Over de essentieele vergelijkingen der kromme lijnen

H. ONNEN.

OVER DE

ESSENTIEELE VERGELIJKINGEN

DER

KROMME LIJNEN.

A. A. Nyland

No 381

OVER DE ESSENTIEELE VERGELIJKINGEN

DER

KROMME LIJNEN.

OVER DE ESSENTIEELE VERGELIJKINGEN

DER

KROMME LIJNEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. W. KOSTER,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE GENEESKUNDIGE FACULTEIT,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

DOOR

HENDRIK ONNEN,

GEBOREN TE DORDRECHT,

TE VERDEDIGEN

OP WOENSDAG DEN 29EN MEI 1867 DES NAMIDDAGS TE 2 URE.

AMSTERDAM,

D. B. CENTEN.

1867.

GEDRUKT BIJ ELLERMAN & HOITSEMA.

AAN MIJNE OUDERS.

Bij het eindigen mijner academische loopbaan is het mij eene behoefte, mijn hartelijken dank te betuigen aan de Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, voor hun voortreffelijk onderwijs en voor de belangstelling die ik steeds van hunne zijde ondervond. Mogen zij mij ook in het vervolg hunne voorlichtingen en raadgevingen niet ontzeggen!

Inzonderheid gevoel ik mij verplicht aan mijn Hooggeachten Promotor, Prof. Buys Ballot, *voor de vriendschappelijke en welwillende hulp, mij betoond bij het vervaardigen van dit proefschrift.*

INHOUD.

INLEIDING.

In 1835 werd door Professor H. Schröder een begin gemaakt met de uitgave van het mathematisch gedeelte van Krause's nagelaten geschriften, waarvan het eerste deel den titel voert: *Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima.* In hetzelfde jaar, doch eenige maanden later, verscheen een werkje van Adolf Peters, getiteld: *Neue Curvenlehre; Grundzüge einer Umgestaltung der höheren Geometrie durch ihre ursprüngliche analytische Methode.*

Geheel onafhankelijk van elkaar beoogden Krause en Peters hetzelfde doel, namelijk het invoeren eener nieuwe coördinaten-methode in de analytische geometrie, die als de *„oorspronkelijke"* moet worden beschouwd, omdat de essentieele eigenschappen der kromme lijnen er aan ten grondslag liggen.

Hunne beschouwingswijze schijnt evenwel weinig ingang gevonden te hebben: althans er zijn — voor zoo ver mij bekend is — geene pogingen in het werk gesteld, deze theorie der kromme lijnen uit te breiden of op nieuw te ontwikkelen. Het behandelen van andere coördinaten-systemen, dan het rechtlijnige en polaire, zoo als reeds in 1827 door Möbius in *Der barycentrische Calcul*, en later door Plücker, Druckenmüller, Swellengrebel, e. a. geschied is, kan niet als zoodanig beschouwd worden, omdat daarin niet hetzelfde gronddenkbeeld ligt opgesloten, waarop de theorie van Krause en Peters steunt, namelijk: het vinden eener vergelijking, die de uitdrukking is van de *essentieele eigenschap* der kromme lijn. Druckenmüller's systeem *rs* [1]) is het eenige, dat met hunne oorspronkelijke coördinaten-methode eenigzins kan worden vergeleken.

Evenmin heeft Lamarle in zijne *Théorie géometrique des rayons et centres de*

---

[1]) Die Uebertragungsprincipien der analytischen Geometrie von Dr. N. Druckenmüller. Erster Band. Erste Abtheilung. Viertes Kapitel.

courbure [1]) het oog gehad op de theorie van Krause en Peters, ofschoon zijne formulen voor den kromtestraal meer tot den vorm eener essentieele vergelijking naderen, dan de vergelijkingen in één der coördinaten-stelsels van Plücker, Druckenmüller, Swellengrebel, enz.

Mag men van *elk* coördinaten-stelsel de verwachting koesteren, dat de toepassing er van voor de theorie der kromme lijnen in eenig opzicht van nut zal zijn, — zoo veel te meer is dit geoorloofd met betrekking tot eene theorie, die op de karakteristieke eigenschap der kromme lijnen is gebouwd. Het is daarom dat ik *de theorie der essentieele vergelijkingen* tot het onderwerp van mijn academisch proefschrift gekozen heb. De gronddenkbeelden zijn aan de werkjes van Krause en Peters ontleend; in hoe verre ik gemeend heb van hen te moeten verschillen heb ik in het eerste Hoofdstuk aangewezen en gemotiveerd.

---

[1]) Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique; 26me Année, 2me Série, T. II, 1857.

HOOFDSTUK I.

OVER DE ESSENTIEELE VERGELIJKINGEN IN HET ALGEMEEN.

§ 1.

DE THEORIE VAN KRAUSE.

Krause's eerste verhandeling: „*Protheoria generalis*" is in twee deelen gesplitst. Het eerste gedeelte bevat eene wijsgeerige beschouwing van de ruimte, de oppervlakte, de lijn en het punt, waarvan de resultaten in de volgende definities liggen opgesloten:

„Linea est simplex extensio cum extensionis forma etiam simplici definita, h. e. *longitudo cum directione*" (§ 16).

„*Rectitudo* lineae posita est in directionis identitate, unitate, simplicitate" (§ 17).

„*Lineae curvae* essentiale proprium characteristicum atque exclusivum est *directionis internae continua alteratio s. mutatio.*" (§ 18)

„Modus, quo linea curva directionem continuo mutat, apte vocabitur: curvitudinis lex." (§ 20)

In het tweede gedeelte: „*de oppositione directionis quatenus ea in spatio, superficie, linea, et in angulo plano occurrit*", wordt de kromme lijn beschouwd als de limiet van eene gebrokene lijn („*polygonismus*"), die ontstaat door eene onbepaalde rechte lijn in verschillende punten om te buigen, zoodat zij in die punten plotseling van richting verandert. Daar de rechte lijn zich ter weerszijden van elk punt in twee tegengestelde richtingen uitbreidt en daarenboven elke buiging in tweeërlei zin kan plaats hebben, zoo heeft men: „modus quatuor simplices constructionis polygonialis s. polygonismaticae"; door elk dezer vier gevallen resp: met de drie anderen te combineeren, verkrijgt men: „tria symptomata principalia characteristica, in formandis polygonismis rectilineis occurrentia, nempe *flexurae in partem contrariam*" (buigpunten); „*rever-*

1*

sionis, s. rostri acuti" (keerpunten) *„et rostri adunci"* (keerpunten van de tweede soort, snavels) (§ 41). Gaat men nu over tot de limiet van den *polygonismus*, dan gelden deze beschouwingen de kromme lijnen.

Krause zondert nu den cirkel af van alle andere krommen *(„versicurvae")*, als hebbende overal dezelfde kromte, en wijst er op, dat in elk punt eener kromme lijn de kromte wordt aangegeven door een bepaalden cirkel, even als de richting wordt bepaald door de raaklijn.

Noemt men l de lengte van den boog eener kromme van een bepaald punt af, en w den hoek, dien de raaklijn maakt met eene bepaalde richting, dan geeft eene vergelijking tusschen die veranderlijken het middel aan: „lineam methodo analytico-geometricâ, eâque originariâ ac plane generali discutiendi." (§ 66)

In de tweede verhandeling: *„Theoria originaria circuli"* worden de eigenschappen des cirkels afgeleid uit de vergelijking $l = \frac{p}{q} w$, terwijl in de derde verhandeling: *„de lineae curvae proprietatibus et symptomatibus generalioribus"* gesproken wordt over den kromtecirkel en den kromtestraal, welke laatste gevonden wordt door differentiatie van de vergelijking: $l = f(w)$; daardoor verkrijgt men tevens de vergelijking van de evoluut der kromme, terwijl door integratie de vergelijking der involuut ontstaat. Hiervan levert de vierde verhandeling eene toepassing op de involuut des cirkels, terwijl eindelijk de vijfde verhandeling geheel gewijd is aan de kromme lijn, die door de vergelijking $l = \frac{1}{w}$ wordt uitgedrukt en door Krause *„Antiloga"* genoemd wordt: „quia ejus arcus et anguli sunt in ratione reciproca seu ἀντιλογικῶς constituti."

§ 2.

DE THEORIE VAN PETERS.

Aan de inleidende beschouwingen in het werkje van Peters ligt de volgende hoofdgedachte ten grondslag. De gewone coördinaten-methoden leeren de eigenschappen kennen van het vlak, waarvan de kromme lijn de grens is, *niet* van de kromme lijn zelve; het zijn eigenschappen, die de kromme lijn in betrekking stellen tot andere lijnen of punten buiten haar, en dus *relatief* zijn ten opzichte der kromme, maar *absoluut* ten opzichte der vlakte-uitgebreidheid. Hoe zal men een coördinaten-methode vinden, die onmiddellijk de *absolute* eigenschappen der kromme lijn leert kennen? Gelijk het *ontstaan* eener vlakte-uitgebreidheid, door de beweging van een rechte, evenwijdig aan zich zelve, langs eene andere rechte, of wel, door de draaiing eener rechte lijn om één harer punten, den grondslag uitmaakt van het rechtlijnige of polaire coördinaten-stelsel, dat van die vlakte-uitgebreidheid de absolute eigenschappen leert kennen, zoo zal het *ontstaan* eener kromme lijn door de beweging van een *punt* de basis moeten zijn van een coördinaten-stelsel, dat de absolute eigenschappen dier lijn doet kennen. Het punt heeft daarbij eene voortgaande en eene draaiende beweging: *voortgang* en *draaiing* zijn dus de *elementen* der kromme lijn; het eerste wordt aangegeven door de lengte van den boog (s) van een bepaald punt af, het tweede door den hoek (w) der raaklijn met eene bepaalde richting.

Voor het overige verschilt de wijze, waarop Peters de bijzondere punten beschouwt en den kromtestraal en den kromtecirkel bepaalt, in den grond niet van hetgeen men hieromtrent bij Krause vindt; alleen verdient het opmerking, dat Peters als de uitdrukking der krommingswet beschouwt de vergelijking, die verkregen wordt door differentiatie van $w = f(s)$, en niet deze vergelijking zelve (zoo als Krause doet), daar het differentiaal-quotient $\frac{dw}{ds}$ de grootte der kromte aangeeft. (Verg. § 23, N°. 11, § 44 en § 47).

Behalve dat Peters meer verschillende kromme lijnen behandelt dan Krause, is er nog één punt dat in zijne theorie uitvoeriger wordt behandeld, namelijk de klassificatie der kromme lijnen naar hare absolute eigenschappen, dat is 1° naar den loop der kromme in het algemeen: of zij tot in het oneindige voortloopt of niet, en welke bijzondere punten men aantreft; 2° naar de wijze waarop de kromte verandert; 3° naar het al of niet terugkeeren tot vroeger doorloopene plaatsen *(Selbstbedeckung, Selbstschneidung, Selbstberührung, Selbstmeidung)* (§ 23). Toch is hetgeen hieromtrent pag. 83 en v.v. wordt gezegd, niets meer dan een zeer oppervlakkige schets, die men in § 26 en 27 in haar geheel overziet, onder dezen vorm:

I. De *lengte* des boogs van het aanvangspunt af is:

1 oneindig groot;

2 eindig;

a. Zij nadert die eindige waarde zonder die ooit te bereiken,

b. Zij bereikt die waarde en neemt daarna weer af.

II. De *draaiing* is:

1 oneindig groot;

2 eindig;

a. Zij nadert die waarde zonder haar ooit te bereiken.

b. Zij bereikt die waarde en neemt daarna weer af.

De verdere verdeeling berust op de kromte:

I. Deze is overal even groot (cirkel).

II. Zij ondergaat eene continue verandering, waarbij men kan onderscheiden, of zij van het aanvangspunt af:

a. steeds toeneemt

b. steeds afneemt

c. afwisselend toe- en afneemt.

§ 3.

OPMERKINGEN OMTRENT DEZE BESCHOUWINGEN.

Bij de groote overeenkomst in de wijzen, waarop hetzelfde onderwerp door Krause en Peters wordt behandeld, zijn twee belangrijke punten van verschil, die aanleiding geven tot eenige opmerkingen omtrent den vorm der vergelijking, die het essentieele karakter eener kromme lijn uitdrukt (de essentieele vergelijking dier lijn), en de rol die zoodanige vergelijkingen in de analytische geometrie kunnen vervullen.

1°. Krause beschouwt eene vergelijking tusschen den boog en den draaiingshoek als de uitdrukking der krommingswet en *daarom* van de essentieele eigenschap der kromme lijn, terwijl Peters eerst door differentiatie de krommingswet er uit afleidt. Is nu aan de eene zijde de bewering van Krause juist, dat eene vergelijking de essentieele eigenschap eener kromme lijn zal aangeven, wanneer zij de krommingswet uitdrukt; van den anderen kant zal men met Peters moeten erkennen, dat die krommingswet uit eene vergelijking tusschen den boog en den draaiings-hoek wordt *afgeleid*, niet onmiddellijk er door wordt *uitgedrukt*. Het is even alsof men zeide, dat de formule betrekkelijk den vrijen val der lichamen, die de doorloopen ruimte in functie van den tijd aangeeft: $x = \frac{1}{2} gt^2$ de snelheidswet uitdrukt, omdat die er door differentiatie uit afgeleid wordt.

Daar Krause's meening het resultaat is van de in zijne „*Protheoria generalis*” ontwikkelde beschouwingen, zoo ontstaat de vraag, op welke wijze hij tot de definitie van *krommingswet* geraakt. Een nauwkeurig onderzoek betrekkelijk den gang van zijne redeneering leidt tot de veronderstelling, dat daarin twee begrippen niet genoeg onderscheiden zijn, die tot elkaar in dezelfde verhouding staan als eene functie tot haar afgeleide, en dat hierin de grond moet gezocht worden van het verschil in de opvattingen van Krause en Peters, betreffende de beteekenis eener essentieele vergelijking. Tot nadere toelichting van deze bewering mogen de volgende opmerkingen dienen.

In § 4 zegt Krause:

> „Est vero omnis limitis et limitationis .... forma *directio* (Richtung, Richtheit)"

en bedoelt daarmede waarschijnlijk hetzelfde, wat door den Hoogleeraar Buijs Ballot aldus wordt uitgedrukt:

> „Op het begrip hoek steunt vorm, want die is bepaald door de wijze, waarop men aan de grens van richting verandert." [1])

Had Krause dezelfde omschrijving gebruikt, en in het oog gehouden dat *vorm*, in plaats van hetzelfde te zijn als *richting*, het gevolg is van eene *verandering van richting*, dan zou hij in § 55 ook onderscheid gemaakt hebben tusschen twee definities van „curvitas", die hij nu als identiek beschouwt. Krause zegt namelijk:

> „Curvitas est continua extensionis, quoad directionem cum longitudine conjunctam, mutatio, sive curvitas est continua *formae* extensionis mutatio."

Zoodra er sprake is van eene verandering van *vorm*, zoo moet in elk punt de vorm een bepaalde zijn; deze vorm nu hangt af van de wijze, waarop de richting verandert, dat is van de grootte der richtings-verandering in verhouding tot de verandering in lengte. Dit komt overeen met de eerste definitie van „*curvitas*", alwaar dit woord derhalve de beteekenis heeft van *kromte*, terwijl dan de wijze waarop deze kromte verandert: „*continua formae extensionis mutatio*", de gedaante van de kromme lijn in haar geheel bepaalt.

De wijze waarop Krause het woord „*directio*" in het Duitsch vertaalt: *Richtung*, *Richtheit* (§ 4), geeft aanleiding tot het vermoeden, of hij er soms

---

[1]) Beginselen en Gronden der Meetkunde, bladz. 34.

eene andere beteekenis aan gehecht wil hebben, dan die door ons woord *richting* wordt uitgedrukt; namelijk deze: *de wijze van gericht te zijn*, hetgeen men *gerichtheid* zou kunnen noemen: dan zou het werkelijk hetzelfde beteekenen als *vorm*. Zelfs wordt het op sommige plaatsen noodzakelijk de beteekenis van „*directio*" in dien geest te wijzigen, bijv.:

> § 15. „Directio lineae interna est et externa; .... Interna lineae directio", (de wijze waarop de samenstellende deelen ten opzichte van elkaar *gericht* zijn: de *inrichting*) „per quam ad se ipsam refertur, vocatur lineae forma propria (ihre Gestalt oder Form); externa vero directio ejus positio externa, seu positio (Lage) simpliciter vocatur", (de wijze waarop de lijn, ten opzichte van hetgeen zich buiten haar bevindt, gelegen, *gericht* is).

Of ook § 20, waar Krause zelf deze omschrijving er aan toevoegt:

> „Curvitas ergo ipsa est directio continuo mutata, ergo etiam partium lineae contiguarum inter se et ad curvam totam continuo varians relatio seu habitudo, s. continuo varians positio."

Dat het echter niet in de bedoeling van den schrijver ligt, uitsluitend deze beteekenis aan het woord „*directio*" toe te kennen, blijkt onder anderen uit § 18, waar voor het eerst „directionis internae continua alteratio, s. mutatio" de karakteristieke eigenschap der kromme lijn wordt genoemd, terwijl bijna onmiddellijk daarop het volgende gezegd wordt:

> „Cum lineae cujusvis, ideoque et lineae curvae, limes internus punctum sit; patet: lineam curvam in quovis puncto habere directionem unam definitam et unicam; quae adeo exprimi potest per lineam rectam eam, cujus et ipsius idem punctum limes internus sit, et quae habeat eandem directionem internam unicam."

De raaklijn toch heeft overal dezelfde *richting* als de kromme in het raakpunt, terwijl de kromtecirkel overal denzelfden *vorm (gerichtheid)* heeft.

Wanneer men nu in de uitdrukking:

> „modus, quo linea curva directionem continuo mutat, apte vocabitur *curvitudinis lex*" (§ 20)

het woord „*directio*" beurtelings opvat in den zin van *vorm* en in dien van *richting*, dan zal in het eerste geval de definitie van krommingswet juist zijn, maar in strijd met de vergelijking, die Krause als de uitdrukking dier wet beschouwt; terwijl er in het tweede geval overeenstemming is, wat dit laatste betreft, maar mindere juistheid in de definitie zelve.

De onduidelijkheid der uitdrukking: „forma est directio", heeft derhalve eene begripsverwarring ten gevolge, die door de geheele „Protheoria generalis" heen weer te vinden is: eerst in de definitie van „curvitas", later in die van „curvitudinis lex". Door de begrippen *richting* en *vorm* overal van elkaar te scheiden, komt men tot hetzelfde resultaat als Peters: dat de krommingswet eerst verkregen wordt door differentiatie van de vergelijking tusschen den boog en den draaiingshoek.

Dit kan echter geen grond opleveren tot de bewering dat deze vergelijking de essentieele eigenschap der kromme lijn uitdrukt: want uit elke vergelijking in coördinaten kan de krommingswet afgeleid worden, al vereischt dit ook meer samengestelde bewerkingen.

Peters heeft dan ook een ander uitgangspunt, namelijk: *de genetische bepaling eener kromme lijn.* Hoezeer deze in vele opzichten is aan te bevelen, — hier, waar het om het wezen der kromme lijn te doen is, is het juist een vereischte van *de essentieele bepaling* uit te gaan (vgl. Buijs Ballot, Beginselen en Gronden der Meetkunde, bl. 23 en 24), en is het *niet* „gleichgültig, welche von beiden Vorstellungs-arten man wählt" (Peters, pag. 21). Daarenboven is de bewering dat de gewone coördinaten-methoden de eigenschappen der door de kromme lijnen begrensde vlakken leeren kennen in strijd met de heerschende denkbeelden; immers, men beschouwt de vergelijking eener kromme in rechtlijnige of polaire coördinaten als eene conditie, waaraan elk punt der kromme moet voldoen, en dus de kromme lijn zelve als een meetkundige plaats; het *niet essentieele* van zoodanige vergelijking is hierin gelegen, dat zij de plaats van elk punt afzonderlijk ten opzichte van andere lijnen of punten bepaalt, en dus slechts *middellijk* de betrekkelijke ligging der punten onderling, dat is den *vorm*, het *wezen* der kromme lijn leert kennen.

Hieruit vloeit dan tevens voort, dat eene vergelijking tusschen den boog en den draaiingshoek evenmin eene essentieele kan heeten: het eenige onderscheid tusschen zoodanige vergelijking en ééne in andere coördinaten is hierin gelegen dat het aanvangspunt en de aanvangsrichting aan de kromme lijn zelve ontleend zijn (ofschoon dit voor de aanvangsrichting niet eens een vereischte is); overigens is het weder de plaats van elk punt, die door de vergelijking wordt aangegeven, niet de betrekkelijke ligging der op elkaar volgende punten. Hoedanig men eene vergelijking kan vinden, die de kromme lijn niet als *meetkundige plaats*, maar als *mathematischen vorm* leert kennen, onmiddellijk uitdrukkende de wijze waarop de lijn gekromd is: hare *gekromdheid*, zullen wij in de volgende § nader onderzoeken.

2°. Een tweede punt van verschil tusschen Krause en Peters betreft de toepassing der essentieele vergelijkingen in de analytische Meetkunde. Beiden spreken het uit, dat deze er de eerste plaats behooren in te nemen, maar Peters heeft daarbij vooral het oog op eene rangschikking der krommen naar den vorm, terwijl Krause zich meer bepaald ten doel stelt al de eigenschappen eener kromme lijn uit hare essentieele vergelijking af te leiden.

Ten einde te beslissen welke plaats de theorie der essentieele vergelijkingen in de analytische Meetkunde behoort in te nemen, zal men moeten onderzoeken welke voordeelen zij oplevert. In het algemeen heeft elk coördinaten-stelsel zijne eigenaardige voordeelen: elke vergelijking eener kromme lijn is de algebraïsche uitdrukking van eene eigenschap dier kromme, en geeft aanleiding tot het vinden van andere eigenschappen, die uit eene vergelijking in andere coördinaten minder gemakkelijk te voorschijn treden. Dit zal dus ook het geval zijn met de essentieele vergelijkingen; het kan evenwel eerst door eene veelzijdige toepassing worden beslist, in hoe verre hare theorie in dit opzicht kan wedijveren met andere coördinaten-methoden. Dat zij dezen den voorrang zal betwisten is echter niet waarschijnlijk, daar in het algemeen die eigenschappen der kromme lijnen, waardoor deze in betrekking worden gesteld tot andere lijnen of punten buiten haar — en die derhalve uit andere vergelijkingen gemakkelijker blijken —, in de toepassing de meeste waarde hebben.

In een ander opzicht staat de theorie der essentieele vergelijkingen boven andere coördinaten-methoden. Wanneer men onderzoekt hoedanig een zelfde eigenschap bij verschillende krommen gewijzigd is, dan komt men van zelf tot eene *rangschikking*, tot een *systeem*. Hiertoe kan elke eigenschap dienen, en men zal alzoo een oneindig aantal van zoodanige systemen kunnen vormen. Gelijk bij elke systematisatie kan men ook hier spreken van een *natuurlijk* en een *kunstmatig* systeem, naar gelang al dan niet *de karakteristieke eigenschap* den grondslag der verdeeling uitmaakt. Daar nu eene essentieele vergelijking — zal zij dien naam met recht dragen — de karakteristieke eigenschap der kromme lijn moet uitdrukken, zoo zal zij de eenige basis kunnen zijn van eene *natuurlijke* verdeeling der kromme lijnen.

Het is daarom, dat ik gemeend heb de theorie van Krause en Peters, gewijzigd overeenkomstig de gemaakte opmerkingen omtrent den vorm der essentieele vergelijkingen zelve, in de eerste plaats te moeten beschouwen met het oog op eene systematiek der kromme lijnen, daarbij het voetspoor volgende dat door Peters in zijne boven aangehaalde schets is aangewezen; om daarna door een paar voorbeelden aan te toonen aan welke zijden het veld der wetenschap door de toepassing dier theorie wellicht kan worden uitgebreid.

§ 4.

DE VORM EENER ESSENTIEELE VERGELIJKING.

Het begrip *recht* steunt op de voorstelling van eene bepaalde *richting*. Zoodra eene lijn de minste *afwijking van richting* vertoont, noemt men haar niet meer *een rechte lijn*. De karakteristieke eigenschap der *rechte lijn* is dus deze: dat de richting tusschen elk willekeurig paar harer punten altijd dezelfde is.

Daartegenover staat het begrip *krom*, waarbij de voorstelling eener konstante richting is uitgesloten: elk paar punten wijst in het algemeen een andere richting aan dan een ander paar punten. De essentieele eigenschap der *kromme lijn* is dan hierin gelegen, dat van drie op elkaar volgende punten, de richting der beide eerste eene andere is dan die van de twee laatste punten. Hoe grooter de afwijking van richting van drie op elkaar volgende punten is, in des te sterker mate treedt de eigenschap der *gekromdheid* op, — des te grooter is de *kromte* op die plaats der kromme lijn.

Alleen die kromme lijnen kunnen aan eene mathematische beschouwing onderworpen worden, waarbij eene bepaalde wet heerscht, volgens welke elk punt ten opzichte der aangrenzende punten gelegen is; die wet bepaalt den vorm der lijn; de algebraïsche uitdrukking dier wet is hare essentieele vergelijking. Is nu de betrekkelijke ligging van eenig drietal op elkaar volgende punten, dat is de kromte op die plaats der lijn, bekend, dan zal de ligging van een volgend punt bepaald zijn door de afwijking in richting van dit punt ten opzichte van de beide voorgaande, d. i. door de kromte die van deze afwijking het gevolg is. Volgens het zoo even opgemerkte is de ligging van een vierde punt ten opzichte van de drie voorgaande overal naar dezelfde wet bepaald;

deze wet zal dus worden uitgedrukt door eene vergelijking die voor elke waarde der kromte de onmiddellijk volgende waarde der kromte, of wel de hoegrootheid harer verandering leert kennen. Noemt men in het algemeen de kromte k en de hoegrootheid harer verandering d, dan zijn dit de veranderlijken eener essentieele vergelijking.

Men kan de grootheden k en d door twee anderen vervangen, die eene geometrische beteekenis hebben, zoodat het mogelijk wordt eene kromme lijn door middel van hare essentieele vergelijking te construeeren. Daartoe leiden de volgende beschouwingen.

Door middel van Krause's theorie der *polygonismen* is het gemakkelijk te bewijzen dat een polygonismus, waarvan alle zijden en alle buigingshoeken gelijk zijn, tot limiet heeft de *cirkellijn*. In zoodanige polygonismus is 1°. de betrekkelijke ligging van elk drietal op elkaar volgende hoekpunten dezelfde, en 2°. de verhouding tusschen de som van een willekeurig aantal buigingshoeken en de som van de overeenkomstige zijden konstant. Past men dit toe op den cirkel, dan verkrijgt men deze bekende eigenschappen: 1° de kromte van den cirkel is konstant en 2° de verhouding tusschen den hoek van twee raaklijnen en den boog tusschen de raakpunten is konstant.

Aan deze verhouding is de kromte evenredig; want in dezelfde reden waarin zij grooter of kleiner wordt, neemt de afwijkingshoek van drie op elkaar volgende punten — d. i. de kromte — toe of af. Noemt men derhalve een willekeurigen boog s en den overeenkomstigen hoek φ, dan is

$$k = a\,\frac{\varphi}{s}\;\ldots.\;(1)$$

Daar echter, als r den straal beteekent en φ in graden is uitgedrukt,

$$r = \frac{180}{\pi}\cdot\frac{s}{\varphi}$$

is, zoo heeft men:

$$k = \frac{180}{\pi}\,a.\,\frac{1}{r}$$

De factor a hangt af van de eenheid van kromte; nemende daarvoor de kromte van den cirkel, die met de lengte-eenheid als straal beschreven is, zoo wordt:

$$a = \frac{\pi}{180}.$$

Stelt men

$$\frac{\pi}{180}\,\varphi = w$$

zoodat de eenheid, waarin w wordt uitgedrukt, de hoek is, overeenkomende met een boog, gelijk r, dat is een hoek van 57°, 2957...., zoo wordt verg: (1) eenvoudig:

$$k = \frac{w}{s}.$$

Van verschillende cirkels is derhalve de kromte omgekeerd evenredig met den straal, en daar deze alle mogelijke waarden kan hebben, zoo kan men ook elke bepaalde kromte door een bepaalden cirkel voorstellen. Voor $k = 0$ ontstaat de rechte lijn, terwijl voor eene oneindig groote waarde der kromte, de cirkel tot een punt wordt gereduceerd.

Men kan derhalve de betrekkelijke ligging van drie op elkaar volgende punten eener willekeurige kromme lijn, dat is hare kromte op die plaats, aangeven door een bepaalden cirkel; deze heet dan *kromtecirkel*, zijn straal *kromtestraal*, zijn middelpunt *krommingsmiddelpunt*.

De kromtecirkel heeft drie punten met de kromme gemeen. Noemt men het verschil tusschen de richting van het eerste paar punten en die van het tweede en derde punt, m. a. w. den hoek van twee op elkaar volgende raaklijnen: dw, en het boogelement: ds, dan is, omdat dw en ds aan de kromme en den kromtecirkel gemeen zijn:

$$k = \frac{dw}{ds}, \quad \rho = \frac{ds}{dw} \quad \text{en} \quad k = \frac{1}{\rho},$$

als ρ den kromtestraal beteekent.

Uit $k = \frac{1}{\rho}$ volgt verder door differentiatie:

$$dk = -\frac{1}{\rho^2}\, d\rho;$$

$d\rho$ is het boogelement der kromme, die de meetkundige plaats is van de krommingsmiddelpunten, en waaraan men den naam van *evoluut* gegeven heeft. De kromtestralen der kromme zijn raaklijnen aan deze evoluut, en maken den zelfden hoek als de raaklijnen in de overeenkomstige punten der kromme, omdat zij er loodrecht op staan. De kromtestraal der evoluut, dien wij in navolging van Krause ρ_{-1} zullen noemen, is derhalve gelijk $\frac{d\rho}{dw}$, zoodat men heeft:

$$dk = -\frac{\rho_{-1}}{\rho^2}\, dw$$

Deze uitdrukking geeft de aangroeiing der kromte aan voor een verschil n richting, gelijk dw. Door te substitueeren:

$$dw = \frac{1}{\rho}\,ds$$

verkrijgt men:

$$dk = -\frac{\rho_{-1}}{\rho^3}\,ds,$$

hetgeen de aangroeiing der kromte aangeeft voor een boog *ds*. Al naar gelang men de verandering der kromte verlangt te kennen voor gelijke richtingsverschillen *dw* of voor gelijke bogen *ds*, d. i. naar gelang men w of s als onafhankelijk veranderlijke kiest, zal men het differentiaalquotient $\frac{dk}{dw} = -\frac{\rho_{-1}}{\rho^2}$ of $\frac{dk}{ds} = -\frac{\rho_{-1}}{\rho^3}$ gebruiken. Beiden geven de *verandering der kromte: d* aan in functie van ρ en ρ_{-1}.

Van de grootheden ρ en ρ_{-1} geeft dus de eerste de kromte zelve aan, terwijl de hoegrootheid harer verandering afhangt van ρ_{-1}. Zij leeren de betrekkelijke ligging van vier op elkaar volgende punten kennen, hetgeen dan ook den grondslag uitmaakt van de wijze waarop eene kromme lijn uit hare vergelijking: $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ kan geconstrueerd worden. Begint men namelijk met eenige waarde van ρ, dan kan men daarmede als straal den kromtecirkel beschrijven; neemt men hierop een willekeurig boogje als boogelement aan, zoo zijn drie punten der kromme bekend. Door dit boogje klein genoeg te nemen, kan men de fout die ontstaat, door de kromme te beschouwen als samengesteld uit cirkelboogjes, zoo klein maken als men verkiest. Loodrecht op den kromtestraal, in het krommingsmiddelpunt, komt dan de kromtestraal der evolunt: ρ_{-1}, waarmede men eveneens een cirkelboog beschrijft. Trekt men nu uit het volgende punt der kromme aan dezen cirkelboog een raaklijn, zoo is deze een volgende kromtestraal, het raakpunt een volgend krommingsmiddelpunt. Uit de vergelijking blijkt dan de waarde van ρ_{-1}, correspondeerende met deze nieuwe waarde van ρ, waarmede men op dezelfde wijze handelt. In plaats van gelijke cirkelboogjes te nemen kan men natuurlijk ook den hoek van twee op elkaar volgende kromtestralen telkens even groot nemen. Practisch is de volgende constructie te verkiezen. Men berekent uit de vergelijking voor verschillende waarden van ρ, liefst met gelijke verschillen opklimmende of afdalende, de overeenkomstige waarden van ρ_{-1}, meet op twee rechten, die loodrecht op elkaar staan, van haar snijpunt uit, dat krommingsmiddelpunt is der kromme, één paar correspondeerende waarden af, en beschrijft met ρ_{-1} als straal een cirkelboogje, dat eene lengte heeft gelijk aan het verschil van twee op elkaar volgende waarden van ρ, waardoor een tweede krommingsmiddelpunt geconstrueerd is. Op de raaklijn in dit punt wordt de volgende waarde van ρ afgemeten en op den straal de correspondeerende waarde van ρ_{-1}, waarmede nu op nieuw een cirkelboogje wordt beschreven. De aldus verkregene punten der kromme (de uiteinden der ρ's) kunnen door cirkelbogen vereenigd worden uit de krommingsmiddelpunten met de verschillende kromtestralen beschreven. Op deze wijze verkrijgt men door ééne constructie: de kromme lijn zelve, haar evoluut en de evoluut van deze, dat is de tweede evoluut der kromme, hetgeen dit voordeel heeft, dat men eene voorstelling heeft van de wijze waarop de kromte in den loop der kromme lijn verandert.

Wij mogen alzoo eene vergelijking tusschen ρ en ρ_{-1} eene *essentieele vergelijking* noemen, omdat zij de wet uitdrukt, volgens welke elk viertal op elkaar volgende punten ten opzichte van elkaar gelegen zijn.

Er doen zich nu twee vragen voor:

1°. Hoedanig kan die betrekkelijke ligging zijn, — welken vorm kan eene kromme lijn op eenige plaats hebben?

2°. Hoe kan men de vormen onderscheiden, die eene kromme lijn in haar geheel kan opleveren door eene voortdurende continue verandering der kromte?

De eerste vraag zal beantwoord kunnen worden door verschillende waarden van k te combineeren met verschillende waarden van één der differentiaalquotienten $\frac{dk}{dw}$ en $\frac{dk}{ds}$, die de hoegrootheid der verandering van kromte aangeven, en te onderzoeken, welke waarden van ρ en ρ_{-1} daarmede correspondeeren, ten einde de vormen te kunnen construeeren en ze voor elke kromme lijn uit hare essentieele vergelijking: $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ te kunnen bepalen.

Ten einde de tweede vraag te beantwoorden, bedenke men, dat door integratie van de differentiaal-vergelijking:

$$f(\rho, \rho_{-1}) = 0 \text{ of: } f\left(\rho, \frac{d\rho}{dw}\right) = 0$$

eene vergelijking:

$$\rho = \varphi(w) \dots . (1)$$

ontstaat, die de waarden van ρ, en dus ook van k, in de verschillende punten der kromme lijn leert kennen. Zij geeft de continue verandering der kromte aan in eene kromme lijn, waarin de betrekkelijke ligging van elk viertal punten bepaald wordt door de wet, die in de functie $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ is uitgedrukt, en die men nu in haar geheel doorloopt, de plaats van elk punt bepalende door een coördinaat w.

Hetzelfde geldt van de vergelijking:

$$\rho = \psi(s) \ldots . (2),$$

die ontstaat door integratie van

$$f\left(\rho, \rho \frac{d\rho}{ds}\right) = 0$$

welke vergelijking verkregen wordt, door in $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ voor ρ_{-1} te subtueeren: $\rho \frac{d\rho}{ds}$. De vergelijkingen (1) en (2) zullen derhalve tot grondslag moeten dienen bij de beantwoording der tweede vraag.

§ 5.

DRUCKENMÜLLER'S SYSTEEM rs EN DE THEORIE VAN LAMARLE.

Alvorens op den aangeduiden weg den vorm eener kromme lijn nader te beschouwen wenschen wij voor een oogenblik terug te komen op het in de inleiding gezegde omtrent andere coördinaten-systemen, die aan de theorie der essentieele vergelijkingen verwant zijn.

Dit geldt in de eerste plaats Druckenmüller's systeem rs [1]). Ofschoon de vergelijkingen in dat systeem niet vergeleken kunnen worden met de essentieele vergelijkingen, zoo kan men toch het beginsel, dat er aan ten grondslag ligt beschouwen als een meer algemeenen vorm van de zoo even ontwikkelde denkbeelden. Druckenmüller beschouwt daarbij namelijk eene kromme lijn als de omhullende van alle cirkels, die bepaald worden door de verschillende standen van één cirkel, wiens middelpunt zich beweegt langs eene bepaalde kromme, die den naam van *as* draagt, en wiens straal tegelijkertijd eene continue verandering ondergaat. Hierin nu is opgesloten het geval, dat de kromme, waarlangs het middelpunt des cirkels zich beweegt de evoluut is der kromme lijn die men beschouwt.

Verder dan in beginsel is echter de vergelijking niet door te voeren, daar Druckenmüller als coördinaten aanneemt de lengte s van den boog der *as* en den straal r des bewegelijken cirkels; daardoor wordt de vergelijking van de involuut der *as*:

$$r \pm s + p = 0.$$

Men zou het systeem zoodanig moeten wijzigen, dat in plaats van den coör-

---

[1]) Die Uebertragungsprincipien der analytischen Geometrie, von Dr. N. Druckenmüller, Erste Abtheilung, viertes Kapitel.

dinaat s werd ingevoerd de straal van den cirkel, waarvan de evoluut weder de omhullende is, en wiens middelpunt zich beweegt langs een kromme, die weder evoluut is van deze. Daardoor verliest echter Druckenmüller's systeem zijn eigenaardig karakter, weshalve wij ons bij deze korte aanwijzing bepalen, om eenigzins uitvoeriger de beschouwingswijze van Lamarle na te gaan, daar deze in de volgende Hoofdstukken enkele malen zal worden toegepast.

De theorie van Lamarle is daardoor gekarakteriseerd dat de *differentialen* en *differentiaal-quotienten* vervangen zijn door *snelheden* en *verhoudingen van snelheden* [1]). Lamarle's definitie eener kromme lijn is deze: „La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, le point glissant sur la droite, et la droite tournant autour du point", terwijl hij zich in de op bladz. 2 aangehaalde verhandeling in de *Bulletins de l'Académie R. de Belgique* ten doel stelt: „une courbe étant définie géométriquement, déterminer pour un point quelconque de cette courbe le rayon et le centre du cercle osculateur."

De kromtestraal is de verhouding tusschen de snelheid v, waarmede het punt zich langs de rechte beweegt en de draaiings-snelheid w van deze; het komt er dus op aan die verhouding uit de gegeven conditie te vinden.

Daartoe moet men eerst trachten de richting te bepalen van de snelheid v, en daar het slechts op de *verhouding* der snelheden aankomt, en het geheel onverschillig is, hoe groot de absolute snelheden zijn, zoo kan men door een willekeurig stuk op de rechte die deze richting aanwijst de snelheid v voorstellen. Tevens is nu de richting van de normaal bekend, waarop zich het krommingsmiddelpunt moet bevinden. Al naar den aard der conditien zal men nu verschillende wegen moeten inslaan om dit laatste nader te bepalen. Daarbij is het dikwijls gemakkelijk zich het ontstaan der kromme lijn voor te stellen door de beweging van een bepaald punt der rechte, terwijl deze in hare eigene richting voortschuift en tevens om dat punt draait; het voortbrengende punt verplaatst zich dan niet op de rechte zelve. Denkt men zich daarbij nog, dat het geheele vlak, waarin de beweging plaats grijpt, door de rechte in hare beweging wordt medegenomen, dan zal op elk oogenblik dat vlak draaien om een bepaald punt (*centre instantané de rotation*), dat niets anders is dan het krommingsmiddelpunt der kromme. Daar nu bij zoodanige beweging elk punt

---

[1]) Verg. Exposé Géométrique du Calcul différentiel et intégral, par Ernest Lamarle.

van het vlak eene snelheid heeft, waarvan de richting loodrecht is op de lijn, die dat punt met het krommingsmiddelpunt vereenigt, zoo zal omgekeerd dit laatste punt gevonden kunnen worden, wanneer de richting der snelheden van twee punten in het vlak bekend is.

De hoeksnelheid is op elk oogenblik voor alle punten dezelfde en gelijk aan de snelheid, waarmede de bewegende rechte om het voortbrengende punt draait. Dit in aanmerking nemende kan men licht aantoonen dat de snelheid van elk punt dier rechte ontbonden kan worden in twee composanten, waarvan de ééne gericht is langs de bewegende rechte en gelijk is aan de snelheid waarmede deze in hare richting voortschuift, terwijl de andere loodrecht daarop staat en eene waarde heeft, die gevonden wordt door de hoeksnelheid te vermenigvuldigen met den afstand tusschen het punt dat men beschouwt en het voortbrengende punt. Hieruit volgt eene methode om de snelheid te vinden van het snijpunt van twee bewegende rechten, wanneer de composante loodrecht op elk dier rechten bekend is. Men richt namelijk in het snijpunt op beide rechten loodlijnen op, wier lengten zich verhouden als de gegeven snelheden, en plaatst op het uiteinde van elk dezer weder een loodlijn; dan zal de rechte lijn, die het gegeven punt vereenigt met het snijpunt dezer loodlijnen in richting en grootte de gezochte snelheid voorstellen.

Door middel van deze beschouwingen vindt Lamarle onder anderen eene constructie en eene formule voor den kromtestraal der kegelsneden: voor de ellips en de hyperbel, uit de conditie dat de kromme lijn ontstaat door de beweging van het snijpunt van twee rechten (de voerstralen), die om twee vaste punten (de brandpunten) draaien, zoodanig dat de som of het verschil van de afstanden van dat snijpunt tot elk der vaste punten konstant is; en voor de parabel uit de conditie, dat zij de meetkundige plaats is van de snijpunten van twee rechten, waarvan de ééne om een vast punt draait, terwijl de andere langs een vaste rechte (de richtlijn) schuift, waarop zij loodrecht staat, in dier voege, dat de afstanden van dat snijpunt tot het vaste punt en de vaste rechte steeds gelijk zijn.

De formule:

$$\rho = \frac{2r\,r'}{(r \pm r')\cos b}$$

geeft voor de ellips en de hyperbel den kromtestraal ρ in functie van de voerstralen r en r', en hun halven hoek b; zij gaat voor de parabel over in:

$$\rho = \frac{2r}{\cos b}.$$

Wanneer men de veranderlijken r, r' en b vervangt door den hoek w, dien de raaklijn maakt met eene vaste richting, dan ontstaat eene vergelijking van den vorm:

$$\rho = \varphi\,(w).$$

Deze substitutie is gemakkelijk te verrichten. Ook de meeste andere voorbeelden, waarmede Lamarle zijne theorie toelicht, laten zich op deze wijze behandelen, zoodat hierdoor de weg wordt aangewezen om de essentieele vergelijking eener kromme lijn onmiddellijk uit de gegevene condities op te maken; want, kan men een geometrisch verband vinden tusschen de grootheden, die in de formules van Lamarle voorkomen en ééne der veranderlijken w, s, dan is het ook mogelijk door middel van dezelfde methode zonder dezen omweg tot de essentieele vergelijkingen te geraken. Wij zullen hiervan later een paar voorbeelden geven.

Dikwijls kan men even gemakkelijk hetzelfde doel bereiken door gebruik te maken van de leer der limieten; althans, het zal *altijd* mogelijk zijn, daar men slechts de bepripppen *snelheid* en *differentiaal* behoeft te verwisselen om de eene methode in de andere om te zetten. Lamarle's theorie heeft echter twee voordeelen: vooreerst vloeit er overal, waar zij wordt toegepast, eene constructie voor het krommingsmiddelpunt uit voort; maar ten tweede worden de moeilijkheden vermeden, die eigen zijn aan het invoeren van oneindig kleine grootheden in eene geometrische beschouwing.

HOOFDSTUK II.

OVER DEN VORM EENER KROMME LIJN OP EENE BEPAALDE PLAATS.

§ 1.

METHODE VAN ONDERZOEK.

De vorm, dien eene kromme lijn op eenige plaats heeft, wordt bepaald door de grootte der kromte en van hare verandering aldaar, dat is door de waarde van k en van $\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$. Beide grootheden kunnen alle mogelijke waarden hebben, zoodat het aantal van zoodanige vormen oneindig groot is. Het specificeeren dezer vormen zal kunnen geschieden door *in de eerste plaats* te onderscheiden, of de *kromte* k:

1°. eene eindige waarde heeft;

2°. gelijk *nul* is;

3°. oneindig groot is,

hetgeen overeen komt met:

eene eindige waarde van den kromtestraal ρ;

$\rho = \infty$, zoodat de kromtecirkel een rechte lijn wordt;

$\rho = 0$, waardoor hij tot een punt gereduceerd is.

Verder kan men onderzoeken, welken invloed het op den vorm hebben zal, als de *verandering der kromte* $\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$:

1°. eene eindige waarde heeft;

2°. oneindig klein is;

3°. oneindig groot is;

Het eerste geeft een toe- of afnemen der kromte te kennen, naar gelang dk positief of negatief is; er blijkt tevens uit, dat k ook vóór en ná het punt, dat men beschouwt, toeneemt of afneemt, omdat eene continu veranderende grootheid geene eindige positieve of negatieve waarde bekomt, zonder onmiddellijk daarvóór en daarna evenzeer eene eindige positieve of negatieve waarde te hebben. Dit is echter niet het geval wanneer het differentiaal-quotient *nul* of *oneindig* is: daarbij zal men nog moeten onderscheiden of het al dan niet van teeken verandert. In elk geval beteekent: $\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$ gelijk *nul*, dat het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden van k hoogstens eene oneindig kleine grootheid van de tweede orde is, en: $\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$ gelijk ∞, dat dit verschil eene eindige grootheid is; maar verandert dk daarbij van teeken, dan is de kromte aan de ééne zijde van het punt dat men beschouwt toenemende, aan de andere zijde afnemende of omgekeerd, met andere woorden k bereikt in dat punt een maximum of minimum waarde.

Is k in eenig punt *nul* of *oneindig*, en heeft daarbij het differentiaal-quotient eene eindige waarde, zoo verandert de kromte aldaar van teeken. De geometrische beteekenis hiervan is duidelijk, wanneer men bedenkt, dat eene lijn naar tweeërlei zijden gekromd kan zijn. Denkt men zich nu in het punt, waar k nul of oneindig is, de raaklijn, dan zal, wanneer de kromte van teeken verandert, de kromme aan weêrskanten van dat punt aan verschillende zijden van die raaklijn liggen, — of ook: de kromtestraal zal aan verschillende zijden van de kromme lijn gelegen zijn.

Men kan naar verkiezing de verandering der kromte aangeven door $\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$. In het eerste geval beschouwt men de aangroeiing der kromte voor een bepaald boogje ds, in het tweede geval voor een bepaald richtings-verschil dw, dat is, men neemt achtereenvolgens s en w als onafhankelijk veranderlijke aan. Deze twee gevallen geven aanleiding tot twee voorstellingen omtrent de wijze, waarop de op elkaar volgende punten eener kromme lijn naast elkaar gelegen zijn, die vooral duidelijk uitkomen wanneer men de beschouwingswijze van Lamarle invoert (bladz. 17). Wordt namelijk ds konstant verondersteld, dan denkt men zich het punt in eene gelijkmatige beweging in ééne richting langs de rechte, terwijl de draaiing van deze met verschillende snelheid en in verschillenden zin plaats kan hebben. Is daarentegen w de onafhankelijk veranderlijke, dan draait zich de rechte met konstante snelheid in dezelfde richting om, terwijl de beweging van het punt langs de rechte in beide richtingen en met veranderlijke snelheid kan geschieden.

Door van elk dezer voorstellingen afzonderlijk uit te gaan bij het combineeren der straks genoemde waarden der kromte met die van de hoegrootheid harer verandering, kan de vraag, tot welke vormen de betrekkelijke ligging van vier op elkaar volgende punten eener kromme lijn aanleiding kan geven, volledig beantwoord worden. Zockt men daarbij telkens de overeenkomstige waarden van ρ en ρ_{-1}, dan volgt daaruit van zelf een middel om te onderzoeken of de wet, volgens welke elk viertal op elkaar volgende punten van zekere kromme lijn ten opzichte van elkaar gelegen zijn, toelaat dat deze of gene vorm zich ergens in den loop dier kromme zal vertoonen: men heeft slechts te zien of de waarden van ρ en ρ_{-1}, die voor het aanwezig zijn van dien vorm vereischt worden, aan de vergelijking $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ voldoen.

De waarde van ρ wordt terstond gevonden uit:

$$\rho = \frac{1}{k},$$

terwijl die van ρ_{-1} blijkt uit:

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds} \quad \text{of} \quad \rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$$

(zie bladz. 13) naar gelang men s of w als onafhankelijk veranderlijke aanneemt.

Het teeken van k bepaalt, aan welke zijde van de kromme lijn de kromtestraal gelegen is. Is s de onafhankelijk veranderlijke, dan wordt ds verondersteld niet van teeken te veranderen; het teeken van k hangt dan samen met dat van dw, omdat $k = \frac{dw}{ds}$ is. Hieromtrent zullen wij deze bepaling maken: dw is *positief*, wanneer men bij den overgang van een punt op het volgende *rechts om*, *negatief*, als men *links om* moet draaien; of — wat op hetzelfde neerkomt —: is dw *positief*, zoo ligt de kromtestraal *rechts* van de kromme, is dw *negatief*, zoo ligt hij *links*; hierbij wordt natuurlijk verondersteld dat men zich, bij het doorloopen der kromme lijn, *voorwaarts* beweegt. Is w de onafhankelijk veranderlijke, zoo heeft k hetzelfde teeken als ds. Veronderstelt men, dat de draaiing steeds rechtsom plaats heeft, en wil men wederom dat k positief zij, als de kromtestraal rechts gelegen is bij eene voorwaartsche beweging, zoo volgt hieruit van zelf, dat ds *positief* moet genomen worden, wanneer men zich *voorwaarts* moet bewegen om van eenig punt in een volgend te komen, *negatief*, wanneer men daarbij *achterwaarts* moet gaan.

§ 2.

s IS ONAFHANKELIJK VERANDERLIJKE. GEWONE PUNTEN, TOPPEN EN BUIGPUNTEN.

Wij zullen nu elk der drie gevallen:

k is eindig

k is nul

k is oneindig

combineeren:

met: $\frac{dk}{ds}$ is eindig

met: $\frac{dk}{ds}$ is nul

en met: $\frac{dk}{ds}$ is oneindig.

De vormen die hieruit voortvloeien zijn voorgesteld door de figuren 1—13, waarin overal de dikste lijn in het punt b den vorm vertoont waarop de figuur betrekking heeft, terwijl a een punt is dat daarvóór, c een punt dat verder op gelegen is, zoodat de kromme in de richting a b c doorloopen wordt. De dunnere lijn is de eerste evoluut, de gestippelde de tweede evoluut.

I. De kromte heeft eene eindige waarde, en dus ook ρ.

Men kan k positief veronderstellen in het punt dat men beschouwt, omdat de kromme lijn altijd zóó kan geplaatst worden, dat dit het geval is; hiervan overtuigt men zich gemakkelijk, door de figuren 1—7 om de raaklijn om te vouwen, waardoor de kromtestraal negatief wordt, zonder dat de vorm eenige verandering ondergaat.

1) $\frac{dk}{ds}$ *heeft eene eindige waarde.* Ook *deze* waarde kan altijd positief verondersteld worden, want is $\frac{dk}{ds}$ negatief, — dat is: de kromte afnemende — zoo kan men de kromme om de normaal rondwentelen, waardoor k hetzelfde teeken behoudt, maar in plaats van afnemende toenemende, en dus $\frac{dk}{ds}$ positief wordt. ρ is dan afnemende; ρ_{-1} heeft, blijkens de formule:

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds}$$

eene eindige negatieve waarde.

De vorm die door deze combinatie ontstaat (Fig 1) is die, welke men bij het doorloopen eener kromme lijn *in den regel* zal aantreffen, daar dit de eenige vorm is die bij eene continue verandering van k en $\frac{dk}{ds}$ niet in een anderen vorm overgaat; immers, wanneer slechts één dezer veranderlijken in eenig punt 0 of ∞ is, zoo heeft zij daarvóór en daarná eene eindige waarde. Het zijn dus de *gewone punten* waartoe deze vorm behoort.

2) $\frac{dk}{ds} = 0$.

a) *Zonder verandering van teeken.* Ook hier kan het teeken steeds positief verondersteld worden, daar door omwenteling om de normaal het teeken kan veranderd worden. ρ_{-1} wordt evenzeer nul en behoudt daarbij het negatieve teeken: de evoluut heeft derhalve een *top* (zie verder); de kromme zelve vertoont een vorm, die tot de *gewone punten* gerekend wordt, omdat het beloop der kromme lijn er niet op eene in het oog springende wijze door gewijzigd wordt; het onderscheid tusschen dezen vorm en de gewone punten van zoo even is evenwel essentieel, daar de kromte hier twee opeenvolgende waarden heeft, die gelijk zijn, of althans *hoogstens* een verschil opleveren dat een oneindig kleine grootheid van de tweede orde is (Fig. 2).

b) *Met verandering van teeken.* Het is hier noodzakelijk te onderscheiden of de verandering van positief in negatief dan wel omgekeerd plaats heeft, daar eene omwenteling om de normaal *geene* verandering in teeken van $\frac{dk}{ds}$ ten gevolge heeft; hetgeen men licht inziet, als men bedenkt dat na de omwenteling eene toeneming van k in afneming is overgegaan en omgekeerd, terwijl de punten der kromme lijn tevens in omgekeerde volgorde doorloopen worden.

α) $\frac{dk}{ds}$ *wordt van positief negatief.* De kromte neemt toe tot op zekere hoogte en neemt daarna weer af: zij bereikt een maximum; ρ bereikt een minimum; ρ_{-1} is eerst negatief, wordt nul en daarna positief. Het overeenkomstige punt der evoluut is een *keerpunt* (bladz. 31), terwijl de vorm der kromme zelve overeenkomt met de *toppen* der kegelsneden en daarom in het algemeen een *top* kan genoemd worden (Fig. 3).

β) $\frac{dk}{ds}$ *wordt van negatief positief.* De kromte bereikt een minimum, ρ een maximum. ρ_{-1} is successievelijk positief, nul en negatief. De evoluut heeft dus weder een *keerpunt*, terwijl de vorm der kromme weder een *top* is (Fig. 4).

Het verschil tusschen deze toppen is in de figuren daaraan zichtbaar, dat het keerpunt der evoluut in het eene geval naar de kromme is toegekeerd, terwijl het er in het andere van afgekeerd is.

3) $\frac{dk}{ds} = \infty$.

a) *Zonder verandering van teeken.* Veronderstelt men wederom dat $\frac{dk}{ds}$ positief blijft, dan is ρ_{-1} negatief en wordt oneindig tegelijk met $\frac{dk}{ds}$. De kromme heeft een *gewoon punt* (Fig. 5), dat echter daardoor gekenmerkt is, dat twee op elkaar volgende waarden van k of van ρ een *eindig* verschil opleveren. Het overeenkomstige punt der evoluut is een *top* waarin de kromte 0 is.

b) *Met verandering van teeken.* Om dezelfde reden als bij 2) moet men hier twee gevallen onderscheiden:

α) $\frac{dk}{ds}$ *wordt van positief negatief.* De kromte neemt tot op zeker punt toe en neemt daarna weer af: k bereikt een maximum, ρ een minimum. De vorm is dus een *top* (Fig. 6), die onderscheiden is van Fig. 4, door dat hier het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden van k eene eindige grootheid is, terwijl dit in het andere geval een oneindig kleine grootheid van een hoogere orde was. Dit is in de figuur daaraan zichtbaar, dat in het keerpunt van de evoluut, hetwelk weder naar de kromme is toegekeerd, de kromtestraal oneindig is en niet 0.

β) $\frac{dk}{ds}$ *wordt van negatief positief.* k bereikt een minimum; het verschil tusschen twee op elkaar volgende kromtestralen is eindig. In het keerpunt der evoluut, dat van de kromme is afgekeerd, is de kromtestraal oneindig groot (Fig. 7).

II. De kromte is 0, dus $\rho = \infty$.

1) $\frac{dk}{ds}$ *heeft een eindige waarde*, die weder positief kan ondersteld worden. k is dus toenemende zoowel vóór als na het punt waar zij nul is; dat is, zij is eerst negatief, daarna positief: de beide deelen der kromme, aan weerszijden van het punt waar $k = 0$ is, zijn aan verschillende zijden van de raaklijn gelegen. Daardoor ontstaat een *buigpunt* (Fig. 8); ρ is successievelijk negatief, oneindig, positief; ρ_{-1} positief, oneindig, negatief. Het punt der evoluut, waar $\rho_{-1} = \infty$ is, ligt echter zelf in het oneindige, daar dit punt het krommingsmiddelpunt der kromme is en de kromtestraal hier oneindig groot is; deze kromtestraal is derhalve *asymptoot* der evoluut. Men kan hieruit tevens afleiden, dat in het algemeen, wanneer de kromtestraal in eenig punt der kromme oneindig groot is, de kromtestraal der evoluut tegelijk oneindig is.

2) $\frac{dk}{ds} = 0$.

a) *Zonder verandering van teeken.* Dit geval verschilt alleen daardoor van het vorige, dat de formule

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds}$$

ρ_{-1} onbepaald laat, zoodat hier drie gevallen zouden kunnen worden onderscheiden: namelijk dat ρ_{-1} nul, eindig en oneindig is; echter is het uit het zoo even opgemerkte duidelijk, dat ρ_{-1} hier alleen oneindig kan zijn, zoodat er nu geen verschil meer bestaat.

b) *Met verandering van teeken.* De kromte bereikt een maximum of minimum waarde; daar evenwel deze waarde *nul* is, zoo zal men alleen het geval behoeven na te gaan waarin een minimum bereikt wordt; immers, is $k = 0$ een maximum, zoodat zij daarvóór en daarna negatief is, zoo wordt, door omwenteling der figuur om de raaklijn, k positief en dus $k = 0$ een maximum. ρ wordt oneindig, evenzeer zonder verandering van teeken, hetgeen dus als maximum moet beschouwd worden. De vorm die hierdoor ontstaat (Fig. 9) is een *top*, die als een bijzonder geval van Fig. 7 kan worden aangezien. ρ_{-1} is oneindig in het overeenkomstige punt der evoluut, en deze heeft de kromtestraal der kromme tot asymptoot; het keerpunt van de evoluut in Fig. 7 is dus hier in het oneindige gelegen.

3) $\dfrac{dk}{ds} = \infty$.

a) *Zonder verandering van teeken.* k is successievelijk negatief, 0, positief en ρ negatief, oneindig, positief, terwijl ρ_{-1} evenzeer door ∞ heen van teeken verandert. Het *buigpunt*, dat hierdoor ontstaat, verschilt niet van het in 1) verkregene (Fig. 8).

b) *Met verandering van teeken*, waarbij, om dezelfde reden als bij 2*b* niet in aanmerking behoeft te komen het geval dat $k = 0$ als een maximum moet worden beschouwd. Even als dáár is de vorm een *top* waarin ρ oneindig is, terwijl ρ_{-1} door oneindig heen van teeken verandert (Fig. 9).

III. De kromte is ∞, $\rho = 0$

1) $\dfrac{dk}{ds}$ *heeft een eindige positieve waarde.* De kromte neemt toe, wordt oneindig en blijft daarna toenemen, hetgeen beteekent dat zij door ∞ heen van teeken verandert. ρ verandert dus door 0 heen van teeken, evenals ook ρ_{-1}, gelijk blijkt uit:

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds}.$$

Hierdoor ontstaat een *buigpunt* (Fig. 10) dat essentieel verschilt van het buigpunt in Fig. 8: de kromtestraal is er nul in plaats van oneindig, terwijl het overeenkomstige punt der evoluut ook een buigpunt is met een oneindig groote kromte. In figuur 8 ligt het overeenkomstige punt der evoluut in het oneindige; dewijl echter daarbij ρ_{-1} door ∞ heen van teeken verandert, kan men dat punt als een buigpunt in het oneindige beschouwen.

2) $\frac{dk}{ds} = 0.$

a) *Zonder verandering van teeken.* Dit levert blijkbaar denzelfden vorm op (Fig. 10).

b) *Met verandering van teeken.* De kromte is successievelijk òf: positief, ∞, positief, òf: negatief, ∞, negatief; in beide gevallen kan $k = \infty$ als een maximum of $\rho = 0$ als een minimum worden beschouwd. De kromme heeft een *top* (Fig. 11), die als een bijzonder geval van Fig. 3 aangezien kan worden.

3) $\frac{dk}{ds} = \infty.$

a) *Zonder verandering van teeken.* k verandert door ∞, ρ door 0 heen van teeken; $\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\,\frac{dk}{ds}$ is onbepaald, maar moet van teeken veranderen; dit kan dus zoowel door nul als door ∞ heen plaats hebben. Het eerste geval geeft hetzelfde buigpunt als in Fig. 10, het tweede echter levert een nieuwen vorm (Fig. 12), waarbij in het buigpunt der evoluut de kromtestraal oneindig groot is.

b) *Met verandering van teeken.* $k = \infty$ is een maximum, $\rho = 0$ een minimum. Ook hier wordt

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\,\frac{dk}{ds} = \frac{0}{0}$$

zoodat de verandering van teeken kan plaats hebben door 0 heen als wanneer Fig. 11 ontstaat, of door ∞ heen, waardoor men den vorm verkrijgt, die in Fig. 13 is voorgesteld; in het keerpunt der evoluut is hier de kromtestraal oneindig groot: het is dus een bijzonder geval van Fig. 6.

De volgende tabel geeft van deze gevallen een overzicht. Van drie naast elkaar geplaatste teekens heeft het middelste betrekking op het punt dat men beschouwt (in de figuren: het punt *b*) het eerste op de daarvóór gelegene punten *(a)*, het derde op de volgende punten *(c)*.

NB. $\rho = \frac{1}{k}$ $\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds}$	1) $\frac{dk}{ds}$ heeft eene eindige positieve waarde.	2) $\frac{dk}{ds}$ is nul.			3) $\frac{dk}{ds}$ is oneindig.		
		a) Zonder verandering van teeken	*b*) Met verandering van teeken.		*a*) Zonder verandering van teeken	*b*) Met verandering van teeken.	
		$+\ 0\ +$	α) $+\ 0\ -$	β) $-\ 0\ +$	$+\ \infty\ +$	α) $+\ \infty\ -$	β) $-\ \infty\ +$
I. k is eindig positief.	k neemt toe ρ neemt af ρ_{-1} is eindig neg: *Gewoonpunt* Fig. 1	k neemt toe ρ neemt af $\rho_{-1}: -\ 0\ -$ *Gewoonpunt* Fig. 2	k maximum ρ minimum $\rho_{-1}: -\ 0\ +$ *Top* Fig. 3	k minimum ρ maximum $\rho_{-1}: +\ 0\ -$ *Top* Fig. 4	k neemt toe ρ neemt af $\rho_{-1}: -\ \infty\ -$ *Gewoonpunt* Fig. 5	k maximum ρ minimum $\rho_{-1}: -\ \infty\ +$ *Top* Fig. 6	k minimum ρ maximum $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 7
II. k is nul.	$k: -\ 0\ +$ $\rho: -\ \infty\ +$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Buigpunt* Fig. 8	$k: -\ 0\ +$ $\rho: -\ \infty\ +$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Buigpunt* Fig. 8	$k: -\ 0\ -$ $\rho: -\ \infty\ -$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 9	$k: +\ 0\ +$ $\rho: +\ \infty\ +$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 9	$k: -\ 0\ +$ $\rho: -\ \infty\ +$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Buigpunt* Fig. 8	$k: -\ 0\ -$ $\rho: -\ \infty\ -$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 9	$k: +\ 0\ +$ $\rho: +\ \infty\ +$ $\rho_{-1}: +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 9
III. k is oneindig.	$k: +\ \infty\ -$ $\rho: +\ 0\ -$ $\rho_{-1}: -\ 0\ +$ *Buigpunt* Fig. 10	$k: +\ \infty\ -$ $\rho: +\ 0\ -$ $\rho_{-1}: -\ 0\ +$ *Buigpunt* Fig. 10	$k: +\ \infty\ +$ $\rho: +\ 0\ +$ $\rho_{-1}: -\ 0\ +$ *Top* Fig. 11	$k: -\ \infty\ -$ $\rho: -\ 0\ -$ $\rho_{-1}: -\ 0\ +$ *Top* Fig. 11	$k: +\ \infty\ -$ $\rho: +\ 0\ -$ $\rho_{-1}: -\ {0 \atop \infty}\ +$ *Buigpunt* Fig. $\begin{cases}10\\12\end{cases}$	$k: +\ \infty\ +$ $\rho: +\ 0\ +$ $\rho_{-1}: -\ {0 \atop \infty}\ +$ *Top* Fig. $\begin{cases}11\\13\end{cases}$	$k: -\ \infty\ -$ $\rho: -\ 0\ -$ $\rho_{-1}: -\ {0 \atop \infty}\ +$ *Top* Fig. $\begin{cases}11\\13\end{cases}$

Dit onderzoek levert derhalve de volgende resultaten op

Wanneer men zich voorstelt, dat een punt zich met konstante snelheid langs eene rechte beweegt, welke telkens om dat bewegende punt draait met eene veranderlijke snelheid, dan kan de kromme lijn die daardoor ontstaat de volgende vormen vertoonen:

I. *Gewone punten.*

Waarin het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden van k kan zijn:

α) eene oneindig kleine grootheid van de eerste orde: ρ_{-1} is eindig. Fig. 1.

β) eene oneindig kleine grootheid van eene hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 2.

γ) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 5.

II. *Toppen.*

1 a) Met een *eindige maximum waarde* van ρ, waarbij het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden kan zijn:

α) eene oneindige kleine grootheid van eene hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 4.

β) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 7.

1 b) Met $\rho = \infty$ als maximum: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 9.

2 a) Met eene *eindige minimum waarde* van ρ, waarbij het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden kan zijn:

α) eene oneindig kleine grootheid van eene hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 3.

β) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 6.

2 b) Met $\rho = 0$ als minimum, waarbij de onmiddellijk volgende waarde kan zijn:

α) eene oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 11.

β) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 13.

III. *Buigpunten.*

1) Met $\rho = \infty$, in welk geval ook: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 8.

2) Met $\rho = 0$, waarbij de onmiddellijk volgende waarde kan zijn:

α) eene oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 10.

β) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 12.

§ 3.

w IS ONAFHANKELIJK VERANDERLIJKE. GEWONE PUNTEN, TOPPEN EN KEERPUNTEN.

Dezelfde waarden, die in de vorige § aan $\frac{dk}{ds}$ werden toegekend, zullen wij nu aan $\frac{dk}{dw}$ geven en met de drie waarden van k combineeren. ρ en ρ_{-1} worden gevonden uit:

$$\rho = \frac{1}{k} \quad \text{en} \quad \rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}.$$

De vormen, die daardoor verkregen zullen worden en die nog niet voorkwamen, zijn in de figuren 14—17 voorgesteld op dezelfde wijze als dit in de vorige § is geschied.

I. De kromte heeft eene eindige waarde en dus ook ρ.

Hierbij zullen dezelfde vormen optreden als in de vorige §. Wij zullen daarom de verschillende gevallen slechts in 't kort aangeven. Verandert $\frac{dk}{dw}$ niet van teeken, dan ontstaan *gewone punten* en wel: Fig. 1, als $\frac{dk}{dw}$ eindig blijft, en dus ook ρ_{-1} eene eindige waarde heeft; Fig. 2, als $\frac{dk}{dw}$ en ρ_{-1} gelijk 0 zijn; Fig. 5 als $\frac{dk}{dw}$ en ρ_{-1} oneindig zijn. Verandert $\frac{dk}{dw}$ van teeken, dan ontstaan *toppen*, waarin de kromte een maximum of minimum bereikt, naar gelang $\frac{dk}{dw}$ van positief negatief of van negatief positief wordt en waarin ρ_{-1} nul of oneindig is, naar mate deze verandering van teeken door nul of door oneindig plaats heeft (Fig. 3, 4, 6 en 7).

II. De kromte is 0, $\rho = \infty$

1) $\frac{dk}{dw}$ *heeft eene eindige waarde.* De kromte neemt toe, d. i. wordt van negatief positief: de kromme ligt dus, aan weerszijden van het punt waar $k = 0$ is, aan verschillende zijden van de raaklijn; maar daar $k = \frac{dw}{ds}$ is, en dw verondersteld wordt niet van teeken te veranderen, zoo moet dit met ds het geval zijn. Hierdoor ontstaat een *keerpunt* (Fig. 14). Uit

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$$

volgt dat de kromtestraal in het overeenkomstige punt der evoluut oneindig is.

2) $\frac{dk}{dw} = 0.$

a) Zonder verandering van teeken. Dit levert denzelfden vorm op. De formule $\rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$ geeft wel geene bepaalde waarde aan voor ρ_{-1}, maar deze kan niet anders dan ∞ zijn, daar $\rho = \infty$ is.

b) Met verandering van teeken. Daar k hierbij niet van teeken verandert, maar de waarde *nul* bereikt als minimum, zoo verandert ook ds niet van teeken, en men verkrijgt denzelfden vorm als in het overeenkomstige geval van de vorige §, namelijk een *top*. (Fig. 9).

3) $\frac{dk}{dw} = \infty$.

a) Zonder verandering van teeken. Geeft wederom Fig. 14.

b) Met verandering van teeken. $k = 0$ is een minimum en dus de vorm die hierdoor ontstaat een *top* (Fig. 9).

III. De kromte is ∞, $\rho = 0$.

1) $\frac{dk}{dw}$ *heeft eene eindige waarde.* Het teeken van k is eerst $+$ en daarna $-$. Op dezelfde wijze als bij II. 1) is geschied, kan men aantoonen, dat deze vorm een *keerpunt* is, dat nu evenwel verschilt van hetgeen aldaar gevonden werd, doordat de kromte niet *nul* maar *oneindig* is, terwijl uit

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$$

volgt, dat ρ_{-1} negatief blijft, maar een minimum-waarde *nul* verkrijgt (Fig. 15).

2) $\frac{dk}{dw} = 0$.

a) Zonder verandering van teeken. Dezelfde vorm: Fig. 15.

b) Met verandering van teeken. Dit geeft den *top* die in Fig. 11 is voorgesteld.

3) $\frac{dk}{dw} = \infty$.

a) Zonder verandering van teeken. Bij het *keerpunt*, dat hierdoor verkregen wordt, kunnen drie gevallen onderscheiden worden. Uit

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$$

vloeit namelijk voort, dat ρ_{-1} allerlei waarden kan hebben, daar hij niet van teeken verandert. Men kan dus hebben: $\rho_{-1} = 0$ (Fig. 15), $\rho_{-1} =$ eindig (Fig. 16) of $\rho_{-1} = \infty$ (Fig. 17).

b) Met verandering van teeken. Dit geval levert reeds vroeger verkregene *toppen* op, namelijk Fig. 11, wanneer ρ_{-1} door nul heen van teeken verandert, en Fig. 13, wanneer dit door oneindig heen plaats heeft.

Op dezelfde wijze als in de vorige § zijn deze gevallen in de volgende tabel bij elkaar gebracht.

NB. $\rho = \frac{1}{k}$ $\rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$	1) $\frac{dk}{dw}$ heeft eene eindige positieve waarde.	2) $\frac{dk}{dw}$ is nul.			3) $\frac{dk}{dw}$ is oneindig.		
		a) Zonder verandering van teeken: $+\ 0\ +$	*b*) Met verandering van teeken. α) $+\ 0\ -$	β) $-\ 0\ +$	*a*) Zonder verandering van teeken: $+\ \infty\ +$	*b*) Met verandering van teeken. α) $+\ \infty\ -$	β) $-\ \infty\ +$
I. k is eindig positief.	k neemt toe ρ neemt af ρ_{-1} is eindig neg: *Gewoon punt* Fig. 1	k neemt toe ρ neemt af $\rho_{-1}:\ -\ 0\ -$ *Gewoon punt* Fig. 2	k maximum ρ minimum $\rho_{-1}:\ -\ 0\ +$ *Top* Fig. 3	k minimum ρ maximum $\rho_{-1}:\ +\ 0\ -$ *Top* Fig. 4	k neemt toe ρ neemt af $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ -$ *Gewoon punt* Fig. 5	k maximum ρ minimum $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ +$ *Top* Fig. 6	k minimum ρ maximum $\rho_{-1}:\ +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 7
II. k is nul.	$k:\ -\ 0\ +$ $\rho:\ -\ \infty\ +$ $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ -$ *Keerpunt* Fig. 14	$k:\ -\ 0\ +$ $\rho:\ -\ \infty\ +$ $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ -$ *Keerpunt* Fig. 14	$k:\ -\ 0\ -$ $\rho:\ -\ \infty\ -$ $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ +$ *Top* Fig. 9	$k:\ +\ 0\ +$ $\rho:\ +\ \infty\ +$ $\rho_{-1}:\ +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 9	$k:\ -\ 0\ +$ $\rho:\ -\ \infty\ +$ $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ -$ *Keerpunt* Fig. 14	$k:\ -\ 0\ -$ $\rho:\ -\ \infty\ -$ $\rho_{-1}:\ -\ \infty\ +$ *Top* Fig. 9	$k:\ +\ 0\ +$ $\rho:\ +\ \infty\ +$ $\rho_{-1}:\ +\ \infty\ -$ *Top* Fig. 9
III. k is oneindig.	$k:\ +\ \infty\ -$ $\rho:\ +\ 0\ -$ $\rho_{-1}:\ -\ 0\ -$ *Keerpunt* Fig. 15	$k:\ +\ \infty\ -$ $\rho:\ +\ 0\ -$ $\rho_{-1}:\ -\ 0\ -$ *Keerpunt* Fig. 15	$k:\ +\ \infty\ +$ $\rho:\ +\ 0\ +$ $\rho_{-1}:\ -\ 0\ +$ *Top* Fig. 11	$k:\ -\ \infty\ -$ $\rho:\ -\ 0\ -$ $\rho_{-1}:\ +\ 0\ -$ *Top* Fig. 11	$k:\ +\ \infty\ -$ $\rho:\ +\ 0\ -$ $\rho_{-1}:\ -\ \frac{0}{0}\ -$ *Keerpunt* Fig. $\begin{cases}15\\16\\17\end{cases}$	$k:\ +\ \infty\ +$ $\rho:\ +\ 0\ +$ $\rho_{-1}:\ -\ \frac{0}{\infty}\ +$ *Top* Fig. $\begin{cases}11\\12\end{cases}$	$k:\ -\ \infty\ -$ $\rho:\ -\ 0\ -$ $\rho_{-1}:\ +\ \frac{0}{\infty}\ -$ *Top* Fig. $\begin{cases}11\\13\end{cases}$

Het valt spoedig in het oog in welk opzicht deze tabel van de vorige verschilt: overal waar dáár *Buigpunten* ontstonden, verkrijgt men hier *Keerpunten*; de *gewone punten* en *Toppen* vindt men op dezelfde wijze weer. De oorzaak hiervan is licht in te zien; zoowel in gewone punten als in toppen behouden dw en ds beiden hunne teekens, terwijl in een buigpunt dw van teeken verandert, in een keerpunt ds; neemt men dus één van deze differentialen steeds positief, dan zal men ook slechts één van deze twee vormen kunnen verkrijgen.

Beweegt zich derhalve een punt met veranderlijke snelheid langs eene rechte, die met konstante snelheid om dat punt draait, zoo kan de kromme lijn, die daardoor ontstaat, gewone punten, toppen en keerpunten hebben. Bij de drie vormen der vorige § (bladz. 29) komt dus nog:

IV. *Keerpunten.*

1) Met $\rho = \infty$, waarbij ook: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 14.

2) Met $\rho = 0$, waarbij de onmiddellijk volgende waarde kan zijn:

α) eene oneindig kleine grootheid van de eerste orde: ρ_{-1} is eindig. Fig. 16.

β) eene oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 15.

γ) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 17.

Er is één keerpunt dat niet correspondeert met een buigpunt, namelijk Fig. 16, alwaar $\frac{dk}{dw}$ successievelijk: $+, \infty, +$ is voor $k = \infty$; men verkrijgt hier $\rho_{-1} = \frac{0}{0}$; hetgeen tot drie gevallen aanleiding geeft: ρ_{-1} *eindig*, *nul* en *oneindig*, terwijl, voor $\frac{dk}{ds}$: $+, \infty, +$ en $k = \infty$, ρ_{-1} van teeken verandert en daardoor geene eindige waarde kan hebben.

Men zou uit de resultaten, in deze en de vorige § verkregen, het gevolg kunnen trekken, dat de vorm eener kromme lijn afhankelijk is van de onafhankelijk veranderlijke die men zich verkiest; daar dit echter eene ongerijmde veronderstelling is, doet zich de vraag voor, op welke wijze men zich het ontstaan van een keerpunt moet voorstellen, wanneer s onafhankelijk veranderlijke is, en van een buigpunt, als w onafhankelijk veranderlijke is. De beantwoording dezer vraag leidt tevens tot de zoogenaamde *keerpunten van de tweede soort* of *snavels*, gelijk in de volgende § nader zal blijken.

3

§ 4

SNAVELS.

Wanneer de kromte eene continue verandering ondergaat tot op zeker punt, maar voor een volgend punt eene onbestaanbare waarde zou verkrijgen, dan houdt de kromme lijn in dat punt plotseling op: voor een volgend punt bestaat geene kromte en dus ook geene kromme lijn. Stelt men nu in het algemeen eenige waarde van k voor door:

$$\varphi(c) + \sqrt{\psi(c)}$$

waarin c één der coördinaten s, w voorstelt, dan zal k imaginair worden als $\psi(c)$ negatief wordt. Heeft deze verandering van teeken plaats door *nul* heen, dan zal de laatste waarde van k gelijk $\varphi(c)$ zijn; verandert echter $\psi(c)$ door *oneindig* heen van teeken, dan wordt ook $k = \infty$. Merkt men op, dat de vergelijking waarin de kromme lijn:

$$k = \varphi(c) + \sqrt{\psi(c)}$$

opgesloten is, namelijk:

$$\{k - \varphi(c)\}^2 = \psi(c)$$

evenzeer de kromme lijn bevat, die voorgesteld wordt door:

$$k = \varphi(c) - \sqrt{\psi(c)},$$

zoo blijkt, dat deze, ofschoon eene andere reeks van waarden voor k opleverende, met dezelfde waarde van k eindigt. Dit leidt er toe de beide krommen tot één geheel te vereenigen, door ze in dat punt in elkaar te doen overgaan.

Deze redeneering schijnt wellicht overbodig, daar men in de gewone coördinaten-methoden nooit anders handelt; evenwel is dáár het geval eenigzins anders. Bepaalt men zich tot het rechtlijnig stelsel, dan heeft men uit eene vergelijking van den vorm:

$$\{y - \varphi(x)\}^2 = \psi(x)$$

$$\text{of} \quad y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}$$

voor elke waarde van x twee waarden van y, zoodat men terstond twee takken verkrijgt, die van zelve in elkaar overgaan, wanneer $\psi(x)$ nul of oneindig wordt. Dit heeft met eene vergelijking

$$\{k - \varphi(c)\}^2 = \psi(c)$$

$$\text{of} \quad k = \varphi(c) \pm \sqrt{\psi(c)}$$

niet plaats, daar men voor een zelfde waarde van s of w, dat is voor een zelfde punt der kromme lijn, geen twee waarden van k kan hebben; het zijn hier twee krommen:

$$k = \varphi(c) + \sqrt{\psi(c)} \quad \text{en} \quad k = \varphi(c) - \sqrt{\psi(c)},$$

die men *desverkiezende* in elkaar kan doen overgaan, en dan als ééne kromme lijn met twee takken kan beschouwen.

Bij het onderzoek naar de verschillende vormen, die het vereenigingspunt van twee zoodanige takken kan opleveren, zal het blijken dat, in geval s de onafhankelijk veranderlijke is, *keerpunten* en *snavels* optreden, als w daarvoor wordt aangenomen, *buigpunten* en *snavels*. De keerpunten en buigpunten zijn dezelfde die reeds gevonden zijn. De snavels zijn door de figuren 18—23 voorgesteld; daarin is het vereenigingspunt door b, de voorafgaande punten in de twee takken door a en a' aangewezen.

Men kan de volgende gevallen onderscheiden:

I. De kromte heeft in de twee takken verschillende teekens.

Denkt men zich in het vereenigings-punt de raaklijn, zoo liggen de takken aan verschillende zijden van deze. In dat punt zal k slechts *nul* of *oneindig* kunnen zijn. Want had k eene eindige waarde, dan zou de kromme lijn discontinu zijn bij den overgang van den éénen tak op den anderen, wegens het verschil in teeken van k, hetgeen niet het geval is voor $k = 0$ en $k = \infty$. Hieruit volgt onmiddellijk, dat dk in de twee takken verschillende teekens moet hebben. Is s onafhankelijk veranderlijke, zoodat dw in den éénen tak $+$ en in den anderen $-$ is, dan ontstaan *keerpunten*, en wel:

1) *voor* $k = 0$: Fig. 14.

2) *voor* $k = \infty$: Fig. 15, 16 of 17, naar gelang ρ_{-1} nul, eindig of oneindig is in het vereenigingspunt.

Neemt men w als onafhankelijk veranderlijke aan, en wordt dus dw in beide takken positief verondersteld, terwijl ds verschillende teekens heeft, dan verkrijgt men *buigpunten:*

1) *voor* $k = 0$: Fig. 8.

2) *voor* $k = \infty$: Fig. 10 als $\rho_{-1} = 0$, Fig. 12 als $\rho_{-1} = \infty$ is. Eindig kan ρ_{-1} niet zijn, daar de formule

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{dk}{dw}$$

doet zien, dat ρ_{-1} in de twee takken verschillende teekens heeft.

II. De kromte heeft in de twee takken hetzelfde teeken.

Hierbij zijn de twee takken op dezelfde wijze ten opzichte van de raaklijn in het vereenigingspunt gelegen, hetgeen ten gevolge heeft dat de kromme aldaar den vorm van een *snavel* vertoont. k kan steeds *positief* verondersteld worden, daar de kromme altijd zoodanig geplaatst en doorloopen kan worden, dat dw en ds beiden *positief* zijn. Men kan nu de volgende gevallen onderscheiden:

1) $\frac{dk}{ds}$ *of* $\frac{dk}{dw}$ *is in beide takken positief*. De kromte neemt derhalve in beide takken toe. Gaat men, bij het doorloopen der kromme, van den éénen tak op den anderen over, zoo is dus de waarde van k in dat punt een maximum, en die van ρ een minimum. Die maximum waarde van k kan eindig zijn of oneindig.

a) *k heeft in het vereenigingspunt eene eindige positieve waarde.* De formulen:

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds} \quad \text{en} \quad \rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$$

geven beiden voor ρ_{-1} eene negatieve waarde aan in de twee takken en men verkrijgt denzelfden vorm of s als onafhankelijk veranderlijke wordt aangenomen, dan wel w. In het vereenigingspunt kan ρ_{-1} eindig, nul of oneindig zijn, hetgeen afhangt van de waarde van $\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$ in dat punt. In elk geval is de vorm van de evoluut eveneens een snavel, die met de punt naar de kromme is toegekeerd. In Fig. 18 is ρ_{-1} eindig genomen; voor het geval dat ρ_{-1} oneindig of nul is, verkrijgt de evoluut de vormen die de kromme heeft in de figuren 19 en 20.

b) *k is in het vereenigingspunt oneindig.* ρ is nul; ρ_{-1} kan weder eindig, nul en oneindig zijn. De snavel van de evoluut reikt nu tot aan de kromme: het is slechts een bijzonder geval van den zoo even gevonden vorm. (Fig. 20, waar weder ρ_{-1} eindig is verondersteld).

2) $\frac{dk}{ds}$ *of* $\frac{dk}{dw}$ *is in beide takken negatief.* De kromte neemt af en bereikt in het vereenigingspunt een minimum waarde, die eindig of nul kan zijn.

a) k is in het vereenigingspunt eindig positief. ρ verkrijgt eene eindige maximum waarde. ρ_{-1} is in beide takken positief, en kan in het vereenigingspunt eindig, nul en oneindig zijn. Zoowel voor s als voor w als onafhankelijk veranderlijke verkrijgt men Fig. 21, waarin de waarde van ρ_{-1} eindig is verondersteld, en die van de vorige snavels onderscheiden is, doordat de snavel van de evoluut van de kromme is afgekeerd.

b) k is in het vereenigingspunt nul. ρ is oneindig en daarom ook ρ_{-1} (bladz. 25). Beschouwt men de beide asymptotische takken der evoluut als in het oneindige samenvallende, en noemt men dit een snavel in het oneindige, dan wordt deze vorm (Fig. 19) een bijzonder geval van Fig. 21.

3) $\frac{dk}{ds}$ *of* $\frac{dk}{dw}$ *is in den éénen tak positief, in den anderen negatief.* De kromte neemt in den eenen tak toe, en in den anderen af. Bij den overgang heeft men derhalve eene voortdurende toeneming of afneming, naar gelang men de kromme in de eene of in de andere richting doorloopt. Hieruit volgt dat de kromte in het vereenigingspunt slechts eene eindige waarde kan hebben; want was zij nul of oneindig, dan zou zij van teeken moeten veranderen; hetgeen verondersteld wordt niet plaats te hebben.

Uit

$$\rho_{-1} = -\frac{1}{k^3}\frac{dk}{ds} \quad \text{en} \quad \rho_{-1} = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dw}$$

blijkt, dat ρ_{-1} verschillende teekens heeft. Deze verandering van teeken kan plaats hebben door oneindig heen (Fig. 22) of door 0 heen (Fig. 23). In elk geval is het overeenkomstige punt der evoluut een buigpunt.

De volgende tabel geeft van deze gevallen een overzicht. De waarden van k, ρ en ρ_{-1} in de twee takken zijn boven elkaar geplaatst, die in het vereenigingspunt daarachter.

I. k is in den éénen tak positief, in den anderen negatief.			
s is onafhankelijk veranderlijke. $\frac{dk}{ds} = \left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$		w is onafhankelijk veranderlijke. $\frac{dk}{dw} = \left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$	
$k = 0$ in punt b.	$k = \infty$ in punt b.	$k = 0$ in punt b.	$k = \infty$ in punt b.
$k = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}0$	$k = \left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}\infty$	$k = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}0$	$k = \left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}\infty$
$\rho = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$\rho = \left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}0$	$\rho = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$\rho = \left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}0$
$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\right\}$ 0, *eindig* of ∞.	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}0$ of ∞
Keerpunt Fig. 14	*Keerpunt* Fig. 15, 16, 17	*Buigpunt* Fig. 8	*Buigpunt* Fig. 10, 12

II. k heeft in beide takken hetzelfde teeken.				
$\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$ in beide takken: $+$		$\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$ in beide takken: $-$		$\frac{dk}{ds}$ of $\frac{dk}{dw}$: $\left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$
k is eindig in b.	$k = \infty$ in b.	k is eindig in b.	$k = 0$ in b.	k is eindig in b.
$k\left\{\begin{matrix}\text{neemt toe}\\\text{neemt toe}\end{matrix}\right\}$ *max.*	$k = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$k\left\{\begin{matrix}\text{neemt af}\\\text{neemt af}\end{matrix}\right\}$ *min.*	$k = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}0$	$k\left\{\begin{matrix}\text{neemt toe}\\\text{neemt af}\end{matrix}\right\}$ *eindig.*
$\rho\left\{\begin{matrix}\text{neemt af}\\\text{neemt af}\end{matrix}\right\}$ *min.*	$\rho = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}0$	$\rho\left\{\begin{matrix}\text{neemt toe}\\\text{neemt toe}\end{matrix}\right\}$ *max.*	$\rho = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$\rho\left\{\begin{matrix}\text{neemt af}\\\text{neemt toe}\end{matrix}\right\}$ *eindig.*
$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\right\}$ 0, *eindig* of ∞.	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\right\}$ 0, *eindig* of ∞.	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}$ 0, *eindig* of ∞.	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\right\}\infty$	$\rho_{-1} = \left.\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\}0$ of ∞
Snavel Fig. 18	*Snavel* Fig. 20	*Snavel* Fig. 21	*Snavel* Fig. 19	*Snavel* Fig. 23, 22

Beschouwt men derhalve twee op deze wijze gecombineerde takken als ééne kromme, waarin de kromte eene continue verandering ondergaat bij den overgang van den eenen tak op den anderen, dan komt bij de vier opgenoemde vormen nog:

V. *Snavels*.

1 *a*) Met een eindige maximum waarde van ρ, waarbij het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden kan zijn:

α) een oneindig kleine grootheid van de eerste orde: ρ_{-1} is eindig Fig. 21.

β) eene oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$.

γ) eene eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$.

1 b) Met $\rho = \infty$ als maximum: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 19.

2 a) Met eene eindige minimum waarde van ρ, waarbij het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden kan zijn.

α) een oneindig kleine grootheid van de eerste orde: ρ_{-1} is eindig. Fig. 18.

β) een oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$.

γ) een eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$.

2 b) Met $\rho = 0$ als minimum, waarbij de eerstvolgende waarde kan zijn:

α) een oneindig kleine grootheid van de eerste orde: ρ_{-1} = eindig. Fig. 20.

β) een oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$.

γ) een eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$.

3) ρ passeert eene eindige waarde, waarbij het verschil tusschen twee op elkaar volgende waarden kan zijn:

α) een oneindig kleine grootheid van hoogere orde: $\rho_{-1} = 0$. Fig. 22.

β) een eindige grootheid: $\rho_{-1} = \infty$. Fig. 23.

§ 5.

GEVOLGTREKKINGEN.

Wanneer men in eenig punt eener kromme lijn de raaklijn en de normaal trekt, en het gedeelte der kromme, dat aan de ééne zijde van dat punt gelegen is, om een dezer lijnen omslaat, terwijl het overige gedeelte niet van plaats verandert, zoo gaat de vorm die de kromme in dat punt heeft in een anderen over. Door eene omvouwing om de normaal zullen *gewone punten en toppen* overgaan in *snavels*, en *buigpunten* in *keerpunten* en omgekeerd, terwijl eene omvouwing om de raaklijn *gewone punten en toppen* tot *buigpunten* en *keerpunten* tot *snavels* vervormt en omgekeerd. Niet altijd echter zullen de vormen die daardoor ontstaan denkbaar zijn in eene continue kromme lijn; daar toch in het om de normaal omgeslagen gedeelte het teeken van dk en daarmede dat van ρ_{-1}, en in het om de raaklijn omgeslagen deel het teeken van k of van ρ veranderd is, zoo zal slechts dan aan dat vereischte voldaan worden, wanneer ρ_{-1} of ρ in het punt dat men beschouwt *nul* of *oneindig* is: — ρ_{-1} wanneer de omwenteling om de normaal geschiedt, ρ wanneer zij om de raaklijn plaats heeft. Want heeft in het eene geval ρ_{-1}, in het andere ρ, een eindige waarde, en dus ter weerszijden van het punt hetzelfde teeken, dan ontstaat er discontinuiteit na de omvouwing wegens het verschil in teeken dat daarvan het gevolg is. Dit zal bijv. het geval zijn wanneer men de fig. 1—7, 18, 21, 22 en 23 om de raaklijn en de fig. 1, 16, 18, 20 en 21 om de normaal in het punt b omslaat, waardoor geene vormen optreden, die in eene continue kromme lijn kunnen voorkomen. Daarentegen verandert:

door omwenteling om de raaklijn:
- fig. 8 in fig. 9
- fig. 10 〃 fig. 11
- fig. 12 〃 fig. 13
- fig. 14 〃 fig. 19
- fig. 15, fig. 16, fig. 17 〃 fig. 20 als daarin $\rho_{-1} = 0$ is, ρ_{-1} eindig is, $\rho_{-1} = \infty$ is

en omgekeerd;

door omwenteling om de normaal:
- fig. 2 in fig. 23
- fig. 3 〃 fig. 18 als daarin $\rho_{-1} = 0$ is
- fig. 4 〃 fig. 21 als daarin $\rho_{-1} = 0$ is
- fig. 5 〃 fig. 22
- fig. 6 〃 fig. 18 als daarin $\rho_{-1} = \infty$ is
- fig. 7 〃 fig. 21 als daarin $\rho_{-1} = \infty$ is
- fig. 8 〃 fig. 14
- fig. 9 〃 fig. 19
- fig. 10 〃 fig. 15
- fig. 12 〃 fig. 17
- fig. 11, fig. 13 〃 fig. 20 als daarin $\rho_{-1} = 0$ is, $\rho_{-1} = \infty$ is

en omgekeerd.

Door deze opmerking, die tevens dienen kan om de resultaten der vorige §§ te verifieeren, kan men gemakkelijk vinden, welke waarden van ρ en ρ_{-1} moeten voldoen aan eene vergelijking:

$$f\,(\rho\,,\;\rho_{-1}) = 0,$$

als de kromme, waarin elk viertal punten volgens die wet ten opzichte van elkaar gelegen zijn, dezen of genen vorm zal vertoonen. Immers er blijkt uit, dat — behoudens de gevallen dat ρ en ρ_{-1} *beiden* eindig zijn — het verschil tusschen *gewone punten of toppen* en *snavels*, alsmede tusschen *buigpunten* en *keerpunten* enkel en alleen gelegen is in het al of niet veranderen van teeken van ρ_{-1}, terwijl eene verandering van teeken van ρ de *buigpunten* van de *toppen* en de *keerpunten* van de *snavels* onderscheidt. Geeft men nu door $+ +$ te kennen, dat er geene verandering van teeken plaats grijpt, en door $+ -$ dat dit wel het geval is, dan wordt elke vorm op de volgende wijze gekarakteriseerd:

Gewone punten.	*Buigpunten.*	*Keerpunten.*	*Snavels.*
$(a)\begin{cases}\rho & + +\\ \rho_{-1} & + +\end{cases}$			$(e)\begin{cases}\rho & + +\\ \rho_{-1} & + -\end{cases}$
Toppen.			
$(b)\begin{cases}\rho & + +\\ \rho_{-1} & + -\end{cases}$	$(c)\begin{cases}\rho & + -\\ \rho_{-1} & + -\end{cases}$	$(d)\begin{cases}\rho & + -\\ \rho_{-1} & + +\end{cases}$	$(f)\begin{cases}\rho & + +\\ \rho_{-1} & + +\end{cases}$

De gevallen (a) en (f), (b) en (e) zijn niet terstond van elkaar te onderscheiden. Merkt men evenwel op dat ρ in (b) en (f) een maximum of minimumwaarde bereikt, in (a) en (e) niet, dan is het duidelijk dat men daarin een voldoend kriterium heeft, om deze vormen te onderkennen. Om te bepalen tot welke *soort* de vorm behoort, heeft men slechts de volgende gevallen na te gaan:

voor (a) en (e): $\rho_{-1} = 0$ of $= \infty$.

voor (b) en (f): ρ is een maximum of een minimum.

$\rho_{-1} = 0$ of $= \infty$.

voor (c): $\rho = 0$ of $= \infty$.

$\rho_{-1} = 0$ of $= \infty$.

voor (d): $\rho = 0$ of $= \infty$.

$\rho_{-1} = 0$, eindig of ∞.

In geval ρ en ρ_{-1} beiden eindig zijn heeft de kromme in dat punt een der vormen: fig. 1, fig. 18 of fig. 21. Deze zijn hierdoor onderscheiden, dat in den snavel fig. 21 ρ een maximum heeft, in fig. 18 een minimum, terwijl in fig. 1 ρ een eindige waarde *passeert*.

Op deze wijze vindt men, welke vormen eenige kromme lijn opleveren *kan*; nog niet, of men ze bij het doorloopen der lijn werkelijk zal aantreffen. Even als namelijk in fig. 8, 9 en 19 het buigpunt, het keerpunt en de snavel der evoluut in het oneindige verschoven is, terwijl in fig. 14 hetzelfde kan gezegd worden van een top, zoo kan dit ook plaats hebben in de kromme lijn zelve zonder dat het uit de verg: $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ blijkt. Ten einde hierover te oordeelen is het noodig de vergelijkingen

$$\rho = \varphi(s) \quad \text{en} \quad \rho = \psi(w)$$

te raadplegen; ligt namelijk het bedoelde punt in het oneindige, dan is minstens een der coördinaten s, w, oneindig voor de waarde die ρ in dat punt heeft. In dat geval kan men echter niet spreken van een vorm die *op eene bepaalde plaats* wordt aangetroffen, — veel meer heeft men te doen met de wijze waarop de kromme lijn verloopt, met den vorm, dien zij *in haar geheel* vertoont; hetgeen het onderwerp zal uitmaken van het volgende Hoofdstuk. Alleen zij hier opgemerkt, dat men somtijds uit de vergelijking $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ reeds kan besluiten dat de kromme lijn punten in het oneindige heeft. Reeds vroeger is namelijk opgemerkt dat, wanneer in eenig punt $\rho = \infty$ is, ook $\rho_{-1} = \infty$

moet zijn; blijkt het echter uit de vergelijking dat er punten zijn waarin $\rho = \infty$ gecombineerd is met eene eindige waarde van ρ_{-1} of met $\rho_{-1} = 0$, dan kunnen die punten ook niet in een eindig gedeelte der kromme lijn liggen: deze is, gelijk later blijken zal, in dat geval spiraalvormig, terwijl haar evoluut een cirkel of een punt tot asymptoot heeft.

Het zal na het opgemerkte niet noodig zijn in bijzonderheden te treden omtrent de wijze, waarop men uit de vergelijkingen

$$\rho = \varphi(s) \quad \text{en} \quad \rho = \psi(w)$$

tot het aanwezig zijn van dezen of genen vorm in een eindig deel der kromme lijn besluiten kan. Wordt ρ voor eenige waarde van s imaginair, dan heeft de kromme aldaar een keerpunt of een snavel naar gelang ρ in de twee takken al of niet verschillende teekens heeft. Op dezelfde wijze geeft het imaginair worden van ρ voor eenige waarde van w een buigpunt of een snavel aan. Verandert ρ bij het grooter worden van den coördinaat van teeken, zoo wijst dit in de eerste vergelijking op een buigpunt, in de tweede op een keerpunt. Toppen worden aangeduid door maximum of minimum waarden van ρ. Tot nadere bepaling der vormen dient deels de vergelijking zelve — voor zoo ver het de vraag geldt of ρ door 0 of door ∞ van teeken verandert — deels de differentiaal-vergelijking:

$$\frac{d\rho}{ds} = \varphi'(s) \quad \text{of} \quad \frac{d\rho}{dw} = \rho_{-1} = \psi'(w)$$

wanneer het de waarde van ρ_{-1} geldt; daartoe kan men de eerste dezer vergelijkingen onder dezen vorm schrijven:

$$\rho_{-1} = \rho \cdot \varphi'(s) = \varphi(s) \cdot \varphi'(s)$$

omdat $\dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{\frac{d\rho}{dw}}{\frac{ds}{dw}} = \dfrac{\rho_{-1}}{\rho}$ is.

Men kan in het bepalen der vormen, die eene kromme lijn op eene bepaalde plaats kan vertoonen, verder gaan door ook op de tweede differentiaal-quotienten $\frac{d^2k}{ds^2}$ en $\frac{d^2k}{dw^2}$ en daarmede op den kromtestraal der tweede evoluut: ρ_{-2} te letten. Sommige gevallen zijn echter niet voor eene verdere beperking vatbaar, namelijk die, waarbij ρ of ρ_{-1} oneindig is, omdat alsdan de kromtestralen van alle volgende evoluten van zelf oneindig worden. Anderen laten slechts twee onderscheidingen toe, bijv. de buigpunten waarin ρ en ρ_{-1} gelijk nul zijn; het overeenkomstige punt der tweede evoluut is dan ook een buigpunt en ρ_{-2} zal slechts 0 of ∞ kunnen zijn. Wij zullen hierover evenwel niet in bijzonderheden treden, daar zoodanige verschillen in den vorm der kromme des te minder zichtbaar worden, naarmate men het specificeeren verder voortzet.

Uit de wijze waarop het teeken van ρ afhangt van de teekens van ds en dw, kan men, in verband met de formule: $\rho_{-1} = \frac{d\rho}{dw}$, de betrekkelijke ligging opmaken van de kromtestralen ρ en ρ_{-1} wanneer deze gelijke of ongelijke teekens hebben. Het onderzoek hieromtrent geeft den volgenden regel aan:

Wanneer men zich langs den kromtestraal ρ *beweegt van het punt der kromme naar het krommingsmiddelpunt, zoo zal* ρ_{-1} h e t z e l f d e t e e k e n *hebben als* ρ, *wanneer men* r e c h t s, *het* o m g e k e e r d e *wanneer men* l i n k s *moet draaien om op den kromtestraal* ρ_{-1} *over te gaan.*

HOOFDSTUK III.

OVER DEN VORM EENER KROMME LIJN IN HAAR GEHEEL.

§ 1.

DE INVLOED VAN KONSTANTEN OP DEN VORM DER KROMME LIJN.

Eene vergelijking, die de wet uitdrukt, volgens welke de kromte verandert, zal in het algemeen willekeurige konstanten bevatten. Door verschillende waarden aan die konstanten te geven, verkrijgt men kromme lijnen, die wel allen aan dezelfde algemeene wet voldoen, maar daarom niet gelijkvormig behoeven te zijn. In dat geval zal men de verschillende vormen achtereenvolgens verkrijgen, door de konstante te laten variëeren.

Maar ook kan zich het geval voordoen, dat eene konstante geen invloed uitoefent op den vorm, maar alleen op de grootte der kromme, de afmetingen. Het is niet moeielijk na te gaan, hoedanig in het laatste geval de konstante moet voorkomen; terwijl een paar algemeene regels te geven zijn omtrent den aard van den invloed eener konstante op den vorm.

Gaat men uit van de algemeen bekende waarheid, dat twee figuren gelijkvormig zijn, wanneer die lijnen in de éene figuur, waardoor deze volkomen bepaald wordt, in eene konstante verhouding staan tot de overeenkomstige lijnen in de andere, zoo is het duidelijk, dat twee krommen gelijkvormig zullen zijn, wanneer alle ρ's en ρ_{-1}'s in de éene kromme even veel malen grooter of kleiner zijn dan diezelfde grootheden in de andere, — want eene kromme lijn is bepaald door hare kromtestralen, en door die van haar evoluut. Het behoeft geen nader betoog, dat in gelijkvormige krommen de hoeken van gelijkstandige kromtestralen gelijk, en de bogen tusschen de punten, waartoe zij behooren, evenredig zijn. Wanneer men derhalve van eene kromme lijn alle ρ's en ρ_{-1}'s in dezelfde reden grooter of kleiner maakt, dan verkrijgt men eene kromme, die met de eerste gelijkvormig is, — hetgeen bovendien duidelijk is, wanneer men bedenkt, dat het bij de constructie eener lijn naar eenige vergelijking $f(\rho, \rho_{-1}) = 0$ geheel onverschillig is, welke lengte-eenheid men aanneemt voor de afmetingen der kromtestralen; het grooter of kleiner maken dier lengte-eenheid nu heeft eenvoudig ten gevolge, dat alle lijnen in dezelfde verhouding grooter of kleiner worden.

Hieruit nu vloeit het volgende voort: wanneer eene vergelijking tusschen ρ en ρ_{-1} eene konstante bevat, die als factor voorkomt van ρ en ρ_{-1} of althans, door eenige algebraïsche bewerking, als zoodanig kan optreden, dan zullen alle krommen, naar die vergelijking geconstrueerd, maar met verschillende waarden der konstante, gelijkvormig zijn.

Elke konstante, die *niet* als factor van ρ en ρ_{-1} voorkomt, zal aanleiding geven tot krommen van *verschillenden* vorm; want dan worden, door verschillende waarden der konstante, niet alle ρ's en ρ_{-1}'s in dezelfde reden vergroot of verkleind.

Heeft men eene vergelijking tusschen ρ en w, dan is de zaak niet altijd zoo eenvoudig. Wel is elke konstante factor van ρ zonder invloed op den vorm der kromme, maar niet altijd is het omgekeerde waar, dat namelijk elke andere konstante er wel op influenceert. Zoodanige vergelijking toch bevat in het algemeen altijd ééne konstante, die met het wezen der kromme niets te maken heeft, namelijk die, welke aangeeft vanwaar men de hoeken begint te tellen. Nu kunnen zich twee gevallen voordoen:

1°. Eene konstante a verdwijnt, wanneer men $w = w' + \alpha$ stelt, voor eenige waarde van α. Alsdan is het zeker, dat het geven van verschillende waarden aan a eenvoudig ten gevolge heeft het verdraaien der oorspronkelijke richting zonder meer;

2°. Eene konstante a verdwijnt niet door die substitutie, maar toch verandert de oorspronkelijke richting, door er verschillende waarden aan te geven. In dat geval worden dus niet alleen alle hoeken met een zelfden hoek vermeerderd of verminderd, maar er geschiedt meer, en men zal eerst dàn kunnen te weten komen, of die konstante op den vorm der kromme influenceert, wanneer men telkens, bij het veranderen van hare waarde, de hoeken tot dezelfde hoofdrichting in betrekking stelt, of — wat op hetzelfde neerkomt — wanneer men den invloed van a op de hoofdrichting elimineert door, in plaats van eenige waarde van w, het verschil tusschen twee waarden van w in te voeren. Blijkt het, dat voor eenig verschil φ het veranderen van a hetzelfde resultaat oplevert als het veranderen der lengte-eenheid, dan is hierdoor bewezen, dat de konstante geen invloed uitoefent op den vorm der kromme. Tot toelichting hiervan diene het volgende voorbeeld.

In de vergelijking

$$\rho = a + e\,w$$

is a een konstante, die niet als factor van ρ alleen kan voorkomen; toch oefent zij geen invloed uit op den vorm der kromme; want, daar voor een hoek w'

$$\rho' = a + e\,w'$$

is, zoo verkrijgt men door deeling der vergelijkingen

$$\rho - a = e\,w$$

$$\rho' - a = e\,w'$$

op elkaar:

$$\frac{\rho' - a}{\rho - a} = e^{w'-w} = e^{\varphi}$$

$$\text{of: } \frac{\frac{1}{a}\rho' - 1}{\frac{1}{a}\rho - 1} = e^{\varphi}$$

waaruit blijkt, dat men slechts $\frac{1}{a}\rho$ voor ρ behoeft te schrijven — dat is de lengte-eenheid veranderen — om al de krommen te verkrijgen, die de vergelijking kan opleveren.

Men verkrijgt hetzelfde resultaat spoediger, door middel van de differentiaal-vergelijking. Uit

$$\rho = a + e\,w$$

$$\text{volgt: } \rho_{-1} = e\,w;$$

$$\text{dus: } \rho = a + \rho_{-1}$$

$$\text{of: } \frac{1}{a}\rho = 1 + \frac{1}{a}\rho_{-1}. \text{ —}$$

Op dergelijke wijze kan men handelen met eene vergelijking tusschen s en w. Alleen moet men dan drie punten nemen, waarvoor de bogen

s, $s + \sigma$ en $s + \sigma'$ en de hoeken w, $w + \varphi$ en $w + \varphi'$ zijn.

Door eliminatie van s en w is tevens de invloed der konstanten geëlimineerd, die den oorsprong aangeven. De vergelijking van zoo even

$$\rho = a + e^{w}$$

of

$$\frac{ds}{dw} = a + e^{w}$$

geïntegreerd zijnde, geeft

$$s + C = aw + e^{w} \quad .... \ (1)$$

Voor twee andere punten heeft men:

$$s + \sigma + C = a\,(w + \varphi) + e^{w + \varphi} \quad .... \ (2)$$

$$\text{en } s + \sigma' + C = a\,(w + \varphi') + e^{w + \varphi'} \quad .... \ (3)$$

trekt men nu (2) van (3) en (1) van (2) af, zoo verkrijgt men:

$$\sigma' - \sigma - a\,(\varphi' - \varphi) = e^{w}\left(e^{\varphi'} - e^{\varphi}\right)$$

en

$$\sigma - a\varphi = e^{w}\left(e^{\varphi} - 1\right);$$

en deze twee op elkaar deelende:

$$\frac{\sigma' - \sigma - a\,(\varphi' - \varphi)}{\sigma - a\varphi} = \frac{e^{\varphi'} - e^{\varphi}}{e^{\varphi} - 1}$$

of:

$$\frac{\frac{1}{a}\sigma' - \frac{1}{a}\sigma - (\varphi' - \varphi)}{\frac{1}{a}\sigma - \varphi} = \frac{e^{\varphi'} - e^{\varphi}}{e^{\varphi} - 1},$$

waaruit wederom blijkt dat, door aan a verschillende waarden te geven, de lengten der bogen evenredig toe- of afnemen, terwijl de hoeken onveranderd blijven.

Eindelijk: wanneer de vergelijking gegeven is tusschen ρ en s, zoo elimineert men s tusschen:

$$\rho = f\,(s,\, a)$$

$$\text{en } \rho' = f\,(s + \sigma,\, a)$$

en ziet of de konstante als factor van ρ en s beiden voorkomt. Dezelfde kromme tot voorbeeld nemende, zal men, om de vergelijking tusschen ρ en s te verkrijgen, w moeten elimineeren tusschen:

$$\rho = a + e^{w} \quad \text{en} \quad s + C = aw + e^{w};$$

daardoor verkrijgt men:

$$s + C = a.lg\,(\rho - a) + \rho - a.$$

Voor een ander punt is:

$$s + \sigma + C = a.lg\,(\rho' - a) + \rho' - a;$$

na aftrekking:

$$\sigma = a.lg\,\frac{\rho' - a}{\rho - a} + \rho' - \rho$$

$$\text{of: } \frac{1}{a}\sigma = lg\,\frac{\frac{1}{a}\rho' - 1}{\frac{1}{a}\rho - 1} + \frac{1}{a}\rho' - \frac{1}{a}\rho.$$

Afgezien van de konstanten, die den oorsprong bepalen, zal ook in de vergelijking tusschen ρ en w, s en w, ρ en s elke konstante, die op eene andere wijze voorkomt dan de zoo even besprokene, op den vorm der kromme influenceeren. Want dan kan men niet dezelfde reeks van krommen verkrijgen door eene eenvoudige verandering der lengte-eenheid, als die wordt opgeleverd door verschillende waarden aan die konstante te geven.

In het algemeen zijn geene regels te geven omtrent den aard dier influentie. Echter zijn er twee gevallen, die aan eene algemeene beschouwing onderworpen kunnen worden.

1°. *Eene konstante komt voor als factor van ρ òf van ρ_{-1} in de verg:*

$$f\,(\rho, \rho_{-1}) = 0.$$

a) als factor van ρ_{-1}. Zij λ die konstante, zoo is de vergelijking, die men kan veronderstellen ten opzichte van ρ_{-1} opgelost te zijn:

$$\lambda\rho_{-1} = f\,(\rho).$$

De reeks van krommen, die men verkrijgt door aan λ verschillende waarden te geven, zal klaarblijkelijk dezelfde zijn, als die, welke ontstaat wanneer men van één der krommen, in de vergelijking opgesloten, alle ρ_{-1}'s in dezelfde reden grooter of kleiner maakt, daarbij de ρ's latende zoo als zij zijn. Nu is het duidelijk, dat, wanneer in twee opeenvolgende punten p en q (Fig. 24, *a* en *b*) ρ dezelfde waarde behoudt, het verschil $d\rho$ hetzelfde blijft en dus

$$pq = p'q'.$$

In de eene kromme (bij *a*) is echter:

$$dw = \frac{d\rho}{\rho_{-1}},$$

in de andere (bij *b*):

$$dw = \frac{d\rho}{\lambda\rho_{-1}};$$

dus wordt dw λ maal kleiner, als ρ_{-1} λ maal grooter wordt. Men zal dus hetzelfde resultaat verkrijgen, wanneer men in de vergelijking

$$\rho = \varphi\,(w)$$

$\frac{1}{\lambda}$ w voor w schrijft. Dit blijkt dan ook uit het volgende.

Integreert men

$$\lambda \frac{d\rho}{dw} = f(\rho) \text{ of } \frac{d\rho}{f(\rho)} = \frac{1}{\lambda} dw$$

zoo zal men verkrijgen:

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho)} = \varphi(\rho) = \frac{1}{\lambda} w + C.$$

Hieruit kan men licht nagaan wat de invloed der konstante λ zal zijn: de kromme zal namelijk over het geheel meer of minder gebogen zijn.

b) *Als factor van* ρ. Zal ρ in twee op elkaâr volgende punten λ maal grooter worden, dan moet ook het verschil d_ρ evenveel maal grooter worden; dus (Fig. 25, *a* en *b*):

$$p'q' = \lambda pq.$$

Nu is wederom in de eene figuur (*a*):

$$dw = \frac{d\rho}{\rho_{-1}}$$

en in de andere (*b*)
$$dw = \frac{\lambda\, d\rho}{\rho_{-1}}.$$

Blijft dus ρ_{-1} even groot, dan zal dw, tegelijk met ρ, λ maal grooter worden. In de vergelijking tusschen ρ en w moet men dus $\lambda\rho$ en λw voor ρ en w schrijven.

Integreert men

$$\frac{d\rho}{dw} = f(\lambda\rho) \text{ of } \frac{d(\lambda\rho)}{f(\lambda\rho)} = \lambda\, dw$$

zoo komt:

$$\varphi(\lambda\rho) = \lambda w + C$$

waaruit hetzelfde blijkt.

Volgens het straks betoogde zullen deze krommen gelijkvormig zijn met die, welke in de vergelijking

$$\varphi(\rho) = \lambda w + C$$

opgesloten zijn. Wat den *vorm* aangaat heeft dus zoodanige konstante denzelfden invloed als die, waarvan bij *a* sprake was.

2°. *Eene konstante a komt zoodanig in de vergelijking*

$$f(\rho, \rho_{-1}) = 0.$$

voor dat zij verdwijnt, wanneer men $\rho \pm a = \rho'$ *stelt.*

Men zal blijkbaar de verschillende krommen verkrijgen, wanneer men alle ρ's even veel langer of korter maakt, en beschouwt men de kromme als evoluut, dan is het verschil eenvoudig daarin gelegen, dat men de ontwikkeling in een ander punt van de evoluut begint.

Men kan niet in het algemeen aangeven, van welken aard de wijzigingen zijn, die de vorm der kromme daardoor in haar geheel ondergaat. Daarentegen blijkt uit de figuren 1—23 gemakkelijk, welke wijzigingen het verkorten van den kromtestraal in elk punt afzonderlijk teweeg brengt. Wij zullen dit in het kort nagaan.

Fig. 1, 2 en 5. Wanneer in de punten b ρ steeds kleiner wordt gedacht, tot hij eindelijk 0 wordt, dan ontstaan daardoor resp. de figuren 16, 15 en 17. Wordt ρ negatief, zoo ontstaan wederom gewone punten, doch de kromte is van teeken veranderd. Het keerpunt der figuren 16, 15 en 17 schuift daarbij van de linker- naar de rechterzijde op.

Fig. 3 gaat, door fig. 11 heen, over in fig. 4 en fig. 6 door fig. 13 in fig. 7 en omgekeerd.

In fig. 8, 9, 14 en 19 is in het punt b $\rho = \infty$, deze vormen zullen dus zoo blijven.

Fig. 10 en 12 gaan resp. over in fig. 23 en 22 en omgekeerd.

Fig. 18 gaat door fig. 20 heen, over in fig. 21 en omgekeerd.

Hieruit vloeit dus voort: 1. Een gewoon punt *kan* een keerpunt worden; een keerpunt *wordt* een gewoon punt.

2. Een top blijft een top, maar kan van maximum minimum worden en omgekeerd.

3. In punten waar $\rho = \infty$ is, heeft geene verandering plaats.

4. Buigpunten *worden* snavels; snavels *kunnen* buigpunten worden, *wanneer het overeenkomstige punt der evoluut een buigpunt is.*

5. Andere snavels blijven snavels, maar kunnen van teeken veranderen.

In de hoofdzaak komen deze beschouwingen overeen met hetgeen Peters zegt omtrent: „die Metamorphose der Gestalt" (Pag. 52—54). Hij spreekt evenwel nog over eene verandering der hoeks-eenheid, — iets, waarvan in onze beschouwing geen sprake kan zijn, daar reeds in Hoofdstuk I de hoekseenheid is vastgesteld op 57°, 2957 . . . .; en dit is een vereischte, zoodra men in het algemeen stelt

$$\rho_{-1} = \frac{d\rho}{dw}.$$

Wilde men de hoekseenheid veranderen, bijv. μ malen kleiner maken, dan zou niet meer $\rho_{-1} = \frac{d\rho}{dw}$ maar $= \frac{d\rho}{\mu dw}$ of $\mu\rho_{-1} = \frac{d\rho}{dw}$ zijn. Hieruit blijkt dat het veranderen der hoekseenheid hetzelfde resultaat oplevert als te schrijven $\mu\rho_{-1}$ voor ρ_{-1}; dit volgt dan ook uit het straks besprokene: dat, wanneer men in eene kromme alle ρ_{-1}'s even veel malen grooter maakt, elke waarde van w in dezelfde reden kleiner wordt, hetgeen op hetzelfde neêrkomt, als wanneer elke w in eene zooveel maal kleinere eenheid wordt uitgedrukt.

Het veranderen der hoekseenheid bij Peters wordt dus terug gebracht op het invoeren eener konstante, wier invloed op den vorm der kromme wij in 't algemeen hebben aangegeven. Wij zouden dus hiermede kunnen volstaan, ware het niet dat Peters tot een resultaat komt, dat met onze beschouwingen strijdt. Als voorbeeld, hoe men onderzoekt of de verandering der hoekseenheid invloed uitoefent op den vorm, gebruikt hij de vergelijking der parabel

$$s = \frac{p}{4}\left\{\frac{tg\, w}{cos\, w} + lg\, tg\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} w)\right\}$$

of $\rho = \frac{1}{2} p \frac{1}{cos^3 w}$.

Verandert men hierin de hoekseenheid, of — wat op hetzelfde neerkomt — schrijft men μw voor w, zoodat men heeft:

$$\rho = \tfrac{1}{2} p \frac{1}{cos^3 \mu w},$$

dan is het uit het voorgaande duidelijk, dat deze konstante μ wel degelijk invloed uitoefent op den vorm der kromme. Peters daarentegen meent dat het veranderen der hoekseenheid hierbij niets afdoet, op grond, dat de cosinus van een bepaalden hoek dezelfde blijft, in welke eenheid deze ook is uitgedrukt. Bedenkt men echter dat $cos\, w = 1 - \frac{w^2}{1.2} + \frac{w^4}{1.2.3.4} - \ldots$ enz. is, *wanneer de hoekseenheid* 57°, 2957.... *is*, dan blijkt het dat men, door $cos\, w$ in de vergelijking te laten staan, ook de hoekseenheid altijd op 57°, 2957.... houdt. Schrijft men echter $cos\, \mu w$ voor $cos\, w$, dan eerst is in de reeks $cos\, \mu w = 1 - \frac{w^2}{1.2} + \frac{w^4}{1.2.3.4} - \ldots$ enz. de hoekseenheid: $\frac{1}{\mu}$ 57°, 2957.....

Nog eene enkele opmerking omtrent de wijze, waarop Peters onderzoekt of eene konstante al dan niet aanleiding geeft tot eene metamorphose van den vorm. Zij is eenvoudiger dan die in deze § ontwikkeld is, maar niet zoo algemeen toepasselijk.

Peters onderzoekt of de verhouding der kromten k en k' in twee punten der kromme al dan niet afhankelijk is van de konstante. Dit is slechts dan in het algemeen van toepassing, wanneer men de kromte heeft uitgedrukt in functie van het *verschil* der hoeken of der bogen in de twee punten om redenen die bladz. 45 zijn aangevoerd. De voorbeelden, die Peters geeft, zijn zoodanig, dat de waarde der konstante geen invloed heeft op de richting van waar men de hoeken begint te tellen. Past men echter de methode van Peters toe op de straks genoemde vergelijking:

$$\rho = a + e^{w}$$

zoo blijkt het, dat zij daarvoor ongeschikt is. Is namelijk voor een hoek w de kromtestraal ρ, voor een hoek w': ρ', en in

$$\mathrm{P} = A + e^{W}$$

voor den hoek W de kromtestraal P en voor W': P', zoo zal men moeten hebben:

$$\rho : \rho' = \mathrm{P} : \mathrm{P}'$$

$$\text{of: } a + e^{w} : a + e^{w'} = A + e^{W} : A + e^{W'}.$$

Is nu $w = W$ en $w' = W'$, zoo komt achtereenvolgens:

$$a + e^{w} : a + e^{w'} = A + e^{w} : A + e^{w'}$$

$$Ae^{w} + ae^{w'} = Ae^{w'} + ae^{w}$$

$$A(e^{w} - e^{w'}) = a(e^{w} - e^{w'})$$

$$A = a$$

zoodat de krommen alleen dan gelijkvormig zouden zijn als de konstanten gelijk zijn. Wij zagen evenwel dat men bij eene behoorlijke in acht neming van den invloed der konstante op de oorspronkelijke richting tot een ander resultaat komt.

§ 2.

ASYMPTOTISME EN PERIODICITEIT.

Wanneer c ééne der coördinaten s, w beteekent en de vergelijking

$$\rho = f(c) \ldots . (1)$$

zoodanig is dat, van eenige positieve of negatieve waarde van c af, de coördinaat tot $+\infty$ of $-\infty$ kan aangroeien zonder dat ρ onbestaanbaar wordt, dan kan men twee gevallen onderscheiden, die den grondslag zullen uitmaken van eene nadere beschouwing betrekkelijk de verschillende vormen, die eene kromme lijn kan hebben.

Stelt men namelijk in de vergelijking (1) $c = \infty$, dan zal elke term, die een *algebraïsche*, *exponentiëele* of *logarithmische functie* van c is, overgaan in ∞, 0 of $\frac{0}{0}$, in welk laatste geval de waarde volgens de bekende methoden kan gevonden worden. *Omgekeerde goniometrische functies*, die — in de veronderstelling dat de coördinaat tot ∞ kan aangroeien — slechts onder zeer beperkende voorwaarden kunnen voorkomen, zullen steeds eene bepaalde waarde verkrijgen. Wel zullen in het algemeen alle bogen, die $2n\pi$ verschillen, aan dezelfde goniometrische functie voldoen, maar het kan nooit twijfelachtig zijn, welke van deze waarden men nemen moet, daar het altijd uit de voorafgaande waarden der functie blijkt, hoe groot n is.

Anders is het in vele gevallen gelegen met termen, die *goniometrische functies* bevatten, waarvan het argument wederom een functie van c is. Wordt dit laatste ∞ voor $c = \infty$, dan zal de goniometrische functie zelve niet tot eene bepaalde waarde naderen; want, hoe groot het argument ook wordt, steeds blijft de goniometrische functie oscilleeren tusschen de haar eigene grenswaarden. Wordt het argument 0 of eindig, dan verkrijgt ook de functie eene bepaalde waarde. Heeft eindelijk de goniometrische functie tot coëfficient een andere functie van c, dan zal ook die tevens overgaan in ∞, 0, $\frac{0}{0}$ of in eene zuivere goniometrische functie van c.

Hieruit volgt dat, indien de vergelijking niets dan goniometrische functies bevat, zij geene verandering zal ondergaan, voor $c = \infty$, — tenzij het argument der goniometrische functie zelf eindig of nul wordt. Dit geval zullen wij vooralsnog buiten rekening laten, ten einde er straks op terug te komen.

De twee gevallen, waarvan zoo even sprake was, zijn nu deze:

1°. De functie $f(c)$ wordt, voor $c = \infty$, oneindig, nul, eindig of gaat over in eene goniometrische functie;

2°. De functie $f(c)$ verandert niet voor $c = \infty$.

De geometrische beteekenis hiervan is deze: wanneer de vergelijking eener kromme lijn voor $c = \infty$ van gedaante verandert, dan zal de vorm der kromme, bij het onbepaald toenemen van den coördinaat, meer en meer naderen tot den vorm, die alsdan door de vergelijking wordt aangegeven; de lijn, die dien vorm heeft, heet *asymptoot* der kromme; deze laatste kan beschouwd worden als in het oneindige met haar asymptoot samen te vallen. Hieruit vloeit onmiddellijk voort, dat de evoluut der kromme onbepaald nadert tot den vorm van de evoluut der asymptoot, zoodat in het algemeen de evoluut van de asymptoot eener kromme de asymptoot van hare evoluut is.

Verandert, voor $c = \infty$, de gedaante der vergelijking niet, dan heeft dit ook geen plaats met de kromme. Uit de omstandigheid, dat zoodanige vergelijking *alléén* goniometrische functies kan bevatten, is het dan ook duidelijk dat bij eene voortdurende toename van c dezelfde reeks van waarden voor ρ terugkeert, telkens, wanneer het argument met 2π vermeerderd is [1]).

Wij zullen de krommen, die, voor één der coördinaten s of w gelijk ∞, eene lijn asymptotisch naderen, *asymptotisch* noemen ten opzichte van den coördinaat, waarvoor dit geschiedt; terwijl de krommen, die telkens dezelfde waarden voor de kromte opleveren, in het algemeen *periodisch* zullen heeten ten opzichte van den coördinaat, waarvoor die periodiciteit plaats heeft.

§ 3.

ASYMPTOTISCHE KROMMEN.

De asymptoot eener asymptotische kromme is, blijkens het voorgaande, een cirkel of een periodische kromme. Wanneer toch de vergelijking

$$\rho = f(c)$$

voor $c = \infty$ overgaat in $\rho = \infty$, $\rho = 0$ of $\rho =$ een konstante a, dan kan men ze altijd beschouwen als de vergelijking van een cirkel, wiens straal ∞, 0 of a is. Gaat daarentegen de vergelijking over in eene andere, die alleen goniometrische functiën bevat, dan is de asymptoot een periodische kromme.

Wanneer de vergelijking eener asymptotische kromme goniometrische functies bevat, zoo is het beginsel der periodiciteit aanwezig, en dit zal zich op de eene of andere wijze in den vorm der kromme moeten openbaren; het duidelijkst zal dit geschieden, wanneer de asymptoot een periodische kromme is: deze laatste levert dezelfde reeks van waarden op voor ρ, wanneer het argu-

---

[1]) Er is éene kromme lijn, die steeds dezelfde reeks van waarden oplevert voor ρ, en toch niet door eene vergelijking in goniometrische functies wordt voorgesteld: namelijk *de cirkel* $\rho = a$. Daar echter de coördinaat geheel ontbreekt, — omdat ρ altijd *dezelfde* waarde heeft, — en er dus van eene verandering van kromte geen sprake is, kan men deze lijn even als de rechte van de te bespreken vormen uitsluiten.

ment met 2π vermeerderd wordt; de reeksen van waarden, die ρ in de oorspronkelijke kromme verkrijgt voor eene vermeerdering van het argument gelijk aan 2π, zullen dus ook, voor zeer groote waarden van c, reeds eene groote overeenkomst doen zien; en men zal c zoo groot kunnen nemen, dat de waarden van ρ in twee punten, waarvoor het argument der goniometrische functie een verschil oplevert van 2π, zoo weinig van elkaâr verschillen als men verkiest. Het behoeft wel geen nader betoog, dat het noodzakelijk gevolg hiervan is, dat twee zoodanige reeksen voor een deel dezelfde waarden van ρ zullen opleveren; dit nu kan niet plaats hebben zonder dat ρ maximum of minimum waarden heeft, of wel door 0 of ∞ heen van teeken verandert. Elke kromme derhalve, die eene periodische kromme tot asymptoot heeft, bezit een oneindig aantal toppen, keerpunten of buigpunten.

Is de asymptoot geen periodische kromme, zoo zal het van den aard der goniometrische functie en de wijze waarop zij voorkomt afhangen, of hare periodiciteit zich op zulk eene in het oog vallende wijze in den vorm der kromme openbaart. Het kan namelijk gebeuren, dat, van eenige waarde van c af, de aangroeiing van ρ, voor zoo ver zij afkomstig is van de niet goniometrische termen, altijd grooter is dan de negatieve aangroeiing, die de goniometrische functies in hare periode van afneming kunnen opleveren; dan zal ρ steeds groeiende blijven, en de kromme zal, even als in vergelijkingen zonder goniometrische termen, van eenig punt af geene toppen, keerpunten of buigpunten kunnen hebben.

Hiervan levert o. a. de vergelijking

$$\rho = c + \sin c$$

een voorbeeld. Op zijn hoogst kan $\frac{d\rho}{dc} = 0$ worden, gelijk blijkt uit

$$\frac{d\rho}{dc} = 1 + \cos c,$$

maar nooit negatief.

Overeenkomstig het voorgaande kan men deze twee vormen van asymptotisme onderscheiden:

a. De kromme vermeerdert of vermindert van een bepaald punt af voortdurend hare kromte, en heeft tot asymptoot een cirkel, wiens straal nul, eindig of oneindig zijn kan. De vergelijking *kan* goniometrische functies bevatten.

b. De kromme heeft een oneindig aantal toppen, keerpunten of buigpunten, en kan een cirkel of een periodische kromme tot asymptoot hebben. De vergelijking *moet* goniometrische functies bevatten.

Wij zullen in het bijzonder nagaan het geval, dat de asymptoot een cirkel is. De waarde waartoe ρ nadert, d. i. den straal van dien cirkel, zullen wij altijd a noemen, steeds in het oog houdende, dat a even goed nul en oneindig als eindig kan zijn.

Het zal bij dit onderzoek noodig zijn te onderscheiden of w dan wel s de coördinaat is, ten opzichte waarvan de kromme asymptotisch is.

I. *ρ wordt gelijk a voor $s = \infty$.* Is *a eindig*, zoo moet ook $w = \infty$ zijn; want was voor $s = \infty$, w bijv. gelijk φ, dan zou men in die richting eene rechte kunnen trekken, waarmede de kromme voor $s = \infty$ samenviel, of waaraan zij althans parallel liep; maar dan was ook $\rho = \infty$, hetgeen met de onderstelling strijdt. Het middelpunt van den cirkel $\rho = a$ is een asymptotisch punt van de evoluut, hetgeen ook daaruit blijkt, dat voor $\rho = a$, $d\rho$ en dus $\frac{d\rho}{dw} = \rho_{-1} = 0$ wordt; verder heeft men dan ook $\frac{d\rho_{-1}}{dw} = \rho_{-2} = 0$ enz.; zoodat alle evoluten dit middelpunt asymptotisch naderen. Elke evoluut heeft daarenboven nog deze eigenschap, dat de lengte van haar boog eene eindige waarde nadert zonder die ooit te bereiken. Want de kromtestraal eener kromme is gelijk aan den boog van hare evoluut; evenmin nu als de waarden $\rho = a$, $\rho_{-1} = 0$, $\rho_{-2} = 0$, enz. ooit worden bereikt, evenmin zal ooit $s_{-1} = a$, $s_{-2} = 0$, $s_{-3} = 0$, enz. bereikt worden, als s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}, enz. de bogen der eerste, tweede, derde enz. evoluut beteekenen.

Is $a = 0$, zoo gelden dezelfde opmerkingen: alleen de cirkel is een punt geworden, zoodat de kromme en al hare evoluten hetzelfde punt tot asymptoot hebben.

Voor $a = \infty$ kan w eene eindige waarde φ hebben; is dit het geval, zoo zal men in die richting eene rechte lijn kunnen trekken; deze *is* of *loopt parallel met* de rechte, die alsdan asymptoot is, en als een cirkel met oneindig grooten straal kan beschouwd worden. De evoluut nadert meer en meer tot de richting, die loodrecht is op de asymptoot der kromme. Is echter voor $a = \infty$ ook $w = \infty$, zoo draait de kromme spiraalvormig rond, en daar de kromtestraal hoe langer hoe grooter wordt, breidt zij zich steeds verder uit; de asymptoot is een cirkel, wiens omtrek in het oneindige ligt. Het verschil tusschen deze twee gevallen van asymptotisme — dat namelijk, voor $s = \infty$

en $\rho = \infty$, w tot eene eindige waarde of tot ∞ nadert — is derhalve hierin gelegen, dat in het eerste geval het middelpunt van den cirkel, wiens straal ∞ is, in het oneindige ligt, terwijl in het tweede geval de omtrek oneindig ver weg gelegen is. In het eerste geval ligt het snijpunt der stralen in het oneindige, d. i. de stralen loopen parallel, en de omtrek wordt een rechte; in het tweede geval snijden de stralen elkaâr, maar de omtrek ligt in het oneindige. De asymptoot van de evoluut is ook in dit laatste geval het middelpunt; echter is de plaats van dat punt geheel onbepaald, daar het vlak, waarvan de omtrek de grens zou moeten uitmaken, geene grenzen heeft. Men kan zich dus voorstellen, dat het middelpunt zich beweegt en eene kromme lijn doet ontstaan: deze moet als de asymptoot der evoluut beschouwd worden. Deze gevallen worden het duidelijkst toegelicht, wanneer men de veranderlijken ρ en w resp. als ordinaten en abscissen beschouwt in een rechthoekig coördinaten-stelsel. Wordt namelijk de ordinaat ρ oneindig voor eene eindige waarde φ van de abscis w, dan wordt ook $\frac{d\rho}{dw}$ oneindig; maar worden de coördinaten beiden oneindig, dan kan $\frac{d\rho}{dw}$ niet alleen eindig, nul of oneindig zijn, maar ook periodisch, d. i. de kromme (in het rechtlijnig coördinatenstelsel) gaat met kronkelingen in eene bepaalde richting tot in het oneindige voort. Past men dit toe, dan heeft men de volgende gevallen:

$\rho = \infty$ voor $w = \varphi$: $\rho_{-1} = \infty$

$\rho = \infty$ voor $w = \infty$: ρ_{-1} is eindig; de asymptoot der evoluut is een cirkel.

$\rho_{-1} = 0$; de asymptoot der evoluut is een punt.

$\rho_{-1} = \infty$; de evoluut verkeert in hetzelfde geval als de kromme.

ρ_{-1} is periodisch; de asymptoot der evoluut is een periodische kromme.

Dit laatste zal bijv. het geval zijn, wanneer men de involuut beschouwt van eene geslotene kromme, waarin geen keerpunten, buigpunten of snavels voorkomen. Die involuut zal namelijk tot asymptoot hebben een cirkel, wiens omtrek in het oneindige ligt, terwijl het middelpunt gedacht moet worden langs de geslotene kromme zich te bewegen; deze laatste echter is eene periodische kromme, want bij het voortdurend aangroeien van s en w keert telkens dezelfde vorm terug; zij heeft dus geen asymptoot, of ook, zij is haar eigen asymptoot; want voor s en w gelijk ∞ valt zij met zich zelve samen.

II. $\rho = a$ *voor* $w = \infty$. Is a *eindig* of *oneindig* zoo moet ook $s = \infty$ worden; want was $s = \sigma$, zoo zou de asymptoot een punt moeten zijn, en dus $\rho = 0$, — hetgeen met de onderstelling strijdt. Dit levert derhalve dezelfde gevallen op als die zoo even besproken zijn.

Is $a = o$ zoo kan s een eindige waarde σ naderen: de asymptoot is een punt, waarom de kromme zich spiraalsgewijze draait.

Wanneer eene kromme lijn tot asymptoot heeft een rechte, zoodat voor $\rho = \infty$, $w = \varphi$ is, of een punt, waarbij, voor $\rho = 0$, $s = \sigma$ is, zoo kan in het eerste geval $w > \varphi$, in het tweede $s > \sigma$ nog bestaanbare waarden voor ρ opleveren. Het gedeelte der kromme, dat daardoor ontstaat, zal dezelfde richting of hetzelfde punt tot asymptoot hebben, waarmede dus de beide takken in het oneindige samenvallen. Al naar gelang ρ zijn teeken behoudt of niet, zal men, in het geval dat de asymptoot een rechte is, een vorm verkrijgen analoog met een top of een keerpunt; evenzoo ontstaan, in de onderstelling dat bij een asymptotisch punt ρ bestaanbaar blijft voor $s > \sigma$, vormen die analoog zijn met toppen en buigpunten. Wordt ρ imaginair, zoo kan men in het eerste geval de vormen vergelijken met buigpunten of snavels, in het tweede met keerpunten of snavels, naar gelang ρ in beide takken verschillende teekens heeft of niet. Men kan hiermede overeenkomstig zoodanige vormen in de meeste gevallen werkelijk als toppen, keerpunten, buigpunten of snavels in het oneindige beschouwen.

Schrijft men in de vergelijking

$$\rho = f(c)$$

eener asymptotische kromme μc voor c, zoo *kan* deze konstante invloed uitoefenen op den vorm der kromme, wanneer geene goniometrische functiën voorkomen; zij *zal* dit doen wanneer deze wel aanwezig zijn. Die invloed is alsdan van denzelfden aard als bij de periodische krommen; wij verwijzen dus naar hetgeen hierover in de volgende § voorkomt.

§ 4.

PERIODISCHE KROMMEN.

Wanneer de vergelijking

$$\rho = f(c)$$

alléén goniometrische functies bevat zoo is de kromme periodisch, d. i. dezelfde waarden van ρ keeren terug voor eene vermeerdering van het argument gelijk $2n\pi$, als n een willekeurig geheel getal is. Noemt men in het algemeen het argument $\Phi(c)$, dan zal dus

$$f\{\Phi + 2n\pi\} = f\{\Phi + 2(n+1)\pi\}$$

zijn, en de reeks van waarden die ρ verkrijgt tusschen $\Phi + 2n\pi$ en $\Phi + 2(n+1)\pi$ dezelfde als die ρ heeft tusschen $\Phi + 2(n+1)\pi$ en $\Phi + 2(n+2)\pi$. Elk gedeelte der kromme, waarin ρ deze geheele reeks van waarden doorloopt, zal eene *periode* genoemd worden; het verschil tusschen de waarden van c, die het argument gelijk $\Phi + 2n\pi$ en $\Phi + 2(n+1)\pi$ maken: *de duur dier periode.*

Noemt men dat verschil γ, dan zal de duur eener periode gevonden worden door uit de vergelijking

$$\Phi(c) - \Phi(c-\gamma) = 2\pi$$

γ op te lossen. Komen meerdere goniometrische functiën voor met verschillende argumenten, die niet tot een zelfde argument kunnen herleid worden, zoo zal blijkbaar γ gevonden worden door het kleinste gemeene veelvoud te nemen van de getallen, die voor elk dier functies den duur der periode aangeven.

In het algemeen zal γ een functie van c zijn; alleen wanneer $\Phi(c)$ van den vorm

$$ac + b$$

is, zal γ konstant zijn; immers wanneer men de vergelijking

$$\Phi(c) - \Phi(c-\gamma) = 2\pi$$

volgens c differentieert, zoo komt er

$$\Phi'(c) = \Phi'(c-\gamma)$$

waaruit blijkt, dat $\Phi'(c)$ konstant moet zijn. Stelt men dus:

$$\Phi'(c) = a$$

en integreert, zoo komt:

$$\Phi(c) = ac + b.$$

De konstante waarde van γ is nu altijd gelijk $\frac{2\pi}{a}$ en dus onafhankelijk van b.

Men kan nu onderscheiden de gevallen:

a) γ is konstant.

b) γ is eene functie van c.

In het eerste geval zijn de perioden in alle opzichten identisch; want door differentiatie van

$$\rho = f\,(ac + b)$$

komt er: $\frac{d\rho}{dc} = af'\,(ac + b)$. Voor eene vermeerdering gelijk $2n\pi$ van c is dus zoowel de kromte als de verandering der kromte ten opzichte van den coördinaat dezelfde, welke waarde n ook heeft. De evoluut van zoodanige kromme is derhalve eene periodische kromme van dezelfde soort.

Is daarentegen $\gamma = \varphi\,(c)$, zoo zullen de perioden niet identisch zijn, omdat haar duur verschilt. Dit kan tot zeer gecompliceerde vormen aanleiding geven: immers, het hangt van de functie $\gamma = \varphi\,(c)$ af van welken aard de periodiciteit is; deze kan namelijk zelve asymptotisch of periodisch zijn, naar gelang γ, voor $c = \infty$, tot een limiet nadert of niet; en in beide deze gevallen kan men dezelfde onderscheidingen maken, als bij de krommen zelve. Is γ asymptotisch, en nadert zij tot ∞, 0 of eene konstante, zoo zullen, bij een onbepaald toenemen van c, de perioden òf steeds grooter worden, zoodat elke volgende perioden langer is dan de voorgaande, terwijl eindelijk een oneindig groote periode ontstaat; — of wel, zij zullen zich voortdurend als het ware samentrekken, totdat ten slotte de periode tot een punt wordt gereduceerd; — of eindelijk, zij zullen meer en meer gelijk worden aan de periode der kromme, waarvoor γ de konstante waarde heeft, die nu haar limiet is. Nadert γ tot een goniometrische functie, zoo nadert de kromme lijn tot een andere lijn, waarvoor dezelfde waarden van γ periodisch terug keeren.

Wanneer γ periodisch is, zoo kan ook hier het argument der goniometrische functie al of niet van den vorm

$$ac + b$$

zijn. Noemt men γ' de waarde van c waarvoor γ wederom dezelfde reeks van waarden verkrijgt, dan is het duidelijk, dat voor $c = \gamma'$ ook dezelfde reeks van waarden voor ρ weder zullen te voorschijn komen, en op dezelfde wijze op elkaar volgen, zoodat de deelen der kromme tusschen $\Phi\,(c) - \Phi\,(c - \gamma')$ en $\Phi\,(c - \gamma') - \Phi\,(c - 2\gamma')$ gelegen weder identisch zijn. Zoodanige periodiciteit kan als van de tweede orde beschouwd worden, en het is duidelijk dat men op deze wijze tot in het oneindige kan voortgaan; is toch γ' niet konstant maar een functie van c, dan kan zij aan hetzelfde onderzoek onderworpen worden, als zoo even γ.

In het zoo even behandelde geval, — dat namelijk Φ niet gelijk $ac + b$ is, is nu tevens opgesloten het geval dat Φ tot 0 of tot een eindige waarde nadert voor $c = \infty$, hetgeen wij voorloopig hadden terzijde gezet (pag. 53). Immers, — noemt men a de waarde waartoe Φ nadert —, dan zal van af eenige waarde $a + \alpha$ de goniometrische functie steeds toe- of afnemende blijven, naderende tot hare waarde voor $\Phi = a$, als limiet; de laatste periode is dus oneindig groot, en derhalve zal voor $c = \infty$ ook $\gamma = \infty$ zijn. Hiervan levert de vergelijking

$$\rho = \sin\frac{1}{c}$$

een voorbeeld. Wanneer men namelijk heeft

$$\frac{1}{c} < \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\text{of } c > \frac{2}{\pi},$$

zoo keeren niet meer dezelfde waarden van ρ periodisch terug, maar nadert ρ onbepaald tot 0 en wordt dus steeds kleiner.

Gelijk bij de *asymptotische krommen* de invloed van goniometrische functies op den vorm der lijn, zich als *periodiciteit* openbaart, zoo openbaart zich — blijkens het voorgaande — in *periodische krommen* de invloed van algebraïsche functies als *asymptotisme;* en ofschoon in het eerste geval de periodiciteit, en (vooral) in het laatste geval het asymptotisme in sterke mate op den voorgrond kan treden, zoo bestaat er toch altijd dit essentiëel verschil, dat eene asymptotische kromme *nooit* uit deelen bestaat, waarin de kromte dezelfde reeks van waarden doorloopt, terwijl dit bij eene periodische *altijd* het geval is. Als een eigenlijke overgang zou zoodanige periodische kromme aangezien kunnen worden, waarbij de goniometrische functie van zekere waarde van c af tot een konstante of tot nul nadert; want, hoewel dit deel der kromme in verband met het overige gedeelte als een oneindig lange periode moet beschouwd worden, zoo kan de omstandigheid, dat ρ, van eene bepaalde waarde van c af, voortdurend toe- of afneemt zonder een spoor van periodiciteit te vertoonen, aanleiding geven om de kromme asymptotisch te noemen.

Let men op de uitersten der twee vormen, zoo zal men een onvermengd asymptotisme vinden bij krommen, wier vergelijkingen geen enkele goniometrische functie bevatten, terwijl in de zuiver periodische krommen het argument der goniometrische functies van den vorm $ac + b$ is.

In het algemeen kan men omtrent periodische krommen nog het volgende opmerken, hetgeen zonder betoog gemakkelijk wordt ingezien.

Elke periode heeft minstens twee bijzondere punten, hetzij toppen, keerpunten of buigpunten, waaronder wij ook rekenen de gevallen, dat deze punten in het oneindige liggen. Heeft dit laatste plaats, zoo heeft elke periode één of meer *rechten* of *punten* tot asymptoten, al naar gelang w of s de coördinaat is, ten opzichte waarvan de kromme periodisch is; en dan zal de kromme ten opzichte van den anderen coördinaat asymptotisch zijn, omdat voor een oneindig groote waarde van dezen $\rho = \infty$ of $= 0$ wordt. Hieruit blijkt dat eene kromme lijn asymptotisch kan zijn ten opzichte van één coördinaat, en periodisch ten opzichte van den anderen: het is dan een periodische kromme, waarvan elke periode asymptotisch is.

Wij zullen in het bijzonder die periodische vormen nagaan, waarbij het argument der goniometrische functie van den vorm $ac + b$ is. Hierbij is het wederom noodig te onderscheiden of w dan wel s de coördinaat is, ten opzichte waarvan de periodiciteit plaats heeft.

I. *Periodiciteit ten opzichte van w.*

Er kunnen twee oorzaken zijn, waardoor de vergelijking in s *niet* periodisch is:

1o. doordat de kromme toppen in het oneindige heeft.

2o. doordat de kromme keerpunten heeft.

In het eerste geval toch zal voor die waarde van w, waarvoor $\rho = \infty$ is, ook $s = \infty$ zijn, zoodat uit de vergelijking in s moet blijken, dat bij een onbepaald aangroeien van s, ρ tot ∞ nadert.

In het tweede geval zal, in het keerpunt, s eene grenswaarde hebben, die niet overschreden kan worden, zonder dat ρ onbestaanbaar wordt; maar, daar ρ in het keerpunt van teeken verandert, zoo zal er nog een keerpunt moeten aanwezig zijn, wil ρ eenmaal dezelfde waarde met hetzelfde teeken weêrkrijgen. Dit vereischt een tweede grenswaarde van s; de vergelijking in s zal dus — met inachtneming van hetgeen in Hoofdstuk II (§ 4) gezegd is omtrent de wijze waarop men zich het ontstaan van keerpunten kon voorstellen — eene kromme lijn opleveren met een keerpunt, die niets anders is, dan ééne periode van de kromme, zoo als de vergelijking in w haar aangeeft. De grenswaarden van s kunnen beiden of een van beiden ∞ zijn, d. w. z. dat s niet door ∞ heen van teeken kan veranderen, zonder ρ imaginair te maken.

Heeft daarentegen de kromme geene toppen in het oneindige en evenmin keerpunten, dan zal zoowel de vergelijking in s als die in w eene periodische kromme opleveren; want dan moet de vergelijking in s de kromme lijn in haar geheel geven, daar s onbepaald aangroeit, zonder dat ρ eenige waarde asymptotisch nadert of imaginair wordt. Omgekeerd zal elke kromme, wier vergelijkingen in s en in w beide periodisch zijn geene der genoemde punten kunnen hebben; want was er een asymptotisch punt, zoodat voor $s = \sigma$, $\rho = 0$ werd, dan zou $w = \infty$ moeten zijn en de kromme zou ten opzichte van w asymptotisch zijn; en was er een asymptotische rechte, zoodat voor $w = \varphi$, $\rho = \infty$ werd, zoo zou zij het ten opzichte van s wezen. Dat zij geene keerpunten kan hebben, volgt onmiddellijk daaruit, dat s verondersteld wordt onbepaald te kunnen aangroeien.

Denkt men zich de overeenkomstige punten van elk paar aan elkander sluitende perioden door rechte lijnen vereenigd, zoo zullen — wegens de identiteit der perioden — al deze lijnen even groot zijn, en overal gelijke hoeken maken; deelt men deze hoeken midden door, zoo snijden de deellijnen elkaar in één punt, dat het middelpunt is van den cirkel, die door al deze overeenkomstige punten gaat.

Eene *geslotene* kromme is eene periodische kromme, waarbij van eenige periode af alle volgende perioden op de voorgaanden vallen. Voor het punt dat op het beginpunt der eerste periode valt, zal natuurlijk $w = n \times 360^{o}$ moeten zijn, als n een geheel getal beteekent; dit zullen wij *n omgangen* noemen; dus beteekent de uitdrukking: er zijn *vijf perioden* in *drie omgangen*, dat de zesde periode wederom op de eerste valt, en dat alsdan $w = 3 \times 360^{o}$ is.

Uit het straks opgemerkte vloeit voort, dat de middelpuntshoek van den veelhoek, die door de overeenkomstige punten gevormd wordt, gelijk is aan den hoek der normalen in die punten; deze hoek geeft dus den duur der periode, γ, in graden aan, zoo als die uit de vergelijking in w gevonden wordt. wordt. Veronderstelt men nu dat er α perioden in β omgangen zijn, dan zal $\alpha \times \gamma = \beta \times 360$ moeten zijn, of:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{360}{\gamma};$$

en hieruit zal men α en β vinden door de eenvoudigste geheele getallen te zoeken, die tot elkaâr in dezelfde reden staan als 360 tot γ.

Wanneer γ ten opzichte van 360° onmeetbaar is, zoo zal de kromme zich nooit sluiten; daar men echter aan α en β successievelijk zoodanige waarden kan geven, dat de verhouding $\frac{\alpha}{\beta}$ steeds minder van $\frac{360}{\gamma}$ verschilt, zoo zal telkens, wanneer het aantal perioden gedeeld door het aantal omgangen, gelijk is aan één dezer naderende breuken, de eerst volgende periode dichter bij de allereerste periode geschoven zijn, terwijl de afwijking beurtelings aan de eene en aan de andere zijde zal plaats hebben. Men kan daarom zoodanige krommen beschouwen als gesloten na een oneindig aantal omgangen.

Anders is het gelegen wanneer $\gamma = n \times 360$ is, n een geheel getal zijnde; dan kan de kromme gesloten zijn of niet. Is namelijk het verschil in richting tusschen de normalen in de overeenkomstige punten van twee aan elkaâr sluitende perioden een veelvoud van 360°, dan loopen ze parallel. De cirkelomtrek, waarop de overeenkomstige punten liggen, wordt eene rechte, wanneer de overeenkomstige punten van twee aan elkaâr sluitende perioden niet in elkaâr vallen, en een punt, wanneer dit wel plaats heeft; in het eerste geval liggen de perioden allen in éénе richting naast elkaâr, zoodat de kromme zich nooit sluiten kan; in het tweede geval liggen *alle* perioden op elkaar: de kromme sluit zich met ééne periode in n omgangen. Wij zullen in de volgende § in een voorbeeld doen zien, hoe dit onderscheiden kan worden in de vergelijking.

Eene afzonderlijke beschouwing vereischt nog het geval dat $\gamma = n \times 180$, en n oneven is; alsdan heeft men twee perioden in n omgangen en de normalen in overeenkomstige punten loopen wederom parallel. Evenwel kan dit niet anders dan bij geslotene krommen plaats hebben, want trekt men de rechte lijn, die twee overeenkomstige punten p en q (Fig. 26) vereenigt, zoo moet deze met die, welke q met het overeenkomstige punt p' der derde periode vereenigt, 180° maken; dus ligt dat punt op pq, maar in tegengestelde richting als waarin q ten opzichte van p gelegen is; omdat verder de perioden kongruent zijn, is $pq = qp'$, en valt het punt p' weder in het punt p zelf: de derde periode bedekt dus de eerste.

Uit het voorgaande blijkt dat elke kromme, waarvan de duur eener periode niet gelijk $n \times 360°$ is, gesloten *moet* zijn, terwijl voor $\gamma = n \times 360°$ de kromme gesloten *kan* zijn.

Daar in het algemeen

$$\gamma = \frac{2\pi}{a}$$

is, zoo is het duidelijk, dat men, door aan de konstante a verschillende waarden te geven, den duur der periode verandert, en wel in dier voege, dat men α perioden in $a\beta$ omgangen verkrijgt in plaats van in β omgangen. Daar de konstante a op dezelfde wijze voorkomt als de vroeger gebruikte factor μ (als factor van w), zoo is hiermede tevens het antwoord gegeven op de vraag, van welken aard de invloed van dien factor is op de thans besprokene periodische krommen.

Daar a altijd zoodanig kan gekozen worden, dat γ niet gelijk $n \times 360^\circ$ is, zoo kan men van elke niet gesloten kromme, die periodisch is ten opzichte van w, eene geslotene maken.

II. *Periodiciteit ten opzichte van s.*

Hier valt alleen het geval te bespreken, dat de kromme niet periodisch is ten opzichte van w. Dit kan weder veroorzaakt worden, door dat de kromme toppen heeft in het oneindige — dus hier asymptotische punten met een eindige waarde van s —, of wel buigpunten; hetgeen op dezelfde wijze wordt aangetoond, als pag. 62 met betrekking tot asymptotische rechten en keerpunten.

Trekt men in zoodanige kromme de normalen in de overeenkomstige punten, zoo zullen deze òf allen in elkaâr vallen, — als wanneer de kromme lijn gesloten is — òf parallel loopen, zoodat de perioden allen in ééne richting naast elkaâr liggen. Immers de vergelijking in w is niet periodisch: zij geeft slechts den vorm aan van éene periode; sluit men dus deze krommen aan elkaâr aan, dan zullen de gelijke waarden van ρ door *dezelfde* waarden van w worden geleverd, zoodat het verschil in richting der normalen in overeenkomstige punten altijd nul is. Voert men in de vergelijking in s den factor μ in, zoo heeft dit hetzelfde resultaat, als wanneer men dit doet in de vergelijking in w; maar daardoor zal alleen de duur der periode (d. i. hier de lengte van den boog) veranderd worden en daarmede de vorm der perioden, niet hare betrekkelijke ligging; zoodat men deze periodische krommen niet zoodanige metamorphose kan doen ondergaan als die, welke ten opzichte van w periodisch zijn.

§ 5.

GEVAL DAT DE COÖRDINAAT NIET TOT ∞ KAN AANGROEIEN.

In § 2 veronderstelden wij dat in de verg. $\rho = f(c)$, c van eene bepaalde waarde af tot $+ \infty$ of $- \infty$ kan aangroeien, zonder dat ρ onbestaanbaar wordt. Is dit echter niet het geval, d. i. heeft c zoowel bij eene positieve als bij eene negatieve toename grenswaarden, die niet kunnen overschreden worden, zonder ρ imaginair te maken, dan heeft de kromme aldaar een keerpunt, een buigpunt of een snavel, al naar gelang in dat punt:

1°. s een grenswaarde heeft, terwijl w blijft toenemen,

2°. w een grenswaarde heeft, terwijl s blijft toenemen,

3°. zoowel s als w grenswaarden hebben.

De beide eerste gevallen zijn in het tot nu toe behandelde vervat, voor zoo ver w of s niet slechts door het keerpunt of buigpunt heen, maar ook verder tot in het oneindige kan aangroeien; het is dus alleen noodig nog een enkel woord te zeggen over krommen, waarbij beide coördinaten s en w grenswaarden hebben, zoo bij eene positieve als bij eene negatieve toeneming.

In het punt, waar s die waarde heeft, is een keerpunt; waar w zijn maximum bereikt, een buigpunt; terwijl, wanneer die twee waarden van s en w hetzelfde punt der kromme aangeven, de combinatie van keerpunt en buigpunt aldaar een snavel doet ontstaan.

Men kan hierbij in het algemeen onderscheiden:

a) Tusschen de grenswaarden α en β van c kan ρ een oneindig aantal verschillende reeksen van waarden hebben; dan levert de vergelijking even zoo vele verschillende krommen op, die echter allen aan elkaâr sluiten in keerpunten, buigpunten of snavels. Men zal dan kunnen trachten een limiet te vinden, waartoe die reeks van waarden nadert, en deze als den asymptoot der kromme beschouwen, zoodat deze alsdan tot de asymptotische gerekend kan worden.

b) Er is een beperkt aantal reeksen van waarden voor ρ. Alsdan behoort de kromme lijn tot de periodische; want even als bij periodische lijnen met enkel keerpunten de vergelijking in s, — of met enkel buigpunten, die in w, — slechts éene periode aangeeft, die, tot in het oneindige herhaald, de kromme in haar geheel oplevert, zoo zal men ook hier, analoog daarmede, die reeksen van waarden van ρ onophoudelijk in dezelfde orde naast elkaâr kunnen plaatsen, en daardoor eene periodische kromme verkrijgen.

Het is duidelijk dat bij deze krommen, even als bij de periodische krommen met buigpunten, de duur der periode ten opzichte van w gelijk 0 is, zoodat de factor μ alleen op den vorm van elke periode kan influenceeren.

Omtrent den aard der vergelijkingen van deze krommen valt nog op te merken, dat de omgekeerde goniometrische functies *bg sin c* en *bg cos c* hierbij een groote rol zullen spelen, daar, tusschen de grenswaarden -1 en $+1$ van c, de functie een oneindig aantal reeksen van waarden verkrijgen kan.

§ 6.

RANGSCHIKKING DER VERSCHILLENDE VORMEN.

Naar aanleiding van het in de vorige §§ ontwikkelde zullen wij thans de verschillende vormen in geregelde volgorde rangschikken en hier en daar door voorbeelden toelichten. Daarbij zullen wij afzonderlijk behandelen:

A. Krommen zonder keerpunten, buigpunten en snavels.

B. Krommen, die alléén keerpunten of alléén buigpunten hebben.

C. Krommen met keerpunten en buigpunten tegelijk en met snavels.

A. Krommen zonder keerpunten, buigpunten en snavels.

De kromtestraal ρ moet steeds positief of negatief zijn. Elk maximum of minimum correspondeert met een top.

1) *De kromme is asymptotisch ten opzichte van beide coördinaten.*

a) *Hare kromte vermeerdert of vermindert van een bepaald punt uit voortdurend*, zoodat de asymptoot altijd een cirkel is, wiens straal oneindig, eindig of nul kan zijn. De eenvoudigste vormen zullen die zijn, waarbij geen spoor van periodiciteit bestaat, zoodat beide vergelijkingen

$$\rho = \varphi\,(w) \text{ en } \rho = \psi\,(s)$$

vrij zijn van goniometrische functies. Tot deze krommen behooren de eigenlijke spiralen, waaronder wel de eenvoudigste voorgesteld worden door exponentiëele functies, omdat deze krommen kunnen opleveren, die zelfs geen enkelen top hebben, hetgeen bij algebraïsche functies nooit het geval kan zijn.

Als voorbeeld noemen wij in de eerste plaats de gewone logarithmische spiraal (de „logarithmica spiralis longitudinaris" van Krause. Pag. 28) waarvan de vergelijking is:

$$\rho = e^{w}.$$

Deze kan als de eenvoudigste asymptotische kromme beschouwd worden, daar in elk punt de kromte gelijk is aan de verandering van kromte. Immers men heeft

$$\rho_{-1} = e^{w}$$

$$\text{dus: } \rho = \rho_{-1}.$$

Schrijft men μw voor w, zoo wordt deze vergelijking:

$$\rho = \frac{1}{\mu} \rho_{-1}$$

waaruit blijkt, dat de vorm der kromme verandert voor verschillende waarden van μ. De vergelijking in s is

$$\rho = s.$$

Nam men deze tot grondslag, dan zou men de kromme een buigpunt in het oneindige kunnen toekennen; terwijl namelijk s door nul heen van teeken verandert — dus toenemende blijft — verandert ook ρ van teeken; in dat punt is echter $w = -\infty$. De beide takken worden dan voorgesteld door de vergelijking

$$\rho = \pm e^{w}.$$

De vergelijking

$$\rho = e^{s}$$

$$\text{of } \rho = -\frac{1}{w}$$

stelt eene kromme voor, die aan de eene zijde tot een rechte nadert, — voor $s = \infty$ is $\rho = \infty$ en $w = 0$ — aan de andere zijde tot een punt — voor $s = -\infty$ is $\rho = 0$ en $w = -\infty$.

Andere voorbeelden van zoodanige krommen leveren vergelijkingen als deze:

$$\rho = w^{n} \ldots . (1)$$

$$\rho = s^{n} \ldots . (2)$$

als n een even getal of een breuk met even teller is. Integreert men (1), zoo komt:

$$s = \frac{1}{n+1} w^{n+1}$$

waardoor men verkrijgt:

$$\rho = \{(n+1)\,s\}^{\frac{n}{n+1}}$$

Het punt, waarin $\rho = 0$ is, is een top; voor $w = \infty$ en $s = \infty$ is ook $\rho = \infty$, dus is de asymptoot een cirkel met oneindig grooten straal. Door n differentiatien verkrijgt men, als n een geheel getal is:

$$\rho_{-n} = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots .2\,.\,1$$

waaruit blijkt dat de n^{de} evoluut een cirkel is.

Uit (2) volgt:

$$\rho = \{(1-n)\,w\}^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\text{of: } \rho = \frac{1}{\{(n-1)\,w\}^{\frac{n}{n-1}}}$$

Is $n < 1$, zoo is voor $s = \infty$, $w = \infty$ en $\rho = \infty$, voor $s = 0$, $w = 0$ en $\rho = 0$. De kromme heeft een top en twee takken, die beiden een cirkel met oneindigen straal tot asymptoot hebben. Is $n > 1$, zoo is voor $s = \pm\,\infty$, $\rho = \infty$ maar $w = 0$, en voor $w = +\,\infty$, $\rho = 0$ en $s = 0$; de eene asymptoot wordt dan een rechte en de andere een punt. Zoowel w als s veranderen door 0 heen van teeken, d. i. blijven toe- of afnemen; hetgeen nog duidelijker wordt wanneer men den oorsprong verlegt en de hoofdrichting verandert door $w = \varphi - w'$ en $s = \sigma - s'$ te stellen. Alsdan heeft de kromme voor $w' = \varphi$ en voor $s' = \sigma$ toppen, die in het oneindige liggen, want $\rho = \infty$ is een maximum, $\rho = 0$ een minimum.

Voorbeelden van krommen, die sporen van periodiciteit vertoonen, zonder dat dit blijkt uit een telkens terugkeeren van toppen leveren o. a. de vergelijkingen:

$$\rho = w^2 + \sin^2 w$$

$$\rho = s^2 + \sin^2 s,$$

waarover wij evenwel niet in bijzonderheden zullen treden.

b) *De kromme vertoont een oneindig aantal toppen.* Voorbeeld:

$$\rho = w^2 \sin^2 w.$$

Telkens wanneer $w = \pm\, n\pi$ is, ontstaat een top met $\rho = 0$, en voor $w = \pm\, \frac{2n-1}{2}\,\pi$ een, waar $\rho = \frac{(2n-1)^2}{4}\,\pi^2$ is. Dit maximum wordt steeds grooter en heeft tot limiet ∞, zoodat de asymptoot een cirkel is met oneindig grooten straal.

Bij de asymptotische krommen met keerpunten geven wij een voorbeeld en teekening van eene kromme lijn, die tot in het oneindige keerpunten heeft, en daarenboven eene periodische kromme tot asymptoot heeft: wij zullen dus hier niet verder over zoodanige vormen uitweiden.

2) *De kromme is periodisch ten opzichte van één coördinaat, niet periodisch ten opzichte van den anderen.*

Daar de kromme verondersteld wordt geene keerpunten te hebben, zoo kan dit geval slechts dan voorkomen, wanneer zij toppen in het oneindige heeft, zoodat de vergelijking in den anderen coördinaat slechts ééne periode geeft als eene asymptotische kromme. Wij bepalen ons tot het geven van twee voorbeelden:

$$\rho = \frac{1}{sin^2 w} \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$\rho = sin^2 s \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

De eerste kromme heeft tot verg: in s: $\rho = 1 + s^2$; ρ is gelijk 1, telkens als $w = \frac{2n-1}{2}\pi$ is, als wanneer $s = 0$ is; $\rho = \infty$ voor $w = n\pi$ en $s = \pm\infty$.

De verg: (2) geeft

$$\rho = \frac{1}{1+w^2};$$

voor $s = 2n\pi$ en $w = +\infty$ is $\rho = 0$; voor $s = \frac{2n-1}{2}\pi$ en $w = 0$, is $\rho = 0$. De eerste kromme heeft in elke periode een rechte tot asymptoot, de tweede een punt.

Overeenkomstig het vroeger opgemerkte is in de vergelijking

$$\rho = \frac{1}{sin^2 \mu w}$$

de factor μ ook van invloed op de betrekkelijke ligging der perioden, in

$$\rho = sin^2 \mu s$$

alleen op den vorm der periode.

3) *De kromme is periodisch ten opzichte van beide coördinaten:*

a) *De duur der periode* (γ) *is veranderlijk.* Het is duidelijk dat γ veranderlijk moet zijn zoowel ten opzichte van s als van w; want, daar de vorm der kromme door ééne der vergelijkingen

$$\rho = \varphi(w), \quad \rho = \psi(s)$$

volkomen bepaald is, zoo moet het al of niet identisch zijn der perioden uit beide vergelijkingen blijken. Bij de krommen met keerpunten zullen wij van deze soort van periodiciteit een voorbeeld geven.

b) γ *is konstant.* Het argument der goniometrische functie is van den vorm: $ac + b$. Wij geven hiervan een uitvoerig voorbeeld, vooral ook met het oog op den invloed van den factor μ op den vorm van deze soort van kromme lijnen.

De vergelijking

$$\rho = sin^2 \mu w \; .\; .\; .\; . \; (1)$$

bevat, gelijk straks blijken zal, de involuten der epicycloïde, cycloïde en hypocycloïde, wanneer men deze krommen begint te ontwikkelen in het punt waar de kromtestraal nul is; dit laatste blijkt wanneer men de verg: (1) differentiëert; men verkrijgt:

$$\rho_{-1} = \mu \; sin \; 2\mu w.$$

Elimineert men nu w tusschen deze verg: en (1) zoo komt:

$$\rho_{-1}{}^2 = 4\mu^2 \rho \, (1 - \rho),$$

zoodat voor $\rho = 0$, ook $\rho_{-1} = 0$ is.

De duur der periode is in het algemeen:

$$\gamma = \frac{1}{\mu} \pi.$$

Daar namelijk de goniometrische functie in het kwadraat voorkomt, keeren dezelfde waarden voor ρ reeds terug, wanneer het argument met π vermeerderd wordt.

Voor $\mu = 1$ heeft men

$$\rho = sin^2 w$$

$$\text{en } \gamma = \pi \text{ of } 180^\circ$$

zoodat er twee perioden in één omgang zijn, en derhalve de kromme gesloten is. Haar evoluut:

$$\rho_{-1} = sin \; 2w$$

is dezelfde kromme, die Lamarle „épicycloïde elliptique" noemt.

Fig. 27 stelt de kromme voor; de dunnere lijn is de eerste evoluut, de gestreepte lijn de tweede evoluut, terwijl de cirkels, door wier beweging men zich het ontstaan der eerste evoluut kan denken, door gestippelde lijnen zijn aangegeven.

Voor $\mu = \frac{1}{2}$ heeft men

$$\rho = sin^2 \tfrac{1}{2} w$$

$$\gamma = 2\pi = 360^\circ$$

dus ééne periode in één omgang; het is de vraag of deze kromme gesloten zal zijn of niet. Dit kan reeds daardoor beslist worden, dat er slechts één maximum en één minimum van ρ is in elke periode. Daar toch elk maximum of minimum met een keerpunt van de evoluut correspondeert, en het ondenkbaar is, dat eene geslotene kromme, zonder buigpunten en snavels, twee keerpunten heeft in één omgang, zoo is het duidelijk dat geene kromme met éénc periode in één omgang gesloten kan zijn, wanneer zij in elke periode slechts twee toppen heeft. Wij zullen echter de vraag algemeener stellen en zoeken of de kromme zich al dan niet sluiten kan met éénc periode in n omgangen, dus voor $\gamma = 2n\pi$. Alsdan wordt de vergelijking (1):

$$\rho = sin^2 \frac{w}{2n}$$

waarin n een geheel getal is.

Denkt men zich bij eene geslotene kromme de raaklijn en de normaal in het beginpunt der periode, zoo is het duidelijk dat de algebraïsche som der projectiën van alle boogelementen op elk dier rechten gelijk nul zal zijn. De projectie van ds op de raaklijn is $ds \cos w$ en die op de normaal $ds \sin w$, of omdat $ds = \rho\, dw$ is:

$$\rho \cos w\, dw \quad \text{en} \quad \rho \sin w\, dw.$$

Is het nu de vraag of eene kromme zich na n omgangen, dus voor $w = 2n\pi$, sluiten zal, dan heeft men te onderzoeken of

$$\int_0^{2n\pi} \rho \cos w\, dw = 0$$

$$\text{en} \int_0^{2n\pi} \rho \sin w\, dw = 0$$

zijn. In ons voorbeeld behoeft alleen het eerste onderzocht te worden, want daar ρ op dezelfde wijze verandert tusschen $w = 0$ en $w = n\pi$, als tusschen $w = n\pi$ en $w = 2n\pi$, maar in omgekeerden zin, zoo is de kromme symmetrisch ten opzichte van de normaal in het toppunt; de som der projectiën op deze normaal is dus reeds van zelf gelijk nul; en, daar de richtingen 0 en $n\pi$ 180° verschillen, zoo loopt die rechte parallel met de normaal in het beginpunt; dus is ook de som der projectiën op die rechte, dat is

$$\int_0^{2n\pi} \rho \sin w\, dw$$

gelijk 0.

Men heeft dus te integreeren

$$\int_0^{2n\pi} \rho \cos w \, dw$$

$$\text{dat is:} \int_0^{2n\pi} \sin^2 \frac{w}{2n} \cos w \, dw$$

$$\text{of:} \ \tfrac{1}{2}\int_0^{2n\pi} \cos w \, dw - \tfrac{1}{2}\int_0^{2n\pi} \cos \frac{w}{n} \cos w \, dw.$$

De eerste term verdwijnt voor de grenzen 0 en $2n\pi$; voor den tweeden heeft men:

$$\cos \frac{w}{n} \cos w = \tfrac{1}{2} \left\{\cos\left(\frac{1+n}{n} w\right) + \cos\left(\frac{1-n}{n} w\right)\right\}$$

dus

$$\int \cos \frac{w}{n} \cos w \, dw = \tfrac{1}{2} n \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1+n}{n} w\right)}{1+n} + \frac{\sin\left(\frac{1-n}{n} w\right)}{1-n} \right\}$$

hetgeen 0 wordt voor $w = 2n\pi$ tenzij $n = 1$ is, als wanneer

$$\cos\left(\frac{1-n}{n} w\right) = 1$$

wordt en derhalve de bepaalde integraal van dien term: $2n\pi$.

Alzoo is in het algemeen

$$\int_0^{2n\pi} \rho \cos w \, dw = 0$$

en voor het bijzondere geval $n = 1$:

$$\int_0^{2n\pi} \rho \cos w \, dw = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Deze waarde geeft natuurlijk den afstand aan tusschen twee overeenkomstige punten in naast elkaar liggende perioden. Het negatieve teeken geeft te kennen dat de richting, waarin die punten ten opzichte van elkaar gelegen zijn, tegengesteld is aan die welke de raaklijn heeft in het beginpunt.

Fig. 28 stelt deze kromme voor; zij is involuut van de cycloïde. Fig. 29 stelt het geval voor dat $n = 2$ is; de evolut wordt hier epicycloïde.

Men kan zich de vraag stellen welke waarde μ moet hebben, om de kromme aan zeker vereischte te laten voldoen, bijv. dat de toppen van alle perioden door één punt gaan. Ten einde dit te onderzoeken, bedenke men, dat het alleen dan plaats kan hebben, wanneer het toppunt gelegen is in de normaal van het beginpunt; immers, ter weerszijden van die normaal zijn de perioden volkomen symmetrisch gelegen; valt dus het toppunt van de eene periode er buiten aan de ééne zijde, dan is het toppunt van de andere periode aan de andere zijde gelegen, zoodat het ondenkbaar is dat de toppen samenvallen wanneer zij niet op de normaal in het beginpunt liggen.

Hieruit vloeit voort dat de projectie op de raaklijn, van het deel der kromme, dat tusschen het beginpunt en het toppunt ligt, gelijk nul moet zijn, of, daar in dit laatste punt $w = \frac{1}{2}\gamma = \frac{\pi}{2\mu}$ is:

$$\int_0^{\frac{1}{2\mu}\pi} \rho \cos w \, dw = 0.$$

Nu is wederom

$$\sin^2 \mu w \cos w = \tfrac{1}{2} \cos w - \tfrac{1}{2} \cos 2\mu w \cos w$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2\mu}\pi} \cos w \, dw = \tfrac{1}{2} \sin \frac{1}{2\mu}\pi$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2\mu}\pi} \cos 2\mu w \cos w \, dw = \frac{1}{2(4\mu^2 - 1)} \sin \frac{1}{2\mu}\pi$$

zoodat men verkrijgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2\mu}\pi} \rho \cos w \, dw = \frac{2\mu^2 - 1}{4\mu^2 - 1} \sin \frac{1}{2\mu}\pi.$$

Dit wordt nul, wanneer $\frac{1}{2\mu}$ een geheel getal (maar > 1) is, omdat dan $\sin \frac{1}{2\mu}\pi = 0$ is; het levert de gevallen op, die wij straks hebben nagegaan, waarbij de kromme lijn ééne periode heeft in een geheel aantal omgangen. Maar ook zal de vergelijking nul zijn voor

$$2\mu^2 = 1$$

$$\text{of } \mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

De vergelijking (1) wordt dus

$$\rho = \sin^2 \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \, . \, w.$$

De verhouding tusschen het aantal perioden en het correspondeerende aantal omgangen is hier onmeetbaar; dus zal deze kromme, die door Fig. 30 wordt voorgesteld, zich eerst na een oneindig aantal omgangen kunnen sluiten.

Men vindt gemakkelijk

$$\int_0^{\frac{1}{2\mu}\pi} \rho \sin w \, dw = 1,$$

d. i. de afstand tusschen het beginpunt en den top langs de normaal, of de straal van den cirkel, binnen welken de bewegelijke cirkel rollen moet, om de hypocycloïde voort te brengen, die de evoluut is van onze kromme lijn.

Past men deze metamorphose van den vorm toe op de ellips, waarvan de vergelijking is:

$$\rho = \frac{p^2 q^2}{(p^2 \sin^2 w + q^2 \cos^2 w)^{\frac{3}{2}}},$$

door μw voor w te schrijven, dan verkrijgt men krommen als die, welke door Fig. 31 en 32 worden voorgesteld. In Fig. 31 is $\mu = \frac{5}{8}$, de duur der periode is dus $\frac{8}{5}\pi = 288^\circ$, zoodat er 5 perioden in 4 omgangen zijn. In Fig. 32 is $\mu = \frac{1}{2}$, hetgeen overeenkomt met eene periode in een omgang.

B. Krommen, die alleen keerpunten of alleen buigpunten hebben.

1) *De kromme is asymptotisch ten opzichte van beide coördinaten.*

a) *De kromme vermeerdert of vermindert van een bepaald punt uit voortdurend hare kromte.* De eenvoudigste vormen zijn die, waar de kromme twee takken heeft, die zich in een keerpunt of buigpunt vereenigen. Peters geeft van dit laatste een voorbeeld in de verg: $w = as^2$ (Pag. 184. Fig. 21 van Peters). De vergelijkingen, waardoor ρ in functie van s en w wordt uitgedrukt, zijn:

$$\rho = \pm \frac{1}{\sqrt{2aw}} \text{ en } \rho = \frac{1}{2as},$$

waaruit blijkt dat, voor $w < 0$, ρ imaginair wordt.

Andere voorbeelden zijn de involuten van den cirkel, wanneer men niet telkens de ontwinding begint in het punt waar de kromtestraal 0 is.

b) *De kromme heeft een oneindig aantal bijzondere punten,* — hetzij toppen, keerpunten of buigpunten.

De kromme door de verg:

$$\rho = \frac{1}{w} + \sin w$$

voorgesteld, heeft bijv. een oneindig aantal keerpunten (Fig. 33). Voor $w = 0$ is $\rho = \infty$, terwijl uit:

$$s = lg\, w - cos\, w$$

blijkt, dat alsdan ook $s = -\infty$ is; voor $w < 0$ wordt ρ negatief, dus heeft de kromme lijn een keerpunt in het oneindige. Wanneer nu w grooter wordt zullen er telkens tusschen $w = \pm 2n\pi$ en $w = \pm 2(n+1)\pi$ twee waarden van w liggen, waardoor $\rho = 0$ wordt. Deze twee waarden zullen een verschil opleveren, dat steeds kleiner is dan π, maar, bij het onbepaald aangroeien van w, meer en meer tot π nadert. Daarbij nadert de kromme tot den vorm, die door de vergelijking

$$\rho = sin\, w$$

wordt voorgesteld, dat is de vergelijking der cycloïde: deze is dus haar asymptoot.

2) *De kromme is periodisch.* Dit kan slechts het geval zijn ten opzichte van één der coördinaten; want, daar de kromme keerpunten of buigpunten heeft, zoo moet de andere coördinaat grenswaarden hebben. Is zulk een grenswaarde ∞ — d. i. kan de coördinaat niet door ∞ heen van teeken veranderen — dan ligt het keerpunt of buigpunt in het oneindige.

a) *Periodiciteit ten opzichte van w.*

α) *γ is een functie van w.* Fig. 34 stelt zoodanige kromme lijn voor. De vergelijking waarnaar deze lijn geconstrueerd is, is:

$$\rho = sin\, (w^2).$$

Lost men γ op uit:

$$w^2 - (w - \gamma)^2 = 2\pi,$$

zoo komt:

$$\gamma = w \pm \sqrt{w^2 - 2\pi}.$$

Het is licht in te zien, dat deze uitdrukking aan het doel zal beantwoorden, wanneer men voor positieve waarden van w het onderste teeken gebruikt, voor negatieve het bovenste; in dit laatste geval wordt ook γ negatief, daar altijd

$$\sqrt{w^2 - 2\pi} < w \text{ is.}$$

Voor $w^2 < 2\pi$ wordt γ imaginair, waaruit blijkt dat er geene geheele positieve of negatieve perioden meer bestaan voor waarden van w die kleiner zijn dan $\sqrt{2\pi}$, zoodat de eerste periode gelijk $\sqrt{2\pi}$ is. Hoe grooter w wordt, des te kleiner wordt γ, want des te minder wordt het verschil tusschen w en

$\sqrt{w^2 - 2\pi}$. Voor $w = \infty$ wordt $\gamma = 0$, hetgeen ook blijkt, als men de formule voor γ onder dezen vorm brengt:

$$\gamma = \frac{2\pi}{w + \sqrt{w^2 - 2\pi}}$$

welke vergelijking, voor $w = \infty$ overgaat in

$$\gamma = 0.$$

In de figuur is *abc* de eerste periode, voor w positief, *cd* het eerste gedeelte der tweede periode. Negatieve waarden van w leveren blijkbaar een gedeelte der kromme lijn op, dat identisch is met het gedeelte, waarin w positief is. Daar ρ niet van teeken verandert, als w nul passeert, zoo is $\rho = 0$ aldaar een minimum, en dus het overeenkomstige punt der kromme lijn een top.

β) γ *is konstant.* Tot de eenvoudigste krommen van deze soort behoort de cycloïde, waarvan de vergelijking is

$$\rho = \sin w.$$

Stelt men μw voor w, dan ontstaan de epi- en hypocycloïde, naar gelang μ kleiner of grooter dan 1 is. Wij zullen hiervan het bewijs leveren, door de vergelijking

$$\rho = \sin \mu w$$

over te brengen in rechtlijnige coördinaten.

Zij (Fig. 35) P een punt der kromme, PR de richting der raaklijn, PN de richting der normaal in dat punt, OX de hoofdrichting, zoodat $\angle RQX = w$ is.

Neemt men nu OX als richting der *x-as* en OY, loodrecht daarop, als richting der *y-as* aan, zoo is

$$dx = ds \cos w$$

$$\text{en } dy = ds \sin w.$$

Integreerende de vergelijkingen:

$$ds \cos w = dx = \sin \mu w \cos w \, dw$$

$$ds \sin w = dy = \sin \mu w \sin w \, dw,$$

verkrijgt men:

$$x - C = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\cos (1 - \mu) w}{1 - \mu} - \frac{\cos (1 + \mu) w}{1 + \mu} \right\}$$

$$y - C = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (1 - \mu) w}{1 - \mu} - \frac{\sin (1 + \mu) w}{1 + \mu} \right\}$$

Stelt men den oorsprong zoodanig, dat de konstanten nul zijn, dan moet voor $w = 0$

$$x = \frac{\mu}{1 - \mu^2} \text{ en } y = 0$$

zijn. Door nu te stellen

$$\frac{1}{2(1-\mu)} = a + b \; \ldots . \; (1)$$

$$\frac{1}{2(1+\mu)} = b \; \ldots . \; (2)$$

$$(1 - \mu)\, w = \theta \; \ldots . \; (3)$$

gaan de vergelijkingen over in:

$$x = (a + b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta\right)$$

$$y = (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta\right),$$

hetgeen de bekende vergelijkingen zijn der epicycloïde. Dat de ingevoerde konstanten a en b, alsmede de veranderlijke θ werkelijk die beteekenis hebben, welke zij in deze vergelijkingen behooren te hebben, is gemakkelijk te verificeren. Vooreerst zal $\frac{\mu}{1-\mu^2}$, d. i. de waarde van x, voor $w = 0$, gelijk a moeten zijn: door eliminatie van b uit (1) en (2) verkrijgt men dan ook: $\frac{\mu}{1-\mu^2} = a$. Is verder in figuur 36 wederom PR de raaklijn, PN de normaal in het punt P der kromme, dan is $\angle$ COX $= \theta$. Noemt men $\angle$ ORP : φ zoo is, gelijk bekend is:

$$\frac{2\varphi}{\theta} = \frac{a}{b}$$

$$\text{maar: } w = \theta + \varphi$$

dus, door eliminatie van φ:

$$w = \frac{a + 2b}{2b} \theta = (1 - \mu)\, \theta.$$

Tevens volgt hieruit dat $\varphi = \mu w$ is.

Eenvoudiger is het om uit te gaan van de uitdrukking die Lamarle [1]) geeft voor den kromtestraal der epicycloïde:

$$\rho = \frac{2(m+1)}{m+2} r$$

waarin $m = \frac{a}{b}$ is en r de afstand van het raakpunt des cirkels tot het punt der kromme, — in figuur 36: PN. Men heeft nu terstond:

---

[1]) Bulletins de l'Acad. Royale de Belgique, 1857, T. II, pag. 81.

$$r = 2b \sin \varphi$$

$$\text{maar: } \varphi = \frac{m}{m+2} w$$

$$\text{dus: } r = 2b \sin \frac{m}{m+2} w$$

$$\text{en } \rho = 4b \frac{m+1}{m+2} \sin \frac{m}{m+2} w;$$

stellende $\frac{m}{m+2} = \mu$, zoo verkrijgt men:

$$\rho = 4b \frac{m+1}{m+2} \sin \mu w.$$

De konstante factor $4b \frac{m+1}{m+2}$ kan $= 1$ gesteld worden, want altijd kan men de lengte-eenheid zoodanig kiezen dat $b = \frac{m+2}{4(m+1)}$ wordt.

Het hangt nu van μ af of de kromme epicycloïde, cycloïde of hypocycloïde is. Voor $\mu = 1$ ontstaat de cycloïde; want, daar $a = \frac{\mu}{1-\mu^2}$ is, zoo wordt, voor $\mu = 1$, $a = \infty$, dat is de vaste cirkel wordt een rechte. Voor $\mu < 1$ heeft men de epicycloïde; voor $\mu > 1$ de hypocycloïde. In dit laatste geval worden namelijk a en θ negatief, en de vergelijkingen in rechtlijnige coördinaten gaan over in:

$$x = (a-b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a-b}{b} \theta\right)$$

$$y = (a-b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a-b}{b} \theta\right).$$

De eerste evoluten der krommen in de Fig. 27, 28, 29 en 30 stellen de gevallen voor, dat $\mu = 2$, 1, $\frac{1}{2}$ en $\sqrt{2}$ is.

De evoluten dezer krommen zijn opgesloten in de vergelijking:

$$\rho_{-1} = \mu \cos \mu w.$$

Door de hoofdrichting om een hoek van $\frac{1}{\mu}\, 90^\circ$ te verdraaien, zoodat $w = \frac{1}{\mu}\, 90^\circ - w'$ wordt, gaat deze vergelijking over in:

$$\rho_{-1} = \mu \cos (90^\circ - \mu w')$$

$$\text{of } \rho_{-1} = \mu \sin \mu w'$$

waaruit blijkt, dat de evoluten van al deze krommen gelijkvormig zijn aan de krommen zelve; hetzelfde geldt natuurlijk van alle volgende evoluten.

Beschouwt men de kromme

$$\rho = \sin \mu w$$

als involuut van

$$\rho_{-1} = \mu \cos \mu w$$

dan zal men andere vormen kunnen verkrijgen door de ontwinding in andere punten te beginnen, d. i. door $\rho - a$ in plaats van ρ te stellen, en a te laten varieeren. Onder die vormen zullen dan de krommen moeten voorkomen, die pag. 71 e. v. behandeld zijn. De verg. wordt door die substitutie

$$\rho = \sin \mu w + a.$$

Is a positief, maar < 1, zoo zal ρ in de beide toppen van elke periode niet meer -1 en $+1$ zijn, maar $-1 + a$ en $+1 + a$. Het eerste maximum wordt dan kleiner en het tweede grooter. Hiermede gaat gepaard eene verschuiving van de twee keerpunten naar elkaar toe; want deze ontstaan nu in punten, waarvoor $\sin \mu w = -a$ is, dat is voor $\mu w = n\pi + \alpha$ en $\mu w = (n + 1)\pi - \alpha$, als $\sin \alpha = a$ is, en $\alpha < 90^\circ$; terwijl, voor $a = 0$, in deze punten $\mu w = n\pi$ en $\mu w = (n + 1)\pi$ was; het verschil tusschen de waarden van w was dus π en wordt nu $\pi - 2\alpha$. Hoe grooter nu a wordt, des te grooter wordt ook α en des te kleiner $\pi - 2\alpha$. Wordt $a = 1$, dan is $\alpha = \frac{1}{2}\pi$: de keerpunten verdwijnen en worden vervangen door een top waar ρ de minimum waarde van nul bereikt. De vergelijking wordt dan

$$\rho = 1 + \sin \mu w.$$

Verdraait men wederom de hoofdrichting, door $\mu w = \mu w' - 90^\circ$ te stellen, zoo komt:

$$\rho = 1 - \cos \mu w'$$

$$\text{of } \rho = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} \mu w',$$

hetgeen de vergelijking is van pag. 71, behalve dat $\frac{1}{2}\mu$ in plaats van μ staat, hetgeen zijn oorsprong daarin heeft; dat hier de duur der periode $= \frac{2\pi}{\mu}$ gesteld werd, en ginds $= \frac{\pi}{\mu}$.

Wordt $a > 1$, zoo blijven de toppen als zoodanig bestaan, maar de waarden van ρ worden aldaar steeds grooter.

Is $a < 1$, maar negatief, zoo ontstaan dezelfde vormen, hetgeen terstond blijkt, wanneer men $a = -b$ stelt, en $\mu w = 2\pi - \mu w'$; daardoor gaat zij over in deze:

$$\rho = -(\sin \mu w' + b)$$

die slechts van de vergelijking:

$$\rho = \sin \mu w' + a$$

verschilt in het teeken van ρ. De keerpunten schuiven nu van elkaar af in plaats naar elkaar toe, zoodat het gedeelte der kromme waarin ρ positief is kleiner wordt, en verdwijnt voor $b = 1$ of $a = -1$.

De parabel is een voorbeeld van een kromme met keerpunten in het oneindige. Haar vergelijking is:

$$\rho = \frac{2}{p} \frac{1}{\cos^2 w}.$$

Voor $w = \pm \frac{1}{2} \pi$ is namelijk $\rho = \infty$; terwijl, voor $w > \frac{1}{2} \pi$, ρ van teeken veranderd is. Men ziet uit dit voorbeeld, dat zoodanige merkwaardige punten in het oneindige niet altijd geometrisch voor te stellen zijn. Gelijk bekend is ligt namelijk de asymptoot der parabel zelf in het oneindige, zoodat de andere tak, die tot deze zelfde rechte nadert, ook oneindig ver weg gelegen is.

Door μw voor w te stellen, zou men krommen verkrijgen, waarbij de hoek der twee asymptoten niet π, maar $\frac{1}{\mu} \pi$ is.

b) Periodiciteit ten opzichte van s. Hierbij kan weer onderscheiden worden:

α) γ is een functie van s.

β) γ is konstant.

Wij bepalen ons tot een paar opmerkingen omtrent het laatste geval.

Het argument der goniometrische functie is van den vorm $as + b$. Het invoeren van den factor μ zal alleen ten gevolge hebben eene verandering van den vorm der perioden, niet een verschil in hare betrekkelijke ligging onderling, daar in alle perioden dezelfde waarde van ρ wordt opgeleverd door absoluut gelijke waarden van w; derhalve vallen òf alle perioden op elkaar, òf ze liggen in ééne richting naast elkander, hetgeen daardoor kan worden onderscheiden of

$$\int_{\frac{\alpha}{\mu}}^{\frac{\beta}{\mu}} \rho \sin w \, dw = 0 \quad \text{en} \quad \int_{\frac{\alpha}{\mu}}^{\frac{\beta}{\mu}} \rho \cos w \, dw = 0$$

zijn, als α en β de grenswaarden van w zijn.

Een voorbeeld is:

$$\rho = \frac{1}{\sin \mu s}$$

of na integratie en eliminatie van s:

$$\rho = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2 w^2}}$$

De figuren 37 en 38 stellen de kromme voor, als $\mu = 1$ en $= \frac{1}{\pi}$ is, zoodat in de eerste figuur de grenswaarden van w zijn:

$$+ 57^\circ, 2957 \ldots. \quad \text{en} \quad - 57^\circ, 2957 \ldots.$$

in de tweede:

$$+ 180^\circ \quad \text{en} \quad - 180^\circ.$$

Tot deze vormen kan de hyperbel gebracht worden, als een periodische kromme met buigpunten in het oneindige. De verg.:

$$\rho = \frac{p^2 q^2}{\pm \sqrt{(p^2 cos^2 w - q^2 sin^2 w)^3}}$$

geeft slechts eene periode aan: w toch kan de waarden

$$bg\ tg \left(+ \frac{q}{p}\right) \quad \text{en} \quad bg\ tg \left(- \frac{q}{p}\right)$$

niet overschrijden, zonder dat ρ onbestaanbaar wordt; voor die grenswaarden is $\rho = \infty$, en daartusschen behoudt ρ zijn teeken. In de vergelijking zijn evenwel twee krommen opgesloten, die identisch zijn; de teekens van ρ verschillen, dus geschiedt de vereeniging dier takken door een buigpunt, dat echter in het oneindige ligt.

C. Krommen met Keerpunten en Buigpunten tegelijk en met snavels.

1) *Asymptotische krommen.* Onder deze rubriek behooren:

a) Die waarbij één der coördinaten of beiden tot in het oneindige kan aangroeien. De eenvoudigste vormen zijn die, waar twee oneindige takken door een snavel verbonden zijn, of ook die, welke een keerpunt en een buigpunt hebben, ter weerszijden waarvan zich een oneindige tak bevindt.

b) De zoodanigen waarbij w en s beiden grenswaarden hebben, waartusschen ρ een oneindig aantal verschillende reeksen van waarden kan hebben. De limiet waartoe die reeksen naderen is de asymptoot. Een voorbeeld hiervan is de involuut van de kromme die in Fig. 37 is afgebeeld: de lijn *abcd*. Door integratie van

$$d\rho = \frac{dw}{\sqrt{1 - \mu^2 w^2}}$$

verkrijgt men namelijk:

$$\rho = \frac{1}{\mu} bg\ sin\ \mu w$$

Laat men de konstante weg, zoo begint men de kromme te ontwinden in één der toppen a, alwaar $w = 0$ is. De verschillende reeksen van waarden, die ρ kan verkrijgen tusschen $w = -\frac{1}{\mu}$ en $w = +\frac{1}{\mu}$, bevatten hoe langer hoe grootere waarden, zoodat ρ gezegd kan worden onbepaald te groeien: de rechte lijn is hier dus de vorm waartoe de kromme asymptotisch nadert.

2) *Periodische krommen.* Deze ontstaan wanneer beide coördinaten grenswaarden hebben, maar slechts een beperkt aantal reeksen van waarden voor ρ opleveren. Peters geeft er een voorbeeld van (Pag. 194). De vergelijking waarvan hij uitgaat is $s = \pm \sqrt{w - w^2} \ldots . (1)$;

$$\text{derhalve is } \rho = \pm \frac{1 - 2w}{2\sqrt{w - w^2}} \ldots . (2)$$

Lost men uit (1) w op en substitueert de gevonden waarde in (2), zoo komt:

$$\rho = \pm \frac{\sqrt{1 - 4s^2}}{2s} \ldots . (3)$$

Uit (2) en (3) blijkt dat ρ onbestaanbaar wordt voor $w > 1$ en < 0, en voor $s > \frac{1}{2}$ en $< -\frac{1}{2}$. Voor de grenswaarden van w is $\rho = \infty$, voor die van s is $\rho = 0$; het zijn dus verschillende plaatsen der kromme. Vergelijking (1) geeft eene periodische kromme, waarvan elke periode door buigpunten begrensd is, terwijl voor $w = \frac{1}{2}$ een keerpunt ontstaat, omdat ρ alsdan van teeken verandert door 0 heen, terwijl w aangroeit. Verg. (3) geeft dezelfde kromme; maar nu zijn de grenzen der perioden de keerpunten, terwijl $s = 0$ een buigpunt geeft, omdat ρ aldaar door ∞ heen van teeken verandert, terwijl s aangroeit. Schrijft men in (2) μw voor w, zoo verkrijgt men andere krommen die allen periodisch zullen zijn en allen de perioden in éene richting naast elkaar zullen hebben. Peters geeft drie voorbeelden, waar $\mu = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}$ en $\frac{1}{4\pi}$ is.

HOOFDSTUK IV.

OVER DE VOORDEELEN WELKE DE THEORIE VAN DE ESSENTIËELE VERGELIJKINGEN DER KROMME LIJNEN KAN AANBRENGEN.

§ 1.

ALGEMEENE OPMERKINGEN.

In het Eerste Hoofdstuk is er op gewezen, dat elk coördinaten-stelsel zijn eigenaardige voordeelen heeft. Elke vergelijking toch eener kromme lijn, in welk systeem ook, is de uitdrukking van eene eigenschap dier lijn, die in elk ander systeem minder eenvoudig wordt uitgedrukt, terwijl het altijd hoogstwaarschijnlijk is, dat ook andere eigenschappen eenvoudiger uitgedrukt, en dus gemakkelijker gevonden zullen worden. Men zie bijv. slechts wat een stelsel van coördinaten als dat, wat in *Der barycentrische Calcul* ten gronde ligt, in de handen van een Möbius voor sommige krommen kan opleveren; welke toepassingen Swellengrebel van zijne negen coördinaten-stelsels doet zien, en hoe Druckenmüller, in *Die Uebertragungsprincipiën*, zich de coördinaten-systemen van het punt, de rechte lijn en den cirkel ten nutte maakt voor de theorie der poollijnen en poolfiguren.

Buitendien zal aan elk coördinaten-stelsel een zekere mate van geschiktheid verbonden zijn, om de vergelijking eener kromme lijn op te maken, wanneer de conditie, waaraan elk harer punten moet voldoen, onder zekeren vorm gegeven is.

Wij zullen thans kortelijk nagaan, van welken aard de voordeelen zijn, die de essentiëele vergelijkingen kunnen aanbieden.

De eigenschap, die door de essentiëele vergelijking eener kromme lijn wordt uitgedrukt, heeft betrekking op hare kromming, — haren vorm, afgescheiden van hare verhouding tot andere lijnen of punten. 't Is daarom dat zoodanige vergelijkingen de voorkeur verdienen boven anderen, wanneer men alleen den *vorm* op het oog heeft, en dat *alleen zij* den grondslag kunnen uitmaken van een systeem van mathematische vormen. „Das wissenschaftliche Verfahren würde sein, die allgemeinen Formen der Functionen auf zu suchen, welche die verschiedenen geforderten Haupteigenschaften besitzen, und nachdem so auf umgekehrte Weise die Functionen gewonnen, diese an die Spitze zu stellen." (Peters, pag. 92).

Het natuurlijk gevolg daarvan is, dat de essentiëele vergelijking eener kromme lijn het gemakkelijkst uit eenige conditie is op te maken, wanneer deze alleen op den vorm der lijn betrekking heeft, niet op de betrekkelijke ligging ten opzichte van andere punten of lijnen buiten haar. Dit zal bijv. het geval zijn, wanneer gevraagd wordt naar den weg, dien een punt zal doorloopen, dat zich volgens eene bepaalde wet beweegt. Hierbij zal de beschouwingswijze van Lamarle in de meeste gevallen van groot gemak zijn. Beschouwt men namelijk het bewegende punt als gelegen op eene rechte, die in hare eigene richting voortschuift, en tevens om dat punt draait, dan zal het veelal niet moeilijk vallen, de verhouding tusschen de snelheden, waarmede die twee bewegingen plaats hebben, uit te drukken in eene functie van een der coördinaten s, w, of ook de betrekking te vinden tusschen ρ en ρ_{-1}, d. i. tusschen de snelheid van het bewegende punt en die van het krommingsmiddelpunt, beiden in verhouding tot de draaiingssnelheid, die dezelfde is voor de raaklijn als voor de normaal.

In het Eerste Hoofdstuk (§ 5) is aangewezen, hoe men daarbij te werk moet gaan; terwijl tevens werd opgemerkt, dat de vergelijkingen, die door Lamarle worden gegeven, meestal zonder veel moeite in essentiëele vergelijkingen kunnen veranderd worden. Dit is reeds in het vorige Hoofdstuk (§ 6) gebleken betrekkelijk de vergelijking der epicycloïde. In de volgende § zullen wij hetzelfde doen met de vergelijkingen der kegelsneden, en daarbij door een paar voorbeelden doen zien, op welke wijze men de essentiëele vergelijking eener kromme lijn onmiddellijk uit eene gegevene conditie kan vinden.

De eigenschappen, die men uit de essentiëele vergelijking eener kromme lijn kan leeren kennen, zullen voornamelijk betrekking hebben op de kromtestralen. Daar men echter door achtereenvolgende differentiatiën van eene vergelijking

$$\rho = \varphi(w)$$

de vergelijkingen verkrijgt van de evoluten der kromme, en door achtereenvolgende integraties de vergelijkingen der involuten, zoo is het duidelijk, dat men ook van deze krommen gemakkelijk verschillende eigenschappen zal vinden, betreffende hare kromtestralen.

Ten einde hiervan een voorbeeld te geven, zullen wij nog eene afzonderlijke § wijden aan de *involuten van den cirkel*, vooral ook met het oog op het verband, dat er bestaat tusschen de eigenschappen dezer krommen en de eigenschappen der hoogere-machts-vergelijkingen.

§ 2.

VOORBEELDEN WAARIN DE ESSENTIEELE VERGELIJKING DER KROMME ONMIDDELLIJK UIT EENE GEGEVENE CONDITIE WORDT OPGEMAAKT.

De vergelijking der ellips, zoo als Lamarle die vindt uit de conditie, dat de som der voerstralen konstant is, is deze:

$$\rho = \frac{2rr'}{(r + r')\cos\varphi} \ldots . (1)$$

als r en r' de voerstralen zijn, en φ hun halve hoek is. Men kan deze vergelijking op de volgende wijze overbrengen in den vorm, waarin zij door Krause (*Praefatio*, Pag. X) wordt opgegeven.

Noemt men (Fig. 39):

a de groote as,

b den parameter, d. i. den dubbelen voerstraal, die loodrecht op ff' staat.

w den hoek, dien de normaal maakt met de groote as, dan heeft men, in aanmerking nemende dat $ff' = \sqrt{a(a-b)}$ is, de vergelijkingen:

$$r + r' = a$$

$$r' : \sin(w + \varphi) = \sqrt{a(a-b)} : \sin 2\varphi$$

$$r : \sin(w - \varphi) = \sqrt{a(a-b)} : \sin 2\varphi$$

Elimineert men tusschen deze drie en (1): r, r' en φ, zoo komt:

$$\rho = \frac{a\sqrt{a}\,.\,b}{2} \; \frac{1}{(a\cos^2 w + b\sin^2 w)^{\frac{3}{2}}}$$

hetgeen dezelfde vergelijking is, die Krause opgeeft, en die ook uit de vergelijking in rechtlijnige coördinaten wordt gevonden.

Op dezelfde wijze kan men handelen ten opzichte van de hyperbel en parabel.

Men kan de vergelijking der ellips ook opmaken uit de eigenschap, dat zij uit den cirkel ontstaat, als men daarin alle koorden, die aan eene zelfde middellijn evenwijdig loopen in dezelfde reden verkort of verlengt; welk vraagstuk ook aldus gesteld kan worden:

Eene willekeurige koorde des cirkels beweegt zich langs de middellijn, waarop zij loodrecht staat; op deze koorde beweegt zich tegelijk een punt, zoodanig dat de halve koorde steeds in dezelfde verhouding verdeeld is.

Constructie van het krommings-middelpunt. In figuur 40 is pM een koorde, die gedacht wordt zich te bewegen in de richting $O \ldots . C$, m het beschrijvende punt; At loodrecht op Mp, Mt raaklijn aan den cirkel; zij verder de konstante verhouding $\frac{Mp}{mp} = k$. Neemt men nu pt voor de snelheid van de bewegende koorde, dan stelt deze lijn tevens de composante langs At voor van de snelheden der beide punten M en m; de composante der snelheid langs de koorde is dan voor $M : Mp$. Maar daar de verhouding van de afstanden der punten M en m tot At konstant is, zoo zullen ook hunne snelheden langs de koorde evenredig zijn, zoodat dan mp de snelheid van m voorstelt. Hieruit vloeit voort, dat de resulteerende snelheid van m in richting en grootte voorgesteld wordt door mt, en dat dus het krommings-middelpunt op de loodlijn mo moet liggen. Het punt t ligt derhalve op de drie rechten Mt, mt en Ot, en zal met een zekere snelheid tS langs tA schuiven. Ten einde het punt S te vinden, zoekt men een derde evenredige tot MO en Mt, en zet die af op een loodrechte in t op Mt opopgericht, dan zal het snijpunt van QS ($\perp Qt$) met tA het gezochte punt S zijn. Immers: de lijn Mt heeft een hoeksnelheid gelijk $\frac{Mt}{MO}$; dus zal het punt t met die zelfde snelheid om M draaien; daarom zal de snelheid, waarmede t zich in een richting loodrecht op Mt beweegt, tot Mt in dezelfde verhouding moeten staan als Mt tot MO. Hieraan voldoet de lijn, die door het verlengde van Mp op de loodrechte tQ wordt afgesneden, want construeert men het parallelogram $QMNt$, zoo is blijkbaar:

$$OM : Mt = Mt : MN$$

$$\text{of } OM : Mt = Mt : Qt.$$

De snelheid van t in de richting tM zal dan voorgesteld worden door QS, en dus de resultante door tS.

Dezelfde constructie, maar in omgekeerden zin, ten opzichte van het punt m uitgevoerd, zal het punt o doen vinden. Trekt men namelijk tq loodrecht op mt, zoo zal de loodlijn Sq de snelheid aangeven van t in de richting tm, en qt de snelheid van dat punt in eene richting loodrecht daarop. De draaiingssnelheid van t om m, — en dus ook van de lijn mt om o, — zal gelijk zijn aan $\frac{qt}{mt}$; een derde evenredige tot qt en mt zal dan de lengte zijn van den kromtestraal. Men vindt terstond het punt o door mq te trekken, en de loodlijn, daarop uit t neêrgelaten, te verlengen tot zij mo snijdt; want teekent men weer het parallelogram $mLto$, zoo zal:

$$qt : mt = mt : tL$$

$$\text{of } qt : mt = mt : mo \text{ zijn.}$$

Berekening. Wij zullen vooraf het volgende vaststellen:

De snelheid van $M : Mt = V$; de snelheid van $m : mt = v$.

De hoeken, die de raaklijnen Mt en mt maken met de konstante richting $pM : W$ en w.

$OM = r$, de straal des cirkels; $om = \rho$, de kromtestraal.

Men heeft alsnu: $\rho = \frac{v^2}{tq}$

$$\text{terwijl } tq = \frac{\sin mtp}{\sin Mtp} \cdot tQ = \frac{mp}{v} \cdot \frac{V}{Mp} \cdot tQ = \frac{V}{kv} \cdot tQ \text{ is;}$$

$$\text{daar echter } \frac{tg\, w}{tg\, W} = \frac{Mp}{mp} = k$$

$$\text{en dus } \sin W = \frac{tg\, w}{\sqrt{k^2 + tg^2 w}} \text{ is,}$$

$$\text{zoo heeft men: } V = \frac{v \sin w}{\sin W} = \frac{v \sin w \sqrt{k^2 + tg^2 w}}{tg w} = \sqrt{\sin^2 w + k^2 \cos^2 w}.$$

$$\text{Verder is: } tQ = \frac{V^2}{r} = \frac{v^2}{r} (\sin^2 w + k^2 \cos^2 w);$$

$$\text{zoodat } tq = \frac{v^2}{kr} (\sin^2 w + k^2 \cos^2 w)^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{en } \rho = \frac{kr}{(\sin^2 w + k^2 \cos^2 w)^{\frac{3}{2}}} \text{ wordt.}$$

Voert men voor de konstanten k en r de halve assen p en q in, door te stellen $k = \frac{p}{q}$ en $r = p$, zoo komt:

$$\rho = \frac{p^2 q^2}{(q^2 \sin^2 w + p^2 \cos^2 w)^{\frac{3}{2}}}$$

welke uitdrukking wederom overgaat in de vergelijking, zoo als men haar bij

Krause vindt, door de substituties: $2p = a$ en $\frac{2q^2}{p} = b$.

Het is wel duidelijk, dat men zoowel hier, als in het vraagstuk, dat door Lamarle is opgelost, de snelheden kan vervangen door differentialen; zoo kan men bijv. deze oplossing in plaats van de zoo even gegevene stellen:

Stel (Fig. 41) $Mp = Y,\ mp = y$

$MM' = dS,\ mm' = ds.$

De conditie is: $Y = ky$, waaruit terstond volgt:

$$dY = k\,dy.$$

Nu is: $ds \sin w = dS \sin W$,

$$\text{dus: } ds = \frac{\sin W}{\sin w}\,dS = r\,\frac{\sin W}{\sin w}\,dW$$

$$\text{omdat } \frac{dS}{dW} = r \text{ is.}$$

$$\text{Derhalve is } \rho = \frac{ds}{dw} = r\,\frac{\sin W}{\sin w}\cdot\frac{dW}{dw}$$

$$\text{Maar } tg\,W = \frac{tg\,w}{k}$$

$$\text{dus } \cos W = \frac{k}{\sqrt{k^2 + tg^2 w}}$$

en door differentiatie hiervan:

$$\sin W\,dW = \frac{k \sin w\,dw}{(k^2 \cos^2 w + \sin^2 w)^{\frac{3}{2}}}$$

Derhalve:

$$\rho = \frac{kr}{(k^2 \cos^2 w + \sin^2 w)^{\frac{3}{2}}}. —$$

Een ander voorbeeld levert de oplossing van het volgende vraagstuk:

Welken vorm moet men aan eene sponning geven, waarin het eene uiteinde eener staaf van bepaalde lengte a loopt, opdat het andere uiteinde eene rechte lijn beschrijve, terwijl de richting der staaf steeds raaklijn blijft aan den vorm der sponning?

Als (Fig. 42) $mp = a$ de staaf is, die met het uiteinde p langs de rechte AB glijdt, terwijl m de gezochte kromme lijn beschrijft, dan zal, daar p zich in de richting pq beweegt, en m in de richting mp, het snijpunt o der loodlijnen po en mo, resp. in de punten p en m op de rechten pq en mp opgericht, het punt zijn, waarom men zich kan denken, dat het vlak op dat oogenblik draait, d. i. het krommings-middelpunt. Stelt nu mp de snelheid voor van het punt m, dan zal $pq = \frac{mp}{mo} . po$ de snelheid van p zijn. Maakt men $or = op$ en verlengt men mo, tot deze de rechte $o's$ ($\perp pr$) in s snijdt, zoo is blijkbaar $rs = pq$, maar tevens zal oo', $\perp$ op ms, de kromtestraal der evoluut zijn. De snelheid toch van het punt o langs os is de resultante van $ot = pq$ en ts, loodrecht daarop, — dus: os. Nu moet oo' zoodanig zijn dat:

$$os : oo' = mp : om$$

is, daar de hoeksnelheden van m en o dezelfde zijn; dit nu is in de figuur het geval.

Alsnu heeft men:

$$\overline{po}^2 = \rho^2 + a^2$$

$$\text{en } \overline{or}^2 = a\,\rho_{-1}$$

$$\text{maar: } po = or$$

$$\text{dus: } a\,\rho_{-1} = \rho^2 + a^2.$$

Deelt men deze vergelijking door a^2, zoo komt:

$$\frac{\rho_{-1}}{a} = \frac{\rho^2}{a^2} + 1$$

waaruit blijkt, dat de konstante a, — dat is de lengte der staaf — tot den *vorm* der kromme niets afdoet.

Integreert men de verg:

$$\frac{a d\rho}{\rho^2 + a^2} = dw$$

zoo komt:

$$w = bg\, tg \frac{\rho}{a}$$

$$\text{of } \rho = a\, tg\, w \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

wanneer men de hoeken begint te tellen van af de richting, die de raaklijn heeft in het punt, waar $\rho = 0$ is. Daar deze richting blijkbaar loodrecht staat op de rechte AB, zoo is in de figuur $\angle mpo = w$; en dus $tg\, w = \frac{\rho}{a}$. Deze vergelijking wordt derhalve spoediger gevonden; echter kan uit de gegevene oplossing blijken, dat men ook onmiddellijk tot eene vergelijking tusschen ρ en ρ_{-1} kan geraken.

De gevondene kromme is periodisch ten opzichte van w, maar asymptotisch ten opzichte van s. Integreert men namelijk:

$$ds = a\, tg\, w\, dw$$

zoo komt: $s = -a\, lg\, cos\, w \ldots .$ (2), waar men geene konstante behoeft toe te voegen, als men voor $w = 0$ ook $s = 0$ neemt. Door eliminatie van w tusschen (1) en (2) verkrijgt men:

$$\rho = \pm a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$$

waaruit blijkt, dat voor $s = \infty$ ook $\rho = \infty$ wordt; voor $s < 0$ wordt ρ onbestaanbaar: de twee takken:

$$\rho = + a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$$

$$\text{en } \rho = - a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$$

zijn dus door een keerpunt verbonden.

Met rechthoekige coördinatenassen zou men aldus te werk gaan:

Zij (Fig. 43) het punt waar de beweging aanvangt de oorsprong, en de rechte, evenwijdig aan de richting, waarin zich het andere einde der staaf zal bewegen, de as der X; zoo is $OA = a$.

Nu heeft men:

$$\overline{pq}^2 + \overline{qm}^2 = a^2$$

$$\text{Maar } pq = \frac{qm}{tg\, qpm} = \frac{a - y}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\text{dus: } \frac{(a-y)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + (a - y)^2 = a^2$$

$$\text{of } \frac{dy}{dx} = \frac{a - y}{\sqrt{a^2 - (a-y)^2}}$$

Integreert men de vergelijking

$$dx = \frac{\sqrt{a^2 - (a-y)^2}}{a - y}\, dy$$

zoo komt:

$$x - C = \sqrt{2ay - y^2} - \tfrac{1}{2} a\, lg \frac{a - \sqrt{2ay - y^2}}{a + \sqrt{2ay - y^2}}$$

hetgeen dezelfde vergelijking is, welke men uit

$$\rho = a tg\, w$$

verkrijgt. Immers:

$$ds\, cos\, w = dy = a\, sin\, w$$

$$\text{dus } y = a - a\, cos\, w$$

daar voor $w = 0$, $y = 0$ is. Hieruit volgt:

$$\cos w = \frac{a - y}{a}$$

$$\text{en dus: } tg w = \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 - (a - y)^2}}{a - y}$$

hetgeen dezelfde differentiaalvergelijking is.

§ 3.

DE INVOLUTEN VAN DEN CIRKEL.

Wanneer men de vergelijking

$$\rho = a$$

n malen integreert, zoo verkrijgt men de vergelijkingen van n involuten des cirkels. Noemt men de kromtestralen dier krommen resp: ρ_1, ρ_2, $\rho_3 \ldots \rho_n$, zoo heeft men:

$$\rho_1 = aw + b$$

$$\rho_2 = \tfrac{1}{2} aw^2 + bw + c$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2.3} aw^3 + \tfrac{1}{2} bw^2 + cw + d$$

$$\vdots$$

$$\rho_n = \frac{1}{2.3 \ldots n} aw^n + \frac{1}{2 \ldots (n-1)} bw^{n-1} + \ldots + pw + q$$

waarin de telkens toegevoegde konstante de waarde is van den kromtestraal voor $w = 0$.

Omgekeerd zal elke vergelijking van den vorm

$$\rho = Aw^n + Bw^{n-1} + Cw^{n-2} + \ldots + Pw + Q$$

eene kromme voorstellen, waarvan de n^{de} evoluut een cirkel is. Door n differentiaties verkrijgt men namelijk:

$$\rho_{-1} = An\, w^{n-1} + B(n-1)\, w^{n-2} + C(n-2)\, w^{n-3} + \ldots + P$$

$$\rho_{-2} = An(n-1)\, w^{n-2} + B(n-1)(n-2)\, w^{n-3} + C(n-2)(n-3)\, w^{n-4} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\rho_{-n} = An(n-1)(n-2) \ldots 2.\, 1.$$

Deze laatste vergelijking geeft derhalve den straal van den cirkel, terwijl de voorgaande vergelijkingen telkens in den bekenden term de waarde van den kromtestraal leeren kennen, voor $w = 0$.

Deze gegevens zijn voldoende om de kromme met hare evoluten zonder verdere berekening te construeeren. Begint men namelijk met den cirkel te beschrijven, en geeft men aan de raaklijn in eenig punt eene lengte gelijk aan den bekenden term in de vergelijking der $(n-1)^{\text{ste}}$ evoluut, dan is het uiteinde daarvan een punt van deze laatste kromme, die nu gemakkelijk in haar geheel te construeeren is. Richt men in het uiteinde van diezelfde raaklijn een loodlijn op, die eene lengte heeft gelijk aan den bekenden term in de vergelijking der $(n-2)^{\text{de}}$ evoluut, en waarvan de richting bepaald wordt door het teeken van dien term (verg. Hoofdstuk II, pag. 43), dan heeft men een punt van de $(n-2)^{\text{de}}$ evoluut; en deze zal in haar geheel kunnen geconstrueerd worden, door raaklijnen aan de $(n-1)^{\text{ste}}$ evoluut te trekken. Zoo voortgaande verkrijgt men eindelijk de kromme zelve. Op die wijze is Fig. 44 geconstrueerd, naar de vergelijkingen:

$$\rho = w^4 - 3w^3 - 12w^2 + 45w - 42$$
$$\rho_{-1} = 4w^3 - 9w^2 - 24w + 45$$
$$\rho_{-2} = 12w^2 - 18w - 24$$
$$\rho_{-3} = 24w - 18$$
$$\rho_{-4} = 24,$$

die door differentiatie uit elkaar worden afgeleid. Neemt men den straal ma gelijk 24 lengte-eenheden, en stelt men $ab = 18$ lengte-eenheden loodrecht daarop, zoodanig dat men *links om* moet draaien, om van ba op am over te gaan, — omdat ρ_{-3} en ρ_{-4} voor $w = 0$ van teeken verschillen, — zoo is b een punt van de derde evoluut der kromme. Het punt p, zoodanig genomen dat boog $ap = ab$ is, stelt dan het punt voor waar de ontwinding begint, die nu door middel van raaklijnen gemakkelijk kan worden voortgezet. Verder is $bc = 24$ loodrecht op ab geplaatst, zoodanig dat ab en bc dezelfde teekens hebben. In het punt q_1, dat gevonden wordt door $bq_1 = bc$ te nemen, begint de ontwinding der derde evoluut, die alweder door raaklijnen kan worden voltooid. Op dezelfde wijze $cd = 45$ en $de = 42$ nemende, en de krommen ontwindende, verkrijgt men de geheele figuur.

Daar de vergelijking van de n^{de} involuut des cirkels van den n^{den} graad in w is, zoo zullen er in het algemeen n waarden van w zijn, die dezelfde waarde van ρ opleveren; dit heeft ten gevolge, dat de kromme toppen of keerpunten met toppen moet hebben; want, daar ρ voor geen enkele waarde van w imaginair wordt, zoo zijn buigpunten en snavels uitgesloten. In de keerpunten is de kromtestraal altijd nul, daar ρ alleen oneindig wordt voor $w = \infty$.

De waarden, die w heeft in de keerpunten, zijn derhalve wortels der vergelijking: $0 = Aw^n + Bw^{n-1} + Cw^{n-2} + \ldots + Pw + Q$; en men zou deze wortels kunnen vinden door de hoeken te meten, die de raaklijnen in die punten met de hoofdrichting maken [1]. Heeft deze vergelijking geene gelijke of imaginaire wortels, dan heeft de kromme lijn n keerpunten; tusschen elk paar keerpunten ligt noodwendig een top, die correspondeert met een keerpunt van de evoluut, en waarin ρ een maximum heeft. Zij α zoodanige maximum waarde; stelt men dan in $\rho = Aw^n + Bw^{n-1} + Cw^{n-2} + \ldots + Pw + Q$ $\rho + a$ voor ρ, zoodat elke kromtestraal met een lengte a verminderd wordt, dan zal ook de maximum waarde van ρ kleiner worden, en de twee keerpunten, waartusschen de top gelegen is, zullen naar elkaar toe schuiven. Laat men a grooter worden, tot $a = \alpha$ is, dan vallen de keerpunten samen, of liever, zij worden vervangen door een top waar $\rho = 0$ is, en die met het keerpunt van de evoluut samenvalt. Tegelijk met het verplaatsen der keerpunten, naderen de waarden van w, die $\rho = 0$ maken, tot elkaar; en deze worden gelijk, wanneer de keerpunten verdwijnen. Dit is het geval, dat de vergelijking twee gelijke wortels heeft.

Laat men $a > \alpha$ worden, dan heeft ρ een negatieve minimum waarde in den top, zoodat ρ niet gelijk nul wordt: er bestaat dan in dat gedeelte der kromme geene waarde van w, die $\rho = 0$ maakt, d. i. de twee wortels der vergelijking zijn onbestaanbaar geworden.

In het geval dat twee wortels gelijk zijn, — als dus de kromme door een keerpunt van de evoluut gaat, — valt in dat punt de raaklijn der kromme samen met de normaal der evoluut; en daar zoowel ρ als ρ_{-1} aldaar nul is, zoo maakt dezelfde waarde van w de beide kromtestralen tegelijk gelijk nul.

Hieruit kan men twee bekende eigenschappen der hoogere-machts-vergelijkingen afleiden:

---

[1]) Deze graphische oplossing eener hoogere-machts-vergelijking verschilt van de graphische oplossing in rechtlijnige coördinaten daarin, dat de punten der kromme niet uit de vergelijking behoeven berekend te worden, daar men *altijd* met één der involuten des cirkels, en dus met eene bekende kromme lijn te doen heeft. Omdat daarenboven in elk punt de kromtestraal bekend is, zal men door cirkelbogen den vorm der lijn met veel meer juistheid kunnen verkrijgen. Daartegenover staat de moeielijkheid om de lengten der bogen over te brengen op de raaklijnen; hetgeen men echter zoo nauwkeurig kan doen als men verkiest, wanneer slechts de boogjes, die men als rechte lijntjes afmeet, klein genoeg genomen worden.

1°. Wanneer men zoodanige vergelijking voorstelt door:

$$f(w) = 0,$$

en men stelt:

$$f(w) = a,$$

dan zal deze nieuwe vergelijking *twee gelijke* of *twee imaginaire wortels* hebben, naar gelang *a gelijk is aan*, of *grooter is dan* de waarde welke $f(w)$ erlangt, wanneer daarin voor w gesubstitueerd wordt een wortel van de vergelijking

$$f'(w) = 0$$

die de afgeleide functie is van de oorspronkelijke vergelijking.

2°. Indien eene hoogere-machts-vergelijking twee gelijke wortels heeft, dan zal de waarde der veranderlijke tevens voldoen aan de vergelijking, die de afgeleide functie is van de oorspronkelijke vergelijking.

Nä het voorafgaande is het duidelijk, waarom de kromme van Fig. 44 slechts twee keerpunten heeft, ofschoon hare vergelijking vier wortels heeft: twee dier wortels zijn namelijk imaginair. In het punt z bereikt de kromtestraal een minimum waarde α. Stelt men nu $\rho + \alpha$ voor ρ, dan valt z in het keerpunt van de evoluut: de imaginaire wortels zijn vervangen door twee gelijke wortels. Stelt men $\rho + a$ voor ρ, zoodanig dat $a > \alpha$ is, dan komen twee keerpunten te voorschijn, en daarmede twee reëele wortels.

Op deze wijze verkrijgen de meeste bekende eigenschappen der hoogere-machts-vergelijkingen in de involuten des cirkels eene nieuwe geometrische beteekenis. Omgekeerd worden uit de theorie der vergelijkingen eigenschappen afgeleid betreffende de involuten des cirkels. Hiervan geeft de volgende stelling een voorbeeld.

Wanneer men in de n^{de} involuut des cirkels n punten zoekt, waarin de kromtestraal dezelfde waarde heeft, zoo zal de algebraïsche som der kromtestralen in de overeenkomstige punten van de eerste involuut gelijk nul *zijn.*

Het bewijs dezer stelling vloeit voort uit de bekende waarheid, dat men uit eene vergelijking

$$\rho_n = Aw^n + Bw^{n-1} + Cw^{n-2} + \ldots. + Pw + Q \ldots. (1)$$

den tweeden term van het tweede lid kan verdrijven, door te substitueeren:

$$w + \frac{1}{n}\frac{B}{A} = w'.$$

Daar men namelijk na $n - 1$ differentiaties verkrijgt:

$$\rho_1 = An(n-1)(n-2)\ldots.3.2\,w + B(n-1)\ldots.2.1\ldots.(2)$$

$$\text{of } \frac{\rho_1}{An(n-1)\ldots.3.2} = w + \frac{1}{n}\frac{B}{A} = w'$$

zoo blijkt het, dat voor $w = -\frac{1}{n}\frac{B}{A}$, of $w' = 0$, tevens $\rho_1 = 0$ is, zoodat men door die substitutie de hoofdrichting verlegd heeft naar de richting der raaklijn in het keerpunt der eerste involuut. Daar nu in de nieuwe vergelijking de tweede term ontbreekt, zoo is de som der waarden van w' voor elke waarde van ρ_n gelijk nul, en dus ook de som der waarden van ρ_1, daar

$$\rho_1 = An(n-1)\ldots.3.2.\,w'$$

is.

Onmiddellijk wordt ditzelfde aangetoond, wanneer men de waarde van w uit (2) substitueert in (1) zoodat ρ_n wordt uitgedrukt in functie van ρ_1. In die vergelijking is namelijk de coëfficient van $\rho_1{}^{n-1}$ gelijk nul. Daar men elken term der vergelijking (1) kan doen verdwijnen, door de hoofdrichting te verdraaien, zoo is het duidelijk, dat men nog meer zoodanige stellingen kan verkrijgen, die wij echter, wegens hare mindere eenvoudigheid achterwege laten.

De tweede involuut heeft de volgende eigenschap:

Wanneer men uit drie punten van de derde *involuut, waarin de kromtestraal dezelfde waarde heeft, de raaklijnen trekt aan de* tweede, *en in deze raakpunten wederom de kromtestralen, dan is de som der producten dezer stralen twee aan twee genomen gelijk* nul.

Wanneer men namelijk ρ_3 uitdrukt in functie van ρ_2, en men zoekt de coëfficiënten van de gelijke machten van ρ_2 bij elkaar, zoo blijkt het dat de som der coëfficienten van de eerste macht gelijk nul is, waarin het bewijs ligt opgesloten.

Nog vele betrekkingen zijn op te sporen tusschen de verschillende kromtestralen. Enkelen, die wellicht van belang kunnen zijn voor de theorie der hoogere-machts-vergelijkingen mogen hier nog vermeld worden.

Vooraf zullen wij eenige teekens invoeren, ten einde niet telkens dezelfde omschrijving in woorden te herhalen.

In het algemeen zal de waarde van eenigen kromtestraal of van w, voor een anderen kromtestraal gelijk nul, aangegeven worden door de letter ρ of w zooveel malen geaccentueerd, als er eenheden zijn in den index van den kromtestraal, die gelijk nul gesteld is, zoodat bijv.

$$\rho_1'' \text{ en } w''$$

beteekenen: de waarden van ρ_1 en w voor $\rho_2 = 0$. De waarde van een kromtestraal, voor ρ (of ρ_0) $= 0$ zal, waar geen dubbelzinnigheid kan ontstaan, niet geaccentueerd zijn.

Daar verder in het algemeen de $(n-p)^{de}$ involuut $n-p$ punten heeft waar de kromtestraal nul is, zoo zullen er ook $(n-p)$ waarden zijn van elke ρ, voor $\rho_{n-p} = 0$. Elk paar waarden van eenigen kromtestraal, voor $\rho_2 = 0$, zal nu als volgt onderscheiden worden:

$$\begin{array}{llll} \text{van } \rho_n & \text{door } (\alpha)\rho_n'' & \text{en } (\beta)\rho_n'' \\ \text{van } \rho_{n-1} & \text{,, } (\alpha)\rho'_{n-1} & \text{en } (\beta)\rho''_{n-1} \\ \vdots & & \\ \text{van } \rho_1 & \text{,, } (\alpha)\rho_1'' & \text{en } (\beta)\rho_1'' \\ \text{,, } \rho_0 & \text{,, } (\alpha)\rho_0'' & \text{en } (\beta)\rho_0'' \end{array}$$

ρ_2'' is natuurlijk gelijk 0. De drie waarden, voor $\rho_3 = 0$:

$$\begin{array}{llll} \text{van } \rho_n & \text{door } (\alpha)\rho_n''' & (\beta)\rho_n''' & \text{en } (\gamma)\rho_n''' \\ \vdots & & & \\ \text{van } \rho_2 & \text{,, } (\alpha)\rho_2''' & (\beta)\rho_2''' & \text{en } (\gamma)\rho_2''' \\ \text{,, } \rho_1 & \text{,, } (\alpha)\rho_1''' & (\beta)\rho_1''' & \text{en } (\gamma)\rho_1''' \\ \text{,, } \rho_0 & \text{,, } (\alpha)\rho_0''' & (\beta)\rho_0''' & \text{en } (\gamma)\rho_0''' \end{array}$$

en zoo vervolgens.

Waar sprake is van de som van de verschillende waarden van ρ_n'', $\rho_n''{-1} \ldots$ ρ_1'', ρ''_0; $\rho_n''' \ldots \rho_2'''$, ρ_1''', ρ_0'''; enz. of van de producten dier waarden 2 aan 2, 3 aan 3, enz. zal dit kortheidshalve worden aangegeven op deze wijze:

$$(\alpha)\rho_n'' + (\beta)\rho_n'' = \Sigma\,(\rho_n'')$$

$$(\alpha)\rho_n''' + (\beta)\rho_n''' + (\gamma)\rho_n''' = \Sigma\,(\rho_n''')$$

$$(\alpha)\rho_2''' \cdot (\beta)\rho_2''' + (\alpha)\rho_2''' \cdot (\gamma)\rho_2''' + (\beta)\,\rho_2'''\,(\gamma)\rho_2''' = \Sigma\,(\rho_2''' \cdot \rho_2''')$$

enz.

Eindelijk kan altijd verondersteld worden, dat men door den coëfficient van den term met de hoogste macht van w gedeeld heeft, waardoor alle kromtestralen in dezelfde verhouding verkleind worden, daar dit op de te behandelen eigenschappen geen invloed zal hebben.

De vergelijking van de tweede involuut is nu:

$$\rho_2 = w^2 + aw + b \ldots . (1)$$

Lost men w' op uit de vergelijking

$$0 = 2w' + a$$

die verkregen is door ρ_1 gelijk nul te stellen, en substitueert men die waarde in (1), zoo komt:

$$\rho_2' = -(\tfrac{1}{4} a^2 - b).$$

Dit nu is juist de grootheid welke met het omgekeerde teeken voorkomt onder het wortelteeken, bevat in de waarde van w voor $\rho_2 = 0$, die door w'' wordt aangegeven; want:

$$w'' = -\tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 - b}$$

Derhalve:

$$w'' = -\tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{-\rho_2'} \ldots . (2)$$

Draait men de hoofdrichting zooveel, dat zij samenvalt met de richting der raaklijn in het keerpunt van de eerste involuut, d. i. verdrijft men uit (1) den tweeden term, zoo wordt vergelijking (2) eenvoudig:

$$v'' = \pm \sqrt{-\rho_2'}$$

als $v'' = w'' + \frac{1}{2} a$ gesteld wordt.

Laat ons voor de derde involuut beginnen met deze substitutie, zoodat hare vergelijking den vorm aanneemt:

$$\rho_3 = v^3 + av + b \ldots\ldots (3).$$

Zoekt men achtereenvolgens:

$$(\alpha)\rho_3'',\ (\beta)\rho_3'' \text{ en } \rho_3',$$

door de waarden van v'' uit

$$0 = 3\, v''^2 + a$$

te substitueeren in (3), zoo komt

$$(\alpha)\rho_3'', = b + \tfrac{2}{3} a \sqrt{-\tfrac{1}{3} a}$$
$$(\beta)\rho_3'', = b - \tfrac{2}{3} a \sqrt{-\tfrac{1}{3} a}$$
$$\text{en } \rho_3' = b.$$

Hieruit volgt:

$$(\alpha)\rho_3'' \cdot (\beta)\rho_3'' = b_2 + \tfrac{4}{27} a^3$$
$$= 4\,(\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3)$$
$$\tfrac{1}{2} \sqrt{(\alpha)\rho_3'' \cdot (\beta)\rho_3''} = \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3}$$

Dit laatste is wederom dezelfde wortelgrootheid als in de formule van Cardanus voorkomt, die hier geeft:

$$v'' = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} b + \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} b - \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3}}$$

zoodat men kan schrijven:

$$v''' = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\rho_3' + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha)\rho_3'' \,.\, (\beta)\rho_3''}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\rho_3' - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha)\rho_3'' - (\beta)\rho_3''}}.$$

Zeer samengesteld worden de bewerkingen, wanneer men ook voor de vierde-machts-vergelijking eene uitdrukking zoekt van v^{IV} in functie van ρ_4', ρ_4'' en ρ_4'''. Wij bepalen ons tot de volgende opmerkingen.

Gaan wij uit van de vierde involuut, wier vergelijking wij — ter vermijding van breuken — aldus schrijven:

$$\rho'_4 = v^4 + 6av^2 + 8bv + c \,.\,.\,.\,.\, (4)$$

Drie differentiatiën leveren op:

$$\rho_3 = 4v^3 + 12av + 8b$$
$$\rho_2 = 12v^2 + 12a$$
$$\rho_1 = 24v$$

Hieruit volgt:

$$v' = 0 \text{ dus } \rho_4' = c$$
$$v'' = \pm\sqrt{-a}$$

Dit gesubstitueerd in (4) geeft:

$$(\alpha)\rho_4'' = -5a^2 + c + 8b\sqrt{-a}$$
$$(\beta)\rho_4'' = -5a^2 + c - 8b\sqrt{-a}$$
$$(\alpha)\rho_4'' \,.\, (\beta)\rho_4'' = 25a^4 - 10a^2c + 64ab^2 + c^2$$
$$(\alpha)\rho_4'' + (\beta)\rho_4'' = \Sigma\,(\rho_4'') = -10a^2 + 2c$$

Eindelijk:

$$(\alpha)\, v''' = \sqrt[3]{-b + \sqrt{b^2 + a^3}} + \sqrt[3]{-b - \sqrt{b^2 + a^3}}$$

$$(\beta)\, v''' = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-b + \sqrt{b^2 + a^3}}\,(\sqrt{-3} - 1) - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-b - \sqrt{b^2 + a^3}}\,(\sqrt{-3} + 1)$$

$$(\gamma)\, v''' = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-b + \sqrt{b^2 + a^3}}\,(\sqrt{-3} + 1) + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-b - \sqrt{b^2 + a^3}}\,(\sqrt{-3} - 1)$$

Substitueert men deze drie waarden in (4), zoo vindt men ten slotte:

$\Sigma(\rho_4''') = 3(c - 6a^2)$

$\Sigma(\rho_4''' \,.\, \rho_4''') = 3(c^2 - 12a^2c + 27a^4 + 72ab^2)$

$\Sigma(\rho_4''' \,.\, \rho_4''' \,.\, \rho_4''') = c^3 - 18a^2c^2 + 216ab^2c + 81a^4c - 432b^4 - 216a^3b^2.$

Vergelijkt men deze vormen met die, welke voorkomen in de formule, die de oplossing geeft der vierde-machts-vergelijking (4), zoo valt de sterke overeenkomst terstond in het oog. Deze formule is:

$$v^{\mathrm{IV}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{z_1} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{z_2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{z_3}$$

waarbij, gelijk bekend is, ter bepaling der teekens moet voldaan worden aan de conditie;

$$\sqrt{z_1 z_2 z_3} = -b;$$

z_1, z_2 en z_3 zijn de wortels der derde-machts-vergelijking:

$$z^3 + 12az^2 + 4(9a^2 - c)z - b^2 = 0,$$

waarvoor men vindt:

$$z = -4a + 2\sqrt[3]{a^3 - ac + 4b^2 + \sqrt{(a^3 - ac + 4b^2)^2 - \tfrac{1}{27}(3a^2 + c)^3}}$$
$$+ 2\sqrt[3]{a^3 - ac + 4b^2 - \sqrt{(a^3 - ac + 4b^2)^2 - \tfrac{1}{27}(3a^2 + c)^3}}.$$

De grootheid onder het vierkantswortelteeken, ontwikkeld zijnde, wordt:

$$-\tfrac{1}{27}(c^3 - 18a^2c^2 + 216ab^2c + 81a^4c - 432b^4 - 216a^3b^2)$$

hetgeen juist gelijk is aan:

$$-\tfrac{1}{27}\Sigma(\rho_4''' \cdot \rho_4''' \cdot \rho_4''').$$

In het overige gedeelte der uitdrukking is de combinatie der letters zoodanig, dat het niet moeielijk valt ook daarin de kromtestralen in te voeren. Zelfs kan dit op meer dan eene wijze geschieden. Wij deelen die echter niet mede, omdat alleen die wijze van belang zou zijn, welke voor v^{iv} eene formule oplevert, analoog met de formules voor v''' en v'': de wortelexponenten zullen tot een vierde, misschien tot een zesde macht moeten opklimmen, — dit laatste, wanneer het mocht blijken, dat zij de binomiaal-coëfficienten: 4, 6, 4 zijn, gelijk in de formule voor v''' de wortelexponenten zijn: 3, 3; in die voor v'' eenvoudig: 2.

De ontwikkeling daarvan is vrij omslachtig. Ten einde daardoor — niet slechts uit analogie, maar met zekerheid — te kunnen besluiten tot de formulen voor de 5de-, 6de-, en in het algemeen voor de $n$de- machts-vergelijking, zou het buitendien nog noodig zijn de wet te vinden, volgens welke de coëfficienten voor den $(n+1)$sten graad afgeleid worden uit die voor den $n$den graad.

STELLINGEN.

I.

Eene systematiek der kromme lijnen moet op de essentieele vergelijkingen gegrond zijn.

II.

Het is ongerijmd te veronderstellen, dat de geometrische eigenschappen eener kromme lijn niet altijd in de analytische uitdrukking zouden kunnen teruggevonden worden; gelijk Druckenmüller doet, wanneer hij zegt: „Jeder Eintheilungsgrund der Curven, der von einer geometrischen Anschauung entnommen ist, zerstört die Reciprocität der verschiedenen Coördinaten-systeme, *wenn derselbe nicht auch in den Analytischen Ausdruck der Curven wiedergefunden wird.*" (Die Uebertragungsprincipiën, pag. 108).

III.

De meening van Lamarle: „Tant qu'on exclura de l'étude des lignes le principe de leur génération par le mouvement d'un point, on s'interdira par là même d'en connaître la nature intime" is onjuist.

IV.

Ten onrechte beweert Krause: „Lineam curvam non consistere partibus linearibus rectis, utut parvis."

V.

Men mag het in de Wiskundigen niet afkeuren, wanneer zij zich bezig houden met onderzoekingen, die geen dadelijk nut beloven.

VI.

Aan de slingerproef van Foucault wordt in het algemeen te veel gewicht gehecht.

VII.

In physische leerboeken wordt veelal te weinig gelet op het verschil tusschen het mechanisch begrip van „Arbeid" en het begrip dat in het dagelijksch leven aan dat woord gehecht wordt.

VIII.

Er is geen voldoende grond om aan te nemen, dat samengestelde geleidende vochten altijd door den galvanischen stroom geëlectrolyseerd zullen worden.

IX.

Het ware te wenschen dat men de samenstelling der carbonium-houdende stoffen altijd door de relatieve hoeveelheden der elementen aangaf.

X.

Eene indirecte bepaling van eenige grootheid is, waar zij mogelijk is geworden, scherper dan de directe.

XI.

Er is geen scherpe grens te trekken tusschen huid- en inwendig skelet.

XII.

De naam „Pachydermen" karakteriseert de genera van die orde niet.

XIII.

Het opnemen van O en uitademen van CO_2 door de planten kan niet met de dierlijke ademhaling worden vergeleken.

XIV.

De leer der evenredigheden moet uit de lagere wiskunde verbannen worden.

XV.

Bij het onderwijs in de Meetkunde is de analytische methode te verkiezen boven de synthetische.

XVI.

Aan het onderwijs in de Kosmographie moet de historische ontwikkeling van die wetenschap ten grondslag liggen.

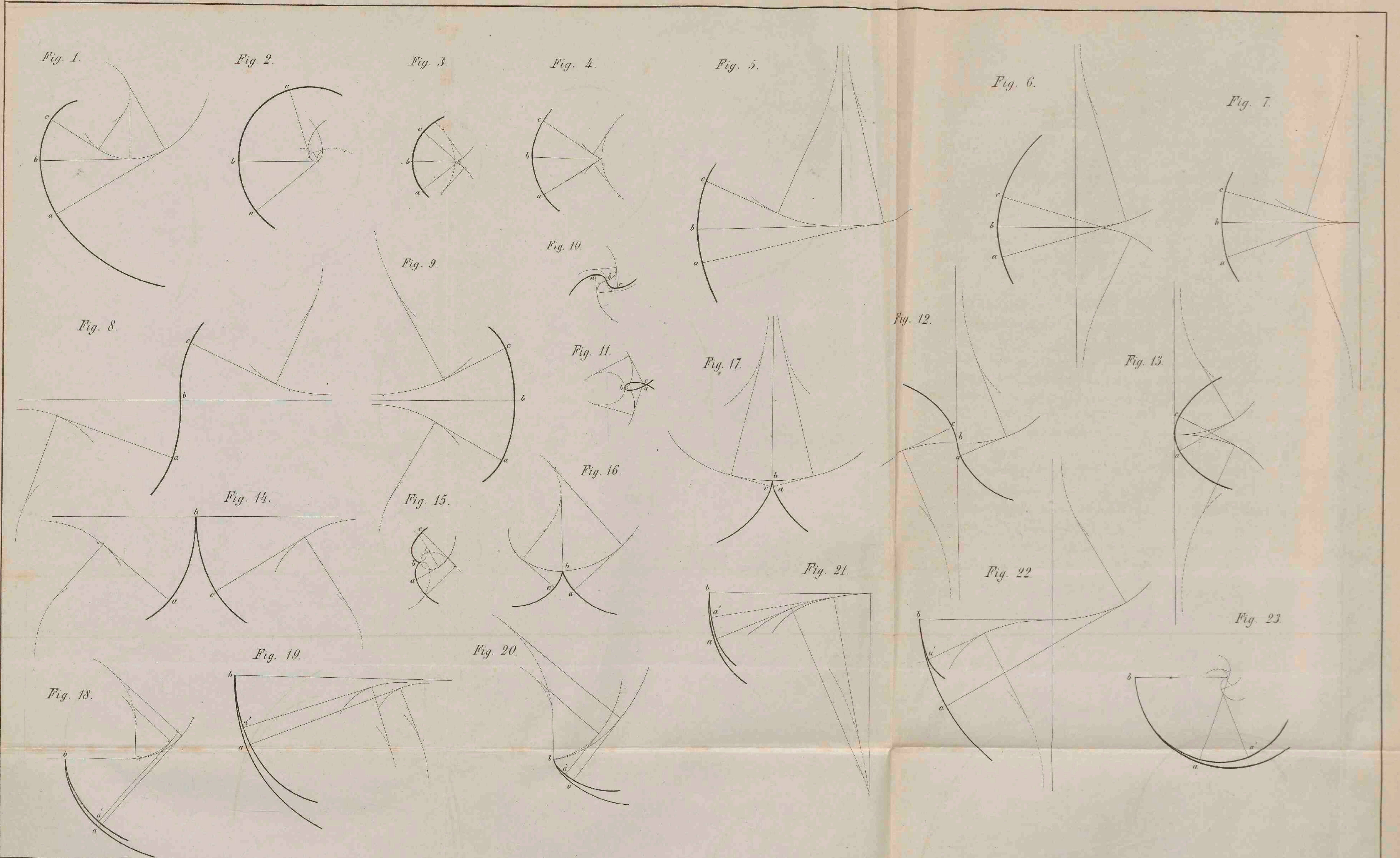
XVII.

Het is wenschelijk, dat de natuurhistorische vakken aan de hoogere burgerscholen door een afzonderlijken docent onderwezen worden.

XVIII.

Terecht zegt Krause:

„Multi sane sunt, qui autument, in definiendis rebus intuitione immediata clarissimis, quae omnis homo, sine ulla praeparatione scientifica, satis intelligat, non adeo multum referre, utrum definitiones essentiales et primitivae habeantur, nec ne, cum nemo sanae mentis de his rebus dubitat. Sed haec non est nisi praejudicata sententia."



Lith. v. Trosting & Cº Amst.

Fig. 24.

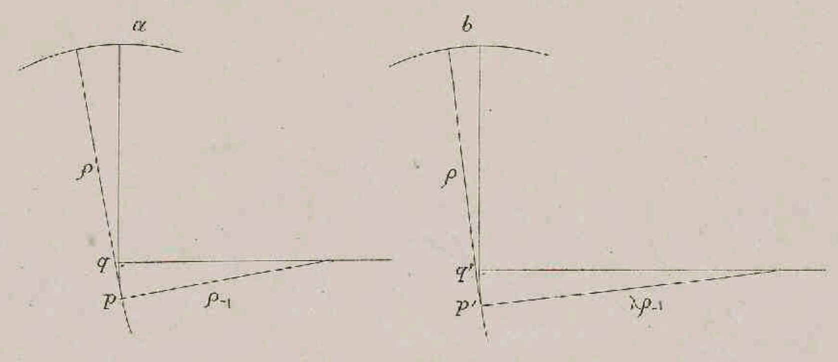


Fig. 25.

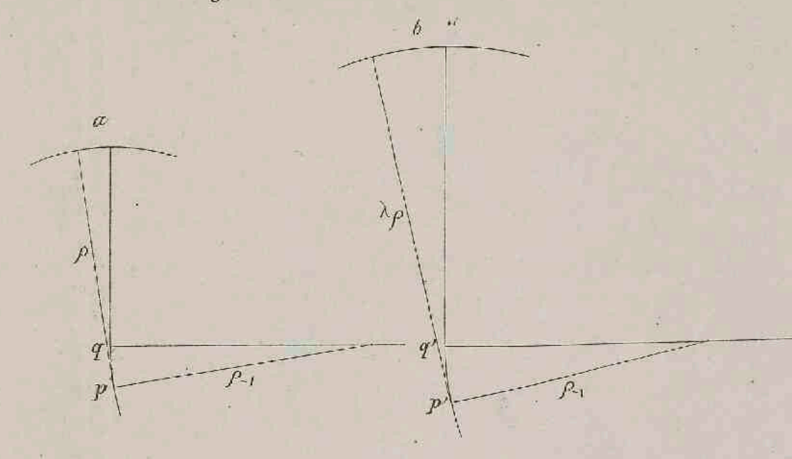


Fig. 26.

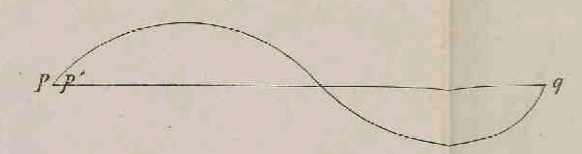


Fig. 29.

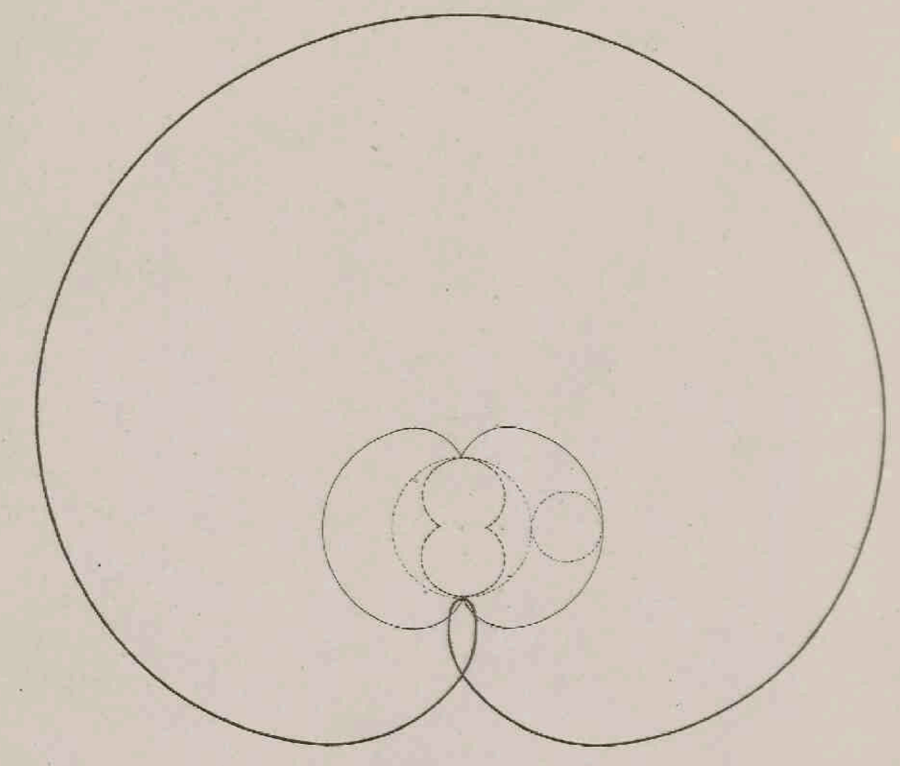


Fig. 27.

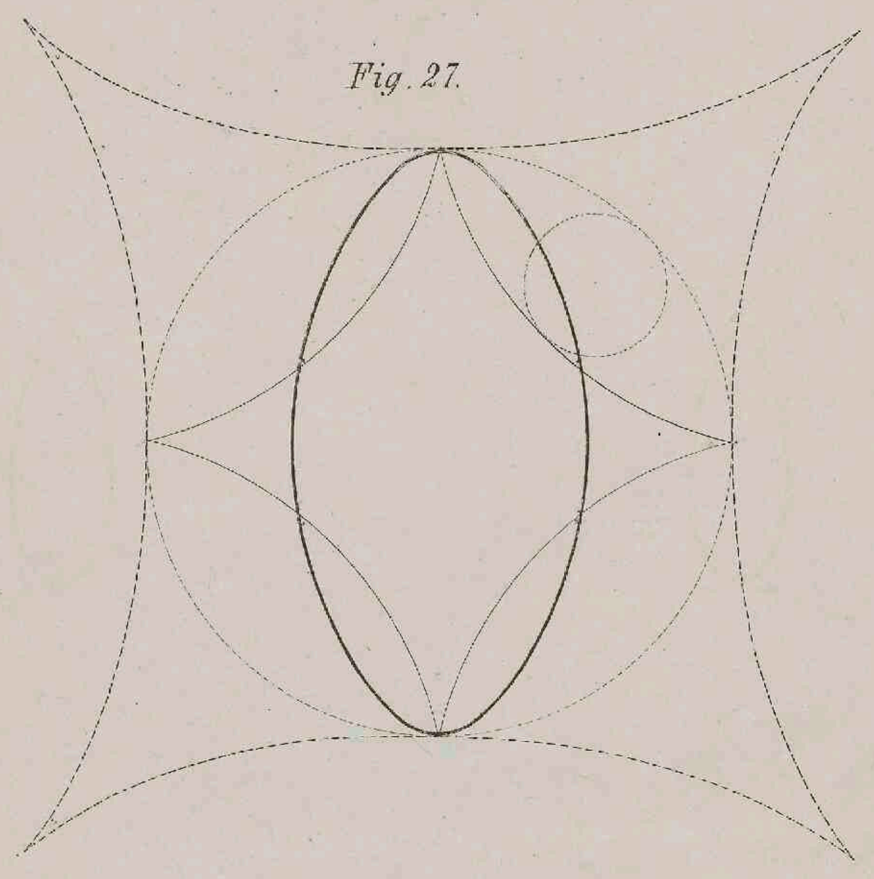


Fig. 28.

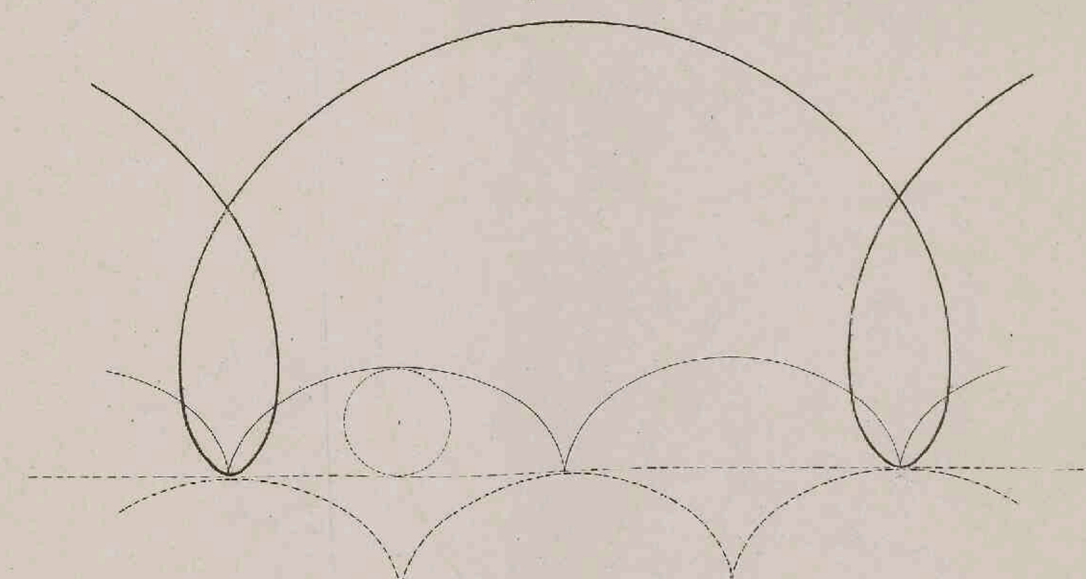


Fig. 32.

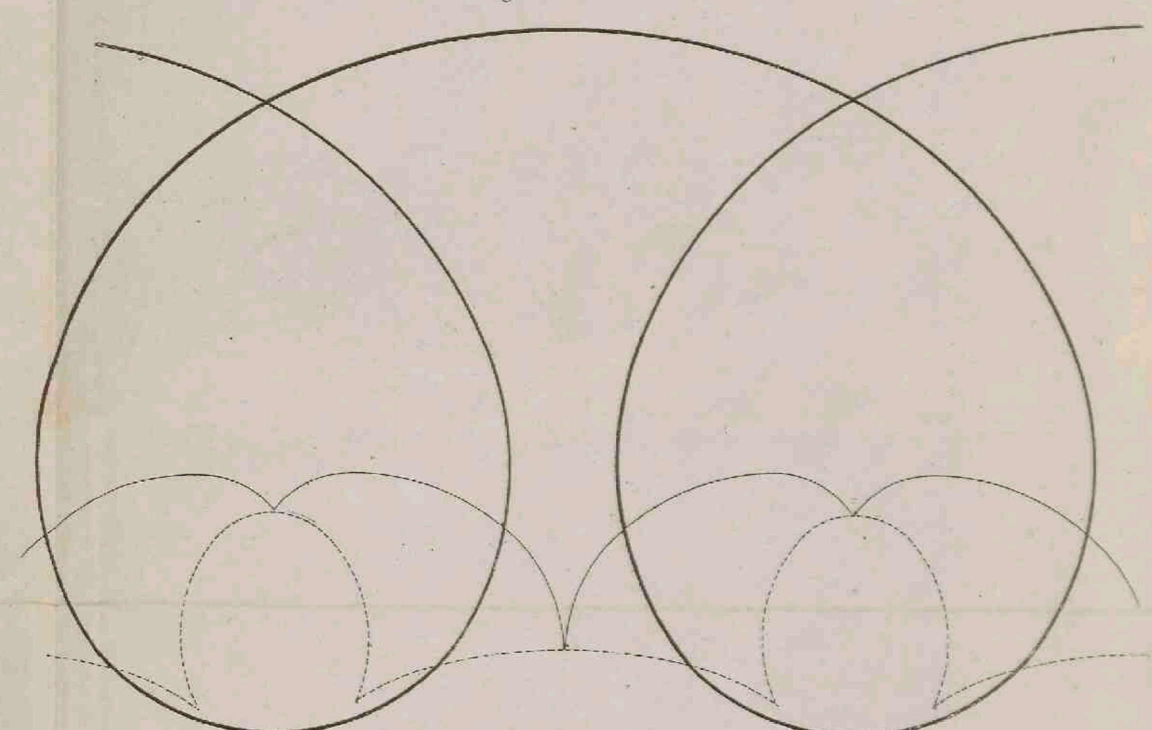


Fig. 31.

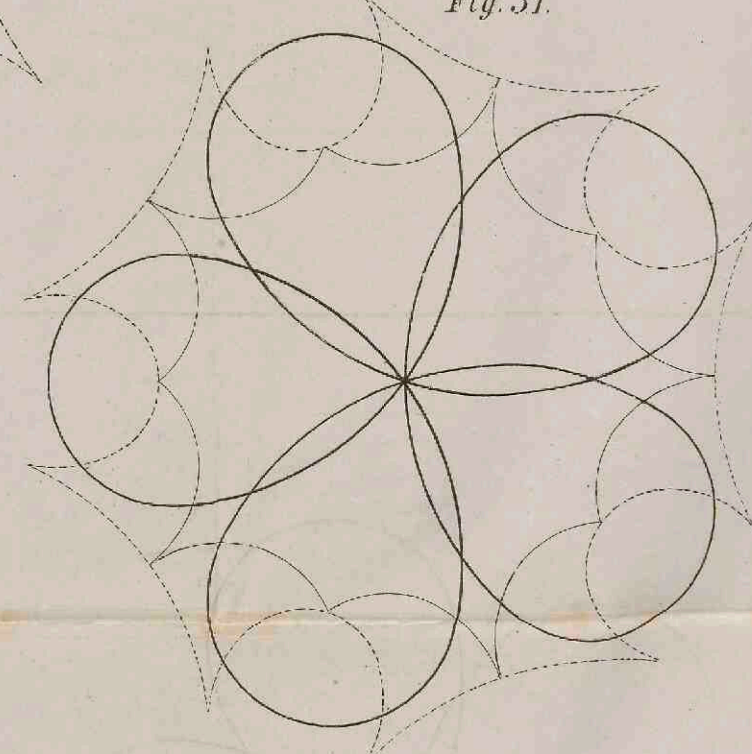


Fig. 30.

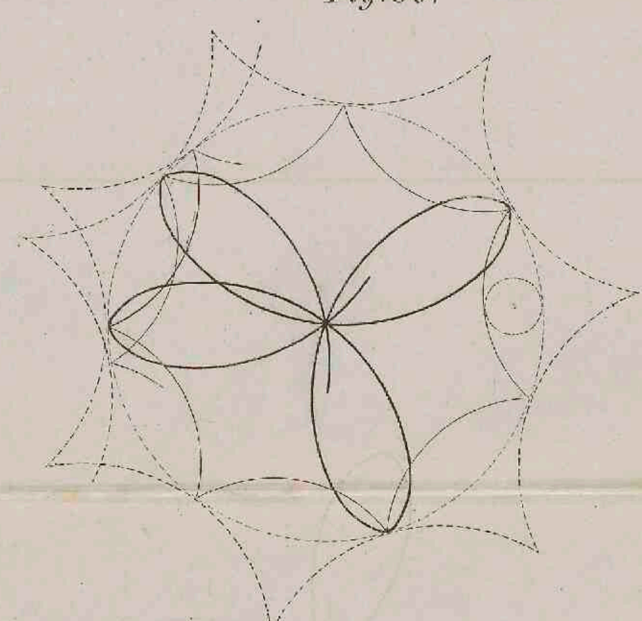
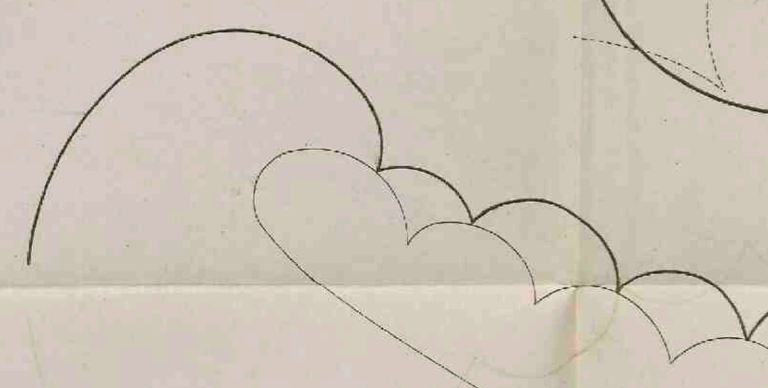


Fig. 33.



Lith. v. Tresling & Cie Amst.

Fig. 34.

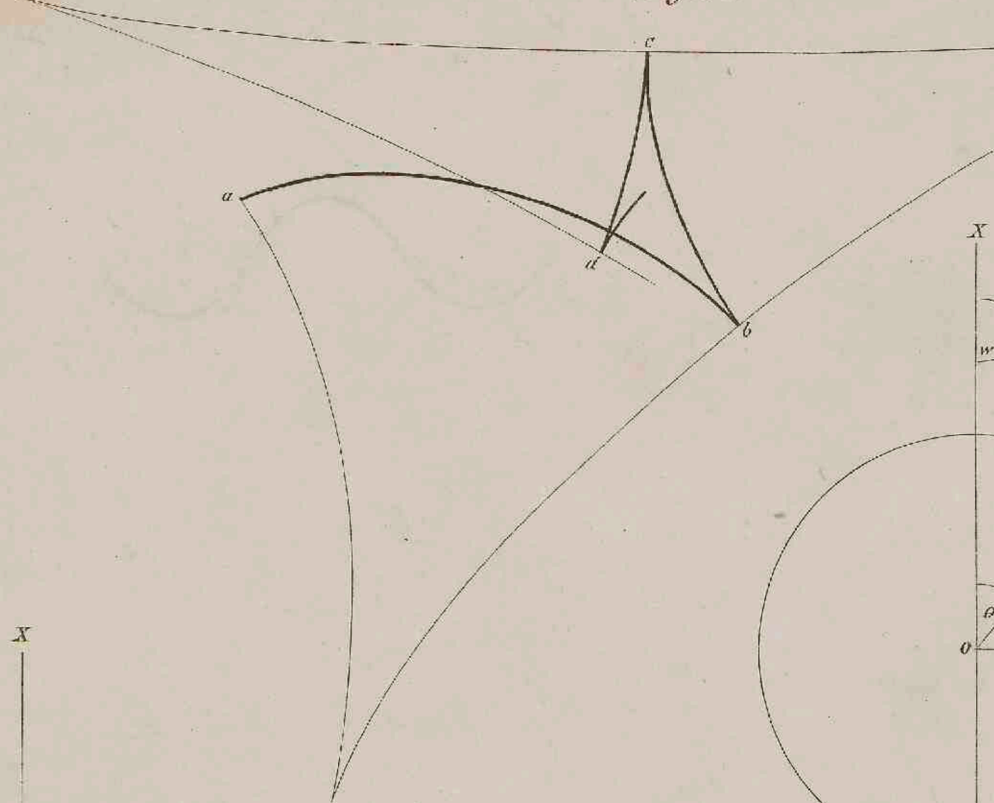


Fig. 37.

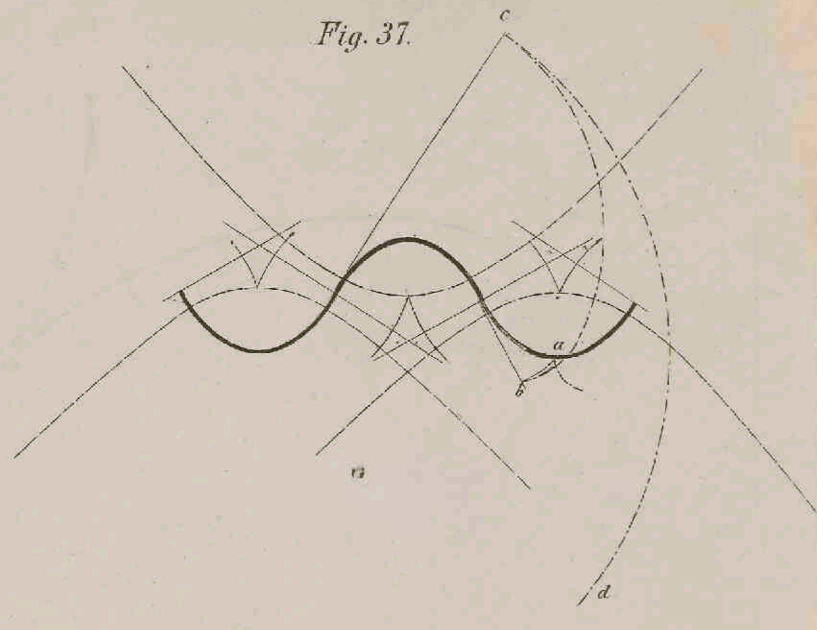


Fig. 38.

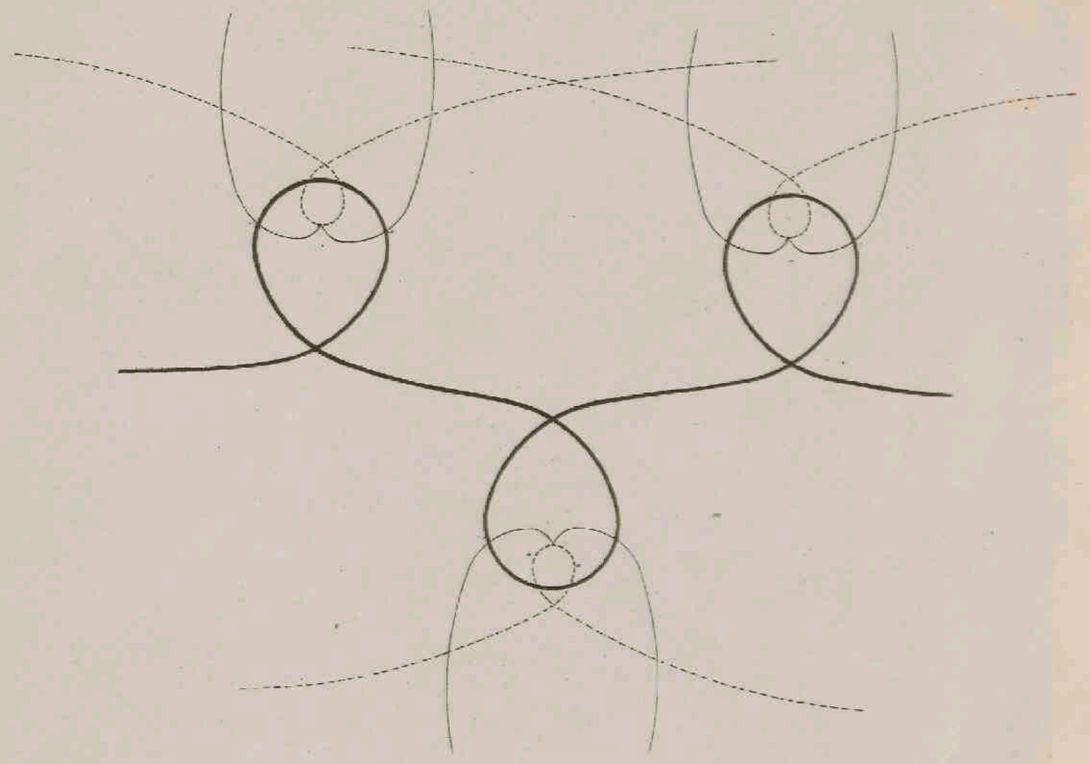


Fig. 36.

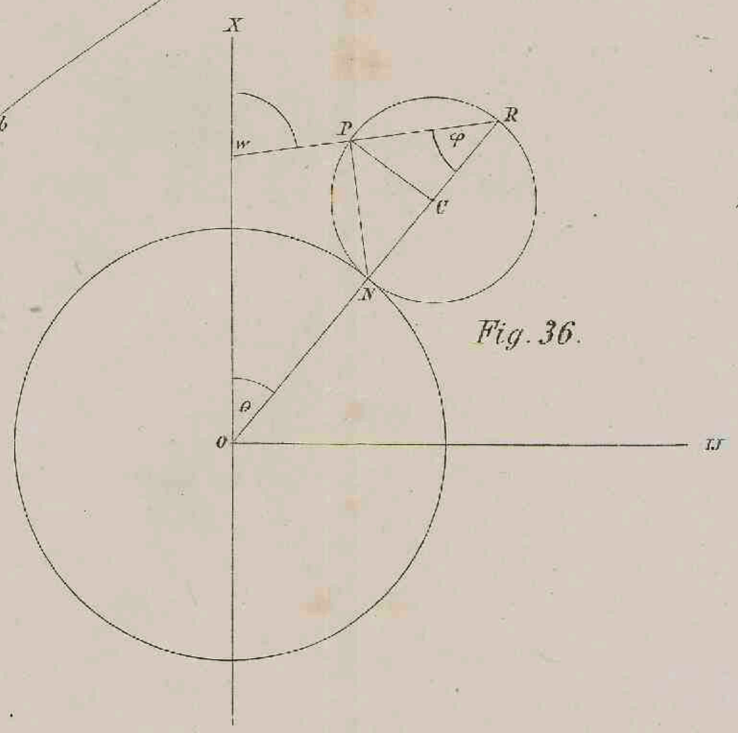


Fig. 35.

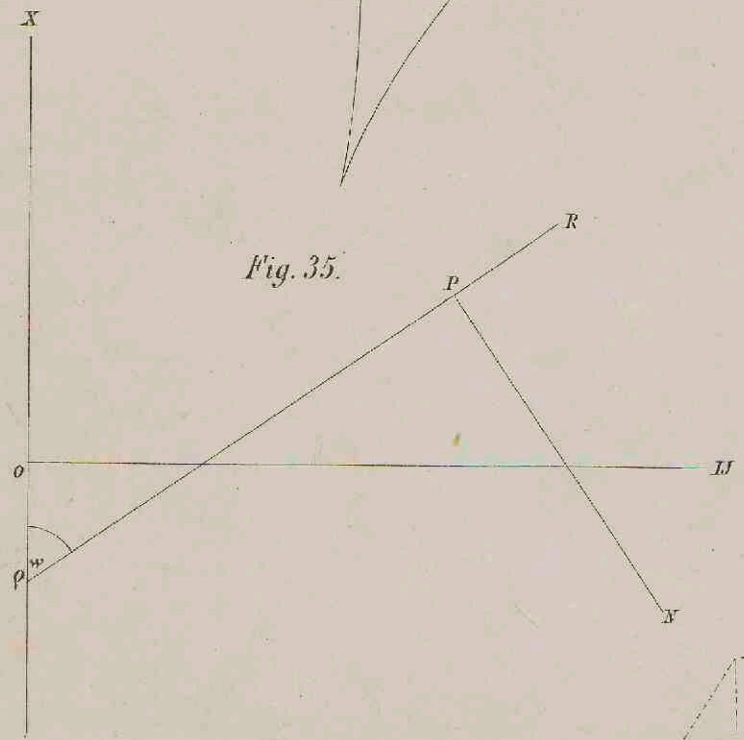


Fig. 39.

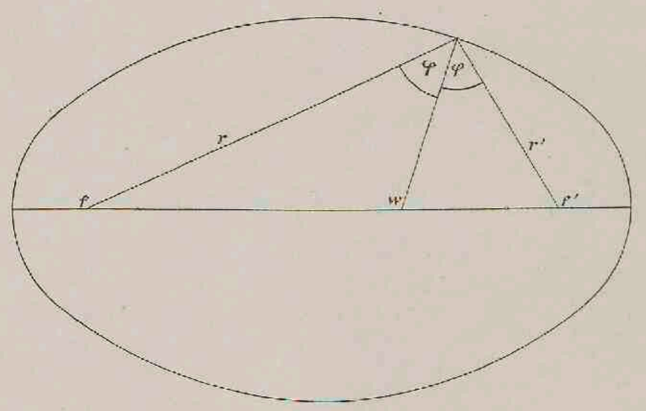


Fig. 43.

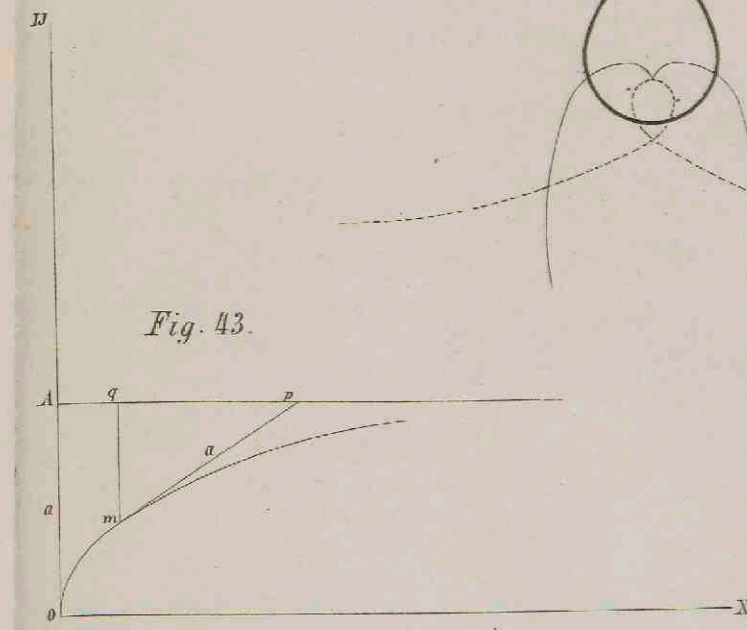


Fig. 41.

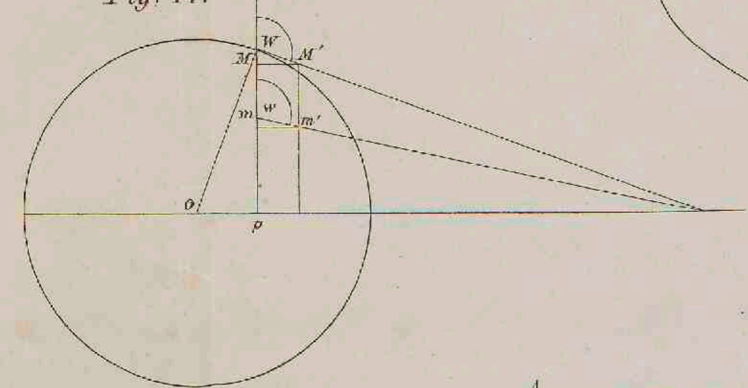


Fig. 40.

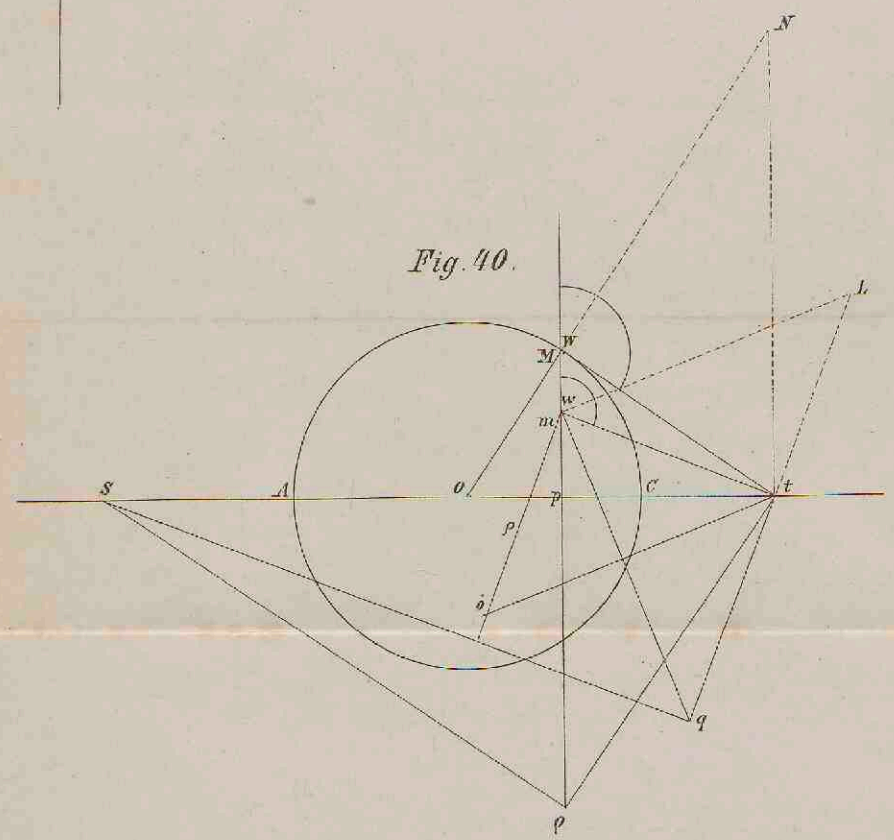


Fig. 42.

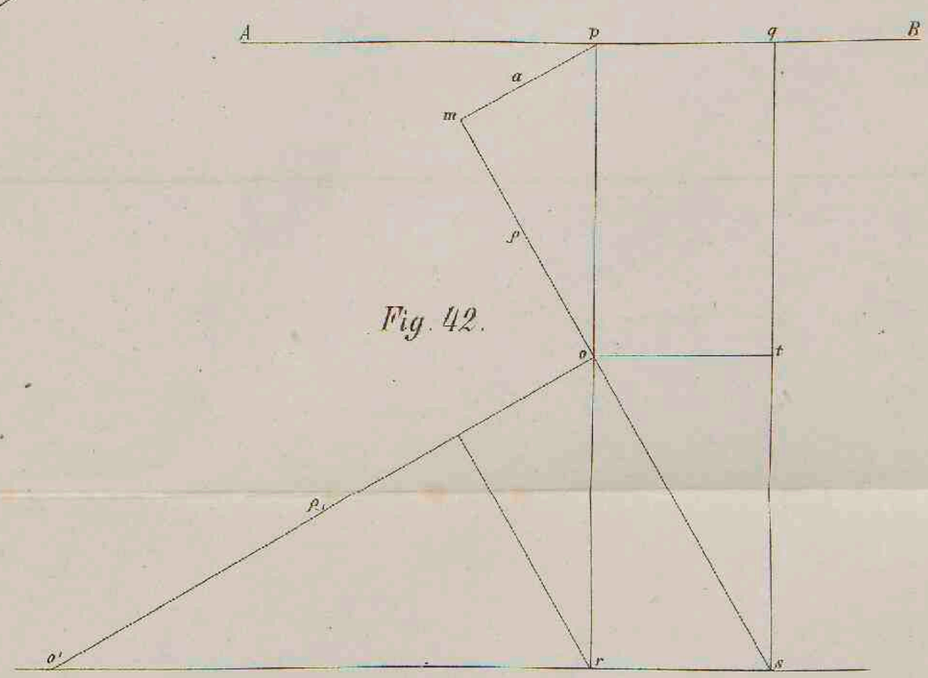
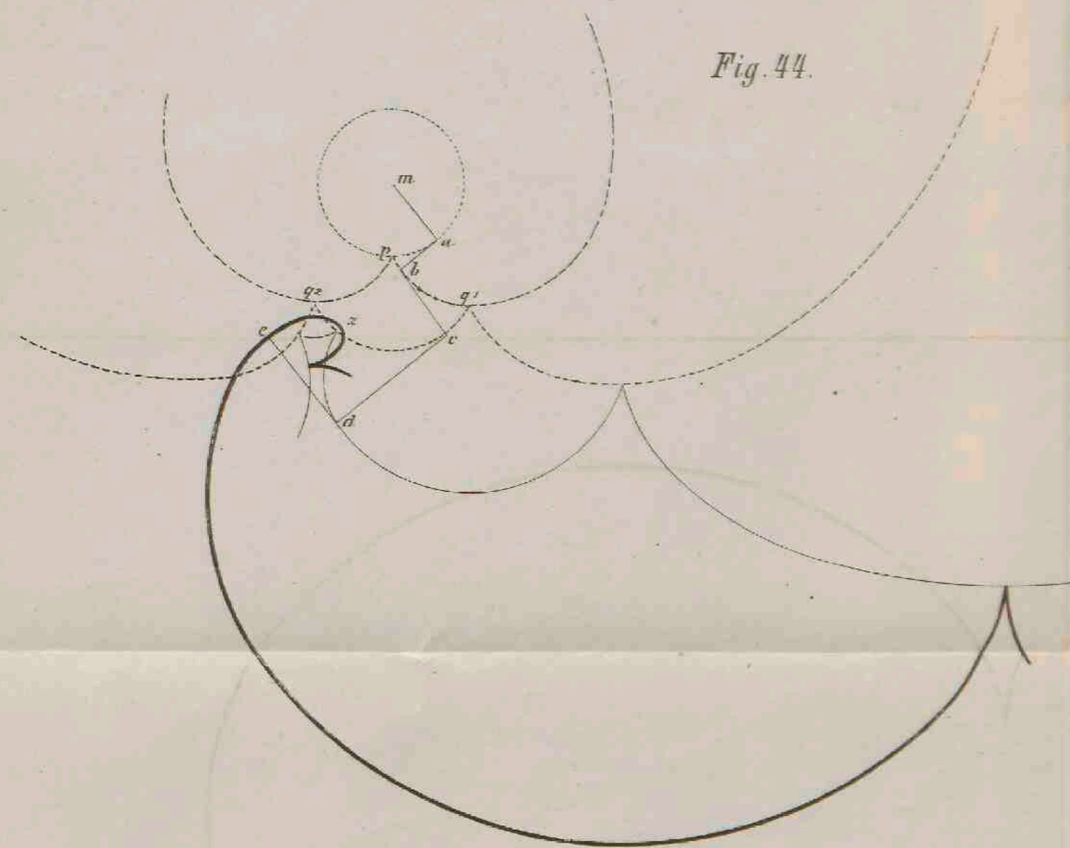


Fig. 44.



Lith. v. Tresling & C° Amst.