen worden vermenigvuldigd. Deze breuken $\frac{1}{n^n}$ kunnen eens voorgoed berekend worden en onnoodig is het dan om zich te begeven in tabellen van $\frac{1}{n^p}$, wat eerst wenschelijk scheen.

Ik heb daarom de waarde van $\frac{1}{n^n}$ voor eenige geheele waarden van n tot in 10 decimalen nauwkeurig uitgerekend: Ter controle laat ik n^n voorafgaan:

$$1^1 = 1 \quad ; \quad 2^2 = 4 \quad ; \quad 3^3 = 27 \quad ; \quad 4^4 = 256 \quad ; \quad 5^5 = 3125 \quad ; \\ 6^6 = 46656 \quad ; \quad 7^7 = 823543 \quad ; \quad 8^8 = 16777216 \quad ; \quad 9^9 = 387420489 \quad ; \quad 10^{10} = 10000000000.$$

$$\frac{1}{1^1} = 1$$

$$\frac{1}{6^6} = 0,0000214335 \dots$$

$$\frac{1}{2^2} = 0,25$$

$$\frac{1}{7^7} = 0,0000012143 \dots$$

$$\frac{1}{3^3} = 0,0370370370 \dots$$

$$\frac{1}{8^8} = 0,0000000597 \dots$$

$$\frac{1}{4^4} = 0,00390625$$

$$\frac{1}{9^9} = 0,0000000026 \dots$$

$$\frac{1}{5^5} = 0,00032$$

$$\frac{1}{10^{10}} = 0,0000000001$$

De stip op een einddecimaal wijst aan, dat het cijfer met 1 verhoogd is, omdat het volgende hooger dan 4 was.

Wij zien nu ook door optelling, dat $x_0(1) = 1,291284977$.

§ 14. Was door middel van de formule

$$[bD]^n b x_0(b) = b + 2^{n-2} b^2 + 3^{n-3} b^3 + \dots + (n-2)^2 b^{n-2} + (n-1) b^{n-1} + b^n + b x_n(b) = \varphi(n)$$

waarvan wij het tweede lid ter bekorting $\varphi(n)$ stellen, de mogelijkheid gegeven om $x_n(b)$ lineair uit te drukken in $x_0(b)$ en haar afgeleiden; omgekeerd verschaft ons deze betrekking het middel om $x_0^{(n)}(b)$ lineair uit te drukken in $x_0(b)$, $x_1(b)$, $\dots$ tot $x_n(b)$. Wij hebben immers de volgende $n+1$ lineaire vergelijkingen:

$$[bD]^n b x_0(b) = b + 2^{n-2} b^2 + 3^{n-3} b^3 + \dots + (n-2)^2 b^{n-2} + (n-1) b^{n-1} + b^n + b x_n(b) = \varphi(n)$$

$$[bD]^{n-1} b x_0(b) = b + 2^{n-3} b^2 + 3^{n-4} b^3 + \dots + (n-2) b^{n-2} + b^{n-1} + b x_{n-1}(b) = \varphi(n-1)$$

$$[bD]^3 b x_0(b) = b + 2b^2 + b^3 + b x_3(b) = \varphi(3)$$

$$[bD]^2 b x_0(b) = b + b^2 + b x_2(b) = \varphi(2)$$

$$[bD] b x_0(b) = b + b x_1(b) = \varphi(1)$$

$$[bD]^0 b x_0(b) = b x_0(b) = \varphi(0)$$

Wenschen wij nu hieruit $x_0(b)$, $x'_0(b)$, $x''_0(b)$, $\dots$ $x_0^{(n)}(b)$ op te lossen, dan is het noodzakelijk om de leden links van het gelijktteken nader uit te werken. Het beste is om inductief te werk te gaan en te beginnen met de eenvoudigsten. Wij vinden dan

$$[bD] b x_0(b) = b^2 x'_0(b) + b x_0(b)$$

$$[bD]^2 b x_0(b) = b^3 x''_0(b) + 3b^2 x'_0(b) + b x_0(b)$$

$$[bD]^3 b x_0(b) = b^4 x'''_0(b) + 6b^3 x''_0(b) + 7b^2 x'_0(b) + b x_0(b)$$

$$[bD]^4 b x_0(b) = b^5 x^{IV}_0(b) + 10b^4 x'''_0(b) + 25b^3 x''_0(b) + 15b^2 x'_0(b) + b x_0(b)$$

$$[bD]^5 b x_0(b) = b^6 x^{V}_0(b) + 15b^5 x^{IV}_0(b) + 65b^4 x'''_0(b) + 90b^3 x''_0(b) + 31b^2 x'_0(b) + b x_0(b) \text{ enz.}$$

In het algemeene geval $[bD]^n b x_0(b)$ hebben wij derhalve een n -term te verwachten van dezen vorm:

$$[bD]^n b x_0(b) = b^{n+1} x_0^{(n)}(b) + (2, n) b^n x_0^{(n-1)}(b) + (3, n) b^{n-1} x_0^{(n-2)}(b) + \dots + (n-1, n) b^3 x_0''(b) + (n, n) b^2 x_0'(b) + b x_0(b)$$

waarin wij de coëfficiënten door $(p, n) =$ de p^{de} coëfficiënt van de n^{de} differentiatie $[bD]$, weergeven.

Deze coëfficiënten blijken nu op de volgende wijze samen te hangen, die zeer regelmatig wordt indien wij door $(1, n)$ *niet* de coëfficiënt van den eersten term, die toch steeds de eenheid is, voorstellen, maar $(1, n) = n$ of gelijk aan het ordegetal n der differentiatie $[bD]^n$, stellen. Hierdoor wordt:

$$\begin{aligned}(1, n) &= n \\ (2, n) &= n + (2, n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) \\ (3, n) &= (n-1)(2, n-1) + (3, n-1) \\ (4, n) &= (n-2)(3, n-1) + (4, n-1) \dots \dots \dots (1) \\ (5, n) &= (n-3)(4, n-1) + (5, n-1) \text{ enz.}\end{aligned}$$

en algemeen

$$(p, n) = (n-p+2)(p-1, n-1) + (p, n-1) \quad 2 < p \leq n+1$$

Bovendien zijn de betrekkingen $(n+1, n) = 1$ en $(n, n) = 2(n-1, n-1) + 1$ van gemak.

Construeeren wij nu met behulp hiervan en analoog met den driehoek van Pascal bij de binomiaalcoëfficiënten de coëfficiënten dan zijn zij aldus te plaatsen:

$(1, n)$	$(2, n)$								
1	1								
2	3	1							
3	6	7	1						
4	10	25	15	1					
5	15	65	90	31	1				
6	21	140	350	301	63	1			
7	28	266	1050	1701	966	127	1		
8	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1	

Wij kunnen dus alle coëfficiënten bepalen en kunnen ze dus algemeen bekend achten.

Wij krijgen dan de $bx_0(b)$, $b^2x'_0(b)$, $\dots$, $b^{n+1}x_0^{(n)}(b)$ op te lossen uit deze $n+1$ vergelijkingen:

$$b^{n+1}x_0^{(n)}(b) + (2, n)b^nx_0^{(n-1)}(b) + (3, n)b^{n-1}x_0^{(n-2)}(b) + \dots + (n-1, n)b^3x_0''(b) + (n, n)b^2x'_0(b) + bx_0(b) = \varphi(n)$$

$$b^nx_0^{(n-1)}(b) + (2, n-1)b^{n-1}x_0^{(n-2)}(b) + \dots +$$

$$+ (n-2, n-1)b^3x_0''(b) + (n-1, n-1)b^2x'_0(b) + bx_0(b) = \varphi(n-1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b^3x_0''(b) + (2, 2)b^2x'_0(b) + bx_0(b) = \varphi(2)$$

$$b^2x'_0(b) + bx_0(b) = \varphi(1)$$

$$bx_0(b) = \varphi(0)$$

Waarin

$$\varphi(n) = bx_n(b) + b^n + (n-1)b^{n-1} + (n-2)^2b^{n-2} + \dots + 3^{n-3}b^3 + 2^{n-2}b^2 + b.$$

De oplossing geschiedt natuurlijk het regelmatigst door middel van determinanten en elke $b^{p+1}x_0^{(p)}(b)$ wordt dan gelijk aan het quotient van twee determinanten. De determinant in den noemer is voor alle $b^{p+1}x_0^{(p)}(b)$ dezelfde en gelijk aan:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & (2, n) & (3, n) & \dots & (n-1, n) & (n, n) & 1 \\ 0 & 1 & (2, n-1) & (n-2, n-1) & (n-1, n-1) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (n-3, n-2) & (n-2, n-2) & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (2, 2) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \dots 2)$$

want haar waarde is gelijk aan het product der diagonaaltermen. Wij vinden dus

$$bx_0(b) = \varphi(0); \quad b^2x_0'(b) = \begin{vmatrix} \varphi(1) & 1 \\ \varphi(0) & 1 \end{vmatrix}; \quad b^3x_0''(b) = \begin{vmatrix} \varphi(2) & (2, 2) & 1 \\ \varphi(1) & 1 & 1 \\ \varphi(0) & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad b^4x_0'''(b) = \begin{vmatrix} \varphi(3) & (2, 3) & (3, 3) & 1 \\ \varphi(2) & 1 & (2, 2) & 1 \\ \varphi(1) & 0 & 0 & 1 \\ \varphi(0) & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

en algemeen

$$b^{n+1}x_0^{(n)}(b) = \begin{vmatrix} \varphi(n) & (2, n) & (3, n) & \dots & (n-1, n) & (n, n) & 1 \\ \varphi(n-1) & 1 & (2, n-1) & (n-2, n-1) & (n-1, n-1) & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(2) & 0 & 0 & 1 & (2, 2) & 1 & 1 \\ \varphi(1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Terloops zij nog opgemerkt dat de coëfficiënten (p, n) verscheidene eigenaardige eigenschappen hebben, die door middel der recurrente betrekkingen 1) en den determinant 2) afleidbaar zijn. Zoo is $(1, 1) + (2, 2) + (3, 3) + \dots + (n-1, n-1) + (n, n) = 2(n, n) - n$; wij laten dit echter rusten.

§ 15. De herleidingen in de vorige § volbracht, krijgen nog een geheel andere betekenis indien wij teruggaan tot de oorspronkelijke reeks

$$V(a, b, 0) = \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx = x_0(b) + lax_1(b) + \frac{(la)^2}{2!} x_2(b) + \dots + \frac{(la)^n}{n!} x_n(b) + \dots \quad (1)$$

en welke functie derhalve de eigenaardigheid heeft, dat $\psi(n, b)$ de *coefficient* is van $\frac{t^n}{n!}$ in de ontwikkeling van $f(t, b)$ volgens opklimmende machten van t .

De bepaling van $f(t, b)$ eischt de kennis van een functioneel verband, waaraan $\psi(n, b)$ voldoet en dit wordt gemakkelijk op de volgende wijze gevonden.

Wij differentieeren $\psi(n, b)$ partieel naar b en vermenigvuldigen met b . Dan is

$$b \frac{\partial \psi(n, b)}{\partial b} = nb^n + (n-1)^2 b^{n-1} + (n-2)^3 b^{n-2} + \dots + 3^{n-2} b^3 + 2^{n-1} b^2 + b.$$

Nu is

$$\psi(n+1, b) = b^{n+1} + nb^n + (n-1)^2 b^{n-1} + (n-2)^3 b^{n-2} + \dots + 3^{n-2} b^3 + 2^{n-1} b^2 + b.$$

Derhalve is

$$b \frac{\partial \psi(n, b)}{\partial b} - \psi(n+1, b) + b^{n+1} = 0 \quad n = 0 \text{ of positief geheel} \quad (2)$$

Met behulp van deze betrekking is $f(t, b)$ bepaalbaar. Immers

$$\begin{aligned} b \frac{\partial f(t, b)}{\partial b} &= b \frac{\partial \psi(0, b)}{\partial b} + b \frac{\partial \psi(1, b)}{\partial b} t + b \frac{\partial \psi(2, b)}{\partial b} \frac{t^2}{2!} + \dots + b \frac{\partial \psi(n, b)}{\partial b} \frac{t^n}{n!} + \dots \\ - \frac{\partial f(t, b)}{\partial t} &= -\psi(1, b) - \psi(2, b)t - \psi(3, b) \frac{t^2}{2!} - \dots - \psi(n+1, b) \frac{t^n}{n!} - \dots \\ be^{bt} &= b + b^2 t + b^3 \frac{t^2}{2!} + \dots + b^{n+1} \frac{t^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Tellen wij deze drie vergelijkingen op, dan worden alle coëfficiënten van t^p nul en vinden wij ter bepaling van $f(t, b)$

$$b \frac{\partial f(t, b)}{\partial b} - \frac{\partial f(t, b)}{\partial t} + be^{bt} = 0 \quad (3)$$

Deze lineaire partieele differentiaalvergelijking wordt opgelost door het stel simultane differentiaalvergelijkingen

$$\frac{db}{b} = \frac{dt}{-1} = \frac{df}{-be^{bt}}.$$

Daaruit volgt $c_1 = t + lb$, waarvoor wij liever de gelijkwaardige $c_3 = e^{c_1} = be^t$ schrijven,

en $-df = e^{bt} db$ of daar $e^t = \frac{c_3}{b}$ $-df = c_3 \left(\frac{1}{b}\right)^b db.$

Dus

$$c_2 - f = \int c_3 \left(\frac{1}{b}\right)^b db \quad (4)$$

Nu is $c_3 = \chi(c_2)$, als χ een willekeurige functie voorstelt, de oplossing van 3); maar

Hieruit volgt echter dat

$$b \frac{\partial \varphi(n, b)}{\partial b} = b + 2^{n-1}b^2 + 3^{n-2}b^3 + \dots + (n-1)^2b^{n-1} + nb^n + b^{n+1} + \\ + \frac{b^{n+2}}{n+2} + \frac{b^{n+3}}{(n+3)^2} + \dots = \varphi(n+1, b).$$

Derhalve is

$$b \frac{\partial \varphi(n, b)}{\partial b} - \varphi(n+1, b) = 0$$

het functioneel verband, dat ons weer tot de bepaling van $\vartheta(t, b)$ dienen kan. Immers

$$b \frac{\partial \vartheta(t, b)}{\partial b} = b \frac{\partial \varphi(0, b)}{\partial b} + b \frac{\partial \varphi(1, b)}{\partial b} t + b \frac{\partial \varphi(2, b)}{\partial b} \frac{t^2}{2!} + \dots + b \frac{\partial \varphi(n, b)}{\partial b} \frac{t^n}{n!} + \dots$$

en

$$- \frac{\partial \vartheta(t, b)}{\partial t} = -\varphi(1, b) - \varphi(2, b)t - \varphi(3, b) \frac{t^2}{2!} + \dots - \varphi(n+1, b) \frac{t^n}{n!} \dots$$

Tellen wij beide betrekkingen op, dan volgt eruit, dat

$$b \frac{\partial \vartheta(t, b)}{\partial b} - \frac{\partial \vartheta(t, b)}{\partial t} = 0.$$

Daaruit volgt weer

$$\frac{db}{b} = \frac{dt}{-1} = \frac{d\vartheta}{0}.$$

Derhalve $\vartheta = c_1$ $t + lb = c_2$, waarvoor wij liever schrijven $c_3 = e^{c_2} = be^t$.

De oplossing der lineaire partieele differentiaalvergelijking is dus als χ een willekeurige functie is

$$\vartheta(t, b) = \chi(be^t).$$

Daaruit volgt, dat

$$\vartheta(0, b) = \chi(b).$$

Ter bepaling van de particuliere waarde, die χ in 8 heeft, lezen we aldaar, dat voor $t=0$

$$\vartheta(0, b) = \varphi(0, b).$$

In ons geval is dus

$$\chi(b) = \varphi(0, b)$$

of

$$\chi(be^t) = \varphi(0, be^t).$$

Uit § 14 is te zien, dat $\varphi(0, b) = \varphi(0) = bx_0(b)$ is.

Zoodat wij ten slotte vinden, dat

$$\vartheta(t, b) = be^t x_0(be^t) = be^t \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{be^t x} dx = be^t V(1, be^t, 0).$$

Eens in het bezit van de voortbrengende functie van $\varphi(n, b)$ volgt nu weer onmiddellijk dat

$$\varphi(n, b) = b \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^t V(1, be^t, 0) \right]_{t=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Om nu tot de volledige kennis van de voortbrengende functie van $\psi(n, b)$ te geraken, merken wij eerst op dat als wij in (4) van § 15 voor $a = e^t$ stellen, dan

$$V(e^t, b, n) = x_n(b) + x_{n+1}(b)t + x_{n+2}(b)\frac{t^2}{2!} + x_{n+3}(b)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

Derhalve is $V(e^t, b, n)$ de voortbrengende functie van $x_{n+p}(b)$ en $V(e, b, 0)$ de voortbrengende functie van $x_n(b)$. Zoodat

$$x_n(b) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} V(e^t, b, 0) \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^1 \left(\frac{e^t}{v} \right)^{bv} dv \right]_{t=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Daar nu $\psi(n, b) = \varphi(n, b) - bx^n(b)$ vinden wij derhalve ter bepaling van $\mathcal{F}(be^t)$ dat als wij door b deelen

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_1^{\frac{1}{b} \mathcal{F}(be^t)} \left(\frac{e^t}{y} \right)^{by} dy \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ e^t \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \right)^{bx} dx - \int_0^1 \left(\frac{e^t}{v} \right)^{bv} dv \right\} \right]_{t=0}$$

Stellen wij in de eerste integraal rechts $x = \frac{v}{e^t}$ dan is $dx = \frac{dv}{e^t}$ en vinden wij

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_1^{\frac{1}{b} \mathcal{F}(be^t)} \left(\frac{e^t}{y} \right)^{by} dy \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \int_0^{e^t} \left(\frac{e^t}{v} \right)^{bv} dv - \int_0^1 \left(\frac{e^t}{v} \right)^{bv} dv \right\} \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_1^{e^t} \left(\frac{e^t}{y} \right)^{by} dy \right]_{t=0}$$

Vergelijken wij het eerste en het laatste lid dan is dus in ons particulier geval $\frac{1}{b} \mathcal{F}(be^t) = e^t$. De voortbrengende functie van $\psi(n, b)$ is dus volledig

$$f(t, b) = b \int_1^{e^t} \left(\frac{e^t}{x} \right)^{bx} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

en

$$\psi(n, b) = b \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_1^{e^t} \left(\frac{e^t}{x} \right)^{bx} dx \right]_{t=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Men kan deze voortbrengende functies als sommen van functie-reeksen gaan behandelen en door t onderscheidene waarden te geven nog allerlei betrekkingen afleiden. Wij laten dit echter rusten en zullen alleen nog een enkel woord zeggen over de symbolische bewerking der gevonden uitdrukkingen.

Differentieeren wij $V(a, b, n)$ partieel naar b en vermenigvuldigen met b dan is

$$b \frac{\partial V(a, b, n)}{\partial b} = bx'_n(b) + labx'_{n+1}(b) + \frac{(la)^2}{2!} bx'_{n+2}(b) + \dots$$

Voeren wij hierin de bekende betrekking uit § 14

$$bx'_n(b) = b^n + x_{n+1}(b) - x_n(b)$$

dan is

$$b \frac{\partial V(a, b, n)}{\partial b} = b^n + x_{n+1}(b) - x_n(b) + la[b^{n+1} + x_{n+2}(b) - x_{n+1}(b)] + \\ + \frac{(la)^2}{2!} [b^{n+2} + x_{n+3}(b) - x_{n+2}(b)] + \dots = b^n a^b + V(a, b, n+1) - V(a, b, n)$$

Derhalve is

$$b \frac{\partial V(a, b, n)}{\partial b} = a^b b^n + V(a, b, n+1) - V(a, b, n). \quad 2)$$

Elimineeren wij uit 1) en 2) $V(a, b, n+1)$ dan is

$$b \frac{\partial V(a, b, n)}{\partial b} - a \frac{\partial V(a, b, n)}{\partial b} + V(a, b, n) = a^b b^n \quad 3).$$

Van deze lineaire partieele differentiaal vergelijking is $V(a, b, n)$ derhalve een partiële integraal.

Lossen wij deze vergelijking weer volgens de handelwijze in § 16 uiteengezet op dan is dus

$$\frac{db}{b} = \frac{da}{-a} = \frac{dV}{a^b b^n - V}.$$

Daaruit volgt vooreerst dat $ab = c_1$ is en ten tweede dat

$$\frac{adV - Vda}{a^2} = -a^{b-2} b^n da = -a^{\frac{c_1}{a}-2} \left(\frac{c_1}{a}\right)^n da$$

waaruit weer volgt dat

$$\frac{V}{a} = \int_a^{c_2} a^{\frac{c_1}{a}-2} \left(\frac{c_1}{a}\right)^n da = a^n b^n \int_a^{c_2} x^{\frac{ab}{x}-n-2} dx.$$

Derhalve is

$$V(a, b, n) = a^{n+1} b^n \int_a^{f(ab)} x^{\frac{ab}{x}-n-2} dx$$

de algemeene integraal van (3) waarin f een willekeurige functie is.

Stellen wij $\frac{a}{x} = y$, dan is $x = \frac{a}{y}$ en $dx = -\frac{a}{y^2} dy$ en wordt

$$V(a, b, n) = a^n b^n \int_{\frac{a}{f(ab)}}^1 \left(\frac{a}{y}\right)^{by-n} dy.$$

De particuliere waarde van $f(ab)$ in ons geval is dus $f(ab) = \infty$.

§ 18. Differentieeren wij de vergelijking $a \frac{\partial}{\partial a} V(a, b, n) = V(a, b, n+1)$ partieel naar a en vermenigvuldigen wij met a , dan is

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + a \frac{\partial}{\partial a}\right) V(a, b, n) = a \frac{\partial}{\partial a} V(a, b, n+1) = V(a, b, n+2).$$

Bewerken wij deze vergelijking weer met $a \frac{\partial}{\partial a}$, dan is

$$\left(a^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} + 3a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + a \frac{\partial}{\partial a}\right) V(a, b, n) = V(a, b, n+3).$$

Nog eens opereerend met $a \frac{\partial}{\partial a}$ vinden wij

$$\left(a^4 \frac{\partial^4}{\partial a^4} + 6a^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} + 7a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + a \frac{\partial}{\partial a}\right) V(a, b, n) = V(a, b, n+4)$$

enz.

Wij zien hier de coëfficiënten in § 14 besproken weer optreden en kunnen dus, als wij $a \frac{\partial}{\partial a}$ door aD_a voorstellen, algemeen schrijven

$$[aD_a]^p V(a, b, n) = V(a, b, n+p) = [a^p D_a^p + (2, p-1) a^{p-1} D_a^{p-1} + (3, p-1) a^{p-2} D_a^{p-2} + \dots + (p, p-1) a D_a] V(a, b, n).$$

Wij lezen hieruit, dat $V(a, b, n+p)$ uit te drukken is in p achtereenvolgende afgeleiden van $V(a, b, n)$ naar a .

Verwisselen wij p en n met elkaar, wat alleen geoorloofd is als n een geheel getal is, dan is

$$[aD_a]^n V(a, b, p) = [aD_a]^p V(a, b, n)$$

Stellen wij $p = 0$, dan is

$$[aD_a]^n V(a, b, 0) = V(a, b, n)$$

Elimineeren wij uit de volgende p vergelijkingen de eerste tot p^{de} afgeleide naar a van $V(a, b, n)$, dan volgt uit

[illegible]

dat de determinant die als noemer optreedt denzelfden vorm heeft als die in § 14 (2) en gelijk is aan de eenheid. Voorts is dus

$$a \frac{\partial}{\partial a} V(a, b, n) = V(a, b, n+1); \quad a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} V(a, b, n) = \begin{vmatrix} V(a, b, n+2), 1 \\ V(a, b, n+1), 1 \end{vmatrix}; \quad a^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} V(a, b, n) = \begin{vmatrix} V(a, b, n+3) & (2, 2) & 1 \\ V(a, b, n+2) & 1 & 1 \\ V(a, b, n+1) & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

enz. tot en met

$$a^p \frac{\partial^p}{\partial u^p} V(a, b, n) = \begin{vmatrix} V(a, b, n+p) & (2, p-1) \dots (p-2, p-1) & (p-1, p-1) & 1 \\ V(a, b, n+p-1) & 1 & \dots (p-3, p-2) & (p-2, p-2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V(a, b, n+3) & 0 & 1 & (2, 2) & 1 \\ V(a, b, n+2) & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V(a, b, n+1) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Hiermee is dus de p^{de} afgeleide naar a van $V(a, b, n)$ uitgedrukt in functie van $V(a, b, n + 1)$ tot en met $V(a, b, n + p)$.

§ 19. Beschouwen wij nu de vergelijking $b \frac{\partial V(a, b, n)}{\partial b} = a^b b^n + V(a, b, n+1) - V(a, b, n)$ dan kunnen wij deze ook aldus schrijven:

$$[bD_b]bV(a, b, n) = a^b b^{n+1} + bV(a, b, n+1)$$

wanneer wij de operatie $\frac{\partial}{\partial b}$ door D_b voorstellen.

Bewerken wij deze vergelijking weer met bD_b , dan is

$$[bD_b]^2 b V(a, b, n) = [bD_b] a^b b^{n+1} + a^b b^{n+2} + b V(a, b, n+2) \quad \text{en zoo is ook}$$

$$[bD_b]^3bV(a, b, n) = [bD_b]^2a^nb^{n+1} + [bD_b]a^nb^{n+2} + a^nb^{n+3} + bV(a, b, n+3).$$

Na p -voudige operatie vinden wij dus

$$[bD_b]^p bV(a, b, n) = [bD_b]^{p-1} a^b b^{n+1} + [bD_b]^{p-2} a^b b^{n+2} + \dots + [bD_b] a^b b^{n+p-1} + a^b b^{n+p} + bV(a, b, n+p) = \Phi(p, b).$$

Hier lezen wij, dat $V(a, b, n+p)$ ook uit te drukken is in p achtereenvolgende afgeleiden van $V(a, b, n)$ naar b .

Stellen wij

$$[bD_b]^{p-1} a^b b^{n+1} + [bD_b]^{p-2} a^b b^{n+2} + \dots + [bD_b] a^b b^{n+p-1} + a^b b^{n+p} = \Psi(p, b)$$

en ontwikkelen wij de operatie

$$[bD_b]^p = b^p D_b^p + (2, p-1) b^{p-1} D_b^{p-1} + \dots + (p-1, p-1) b^2 D_b^2 + b D_b,$$

dan is, daar

$$[D_b^p] bV(a, b, n) = [bD_b^p + pD_b^{p-1}] V(a, b, n)$$

dus, volgens den regel van LEIBNITZ

$$\begin{aligned} [bD_b]^p bV(a, b, n) &= [b^p D_b^p + (2, p-1) b^{p-1} D_b^{p-1} + \dots + (p-1, p-1) b^2 D_b^2 + b D_b] bV(a, b, n) = \\ &= \{b^{p+1} D_b^p + [p + (2, p-1)] b^p D_b^{p-1} + [(p-1)(2, p-1) + (3, p-1)] b^{p-1} D_b^{p-2} + \dots + \\ &+ [2(p-1, p-1) + 1] b^2 D_b + b\} V(a, b, n). \end{aligned}$$

Passen wij hierop de recurrente betrekkingen uit (1) § 14 toe, dan wordt dit:

$$\begin{aligned} [bD_b]^p bV(a, b, n) &= [b^{p+1} D_b^p + (2, p) b^p D_b^{p-1} + (3, p) b^{p-1} D_b^{p-2} + \dots + (p, p) b^2 D_b + b] V(a, b, n) = \\ &= \Psi(p, b) + bV(a, b, n+p). \end{aligned}$$

Zoo is ook

$$\begin{aligned} [bD_b]^{p-1} bV(a, b, n) &= [b^p D_b^{p-1} + (2, p-1) b^{p-1} D_b^{p-2} + \dots + (p-1, p-1) b^2 D_b + b] V(a, b, n) = \\ &= \Psi(p-1, b) + bV(a, b, n+p-1) \end{aligned}$$

.

$$[bD_b]^2 bV(a, b, n) = [b^3 D_b^2 + (2, 2) b^2 D_b + b] V(a, b, n) = \Psi(2, b) + bV(a, b, n+2)$$

$$[bD_b] bV(a, b, n) = [b^2 D_b + b] V(a, b, n) = \Psi(1, b) + bV(a, b, n+1)$$

$$[bD_b]^0 bV(a, b, n) = [b] V(a, b, n) = \Psi(0, b) + bV(a, b, n)$$

Lossen wij hieruit $V(a, b, n)$ en hare p achtereenvolgende afgeleiden naar b op, dan is de determinant in den noemer weer gelijk aan de eenheid en voorts is

$$bV(a, b, n) = bV(a, b, n), \text{ daar } \Psi(0, b) = 0; b^2 \frac{\partial}{\partial b} V(a, b, n) = \begin{vmatrix} \Psi(1, b) + bV(a, b, n+1) & 1 \\ \Psi(0, b) + bV(a, b, n) & 1 \end{vmatrix}$$

$$b^3 \frac{\partial^2}{\partial b^2} V(a, b, n) = \begin{vmatrix} \Psi(2, b) + bV(a, b, n+2) & (2, 2) & 1 \\ \Psi(1, b) + bV(a, b, n+1) & 1 & 1 \\ \Psi(0, b) + bV(a, b, n) & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ en } b^{p+1} \frac{\partial^p}{\partial b^p} V(a, b, n) = \begin{vmatrix} \Psi(p, b) + bV(a, b, n+p) & (2, p) & (p, p) & 1 \\ \Psi(p-1, b) + bV(a, b, n+p-1) & 1 & (p-1, p-1) & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi(2, b) + bV(a, b, n+2) & 0 & (2, 2) & 1 \\ \Psi(1, b) + bV(a, b, n+1) & 0 & 1 & 1 \\ \Psi(0, b) + bV(a, b, n) & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Hiermede is dus de p^{de} afgeleide naar b van $V(a, b, n)$ uitgedrukt in functie van $V(a, b, n)$ tot en met $V(a, b, n+p)$.

§ 20. De voortbrengende functies van $\Phi(p, b)$, $V(a, b, n+p)$ en $\Psi(p, b)$ zijn weer gemakkelijk te vinden. Zij

$$\Theta(t, b) = \Phi(0, b) + \Phi(1, b)t + \Phi(2, b)\frac{t^2}{2!} + \dots + \Phi(p, b)\frac{t^p}{p!} + \dots$$

de voortbrengende functie van $\Phi(p, b)$, dan is, daar

$$\Phi(p, b) = [bD_b]^p V(a, b, n), [bD_b] \Phi(p, b) = [bD_b]^{p+1} V(a, b, n) = \Phi(p+1, b).$$

Derhalve

$$b \frac{\partial}{\partial b} \Phi(p, b) - \Phi(p+1, b) = 0.$$

Daaruit volgt dus, dat

$$b \frac{\partial}{\partial b} \Theta(t, b) - \frac{\partial}{\partial t} \Theta(t, b) = 0.$$

Deze vergelijking komt overeen met de partieele differentiaal-vergelijking voor $\vartheta(t, b)$ in § 16, zoodat ook hier $\Theta(t, b) = X(be^t)$ waarin X een willekeurige functie voorstelt.

Daaruit volgt echter, dat $\Theta(0, b) = X(b)$.

Om den vorm van $X(b)$ in dit geval te bepalen, merken wij op, dat

$$\Theta(0, b) = \Phi(0, b) = bV(a, b, n).$$

Dus

$$X(b) = bV(a, b, n)$$

en derhalve vinden wij

$$\Theta(t, b) = be^t V(a, be^t, n),$$

waaruit volgt dat

$$\Phi(p, b) = b \left[\frac{\partial^p}{\partial t^p} e^t V(a, be^t, n) \right]_{t=0}$$

Zij, ten tweede, de voortbrengende functie van $V(a, b, n+p)$.

$$N(a, b, t) = V(a, b, n) + V(a, b, n+1)t + V(a, b, n+2)\frac{t^2}{2!} + \dots + V(a, b, n+p)\frac{t^p}{p!} + \dots$$

dan is daar $V(a, b, n) = x_n(b) + lax_{n+1}(b) + \frac{(la)^2}{2!} x_{n+2}(b) + \dots$

$$\begin{aligned} N(a, b, t) &= x_n(b) + lax_{n+1}(b) + \frac{(la)^2}{2!} x_{n+2}(b) + \dots \\ &+ t[x_{n+1}(b) + lax_{n+2}(b) + \frac{(la)^2}{2!} x_{n+3}(b) + \dots] \\ &+ \frac{t^2}{2!}[x_{n+2}(b) + lax_{n+3}(b) + \frac{(la)^2}{2!} x_{n+4}(b) + \dots] + \text{enz.} \end{aligned}$$

Dus, daar de reeksen absoluut convergent zijn,

$$N(a, b, t) = V(e^t, b, n) + la V(e^t, b, n+1) + \frac{(la)^2}{2!} V(e^t, b, n+2) + \dots$$

Voeren wij de integralen

$$V(e^t, b, n) = e^{nt} b^n \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x}\right)^{bx-n} dx$$

in, dan wordt

$$\begin{aligned} N(a, b, t) &= e^{nt} b^n \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x}\right)^{bx-n} \left\{ 1 + be^t la \left(\frac{e^t}{x}\right)^{-1} + b^2 e^{2t} \frac{(la)^2}{2!} \left(\frac{e^t}{x}\right)^{-2} + \dots \right\} dx \\ &= e^{nt} b^n \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x}\right)^{bx-n} \left\{ 1 + bxl a + \frac{b^2 x^2 (la)^2}{2!} + \frac{b^3 x^3 (la)^3}{3!} + \dots \right\} dx. \end{aligned}$$

Derhalve is

$$N(a, b, t) = e^{nt} b^n \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x}\right)^{bx-n} a^{bx} dx = e^{nt} a^n b^n \int_0^1 \left(\frac{ae^t}{x}\right)^{bx-n} dx = V(ae^t, b, n).$$

Daaruit volgt, dat

$$V(a, b, n+p) = \left[\frac{\partial^p}{\partial t^p} V(ae^t, b, n) \right]_{t=0}$$

Zij, ten slotte, de voortbrengende functie van $\Psi(p, b)$ gelijk aan

$$\mathcal{F}(t, b) = \Psi(0, b) + \Psi(1, b)t + \Psi(2, b)\frac{t^2}{2!} + \dots + \Psi(p, b)\frac{t^p}{p!} + \dots$$

dan is, daar

$$\Psi(p, b) = \Phi(p, b) - b V(a, b, n+p)$$

ook

$$\mathcal{F}(t, b) = \Theta(t, b) - b N(a, b, t).$$

Derhalve is

$$\mathcal{F}(t, b) = be^t \int_0^1 a^n b^n e^{nt} \left(\frac{a}{y}\right)^{bet y-n} dy - ba^n b^n e^{nt} \int_0^1 \left(\frac{ae^t}{x}\right)^{bx-n} dx.$$

Stelt men $y = \frac{x}{e^t}$, dan is $dy = \frac{dx}{e^t}$ en wordt

$$\mathcal{F}(t, b) = ba^n b^n e^{nt} \int_1^{et} \left(\frac{ae^t}{x} \right)^{bx-n} dx = b \underset{1}{V}^{et}(ae^t, b, n).$$

Daaruit volgt dus, dat

$$\Psi(p, b) = b \left[\frac{\partial^p}{\partial t^p} \underset{1}{V}^{et}(ae^t, b, n) \right]_{t=0}.$$

Wij zien dus, dat de verschillende voortbrengende functies, die wij behandelden, zich allen tot V-functies laten herleiden.

§ 21. Er zijn nog eenige formules, die soms nuttig kunnen zijn bij de numerische berekening van waarden van $V(a, b, n)$ indien a, b en n in getalwaarden gegeven zijn.

Vooreerst is

$$V(ac, b, n) = a^n b^n c^n \int_0^1 \left(\frac{ac}{x} \right)^{bx-n} dx = a^n b^n \int_0^1 \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} e^{bxlc} dx = a^n b^n \int_0^1 \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} \left\{ 1 + bxlc + \frac{b^2 x^2 (lc)^2}{2!} + \dots \right\} dx.$$

Derhalve is

$$V(ac, b, n) = V(a, b, n) + lc V(a, b, n+1) + \frac{(lc)^2}{2!} V(a, b, n+2) + \frac{(lc)^3}{3!} V(a, b, n+3)$$

welke formule ook direct uit de voortbrengende functie van $V(a, b, n+p)$ is neer te schrijven.

Daar $V(a+c, b, n) = V\left(a \left[1 + \frac{c}{a}\right], b, n\right)$, vinden wij dat

$$V(a+c, b, n) = V(a, b, n) + l \frac{a+c}{a} V(a, b, n+1) + \frac{1}{2!} \left[l \frac{a+c}{a} \right]^2 V(a, b, n+2) + \frac{1}{3!} \left[l \frac{a+c}{a} \right]^3 V(a, b, n+3) + \dots \quad (1)$$

Ontwikkelt men $V(a+c, b, n)$ volgens het theorema van TAYLOR, dan is

$$V(a+c, b, n) = V(a, b, n) + c \frac{\partial}{\partial a} V(a, b, n) + \frac{c^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial a^2} V(a, b, n) + \frac{c^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial a^3} V(a, b, n) + \dots \quad (2)$$

Hierin kan men de determinanten uit § 18 gesubstitueerd denken en daardoor op andere wijze $V(a+c, b, n)$ herleiden tot een functie van $V(a, b, n)$, $V(a, b, n+1)$ enz.

Eveneens door middel van TAYLOR's theorema vindt men

$$V(a, b+c, n) = V(a, b, n) + c \frac{\partial}{\partial b} V(a, b, n) + \frac{c^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial b^2} V(a, b, n) + \frac{c^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial b^3} V(a, b, n) + \dots \quad (3)$$

waarin men ook de determinanten uit § 19 geplaatst kan denken.

$$x_n(b+c) = x_n(b) + cx'_n(b) + \frac{c^2}{2!} x''_n(b) + \dots$$

volgt hieruit door $a=1$ te stellen.

Werkt men $V(a, b + c, n)$ in de integraal uit, dan is

$$\begin{aligned} V(a, b + c, n) &= a^n(b + c)^n \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n+cx} dx = a^n(b + c)^n \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} e^{cxl \frac{a}{x}} dx = \\ &= a^n(b + c)^n \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} \left\{ 1 + cxl \frac{a}{x} + \frac{c^2 x^2}{2!} \left(l \frac{a}{x}\right)^2 + \frac{c^3 x^3}{3!} \left(l \frac{a}{x}\right)^3 + \dots \right\} dx = \\ &= a^n(b + c)^n \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx + ca \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-1} l \frac{a}{x} dx + \frac{c^2 a^2}{2!} \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-2} \left(l \frac{a}{x}\right)^2 dx + \dots \right] \end{aligned}$$

Stellen wij

$$\lambda(a, b, n, p) = \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-p} \left(l \frac{a}{x}\right)^p dx, \text{ dan is, daar } \lambda(a, b, n, 0) = \frac{V(a, b, n)}{a^n b^n}$$

$$V(a, b + c, n) = a^n(b + c)^n \left[\lambda(a, b, n, 0) + ca \lambda(a, b, n, 1) + \frac{c^2 a^2}{2!} \lambda(a, b, n, 2) + \frac{c^3 a^3}{3!} \lambda(a, b, n, 3) + \dots \right] \quad (4)$$

Stellen wij $ca = t$ dan is dus $\frac{V(a, b + \frac{t}{a}, n)}{(ab + t)^n}$ de voortbrengende functie van $\lambda(a, b, n, p)$ naar p .

Zoo blijkt het ons dus, dat zoowel $V(a + c, b, n)$ als $V(a, b + c, n)$ als $V(a, b, n + p)$ zich laten opbouwen uit $V(a, b, n)$ en afgeleiden.

$V(a, b, n)$ zelve wordt opgebouwd uit $x_n(b) = V(1, b, n)$ volgens (4) § 15.

$x_n(b)$ is dan weer door middel van (3) § 13 uit $x_0(b) = V(1, b, 0)$ en afgeleiden te bepalen, zoodat al onze ontwikkelingen beschouwd kunnen worden als te steunen op de fundamenteele integraal

$$x_0(b) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{bx} dx = 1 + \frac{b}{2^2} + \frac{b^2}{3^3} + \frac{b^3}{4^4} + \frac{b^4}{5^5} + \dots$$

Stelt men $bx = y$ dan krijgt men dezen uit een mnemotechnisch oogpunt misschien verkieslijker vorm

$$\int_0^b \left(\frac{b}{y}\right)^y dy = b + \frac{b^2}{2^2} + \frac{b^3}{3^3} + \frac{b^4}{4^4} + \frac{b^5}{5^5} + \dots = bx_0(b).$$

Als tweeden grondvorm vonden wij dan $V(a, b, n)$, die als een resultaat van de combinatie der reeks

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

met $x_0(b)$ en hare afgeleiden kan worden beschouwd.

Zoowel $x_0(b)$ als e^x zijn absoluut convergent, waardoor ons hun onderlinge verwerking mogelijk werd.

Wij zullen nu in het tweede hoofdstuk dezer afdeeling eenige integralen bespreken, die met $V(a, b, n)$ verwant zijn of er toe kunnen worden teruggebracht.

T W E E D E H O O F D S T U K.

§ 22. De eerste integraal, waarvan wij zullen aantoonen dat zij in functie van V-functies kan uitgedrukt worden, hebben wij reeds in de vorige § ontmoet en stelden haar voor door

$$\lambda(a, b, n, p) = \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-p} \left(l\frac{a}{x}\right)^p dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

p en n positief geheel of nul.

Wij gaan haar partieel integreeren. Dan is

$$\lambda(a, b, n, p) = \left[x \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} \left(\frac{x}{a} l\frac{a}{x}\right)^{p-1} \right]_0^1 + ab\lambda(a, b, n+1, p) + p\lambda(a, b, n+1, p-1) - ab\lambda(a, b, n, p+1) - (n+p)\lambda(a, b, n, p)$$

of

$$(n+p+1)\lambda(a, b, n, p) = a^{b-n-p}(la)^p + ab\lambda(a, b, n+1, p) + p\lambda(a, b, n+1, p-1) - ab\lambda(a, b, n, p+1).$$

Dus

$$ab\lambda(a, b, n, p+1) = a^{b-n-p}(la)^p + ab\lambda(a, b, n+1, p) - (n+p+1)\lambda(a, b, n, p) + p\lambda(a, b, n+1, p-1) \quad (2)$$

Hierdoor kunnen wij de λ met $p+1$ verlagen tot een uitdrukking, waarin slechts λ 's met p en $p-1$ voorkomen. Zoo is voor

$$p=3 \quad ab\lambda(a, b, n, 4) = a^{b-n-3}(la)^3 + ab\lambda(a, b, n+1, 3) - (n+4)\lambda(a, b, n, 3) + 3\lambda(a, b, n+1, 2)$$

$$p=2 \quad ab\lambda(a, b, n, 3) = a^{b-n-2}(la)^2 + ab\lambda(a, b, n+1, 2) - (n+3)\lambda(a, b, n, 2) + 2\lambda(a, b, n+1, 1)$$

$$p=1 \quad ab\lambda(a, b, n, 2) = a^{b-n-1}(la) + ab\lambda(a, b, n+1, 1) - (n+2)\lambda(a, b, n, 1) + \lambda(a, b, n+1, 0)$$

$$p=0 \quad ab\lambda(a, b, n, 1) = a^{b-n} + ab\lambda(a, b, n+1, 0) - (n+1)\lambda(a, b, n, 0)$$

Daar $\lambda(a, b, n, 0) = \frac{V(a, b, n)}{a^n b^n}$ is, vinden wij dus

$$a^{n+1}b^{n+1}\lambda(a, b, n, 1) = a^b b^n + V(a, b, n+1) - (n+1)V(a, b, n).$$

$$a^{n+2}b^{n+2}\lambda(a, b, n, 2) = a^b b^{n+1}la + a^b b^{n+1} - (n+2)a^b b^n + V(a, b, n+2) - (2n+3)V(a, b, n+1) + (n+1)(n+2)V(a, b, n) \text{ enz.}$$

De $\lambda(a, b, n, p)$ is dus uit te drukken in functie van $V(a, b, n+p)$ tot en met $V(a, b, n)$.

Differentieeren wij $\lambda(a, b, n, p)$ partieel naar a , dan is

$$\frac{\partial \lambda(a, b, n, p)}{\partial a} = \int_0^1 (bx - n - p) \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-p-1} \frac{1}{x} \left(l \frac{a}{x}\right)^p dx + \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-p} p \left(l \frac{a}{x}\right)^{p-1} \frac{1}{a} dx.$$

Derhalve is

$$a \frac{\partial \lambda(a, b, n, p)}{\partial a} = ab\lambda(a, b, n+1, p) - (n+p)\lambda(a, b, n, p) + p\lambda(a, b, n+1, p-1) \quad (3)$$

Differentieeren wij $\lambda(a, b, n, p)$ partieel naar b , dan is

$$b \frac{\partial \lambda(a, b, n, p)}{\partial b} = ab \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-p-1} \left(l \frac{a}{x}\right)^{p+1} dx = ab\lambda(a, b, n, p+1) \quad (4)$$

Substitueeren wij 3) en 4) in 2), dan is na kleine omzetting

$$a \frac{\partial \lambda(a, b, n, p)}{\partial a} - b \frac{\partial \lambda(a, b, n, p)}{\partial b} = \lambda(a, b, n, p) - a^{b-n-p} (la)^p \quad (5)$$

Dit is de lineaire partieele differentiaal-vergelijking, waaraan $\lambda(a, b, n, p)$ voldoet en die, als zij op de wijze in § 16 aangegeven wordt geïntegreerd, tot algemeene integraal heeft:

$$\lambda(a, b, n, p) = \int_{f(ab)}^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{xb-n-p} \left(l \frac{a}{x}\right)^p dx$$

waarin $f(ab)$ een willekeurige functie voorstelt, die dus in ons particulier geval gelijk ∞ is.

Zij $L(a, b, n, t) = \lambda(a, b, n, 0) + \lambda(a, b, n, 1)t + \lambda(a, b, n, 2)\frac{t^2}{2!} + \lambda(a, b, n, 3)\frac{t^3}{3!} + \dots$

de voortbrengende functie van $\lambda(a, b, n, p)$ naar p , dan vonden wij reeds in de vorige § dat

$$L(a, b, n, t) = \frac{V(a, b + \frac{t}{a}, n)}{(ab+t)^n} \quad (6)$$

waaruit volgt, dat

$$\lambda(a, b, n, p) = \left[\frac{\partial^p}{\partial t^p} \frac{V(a, b + \frac{t}{a}, n)}{(ab+t)^n} \right]_{t=0} \quad (7)$$

Wat de convergentie van de reeks $L(a, b, n, t)$ aangaat, die bij de vorige voortbrengende functies niet besproken behoefde te worden, daar zij bestonden uit termen, die V -functies waren, vermenigvuldigd met $\frac{t^i}{i!}$ en die dus convergeerden daar $V(a, b, n) < a^b b^{n-1} (e^b - 1)$, zoo kunnen wij hier het volgende opmerken.

Daar in $\lambda(a, b, n, p) = \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} \left(\frac{x}{a} l \frac{a}{x}\right) dx$ de $\left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n}$ en $\left(\frac{x}{a} l \frac{a}{x}\right)^p$ eindigen continu zijn tusschen 0 en 1 en $\left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n}$ voor $x = 0$ tot $x = 1$ overgaat van 1 als $n = 0$ of 0 als $n > 0$ tot a^{b-n} zonder teekenwijziging, is

$$\lambda(a, b, n, p) = \left(\frac{\vartheta}{a} l \frac{a}{\vartheta}\right)^p \int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx \quad 0 < \vartheta < 1$$

Dus

$$\lambda(a, b, n, p) = \left(\frac{\vartheta}{a} l \frac{a}{\vartheta}\right)^p \frac{V(a, b, n)}{a^n b^n}$$

Derhalve is

$$\lambda(a, b, n, p) < \left(\frac{\vartheta}{a} l \frac{a}{\vartheta}\right)^p a^{b-n} \frac{e^b - 1}{b}$$

Dus

$$L(a, b, n, t) < \frac{V(a, b, n)}{a^n b^n} \left[1 + \frac{t\vartheta}{a} l \frac{a}{\vartheta} + \frac{t^2 \vartheta^2}{2! a^2} \left(l \frac{a}{\vartheta}\right)^2 + \frac{t^3 \vartheta^3}{3! a^3} \left(l \frac{a}{\vartheta}\right)^3 + \dots \right]$$

of

$$L(a, b, n, t) < \frac{V(a, b, n)}{a^n b^n} \left(\frac{a}{\vartheta}\right)^{\frac{t\vartheta}{a}} \quad 0 < \vartheta < 1$$

De convergentie van $L(a, b, n, t)$ is dus verzekerd.

23. Ten tweede zullen wij een integraal bespreken, die wij voorstellen door

$$\mu(a, b, n, p) = \int_0^1 (a + bx)^p \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx \quad p \text{ en } n \text{ geheel en pos. of nul} \dots (1)$$

De eenvoudigste reductie is deze

$$\mu(a, b, n, p) = \int_0^1 (a + bx)^{p-1} (a + bx) \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx = a\mu(a, b, n, p-1) + ab\mu(a, b, n+1, p-1).$$

Dus

$$\mu(a, b, n, p) = a\mu(a, b, n, p-1) + ab\mu(a, b, n+2, p-1) \dots (2)$$

Wij vinden derhalve voor

$$p=3 \quad \mu(a, b, n, 3) = a\mu(a, b, n, 2) + ab\mu(a, b, n+1, 2)$$

$$p=2 \quad \mu(a, b, n, 2) = a\mu(a, b, n, 1) + ab\mu(a, b, n+1, 1)$$

$$p=1 \quad \mu(a, b, n, 1) = a\mu(a, b, n, 0) + ab\mu(a, b, n+1, 0)$$

$$\text{Nu is } \mu(a, b, n, 0) = \frac{V(a, b, n)}{a^n b^n}$$

Dus

$$a^n b^n \mu(a, b, n, 1) = aV(a, b, n) + V(a, b, n+1)$$

$$a^n b^n \mu(a, b, n, 2) = a^2 V(a, b, n) + 2aV(a, b, n+1) + V(a, b, n+2) \text{ enz.}$$

Differentieeren wij $\mu(a, b, n, p)$ partieel naar a , dan is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial a} &= \int_0^1 p(a+bx)^{p-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx + \int_0^1 (a+bx)^p (bx-n)^{bx-n-1} \left(\frac{a}{x}\right) \frac{1}{x} dx + \\ &= p\mu(a, b, n, p-1) + \frac{1}{a} \int_0^1 (a+bx)^p (a+bx-n-a) \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx = \\ &= p\mu(a, b, n, p-1) + \frac{1}{a} \mu(a, b, n, p+1) - \frac{n+a}{a} \mu(a, b, n, p). \end{aligned}$$

Derhalve is

$$a \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial a} = ap\mu(a, b, n, p-1) - (n+a)\mu(a, b, n, p) + \mu(a, b, n, p+1) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierdoor reduceeren wij μ met $p+1$ tot μ 's en afgeleide naar a met p en tot μ met $p-1$.

$$\text{Voor } p=2 \quad a \frac{\partial \mu(a, b, n, 2)}{\partial a} = 2a\mu(a, b, n, 1) - (n+a)\mu(a, b, n, 2) + \mu(a, b, n, 3)$$

$$\text{voor } p=1 \quad a \frac{\partial \mu(a, b, n, 1)}{\partial a} = a\mu(a, b, n, 0) - (n+a)\mu(a, b, n, 1) + \mu(a, b, n, 2)$$

$$p=0 \text{ geeft } a \frac{\partial \mu(a, b, n, 0)}{\partial a} = \mu(a, b, n, 1) - (n+a)\mu(a, b, n, 0)$$

Wij herleiden op deze wijze $\mu(a, b, n, p)$ tot p^{de} tot en met 0^{de} afgeleiden naar a van $V(a, b, n)$. Differentieeren wij partieel naar b , dan is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial b} &= \int_0^1 p(a+bx)^{p-1} x \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx + \int_0^1 (a+bx)^p \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} xl \frac{a}{x} dx \\ \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial b} &= pa\mu(a, b, n+1, p-1) + a \int_0^1 (a+bx)^p \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-1} l \frac{a}{x} dx \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{aligned}$$

Wij zien hierin een nieuwe integraal verschijnen, die wij echter ook kunnen elimineeren door middel der betrekking, die wij vinden door de volgende partieele integratie.

$$\begin{aligned} \mu(a, b, n, p) &= \frac{1}{b} \int_0^1 (a+bx)^{p-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} d(a+bx) = \\ &= \frac{1}{b} \left[(a+bx)^p \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} \right]_0^1 - (p-1) \int_0^1 (a+bx)^{p-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} dx + \\ &+ \frac{1}{b} \int_0^1 (a+bx)^p (bx-n) \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n-1} \frac{a}{x^2} dx - \int_0^1 (a+bx)^p \left(\frac{a}{x}\right)^{bx-n} l \frac{a}{x} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b} (a+b)^p a^{b-n} - \left[\frac{a^p}{b} \right]_{n=0} - (p-1)\mu(a, b, n, p-1) + \\ + \mu(a, b, n, p) - \frac{n}{ab} \mu(a, b, n-1, p) - \frac{1}{a} \frac{\partial \mu(a, b, n-1, p)}{\partial b} + p\mu(a, b, n, p-1)$$

als wij (3) invoeren en in aanmerking nemen dat als $n=0$ is, het lid tusschen vierkante haken moet worden toegevoegd. Hieruit volgt dat als wij $n-1$ door n vervangen

$$b \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial b} = (a+b)^p a^{b-n} - \left[a^{p+1} \right]_{n+1=0} - (n+1)\mu(a, b, n, p) + ab\mu(a, b, n+1, p-1). \quad (5)$$

Om de partieele differentiaal-vergelijking te krijgen, waaraan $\mu(a, b, n, p)$ voldoet, integreeren wij partieel op deze wijze

$$\mu(a, b, n, p) = \left| x(a+bx)^p \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} \right|_0^1 - p \int_0^1 x(a+bx)^{p-1} b \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} dx + \\ + \int_0^1 (a+bx)^p (bx-n) \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n-1} \left(\frac{a}{x} \right) dx - \int_0^1 x(a+bx)^p \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} b l \frac{a}{x} dx = \\ = (a+b)^p a^{b-n} - \left[a^{p+1} \right]_{n+1=0} - p\mu(a, b, n, p) + ap\mu(a, b, n, p-1) + \\ + \mu(a, b, n, p+1) - (a+n)\mu(a, b, n, p) - ab \int_0^1 (a+bx)^p \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n-1} l \frac{a}{x} dx.$$

Substitueeren wij hierin 3), 4) en 5), dan is

$$a \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial a} - (1-p)b \frac{\partial \mu(a, b, n, p)}{\partial b} = (1-np)\mu(a, b, n, p) - (1-p)(a+b)^p a^{b-n} + (1-p)[a^{p+1}]_{n+1=0} \quad (6)$$

Daar wij n steeds positief geheel denken, kan het lid tusschen vierkante haken in dit geval wegblijven. Stellen wij de voortbrengende functie van $\mu(a, b, n, p)$ voor door

$$M(a, b, n, t) = \mu(a, b, n, 0) + \mu(a, b, n, 1)t + \mu(a, b, n, 2) \frac{t^2}{2!} + \dots$$

dan is blijkbaar

$$M(a, b, n, t) = \int_0^1 e^{(a+bx)t} \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} dx \quad (7)$$

Zoodat

$$\mu(a, b, n, p) = \left[\frac{\partial^p}{\partial t^p} \int_0^1 e^{(a+bx)t} \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} dx \right]_{t=0} \quad (8)$$

Wat de convergentie van $M(a, b, n, t)$ aangaat, kunnen wij opmerken, dat daar

$$\mu(a, b, n, p) < (a+b)^p \int_0^1 \left(\frac{a}{x} \right)^{bx-n} dx.$$

Dus a fortiori

$$\mu(a, b, n, p) < (a + b)^p \frac{a^{b-n}}{b} (e^b - 1).$$

Derhalve is

$$M(a, b, n, t) < \frac{a^{b-n}}{b} (e^b - 1) \left(1 + (a + b)t + (a + b)^2 \frac{t^2}{2!} + (a + b)^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right).$$

Dus

$$M(a, b, n, t) < a^{b-n} e^{(a+b)t} \frac{e^b - 1}{b}.$$

§ 24. Wij gaan nu over tot eenige belangrijke substituties.

$$x_n(b) = b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \right)^{bx-n} dx = \frac{b^n}{n+1} + \frac{b^{n+1}}{(n+2)^2} + \frac{b^{n+2}}{(n+3)^3} + \frac{b^{n+3}}{(n+4)^4} + \dots$$

Dus $b = ia$ stellend

$$(ia)^{-n} x_n(ia) = \int_0^1 e^{(iax-n)t} \frac{1}{x} dx = i \left(\frac{a}{(n+2)^2} - \frac{a^3}{(n+4)^4} + \frac{a^5}{(n+6)^6} - \dots \right) + \frac{1}{(n+1)} - \frac{a^2}{(n+3)^3} + \frac{a^4}{(n+5)^5} - \dots$$

Nu is

$$\int_0^1 e^{(iax-n)t} \frac{1}{x} dx = \int_0^1 x^n \left[\cos \left(ax l \frac{1}{x} \right) + i \sin \left(ax l \frac{1}{x} \right) \right] dx.$$

Derhalve is

$$\int_0^1 x^n \cos \left(ax l \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{a^2}{(n+3)^3} + \frac{a^4}{(n+5)^5} - \frac{a^6}{(n+7)^7} + \dots \quad (1)$$

en

$$\int_0^1 x^n \sin \left(ax l \frac{1}{x} \right) dx = \frac{a}{(n+2)^2} - \frac{a^3}{(n+4)^4} + \frac{a^5}{(n+6)^6} - \frac{a^7}{(n+8)^8} + \dots \quad (2)$$

Vermenigvuldigt men elk met a en stelt men $ax = y$, dan krijgen zij deze gedaante

$$\int_0^a \left(\frac{y}{a} \right)^n \cos \left(y l \frac{a}{y} \right) dy = \frac{a}{n+1} - \frac{a^3}{(n+3)^3} + \frac{a^5}{(n+5)^5} - \dots \text{ en } \int_0^a \left(\frac{y}{a} \right)^n \sin \left(y l \frac{a}{y} \right) dy = \frac{a^2}{(n+2)^2} - \frac{a^4}{(n+4)^4} + \frac{a^6}{(n+6)^6} - \dots \quad (3)$$

De convergentie is evident.

Daar $\cos(ix) = chx$ en $\sin(ix) = shx$ vinden wij door in (1) en (2) $a = ib$ te stellen

$$\int_0^1 x^n ch \left(bx l \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{n+1} + \frac{b^2}{(n+3)^3} + \frac{b^4}{(n+5)^5} + \frac{b^6}{(n+7)^7} + \dots \quad (4)$$

en

$$\int_0^1 x^n sh \left(bx l \frac{1}{x} \right) dx = \frac{b}{(n+2)^2} + \frac{b^3}{(n+4)^4} + \frac{b^5}{(n+6)^6} + \frac{b^7}{(n+8)^8} + \dots \quad (5)$$

En tevens

$$b\hat{c}_0(b) = \int_0^b ch\left(xl\frac{b}{x}\right)dx = b + \frac{b^3}{3^3} + \frac{b^5}{3^5} + \frac{b^7}{7^7} + \dots$$

$$b\hat{s}_0(b) = \int_0^b sh\left(xl\frac{b}{x}\right)dx = b^2 + \frac{b^4}{4^4} + \frac{b^6}{6^6} + \frac{b^8}{8^8} + \dots$$

als fundamentele formules, waaruit $c_{n+p}(b)$, $\hat{c}_{n+p}(b)$, $s_{n+p}(b)$, $\hat{s}_{n+p}(b)$ en afgeleiden kunnen worden bepaald.

§ 25. De tweede substitutie, die wij op

$$\frac{x_n(b)}{b^n} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{bx-n} dx = \frac{1}{n+1} + \frac{b}{(n+2)^2} + \frac{b^2}{(n+3)^3} + \dots \quad (1)$$

gaan toepassen, is $b = e^{i\phi}$. Dan wordt

$$\frac{x_n(e^{i\phi})}{e^{in\phi}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{xe^{i\phi}-n} dx = \frac{1}{n+1} + \frac{e^{i\phi}}{(n+2)^2} + \frac{e^{2i\phi}}{(n+3)^3} + \dots \quad (2)$$

of

$$\frac{x_n(e^{i\phi})}{e^{in\phi}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n + x \sin \phi} dx = \frac{1}{n+1} + \frac{\cos \phi}{(n+2)^2} + \frac{\cos 2\phi}{(n+3)^3} + \dots + i \left(\frac{\sin \phi}{(n+2)^2} + \frac{\sin 2\phi}{(n+3)^3} + \frac{\sin 3\phi}{(n+4)^4} + \dots \right)$$

Scheiden wij tot reële deelen, dan is

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \cos \left[xl \frac{1}{x} \sin \phi \right] dx = \frac{1}{n+1} + \frac{\cos \phi}{(n+2)^2} + \frac{\cos 2\phi}{(n+3)^3} + \frac{\cos 3\phi}{(n+4)^4} + \dots \quad (3)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \sin \left[xl \frac{1}{x} \sin \phi \right] dx = \frac{\sin \phi}{(n+2)^2} + \frac{\sin 2\phi}{(n+3)^3} + \frac{\sin 3\phi}{(n+4)^4} + \frac{\sin 4\phi}{(n+5)^5} + \dots \quad (4)$$

De beide reeksen convergeeren weer absoluut, omdat als wij in plaats van $\cos p\phi$ en $\sin p\phi$ overal de eenheid zetten, wij reeds twee absoluut convergeerende reeksen krijgen.

Stellen wij $\phi = i\psi$, dan is wegens $\cos(i\psi) = ch\psi$ en $\sin(i\psi) = ish\psi$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{xch\psi-n} ch \left[xl \frac{1}{x} sh\psi \right] dx = \frac{1}{n+1} + \frac{ch\psi}{(n+2)^2} + \frac{ch2\psi}{(n+3)^3} + \dots \quad (5)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{xch\psi-n} sh \left[xl \frac{1}{x} sh\psi \right] dx = \frac{sh\psi}{(n+2)^2} + \frac{sh2\psi}{(n+3)^3} + \frac{sh3\psi}{(n+4)^4} + \dots \quad (6)$$

Stellen wij ter bekorting

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \cos \left[xl \frac{1}{x} \sin \phi \right] dx = \hat{x}_n(\phi) \text{ en } \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \sin \left[xl \frac{1}{x} \sin \phi \right] dx = \hat{x}_n(\phi),$$

Vermenigvuldigen wij 12) met $ch\varphi$ en 13) met $sh\varphi$, dan is, daar $ch^2(\varphi) - sh^2(\varphi) = 1$, na aftrekking

$$[(n+1)\hat{x}_n(\varphi) + \hat{x}'_n(\varphi)]ch\varphi - [(n+1)\hat{x}_n(\varphi) + \hat{x}'_n(\varphi)]sh\varphi = ch\varphi + \hat{x}_{n+1}(\varphi) \quad . \quad . \quad (14)$$

Vermenigvuldigen wij 12) met $-sh\varphi$ en 13) met $ch\varphi$, dan is optellend

$$[(n+1)\hat{x}_n(\varphi) + \hat{x}'_n(\varphi)]ch\varphi - [(n+1)\hat{x}_n(\varphi) + \hat{x}'_n(\varphi)]sh\varphi = \hat{x}_{n+1}(\varphi) - sh\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Door deze twee formules kunnen wij $\hat{x}_{n+1}(\varphi)$ en $\hat{x}'_{n+1}(\varphi)$ in functie van $\hat{x}_n(\varphi)$ en $\hat{x}'_n(\varphi)$ en afgeleiden bepalen en daardoor ook $\hat{x}_{n+p}(\varphi)$ en $\hat{x}'_{n+p}(\varphi)$.

§ 26. Het ligt voor de hand om op de integralen

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \cos \left[x l \frac{1}{x} \sin \varphi \right] dx = \frac{1}{n+1} + \frac{\cos \varphi}{(n+2)^2} + \frac{\cos 2\varphi}{(n+3)^3} + \frac{\cos 3\varphi}{(n+4)^4} + \dots \quad . \quad (1)$$

en

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \sin \left[x l \frac{1}{x} \sin \varphi \right] dx = \frac{\sin \varphi}{(n+2)^2} + \frac{\sin 2\varphi}{(n+3)^3} + \frac{\sin 3\varphi}{(n+4)^4} + \frac{\sin 4\varphi}{(n+5)^5} + \dots \quad . \quad (2)$$

de bewerking van FOURIER toe te passen. Wij vermenigvuldigen (1) met $\cos m\varphi$ en (2) met $\sin m\varphi$ en integreeren tusschen 0 en π naar φ . Dan is na optelling

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{x \cos \phi - n} \cos \left[m\varphi - x l \frac{1}{x} \sin \varphi \right] d\varphi dx = \frac{1}{(m+n+1)^{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wij kunnen dit nu ook zoo schrijven

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} dx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x l \frac{1}{x} \cos \phi} \cos \left[m\varphi - x l \frac{1}{x} \sin \varphi \right] d\varphi = \frac{1}{(n+m+1)^{m+1}}$$

Noemen wij ter bekorting

$$H_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos(m\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

dan staat er dus

$$\int_0^1 x^n H_m \left(x l \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{(n+m+1)^{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nu is bekend 1) dat als m een *geheel positief* getal is dat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos(m\varphi) \cdot \cos(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \frac{x^m}{m!} \quad \text{en} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \sin m\varphi \cdot \sin(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \frac{x^m}{m!}.$$

1) Zie o.a. SCHLÖMILCH Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II. § 22. Leipzig. Teubner 1882.

Zoodat door optelling blijkt, dat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos[m\phi - x \sin \phi] d\phi = H_m(x) = \frac{x^m}{m!} \text{ voor } m \text{ positief geheel.} \quad (5)$$

Daar m in ons geval steeds positief geheel is gedacht, vinden wij dus, dat

$$\int_0^1 x^{m+n} \left(l \frac{1}{x}\right)^m dx = \frac{m!}{(n+m+1)^{m+1}}. \quad (6)$$

Door $x = e^{-t}$ te stellen, vinden wij hier een bekende formule uit de theorie der gamma-functies terug.

Het schijnt mij echter van gewicht om eens uitvoeriger stil te staan bij de integraal $H_m(x)$, vooral met het oog op het geval, waarin m *niet* geheel is, maar als willekeurige veranderlijke parameter wordt beschouwd. Het bleek mij, dat dan eenige eigenschappen aan het licht komen, die der moeite waard zijn om te vermelden.

§ 27. Om onze beschouwing van $H_m(x)$ zoo volledig mogelijk te maken, verbinden wij

$$H_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos[m\phi - x \sin \phi] d\phi \quad (1)$$

bij onze bewerkingen met

$$K_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \sin[m\phi - x \sin \phi] d\phi \quad (2)$$

Differentieeren wij elk der integralen naar x , dan is

$$\begin{aligned} \pi H'_m(x) &= \int_0^\pi e^{x \cos \phi} [\cos \phi \cos(m\phi - x \sin \phi) + \sin \phi \sin(m\phi - x \sin \phi)] d\phi = \\ &= \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos[(m-1)\phi - x \sin \phi] d\phi = \pi H_{m-1}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi K'_m(x) &= \int_0^\pi e^{x \cos \phi} [\cos \phi \sin(m\phi - x \sin \phi) - \sin \phi \cos(m\phi - x \sin \phi)] d\phi = \\ &= \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \sin[(m-1)\phi - x \sin \phi] d\phi = \pi K_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Dus

$$H'_m(x) = H_{m-1}(x) \quad \text{en} \quad K'_m(x) = K_{m-1}(x) \quad (3) \text{ en } (4)$$

Ten tweede bepalen wij

$$H_m(x) + iK_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi - xi \sin \phi + im\phi} d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{xe^{-i\phi} + im\phi} d\phi = \frac{1}{im\pi} \int_0^\pi e^{xe^{-i\phi}} de^{im\phi}.$$

Stellen wij in 10) en 11) $m = 0$, dan is

$$H_0(x) = H_0(-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \varphi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi \quad (14)$$

en

$$K_0(x) = -K_0(-x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \varphi} \sin(x \sin \varphi) d\varphi \quad (15)$$

Nu is bekend ¹⁾ dat

$$e^{x \cos \varphi} \cos(x \sin \varphi) = 1 + \frac{x \cos \varphi}{1} + \frac{x^2 \cos 2\varphi}{2!} + \frac{x^3 \cos 3\varphi}{3!} + \dots$$

$$e^{x \cos \varphi} \sin(x \sin \varphi) = \frac{x \sin \varphi}{1} + \frac{x^2 \sin 2\varphi}{2!} + \frac{x^3 \sin 3\varphi}{3!} + \dots$$

Substitueeren wij dit in 14) en 15) en integreeren, dan vinden wij

$$H_0(x) = H_0(-x) = 1 \quad (16)$$

en

$$\begin{aligned} -K_0(x) &= +K_0(-x) = \frac{x}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi + \frac{x^2}{2! \pi} \int_0^\pi \sin 2\varphi d\varphi + \frac{x^3}{3! \pi} \int_0^\pi \sin 3\varphi d\varphi + \dots \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right] \quad (17) \end{aligned}$$

Dus

$$K'_0(x) = K'_0(-x) = \frac{-2}{x\pi} \left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \right] = \frac{-2}{x\pi} shx = K_{-1}(x) = K_{-1}(-x). \quad (18)$$

Door middel van de reeks 13) kunnen wij $K_m(x)$ bepalen, behalve wanneer m een positief geheel getal is. Wij maken dan gebruik van de betrekking 6) maar willen eerst het verband bepalen tusschen $H_m(x)$ en $H_m(-x)$ en tusschen $K_m(x)$ en $K_m(-x)$.

Nu is

$$H_m(-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-x \cos \varphi} \cos(m\varphi + x \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \psi} \cos(m\pi - m\psi + x \sin \psi) d\psi$$

als wij $\varphi = \pi - \psi$ stellen.

Nu is dit als m een geheel getal is, gelijk aan

$$H_m(-x) = \frac{1}{\pi} \cos(m\pi) \int_0^\pi e^{x \cos \psi} \cos[m\psi - x \sin \psi] d\psi = (-1)^m H_m(x).$$

Dus

$$H_m(-x) = (-1)^m H_m(x) \quad m \text{ geheel getal} \quad (19)$$

¹⁾ Uit de ontwikkeling van $e^{x \cos \varphi}$.

Zoo is

$$K_m(-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-x \cos \psi} \sin(m\psi + x \sin \psi) d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \psi} \sin[m\pi - (m\psi - x \sin \psi)] d\psi$$

zoodat als m een *geheel* getal is

$$K_m(-x) = -\frac{1}{\pi} \cos(m\pi) \int_0^\pi e^{x \cos \psi} \sin(m\psi - x \sin \psi) d\psi = (-1)^{m+1} K_m(x).$$

Dus

$$K_m(-x) = (-1)^{m+1} K_m(x) \quad m \text{ geheel getal} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wij hadden dit ook direct uit 10) en 11) kunnen aflezen.

Als m een *geheel* getal is, levert 6) ons deze betrekking

$$K_m(x) = (-1)^{m+1} \frac{e^{-x}}{m\pi} + \frac{e^x}{m\pi} + \frac{x}{m} K_{m-1}(x).$$

Dus voor

$$m \text{ even} \quad K_m(x) = \frac{2shx}{m\pi} + \frac{x}{m} K_{m-1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

en voor

$$m \text{ oneven} \quad K_m(x) = \frac{2chx}{m\pi} + \frac{x}{m} K_{m-1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Nu kennen wij uit 17) $K_0(x)$, want daar vinden wij

$$K_0(x) = -\frac{2}{\pi} \left[x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]$$

zoodat uit 22) volgt, dat

$$K_1(x) = \frac{2chx}{\pi} - \frac{2x}{\pi} \left[x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Uit 21) volgt

$$K_2(x) = \frac{shx}{\pi} + \frac{x}{2} K_1(x).$$

Zoo is volgens 18)

$$K_{-1}(x) = \frac{-2}{x\pi} shx$$

en volgens 22)

$$K_{-2}(x) = \frac{2shx}{\pi x^2} - \frac{2chx}{\pi x}$$

Wij zijn dus in staat om ook als m een *geheel* getal is $K_m(x)$ te bepalen, zoodat wij voor alle gevallen $H_m(x)$ en $K_m(x)$ bekend kunnen achten.

Wij kunnen nu uit de relaties 10) en 11) nog een zeer bijzondere gevolgtrekking maken. Schrijven wij ze nog eens neder, dan was

$$\cos(m\pi) H_m(x) + \sin(m\pi) K_m(x) = H_m(-x) \dots \dots \dots 10)$$

$$\sin(m\pi) H_m(x) - \cos(m\pi) K_m(x) = K_m(-x) \dots \dots \dots 11)$$

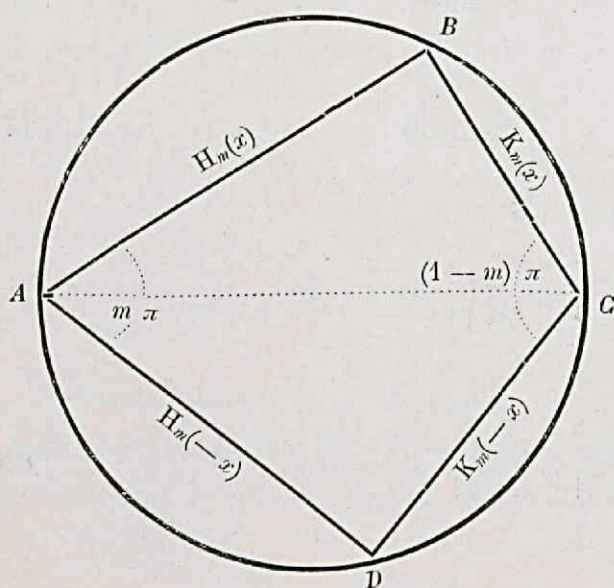
Wij kwadrateeren elk en tellen daarna op, dan is

$$H_m^2(x) + K_m^2(x) = H_m^2(-x) + K_m^2(-x) \dots \dots \dots 24)$$

Vermenigvuldigen wij 10) met $K_m(x)$ en 11) met $H_m(x)$ en tellen op, dan is

$$H_m(x) K_m(-x) + H_m(-x) K_m(x) = \sin(m\pi) [H_m^2(x) + K_m^2(x)] \dots \dots \dots 25)$$

Wij lezen hieruit nu direct eene meetkundige eigenschap af van de integralen $H_m(x)$, $H_m(-x)$, $K_m(x)$, $K_m(-x)$, want 24) is analoog met het theorema van Pythagoras en 25) spreekt het theorema van Ptolemaeus op eigenaardige wijze uit.



Immers zetten wij $H_m(x)$ en $K_m(x)$ als coördinaten AB en BC die loodrecht op elkaar staan en dus in A en C twee diametraal gelegen punten met een cirkel gemeen hebben, er in af, dan onderspannen $AD = H_m(-x)$ en $DC = K_m(-x)$ volgens 24) en 25) dien zelfden diameter AC. Men leest uit 25) af, dat $\angle BAC = m\pi$ is, zoodat $\angle BCD = (1-m)\pi$ moet zijn

Zoodra m echter een *geheel* getal is, wordt het tweede lid van 25) gelijk nul en ontaardt deze meetkundige voorstelling door de betrekkingen 19) en 20) tot een verband, dat op een rechte lijn kan worden weergegeven.

Wij kunnen aan de reeksen 9) en 13) voor $H_m(x)$ en $K_m(x)$ nog een anderen vorm geven.

Stellen wij $H_m(x) = y$ en $K_m(x) = z$ en integreeren wij de differentiaal vergelijkingen die uit 5) en 6) door middel van 3) en 4) volgen, namelijk

$$\frac{dy}{dx} - \frac{m}{x} y = -\frac{\sin(m\pi)}{\pi x} e^{-x}$$

en

$$\frac{dz}{dx} - \frac{m}{x} z = \frac{\cos(m\pi)}{\pi x} e^{-x} - \frac{1}{\pi x} e^x$$

dan is, de constante in de grens van de integraal opnemend

$$y = -x^m \frac{\sin(m\pi)}{\pi} \int e^{-x} x^{-m-1} dx.$$

$$z = x^m \frac{\cos(m\pi)}{\pi} \int e^{-x} x^{-m-1} dx - \frac{x^m}{\pi} \int e^x x^{-m-1} dx.$$

Ontwikkelt men in deze integralen e^{-x} en e^x volgens de reeks $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ en integreert men, dan blijkt in $H_m(x)$ en $K_m(x)$ de $c = 0$ te zijn, zoodat

$$H_m(x) = -x^m \frac{\sin(m\pi)}{\pi} \int_0^x e^{-x} x^{-m-1} dx \dots \dots \dots (26)$$

en

$$K_m(x) = x^m \frac{\cos(m\pi)}{\pi} \int_0^x e^{-x} x^{-m-1} dx - \frac{x^m}{\pi} \int_0^x e^x x^{-m-1} dx \dots \dots \dots (27)$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int e^{-x} x^{-(m+1)} dx &= D^{-1} (e^{-x} x^{-(m+1)}) = e^{-x} \frac{1}{D-1} x^{-(m+1)} = e^{-x} \left\{ \frac{1}{D} + \frac{1}{D^2} + \frac{1}{D^3} + \dots \right\} x^{-(m+1)} = \\ &= e^{-x} \left\{ \frac{-x^{-m}}{m} + \frac{x^{-m+1}}{m(m-1)} - \frac{x^{-m+2}}{m(m-1)(m-2)} \dots \right\} = \\ &= -x^{-m} e^{-x} \left[\frac{1}{m} - \frac{x}{m(m-1)} + \frac{x^2}{m(m-1)(m-2)} - \frac{x^3}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \dots \right] \end{aligned}$$

Derhalve is

$$H_m(x) = \frac{\sin(m\pi)}{\pi} e^{-x} \left[\frac{1}{m} - \frac{x}{m(m-1)} + \frac{x^2}{m(m-1)(m-2)} - \dots \right] \text{ als } m \text{ geen geheel getal is} \quad (28)$$

en daar voor de tweede integraal in $K_m(x)$ de operatie

$$\frac{1}{D-1} \text{ in } \frac{1}{D+1} = \frac{1}{D} - \frac{1}{D^2} + \frac{1}{D^3} - \dots \text{ overgaat, is}$$

$$\begin{aligned} K_m(x) &= -\frac{\cos(m\pi)}{\pi} e^{-x} \left[\frac{1}{m} - \frac{x}{m(m-1)} + \frac{x^2}{m(m-1)(m-2)} + \dots \right] \\ &+ \frac{e^x}{\pi} \left[\frac{1}{m} + \frac{x}{m(m-1)} + \frac{x^2}{m(m-1)(m-2)} + \dots \right] \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

waarin ook m geen geheel getal is.

Stellen wij

$$R_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{x}{m(m-1)} + \frac{x^2}{m(m-1)(m-2)} + \dots$$

dan wordt dus

$$H_m(x) = \frac{\sin(m\pi)}{\pi} e^{-x} R_m(-x) \text{ en } K_m(x) = \frac{e^x}{\pi} R_m(x) - \frac{\cos(m\pi)}{\pi} e^{-x} R_m(-x).$$

De $R_m(x)$ -functie is nog gekenmerkt door de eigenschap dat $\frac{H_{m-p}(x)}{H_m(x)}$ voor p geheel getal in $R_m(x)$ en haar afgeleiden kan worden uitgedrukt. Het bewijs zij den lezer overgelaten.

§ 28. Keeren wij terug tot de functie

$$\frac{X_n(b)}{b^n} = \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} dV = \frac{1}{n+1} + \frac{b}{(n+2)^2} + \frac{b^2}{(n+3)^3} + \frac{b^3}{(n+4)^4} + \dots$$

dan stellen wij ten slotte

$$b = e^{xe^{i\phi}} = e^{x\cos\phi} [\cos(x\sin\phi) + i\sin(x\sin\phi)].$$

Dan is

$$\begin{aligned} \frac{X_n(e^{xe^{i\phi}})}{e^{nxe^{i\phi}}} &= \int_0^1 V^n e^{Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} [\cos(x\sin\phi) + i\sin(x\sin\phi)]} dV = \\ &= \int_0^1 V^n \left(\frac{1}{V}\right)^{V e^{x\cos\phi} \cos(x\sin\phi)} \left[\cos \left\{ V l \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\phi) \right\} + i \sin \left\{ V l \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\phi) \right\} \right] dV \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{e^{x\cos\phi} \cos(x\sin\phi)}{(n+2)^2} + \frac{e^{2x\cos\phi} \cos(2x\sin\phi)}{(n+3)^3} + \frac{e^{3x\cos\phi} \cos(3x\sin\phi)}{(n+4)^4} + \dots + i \left[\frac{e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\phi)}{(n+2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{2x\cos\phi} \sin(2x\sin\phi)}{(n+3)^3} + \frac{e^{3x\cos\phi} \sin(3x\sin\phi)}{(n+4)^4} + \dots \right] \end{aligned}$$

Derhalve is

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{V e^{x\cos\phi} \cos(x\sin\phi) - n} \cos \left[V l \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\phi) \right] dV &= \frac{1}{n+1} + \frac{e^{x\cos\phi} \cos(x\sin\phi)}{(n+2)^2} + \\ &+ \frac{e^{2x\cos\phi} \cos(2x\sin\phi)}{(n+3)^3} + \frac{e^{3x\cos\phi} \cos(3x\sin\phi)}{(n+4)^4} + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{V e^{x\cos\phi} \cos(x\sin\phi) - n} \sin \left[V l \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\phi) \right] dV &= \frac{e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\phi)}{(n+2)^2} + \\ &+ \frac{e^{2x\cos\phi} \sin(2x\sin\phi)}{(n+3)^3} + \frac{e^{3x\cos\phi} \sin(3x\sin\phi)}{(n+4)^4} + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Beide reeksen zijn weer absoluut convergent.

Vermenigvuldigen wij de reeks 1) met $\cos(m\varphi)d\varphi$ en 2) met $\sin(m\varphi)d\varphi$, deelen door π en integreeren wij elke reeks van 0 tot π naar φ , dan is volgens de twee in § 27 vermelde integralen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{Ve^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)-n} \cos(m\varphi) \cos \left[Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\varphi) \right] dV d\varphi = \\ & = \frac{x^m}{2 \cdot m! (n+2)^2} + \frac{(2x)^m}{2 \cdot m! (n+3)^3} + \frac{(3x)^m}{2 \cdot m! (n+4)^4} + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{Ve^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)-n} \sin(m\varphi) \sin \left[Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\varphi) \right] dV d\varphi = \\ & = \frac{x^m}{2 \cdot m! (n+2)^2} + \frac{(2x)^m}{2 \cdot m! (n+3)^3} + \frac{(3x)^m}{2 \cdot m! (n+4)^4} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

m geheel getal en positief.

Tellen wij ze op en trekken wij de tweede van de eerste af, dan vinden wij

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{Ve^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)-n} \cos \left[m\varphi - Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\varphi) \right] dV d\varphi = \\ & = \frac{x^m}{m!} \left[\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{2^m}{(n+3)^3} + \frac{3^m}{(n+4)^4} + \dots \right] \dots \quad (5) \end{aligned}$$

m geheel getal en positief.

en

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{Ve^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)-n} \cos \left[m\varphi + Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\varphi) \right] dV d\varphi = 0 \quad (6)$$

m geheel getal en positief.

Vermenigvuldigen wij (1) met $\sin(m\varphi)d\varphi$ en (2) met $\cos(m\varphi)d\varphi$, deelen door π en integreeren elke reeks van 0 tot π naar φ , dan moeten wij voorzichtig zijn met onze gevolgtrekkingen en zullen daarom dit geval meer en détail behandelen. Wij krijgen dus vooreerst:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{Ve^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)-n} \sin(m\varphi) \cos \left[Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\varphi) \right] d\varphi dV = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin m\varphi}{n+1} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{x\cos\phi} \sin(m\varphi) \cos(x\sin\varphi)}{(n+2)^2} d\varphi + \dots \quad (7) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{Ve^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)-n} \cos(m\varphi) \sin \left[Vl \frac{1}{V} e^{x\cos\phi} \sin(x\sin\varphi) \right] d\varphi dV = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{x\cos\phi} \cos(m\varphi) \sin(x\sin\varphi)}{(n+2)^2} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{2x\cos\phi} \cos(m\varphi) \sin(2x\sin\varphi)}{(n+3)^3} d\varphi + \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Ontwikkelen wij nu in de tweede leden $e^{px \cos \phi} \cos (px \sin \phi)$ en $e^{px \cos \phi} \sin (px \sin \phi)$ volgens de bekende reeksen

$$e^{px \cos \phi} \cos (px \sin \phi) = 1 + \frac{px \cos \phi}{1} + \frac{p^2 x^2 \cos 2\phi}{2!} + \frac{p^3 x^3 \cos 3\phi}{3!} + \dots$$

en

$$e^{px \cos \phi} \sin (px \sin \phi) = px \sin \phi + \frac{p^2 x^2 \sin 2\phi}{2!} + \frac{p^3 x^3 \sin 3\phi}{3!} + \dots$$

dan ontstaan er in de tweede leden integralen van den vorm $\int_0^\pi \sin (m\phi) \cos (q\phi) d\phi$ en $\int_0^\pi \cos (m\phi) \sin (q\phi) d\phi$, waarin q steeds een *geheel* positief getal is en wij ook van m dit zullen onderstellen om in overeenstemming te blijven met de aannamen in 3) en 4).

Nu is

$$\sin (a\phi) \cos (b\phi) = \frac{1}{2} [\sin \{(a+b)\phi\} + \sin \{(a-b)\phi\}]$$

en derhalve is

$$\int_0^\pi \sin (a\phi) \cos (b\phi) d\phi = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos \{(a+b)\phi\}}{a+b} + \frac{\cos \{(a-b)\phi\}}{a-b} \right]_0^\pi = I$$

Aannemende dat a en b geheele getallen zijn, doen zich nu de volgende gevallen voor:

$$1^\circ. \quad a = b \quad I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin (2a\phi) d\phi = \left[\frac{\cos (2a\phi)}{4a} \right]_0^\pi = 0;$$

2°. $a + b$ even en $a - b$ even, dan is dus a even en b even of a en b oneven, en

$$I = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} \right] = 0;$$

3°. Het geval dat $a + b$ even en $a - b$ oneven is, kan, als a en b geheele getallen zijn, niet voorkomen, wel als a en b breuken mogen zijn (bijv. $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$), maar dit sluiten wij uit; evenmin kan $a + b$ oneven en $a - b$ even zijn als a en b geheele getallen zijn;

4°. $a + b$ en $a - b$ elk oneven. Dan kan dus a even en b oneven, of a oneven en b even zijn, en is

$$I = -\frac{1}{2} \left[\frac{-1}{a+b} - \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} \right] = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2 - b^2} \quad \cdot \quad \cdot \quad (9)$$

De integraal heeft dus alleen in dit geval eene van nul afwijkende waarde.

Wij moeten dus bij de bepaling van (7) en (8) onderscheiden tusschen m even en m oneven en vinden derhalve, daar $\int_0^\pi \sin (m\phi) d\phi = 0$ als m even en daar $\int_0^\pi \sin (m\phi) d\phi = +\frac{2}{m}$ als m oneven is, de volgende waarden voor de tweede leden A en B respectievelijk van (7) en (8):

$$m = \text{even.} \quad A = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2mx}{m^2-1} + \frac{2mx^3}{3!(m^2-3^2)} + \frac{2mx^5}{5!(m^2-5^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+2)^2} + \\ + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2m(2x)}{m^2-1} + \frac{2m(2x)^3}{3!(m^2-3^2)} + \frac{2m(2x)^5}{5!(m^2-5^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+3)^3} + \dots$$

Stellen wij

$$\int_0^\pi e^{px \cos \phi} \sin(m\phi) \cos(px \sin \phi) d\phi = A_m(px) \quad \text{en} \quad \int_0^\pi e^{px \cos \phi} \cos(m\phi) \sin(px \sin \phi) d\phi = B_m(px),$$

dan is dus

$$A_m(px) = 2m \left[\frac{px}{m^2-1} + \frac{(px)^3}{3!(m^2-3^2)} + \frac{(px)^5}{5!(m^2-5^2)} + \frac{(px)^7}{7!(m^2-7^2)} + \dots \right] m \text{ geheel en even .. (10)}$$

Dus

$$A = \frac{1}{\pi} \left[\frac{A_m(x)}{(n+2)^2} + \frac{A_m(2x)}{(n+3)^3} + \frac{A_m(3x)}{(n+4)^4} + \frac{A_m(4x)}{(n+5)^5} + \dots \right] (11)$$

Zoo is

$$B = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x}{1-m^2} + \frac{2.3(x)^3}{3!(3^2-m^2)} + \frac{2.5x^5}{5!(5^2-m^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+2)^2} + \\ + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2(2x)}{1-m^2} + \frac{2.3(2x)^3}{3!(3^2-m^2)} + \frac{2.5(2x)^5}{5!(5^2-m^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+3)^3} + \dots$$

en daar

$$B_m(px) = 2 \left[\frac{px}{1-m^2} + \frac{3(px)^3}{3!(3^2-m^2)} + \frac{5(px)^5}{5!(5^2-m^2)} + \frac{7(px)^7}{7!(7^2-m^2)} + \dots \right] . . . (12)$$

m geheel en even, is dus

$$B = \frac{1}{\pi} \left[\frac{B_m(x)}{(n+2)^2} + \frac{B_m(2x)}{(n+3)^3} + \frac{B_m(3x)}{(n+4)^4} + \frac{B_m(4x)}{(n+5)^5} + \dots \right] (13)$$

$$m = \text{oneven.} \quad A = \frac{1}{\pi} \left[\frac{+2}{(n+1)m} + \frac{2}{m(n+2)^2} + \frac{2}{m(n+3)^3} + \dots \right] + \\ + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2mx^2}{2!(m^2-2^2)} + \frac{2mx^4}{4!(m^2-4^2)} + \frac{2mx^6}{6!(m^2-6^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+2)^2} + \dots$$

en daar

$$A_m(px) = +\frac{2}{m} + 2m \frac{(px)^2}{2!(m^2-2^2)} + 2m \frac{(px)^4}{4!(m^2-4^2)} + 2m \frac{(px)^6}{6!(m^2-6^2)} + \dots m \text{ geheel en oneven (14)}$$

is dus

$$A = \frac{1}{\pi} \left[\frac{A_m(0)}{n+1} + \frac{A_m(x)}{(n+2)^2} + \frac{A_m(2x)}{(n+3)^3} + \frac{A_m(3x)}{(n+4)^4} + \dots \right] (15)$$

Zoo is

$$B = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2.2x^2}{2!(2^2-m^2)} + \frac{2.4x^4}{4!(4^2-m^2)} + \frac{2.6x^6}{6!(6^2-m^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left[\frac{2.2(2x)^2}{2!(2^2-m^2)} + \frac{2.4(2x)^4}{4!(4^2-m^2)} + \frac{2.6(2x)^6}{6!(6^2-m^2)} + \dots \right] \frac{1}{(n+3)^3} + \dots$$

en daar

$$B_m(px) = 2 \left[\frac{2(px)^2}{2!(2^2-m^2)} + \frac{4(px)^4}{4!(4^2-m^2)} + \frac{6(px)^6}{6!(6^2-m^2)} + \dots \right] \quad . \quad . \quad (16)$$

m geheel en oneven, is dus

$$B = \frac{1}{\pi} \left[\frac{B_m(x)}{(n+2)^2} + \frac{B_m(2x)}{(n+3)^3} + \frac{B_m(3x)}{(n+4)^4} + \frac{B_m(4x)}{(n+5)^5} + \dots \right] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Nu is

$$A_m(px) - B_m(px) = \int_0^\pi e^{px \cos \phi} \sin[m\phi - px \sin \phi] d\phi = \pi K_m(px) =$$

$$= 2 \left[\frac{px}{m-1} + \frac{(px)^3}{3!(m-3)} + \frac{(px)^5}{5!(m-5)} + \dots \right] \quad m \text{ even en geheel} \quad . \quad . \quad (18)$$

en

$$A_m(px) - B_m(px) = \pi K_m(px) =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{m} + \frac{(px)^2}{2!(m-2)} + \frac{(px)^4}{4!(m-4)} + \frac{(px)^6}{6!(m-6)} + \dots \right] \quad m \text{ oneven en geheel} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Trekken wij derhalve (8) van (7) af, dan vinden wij

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V} \right)^{V e^{x \cos \phi} \cos(x \sin \phi) - n} \sin \left[m\phi - V l \frac{1}{V} \cdot e^{x \cos \phi} \sin(x \sin \phi) \right] d\phi dV =$$

$$= \frac{K_m(0)}{n+1} + \frac{K_m(x)}{(n+2)^2} + \frac{K_m(2x)}{(n+3)^3} + \frac{K_m(3x)}{(n+4)^4} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

De formules (18) en (19) zijn bovendien de gewenschte aanvulling tot de formules (21) en (22) der vorige paragraaf.

§ 29. Indien men twee absoluut convergente reeksen

$$\varphi(u) = A + Bu + Cu^2 + \dots$$

$$\text{en} \quad \psi(u) = A' + \frac{B'}{u} + \frac{C'}{u^2} + \dots$$

bezit, dan heeft PARSEVAL aangetoond¹⁾, dat men de waarde van de reeks $AA' + BB' + CC' + \dots$ kan uitdrukken door de bepaalde integraal

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(e^{i\vartheta}) \psi(e^{i\vartheta}) + \varphi(e^{-i\vartheta}) \psi(e^{-i\vartheta})] d\vartheta = AA' + BB' + CC' + \dots \quad (1)$$

Men kan nu van dit fraaie theorema steeds op twee wijzen gebruik maken om de machtreeks $AA' + BB'x + CC'x^2 + DD'x^3 + \dots$ te summeeren tot een bepaalde integraal.

Immers $\varphi(ux) = A + Bxu + Cx^2u^2 + \dots$ en $\psi(u) = A' + \frac{B'}{u} + \frac{C'}{u^2} + \dots$ levert

$$AA' + BB'x + CC'x^2 + DD'x^3 + \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(xe^{i\vartheta}) \psi(e^{i\vartheta}) + \varphi(xe^{-i\vartheta}) \psi(e^{-i\vartheta})] d\vartheta \quad (2)$$

maar ook

$$\varphi(u) = A + Bu + Cu^2 + \dots \quad \text{en} \quad \psi\left(\frac{u}{x}\right) = A' + \frac{B'x}{u} + \frac{C'x^2}{u^2} + \dots \quad \text{levert}$$

$$AA' + BB'x + CC'x^2 + DD'x^3 + \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(e^{i\vartheta}) \psi\left(\frac{1}{x}e^{i\vartheta}\right) + \varphi(e^{-i\vartheta}) \psi\left(\frac{1}{x}e^{-i\vartheta}\right)] d\vartheta \quad (3)$$

De gelijkheid der twee integralen (2) en (3) is daarmede tevens aangetoond.

Houdt men zich in de analyse gaarne bezig met de absoluut convergente reeks e^x , onze beschouwingen leverden ons een nieuwe absoluut convergente reeks

$$xx_0(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{4^4} + \dots$$

en het theorema van PARSEVAL biedt ons een zeer bruikbaar middel om deze twee reeksen onderling te verwerken en daarom te komen tot integralen, die door buitengewoon sterk convergeerende reeksen worden voorgesteld.

Gaan wij, om direct het algemeener geval te nemen, uit van de reeksen

$$\frac{x_n(b)}{b^{n-1}} = b \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} dV = \frac{b}{n+1} + \frac{b^2}{(n+2)^2} + \frac{b^3}{(n+3)^3} + \dots$$

en

$$\frac{x}{e^b} = 1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2!b^2} + \frac{x^3}{3!b^3} + \dots$$

dan is dus

¹⁾ Zie o. a. BOOLE. Differential equations. Fourth. Ed. pag. 477. London. Macmillan. LAURENT. Traité d'Analyse. Tome III. pag. 410. Paris. Gauthier Villars.

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [e^{(1-n)i\vartheta + xe^{-i\vartheta}} x_n(e^{i\vartheta}) + e^{(n-1)i\vartheta + xe^{i\vartheta}} x_n(e^{-i\vartheta})] d\vartheta \quad (4)$$

Nu is volgens (7) § 25

$$x_n(e^{i\vartheta}) = e^{in\vartheta} [\dot{x}_n(\vartheta) + i\dot{x}_n(\vartheta)] \text{ en } x_n(e^{-i\vartheta}) = e^{-in\vartheta} [\dot{x}_n(\vartheta) - i\dot{x}_n(\vartheta)]$$

Dus

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{e^{i\vartheta + xe^{-i\vartheta}} [\dot{x}_n(\vartheta) + i\dot{x}_n(\vartheta)] + e^{-i\vartheta + xe^{i\vartheta}} [\dot{x}_n(\vartheta) - i\dot{x}_n(\vartheta)]\} d\vartheta$$

Daar

$$e^{i\vartheta + xe^{-i\vartheta}} = e^{i[\vartheta - x \sin \vartheta] + x \cos \vartheta} = e^{x \cos \vartheta} \{\cos [\vartheta - x \sin \vartheta] + i \sin [\vartheta - x \sin \vartheta]\}$$

wordt dus

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \vartheta} \{[\dot{x}_n(\vartheta) + i\dot{x}_n(\vartheta)] [\cos (\vartheta - x \sin \vartheta) + i \sin (\vartheta - x \sin \vartheta)] +$$

$$+ [\dot{x}_n(\vartheta) - i\dot{x}_n(\vartheta)] [\cos (\vartheta - x \sin \vartheta) - i \sin (\vartheta - x \sin \vartheta)]\} d\vartheta$$

Scheiden wij tot reële deelen, dan is dus, daar de coefficient van i nul is, alleen

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \vartheta} [\dot{x}_n(\vartheta) \cos (\vartheta - x \sin \vartheta) - \dot{x}_n(\vartheta) \sin (\vartheta - x \sin \vartheta)] d\vartheta \quad (5)$$

Nu is volgens § 25

$$\dot{x}_n(\vartheta) = \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{x \cos \vartheta - n} \cos [Vl \frac{1}{V} \sin \vartheta] dV \text{ en } \dot{x}_n(\vartheta) = \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{x \cos \vartheta - n} \sin [Vl \frac{1}{V} \sin \vartheta] dv$$

Substitueeren wij dit in (5), dan vinden wij als eindresultaat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 V^n e^{(x+Vl \frac{1}{V}) \cos \vartheta} \cos [\vartheta - (x - Vl \frac{1}{V}) \sin \vartheta] dv d\vartheta = \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots \quad (6)$$

Nemen wij ten tweede de reeksen

$$\frac{x_n(xb)}{(xb)^{n-1}} = xb \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{xb \cos \vartheta - n} dv = \frac{xb}{n+1} + \frac{x^2 b^2}{(n+2)^2} + \frac{x^3 b^3}{(n+3)^3} + \dots$$

en

$$e^{\frac{1}{b}} = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{2! b^2} + \frac{1}{3! b^3} + \dots$$

dan is dus

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [(xe^{i\vartheta})^{1-n} e^{-i\vartheta} x_n(re^{+i\vartheta}) + (xe^{-i\vartheta})^{1-n} e^{i\vartheta} x_n(re^{-i\vartheta})] d\vartheta = R \quad (7)$$

Nu is

$$x_n(xe^{i\vartheta}) = (xe^{i\vartheta})^n \int_0^1 V^n e^{xVl \frac{1}{V} e^{i\vartheta}} dV = (xe^{i\vartheta})^n \int_0^1 V^n e^{xVl \frac{1}{V} \cos \vartheta} \{ \cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) + i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) \} dV. \quad (8)$$

Substitueeren wij dit in 7), dan is de reeks

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 V^n x e^{xVl \frac{1}{V} \cos \vartheta} [e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} \{ \cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) + i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) \} + \\ &\quad + e^{-i\vartheta} + e^{i\vartheta} \{ \cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) - i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) \}] d\vartheta dV = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 x V^n e^{(1+xVl \frac{1}{V}) \cos \vartheta} [\{ \cos(\vartheta - \sin \vartheta) + i \sin(\vartheta - \sin \vartheta) \} \{ \cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) + \\ &\quad + i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) \} + \\ &\quad + \{ \cos(\vartheta + \sin \vartheta) - i \sin(\vartheta + \sin \vartheta) \} \{ \cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) - i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) \}] d\vartheta dV \end{aligned}$$

Scheiden wij tot reële deelen, dan is de factor van i gelijk nul en vinden wij

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 x V^n e^{(1+xVl \frac{1}{V}) \cos \vartheta} \cos \left[\vartheta - \left(1 - xVl \frac{1}{V} \right) \sin \vartheta \right] d\vartheta dV. \quad (9)$$

Men kan natuurlijk 6) en 9) ook aldus schrijven

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 e^{x \cos \vartheta} \left(\frac{1}{V} \right)^{V \cos \vartheta - n} \cos [\vartheta - (x + V l V) \sin \vartheta] d\vartheta dV &= \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2!(n+2)^2} + \frac{x^3}{3!(n+3)^3} + \dots \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 e^{x \cos \vartheta} \left(\frac{1}{V} \right)^{x V \cos \vartheta - n} \cos [\vartheta - (1 + x V l V) \sin \vartheta] d\vartheta dV &= \frac{1}{n+1} + \frac{x}{2!(n+2)^2} + \frac{x^2}{3!(n+3)^3} + \dots \end{aligned}$$

De convergentie is evident.

Men krijgt natuurlijk slechts één integraal in het geval dat men uit een gegeven

reeks eene andere met de kwadraten der coëfficiënten van de gegeven reeks als coëfficiënten, wil opbouwen. Nemen wij als voorbeeld de reeksen

$$\frac{x_n(xb)}{(xb)^n} = \frac{1}{n+1} + \frac{xb}{(n+2)^2} + \frac{x^2b^2}{(n+3)^3} + \dots$$

en

$$\frac{x_n\left(\frac{1}{b}\right)}{b^{-n}} = \frac{1}{n+1} + \frac{b^{-1}}{(n+2)^2} + \frac{b^{-2}}{(n+3)^3} + \dots$$

dan is dus

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{x_n(xe^{i\vartheta})}{(xe^{i\vartheta})^n} \cdot \frac{x_n(e^{-i\vartheta})}{e^{-in\vartheta}} + \frac{x_n(xe^{-i\vartheta})}{(xe^{-i\vartheta})^n} \cdot \frac{x_n(e^{i\vartheta})}{e^{in\vartheta}} \right] d\vartheta = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x}{(n+2)^4} + \frac{x^2}{(n+3)^6} + \frac{x^3}{(n+4)^8} + \dots = R.$$

Substitueeren wij hierin formule 8), dan is

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 V^n e^{xVl \frac{1}{V} \cos \vartheta} [\cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) + i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta)] [\dot{x}_n(\vartheta) - i \dot{x}_n(\vartheta)] d\vartheta dv + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 V^n e^{xVl \frac{1}{V} \cos \vartheta} [\cos(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta) - i \sin(xVl \frac{1}{V} \sin \vartheta)] [\dot{x}_n(\vartheta) + i \dot{x}_n(\vartheta)] d\vartheta dv.$$

Derhalve is, daar de factor van i nul is, alleen

$$R = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 V^{2n} e^{(x+1)Vl \frac{1}{V} \cos \vartheta} \cos\left[(x-1)Vl \frac{1}{V} \sin \vartheta\right] d\vartheta dv = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 V^{2n} \left(\frac{1}{V}\right)^{(x+1)V \cos \vartheta} \cos[(1-x)VlV \sin \vartheta] d\vartheta dv$$

Derhalve is

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{(1+x)V \cos \vartheta - 2n} \cos[(1-x)VlV \sin \vartheta] d\vartheta dv = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x}{(n+2)^4} + \frac{x^2}{(n+3)^6} + \frac{x^3}{(n+4)^8} + \dots \quad (10)$$

Op gelijke wijze leidt men af, dat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{(x+1) \cos \vartheta} \cos[(x-1) \sin \vartheta] d\vartheta = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \dots \quad (11)$$

Hoewel deze integralen nog door differentiaties en substituties allerlei vervormingen toelaten, stappen wij van hen af, om ons nog ten slotte bezig te houden met de integralen, waartoe $V(a, b, n)$ aanleiding geeft.

§ 30. Stellen wij in

$$V(e^t, b, n) = e^{nt} b^n \int_0^1 \left(\frac{e^t}{V}\right)^{bV-n} dV = x_n(b) + tx_{n+1}(b) + \frac{t^2}{2!} x_{n+2}(b) + \frac{t^3}{3!} x_{n+3}(b) + \dots \text{voor } t = ix$$

dan wordt

$$\begin{aligned} V(e^{ix}, b, n) &= b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{1}{V}\right)^{bV} [\cos(xbV) + i \sin(xbV)] dV = \\ &= x_n(b) - \frac{x^2}{2!} x_{n+2}(b) + \frac{x^4}{4!} x_{n+4}(b) \dots + i \left[x x_{n+1}(b) - \frac{x^3}{3!} x_{n+3}(b) + \dots \right] \end{aligned}$$

Dus

$$b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} \cos(xbV) dV = x_n(b) - \frac{x^2}{2!} x_{n+2}(b) + \frac{x^4}{4!} x_{n+4}(b) - \frac{x^6}{6!} x_{n+6}(b) + \dots \quad (1)$$

$$b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} \sin(xbV) dV = x x_{n+1}(b) - \frac{x^3}{3!} x_{n+3}(b) + \frac{x^5}{5!} x_{n+5}(b) - \frac{x^7}{7!} x_{n+7}(b) + \dots \quad (2)$$

Stellen wij hierin $x = iy$, dan is

$$b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} \cosh(ybV) dV = x_n(b) + \frac{y^2}{2!} x_{n+2}(b) + \frac{y^4}{4!} x_{n+4}(b) + \frac{y^6}{6!} x_{n+6}(b) + \dots \quad (3)$$

$$b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} \sinh(ybV) dV = y x_{n+1}(b) + \frac{y^3}{3!} x_{n+3}(b) + \frac{y^5}{5!} x_{n+5}(b) + \frac{y^7}{7!} x_{n+7}(b) + \dots \quad (4)$$

Stellen wij in $V(e^t, b, n)$ en in 1), 2), 3) en 4) $b = ia$ en bedenken dat volgens § 24 onder 6)

$$x_n(ia) = (ia)^n [c_n(a) + i s_n(a)],$$

dan is

$$\begin{aligned} V(e^t, ia, n) &= e^{nt} (ia)^n \int_0^1 e^{-nt} V^n e^{iatV - iaVtV} dV = (ia)^n \int_0^1 V^n \{ \cos[atV - aVtV] + i \sin[atV - aVtV] \} dV = \\ &= (ia)^n \left\{ c_n(a) + t(ia) c_{n+1}(a) + \frac{t^2}{2!} (ia)^2 c_{n+2}(a) + \dots + i s_n(a) + it(ia) s_{n+1}(a) + i \frac{t^2}{2!} (ia)^2 s_{n+2}(a) + \dots \right\} \end{aligned}$$

Derhalve is

$$\int_0^1 V^n \cos[atV - aVtV] dV = c_n(a) - t a s_{n+1}(a) - \frac{t^2 a^2}{2!} c_{n+2}(a) + \frac{t^3 a^3}{3!} s_{n+3}(a) + \frac{t^4 a^4}{4!} c_{n+4}(a) \quad (5)$$

$$\int_0^1 V^n \sin[atV - aVtV] dV = s_n(a) + t a c_{n+1}(a) - \frac{t^2 a^2}{2!} s_{n+2}(a) - \frac{t^3 a^3}{3!} c_{n+3}(a) + \frac{t^4 a^4}{4!} s_{n+4}(a) \quad (6)$$

Zoo wordt 1)

$$(ia)^n \int_0^1 V^n e^{iaVl} \frac{1}{V} \cos(iraV) dV = (ia)^n \int_0^1 V^n ch(xaV) \left[\cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) + i \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) \right] dV =$$

$$= (ia)^n \left[c_n(a) + is_n(a) - \frac{x^2(ia)^2}{2!} c_{n+2}(a) - i \frac{x^2(ia)^2}{2!} s_{n+2}(a) + \frac{x^4(ia)^4}{4!} c_{n+4}(a) + i \frac{x^4(ia)^4}{4!} s_{n+4}(a) \dots \right]$$

Dus

$$\int_0^1 V^n ch(xaV) \cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = c_n(a) + \frac{x^2 a^2}{2!} c_{n+2}(a) + \frac{x^4 a^4}{4!} c_{n+4}(a) + \dots \quad (7)$$

$$\int_0^1 V^n ch(xaV) \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = s_n(a) + \frac{x^2 a^2}{2!} s_{n+2}(a) + \frac{x^4 a^4}{4!} s_{n+4}(a) + \dots \quad (8)$$

En 2) wordt

$$(ia)^n \int_0^1 V^n e^{iaVl} \frac{1}{V} \sin(iraV) dV = (ia)^n i \int_0^1 V^n sh(xaV) \left[\cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) + i \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) \right] dV =$$

$$= (ia)^n \left[iaxc_{n+1}(a) + i(ia)xs_{n+1}(a) - (ia)^3 \frac{x^3}{3!} c_{n+3}(a) - i(ia)^3 \frac{x^3}{3!} s_{n+3}(a) + (ia)^5 \frac{x^5}{5!} c_{n+5}(a) + i(ia)^5 \frac{x^5}{5!} s_{n+5}(a) \dots \right]$$

Dus

$$\int_0^1 V^n sh(xaV) \cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = axc_{n+1}(a) + \frac{x^3 a^3}{3!} c_{n+3}(a) + \frac{x^5 a^5}{5!} c_{n+5}(a) + \dots \quad (9)$$

$$\int_0^1 V^n sh(xaV) \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = axs_{n+1}(a) + \frac{x^3 a^3}{3!} s_{n+3}(a) + \frac{x^5 a^5}{5!} s_{n+5}(a) + \dots \quad (10)$$

De integraal 3) levert daar $ch(ix) = \cos(x)$ en $sh(ix) = i \sin(x)$

$$(ia)^n \int_0^1 V^n e^{iaVl} \frac{1}{V} ch(iyaV) dV = (ia)^n \int_0^1 V^n \cos(yaV) \left[\cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) + i \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) \right] dV =$$

$$= (ia)^n \left[c_n(a) + is_n(a) + (ia)^2 \frac{y^2}{2!} c_{n+2}(a) + (ia)^2 i \frac{y^2}{2!} s_{n+2}(a) + (ia)^4 \frac{y^4}{4!} c_{n+4}(a) + (ia)^4 i \frac{y^4}{4!} s_{n+4}(a) + \dots \right]$$

Dus

$$\int_0^1 V^n \cos(yaV) \cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = c_n(a) - \frac{y^2 a^2}{2!} c_{n+2}(a) + \frac{y^4 a^4}{4!} c_{n+4}(a) + \dots \quad (11)$$

en

$$\int_0^1 V^n \cos(yaV) \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = s_n(a) - \frac{y^2 a^2}{2!} s_{n+2}(a) + \frac{y^4 a^4}{4!} s_{n+4}(a) - \dots \quad (12)$$

Stelt men in (9) en (10) $x = iy$, dan vindt men direct

$$\int_0^1 V^n \sin(yaV) \cos\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = ay c_{n+1}(a) - \frac{y^3 a^3}{3!} c_{n+3}(a) + \frac{y^5 a^5}{5!} c_{n+5}(a) + \dots \quad (13)$$

en

$$\int_0^1 V^n \sin(ayV) \sin\left(aVl \frac{1}{V}\right) dV = ay s_{n+1}(a) - \frac{y^3 a^3}{3!} s_{n+3}(a) + \frac{y^5 a^5}{5!} s_{n+5}(a) + \dots \quad (14)$$

Men kan nu weer stelselmatig in $V(e^t, b, n)$ en in (1), (2), (3) en (4) voor b in de plaats stellen $e^{i\phi}$, $xe^{i\phi}$ en $e^{xe^{i\phi}}$ en krijgt dan telkens tien integralen, die in $x_{n+p}(e^{i\phi})$ -, $x_{n+p}(xe^{i\phi})$ - en $x_{n+p}(e^{xe^{i\phi}})$ -functies worden uitgedrukt. In de vorige paragrafen hebben wij deze functies behandeld en laten ter bekorting deze substituties aan den lezer over.

§ 31. Wij stellen nu in

$$V(e^t, b, n) = b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} e^{tV} dV = x_n(b) + tx_{n+1}(b) + \frac{t^2}{2!} x_{n+2}(b) + \dots \text{ voor } t = xe^{i\phi},$$

dan is

$$\begin{aligned} V(e^{xe^{i\phi}}, b, n) &= b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} e^{xbV \cos \phi} [\cos(bVx \sin \phi) + i \sin(bVx \sin \phi)] dV = \\ &= x_n(b) + (x \cos \phi + ix \sin \phi) x_{n+1}(b) + \frac{1}{2!} (x^2 \cos 2\phi + ix^2 \sin 2\phi) x_{n+2}(b) + \dots \end{aligned}$$

Dus

$$b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{x \cos \phi}}{V}\right)^{bV} \cos(bVx \sin \phi) dV = x_n(b) + xx_{n+1}(b) \cos \phi + \frac{x^2}{2!} x_{n+2}(b) \cos(2\phi) + \dots \quad (1)$$

$$b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{x \cos \phi}}{V}\right)^{bV} \sin(bVx \sin \phi) dV = xx_{n+1}(b) \sin \phi + \frac{x^2}{2!} x_{n+2}(b) \sin(2\phi) + \dots \quad (2)$$

Stellen wij $\phi = i\psi$, dan is daar $\cos(i\psi) = ch\psi$ en $\sin(i\psi) = ish\psi$

$$b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{xch\psi}}{V}\right)^{bV} ch(bVx sh\psi) dV = x_n(b) + xx_{n+1}(b) ch\psi + \frac{x^2}{2!} x_{n+2}(b) ch(2\psi) + \dots \quad (3)$$

$$b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{xch\psi}}{V}\right)^{bV} sh(bVx sh\psi) dV = xx_{n+1}(b) sh\psi + \frac{x^2}{2!} x_{n+2}(b) sh(2\psi) + \dots \quad (4)$$

Elk dezer reeksen bevat nog weer vier variabele parameters x, n, b, φ , zoodat zij een bizonder groot aantal particuliere gevallen in zich bevatten.

§ 32. Ten slotte stellen wij in

$$V(e^t, b, n) = b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV-n} e^{t^b V} dV = x_n(b) + tx_{n+1}(b) + \frac{t^2}{2!} x_{n+2}(b) + \dots \text{ voor } t = e^{x \cos \phi},$$

dan is daar

$$t^m = e^{mx \cos \phi} [\cos(mx \sin \phi) + i \sin(mx \sin \phi)]$$

$$\begin{aligned} V(e^{x \cos \phi}, b, n) &= b^n \int_0^1 \left(\frac{1}{V}\right)^{bV} V^n e^{bV e^{x \cos \phi} + bV \cos(x \sin \phi)} [\cos\{bV \sin(x \sin \phi)\} + i \sin\{bV \sin(x \sin \phi)\}] dV = \\ &= x_n(b) + e^{x \cos \phi} [\cos(x \sin \phi) + i \sin(x \sin \phi)] x_{n+1}(b) + \frac{e^{2x \cos \phi}}{2!} [\cos(2x \sin \phi) + i \sin(2x \sin \phi)] x_{n+2}(b) \dots \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{x \cos \phi} + \cos(x \sin \phi)}{V}\right)^{bV} \cos[bV \sin(x \sin \phi)] dV &= x_n(b) + e^{x \cos \phi} \cos(x \sin \phi) x_{n+1}(b) + \\ &+ \frac{e^{2x \cos \phi}}{2!} \cos(2x \sin \phi) x_{n+2}(b) + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{x \cos \phi} + \cos(x \sin \phi)}{V}\right)^{bV} \sin[bV \sin(x \sin \phi)] dV &= e^{x \cos \phi} \sin(x \sin \phi) x_{n+1}(b) + \\ &+ \frac{e^{2x \cos \phi}}{2!} \sin(2x \sin \phi) x_{n+2}(b) + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Stellen wij $\varphi = i\psi$, dan is daar $\cos(i\psi) = ch\psi$ en $\sin(i\psi) = ish\psi$

$$\begin{aligned} b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{x ch \psi} + ch(x sh \psi)}{V}\right)^{bV} ch[bV sh(x sh \psi)] dV &= x_n(b) + e^{x ch \psi} ch(x sh \psi) x_{n+1}(b) + \\ &+ \frac{e^{2x ch \psi}}{2!} ch(2x sh \psi) x_{n+2}(b) + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^n \int_0^1 V^n \left(\frac{e^{x ch \psi} + ch(x sh \psi)}{V}\right)^{bV} sh[bV sh(x sh \psi)] dV &= e^{x ch \psi} sh(x sh \psi) x_{n+1}(b) + \\ &+ \frac{e^{2x ch \psi}}{2!} sh(2x sh \psi) x_{n+2}(b) + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Aan het einde van mijn onderzoek gekomen nog een enkel woord. Wij hebben in de tweede Afdeeling van dit geschrift de integralen nagegaan, die samenhangen met of voortvloeien uit de foutenwet van het meetkundig gemiddelde, de foutenwet van het gemiddelde van de soort $\mathcal{F}(x) = lx$.

Het is te verwachten, dat ook foutenwetten van andere soorten van gemiddelden een even groot aantal integralen met zich medeslepen. Hiermede zou een weg gewezen zijn tot het onderzoek van een onbegrensd aantal integralen met hunne verwanten. Of dit loonend zijn zal moet de tijd leeren.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

1. Het is wenschelijk om een algemeen gemiddelde x_m van n grootheden $x_1, x_2, \dots, x_n$, te definieeren door

$$n \mathcal{F}(x_m) = \mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_2) + \dots + \mathcal{F}(x_n)$$

en daarin de willekeurige functie $\mathcal{F}(x)$ de „soort” van het gemiddelde te noemen.

2. De bewijsvoering van FERRERO¹⁾ dat een algemeen gemiddelde van waarnemingen dichter zal naderen tot hun arithmetisch gemiddelde naarmate zij minder verschillen, bevat eene petitio principii.

3. Men kan de algemeene integraal $c_1 = \varphi(c_2)$ eener lineaire partieele differentiaal-vergelijking altijd brengen in den vorm eener bepaalde integraal.

4. De mogelijkheid is niet uitgesloten dat de wetten der mechanica niet anders zijn dan uitspraken over het gemiddeld gedrag van bewegingen der kleinste materiele deelen in de natuur.

5. Bij de afleiding der vergelijkingen voor stroomcomponenten en diëlectrische polarisatie per volume-eenheid heeft BOLTZMANN²⁾ de hypothese ondergeschoven dat de richtingen van de cyclische coördinaat l en van $\frac{dl}{dt}$ dezelfde zijn.

6. Het mathematisch kansbegrip berust op deze drie hypothesen:

1°. De kans eener gebeurtenis is een functie van het aantal gevallen te midden waarvan de gebeurtenis kan optreden en het aantal gevallen waarin zij optreedt.

¹⁾ FERRERO. Esposizione del metodo dei minimi quadrati. Firenze. 1876.

²⁾ BOLTZMANN. Vorlesungen über Maxwells Theorie der Electricität und des Lichtes. I. Leipzig. 1891.

2°. Die kans wordt evenredig grooter met het aantal gevallen waarin de gebeurtenis optreedt.

3°. Die kans wordt evenredig kleiner naarmate het aantal gevallen te midden waarvan de gebeurtenis zich bevindt, grooter is.

7. Het is inconsequent om bij niet-lineaire voorwaarde-vergelijkingen deze volgens het theorema van TAYLOR te ontwikkelen tot lineaire voorwaarde-vergelijkingen in de verschillen der waarnemingen met de werkelijke waarden.

8. Er zijn gevallen waarin het criterium van CHAUVENET¹⁾ om een waarneming te ecarteeren uit een reeks gelijksoortige, omdat zij te zeer afwijkt van de overige, tot geen resultaat kan voeren.

9. Bij de berekening van de gevoeligheid eener balans neemt men er ten onrechte geen rekening mede dat het juk niet op eene mathematische ribbe steunt.

10. Bij microscopie is belichting door middel van licht-overdragende massieve glasstaven te verkiezen boven het ABBE'sche verlichtingsapparaat.

11. De proeven van PFEFFER²⁾ behoeven niet ten gunste der physiologische verklaring van de psycho-physiologische wet van WEBER te worden opgevat.

12. Op het standpunt mijner Theorie des Schönen moet men, aannemende dat eene schoonste combinatie uit combinaties van schoonste deelen kan bestaan en

aannemende dat een verhouding van deelen door den menschelijken geest aesthetisch kan beoordeeld worden,

noodzakelijk het meetkundig gemiddelde aanvaarden als maat voor een schoonst element.

¹⁾ CHAUVENET. Manual of spheric. and pract. Astronomy. II.

²⁾ PFEFFER. Unters. a. d. botan. Inst. Tübingen. I. 1884 en II. 1888.

