



Elastizitätskonstanten von Kristallaggregaten

<https://hdl.handle.net/1874/296165>

14. dec. 1921. 1930

ELASTIZITÄTSKONSTANTEN VON KRISTALLAGGREGATEN

D. A. G. BRUGGEMAN

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

34.89

ELASTIZITÄTSKONSTANTEN
VON KRISTALLAGGREGATEN



ELASTIZITÄTSKONSTANTEN VON KRISTALLAGGREGATEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD
VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN
DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG
VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

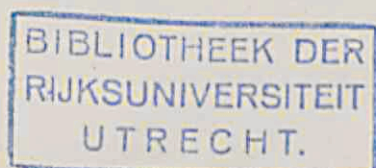
JHR DR B. C. DE SAVORNIN LOHMAN,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGE-
LEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT
DER UNIVERSITEIT TE VERDEDIGEN TEGEN DE
BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN
NATUURKUNDE OP MAANDAG 8 DECEMBER 1930,
DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

DIRK ANTON GEORGE BRUGGEMAN

GEBOREN TE HEERENVEEN

BIJ J. B. WOLTERS' UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ N.V.
GRONINGEN — DEN HAAG — 1930



BOEKDRUKKERIJ VAN J. B. WOLTERS

AAN MIJN VROUW
AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN OUDERS

Bij het terugzien op de jaren van studie, waarvan dit proefschrift de afsluiting is, denk ik dankbaar aan de leeraren en hoogleeraren, die mij iets hebben meegegeven van hun liefde voor de exacte wetenschappen. Velen zijn gestorven, die ik graag nog eens had bedankt, ik herdenk hun in genegen herinnering.

Hooggeleerde HAGA, het is mij een groote vreugde, dat ik U, Hoogleeraar in ruste, een exemplaar van mijn proefschrift mag toezenden. Uw colleges en practica, waar Ge Uzelf volkomen gaaft, zijn mij een onnavolgbaar voorbeeld gebleven voor eigen onderwijswerk.

Hooggeleerde ORNSTEIN, meer nog dan voor Uw onderwijs in Groningen dank ik U voor Uw groote welwillendheid, toen Ge mij, na jaren onderwijspractijk bij U teruggekomen, op weg hebt geholpen in de physica. Dit proefschrift, hoezeer ook afwijkend van Uw oorspronkelijke bedoeling, is de late vrucht van wat Gij tot bloei hebt gebracht.

Bij de voltooiing hebben velen mij geholpen. U, Heeren Directeuren van het Nederlandsch Lyceum, mijn hartelijken dank voor de werkgelegenheid, mij geboden door een jaar verlof. Ook U, Heeren Directeuren van het Bataafsch Genootschap te Rotterdam, voor Uw tegemoetkoming in de kosten van dit geschrift.

Hooggeleerde CASIMIR, beste Rector en Vriend, Uw raad en daad gaf den juisten stoot op het juiste oogenblik, zonder Uw hulp was dit werk misschien nooit begonnen.

Hooggeleerde KRAMERS, hooggeachte Promotor, U dank ik voor Uw hulp bij de voltooiing. Ge hebt mij vrijgelaten, als ik alleen verder kon, en mij over hindernissen heengeholpen tot het einde, ik dank U zeer.

INHALTSVERZEICHNIS.

EINLEITUNG	Seite 1
I. DIE VOIGTSCHES THEORIE DER ELASTIZITÄT QUASIISOTROPER MEDIEN.	
§ 1. Die Voigtschen Formeln	5
§ 2. Die Begründung des Voigtschen Ansatzes	6
§ 3. Die Voigtsche Prüfung der Formeln (8)	8
§ 4. Prüfung der Formeln (8) an neuen Daten	11
§ 5. Kritik der Voigtschen Theorie	17
II. VERSUCH EINER NEUEN THEORIE DER ELASTIZITÄT QUASI- ISOTROPER MEDIEN.	
§ 1. Grenzbedingungen und Annahmen	19
§ 2. Theorie des allgemeinen Lamellenaggregats	22
§ 3. Die Voigtschen Formeln als erste Annäherung	31
§ 4. Allgemeines über Prüfungen der Theorie	33
III. UNTERSUCHUNG DES ALLGEMEINEN AGGREGATS HEXAGONALER KRISTALLE.	
§ 1. Transformation der c'_{ik} und s'_{ik}	39
§ 2. Die Koeffizienten der Funktion φ	42
§ 3. Die Konstanten der Lamellenaggregate	46
§ 4. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Zink	51
§ 5. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Cadmium	56
IV. UNTERSUCHUNG DES ALLGEMEINEN AGGREGATS REGULÄRER KRISTALLE.	
§ 1. Transformation der c'_{ik}	61
§ 2. Die Konstanten des Lamellenaggregats	62
§ 3. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Wolfram	69

	Seite
§ 4. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Aluminium	73
§ 5. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Gold	76
§ 6. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Messing	79
§ 7. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Flußspat	84
 V. UNTERSUCHUNGEN AN SPEZIELLEN AGGREGATEN.	
§ 1. Die nichtisotropen Aggregate	86
§ 2. Spezielle Aggregate von hexagonalen Kristallen . .	89
§ 3. Untersuchung der Struktur des anisotropen Grün- eisenschen Zinkaggregats	95
§ 4. Spezielle Aggregate von regulären Kristallen	99
§ 5. Strukturuntersuchung bei anisotropen Goldaggregaten	101
ZUSAMMENFASSUNG	104

EINLEITUNG.

Die neue Technik, größere Einkristalle der verschiedenen Metalle zu gewinnen, hat die Möglichkeit geschaffen, das Metallkristall in verschiedener Hinsicht zu studieren. Mehrere Forscher haben speziell die elastischen Eigenschaften untersucht. Nachdem die elastischen Konstanten einiger Metallkristalle gemessen waren, lag es nahe sie zu vergleichen mit den längst bekannten Konstanten isotroper Metallstäbe. Diese bestehen ja aus Einkristallen, eng aneinanderschließend, mit allen möglichen Orientierungen der elastischen Hauptachsen, es müssen also Beziehungen bestehen zwischen den elastischen Konstanten der Kristalle und der isotropen Metallstäbe. Voigt ist bis jetzt, so viel ich weiß, der einzige Forscher gewesen, der solche Beziehungen eingehend theoretisch untersucht hat — die neuen Versuche gestatten die Prüfung seiner Formeln. Seit 1924 haben solche Prüfungen mehrfach statt gefunden, Grüneisen, Mazima und Sachs fanden dabei Abweichungen die größer waren als die allerdings noch ziemlich große Ungenauigkeit der Messungen. Die Voigtsche Theorie erscheint also als eine zu grobe Annäherung.

In der vorliegenden Arbeit machen wir den Versuch einer besseren Annäherung. Im I. Kapitel wird die Voigtsche Theorie kurz auseinandergesetzt und kritisiert. Im II. Kapitel wird versucht eine neue Theorie aufzubauen. Im III. und IV. Kapitel werden daraus die Formeln abgeleitet für die elastischen Konstanten der isotropen Aggregate aus hexagonalen bzw. regulären Kristallen, und diese verglichen mit den empirischen Daten. Die Übereinstimmung ist im allgemeinen gut, auch in den Fällen, wo die Voigtsche Theorie versagte. Es bleiben größere Abweichungen bei einzelnen Aggregaten der hexagonalen Metalle Zink und Cadmium, besonders bei einem merkwürdigen Stab aus sehr reinem Zink, den Grüneisen 1907 untersucht hat. Dieses Aggregat („Zink II“) ergab einen Youngschen Modul $12,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$,

während Grüneisen selbst später an Einkristallstäben mit verschiedenen Achsenorientierungen als extreme Werte erhielt $3,520 \cdot 10^{11}$ und $11,500 \cdot 10^{11}$. Hier versagt sowohl die alte Theorie wie die neue und überhaupt jede Theorie, die von der Isotropie des Aggregats ausgeht. Im V. Kapitel versuche ich eine Theorie aufzustellen für verschiedene einfache Annahmen über nicht isotrope Verteilungen der Achsenorientierungen. Das elastische Verhalten des Zinkstabs II stimmt dann ganz schön bei einer sehr plausiblen Annahme über den Aufbau des Stabes, welche an andern Eigenschaften desselben Stabes nachgeprüft werden kann. Versuchsweise werden auch Abweichungen, die bei andern Objekten gefunden wurden, durch spezielle Annahmen erklärt. Zum Schluß kommt eine kurze Zusammenfassung.

In allen Untersuchungen beschränke ich mich auf reversible Vorgänge, größere Beanspruchungen, wobei Gleitung auftreten könnte, sind von vornherein ausgeschlossen.

Dies über den Inhalt der Arbeit. Was die Form anbetrifft, so verwenden wir der Hauptsache nach die Voigtsche Terminologie; die verschiedenen Symbole haben also dieselbe Bedeutung wie in Voigts Lehrbuch der Kristallphysik. Zwar ergeben die Symbole der neueren Tensorrechnung einfachere Formeln mit Ersparung mancher unangenehmen Faktoren 2 und $\frac{1}{2}$ — alle Abhandlungen mit deren Ergebnissen wir uns beschäftigen, benutzen aber die Voigtschen c_{ik} und s_{ik} und anders gewählte Konstanten müssen also doch schließlich wieder umgerechnet werden. Außerdem fordert unsre Methode schon im Anfang die Darstellung der freien Energie als Funktion von 3 Deformationen und 3 Spannungen, von diesem Augenblicke an würden wir also doch die eleganten Formeln der Tensorrechnung aufgeben müssen.

Mit Voigt bezeichnen wir die Änderung der freien Energie in der Volumeinheit bei einer isothermen Deformation mit ξ . Die Verschiebungen in den 3 senkrechten Achsenrichtungen heißen u , v , w , die

Deformationen x_x, \dots, y_z, \dots sind definiert durch $x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots,$

$y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \dots$. Um Minuszeichen zu sparen, benutzen wir die

Voigtschen Druckkomponenten mit geändertem Vorzeichen, führen also normale Spannungen X_x, Y_y und Z_z und tangentielle Spannungen $Y_z (= Z_y), Z_x (= X_z)$ und $X_y (= Y_x)$ ein. Dann gilt für jede homogene Deformation eines Kristalls:

$$2\xi = X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Z_y z_y + Z_x z_x + X_y x_y \quad \dots (1)$$

$$2\xi = c_{11}x_x^2 + \dots + c_{66}x_y^2 + \\ + 2c_{12}x_x y_y + \dots + 2c_{56}z_x x_y \quad \dots (2)$$

$$2\xi = s_{11}X_x^2 + \dots + s_{66}X_y^2 + \\ + 2s_{12}X_x Y_y + \dots + 2s_{56}Z_x X_y \quad \dots (2a)$$

Aus den Gleichungen (2) und (2a) erhält man durch partielle Differentiationen die Hookeschen Gleichungen in der einen oder andern Form:

$$X_x = c_{11}x_x + \dots + c_{16}x_y, \text{ u.s.w.} \quad \dots (3)$$

$$x_x = s_{11}X_x + \dots + s_{16}X_y, \text{ u.s.w.} \quad \dots (3a)$$

Die c_{ik} heißen die Elastizitätskonstanten, die s_{ik} die Elastizitätsmoduln des Kristalls.

Es gibt im allgemeinen 21 Elastizitätskonstanten, zwischen welchen aber in den meisten Kristallklassen Beziehungen bestehen. Bei geeigneter Wahl des Achsenkreuzes reduziert sich die Zahl im hexagonalen System auf 5 (c_{11} , c_{33} , c_{13} , c_{12} , c_{44}), im regulären System auf 3 (c_{11} , c_{12} , c_{44}), bei isotropen Substanzen auf 2. Die erste Molekulartheorie der Elastizität, die Cauchysche, glaubte die Zahl der Konstanten weiter reduzieren zu können durch die Gleichungen:

$$c_{44} = c_{23}, c_{55} = c_{31}, c_{66} = c_{12} \\ c_{56} = c_{14}, c_{64} = c_{25}, c_{45} = c_{36} \quad \dots (4)$$

Im hexagonalen System würden dann 3, im regulären 2, bei der Isotropie 1 Konstante übrig bleiben. Der Streit zwischen Rari- und Multikonstantentheorie hat sich so ziemlich durch das ganze 19^{te} Jahrhundert fortgesetzt, bis die Messungen immer deutlicher für die Multikonstantentheorie entschieden und schließlich Born ¹⁾ eine Molekulartheorie der Elastizität aufstellte, welche die experimentell erwiesene Ungültigkeit der Cauchyschen Gleichungen erklärte.

Um unsre Formeln möglichst einfach zu gestalten, schreiben wir Spannungen und Deformationen im Kristall bei willkürlich gewähltem Achsenkreuz $X_x \dots, x_x \dots$, die hinzugehörigen Konstanten und Moduln aber c_{ik}' und s_{ik}' . Die Spannungen und Deformationen im Bezug auf die Hauptachsen heißen $X_x^\circ \dots, x_x^\circ \dots$, die

¹⁾ M. Born, Dynamik der Kristallgitter, 1914; 2. Aufl. u. d. Titel „Atomtheorie des festen Zustandes“ 1923.

hinzugehörigen Hauptkonstanten und Hauptmoduln c_{ik} und s_{ik} . In der Theorie treten primäre und sekundäre Aggregate auf von axialer Symmetrie, ihre Elastizitätskonstanten werden \mathfrak{C}_{ik} geschrieben. Die Konstanten der isotropen Aggregate heißen \mathfrak{C} (für $\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{C}_{33}$), \mathfrak{C}_1 (für $\mathfrak{C}_{12} = \mathfrak{C}_{13}$) und \mathfrak{C}_2 (für $\mathfrak{C}_{44} = \mathfrak{C}_{66}$) mit der bekannten Isotropiebedingung:

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1 = 2\mathfrak{C}_2. \quad (5)$$

Andre Größen, die in den Formeln für die einzelnen Kristallsysteme auftreten, werden in den betreffenden Kapiteln erklärt; hier erwähnen wir noch die quadratische Funktion, die wir im II. Kapitel statt der freien Energie ξ benutzen:

$$\varphi = \xi - Z_z z_z - Z_y z_y - Z_x z_x \quad (6)$$

also:

$$2\varphi = X_x x_x + Y_y y_y + X_y x_y - Z_z z_z - Z_y z_y - Z_x z_x \quad . . (6a)$$

I.

DIE VOIGTSCHES THEORIE DER ELASTIZITÄT QUASIISOTROPER MEDIEN.

§ 1. Die Voigtschen Formeln.

Der einzige mir bekannte Versuch, die elastischen Konstanten der Kristallaggregate zu berechnen aus denen der Einzelkristalle, ist vor mehr als 40 Jahren von W. Voigt¹⁾ gemacht worden. Er sollte als Beitrag zur Entscheidung des Streites zwischen Rari- und Multikonstantentheorie dienen. In vorhergehenden Untersuchungen²⁾ hatte Voigt die Elastizitätskonstanten von verschiedenen kristallisierten Mineralien, wie Steinsalz, Flußspat, Kalkspat, Quarz, Baryt bestimmt. Dabei hatte sich ergeben, daß die Cauchyschen Bedingungen (4) nie genau und nur einmal (beim Steinsalz) angenähert erfüllt waren. Für isotrope Körper reduzieren sich die 6 Cauchyschen Gleichungen auf eine einzige, die Poissonsche Gleichung

$$\zeta = 3\zeta_1.$$

Voigt macht die Bemerkung, daß viele als isotrop bezeichnete Körper in Wahrheit quasiisotrop, d. h. Aggregate von Kristallbrocken sind. Kann man aus den Elastizitätskonstanten der Einkristalle die Konstanten des Aggregats berechnen, so wird sich ergeben, ob die Poissonsche Gleichung erfüllt ist oder nicht. Voigt macht nun folgenden Ansatz, den er vorläufig kaum näher begründet:

Die elastischen Deformationen gehen stetig durch die Grenzflächen der Kristalle hindurch und haben in den verschiedenen Kristallen mit verschiedenen Achsenorientierungen, die ein Volumelement des Aggregats erfüllen, nahezu denselben Wert.

Mit kleiner Mühe bildet er dann die Mittelwerte der elastischen Spannungen. Daraus folgen sogleich die Elastizitätskonstanten des

¹⁾ W. Voigt, Gött. Abhandl. 1887, S. 48; Wied. Ann. 38, S. 573.

²⁾ W. Voigt, Pogg. Ann., Erg. B. VII, S. 1 und 177, 1875.

W. Voigt, Wied. Ann. 31, S. 474, 1887.

W. Voigt, Wied. Ann. 34, S. 981, 1888.

W. Voigt, Wied. Ann. 35, S. 642, 1888.

quasiisotropen Mediums, ausgedrückt in den Kristallkonstanten. Mit den Festsetzungen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}(c_{11} + c_{22} + c_{33}) \\ B &= \frac{1}{3}(c_{23} + c_{31} + c_{12}) \\ C &= \frac{1}{3}(c_{44} + c_{55} + c_{66}) \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

erhält er unabhängig vom Kristallsystem für die Aggregatskonstanten die Formeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \frac{1}{5}(3A + 2B + 4C) \\ \mathfrak{G}_1 &= \frac{1}{5}(A + 4B - 2C) \\ \mathfrak{G}_2 &= \frac{1}{5}(A - B + 3C) \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

wobei die Isotropiebedingung (5) automatisch erfüllt ist. Bei den Kristallen, wo die Gleichungen (4) nicht gelten, ist für das Aggregat die Poissonsche Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt, auch für die hinzugehörigen quasiisotropen Medien gilt also die Multikonstantentheorie.

Beiläufig vergleicht Voigt bei einigen Mineralien die berechneten Aggregatskonstanten mit den empirisch bestimmten; über das Ergebnis werde ich im § 3 berichten.

§ 2. Die Begründung des Voigtschen Ansatzes.

Die vorhergehende Theorie beruht auf dem Ansatz von der Stetigkeit der elastischen Deformationen. Die Begründung dieses Ansatzes findet sich im Anhang II des Lehrbuchs der Kristallphysik ³⁾. Voigt gibt hier eine allgemeine Theorie der Beziehungen zwischen Einkristallen und ihren quasiisotropen Aggregaten; die Strömungen der Elektrizität und der Wärme werden ausführlich behandelt, nach Analogie wird dann das elastische Problem gelöst.

Voigt stützt seine Theorie auf 2 Annahmen:

„daß die Kristallbrocken klein sind selbst gegen die Dimensionen der Volumelemente, die man bei der Entwicklung der Theorie eines Vorganges benutzt, dabei aber immer noch groß gegen die Wirkungsweite ⁴⁾ molekularer Kräfte,“ und „daß sie außerdem den Raum lückenlos erfüllen.“

Dann bemerkt er, daß bei den meisten Vorgängen ausgezeichnete Funktionen bestehen „die nach ihrer Definition Summen über Werte

³⁾ W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Nachdruck 1928, S. 954.

⁴⁾ l. c. S. 954 steht „Wirkungsweise“, dies ist wohl ein Druckfehler.

darstellen, die sich auf die einzelnen Moleküle oder Elementarmaßen des Körpers beziehen". Beispiele liefern die Strömungen U der Wärme und der Elektrizität. „Im Gegensatz dazu wird die treibende Kraft V durch den Zustand in einem einzigen Punkte definiert" ⁵⁾.

An diesen Unterschied zwischen U und V knüpft Voigt einen zweiten. Die treibende Kraft hat ein Potential, das durch die Grenzflächen der Kristallbrocken stetig hindurchgeht. Da schreibt er: „Wir werden hieraus schließen dürfen, daß bei hinreichender Kleinheit dieser Brocken das Potentialgefälle in allen denjenigen, welche ein Volumelement erfüllen, sehr nahe gleiche Größe besitzt.

Von den Strömungskomponenten gilt gleiches keineswegs, von diesen sind nämlich nur die zu einer Zwischengrenze normalen, nicht auch die tangentialen in den Grenzen stetig. Denken wir uns z. B., um einen einfachen, leicht übersehbaren Fall zu erhalten, einen quasiisotropen Körper aus dünnen zylinderförmigen Kristallbrocken zusammengesetzt, deren Achsen parallel liegen, so wird die Strömung längs dieser Achsen von Zylinder zu Zylinder unstetig variieren können, während das longitudinale Potentialgefälle in benachbarten Zylindern merklich gleich sein muß." ⁶⁾

Voigt schreibt nun für die mittleren Strömungskomponenten in einem Volumelement eines quasiisotropen Aggregats:

$$|U_1| = \frac{1}{Q} \sum_j \{l_{11}V_1 + l_{12}V_2 + l_{13}V_3\}_{ij} \text{ u. s. w.,}$$

wo Q der Querschnitt des Elements senkrecht zur X -Achse ist, die Summe genommen wird über alle Kristallbrocken des Elements und l_{11} u. s. w. Konstanten der Leitfähigkeit sind, abhängig von den Achsenorientierungen der einzelnen Kristalle. Die Summe \sum zerfällt in eine Doppelsumme, wenn alle Brocken von annähernd gleicher Orientierung durch das Symbol S_k zusammengefaßt werden und die Summe über alle Orientierungen S_i geschrieben wird:

$$|U_1| = \frac{1}{Q} \{S l_{11} S(V_1)_k q_k + S l_{12} S(V_2)_k q_k + S l_{13} S(V_3)_k q_k\} \dots (9)$$

„Es ist nun bei den oben erörterten Stetigkeitsverhältnissen der Potentiale kein Grund einzusehen, warum die Summen $S(V_1)_k q_k, \dots$ mit der Orientierung der Kristallbrocken, auf die sie sich beziehen,

⁵⁾ l. c. S. 956.

⁶⁾ W. Voigt, l. c. S. 957.

wechseln sollten. Wir werden sie demgemäß ausschließlich als Funktionen des Ortes betrachten dürfen, an dem sich das Volumelement befindet, und setzen

$$S_i(V_1)_{kq_k} = |V_1|Q_i$$

wo $|V_1|$ der mittlere Wert der bezüglichen Feldkomponente in dem Element ist, und Q_i , der Anteil von Q , der von Kristallen der Orientierung (i) bedeckt wird, für alle Orientierungen den gleichen Wert hat." ⁷⁾

Die Gleichungen (9) erhalten dann die Form

$$|U_1| = |l_{11}| \cdot |V_1| + |l_{12}| \cdot |V_2| + |l_{13}| \cdot |V_3|, \text{ u.s.w. } \dots (10)$$

wo die vertikalen Striche wiederum Mittelwerte bezeichnen über das betrachtete Volumelement. Nach Wortlaut und Sinn der Voigtschen Ableitung könnten die Mittelwertstriche bei V_1 , V_2 und V_3 wegfallen.

Schließlich folgt dann für die Leitfähigkeit l des quasiisotropen Aggregats durch Mittelung über alle Orientierungen:

$$l = |l_{11}| = |l_{22}| = |l_{33}| \dots (11)$$

welcher Wert sich ganz einfach berechnen läßt.

Für das elastische Problem liegen nach Voigt die Verhältnisse völlig analog. „Die Deformationsgrößen x_x, \dots, x_y drücken sich durch die Gefälle von Funktionen (nämlich der Verrückungskomponenten u, v, w) aus, die sämtlich stetig durch die Grenzen zwischen den verschiedenen Kristallbrocken gehen" ⁸⁾. Er überträgt diese Stetigkeit stillschweigend von den Verrückungen auf ihre Ableitungen, die Deformationen. Sodann ergibt sich (in etwas vereinfachter Fassung)

$$-|X_x| = |c_{11}|x_x + |c_{12}|y_y + \dots + |c_{16}|x_y, \text{ u.s.w. } \dots (12)$$

Die Berechnung der Mittelwerte $|c_{11}|$ u.s.w. führt sodann auf die Voigtschen Formeln (8).

§ 3. Die Voigtsche Prüfung der Formeln (8).

Als Voigt seine Formeln veröffentlichte, war die Prüfung noch nicht möglich. Von den quasiisotropen Medien, deren elastische Konstanten

⁷⁾ W. Voigt, l. c. S. 958.

⁸⁾ Derselbe, l. c. S. 961.

gemessen waren, hauptsächlich Metallen, kannte man keine Einkristalle, groß und homogen genug zur Bestimmung der Kristallkonstanten. Voigt ging also, um Zahlenmaterial zur Prüfung seiner Theorie zu erhalten, umgekehrt vor: er suchte aus der Reihe der Stoffe, deren Kristallkonstanten er gemessen hatte ⁹⁾, diejenigen heraus, von welchen er außer den Kristallen auch dichte, homogene Aggregate mikrokristalliner Struktur untersuchen konnte. Er wählte Flußspat, Kalkspat, Baryt und Quarz. Für Quarz bestimmte er die Konstanten an Feuerstein und Opal, bei welchen Stoffen die Anwesenheit von Quarzmikrokristallen allerdings damals noch nicht feststand.

Allenfalls war zu erwarten, daß die gemessenen Elastizitätskonstanten der Aggregate kleiner sein würden als die berechneten, da die Einzelkristalle häufig durch ein fremdes Medium zusammengekittet sind. Was das eventuelle Vorkommen von Poren im Aggregat anbelangt, hat Voigt nachgewiesen ⁹⁾, daß regelmäßig verteilte Höhlungen die Konstanten \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 des Aggregats verkleinern, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ aber nicht verändern; dagegen wird dies Verhältnis geändert durch Brüche und Einschlüsse. Außerdem wird, wie Voigt bemerkt, auch bei idealen Aggregaten kaum vollständige Übereinstimmung zu erwarten sein, weil die schon ziemlich großen relativen Ungenauigkeiten der gemessenen Kristallmoduln s_{ik} bedeutend vergrößert wiederkehren in den aus ihnen berechneten Kristallkonstanten c_{ik} .

Für die Vergleichung der berechneten und gemessenen Größen dient die Tabelle A 1. Hierin sind \mathfrak{C} , \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 die Elastizitätskonstanten der quasiisotropen Aggregate, definiert durch die Gleichungen:

$$X_x = \mathfrak{C}x_x + \mathfrak{C}_1y_y + \mathfrak{C}_1z_z, \text{ u.s.w.}$$

$$Y_z = \mathfrak{C}_2y_z, \text{ u.s.w.}$$

Die zwei Baryte der Tabelle sind Stücke von verschiedener Farbe. Quarz I ist Feuerstein, Quarz II Opal. Alle Konstanten sind gemessen in $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$.

⁹⁾ W. Voigt, Wied. Ann. 31, S. 474, 1887; Wied. Ann. 34, S. 981, 1888; Wied. Ann. 35, S. 642, 1888.

A 1. (Voigtsche Theorie).

Einheit $\frac{kg}{mm^2}$		\mathfrak{G}	\mathfrak{G}_1	\mathfrak{G}_2	$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_1}$
Flußspat	berechnet	14610	5610	4500	2,60
	gemessen ¹⁰⁾	11900	3370	4282	3,53
Kalkspat	berechnet	12162	4545	3809	2,67
	gemessen ¹⁰⁾	7070	2370	2354	2,98
Baryt	berechnet	8777	3633	2575	2,42
	gemessen I ¹⁰⁾	7400	2760	2320	2,68
	„ II ¹⁰⁾	7720	3130	2295	2,47
Quarz	berechnet	10267	747	4760	13,74
	gemessen I ¹⁰⁾	7700	660	3521	11,67
	„ II ¹⁰⁾	3910	251	1829	15,58

Von den empirischen Größen ist \mathfrak{G}_2 ein anderes Symbol für den Torsionsmodul \mathfrak{I} , der direkt gemessen wird. \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_1 aber werden berechnet aus \mathfrak{I} zusammen mit dem gemessenen Youngschen Modul \mathfrak{E} mittels der Gleichungen:

$$\mathfrak{G} = \frac{(\mathfrak{G} + 2\mathfrak{G}_1)(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1)}{\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_1} \quad \dots \quad (13)^{11)}$$

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1) \quad \dots \quad (14)^{11)}$$

welche als Lösung ergeben:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{I}(4\mathfrak{I} - \mathfrak{E})}{3\mathfrak{I} - \mathfrak{E}} \quad \dots \quad (15)$$

und

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{\mathfrak{I}(\mathfrak{G} - 2\mathfrak{I})}{3\mathfrak{I} - \mathfrak{E}} \quad \dots \quad (16)$$

Kleine Fehler in \mathfrak{G} und \mathfrak{I} verursachen unter Umständen sehr beträchtliche Änderungen in \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_1 . Um diese Vergrößerung der Fehler zu vermeiden, empfiehlt es sich, umgekehrt mittels (13) und (14) aus den berechneten \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_1 die theoretischen Werte für \mathfrak{G} und \mathfrak{I} zu bestimmen und diese zu vergleichen mit den gemessenen \mathfrak{G} und \mathfrak{I} . In die Tabelle A 2 haben wir neben \mathfrak{G} und \mathfrak{I} auch das Verhältnis $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{I}}$ aufgenommen, das wie $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_1}$ durch regelmäßig verteilte Poren nicht geändert wird.

¹⁰⁾ W. Voigt, Wied. Ann. 42, S. 537, 1891; 44, S. 168, 1891.

¹¹⁾ Vergl. z. B. Love, A Treatise on the Math. Th. of Elasticity, 4th Ed., S. 102, 103.

A 2. (Voigtsche Theorie).

Einheit $\frac{kg}{mm^2}$		\mathcal{G}	\mathcal{I}	$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{I}}$
Flußspat	berechnet	11490	4500	2,55
	gemessen	10450	4282	2,44
Kalkspat	berechnet	9690	3809	2,54
	gemessen	5888	2354	2,50
Baryt	berechnet	6245	2575	2,43
	gemessen I	5900	2320	2,54
	gemessen II	5915	2295	2,58
Quarz	berechnet	10170	4760	2,14
	gemessen I	7597	3521	2,16
	gemessen II	3880	1829	2,12

In Hinblick auf die experimentellen Schwierigkeiten, die alle gemessenen elastischen Konstanten sehr unsicher machen und in Anbetracht der unbekannten Einflüsse von Poren und Einschlüssen hat Voigt wohl das Recht, von einer leidlichen Übereinstimmung zu reden. Die möglichen Fehler sind aber so beträchtlich, daß man von einer positiven Bestätigung der Voigtschen Theorie kaum reden darf.

§ 4. Prüfung der Formeln (8) an neuen Daten.

Die Grundsätze, worauf die Voigtsche Theorie beruht, insbesondere die lückenlose Aneinanderschließung, sind wahrscheinlich oft bei Metallen weitgehend erfüllt. Aber noch im Jahre 1910, als Voigt seine bekannte Monographie herausgab, waren homogene Metalleinkristalle von genügenden Dimensionen nicht verfügbar für die Prüfung der Theorie. Diese Prüfung ist erst möglich nachdem Czochralski¹²⁾ 1918 die Technik erfunden hat Metalleinkristalle aus der Schmelze zu ziehen. Seitdem sind an mehreren Metalleinkristallen die elastischen Konstanten bestimmt worden und zwar:

von Bridgman an Antimon, Cadmium, Wismuth, Wolfram, Zink, Zinn¹³⁾,
 von Grüneisen an Zink und Cadmium¹⁴⁾,
 von Goens an Aluminium und Gold¹⁵⁾,
 von Mazima und Sachs an Messing¹⁶⁾.

¹²⁾ Czochralski, Z. f. phys. Chemie 92, S. 219, 1918.

¹³⁾ Bridgman, Proc. Nat. Ac. of Am. 10, S. 411—415, 1924; Proc. Am. Ac. 60, S. 306—383, 1925.

¹⁴⁾ Grüneisen u. Goens, Z. f. Phys. 26, S. 235—249, 1924.

¹⁵⁾ Goens, Die Naturwissensch. 17, S. 180, 1929.

¹⁶⁾ Mazima u. Sachs, Z. f. Phys. 50, S. 161—186, 1928.

Aus den von ihnen bestimmten Werten der Voigtschen Moduln s_{ik} habe ich die Konstanten c_{ik} berechnet und mit einigen andern Konstanten zusammengestellt in der Tabelle B 1:

B 1. Elastische Konstanten von Metalleinkristallen.

$10^{-11} \times$	c_{11}	c_{12}	c_{44}	c_{33}	c_{13}	c_{14}	c_{66}	f	g	h
Wolfram (Br.)	51,27	20,58	15,27	$= c_{11}$	$= c_{12}$	0	$= c_{44}$	0,15	$= f$	$= 2f$
Aluminium (G.)	10,54	5,84	2,80	"	"	"	"	— 0,90	"	"
Gold (G.)	19,41	16,61	4,00	"	"	"	"	— 5,20	"	"
Messing (M. u. S.)	14,75	11,14	7,19	"	"	"	"	— 10,77	"	"
Zink (Br.)	15,90	3,23	4,00	6,214	4,815	0	$= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$	3,085	4,67	— 3,516
Zink (Gr.)	16,08	4,31	4,00	5,424	4,375	"	"	3,705	3,77	— 3,246
Cadmium (Br.)	10,92	3,98	1,562	4,604	3,756	"	"	4,040	3,816	1,764
Cadmium (Gr.)	12,06	4,821	1,852	5,136	4,423	"	"	3,933	3,536	0,942
Antimon (Br.)	7,52	2,875	2,44	4,28	2,62	0,91	"	0,02	— 0,23	— 3,20
Wismuth (Br.)	5,70	2,93	1,08	3,89	1,87	— 4,82	"	1,67	0,61	1,53
Zinn (Br.)	8,39	4,63	1,77	9,66	2,81	0	0,74	2,04	0,22	5,35

Hier sind f , g und h Größen, die im III. und IV. Kapitel benutzt werden, mit den Definitionen:

$$\begin{aligned} f &= c_{11} - c_{13} - 2c_{44} \\ g &= c_{11} - c_{12} - 2c_{44} \\ h &= c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44}. \end{aligned}$$

Sie verschwinden, wenn der Kristall isotrop wird, man kann sie daher als ein Maß der Anisotropie betrachten. Bei den trigonalen Kristallen ist c_{14} ein weiteres Maß der Anisotropie, wie bei den tetragonalen $c_{44} - c_{66}$.

Bevor wir die Daten der Tabelle B 1 anwenden zur Prüfung der Voigtschen Theorie ist noch folgendes zu bemerken:

1⁰. Die Messungen der s_{ik} sind bis jetzt noch ziemlich ungenau. Bei den letzten Untersuchungen schätzt Goens die Genauigkeit beim Gold auf 5 %; Mazima und Sachs schreiben: „die Genauigkeit der Messung ist aber aus technisch nicht geklärten Ursachen gering.“

2⁰. Die Berechnung der c_{ik} aus den s_{ik} findet statt mit Formeln, die z. B. beim regulären System so aussehen:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{s_{11} + s_{12}}{(s_{11} + 2s_{12})(s_{11} - s_{12})}, \\ c_{12} &= \frac{-s_{12}}{(s_{11} + 2s_{12})(s_{11} - s_{12})}, \\ c_{44} &= \frac{1}{s_{44}}. \quad 17) \end{aligned}$$

Wegen des relativ kleinen Wertes von $s_{11} + 2s_{12}$ werden eventuelle Fehler in s_{11} und s_{12} im allgemeinen stark vergrößert in c_{11} und c_{12} wiederkehren. So ist beim Messing $c_{11} = \frac{11,05}{2,70 \cdot 27,75}$; ein Fehler von 1 % in s_{12} allein verursacht schon Fehler von 5 % in c_{11} und c_{12} , also nach (8) Fehler von 5 % in den Aggregatskonstanten \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 , während in \mathfrak{C}_2 die Fehler sich aufheben. Auch wenn die Voigtsche Theorie vollständig richtig ist, wird sie also wohl nie genaue Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Aggregatskonstanten ergeben; ein Unterschied von etwa 5 % in \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 (wenn auch diese Größen weniger empfindlich sind als \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1) spricht noch nicht gegen die Voigtsche Theorie.

17) W. Voigt, Lehrbuch, S. 741.

Wie es um die Übereinstimmung steht zeigt die Tabelle B 2. Diese Tabelle enthält:

- 1^o. die mittels (8), (13), (14) aus B 1 berechneten Werte der Dehnungs- und Torsionsmoduln \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} der quasiisotropen Aggregate,
- 2^o. die empirisch bestimmten Werte derselben Moduln,
- 3^o. das Verhältnis $\frac{g}{c_{11}}$ als ein Maß für die Anisotropie der Kristalle,
- 4^o. das Verhältnis $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}}$, dem Voigt großen Wert beilegt, weil es für poröses und porienfreies Material denselben Wert aufweisen soll.

Von den vielen gemessenen Werten von \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} habe ich bei jedem Metall nur diejenigen aufgenommen, die an demselben Metallstück gemessen sind; von den verschiedenen Daten desselben Forschers nehme ich hier die Mittelwerte. Fortgelassen habe ich bei dieser vorläufigen Prüfung die Metalle Zink und Cadmium, wo die verschiedenen empirischen Daten in allzu scharfem Widerspruch stehen; dieser merkwürdige Fall wird ausführlich besprochen im III. und V. Kapitel. Beim Gold habe ich den Grüneisenschen Stab „Gold I“¹⁸⁾ fortgelassen, obgleich seine \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} beide gemessen sind; die Werte $\mathfrak{E} = 7,65$, $\mathfrak{Z} = 2,55$ würden bei Isotropie ergeben (nach (15) und (16)) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 = \infty$ und der Stab ist also gewiß nicht isotrop, wie Grüneisen selbst übrigens empirisch nachgewiesen hat.

Dagegen habe ich die Kochschen Moduln von Messing¹⁹⁾ aufgenommen, obgleich \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} an verschiedenen Materialproben gemessen sind; die Proben hatten aber gleiche Zusammensetzung (60 % Cu, 40 % Zn) und waren in derselben Weise behandelt.

Mit Ausnahme dieser Messingkonstanten sind alle gemessenen Aggregatskonstanten den Untersuchungen zweier Forscher entnommen, und zwar den älteren von Voigt²⁰⁾ und den neueren von Grüneisen²¹⁾.

¹⁸⁾ Grüneisen, Ann. der Phys. 22, S. 801, 1907.

¹⁹⁾ Koch u. Dannecker, Ann. der Phys. (4) 47, S. 197—226, 1915.

Koch u. Dieterle, Ann. der Phys. (4) 68, S. 441—462, 1922.

²⁰⁾ W. Voigt, Wied. Ann. 48, S. 674—707, 1893.

²¹⁾ E. Grüneisen, Ann. der Phys. 22, S. 801, 1907; 25, S. 825, 1908.

B 2. Vorläufige Prüfung der Voigtschen Theorie.

C. G. S. Einheiten		$\mathfrak{G} 10^{-11}$	$\mathfrak{L} 10^{-11}$	$\frac{g}{c_{11}}$	$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}}$
Al. (reg.)	berechnet aus Kristallkonstanten	7,005	2,62	— 0,09	2,67
	gemessen von G. (3 Stäbe, gezogen)	7,06	2,66		2,65
	„ „ V. (6 Stäbe, gegossen)	6,45	2,53		2,55
Au. (reg.)	berechnet aus Kristallkonstanten	8,406	2,96	— 0,27	2,84
	gemessen von G. (1 Stab, gezogen)	7,92	2,76		2,87
	„ „ V. (2 Stäbe, gegossen)	7,44	2,795		2,66
Mess. (reg.)	berechnet aus Kristallkonstanten	13,2	5,04	— 0,73	2,62
	gemessen von K. (Draht und Band, gez.)	7,29	3,82		1,91
	„ „ V. (8 Stäbe, gegossen)	9,04	3,625		2,49
Bi. (trig.)	berechnet aus Kristallkonstanten	3,26	1,285	0,11	2,54
	gemessen von G. (1 Stab, gegossen)	3,26	—		—
	„ „ V. (3 Stäbe, gegossen)	3,13	1,17		2,68
Sn. (tetrag.)	berechnet aus Kristallkonstanten	5,16	1,935	0,02	2,72
	gemessen von G. (1 Stab, gegossen)	5,47	—		—
	„ „ V. (8 Stäbe, gegossen)	5,31	2,04		2,60

Aus dieser Tabelle lassen sich verschiedene Schlüsse ziehen.

Erstens über die Bedeutung des $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}}$. Dieses Verhältnis zeigte bei den Gesteinen der Tabelle A 2 treffende Übereinstimmung, nicht nur zwischen berechneten und mittleren gemessenen Werten, sondern besonders auch zwischen den gemessenen Werten untereinander, selbst bei den so verschiedenen Materialproben Quarz I und II d. h. Feuerstein und Opal. Bei den Metallen ist dies keineswegs der Fall. Bei gegossenen und gezogenen Metallen stimmen die $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}}$ im allgemeinen nicht besser überein als die \mathfrak{G} selbst und entschieden schlechter als die \mathfrak{L} . Dasselbe gilt auch für verschiedene Proben desselben Forschers; wiesen doch die verschiedenen Stäbe die Voigt aus demselben Messingstück schnitt, für $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}}$ Werte auf von 2,82 bis 2,29, während die \mathfrak{G} von 9,8 bis 8,45, die

\mathfrak{G} von 3,47 bis 3,83 schwankten. Die Erklärung mag wohl sein, daß die regellos verteilten Poren, welche Voigt zur Erklärung der merkwürdigen Gleichheit des $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}}$ bei sehr verschiedenen \mathfrak{G} und \mathfrak{L} heranzog, beim vorsichtig gegossenen Metall, wie es zur Messung benutzt worden ist, keinen entscheidenden Einfluß haben, wie Voigt schon vermutete ²²⁾. Die Unterschiede in \mathfrak{G} und \mathfrak{L} mögen vielmehr hauptsächlich beruhen auf die unvollständige Isotropie der einzelnen Proben, wie ich später nachweisen werde.

Jeder einzelne Stab ist wegen dieser Anisotropie nicht ohne weiteres brauchbar zur Prüfung der Voigtschen Theorie; bei Mittelwerten über mehrere Stäbe werden diese Fehler sich mehr oder weniger aufheben, und ist eine vorläufige Prüfung also möglich.

Zweitens zeigt die Tabelle B 2, daß die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung sehr verschieden ist, und zwar ergibt sich ein merkwürdiger Zusammenhang mit der Größe der Kristallanisotropie. Bei dem regulären Kristall wird die Anisotropie gemessen durch die einzige Größe $\frac{g}{c_{11}}$. Die berechneten Werte der Moduln sind überall größer als die mittleren gemessenen Werte, und zwar:

Beim Al.,	wo $\frac{g}{c_{11}}$	9 % beträgt,	ist \mathfrak{G}	4,4 %,	\mathfrak{L}	1 % zu groß
„ Au.,	„ „	27 %	„ „	9,5 %,	„ 6,5 %	„ „
„ Messing,	„ „	73 %	„ „	62 %,	„ 35 %	„ „

Die Zahlwerte der Abweichungen ändern sich, wenn man andre Messungen hinzunimmt oder den gewählten Messungen verschiedenes Gewicht zuschreibt. Ungeändert bleibt aber das Resultat, daß die Theorie gut, mäßig, oder schlecht stimmt, je nachdem die Kristalle kleine, mittlere oder große Anisotropie haben.

Dies weckt die Vermutung, daß die Voigtsche Theorie eine erste Annäherung ist, welche für Kristalle mit kleiner Anisotropie noch ziemlich gut stimmt, bei zunehmender Anisotropie aber immer schlechter wird.

Die nicht regulären Metalle bestätigen diese Vermutung einigermaßen:

²²⁾ W. Voigt, Lehrbuch, S. 964.

beim Wismuth, wo $\frac{g}{c_{11}} = 11\%$ beträgt, ist \mathfrak{E} 2 % und \mathfrak{T} 10 % zu groß,

beim Zinn, wo $\frac{g}{c_{11}} = 2\%$ beträgt, ist \mathfrak{E} 4,4 % zu klein, \mathfrak{T} 4,6 % zu groß,

doch gibt es hier mehrere Größen, die unabhängig von $\frac{g}{c_{11}}$ die Anisotropie

mitbestimmen, z. B. $\frac{f}{c_{11}}$, das beim *Bi* und *Sn* bzw. 29 % und 24 % ist,

während beim Wismuth auch das ziemlich große c_{14} eine besondere Anisotropie ausdrückt. Es ist nicht vorherzusagen, in welchem Maß diese verschiedenen Anisotropien einander in ihrem Einfluß auf \mathfrak{E} und \mathfrak{T} verstärken oder aufheben werden.

Voigt hat den approximativen Charakter seiner Theorie nirgendwo ausdrücklich betont, vielmehr scheint er ²³⁾ die unvollständige Übereinstimmung den Materialfehlern des Aggregats zuzuschreiben. Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, an welcher Stelle Voigts Ableitung theoretische Mängel aufweist. Der Aufbau der Theorie im II. Kapitel wird dann zeigen, daß die Voigtsche Theorie in der Tat als erste Annäherung herauskommt.

§ 5. Kritik der Voigtschen Theorie.

Die Voigtsche Theorie geht aus von der Bemerkung daß das elektrische Potential, die Temperatur und die elastische Verschiebung stetig durch die Grenzflächen der Kristallbrocken hindurchgehen. Daraus schließt Voigt sofort, daß für ihre Ableitungen, — elektrische Kräfte, Temperaturgefälle, elastische Deformationen —, dasselbe gilt. Die andern Größen aber, die in den Problemen auftreten — elektrischer Strom, Wärmestrom, elastische Spannungen — weisen nur Stetigkeit auf für die normalen, nicht aber für die tangentiellen Komponenten ²⁴⁾. Dies genügt um den inneren Widerspruch der Voigtschen Theorie zu zeigen. Ich beschränke mich auf die Elastizitätstheorie. Hätten wirklich alle 6 elastischen Deformationen auf beiden Seiten einer Grenzfläche zweier Kristalle mit ganz willkürlicher Achsenorientierung denselben Wert, so würden im allgemeinen die 6 Spannungskomponenten beiderseits nicht denselben Wert besitzen, auch nicht die normalen Komponenten. Nach dem Reaktionsprinzip ist dies aber notwendig, also sind gewiß nicht alle Deformationen stetig.

²³⁾ Lehrbuch S. 962.

²⁴⁾ Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 957.

Dies ist auch auf andre Weise einzusehen.

Wählt man die Normale der Grenzfläche zur Z-Achse, dann folgt aus der Stetigkeit der Verschiebungskomponenten die Stetigkeit ihrer Ableitungen nach x und y . Stetig sind also 3 Deformationen:

$$x_x \left(= \frac{\partial u}{\partial x} \right), y_y \left(= \frac{\partial v}{\partial y} \right) \text{ und } x_y \left(= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Stetig sind auch $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$, nicht aber $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ und damit wird die Stetigkeit der 3 Deformationen z_x , z_y und z_z hinfällig ²⁵⁾. Zugleich aber auch die Gültigkeit der Voigtschen Theorie.

²⁵⁾ Das Beispiel des Aggregats aus dünnen nadelförmigen Kristallbrocken, womit Voigt, wie im § 2 zitiert wurde, die Stetigkeit der Deformationen zu beweisen versucht, beweist nur die Stetigkeit der Ableitungen in der Richtung der Nadeln, also der tangentialen Deformationen, sagt aber nichts aus über die normalen Deformationen.

II.

VERSUCH EINER NEUEN THEORIE DER ELASTIZITÄT QUASIISOTROPER MEDIEN.

§ 1. Grenzbedingungen und Annahmen.

Im letzten § des vorigen Kapitels sind die richtigen Grenzbedingungen angedeutet worden. Wird an der Grenzfläche zweier Kristallbrocken die Normale zur Z-Achse gewählt, und werden Deformationen und Spannungen in dem einen Kristall einzeln, im andern doppelt gestrichen, so gilt an der Grenzfläche:

wegen der Stetigkeit der Verschiebungen

$$x'_x = x''_x, \quad y'_y = y''_y, \quad x'_y = x''_y, \quad (17)$$

wegen des Reaktionsprinzips

$$Z'_x = Z''_x, \quad Z'_y = Z''_y, \quad Z'_z = Z''_z. \quad (18)$$

Im übrigen übernehmen wir die Voigtschen Annahmen in etwas anderer Formulierung:

(I) die Kristallbrocken sind klein gegen die Dimensionen des Aggregats,

(II) sie sind groß gegen den Wirkungsbereich der molekularen Kräfte,

(III) sie schließen fest aneinander.

Dazu eine vierte die Voigt stillschweigend auch macht:

(IV) im undeformierten Aggregat sind überall die Spannungen null, oder so gering, daß für kleine hinzugefügte Deformationen das Hookesche Gesetz gilt.

Für den Aufbau einer Theorie liegt die Sache nun viel ungünstiger als bei den Voigtschen Grenzbedingungen. War das Aggregat, makroskopisch betrachtet, homogen deformiert, so durfte Voigt an jeder Stelle jedes einzelnen Kristalls dieselben Werte der Deformationen annehmen; aus der besonderen Orientierung der Achsen konnte er in jedem Kristall die Spannungen berechnen, und das Mitteln dieser Spannungen ergab die makroskopischen Spannungen und damit seine Formeln (8). Die neuen, verbesserten Grenzbedingungen haben nur Gültigkeit für ein bestimmtes, mit der Lage der Grenzfläche wechselndes Koordinatensystem. Im allgemeinen Fall, wo die Brocken willkürliche

Formen haben mit Grenzflächen in allerhand Lagen, gibt es kein festes Koordinatensystem im Aggregat, wofür auch nur eine der Deformationen oder der Spannungen stetig bliebe; weder eine Deformation, noch eine Spannung ist auch nur in einem Kristall homogen. Man kann also nicht ohne besondere Betrachtungen über den Verlauf einzelner Spannungen und Deformationen im Inneren der Kristalle auskommen.

Ursprünglich habe ich versucht einige allgemeine Annahmen über diesen Verlauf einzuführen, sie hatten aber immer etwas willkürliches und ergaben außerdem zwischen den mit ihrer Hilfe berechneten Aggregatskonstanten einen inneren Widerspruch, der allerdings nur bei stark anisotropen Kristallen wie Messing eine merkliche Unsicherheit der Resultate verursachte.

Aber auch in den Fällen, wo diese Ungewißheit nicht auftritt, bleibt die Möglichkeit, daß eine andre Annahme andre Werte für die Aggregatskonstanten ergeben würde.

Nur die Experimente könnten hier entscheiden. Leider sind vorläufig die empirischen Werte der elastischen Konstanten, sowohl für Kristalle als für Aggregate, noch viel zu ungenau, um sich zur Entscheidung zu eignen. Es war mir, zu meinem Bedauern, nicht möglich, für willkürliche Aggregate auf einwandfreie Weise die elastischen Konstanten streng zu berechnen.

Ich habe mich daher entschlossen einen besonderen Aufbau des Aggregats zu wählen, wobei diese Schwierigkeit nicht auftritt. Die Wahl ist naheliegend, ich mache die fünfte Annahme:

(V) das Aggregat besteht aus sehr dünnen Lamellen mit parallelen Grenzflächen, wovon ein dünnes Paket noch alle möglichen Orientierungen der Achsen in gleicher Häufigkeit, regellos verteilt, aufweist.

Bei diesem Aufbau des Aggregats kann man für alle Kristalle dasselbe Koordinatensystem wählen mit der Normale der Grenzflächen als Z -Achse. In diesem festen Koordinatensystem sind dann überall dieselben 6 Spannungen und Deformationen stetig, nämlich $x_x, y_y, x_y, z_x, z_y, z_z$. Wir betrachten diese 6 Größen als unabhängige Variablen; die andern 6 Größen, z_x, z_y, z_z, X_x, Y_y und X_y hängen in den einzelnen Lamellen von den jeweiligen Achsenorientierungen ab.

Mit den Grenzbedingungen verträgt sich jetzt die Festsetzung, jede der 6 unabhängigen Variablen habe überall im ganzen Aggregat denselben Wert. Dies ergibt für das Aggregat, makroskopisch betrachtet, eine homogene Deformation; die 6 abhängigen Variablen sind konstant in

jeder einzelnen Lamelle, haben verschiedene Werte in den verschiedenen Lamellen, und haben wieder feste Mittelwerte in Lamellenpaketen, die dünn sind gegen die Höhe des Aggregats, aber groß gegen die Dicke einer einzelnen Lamelle. Wollte man diesen Zustand darstellen durch vorgeschriebene Spannungen oder Verschiebungen an den Grenzflächen des Aggregats, so müßten diese auf den schmalen Seitenflächen jeder Lamelle passend gewählt werden; Spannungen oder Verschiebungen, die an jeder ebenen Grenzfläche des Aggregats überall konstante Werte aufweisen, verursachen keine reine homogene Deformation. Doch scheint es sehr wahrscheinlich, daß die Abweichungen sich ausgleichen werden in einer schmalen Grenzzone der Lamellen; wir machen also noch die Hypothese:

(VI) Wenn bei einem Aggregat des Typus (V) auf jeder Grenzfläche konstante Spannungen und Verschiebungen herrschen, entsteht im Aggregat, abgesehen von verschwindend kleinen Grenzgebieten, eine elastische Deformation, wobei jede der 6 unabhängigen Variablen $x_x, y_y, z_z, x_y, x_z, y_z$ im ganzen Aggregat konstant ist.

Nach der Vorschrift (V) kann man noch sehr verschiedene Aggregate aufbauen, indem man die Verteilungsfunktion der Achsenorientierungen, die in den Lamellen auftreten, verschieden wählt. So kann man im regulären System einmal alle Orientierungen zulassen, ein andres Mal nur diejenigen, wobei die Z-Achse z. B. mit der Hexaedernormale zusammenfällt. Ich werde Formeln aufstellen unter verschiedenen Annahmen:

(Va) alle Orientierungen, die überhaupt auftreten können, kommen regellos verteilt und gleich häufig vor.

(V β) die Orientierungen sind nach irgend einem andern Gesetz verteilt.

Ein Aggregat der ersten Art nennen wir allgemein, eins der zweiten Art speziell.

Ein spezielles Aggregat ist gewiß nicht isotrop, und auch bei einem allgemeinen Aggregat darf man im allgemeinen keine Isotropie erwarten, da die Z-Achse wohl in Bezug auf die Orientierungen der Kristallnetze, nicht aber in Bezug auf die Lage der Grenzflächen gleichwertig mit der X- und Y-Achse ist.

Jedenfalls besitzt ein allgemeines Aggregat zylindrische Symmetrie, wie ein Kristall des hexagonalen Systems, und ist also durch fünf elastische Konstanten gekennzeichnet. Wie sich später herausstellen wird, ergibt die Rechnung, daß bei Kristallen von kleiner und mittlerer Anisotropie das Aggregat (α) praktisch schon isotrop ist; beim Messing aber ist (α)

noch merklich anisotrop. Will man in diesem Fall ein Aggregat erhalten, das nahezu isotrop ist, dann kann man das Aufbauprinzip (V) noch einmal anwenden.

Ich mache also die Annahme:

(VII) das Aggregat besteht aus dünnen sekundären Lamellen mit parallelen Grenzflächen, und jede dieser Lamellen ist selbst ein Paket dünnerer primärer Lamellen des Typus (Va), wobei die Normalen dieser primären Lamellen alle möglichen Lagen haben, regellos verteilt und in gleicher Häufigkeit.

Die Rechnung zeigt, daß diese Annahme auch bei Messing genügt, um ein isotropes Aggregat zu erzielen.

Die Modelle, definiert durch die Annahme (Va) oder eine einfache (V β), haben den Vorteil, daß ihre Elastizitätskonstanten sich exakt berechnen lassen. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß ein solches Modell wohl nie auch nur angenähert realisiert auftritt.

Ein Resultat ist allenfalls erreicht, man kann jetzt von einem möglichen isotropen Kristallaggregat die elastischen Konstanten einwandfrei berechnen. In den Fällen wo das Aggregat (Va) schon isotrop ist, die Lage der Grenzflächen also keinen Einfluß hat, liegt die Vermutung nahe, daß die berechneten Werte für alle isotropen Aggregate gelten müssen. Andernfalls, wo die Lage der Grenzflächen sich geltend macht, wie bei Messing, und auch bei Zink und Cadmium, haben vielleicht die für das Modell (VII) berechneten Werte dieselbe allgemeine Bedeutung. Wir dürfen aber nicht von vornherein die Möglichkeit ablehnen daß für anders aufgebaute isotrope Aggregate die elastischen Konstanten verschieden ausfallen und daß also das Voigtsche Problem keine eindeutige Lösung besitzt. Sollten von einem reinen Metall zwei porienfreie und erwiesenermaßen isotrope Aggregate verschiedene elastische Konstanten aufweisen, so wäre dieser Unterschied vielleicht aus der letzterwähnten Ursache zu erklären. Soviel mir bekannt ist dieser Fall noch nicht vorgekommen.

§ 2. Theorie des allgemeinen Lamellenaggregats.

Ich will jetzt die elastischen Konstanten des allgemeinen Lamellenaggregats ausdrücken in den Konstanten der Kristalle. Im folgenden bedeutet X, Y, Z ein raumfestes Koordinatensystem mit der Z -Achse senkrecht zur Lamellenfläche; X^0, Y^0, Z^0 sind in jeder Lamelle die elastischen Hauptachsen, deren Lage festgelegt wird durch das Transformationsschema:

	X	Y	Z	
X^0	α_1	β_1	γ_1	
Y^0	α_2	β_2	γ_2	
Z^0	α_3	β_3	γ_3 (19)

Mit Voigt nennen wir die freie Energie pro Volumeinheit einer willkürlichen Lamelle bei kleiner homogener isothermischer Deformation ξ . Bevor wir über das Aggregat mitteln, müssen wir erst das ξ schreiben als Funktion der 6 Variablen $Z_z, Z_y, Z_x, x_x, y_y, x_y$, die ja im ganzen Aggregat konstante Werte aufweisen. Dazu schreiben wir, wie in der Einleitung:

$$2\xi = Z_z z_z + Z_y z_y + Z_x z_x + x_x X_x + y_y Y_y + x_y X_y \dots (1)$$

Wir können nun in zwei verschiedenen aber äquivalenten Weisen vorgehen.

Das eine Mal werden z_z, z_y, z_x in den gewählten Variablen ausgedrückt durch Auflösung der 3 Hookeschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} Z_z - c'_{31}x_x - c'_{32}y_y - c'_{36}x_y &= c'_{33}z_z + c'_{34}z_y + c'_{35}z_x, \\ Z_y - c'_{41}x_x - c'_{42}y_y - c'_{46}x_y &= c'_{43}z_z + c'_{44}z_y + c'_{45}z_x, \\ Z_x - c'_{51}x_x - c'_{52}y_y - c'_{56}x_y &= c'_{53}z_z + c'_{54}z_y + c'_{55}z_x. \end{aligned} \quad (20)$$

X_x, Y_y und X_y folgen dann aus den andern Hookeschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_x &= c'_{11}x_x + c'_{12}y_y + c'_{16}x_y + c'_{13}z_z + c'_{14}z_y + c'_{15}z_x, \\ Y_y &= c'_{21}x_x + c'_{22}y_y + c'_{26}x_y + c'_{23}z_z + c'_{24}z_y + c'_{25}z_x, \\ X_y &= c'_{61}x_x + c'_{62}y_y + c'_{66}x_y + c'_{63}z_z + c'_{64}z_y + c'_{65}z_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\begin{aligned} c'_{31}x_x + c'_{32}y_y + c'_{36}x_y &= U_3, \\ c'_{41}x_x + c'_{42}y_y + c'_{46}x_y &= U_4, \\ c'_{51}x_x + c'_{52}y_y + c'_{56}x_y &= U_5 \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

und

$$c'_{11}x_x^2 + c'_{22}y_y^2 + c'_{66}x_y^2 + 2c'_{12}x_x y_y + 2c'_{16}x_x x_y + 2c'_{26}y_y x_y = U \quad (23)$$

und schließlich:

$$\begin{vmatrix} c'_{33} & c'_{34} & c'_{35} \\ c'_{43} & c'_{44} & c'_{45} \\ c'_{53} & c'_{54} & c'_{55} \end{vmatrix} = \Delta, \dots \dots \dots (24)$$

welches Δ wir im folgenden die Hauptdeterminante nennen werden.

Die Gleichungen (20) lassen sich dann schreiben:

$$\begin{aligned} c'_{33}z_z + c'_{34}z_y + c'_{35}z_x &= Z_z - U_3, \\ c'_{43}z_z + c'_{44}z_y + c'_{45}z_x &= Z_y - U_4, \\ c'_{53}z_z + c'_{54}z_y + c'_{55}z_x &= Z_x - U_5 \quad (25), \end{aligned}$$

die Gleichungen (21) ergeben:

$$x_x X_x + y_y Y_y + x_y X_y = U + U_3 z_z + U_4 z_y + U_5 z_x$$

und aus (1) folgt:

$$2\xi = U + (U_3 + Z_z)z_z + (U_4 + Z_y)z_y + (U_5 + Z_x)z_x \quad . (26)$$

Indem wir z_z , z_y und z_x aus (25) auflösen und in (26) eintragen erhalten wir:

$$2\xi = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} U & U_3 + Z_z & U_4 + Z_y & U_5 + Z_x \\ U_3 - Z_z & c'_{33} & c'_{34} & c'_{35} \\ U_4 - Z_y & c'_{43} & c'_{44} & c'_{45} \\ U_5 - Z_x & c'_{53} & c'_{54} & c'_{55} \end{vmatrix} \quad (27)$$

Das Ziel ist hiermit erreicht, 2ξ ist, wie zu erwarten war, eine quadratische Funktion der 6 Variablen $Z_z Z_y Z_x x_y y_x x_y$.

Diese Funktion hat aber die Eigentümlichkeit, daß die Produkte wie $Z_z x_x$ aus einer Spannung und einer Deformation wegfallen, die Funktion 2ξ hat also nur 12 Konstanten statt der allgemeinen Zahl 21. Demzufolge würden wir durch Mittelung über das (axiale) Lamellenaggregat nur 4 der 5 erforderlichen Konstanten erhalten. Darum führen wir, wie schon in der Einleitung bemerkt worden ist, die Funktion φ ein:

$$\varphi = \xi - Z_z z_z - Z_y z_y - Z_x z_x, \quad (6)$$

die in ihrem Aufbau der Potentialfunktion der Thermodynamik ähnlich ist und sich der neuen Wahl der unabhängigen Variablen anpaßt. Aus

$$\delta\xi = X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + X_y \delta x_y + Z_z \delta z_z + Z_y \delta z_y + Z_x \delta z_x$$

folgt ja für φ :

$$\delta\varphi = X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + X_y \delta x_y - z_z \delta Z_z - z_y \delta Z_y - z_x \delta Z_x,$$

und jede der neuen abhängigen Variablen ergibt sich aus einer partiellen Differentiation von φ nach der hinzugehörigen unabhängigen Variablen:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_x}, \\ z_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial Z_z}, \\ &\text{u.s.w.} \end{aligned}$$

An die Stelle von (26) tritt jetzt die Gleichung

$$2\varphi = U + (U_3 - Z_z)z_z + (U_4 - Z_y)z_y + (U_5 - Z_x)z_x \quad (28)$$

oder mittels (25):

$$2\varphi = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} U & U_3 - Z_z & U_4 - Z_y & U_5 - Z_x \\ U_3 - Z_z & c'_{33} & c'_{34} & c'_{35} \\ U_4 - Z_y & c'_{43} & c'_{44} & c'_{45} \\ U_5 - Z_x & c'_{53} & c'_{54} & c'_{55} \end{vmatrix} \quad \dots \quad (29)$$

In dieser Formel sind U_3, U_4 und U_5 Linearfunktionen der Variablen x_x, y_y und x_y , U ist eine homogene quadratische Funktion derselben Variablen und 2φ ist eine homogene quadratische Funktion der 6 ausgewählten Variablen $Z_z, Z_y, Z_x, x_x, y_y, x_y$ mit 21 Koeffizienten.

Jeder dieser Koeffizienten ist der Quotient zweier Determinanten. Wir schreiben:

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c'_{kk} & c'_{kl} \\ c'_{lk} & c'_{ll} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta} = \delta_{ii} \begin{pmatrix} i, k, l = 3, 4, 5 \\ i \neq k \neq l \end{pmatrix} \quad \dots \quad (30)$$

$$- \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c'_{ik} & c'_{il} \\ c'_{lk} & c'_{ll} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} = \delta_{ik} \begin{pmatrix} i, k, l = 3, 4, 5 \\ i \neq k \neq l \end{pmatrix} \quad \dots \quad (31)$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c'_{3m} & c'_{34} & c'_{35} \\ c'_{4m} & c'_{44} & c'_{45} \\ c'_{5m} & c'_{54} & c'_{55} \end{vmatrix} = \frac{E_{3m}}{\Delta} = \varepsilon_{3m} (m = 1, 2, 6),$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c'_{33} & c'_{3m} & c'_{35} \\ c'_{43} & c'_{4m} & c'_{45} \\ c'_{53} & c'_{5m} & c'_{55} \end{vmatrix} = \frac{E_{4m}}{\Delta} = \varepsilon_{4m} (m = 1, 2, 6),$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c'_{33} & c'_{31} & c'_{3m} \\ c'_{43} & c'_{44} & c'_{4m} \\ c'_{53} & c'_{54} & c'_{5m} \end{vmatrix} = \frac{E_{5m}}{\Delta} = \varepsilon_{5m} (m = 1, 2, 6) \quad \dots \quad (32)$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c'_{mn} & c'_{m3} & c'_{m4} & c'_{m5} \\ c'_{3n} & c'_{33} & c'_{34} & c'_{35} \\ c'_{4n} & c'_{43} & c'_{44} & c'_{45} \\ c'_{5n} & c'_{53} & c'_{54} & c'_{55} \end{vmatrix} = \frac{\Phi_{mn}}{\Delta} = \varphi_{mn} \begin{pmatrix} m, n = 1, 2, 6 \\ m \neq n \end{pmatrix} \quad (33)$$

Aus (29) erhalten wir dann für die Funktion φ in der einzelnen Lamelle:

$$\begin{aligned}
2\varphi = & -\delta_{33}Z_z^2 - \delta_{44}Z_y^2 - \delta_{55}Z_x^2 - 2\delta_{34}Z_zZ_y - 2\delta_{35}Z_zZ_x - 2\delta_{45}Z_yZ_x + \\
& + \varphi_{11}x_x^2 + \varphi_{22}y_y^2 + \varphi_{66}x_y^2 + 2\varphi_{12}x_xy_y + 2\varphi_{16}x_xx_y + 2\varphi_{26}y_yx_y + \\
& + 2\varepsilon_{31}Z_zx_x + 2\varepsilon_{32}Z_zy_y + 2\varepsilon_{36}Z_zx_y + \\
& + 2\varepsilon_{41}Z_yx_x + 2\varepsilon_{42}Z_yy_y + 2\varepsilon_{46}Z_yx_y + \\
& + 2\varepsilon_{51}Z_xx_x + 2\varepsilon_{52}Z_xy_y + 2\varepsilon_{56}Z_xx_y \dots \dots \dots (34)
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir, indem wir Mittelwerte durch einen horizontalen Strich andeuten, für die Funktion $\bar{\varphi}$ eines willkürlichen Lamellenaggregats im raumfesten Koordinatensystem XYZ:

$$\begin{aligned}
2\bar{\varphi} = & -\bar{\delta}_{33}Z_z^2 - \bar{\delta}_{44}Z_y^2 - \bar{\delta}_{55}Z_x^2 - 2\bar{\delta}_{34}Z_zZ_y - 2\bar{\delta}_{35}Z_zZ_x - 2\bar{\delta}_{45}Z_yZ_x + \\
& + \bar{\varphi}_{11}x_x^2 + \bar{\varphi}_{22}y_y^2 + \bar{\varphi}_{66}x_y^2 + 2\bar{\varphi}_{12}x_xy_y + 2\bar{\varphi}_{16}x_xx_y + 2\bar{\varphi}_{26}y_yx_y + \\
& + 2\bar{\varepsilon}_{31}Z_zx_x + 2\bar{\varepsilon}_{32}Z_zy_y + 2\bar{\varepsilon}_{36}Z_zx_y + \\
& + 2\bar{\varepsilon}_{41}Z_yx_x + 2\bar{\varepsilon}_{42}Z_yy_y + 2\bar{\varepsilon}_{46}Z_yx_y + \\
& + 2\bar{\varepsilon}_{51}Z_xx_x + 2\bar{\varepsilon}_{52}Z_xy_y + 2\bar{\varepsilon}_{56}Z_xx_y \dots \dots \dots (35)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung legt den Grund für die neue Theorie der Beziehungen zwischen Aggregats- und Kristallkonstanten. Einerseits läßt sich die Funktion 2φ für das Aggregat schreiben in der Form (35) mit Koeffizienten, die von den Elastizitätskonstanten des Aggregats abhängen. Andererseits beruht die Berechnung der Koeffizienten δ_{33} u.s.w. in der Gleichung (34) auf einfachen, wenn auch oft sehr umständlichen Tensortransformationen. Die Gleichung (35) gestattet also die exakte Berechnung der Aggregatskonstanten in allen Fällen, wo sich die Mittelung der δ_{ii} u.s.w. ausführen läßt. Ob diese Mittelung möglich und mehr oder weniger leicht ist, hängt vor allem von der Verteilungsfunktion der Achsenorientierungen in den verschiedenen Lamellen ab.

Nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen ergibt die Annahme (Va) die denkbarst einfache Verteilungsfunktion: alle möglichen Orientierungen des Achsenkreuzes kommen gleich häufig vor.

Dies vereinfacht die Gleichung (35) beträchtlich. Das $\bar{\varphi}$ ist invariant für Änderung des Vorzeichens der X-, Y- oder Z-Richtung, dies reduziert Gl. (35) auf:

$$\begin{aligned}
2\bar{\varphi} = & -\bar{\delta}_{33}Z_z^2 - \bar{\delta}_{44}Z_y^2 - \bar{\delta}_{55}Z_x^2 + \bar{\varphi}_{11}x_x^2 + \bar{\varphi}_{22}y_y^2 + \bar{\varphi}_{66}x_y^2 + \\
& + 2\bar{\varphi}_{12}x_xy_y + 2\bar{\varepsilon}_{31}Z_zx_x + 2\bar{\varepsilon}_{32}Z_zy_y.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichwertigkeit der X- und Y-Richtungen folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_{44} &= \bar{\delta}_{55}, \\
\bar{\varphi}_{11} &= \bar{\varphi}_{22}, \\
\bar{\varepsilon}_{31} &= \bar{\varepsilon}_{32} \dots \dots \dots (36)
\end{aligned}$$

X- und Y-Richtung sind auch vertauschbar mit jeder andern Richtung in der X-Y-Ebene, daraus folgt:

$$\bar{\varphi}_{66} = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_{11} - \bar{\varphi}_{12}) \quad \dots \quad (37)$$

Schließlich nimmt also für das allgemeine Lamellenaggregat (Va) die Gl. (35) folgende einfache Form an:

$$2\bar{\varphi} = -\bar{\delta}_{33}Z_z^2 - \bar{\delta}_{44}(Z_y^2 + Z_x^2) + \bar{\varphi}_{11}(x_x + y_y)^2 + \\ + \bar{\varphi}_{66}(x_y^2 - 4x_x y_y) + 2\bar{\varepsilon}_{31}Z_z(x_x + y_y) \quad \dots \quad (38)$$

Wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt worden ist, hat das allgemeine Aggregat zylindrische Symmetrie. Es besitzt also 5 unabhängige Elastizitätskonstanten \mathfrak{G}_{11} , \mathfrak{G}_{33} , \mathfrak{G}_{12} , \mathfrak{G}_{13} und \mathfrak{G}_{44} ; wie bekannt, ist $\mathfrak{G}_{66} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12})$. Um die Funktion $\bar{\varphi}$ für das Aggregat mit Hilfe der Aggregatskonstanten in den 6 unabhängigen Variablen $Z_z, Z_y, Z_x, x_x, y_y, x_y$ auszudrücken, wiederholen wir die Ausführung dieses Paragraphen für ein zylindrisches Aggregat, wo die Z-Achse als ∞ -zählige Symmetrieachse auftritt. Die Gl. (24), (30)–(33) werden hier sehr vereinfacht.

Δ reduziert sich auf $\mathfrak{G}_{33}\mathfrak{G}_{44}^2$, δ_{33} wird $\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}}$, δ_{44} wie δ_{55} wird $\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}}$, für ε_{31} wie ε_{32} erhalten wir $\frac{\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}}$, φ_{11} und φ_{22} werden $\frac{\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{33} - \mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}}$, φ_{12} ergibt $\frac{\mathfrak{G}_{12}\mathfrak{G}_{33} - \mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}}$, schließlich erhält φ_{66} den Wert \mathfrak{G}_{66} und weil für ein zylindrisches Aggregat (wie für ein hexagonales Kristall) $\mathfrak{G}_{66} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12})$ ist, ist auch hier $\varphi_{66} = \frac{1}{2}(\varphi_{11} - \varphi_{12})$. Für das $\bar{\varphi}$ des Aggregats gilt also die Gleichung:

$$2\bar{\varphi} = -\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}}Z_z^2 - \frac{1}{\mathfrak{G}_{44}}(Z_y^2 + Z_x^2) + \frac{\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{33} - \mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}}(x_x + y_y)^2 + \\ + \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12})(x_y^2 - 4x_x y_y) + 2\frac{\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}}Z_z(x_x + y_y) \quad \dots \quad (39)$$

Aus (38) und (39) folgen dann für die 5 Elastizitätskonstanten des allgemeinen Lamellenaggregats die Beziehungen:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \bar{\delta}_{33}, \quad \dots \quad (40)$$

$$\frac{\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}} = \bar{\varepsilon}_{31}, \quad \dots \quad (41)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}} = \bar{\delta}_{44}, \quad \dots \quad (42)$$

$$\mathfrak{G}_{11} - \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = \bar{\varphi}_{11}, \quad \dots \quad (43)$$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = \bar{\varphi}_{66}, \quad \dots \quad (44)$$

Aus diesen Gleichungen können wir die 5 Aggregatskonstanten \mathfrak{C}_{ik} berechnen.

Bei mehreren Metallen wird die Rechnung mit großer Annäherung ergeben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{11} &= \mathfrak{C}_{33}, \\ \mathfrak{C}_{12} &= \mathfrak{C}_{13}, \\ \mathfrak{C}_{44} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{12}) \dots \dots \dots (45)\end{aligned}$$

In diesen Fällen nennen wir \mathfrak{C}_{11} , \mathfrak{C}_{12} und \mathfrak{C}_{44} bzw. \mathfrak{C} , \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 , und das im Anfang des Paragraphen gesteckte Ziel ist erreicht, die Konstanten des quasiisotropen Aggregats sind bestimmt. Bei andern Metallen sind die Gl. (45) nicht alle erfüllt; dann wird das Aufbauprinzip (VII) angewandt. Die berechneten \mathfrak{C}_{ik} ergeben dann die Elastizitätskonstanten sekundärer Lamellen, womit wir das Verfahren wiederholen. In allen von mir durchgerechneten Fällen ergibt sich das sekundäre Aggregat als praktisch isotrop, in mehreren Fällen ist die Anisotropie der primären Lamellen schon so gering, daß die Voigtsche Theorie genügt zur Berechnung der sekundären Konstanten.

Im III. und IV. Kapitel wird die Rechnung durchgeführt für Kristalle der hexagonalen und regulären Systeme. Dabei erweist sich die Aufstellung der Ausdrücke für Δ , δ_{33} u. s. w. als sehr leicht, die Mittelung aber als sehr umständlich. Insbesondere gilt das für φ_{11} und φ_{66} , wo die Zähler 4-reihige Determinanten sind und sehr verwickelte Formen 4. Grades der c_{ik} ergeben. Die Rechnung wird aber beträchtlich vereinfacht, wenn wir den im Anfang des Paragraphen erwähnten zweiten Weg gehen. Wir gehen wiederum aus von der Gl. (6), ausführlich geschrieben:

$$2\varphi = x_x X_x + y_y Y_y + x_y X_y - z_z z_z - z_y z_y - z_x z_x \dots (6a)$$

Statt z_z , z_y und z_x werden nun aber X_x , Y_y und X_y ausgedrückt in den 6 unabhängigen Variablen. Dazu werden jetzt die Hookeschen Gleichungen benutzt in der Form (3a) der Einleitung. Das ganze Verfahren verläuft parallel mit dem vorigen, also:

$$\begin{aligned}x_x - s'_{13}Z_z - s'_{14}Z_y - s'_{15}Z_x &= s'_{11}X_x + s'_{12}Y_y + s'_{16}X_y, \\ y_y - s'_{23}Z_z - s'_{24}Z_y - s'_{25}Z_x &= s'_{21}X_x + s'_{22}Y_y + s'_{26}X_y, \\ x_y - s'_{63}Z_z - s'_{64}Z_y - s'_{65}Z_x &= s'_{61}X_x + s'_{62}Y_y + s'_{66}X_y. \quad (20a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_z &= s'_{31}X_x + s'_{32}Y_y + s'_{36}X_y + s'_{33}Z_z + s'_{34}Z_y + s'_{35}Z_x, \\ z_y &= s'_{41}X_x + s'_{42}Y_y + s'_{46}X_y + s'_{43}Z_z + s'_{44}Z_y + s'_{45}Z_x, \\ z_x &= s'_{51}X_x + s'_{52}Y_y + s'_{56}X_y + s'_{53}Z_z + s'_{54}Z_y + s'_{55}Z_x. \quad (21a)\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} s'_{13}Z_z + s'_{14}Z_y + s'_{15}Z_x &= V_1, \\ s'_{23}Z_z + s'_{24}Z_y + s'_{25}Z_x &= V_2, \\ s'_{63}Z_z + s'_{64}Z_y + s'_{65}Z_x &= V_6 \dots \dots \dots (22a) \end{aligned}$$

und

$$s'_{33}Z_z^2 + s'_{44}Z_y^2 + s'_{55}Z_x^2 + 2s'_{34}Z_zZ_y + 2s'_{35}Z_zZ_x + 2s'_{45}Z_yZ_x = V \dots (23a)$$

werden die Gl. (20a):

$$\begin{aligned} s'_{11}X_x + s'_{12}Y_y + s'_{16}X_y &= x_x - V_1, \\ s'_{21}X_x + s'_{22}Y_y + s'_{26}X_y &= y_y - V_2, \\ s'_{61}X_x + s'_{62}Y_y + s'_{66}X_y &= x_y - V_6 \dots \dots \dots (25a) \end{aligned}$$

Jetzt werden X_x , Y_y und X_y aufgelöst aus (25a) mittels der zweiten Hauptdeterminante:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{21} & s'_{22} & s'_{26} \\ s'_{61} & s'_{62} & s'_{66} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (24a)$$

und eingetragen in die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2\varphi &= x_x X_x + y_y Y_y + x_y X_y - Z_z z_z - Z_y z_y - Z_x z_x = \\ &= X_x(x_x - V_1) + Y_y(y_y - V_2) + X_y(x_y - V_6) - V \dots (28a) \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$2\varphi = -\frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} V & V_1 - x_x & V_2 - y_y & V_6 - x_y \\ V_1 - x_x & s'_{11} & s'_{12} & s'_{16} \\ V_2 - y_y & s'_{21} & s'_{22} & s'_{26} \\ V_6 - x_y & s'_{61} & s'_{62} & s'_{66} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (29a)$$

Für unsern Zweck genügt es, die Analoga der δ_{ii} und δ_{ik} hinzuschreiben, also die Brüche mit 2-reihigen Zählern:

$$\frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} s'_{kk} & s'_{kl} \\ s'_{lk} & s'_{ll} \end{vmatrix} = \frac{\Sigma_{ii}}{\Sigma} = \sigma_{ii} \begin{pmatrix} i, k, l = 1, 2, 6 \\ i \neq k \neq l \end{pmatrix} \dots \dots (30a)$$

$$-\frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} s'_{ik} & s'_{il} \\ s'_{lk} & s'_{ll} \end{vmatrix} = \frac{\Sigma_{ik}}{\Sigma} = \sigma_{ik} \begin{pmatrix} i, k, l = 1, 2, 6 \\ i \neq k \neq l \end{pmatrix} \dots \dots (31a)$$

Wir schreiben dann:

$$2\varphi = \sigma_{11}x_x^2 + \sigma_{22}y_y^2 + \sigma_{66}x_y^2 + 2\sigma_{12}x_x y_y + \text{u.s.w.} \dots \dots \dots (34a)$$

und nach der Mittelung:

$$2\overline{\varphi} = \overline{\sigma}_{11}x_x^2 + \overline{\sigma}_{22}y_y^2 + \overline{\sigma}_{66}x_y^2 + 2\overline{\sigma}_{12}x_x y_y + \text{u.s.w.} \dots \dots \dots (35a)$$

wo wiederum:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} \dots \dots \dots (36a)$$

$$\bar{\sigma}_{66} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{12}) \dots \dots \dots (37a)$$

Die Vergleichung mit (39) ergibt dann

$$\mathfrak{G}_{11} - \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = \bar{\sigma}_{11} \dots \dots \dots (43a)$$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = \bar{\sigma}_{66} \dots \dots \dots (44a)$$

und noch 3 andre Gleichungen, die (40)–(42) entsprechen. In diesen 3 neuen Gleichungen treten jetzt aber 3- und 4-reihige Determinanten auf, sie sind also für die Rechnung weniger bequem als (40)–(42) selbst.

Es ist klar, daß die neue Gleichung (34a) für jede einzelne Lamelle identisch ist mit der alten Gl. (34), es ist also $\frac{\Sigma_{11}}{\Sigma} = \frac{\Phi_{11}}{\Delta}$ für jede Wahl

der $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ des Schemas (19). In der Tat wird sich bei der Anwendung der Formeln im III. Kapitel zeigen, daß Δ und Σ Funktionen der Richtungscosinus mit proportionalen Koeffizienten sind. Die Ausdrücke für Σ_{11} und Σ_{66} sind aber so viel einfacher als die für Φ_{11} und Φ_{66} , daß es vorteilhaft erscheint, für die Rechnungen im hexagonalen System neben (40), (41) und (42) die Gleichungen (43a) und (44a) zu benutzen.

Bei den regulären Kristallen gestaltet sich die Rechnung einfacher. Hier werden bei allseitig gleichem Druck die Kristalle gleichmäßig deformiert, die Kompressibilität hat also denselben Wert für alle Lamellen und für das Aggregat. Diese Betrachtung liefert sofort die 2 einfachen Gleichungen:

$$\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_{13} = c_{11} + 2c_{12} \dots \dots \dots (46)$$

und

$$2\mathfrak{G}_{13} + \mathfrak{G}_{33} = c_{11} + 2c_{12} \dots \dots \dots (47),$$

die sich natürlich auch aus der allgemeinen Theorie ergeben.

Nachdem \mathfrak{G}_{33} und \mathfrak{G}_{44} aus den Gl. (40), (42) berechnet worden sind, berechnen wir $\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}$ und \mathfrak{G}_{13} aus (46) und (47). Schließlich gilt, wie wir im IV. Kapitel nachweisen werden, im regulären System die Beziehung:

$$4(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = c_{11}(c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44})\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} + 4c_{44}(c_{11} - c_{12})\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}} - 3c_{11} \quad (48)$$

welche mit (46) zusammen die Berechnung von \mathfrak{G}_{11} und \mathfrak{G}_{12} gestattet. Die Berechnung von $\bar{\varepsilon}_{31}$ und von den $\bar{\varphi}_{ik}$ oder $\bar{\sigma}_{ik}$ ist also im regulären System überflüssig.

§ 3. Die Voigtschen Formeln als erste Annäherung.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die neuen Formeln für die Konstanten des primären Aggregats, falls die Anisotropie des Kristalls sehr klein ist, die Voigtschen Formeln als erste Annäherung ergeben. Das Aggregat ist in diesem Fall also praktisch isotrop. Dazu gehen wir von unsern Formeln (40)–(44) aus.

Kleine Isotropie bei einem Kristall eines willkürlichen Systems bedeutet, daß alle Richtungen im Kristall nahezu gleichwertig sind. Daraus folgt, daß bei jeder willkürlichen Wahl des Achsenkreuzes:

$$\begin{array}{llllllll} c'_{11}, c'_{22}, c'_{33} & \text{wenig verschieden sind von einem festen } A, \\ c'_{23}, c'_{31}, c'_{12} & \text{,, ,,, ,,, ,,, ,,, } B, \\ c'_{44}, c'_{55}, c'_{66} & \text{,, ,,, ,,, ,,, ,,, } C, \end{array}$$

während alle andern c'_{ik} wenig verschieden sind von Null. Für A , B und C können wir die Voigtschen Mittelwerte wählen, wie sie durch die Gl. (7) definiert sind. Mit Vernachlässigung von Beträgen, die klein sind von höherer Ordnung, wie $c'_{34}{}^2$, $(c'_{33} - A)^2$ u.s.w. erhalten wir (mit Anwendung des Zeichens \sim für „annähernd gleich“), aus (24):

$$A \sim c'_{33} c'_{44} c'_{55}$$

und daher aus (30):

$$\delta_{33} \sim \frac{1}{c'_{33}} \sim \frac{1}{A} \left(1 - \frac{c'_{33} - A}{A} \right),$$

und nach (40)

$$\bar{\delta}_{33} = \frac{1}{\mathfrak{C}_{33}} \sim \frac{1}{A} \left(1 - \frac{\bar{c}'_{33} - A}{A} \right)$$

also:

$$\mathfrak{C}_{33} \sim A \left(1 + \frac{\bar{c}'_{33} - A}{A} \right)$$

oder

$$\mathfrak{C}_{33} \sim \bar{c}'_{33} \dots \dots \dots (49a),$$

welche Gleichung bei Voigt aus (12) folgt und auf die erste Voigtsche Gleichung (8) führt.

In derselben Weise folgt aus (24), (30) und (42)

$$\mathfrak{C}_{44} \sim \bar{c}'_{44} \dots \dots \dots (49b)$$

und daraus die 3. Gleichung (8).

Aus (24) und (32) erhalten wir:

$$\varepsilon_{31} \sim \frac{c'_{13}}{c'_{33}} \sim \frac{B}{A} \left(1 + \frac{c'_{13} - B}{B} - \frac{c'_{33} - A}{A} \right),$$

daher

$$\bar{\varepsilon}_{31} \sim \frac{B}{A} \left(1 + \frac{\bar{c}'_{13} - B}{B} - \frac{\bar{c}'_{33} - A}{A} \right)$$

und nach (41) und (49a)

$$\mathfrak{G}_{13} = \mathfrak{G}_{33} \cdot \bar{\varepsilon}_{31} \sim B \left(1 + \frac{\bar{c}'_{13} - B}{B} \right)$$

oder

$$\mathfrak{G}_{13} \sim \bar{c}'_{13} \dots \dots \dots (49c),$$

woraus sich die 2. Gleichung (8) ergibt.

Weiter gilt nach (24) und (33)

$$\varphi_{11} \sim c'_{11} - \frac{c'_{13}{}^2}{c'_{33}}$$

und aus (49a) und (49c) erhält man leicht

$$\frac{\mathfrak{G}_{13}{}^2}{\mathfrak{G}_{33}} \sim \left(\frac{c'_{13}{}^2}{c'_{33}} \right),$$

woraus nach (43) folgt:

$$\mathfrak{G}_{11} \sim \bar{c}'_{11} \dots \dots \dots (49d)$$

Schließlich ergibt eine andre der Gleichungen (33) zusammen mit (24)

$$\bar{\varphi}_{66} \sim \bar{c}'_{66}$$

und nach (44) gilt

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = \mathfrak{G}_{66} \sim \bar{c}'_{66} \dots \dots \dots (49e)$$

Die Formeln (49d) und (49e) ergeben aufs neue die 1. bzw. 3. Voigtsche Gleichung; außerdem bestätigen sie, daß das Aggregat annähernd isotrop ist. Die Voigtsche Theorie ergibt also eine genügende Annäherung bei kleiner Anisotropie der Kristalle.

Übrigens könnte man eine zweite Theorie aufstellen mit ebenfalls beschränkter Gültigkeit, sozusagen die Antipode der Voigtschen Theorie. Sie ergibt sich, wenn man statt der Gl. (40)–(44) die Gl. (43a) und (44a) samt 3 weiteren Gleichungen in s'_{ik} hinschreibt und die analoge Annäherung ausführt. So erhalten wir z.B. aus (44a):

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12})} = \mathfrak{S}_{66} = \bar{s}'_{66};$$

solche Formeln drücken eine Annahme aus, welche der Voigtschen Annahme diametral gegenüber steht, nämlich daß nicht die Deformationen, sondern die Spannungen stetig durch die Grenzflächen

hindurchgehen. Jede dieser Annahmen enthält 3 richtige und 3 falsche Grenzbedingungen, jede ist annäherungsweise richtig in demselben Fall, nämlich wenn die Kristalle ungefähr isotrop sind.

§ 4. Allgemeines über Prüfungen der Theorie.

Im § 1 dieses Kapitels sind die Annahmen aufgestellt worden, welche zum Aufbau der Theorie dienen. Wir heben 3 dieser Annahmen hervor:

(I) Die Kristallbrocken sind sehr klein, die Materialprobe enthält von ihnen eine sehr große Zahl.

(III) Sie schließen fest aneinander.

(VIa) Alle Achsenorientierungen kommen regellos verteilt und gleich häufig vor.

Diese Annahmen beschränken die exakte Gültigkeit der Theorie sehr stark.

(I) schließt alle grobkörnigen Aggregate aus, und von den feinkörnigen alle diejenigen, wo eine oder die andre Dimension sehr klein ist, also Metalldrähte und -bänder. Sehr große Stäbe würden der Bedingung (I) am besten genügen, sie sind aber für die feineren Experimente unbrauchbar. Bei den verschiedenen kleinen Stäben, die Voigt²⁶⁾ aus demselben Gußstück schneidet, ist die Zahl der Einzelkristalle offenbar ungenügend, jeder Stab hat eigene Werte für die Moduln, deutlich unterschieden von denen der Nachbarstäbe. In einigen Stäben heben sich die Störungen ungefähr auf, sie genügen dem Isotropiekriterium (52), das wir weiter unten ableiten werden; solche Stäbe werden wir in den nächsten Kapiteln wählen zur Prüfung der Theorie.

(III) war sehr schlecht erfüllt bei den dichten Gesteinen der Tabellen A 1 und A 2, an denen Voigt seine Theorie geprüft hat. Für alle Abweichungen von der Annahme (III) benutzen wir im folgenden das Wort „Porosität“. Dieser Begriff umfaßt also den Einfluß der leeren Räume im Aggregat, der eventuellen Bindesubstanz zwischen den Kristallbrocken, der relativen Bewegung der Oberflächen zweier Nachbarkristalle. Ein Maß für die Größe der Porosität gibt die Kompressibilität des Aggregats. Ist die Bedingung (III) genau erfüllt, so ist im regulären System der Kompressionsmodul \mathfrak{K} des Aggregats gleich dem \mathfrak{K} der Kristalle; im regulären System erzeugt ja ein allseitig gleicher Druck eine allseitig gleiche Kompression. Bei den andren Kristallsystemen ist der Zusammenhang nicht so einfach, hier müssen wir zuerst aus

²⁶⁾ W. Voigt, Wied. Ann. 48, S. 674—707, 1893.

den Kristallkonstanten die Elastizitätskonstanten \mathfrak{C} , \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 des Aggregats berechnen, $\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}_1$ ergibt dann den idealen Kompressionsmodul. Hier wie dort müssen wir dieses berechnete \mathfrak{R} vergleichen mit dem empirischen Wert am gemessenen Aggregat. Leider ist so viel ich weiß an keinem Aggregat dessen \mathfrak{C} oder \mathfrak{I} wir kennen, auch das \mathfrak{R} direkt gemessen worden. In den meisten Fällen sind von dem einzelnen Stab nur die eine oder die andere von den Dehnungs- und Torsionsmoduln \mathfrak{C} und \mathfrak{I} gemessen, oder auch beide. Im ersten Fall ist das \mathfrak{R} des Aggregats überhaupt nicht zu berechnen, im zweiten Fall nur bei nachgewiesener Isotropie des Aggregats. Die Untersuchung der Porosität ist daher verknüpft mit der Prüfung der Isotropie, zu welcher wir sogleich übergehen. Ergibt sich das Material als isotrop, so läßt sich aus seinen \mathfrak{C} und \mathfrak{I} der Wert des \mathfrak{R} ausrechnen. Die Formel für die Beziehung zwischen \mathfrak{C} , \mathfrak{I} und \mathfrak{R} wird in der folgenden Weise abgeleitet.

Aus den bekannten Gleichungen für \mathfrak{R} , \mathfrak{I} , \mathfrak{C} und für die Querkontraktion μ des isotropen Mediums:

$$3\mathfrak{R} = \mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}_1$$

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}_1)(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1)}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1}$$

$$\mu = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1}$$

folgt zuerst

$$3\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{C}}{1 - 2\mu} \dots \dots \dots (50)$$

und

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{C}}{2(1 + \mu)} \dots \dots \dots (51)$$

Die Elimination von μ ergibt

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{I}} + \frac{\mathfrak{C}}{3\mathfrak{R}} = 3$$

oder

$$\frac{1}{3\mathfrak{R}} = \frac{3}{\mathfrak{C}} - \frac{1}{\mathfrak{I}} \dots \dots \dots (52)$$

Mit der Formel (52) läßt sich der Kompressionsmodul des Aggregats berechnen und benutzen zur Prüfung der Porosität. Das Resultat ist sehr verschieden.

Beim Flußspat ergibt (52) als Mittelwert der 2 am besten isotropen Aggregate Voigts ²⁷⁾:

$$3R = 19,600 \frac{kg}{mm^2}$$

während die Kristalle ergeben ²⁸⁾

$$3R = 25,850 \frac{kg}{mm^2},$$

die Porosität ist also sehr groß.

Anders verhält sich die Sache bei den gegossenen und den gezogenen Metallstäben. Weder bei den isotropen Aggregaten die in den Kapiteln III und IV untersucht werden, noch bei den anisotropen Aggregaten des Kap. V tritt im allgemeinen eine große Porosität zu Tage. Im allgemeinen wird also die Voigtsche Vermutung ²⁹⁾ bestätigt, daß bei Metallen die Kristalle gut zusammenschließen.

Die Isotropieforderung (VIa) gibt wohl zu den meisten Schwierigkeiten Anlaß.

Zwar gestattet jetzt die Röntgenanalyse einen guten Überblick über die Achsenorientierungen im Aggregat, die schönen Untersuchungen von Voigt und Grüneisen, welche die vollständigsten Daten zur Prüfung unsrer Theorie ergeben ³⁰⁾, stammen aber aus der Zeit vor dem Laueschen Versuch. Die Isotropie muß also in indirekter Weise nachgewiesen werden.

Beide Forscher haben ihre Aufmerksamkeit auf die Isotropie ihres Materials gerichtet. Voigts Messungen beweisen im allgemeinen die Gleichwertigkeit aller Richtungen senkrecht zur Stabsachse; ob diese Richtungen aber auch mit der Stabsachse selbst gleichwertig sind, geht aus den Messungen von \mathcal{E} und \mathcal{I} nicht hervor, und gerade diese Gleichwertigkeit ist weder bei gegossenen noch bei gezogenen Stäben von vornherein gewiß.

Grüneisen prüft sie nach mittels der Gl. (51)

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{2(1 + \mu)}.$$

Mit dieser Formel berechnet er aus den gemessenen Werten \mathcal{E} und \mathcal{I} eine „dynamische“ Querkontraktion μ und vergleicht diese mit der

²⁷⁾ W. Voigt, Wied. Ann. 42, S. 537—548, 1891.

²⁸⁾ aus den Voigtschen Konstanten, Lehrbuch S. 744.

²⁹⁾ W. Voigt, Lehrbuch S. 964.

³⁰⁾ W. Voigt, E. Grüneisen, l. c. bei der Tabelle B 2.

direkt gemessenen „statischen“. Die Formel (51) gilt für isotrope Substanzen, die Übereinstimmung von μ_{dyn} und μ_{stat} ist also ein Kriterium für die Isotropie des Aggregats. Die Resultate haben wir zusammengestellt in der Tabelle C:

C. Isotropie des Grüneisenschen Materials.

Stab	μ_{dyn}	μ_{stat}
Al. I	0,31	0,339
Al. II	0,337	0,334
Cu. IVa	0,356	0,348
Ag.	0,369	0,379
Au. II	0,435	0,42
Stahl	0,287	0,287
Konstantan	0,329	0,325
Manganin	0,329	0,329
Pt. II	0,368	0,387
Cu. VI	0,399	0,337
Au. I	0,495	0,423
Bronze	0,177	0,308
Pd.	0,101	0,393

Platin, Bronze und Palladium sind gegossen, die andern Stäbe gezogen.

In den meisten Fällen ist die Übereinstimmung gut, unterm Strich stehen einige Aggregate, 2 gezogene und 2 gegossene, wo das Material sich sehr anisotrop zeigt; bei Au. I und Bronze war übrigens die Anisotropie schon bei den Messungen selbst hervorgetreten.

Die Isotropieprüfung mittels der Formel (51) ist unmöglich, wenn an der Materialprobe nur 2 elastische Größen gemessen sind. Grüneisen hat bei *Cd*, *Sn*, *Pb*, *Bi* nur \mathfrak{E} und μ gemessen, Voigt an allen Metallstäben nur \mathfrak{E} und \mathfrak{I} .

In diesen Fällen ergeben die Gleichungen (50) bzw. (52) Kriterien für die Isotropie, wenn in irgend einer Weise der Kompressionsmodul der Aggregats bestimmt ist. Dieser folgt bei den regulären Kristallen direkt aus den Kristallkonstanten c_{11} und c_{12} ; in den anderen Systemen müssen erst nach der Theorie dieses Kapitels die \mathfrak{E} und \mathfrak{E}_1 des isotropen Aggregats berechnet werden, daraus folgt dann das \mathfrak{R} , das zur Isotropie gehört. Der so berechnete Wert enthält also die Fehler der Kristall-

konstanten und eventuell der neuen Theorie, außerdem den Einfluß der unbekannten Porosität des betreffenden Materials. Diese Ungewißheiten machen die Entscheidung nach der Formel (50)

$$1 - 2\mu = \frac{3\mathfrak{R}}{\mathfrak{E}}$$

ziemlich illusorisch: $1 - 2\mu$ ist ja von derselben Größenordnung wie μ , die Ungewißheit des \mathfrak{R} kehrt also unverändert zurück in μ .

Anders verhält es sich in den Fällen, wo \mathfrak{E} und \mathfrak{I} bekannt sind. In der Formel (52):

$$\frac{1}{\mathfrak{I}} = \frac{3}{\mathfrak{E}} - \frac{1}{3\mathfrak{R}}$$

ist $\frac{3}{\mathfrak{E}}$ sehr viel größer als $\frac{1}{3\mathfrak{R}}$, eine Ungewißheit von 10 % in \mathfrak{R} bedeutet eine Ungewißheit von 1 bis 2 % in \mathfrak{I} . Wenn wir also mittels (52) aus dem gemessenen \mathfrak{E} des Aggregats das \mathfrak{I} berechnen, wie es bei Isotropie des Stabes sein sollte, und diesen berechneten Wert mit dem gemessenen \mathfrak{I} vergleichen, ergibt die Übereinstimmung dieser 2 Werte ein neues Kriterium für die Isotropie, das dem Grüneisenschen (Gl. (51)) ungefähr gleichwertig ist. Wo diese Kriterien versagen, ist das Material jedenfalls anisotrop. Im III. und IV. Kapitel wird sich herausstellen, daß dies bei vielen Stäben der Fall ist. Dies war von vornherein zu erwarten. Polanyi ³¹⁾ hat die „stark erhöhte Häufigkeit“ von bestimmten Kristallorientierungen bei gezogenen Stäben von *Cu*, *Al*, *Pd* nachgewiesen — die Grüneisenschen Stäbe sind zwar nachträglich gegläht, ein Blick auf die Tabelle C lehrt aber, daß dieses Glühen nicht immer genügt um Isotropie herzustellen. Über derartige „Faserstrukturen“ bei gegossenen Metallstäben habe ich in der Literatur keine Angaben gefunden. Es ist aber, besonders beim vorsichtigen Gießen, wie Voigt es anwendet, nicht unwahrscheinlich, daß die ersten Kristalle, welche sich in der Schmelze bilden, gewisse Vorzugsorientierungen aufweisen in Bezug auf die Vertikale, d. h. die Stabsachse. Derartige spezielle Orientierungen sehen wir ja oft auftreten beim ruhigen Kristallisieren, sowohl an der Oberfläche, z.B. bei Eis und Kochsalz, wie im Innern der Lösung, z.B. bei Alaun. Die meisten gegossenen Stäbe, die Grüneisenschen der Tabelle C wie die Voigtschen der vorhin erwähnten Untersuchung, zeigen deutliche Ungleichwertigkeit der Richtungen parallel und senkrecht zur Stabsachse.

³¹⁾ Polanyi, Z. f. Phys. 17, S. 42—53, 1923.

Im V. Kapitel wird der Versuch gemacht, die elastischen Eigenschaften verschiedener anisotropen Aggregate dadurch zu verstehen, daß wir anstatt der Annahme (Va) die Annahme (V β) des § 1 dieses Kapitels zugrunde legen. Wir untersuchen die Eigenschaften eines lamellären Aggregats, wo in den verschiedenen Lamellen die Achsenorientierungen nicht regellos verteilt sind, sondern einem Verteilungsgesetz gehorchen, bei dem gewisse Orientierungen eine Vorzugsrolle spielen.

Diejenigen Stäbe, die einem der Isotropiekriterien (51) oder (52) ungefähr genügen, bilden das Material zur Prüfung der neuen Theorie für isotrope Aggregate, und zur Vergleichung der neuen Theorie mit der alten. Die Resultate finden sich im III. und IV. Kapitel. Hier sei noch bemerkt, daß die zwei Kriterien notwendige, nicht aber hinreichende Bedingungen für die Isotropie des Aggregats darstellen. Besonders bei den gezogenen regulären Stäben, wo nach Polanyi zwei verschiedene Vorzugsorientierungen zusammen auftreten, kann man sich denken, daß die spezielle Struktur wohl die Werte \mathfrak{G} und \mathfrak{L} , nicht aber den Wert $\frac{3}{\mathfrak{G}} - \frac{1}{\mathfrak{L}}$ merklich ändert, so daß der anisotrope Stab dennoch der Gleichung (52) genügt. Auch hierüber berichtet das V. Kapitel.

III.

UNTERSUCHUNG DES ALLGEMEINEN AGGREGATS HEXAGONALER KRISTALLE.

§ 1. Transformation der c'_{ik} und s'_{ik} .

Wie im § 2 des II. Kapitels bezeichnen wir in der Einzellamelle das raumfeste Koordinatensystem mit XYZ , mit der Z -Achse senkrecht zur Lamellenebene. $X^0 Y^0 Z^0$ sei das System der kristallografischen Hauptachsen, mit der Z^0 -Achse als sechszählige Symmetrieachse. Das Transformationsschema (19) schreiben wir jetzt

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \hline X^0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ Y^0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ Z^0 & \alpha & \beta & \gamma \end{array} \dots \dots \dots (53)$$

lassen also die Indices der $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ fort. Wegen der zylindrischen Symmetrie der elastischen Eigenschaften reduziert sich die Zahl der c_{ik} auf 5: $c_{11}(=c_{22})$, c_{12} , c_{33} , $c_{13}(=c_{23})$ und $c_{44}(=c_{55})$; $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$. Zur Abkürzung schreiben wir für 3 dieser Konstanten:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a \\ c_{13} &= b \\ c_{44} &= c \end{aligned} \dots \dots \dots (54)$$

und für einige oft vorkommende Kombinationen:

$$\begin{aligned} c_{11} - c_{13} - 2c_{44} &= f \\ c_{11} - c_{12} - 2c_{44} &= g \\ c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44} &= h \\ c_{13} + c_{12} &= k \end{aligned} \dots \dots \dots (55)$$

woraus folgt

$$c_{13} - c_{12} = g - f \dots \dots \dots (56)$$

Die Größen $x_x, y_y, z_z, \frac{1}{2}z_y, \frac{1}{2}z_x, \frac{1}{2}x_y$ sind die Komponenten eines symmetrischen Tensors. Hieraus folgen die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x^0_x &= \alpha_1^2 x_x + \beta_1^2 y_y + \gamma_1^2 z_z + \beta_1 \gamma_1 y_z + \gamma_1 \alpha_1 z_x + \alpha_1 \beta_1 x_y \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ y^0_z &= 2\alpha_2 \alpha x_x + 2\beta_2 \beta y_y + 2\gamma_2 \gamma z_z + (\beta_2 \gamma + \beta \gamma_2) y_z + \\ &\quad + (\gamma_2 \alpha + \gamma \alpha_2) z_x + (\alpha_2 \beta + \alpha \beta_2) z_y \dots \dots \dots (57) \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Für die freie Energie reduziert sich Gl. (2) auf:

$$2\xi = c_{11}(x_x^{02} + y_y^{02}) + c_{33}z_z^{02} + 2c_{13}(x_x^0 + y_y^0)z_z^0 + 2c_{12}x_x^0y_y^0 + \\ + c_{44}(y_z^{02} + z_z^{02}) + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})x_y^{02} \dots \dots \dots (58)$$

Führen wir in diese Gleichung die Werte x_x^0 u.s.w. aus (57) ein, so erhalten wir die freie Energie in Bezug auf die Koordinaten XYZ, bestimmt durch eine Gleichung von der allgemeinen Form (2)

$$2\xi = c'_{11}x_x^2 + c'_{22}y_y^2 + c'_{33}z_z^2 + 2c'_{23}y_yz_z + 2c'_{31}z_zx_x + 2c'_{12}x_xy_y + \\ + c'_{44}y_z^2 + c'_{55}z_z^2 + c'_{66}x_y^2 + 2c'_{56}z_zx_y + 2c'_{64}x_yy_z + 2c'_{45}y_zz_x + \\ + 2c'_{14}x_xy_z + 2c'_{25}y_yz_x + 2c'_{36}z_zx_y + \\ + 2c'_{15}x_xz_z + 2c'_{26}y_yx_y + 2c'_{34}z_zy_z + \\ + 2c'_{16}x_xy_y + 2c'_{24}y_yy_z + 2c'_{35}z_zz_x.$$

Hier ist

$$c'_{11} = c_{11}a_1^4 + c_{11}a_2^4 + c_{33}a^4 + 2c_{13}a^2(a_1^2 + a_2^2) + 2c_{12}a_1^2a_2^2 + \\ + 4c_{44}(\gamma_2^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma_1^2) + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\gamma_1^2\gamma_2^2 = \\ = c_{11} - 2a^2(c_{11} - c_{13} - 2c_{44}) + a^4(c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44}).$$

In derselben Weise werden die anderen c'_{ik} abgeleitet, wobei stets Gebrauch gemacht wird von den Identitäten:

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 - a^2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = -a\beta \\ a_1\beta_2 - a_2\beta_1 = \gamma \quad \text{u.s.w.}$$

So erhalten wir die Transformationsformeln, die in abgekürzter Form lauten:

$$\begin{array}{ll} c'_{11} = a - 2fa^2 + ha^4 & c'_{23} = b - (g - f)a^2 + h\beta^2\gamma^2 \\ c'_{22} = a - 2f\beta^2 + h\beta^4 & c'_{31} = b - (g - f)\beta^2 + h\gamma^2a^2 \\ c'_{33} = a - 2f\gamma^2 + h\gamma^4 & c'_{12} = b - (g - f)\gamma^2 + ha^2\beta^2 \\ c'_{44} = c + \frac{1}{2}ga^2 + h\beta^2\gamma^2 & c'_{56} = \beta\gamma(-\frac{1}{2}g + ha^2) \\ c'_{55} = c + \frac{1}{2}g\beta^2 + h\gamma^2a^2 & c'_{64} = \gamma a(-\frac{1}{2}g + h\beta^2) \\ c'_{66} = c + \frac{1}{2}g\gamma^2 + ha^2\beta^2 & c'_{45} = a\beta(-\frac{1}{2}g + h\gamma^2) \\ c'_{14} = \beta\gamma(g - f + ha^2) & c'_{15} = \gamma a(-f + ha^2) \\ c'_{25} = \gamma a(g - f + h\beta^2) & c'_{26} = a\beta(-f + h\beta^2) \\ c'_{36} = a\beta(g - f + h\gamma^2) & c'_{34} = \beta\gamma(-f + h\gamma^2) \\ c'_{16} = a\beta(-f + ha^2) & \\ c'_{24} = \beta\gamma(-f + h\beta^2) & \\ c'_{35} = \gamma a(-f + h\gamma^2) & \dots \dots \dots (59) \end{array}$$

§ 2. Die Koeffizienten der Funktion φ .

Im vorigen Kapitel ist gezeigt worden, daß wir von den Koeffizienten der Funktion φ nur brauchen:

$$\delta_{33} \left(= \frac{\Delta_{33}}{\Delta} \right), \delta_{44} \left(= \frac{\Delta_{44}}{\Delta} \right), \varepsilon_{31} \left(= \frac{E_{31}}{\Delta} \right), \sigma_{11} \left(= \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma} \right), \sigma_{66} \left(= \frac{\Sigma_{66}}{\Sigma} \right).$$

Von den zweireihigen Determinanten benutzen wir also Δ_{33} , Δ_{44} , Σ_{11} und Σ_{66} ; außerdem noch Δ_{34} , Δ_{35} zur Entwicklung der 1. Hauptdeterminante Δ , Σ_{12} und Σ_{16} zur Entwicklung der 2. Hauptdeterminante Σ . Etwas einfacher gestalten sich die Formeln, wenn wir statt Δ_{44} , E_{31} und Σ_{11} , die Summen $\Delta_{44} + \Delta_{55}$, $E_{31} + E_{32}$ und $\Sigma_{11} + \Sigma_{22}$ berechnen und außerdem Σ_{12} zu Hilfe ziehen.

Zuerst berechnen wir die Hauptdeterminante.

Nach (24) und (59) ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - 2f\gamma^2 + h\gamma^4, & \beta\gamma(-f + h\gamma^2), & \gamma a(-f + h\gamma^2) \\ \beta\gamma(-f + h\gamma^2), & c + \frac{1}{2}g\alpha^2 + h\beta^2\gamma^2, & \alpha\beta(-\frac{1}{2}g + h\gamma^2) \\ \gamma a(-f + h\gamma^2), & \alpha\beta(-\frac{1}{2}g + h\gamma^2), & c + \frac{1}{2}g\beta^2 + h\gamma^2\alpha^2 \end{vmatrix} \quad (60)$$

Sodann finden wir aus (30)

$$\begin{aligned} \Delta_{33} &= \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} \{c + h\gamma^2(1 - \gamma^2)\}, \\ \Delta_{44} + \Delta_{55} &= \{2c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} (a - 2f\gamma^2 + h\gamma^4) - (f^2 - ah)\gamma^2(1 - \gamma^2). \end{aligned}$$

Aus (31) folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{35} &= \alpha\gamma \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} (f - h\gamma^2), \\ \Delta_{34} &= \beta\gamma \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} (f - h\gamma^2). \end{aligned}$$

Jetzt können wir Δ entwickeln, und finden

$$\begin{aligned} \Delta &= c'_{33}\Delta_{33} + c'_{34}\Delta_{34} + c'_{35}\Delta_{35} = \\ &= \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} [(a - 2f\gamma^2 + h\gamma^4) \{c + h\gamma^2(1 - \gamma^2)\} - (a^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)(-f + h\gamma^2)], \end{aligned}$$

also

$$\Delta = \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} \{ac - \gamma^2(2cf + f^2 - ah) + \gamma^4(ch + f^2 - ah)\} \quad (61)$$

Wir sehen daß α und β aus der Hauptdeterminante wegfallen.

Wir können also schreiben:

$$\Delta = \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} \delta \quad \dots \quad (62)$$

$$\text{wo } \delta = ac - \gamma^2(2cf + f^2 - ah) + \gamma^4(ch + f^2 - ah) \quad \dots \quad (63)$$

Aus (32), (59) und (55) folgt in derselben Weise

$$E_{31} + E_{32} = \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} [ck + \gamma^2c(g - f) + \gamma^2(1 - \gamma^2)\{(f - h)(g - 2f) + h(c + 2b)\}].$$

Weiter folgt aus (24a) nach einer umständlichen Rechnung:

$$\Sigma = (C + 2G\gamma^2)[AD - B^2 + 2\gamma^2\{A(F - H) + B(G - F)\} + \gamma^4\{AH - (G - F)^2\}] \quad (61a)$$

$$\text{oder } \Sigma = (C + 2G\gamma^2) \sigma. \quad (62a)$$

$$\text{mit } \sigma = AD - B^2 + 2\gamma^2\{A(F - H) + B(G - F)\} + \gamma^4\{AH - (G - F)^2\} \quad (63a)$$

Die zweite Gruppe der Koeffizienten wird so nach einiger Rechnung:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{2A - 2F(1 - \gamma^2) + H(\alpha^4 + \beta^4)}{\sigma} - 8(F^2 - AH) \frac{\alpha^2\beta^2}{(C + 2G\gamma^2)\sigma},$$

$$\sigma_{12} = \frac{-B + (G - F)\gamma^2 + H\alpha^2\beta^2}{\sigma} + 4(F^2 - AH) \frac{\alpha^2\beta^2}{(C + 2G\gamma^2)\sigma},$$

$$\sigma_{66} = \frac{1}{C + 2G\gamma^2} + \frac{H\alpha^2\beta^2}{\sigma} + 4(F^2 - AH) \frac{\alpha^2\beta^2}{(C + 2G\gamma^2)\sigma}.$$

Hieraus entnehmen wir zwei Formeln, deren Mittelung leicht vorzunehmen ist:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\sigma_{12} = \frac{C + 2G\gamma^2 + H(1 - \gamma^2)^2}{\sigma} \quad (67)$$

$$\sigma_{66} - \sigma_{12} = \frac{1}{C + 2G\gamma^2} + \frac{B - (G - F)\gamma^2}{\sigma} \quad (68)$$

Wegen der Beziehungen (36a) und (37a): $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{66} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{12})$ genügen (67) und (68) zur Berechnung der $\bar{\sigma}_{11}$ und $\bar{\sigma}_{66}$; zusammen mit (64), (65) und (66) ergeben sie also die 5 notwendigen Formeln.

Wenn wir (62a) und (63a) vergleichen mit (62) und (63) so sieht man, daß die zwei Hauptdeterminanten Δ und Σ ganz ähnlich sind. Dies war zu erwarten, da die σ_{ik} , welche Σ im Nenner haben, identisch sind mit den σ_{ik} welche Δ im Nenner enthalten. Es muß sich also ergeben, daß die Koeffizienten der Σ denen der Δ proportional sind. Es wird sich lohnen Δ und Σ in den c_{ik} auszudrücken, wodurch die Proportionalität zu Tage tritt; alle 5 Formeln erhalten dann denselben Nenner und die Integration wird erleichtert. Die Zähler der Formeln (67) und (68) sind Funktionen der s_{ik} ; auch diese werden in c_{ik} umgerechnet. Dazu gebrauchen wir die Transformationsformeln für das hexagonale System³²⁾

³²⁾ Vgl. Voigt, Kristallphysik, S 747, wo die c_{ik} in s_{ik} ausgedrückt stehen.

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{\lambda(c_{11} - c_{12})}, \quad s_{12} = -\frac{c_{12}c_{33} - c_{13}^2}{\lambda(c_{11} - c_{12})}, \quad s_{13} = -\frac{c_{13}}{\lambda} \\ s_{33} &= \frac{c_{11} + c_{12}}{\lambda}, \quad s_{44} = \frac{1}{c_{44}} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$$\text{wo } \lambda = c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2 \quad \dots \dots \dots (70)$$

Einerseits ist Δ , nach (61):

$$\Delta = \{c + \frac{1}{2}g(1 - \gamma^2)\} [ac - \gamma^2(2cf + f^2 - ah) + \gamma^4(ch + f^2 - ah)]$$

und wir können nach (54) und (55) schreiben:

$$\Delta = \frac{1}{2}c_{11}c_{44}(c_{11} - c_{12}) (1 - L\gamma^2) (1 - M\gamma^2 + N\gamma^4) \quad \dots \quad (71)$$

$$\text{wo } L = \frac{g}{2c + g} = \frac{c_{11} - c_{12} - 2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}, \quad \dots \dots \dots (72)$$

$$M = \frac{2cf + f^2 - ah}{ac} = \frac{2c_{44}(c_{11} + c_{13}) - c_{11}c_{33} + c_{13}^2}{c_{11}c_{44}}, \quad \dots \quad (73)$$

$$N = \frac{ch + f^2 - ah}{ac} = \frac{c_{44}(c_{11} + c_{33} + 2c_{13}) - c_{11}c_{33} + c_{13}^2}{c_{11}c_{44}}. \quad \dots \quad (74)$$

Andererseits ist Σ , nach (61a):

$$\Sigma = (C + 2G\gamma^2) [AD - B^2 - \gamma^2\{2A(H - F) + 2B(F - G)\} + \gamma^4\{AH - (G - F)^2\},$$

und nach (54a)–(56a) können wir für diese Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Sigma = & \left[s_{44} + \frac{2(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2}s_{44})}{s_{44}} \gamma^2 \right] (s_{11}s_{33} - s_{13}^2) [1 - \\ & - \gamma^2 \frac{2s_{11}(s_{33} - s_{13} - \frac{1}{2}s_{44}) + 2s_{13}(s_{12} - s_{13})}{s_{11}s_{33} - s_{13}^2} + \\ & + \gamma^4 \frac{s_{11}(s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44}) - (s_{13} - s_{12})^2}{s_{11}s_{33} - s_{13}^2}]. \end{aligned}$$

Mittels (69) und (70) bekommen wir hieraus

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{c_{11}}{c_{44}(c_{11} - c_{12})\lambda} \left[1 - \gamma^2 \frac{c_{11} - c_{12} - 2c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \right] \left[1 - \gamma^2 \frac{2c_{44}(c_{11} + c_{13}) - c_{11}c_{33} + c_{13}^2}{c_{11}c_{44}} + \right. \\ & \left. + \gamma^4 \frac{c_{44}(c_{11} + c_{33} + 2c_{13}) - c_{11}c_{33} + c_{13}^2}{c_{11}c_{44}} \right] \end{aligned}$$

oder

$$\Sigma = \frac{c_{11}}{c_{44}(c_{11} - c_{12})\lambda} (1 - L\gamma^2) (1 - M\gamma^2 + N\gamma^4) \quad \dots \quad (71a)$$

Somit ist die Proportionalität der zwei Hauptdeterminanten erwiesen. Der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{\Sigma}{A} = \frac{2}{\lambda(c_{11} - c_{12})^2 c_{44}^2}$; er ist vom Grade -6 in den c_{ik} , wie es für den Quotient zweier dreireihigen Determinanten mit Elementen s'_{ik} und c'_{ik} zu erwarten war.

Dieselben Transformationen (69) ergeben für den Zähler der Formel (67)

$$\begin{aligned} & (C + H) + (2G - H)\gamma^2 - H\gamma^2(1 - \gamma^2) = \\ & = \frac{1}{c_{11}} \left[(c_{11} - c_{12})(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) + c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - \right. \\ & - \gamma^2 \{ (c_{11} - c_{12})(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) - (c_{11} + 2c_{12})c_{33} + 3c_{13}^2 \} - \\ & \left. - \gamma^2(1 - \gamma^2) \left\{ (c_{11} - c_{12})(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) + c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - \frac{\lambda(c_{11} - c_{12})}{c_{44}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung:

$$\varrho = (c_{11} - c_{12})(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) + c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \quad \dots \quad (75)$$

läßt sich die Gleichung (67) nach einiger Rechnung schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\sigma_{12} &= \frac{\varrho}{c_{11}} \cdot \frac{1 - \gamma^2 - \gamma^2(1 - \gamma^2)}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} + \frac{\lambda}{c_{11}} \cdot \frac{2\gamma^2 + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}}\gamma^2(1 - \gamma^2)}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \\ \text{oder } \sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\sigma_{12} &= \frac{1}{c_{11}} \cdot \frac{\varrho + \gamma^2(-\varrho + 2\lambda) + \gamma^2(1 - \gamma^2)\left(-\varrho + 2\lambda + \frac{g\lambda}{c_{44}}\right)}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad (76) \end{aligned}$$

Für den Zähler des zweiten Bruches im letzten Glied der Formel (68) erhalten wir:

$$B - (G - F)\gamma^2 = -\frac{c_{13}}{\lambda} + \gamma^2 \frac{-c_{33}c_{12} + c_{13}(c_{11} - c_{12} + c_{13})}{\lambda(c_{11} - c_{12})}.$$

Mit der Abkürzung:

$$\nu = c_{12}c_{33} - c_{13}(c_{11} - c_{12} + c_{13}) \quad \dots \quad (77)$$

erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\sigma_{66} - \sigma_{12} = \frac{c_{44}}{1 - L\gamma^2} - \frac{1}{c_{11}} \cdot \frac{c_{13}(c_{11} - c_{12}) + \nu\gamma^2}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad \dots \quad (78)$$

Somit ist die Umrechnung vollendet.

§ 3. Die Konstanten der Lamellenaggregate.

Zuerst wollen wir die Formeln hinschreiben für die Konstanten des allgemeinen primären Lamellenaggregats, wie es im § 1 des Kap. II

definiert wurde. Dieses Aggregat ist ein Paket sehr vieler dünnen Lamellen mit allen möglichen Orientierungen des Hauptachsenkreuzes in gleicher Häufigkeit.

Bei den betrachteten Kombinationen der Koeffizienten, $\delta_{44} + \delta_{55}$ u.s.w. fallen die Cosinus α und β der Z^0 -Achse weg; diese Kombinationen behalten also denselben Wert, wenn die Z^0 -Achse der Lamelle sich um die Lamellennormale dreht. Nur wenn der Winkel θ der Z^0 - und Z -Achse sich ändert, ändern sich auch die Größen δ_{33} , $\delta_{44} + \delta_{55}$, $\varepsilon_{31} + \varepsilon_{32}$, $\sigma_{11} + \sigma_{12} + 2\sigma_{12}$ und $\sigma_{66} - \sigma_{12}$. Der Mittelwert $\bar{\delta}_{33}$ ist also

$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \delta_{33} d\varphi = \int_0^1 \delta_{33} d\gamma$; in derselben Weise erhalten wir die andern Mittelwerte. Nach (36) gilt $\bar{\delta}_{44} = \bar{\delta}_{55}$ und $\bar{\varepsilon}_{31} = \bar{\varepsilon}_{32}$, nach (36a) und (37a) $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22}$ und $\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{11} - 2\bar{\sigma}_{66}$. Daraus folgt

$$\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + 2\bar{\sigma}_{12} = 4(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{66}) \quad \dots \quad (79)$$

$$\bar{\sigma}_{66} - \bar{\sigma}_{12} = 3\bar{\sigma}_{66} - \bar{\sigma}_{11} \quad \dots \quad (80)$$

So erhalten wir 5 Gleichungen zur Berechnung der Elastizitätskonstanten des primären Lamellenpakets, nämlich:

Aus (40) und (64) mit (54):

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{c_{11}c_{44}} \int_0^1 d\gamma \frac{c_{44} + h\gamma^2(1 - \gamma^2)}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad \dots \quad (81a)$$

Aus (41) und (65), mit (54) und (56):

$$\frac{2\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{c_{11}c_{44}} \int_0^1 d\gamma \frac{c_{44}(c_{13} + c_{12}) + \gamma^2 c_{44}(c_{13} - c_{12}) + \gamma^2(1 - \gamma^2)[(f - h)(g - 2f) + h(2c_{13} + c_{44})]}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad (81b)$$

Aus (42) und (66), mit (54) und (55):

$$\frac{2}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{1}{c_{44}} + \frac{2}{c_{11} - c_{12}} \int_0^1 \frac{d\gamma}{1 - L\gamma^2} + \frac{f^2 - c_{11}h}{c_{11}c_{44}^2} \int_0^1 d\gamma \frac{\gamma^2(1 - \gamma^2)}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad (81c)$$

Aus (43a), (44a), (79) und (76):

$$2\left(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12} - 2\frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}}\right) = \frac{1}{c_{11}} \int_0^1 d\gamma \frac{\varrho + \gamma^2(-\varrho + 2\lambda) + \gamma^2(1 - \gamma^2)\left(-\varrho + 2\lambda + \frac{g\lambda}{c_{44}}\right)}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad (81d)$$

Aus (43a), (44a), (80) und (78):

$$\frac{1}{2}\mathfrak{G}_{11} - \frac{3}{2}\mathfrak{G}_{12} + \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = c_{44} \int_0^1 \frac{d\gamma}{1 - L\gamma^2} - \frac{1}{c_{11}} \int_0^1 d\gamma \frac{c_{13}(c_{11} - c_{12}) + \gamma\gamma^2}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \quad (81e)$$

In diesen Formeln bedeuten die griechischen Buchstaben Formen zweiten Grades in den c_{ik} :

$$\lambda = c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2, \dots \dots \dots (70)$$

$$\varrho = c_{33}c_{11} - c_{13}^2 + (c_{11} - c_{12})(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}), \dots \dots (75)$$

$$\nu = c_{33}c_{12} - c_{13}(c_{11} - c_{12} + c_{13}), \dots \dots \dots (77)$$

Die kleinen Buchstaben sind Formen ersten Grades:

$$\left. \begin{aligned} f &= c_{11} - c_{13} - 2c_{44} \\ g &= c_{11} - c_{12} - 2c_{44} \\ h &= c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

Die großen Buchstaben sind dimensionslose Zahlen:

$$L = \frac{g}{c_{11} - c_{12}} \dots \dots \dots (72)$$

$$M = \frac{2c_{44}f + f^2 - c_{11}h}{c_{11}c_{44}} \dots \dots \dots (73)$$

$$N = \frac{c_{44}h + f^2 - c_{11}h}{c_{11}c_{44}} \dots \dots \dots (74)$$

Schließlich führen wir für die Integrale noch Abkürzungen ein

$$K = \int_0^1 \frac{d\gamma}{1 - L\gamma^2} \dots \dots \dots (82a)$$

$$P = \int_0^1 \frac{d\gamma}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \dots \dots \dots (82b)$$

$$Q = \int_0^1 \frac{\gamma^2 d\gamma}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \dots \dots \dots (82c)$$

$$R = \int_0^1 \frac{\gamma^2(1 - \gamma^2)d\gamma}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} \dots \dots \dots (82d)$$

wo R sich aus P und Q berechnen läßt nach der Formel:

$$P - (M - N)Q - NR = 1 \dots \dots \dots (83)$$

So erhalten die Gleichungen (81) ihre endgültige Form:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{c_{11}c_{44}} (c_{44}P + hR), \dots \dots \dots (84a)$$

$$\frac{2\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{c_{11}} \left[(c_{13} + c_{12})P + (c_{13} - c_{12})Q + \frac{(f - h)(g - 2f) + h(2c_{13} + c_{44})}{c_{44}} R \right], (84b)$$

$$\frac{2}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{1}{c_{44}} + \frac{2}{c_{11} - c_{12}} K + \frac{(f^2 - c_{11}h)}{c_{11}c_{44}^2} R, \dots \dots (84c)$$

$$2\left(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12} - \frac{2\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}}\right) = \frac{1}{c_{11}} \left[\varrho P + (-\varrho + 2\lambda)Q + \left(-\varrho + 2\lambda + \frac{g\lambda}{c_{44}}\right)R \right] \quad (84d)$$

$$\frac{1}{2}\mathfrak{G}_{11} - \frac{3}{2}\mathfrak{G}_{12} + \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = c_{44}K - \frac{1}{c_{11}} [c_{13}(c_{11} - c_{12})P + \nu Q] \dots \dots (84e)$$

Zur Prüfung der Formeln (84) sei bemerkt, daß sie auch stimmen im Grenzfall, wo die ursprünglichen Kristalle genau isotrop sind, also $c_{11} = c_{33}$, $c_{12} = c_{13}$, $c_{11} - c_{12} = 2c_{44}$. Da werden f , g , h , M , N und ν gleich 0, $\varrho = 2\lambda = 2c_{11}^2 + 2c_{11}c_{12} - 4c_{12}^2 = 2(c_{11} + 2c_{12})(c_{11} - c_{12})$; P und K werden = 1, $Q = \frac{1}{3}$ und $R = \frac{2}{15}$.

Die Formeln (84) ergeben sodann:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{c_{11}}$$

$$\frac{2\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{2c_{12}}{c_{11}}$$

$$\frac{2}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{1}{c_{44}} + \frac{2}{c_{11} - c_{12}} = \frac{2}{c_{44}}$$

$$2\left(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12} - \frac{2\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}}\right) = 2 \frac{c_{11}^2 + c_{11}c_{12} - 2c_{12}^2}{c_{11}}$$

$$\frac{1}{2}\mathfrak{G}_{11} - \frac{3}{2}\mathfrak{G}_{12} + \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = c_{44} - \frac{c_{12}(c_{11} - c_{12})}{c_{11}} = \frac{1}{2}c_{11} - \frac{3}{2}c_{12} + \frac{c_{12}^2}{c_{11}}$$

und das Aggregat hat dieselben Konstanten wie jeder Einzelkristall.

Etwas eingehender ist die Prüfung der Formeln für die Aggregatskonstanten durch die Annahme, daß die Anisotropie des Einkristalls gering ist. Mit Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung müssen sodann die Voigtschen Formeln herauskommen, wie im Kap. II, § 3, nachgewiesen ist. Ich habe die Rechnung durchgeführt an den Gleichungen (81). Es seien $c_{11} - c_{33}$, $c_{12} - c_{13}$ und $c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$ klein gegen alle c_{ik} . Dasselbe gilt dann nach (55) für f und h , nach (70), (75) und (77) für ν und $-\varrho + 2\lambda$, während nach (72)–(74) L , M und N klein sind gegen 1. Mit Vernachlässigung aller Produkte und Potenzen solcher Größen erhalten wir für das primäre Lamellenaggregat nach einiger Rechnung in erster Annäherung

$$\mathfrak{G}_{11} = \mathfrak{G}_{33} = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{3}c_{11} + c_{33} + \frac{4}{3}c_{13} + \frac{8}{3}c_{44}\right) \dots \dots (85a)$$

$$\mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{G}_{13} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}c_{11} + \frac{1}{3}c_{33} + \frac{5}{3}c_{12} + \frac{8}{3}c_{13} - \frac{4}{3}c_{44}\right) \dots (85b)$$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = \mathfrak{G}_{44} = \frac{1}{5}\left(\frac{7}{6}c_{11} + \frac{1}{3}c_{33} - \frac{5}{6}c_{12} - \frac{2}{3}c_{13} + 2c_{44}\right) \dots (85c)$$

und das sind eben die Voigtschen Formeln (8) für das hexagonale System.

Es kommt auch wieder heraus, daß das primäre Aggregat in diesem Fall annähernd isotrop ist.

Es gestaltet sich also die Berechnung der Konstanten eines isotropen Aggregats von hexagonalen Kristallen verschieden:

a. Bei kleiner Anisotropie der Einkristalle werden die Voigtschen Formeln (8) angewandt.

b. Bei größerer Anisotropie wenden wir zuerst die Formeln (84) an; ist das primäre Aggregat sodann nahezu isotrop, so erhalten wir aus den \mathbb{C}_{ik} durch Anwendung der Voigtschen Formeln die Konstanten des isotropen Aggregats.

c. Ist die Anisotropie der Einkristalle sehr groß, so müssen wir auf die \mathbb{C}_{ik} des primären Aggregats noch einmal die Formeln (84) anwenden; auch bei sehr großer Anisotropie der Einkristalle ist das sekundäre Aggregat so wenig anisotrop, daß die Voigtschen Formeln oder auch einfache Mittelungen sodann die Konstanten des isotropen Aggregats liefern.

Die Formeln (84), die in den Fällen b) und c) anstatt der Voigtschen Formeln benutzt werden, sind ziemlich einfach, nur die Berechnung der Integrale K , P und Q ist etwas umständlich. L ist in allen Anwendungen positiv, es folgt da aus (82a)

$$K = \frac{1}{2\sqrt{L}} \log \frac{1 + \sqrt{L}}{1 - \sqrt{L}} \dots \dots \dots (86)$$

Die Integrationen P und Q sind verschieden je nach den Vorzeichen der Diskriminante $M^2 - 4N$, und der Größe N selbst. Ich schreibe nur die Formeln hin, die in den Anwendungen benutzt werden. Durch elementare Integralrechnung erhalten wir:

$$1^0. \text{ falls } M^2 - 4N < 0 \dots \dots \dots (87)$$

$$P = \frac{bgtg \frac{S_1}{1 - \sqrt{N}}}{2S_1} + \frac{\log \frac{1 + \sqrt{N} + T_1}{1 + \sqrt{N} - T_1}}{4T_1}, \dots \dots \dots (88a)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\frac{bgtg \frac{S_1}{1 - \sqrt{N}}}{2S_1} - \frac{\log \frac{1 + \sqrt{N} + T_1}{1 + \sqrt{N} - T_1}}{4T_1} \right], \dots \dots \dots (88b)$$

$$\text{wo } S_1 = \sqrt{2\sqrt{N} - M}, \quad T_1 = \sqrt{2\sqrt{N} + M} \dots \dots \dots (89)$$

$$2^0. \text{ falls } M^2 - 4N > 0, \quad N < 0 \dots \dots \dots (90)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 4N}} \left[S_2 \operatorname{bgtg} S_2 + \frac{1}{2} T_2 \log \frac{1 + T_2}{1 - T_2} \right], \dots \dots (91a)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 4N}} \left[-\frac{\operatorname{bgtg} S_2}{S_2} + \frac{1}{2T_2} \log \frac{1 + T_2}{1 - T_2} \right], \dots \dots (91b)$$

$$\text{wo } S_2 = \sqrt{-\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4N}},$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4N}} \dots \dots \dots (92)$$

§ 4. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Zink.

Beim Zink haben Hull und Davey mittels Röntgenanalyse die Zugehörigkeit zum hexagonalen System nachgewiesen³³⁾.

Nachdem die Herstellung der Einkristallstäbe gelungen war haben zwei verschiedene Forscher die Kristallkonstanten unabhängig von einander bestimmt: Grüneisen und Bridgman³⁴⁾. Leider stimmen ihre Daten ziemlich schlecht überein. Wir sind nicht in der Lage, zu entscheiden, welche Bestimmung die genauere ist; übrigens wird sich zeigen, daß diese Unterschiede die Werte der Aggregatskonstanten ziemlich wenig beeinflussen. Bei den folgenden Ausführungen sind jeweils zwei Zahlenwerte angegeben; der erste bezieht sich auf die Messungen von Grüneisen, der zweite, eingeklammerte, auf die von Bridgman.

Aus den s_{ik} haben wir mittels der Transformationsgleichungen die durch Auflösung der Gleichungen (69) erhalten werden, die c_{ik} bestimmt; daraus $c_{11} - c_{33}$, $c_{13} - c_{12}$ und die Größen f , g und h der Gleichungen (55), welche den Grad der Anisotropie ausdrücken. Das Resultat findet sich in der Tabelle D 1; hier, wie überall im folgenden sind alle Größen in C. G. S. Einheiten geschrieben.

D 1. Kristallkonstanten von Zink.

$s_{11} \cdot 10 + 13 =$	8,0 (8,23)	$c_{11} \cdot 10^{-11} =$	16,08 (15,90)	$(c_{11} - c_{33}) 10^{-11} =$	10,655 (9,685)
$s_{33} \text{ „} =$	28,2 (26,38)	$c_{33} \text{ „} =$	5,424 (6,214)	$(c_{13} - c_{12}) \text{ „} =$	0,065 (1,585)
$s_{12} \text{ „} =$	-0,5 (+0,34)	$c_{12} \text{ „} =$	4,31 (3,23)	$f \text{ „} =$	3,705 (3,085)
$s_{13} \text{ „} =$	-6,05 (-6,64)	$c_{13} \text{ „} =$	4,375 (4,815)	$g \text{ „} =$	3,77 (4,67)
$s_{44} \text{ „} =$	25,0 (25,0)	$c_{44} \text{ „} =$	4,00 (4,00)	$h \text{ „} =$	-3,245 (-3,515)

³³⁾ Hull u. Davey, Phys. Rev. 17, 1921.

³⁴⁾ Grüneisen, Z. f. Ph. 26, S. 235—249, 1924.

Bridgman, Proc. Nat. Ac. of Am. 10, S. 411—415, 1924.

Bridgman, Proc. Am. Ac. 60, S. 306—383, 1925.

Es zeigt sich, daß Zink sehr stark anisotrop ist, die Voigtsche Theorie ist hier also nur eine grobe Annäherung.

Die Rechnung ergibt nach (73) und (74):

$$M = 1,4857(1,4163)$$

$$N = 0,8230(0,8075),$$

und die Diskriminante der Form $1 - M\gamma^2 + N\gamma^4$ hat den Wert:

$$M^2 - 4N = -1,085(-1,224).$$

Die Integrale P und Q werden also berechnet nach den Formeln (88); wir erhalten:

$$P = 1,7415 (1,6361)$$

$$Q = 0,7920 (0,7188).$$

Weiter ergibt (83)

$$R = 0,2167 (0,1985).$$

Aus den Gl. (84) folgt dann:

D 2. Primäres Aggregat von Zink.

$\mathbb{C}_{11} \cdot 10^{-11}$	12,38 (12,67)	$(\mathbb{C}_{11} - \mathbb{C}_{33})10^{-11}$	1,755 (1,47)
\mathbb{C}_{33} „	10,525 (11,20)	$(\mathbb{C}_{13} - \mathbb{C}_{12})$ „	-0,53 (-0,46)
\mathbb{C}_{12} „	4,06 (4,24)	\mathfrak{f} „	1,01 (0,83)
\mathbb{C}_{13} „	3,53 (3,78)	g „	0,48 (0,37)
\mathbb{C}_{44} „	3,92 (4,03)	h „	0,165 (0,19)

Vergleicht man diese Tabelle mit der vorigen, so sieht man, daß in D 2 die Unterschiede der Konstanten nach Grüneisen und Bridgman meistens kleiner sind, als die Unterschiede in D1. Das Aggregat ist noch anisotrop, wenn auch in viel geringerem Maß als der ursprüngliche Kristall. Wir bilden also nach II, § 2 ein sekundäres Lamellenaggregat. Nach II, § 3 würden wir auf die \mathbb{C}_{ik} die Voigtsche Theorie anwenden können, wenn in Tabelle D 2 die Größen der letzten Spalte alle klein wären den \mathbb{C}_{ik} gegenüber. Diese Bedingung ist nicht genügend erfüllt, wir wählen also den sichereren, wenn auch längeren Weg, und wenden noch einmal die Formeln (84) an.

Diesmal erhalten wir

$$M = 0,14207 (0,09737)$$

$$N = -0,00774 (0,01866),$$

also die Diskriminante $M^2 - 4N$ positiv. Für diesen Fall ergeben die Formeln (91) die Zahlen P und Q ; die Bestimmung von R aber mittels (83) ist wegen des kleinen Wertes von N nicht sehr genau.

Für die Berechnung von R (und auch von P und Q) verfahren wir deshalb folgendermaßen:

$$P = \int_0^1 \frac{d\gamma}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} = \int_0^1 \frac{d\gamma}{(1 - S_2^2\gamma^2)(1 + T_2^2\gamma^2)} =$$

$$= \int_0^1 d\gamma (1 + S_2^2\gamma^2 + S_2^4\gamma^4 + \dots) (1 - T_2^2\gamma^2 + T_2^4\gamma^4 - \dots); \quad (93)$$

ähnliche Formeln gelten für Q und R . Wegen der kleinen Werte für S_2 und T_2 lassen sich die Reihen bald abbrechen.

Wir erhalten so:

$$P = 1,0538 \quad (1,0389)$$

$$Q = 0,3664 \quad (0,3574)$$

$$R = 0,1424 \quad (0,1399)$$

welche Werte bei der kleinen Anisotropie nicht allzuweit von den Grenzwerten 1,0000, 0,3333 und 0,1333 liegen, die bei Isotropie auftreten. So erhalten wir die Konstanten \mathfrak{C}_{ik} des sekundären Aggregats:

D 2a. Sekundäres Aggregat von Zink.

$\mathfrak{C}_{11} \cdot 10^{-11}$	11,72 (12,135)
$\mathfrak{C}_{33} \cdot "$	11,685 (12,12)
$\mathfrak{C}_{12} \cdot "$	3,703 (3,935)
$\mathfrak{C}_{13} \cdot "$	3,69 (3,921)
$\mathfrak{C}_{44} \cdot "$	4,005 (4,100)

Die Tabelle zeigt, daß das sekundäre Aggregat kaum merklich anisotrop ist. Es lohnt sich also nicht um noch einmal tertiäre Lamellen zu bilden und nach der Voigtschen Theorie dafür die Konstanten zu berechnen; das Ergebnis ist dasselbe, wenn wir einfach mitteln, also

$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{33}}{3}, \quad \mathfrak{C}_1 = \frac{2\mathfrak{C}_{13} + \mathfrak{C}_{12}}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}_2 = \frac{2\mathfrak{C}_{44} + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{12})}{3} \quad \text{nehmen.}$$

Aus den erhaltenen \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 berechnen wir den Dehnungsmodul:

$$\mathfrak{E} = \frac{(\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}_1)(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1)}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1}$$

während wir wie in (14) für den Torsionsmodul im folgenden \mathfrak{Z} schreiben. Daneben sind die Werte berechnet worden, welche die Voigtsche

Theorie, nach (8), (13) und (14), ergibt, wenn sie auf die sehr anisotropen Zinkkristalle angewandt wird.

D 3. Isotropes Zinkaggregat.

	nach Voigt	neu
$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	12,96 (13,14)	11,71 (12,135)
$\mathfrak{G}_1 \cdot 10^{-11}$	4,135 (4,055)	3,695 (3,925)
$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	10,96 (11,23)	9,94 (10,21)
$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$	4,415 (4,545)	4,005 (4,10)

Wie schon bemerkt worden ist, stimmen die Werte für \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} , welche aus den Grüneisenschen und den Bridgmanschen Konstanten berechnet sind, gut überein; viel größer ist der Unterschied zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Theorie. Die experimentellen Daten für Zinkaggregate können also zur Prüfung der neuen Theorie beitragen.

Die empirischen Werte der \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} sind den Landoltschen Tabellen entnommen und umgerechnet in das C. G. S. System; von den älteren habe ich die Voigtschen hinzugefügt.

D 4. Zinkaggregate (empirisch).

Nummer	Forscher	Material	Temp.	$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
1	Grüneisen	II, gegossen	18°	12,85	—
2a	Voigt	„	—	10,51	3,80
2b	„	„	—	10,03	3,85
2c	„	„	—	9,95	3,62
2d	„	„	—	9,97	3,95
3	—	gewalzt	—	7,3 — 10,4	—
4	Grüneisen	I, gegossen	18°	8,23	—
5	Kikuta	gezogen	25°	—	3,59
6	Koch-Dannecker	Draht	20°	—	3,22
7	Jokibe-Sakai	„	24°	—	3,02
8	Guye-Schapper	„	0°	—	2,38

Die Unterschiede sind auffallend; alle Ursachen für Abweichungen, die wir in II, § 3 besprochen haben, sind wohl im Spiel, daneben noch der Einfluß von Beimischungen. Besonders fallen Abweichungen von

der regellosen Verteilung der Achsenkreuze hier schwer ins Gewicht; wegen der sehr großen Anisotropie der Zinkkristalle werden spezielle Orientierungen ganz andre Werte für \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} aufweisen.

Nach dem Arbeitsplan am Ende des Kap. II untersuchen wir zuerst, ob D 4 isotrope Materialien enthält. Für die Entscheidung kommen nur die Nummern 2a—2d in Betracht; Grüneisen hat ausnahmsweise am Zink nur das \mathfrak{E} gemessen. Am Stab II (unsrer Nummer 1), der aus sehr reinem Zink bestand, waren Poren äußerlich sichtbar, das \mathfrak{E} soll also noch erhöht werden. Grüneisen hob schon in seiner Abhandlung vom J. 1907 den sehr hohen Wert hervor — damals erklärte er die Abweichung von den Voigtschen Werten als mögliche Folge einer andern Zusammensetzung des Materials. Als Grüneisen aber 1924 die Einkristalle von Zink untersuchte, wobei er Stäbe messen konnte, deren Längsrichtung Winkel von 3° bis 88° mit der hexagonalen Hauptachse bildete, ergab sich daß in allen Kristallstäben das \mathfrak{E} kleiner war, als das \mathfrak{E} vom J. 1907. Es scheint also ausgeschlossen, daß der Stab Zn II aus einem isotropen Gemische solcher Kristalle bestehen könne. Im Kapitel V werden wir sehen, daß ein bestimmtes anisotropes Aggregat in der Tat ein \mathfrak{E} ergeben kann, höher als das \mathfrak{E} in irgendeinem Kristall.

Um die Gl. (52) anwenden zu können berechnen wir zuerst den Kompressionsmodul $\mathfrak{R} = \frac{1}{3}(\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}_1)$. Als mögliche Werte erhalten wir aus D 3 nach der alten Theorie

$$3\mathfrak{R} = 21,25 \text{ (21,25)}$$

nach der neuen Theorie

$$3\mathfrak{R} = 19,10 \text{ (19,985)}$$

also jedenfalls

$$3\mathfrak{R} = 20,20 \pm 1,10$$

oder

$$\frac{1}{3\mathfrak{R}} = 0,050 \pm 0,003.$$

Für die Voigtschen Stäbe erhalten wir also aus der Gl. (52): $\frac{1}{\mathfrak{Z}} = \frac{3}{\mathfrak{E}} - \frac{1}{3\mathfrak{R}}$.

D 5. Isotropieprüfung der Zinkstäbe.

Nummer	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ berechnet	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ gemessen
2a	10,51	$4,25 \pm 0,05$	3,80
2b	10,03	$4,01 \pm 0,05$	3,85
2c	9,95	$3,97 \pm 0,05$	3,62
2d	9,97	$3,98 \pm 0,05$	3,95

Gleichgültig ob man die alte oder die neue Theorie, die Grüneisen-schen oder die Bridgmannschen Konstanten zu Grunde legt, in jedem Fall findet man 2a und 2c stark anisotrop, 2b wenig anisotrop, während 2d der Isotropiebedingung sehr gut genügt. Bei der Berechnung ist das Material als porienfrei betrachtet; ist das Material merklich porös, so ist \mathfrak{R} kleiner, das berechnete \mathfrak{Z} fällt also noch größer aus, und 2a, 2b und 2c sind noch deutlicher anisotrop, während bei einem um einige Prozente veränderten \mathfrak{G} , der Stab 2d immer noch die Gl. (52) ziemlich genau erfüllt.

Es erscheint also durchaus erlaubt den Voigtschen Stab 2d an erster Stelle zur Prüfung zu benutzen.

Da erhalten wir:

D 6. Prüfung für isotropes Zink.

	$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
Empirischer Wert	9,97	3,95
Berechneter „ (alte Theorie)	10,96 (11,23)	4,415 (4,545)
„ „ (neue „)	9,94 (10,21)	4,005 (4,105)

Zieht man in Betracht, daß die empirischen Werte wegen der Porosität mehr oder weniger erhöht werden müssen, so ist die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und neuer Theorie wirklich sehr gut.

Die andern Daten der Tabelle D 5 haben meines Erachtens wenig Beweiskraft; so weit sie solche besitzen, unterstützen sie eher die neue, als die alte Theorie.

§ 5. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Cadmium.

Neben Zink ist Cadmium das einzige hexagonale Metall, dessen Kristallkonstanten bis jetzt gemessen worden sind. Die Verhältnisse liegen wie beim Zink, nur noch ungünstiger. Wiederum liegen Messungen von Grüneisen und Bridgman vor. Ihre s_{ik} stimmen besser überein, aber die Abweichungen bei s_{33} und s_{11} haben dasselbe Vorzeichen; während beim Zink die Unterschiede in \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} sich teilweise aufheben, werden sie hier vergrößert; außerdem tritt hier ein Unterschied in s_{44} auf. Das Resultat ist 10 % Unterschied zwischen den Werten von \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} nach Grüneisen und Bridgman. Die Rechnungen laufen parallel mit denen beim Zink; nur findet man bei den Bridgmannschen Zahlen $N = 0,01067$, also die Diskriminante $M^2 - 4N$ positiv. Für

P und Q kann man hier die Formeln (91) anwenden, wegen des kleinen Wertes für N läßt sich aber R nicht aus (83) berechnen. Wir müssen also einen andern Weg wählen. Bei der Zerlegung

$\frac{1}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} = \frac{1}{(1 + S^2\gamma^2)(1 - T^2\gamma^2)}$ ist $S^2 = -\frac{1}{2}M + \sqrt{M^2 - 4N}$, sehr klein ($+0,0182$); mit einem Fehler unter $0,003$ kann man also schreiben

$$\frac{1}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4} = \frac{1 - S^2\gamma^2}{1 - T^2\gamma^2}$$

und die Rechnung gibt:

$$P = \frac{S^2}{T^2} + \frac{T^2 - S^2}{T^2} U \dots \dots \dots (93a)$$

$$Q = \frac{1}{3} \frac{S^2}{T^2} + \frac{T^2 - S^2}{T^4} (-1 + U) \dots \dots \dots (93b)$$

$$R = \frac{1}{5} \frac{S^2}{T^2} - \frac{T^2 - S^2}{T^6} (-\frac{1}{3}T^2 - 1 + U) \dots \dots (93c)$$

$$\text{wo } U = \int_0^1 \frac{d\gamma}{1 - T^2\gamma^2} = \frac{1}{2T} \log \frac{1+T}{1-T} \text{ ist. } \dots \dots (93d)$$

Die Tabelle:

E. 1. Kristallkonstanten von Cadmium.

$s_{11} \cdot 10^{13}$	12,3 (12,9)	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	12,06 (10,92)	$(c_{11} - c_{33}) \cdot 10^{-11}$	6,924 (6,316)
s_{33} „	35,5 (36,9)	c_{33} „	5,136 (4,604)	$(c_{13} - c_{12})$ „	-0,397 (-0,224)
s_{12} „	-1,5 (-1,5)	c_{12} „	4,82 (3,98)	f „	3,933 (4,040)
s_{13} „	-9,3 (-9,3)	c_{13} „	4,423 (3,756)	g „	3,536 (3,816)
s_{44} „	54,0 (64,0)	c_{44} „	1,852 (1,562)	h „	0,942 (1,764)

wo wie vorher die ersten Zahlen von Grüneisen³⁵⁾, die zweiten von Bridgman herrühren³⁵⁾, zeigt wiederum sehr große Anisotropie. Die Rechnung liefert:

E 2. Primäres Aggregat von Cadmium.

$\mathfrak{G}_{11} \cdot 10^{-11}$	9,225 (8,215)	$(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{13}) \cdot 10^{-11}$	1,085 (1,01)
\mathfrak{G}_{33} „	8,14 (7,205)	$(\mathfrak{G}_{13} - \mathfrak{G}_{12})$ „	-0,405 (-0,38)
\mathfrak{G}_{12} „	4,535 (3,925)	f „	0,655 (0,63)
\mathfrak{G}_{13} „	4,13 (3,545)	g „	0,25 (0,25)
\mathfrak{G}_{44} „	2,22 (2,02)	h „	0,225 (0,25)
$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12})$ „	2,345 (2,145)		

³⁵⁾ l. c. beim Zink (III, § 5).

Wiederum ist die Voigtsche Annäherung wahrscheinlich, aber nicht ganz sicher erlaubt, wir wollen also weiter rechnen, und finden

E 2a. Sekundäres Aggregat von Cadmium.

$\mathfrak{C}_{11} \cdot 10^{-11}$	8,818 (7,831)
\mathfrak{C}_{33} „	8,802 (7,815)
\mathfrak{C}_{12} „	4,267 (3,677)
\mathfrak{C}_{13} „	4,263 (3,672)
\mathfrak{C}_{44} „	2,27 (2,075)

Daraus folgt schließlich

E 3. Isotropes Cadmium.

	nach Voigt	neu
$\mathfrak{C} \cdot 10^{-11}$	9,625 (8,58)	8,81 (7,825)
\mathfrak{C}_1 „	4,62 (3,95)	4,265 (3,675)
\mathfrak{C} „	6,63 (6,09)	6,025 (5,475)
\mathfrak{Z} „	2,50 (2,32)	2,27 (2,07)

Hier ist der Unterschied zwischen den Grüneisenschen und Bridgmannschen Werten von derselben Größenordnung, wie der zwischen den Ergebnissen der beiden Theorien; die alten Werte nach Bridgman stimmen fast überein mit den neuen nach Grüneisen. Auch die empirischen Daten liegen weit auseinander:

E 4. Cadmiumaggregate (empirisch).

Nummer	Forscher	Material	Temp.	$\mathfrak{C} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
1a	Voigt	gegossen	—	6,94	2,42
1b	„	„	—	7,06	2,42
1c	„	„	—	6,94	2,42
1d	„	„	—	6,78	2,41
2	Grüneisen	„	18°	5,00	1,93 ³⁸⁾
3	Koch	Draht	20°	—	2,26

³⁸⁾ aus \mathfrak{C} und μ unter Voraussetzung der Isotropie mit Gl. (51) berechnet.

Die Isotropieprüfung wird ausgeführt wie beim Zink, und jetzt auch auf den Grüneisenschen Stab angewandt. Wir erhalten aus E 3:

nach der alten Theorie

$$3\mathfrak{R} = 18,865 \text{ (16,48)}$$

nach der neuen Theorie

$$3\mathfrak{R} = 17,34 \text{ (15,175)}$$

also jedenfalls

$$3\mathfrak{R} = 17 \pm 1,90$$

oder

$$\frac{1}{3\mathfrak{R}} = 0,060 \pm 0,007.$$

Daraus folgt mittels der Gleichung (52):

E 5. Isotropieprüfung der Cadmiumstäbe.

Nummer	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$ berechnet	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$ gemessen
1a	6,94	$2,69 \pm 0,05$	2,42
1b	7,06	$2,74 \pm 0,05$	2,42
1c	6,94	$2,69 \pm 0,05$	2,42
1d	6,78	$2,62 \pm 0,05$	2,41
2	5,00	$1,86 \pm 0,03$	1,93

Diesmal ist die Übereinstimmung schlecht bei den Voigtschen Stäben, ziemlich gut bei dem Grüneisenschen Stab. Bei der Berechnung ist \mathfrak{R} genommen für porienfreies Cadmium; Porosität würde das berechnete \mathfrak{E} wiederum vergrößern, also die erste Übereinstimmung noch schlechter, die zweite noch besser machen. Außerdem scheint eine spezielle Orientierung der Kristalle beim Voigtschen Cadmium nicht unwahrscheinlich. Cadmium zeigt beim Erstarren eine starke Kontraktion; um Poren zu vermeiden hat Voigt daher beim Gießen das Metall unten langsam erstarren lassen, während es oben flüssig gehalten wurde³⁷⁾. Hier liegen also die Verhältnisse günstig für eine spezielle Orientierung der Kristalle.

Grüneisen berichtet nichts über derartige Maßnahmen, hier kann man daher eine schnellere Erstarrung mit nahezu allgemeiner Orientierung vermuten, wobei dann wegen der erwähnten Kontraktion möglicherweise Poren, vielleicht gar Kanälchen in der Stabsachse auf-

³⁷⁾ Voigt, Wied. Ann. 48, 1893, S. 677.

treten könnten. Falls der von Grüneisen benutzte Stab noch bei der Phys.-Techn. Reichsanstalt aufbewahrt wird, könnte die Vermutung über seine isotrope Struktur noch nachgeprüft werden. Für die Prüfung der neuen Theorie kommt jedenfalls nur Stab 2 in Betracht.

E 6. Prüfung für isotropes Cadmium.

	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{L} \cdot 10^{-11}$
Emp. Wert	5,00	1,93
Alte Theorie	6,63 (6,09)	2,50 (2,32)
Neue „	6,025 (5,475)	2,27 (2,07)

Die Tabelle E 6 zeigt, daß auch hier die neue Theorie erheblich besser stimmt als die alte; ist die Vermutung über die Porosität der Grüneisenschen Stäbe richtig, so sollten beide empirische Zahlen erhöht werden, das \mathfrak{E} wegen der axialen Höhlung wohl am meisten — vollständige Übereinstimmung zwischen Erfahrung und neuer Theorie ist also nicht ausgeschlossen.

IV. UNTERSUCHUNG DES ALLGEMEINEN AGGREGATS REGULÄRER KRISTALLE.

§ 1. Transformation der c'_{ik} .

Wir betrachten jetzt ein primäres Lamellenaggregat von regulärer Symmetrie. Die Transformationsformeln der c'_{ik} sind den Formeln (59) im hexagonalen System ähnlich, nur sind sie einfacher. Das Transformationsschema sei jetzt:

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \hline X^0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ Y^0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ Z^0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \dots \dots \dots (94)$$

Die Z^0 -Achse hat nicht, wie im vorigen Kapitel, eine ausgezeichnete Bedeutung, sie ist gleichwertig mit den beiden anderen Hauptachsen. Wohl ist die Z -Achse nach wie vor senkrecht zur Lamellenebene. Es läßt sich also erwarten, daß in den Formeln für die Aggregatskonstanten statt des einzelnen γ der Formeln (81) die 3 Cosinus γ_1 , γ_2 und γ_3 gleichwertig auftreten werden. In der Tat treten 2 Kombinationen auf, die gegen Vertauschungen der γ_i invariant sind:

$$\psi = \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \dots \dots \dots (95)$$

$$\chi = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \dots \dots \dots (96)$$

Wir führen Abkürzungen ein analog denen im III. Kap.:

$$c_{11} = a,$$

$$c_{44} = c \dots \dots \dots (97)$$

und

$$c_{11} - c_{12} - 2c_{44} = f \dots \dots \dots (98)$$

wo f jetzt allein ein Maß ist für die Anisotropie des Kristalls, und wollen a , c und f als unabhängige elastische Konstanten benutzen. In derselben Weise wie im III. Kap. erhalten wir für die elastischen

Konstanten c'_{ik} der willkürlichen Lamelle, bestimmt im Bezug auf das raumfeste Achsenkreuz XYZ , die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
 c'_{11} &= a - f + f \Sigma a_i^4 & c'_{23} &= (a - 2c - f) + f \Sigma \beta_i^2 \gamma_i^2 \\
 c'_{22} &= a - f + f \Sigma \beta_i^4 & c'_{31} &= (a - 2c - f) + f \Sigma \gamma_i^2 a_i^2 \\
 c'_{33} &= a - f + f \Sigma \gamma_i^4 & c'_{12} &= (a - 2c - f) + f \Sigma a_i^2 \beta_i^2 \\
 c'_{44} &= c + f \Sigma \beta_i^2 \gamma_i^2 & c'_{14} &= c'_{56} = f \Sigma a_i^2 \beta_i \gamma_i \\
 c'_{55} &= c + f \Sigma \gamma_i^2 a_i^2 & c'_{25} &= c'_{64} = f \Sigma \beta_i^2 \gamma_i a_i \\
 c'_{66} &= c + f \Sigma a_i^2 \beta_i^2 & c'_{36} &= c'_{45} = f \Sigma \gamma_i^2 a_i \beta_i \\
 c'_{15} &= f \Sigma a_i^3 \gamma_i & c'_{16} &= \Sigma a_i^3 \beta_i \\
 c'_{26} &= f \Sigma \beta_i^3 a_i & c'_{24} &= \Sigma \beta_i^3 \gamma_i \\
 c'_{34} &= f \Sigma \gamma_i^3 \beta_i & c'_{35} &= \Sigma \gamma_i^3 a_i \dots \dots \dots (99)
 \end{aligned}$$

Für die s'_{ik} könnten wir analoge Formeln hinschreiben. Im nächsten § wird sich aber ergeben, daß wir nur eine der Funktionen φ_{ik} der Formeln (34), nämlich das φ_{66} brauchen werden, außerdem ist die vierreihige Determinante im Zähler des φ_{66} ziemlich einfach. Es lohnt sich daher nicht, die ganze Rechnung in den s'_{ik} durchzuführen.

§ 2. Die Konstanten des Lamellenaggregats.

Für das allgemeine primäre Lamellenaggregat gilt nach wie vor die Formel (38):

$$\begin{aligned}
 2\bar{\varphi} &= -\bar{\delta}_{33} Z_z^2 - \bar{\delta}_{44} (Z_y^2 + Z_x^2) + \bar{\varphi}_{11} (x_x + y_y)^2 + \\
 &+ \bar{\varphi}_{66} (x_y^2 - 4x_x y_y) + 2\bar{\varepsilon}_{31} Z_z (x_x + y_y).
 \end{aligned}$$

Das Aggregat hat wiederum axiale Symmetrie, die Konstanten werden bestimmt durch die Gl. (40)–(44):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mathbb{G}_{33}} &= \bar{\delta}_{33}, & \mathbb{G}_{11} - \frac{\mathbb{G}_{13}^2}{\mathbb{G}_{33}} &= \bar{\varphi}_{11}, \\
 \frac{1}{\mathbb{G}_{44}} &= \bar{\delta}_{44}, & \frac{1}{2}(\mathbb{G}_{11} - \mathbb{G}_{12}) &= \bar{\varphi}_{66}, \\
 \frac{\mathbb{G}_{13}}{\mathbb{G}_{33}} &= \bar{\varepsilon}_{31},
 \end{aligned}$$

Die 5 Aggregatskonstanten sind jedoch jetzt nicht von einander unabhängig, sie hängen ja alle von den 3 Kristallkonstanten a , c und f ab. Es müssen also zwischen den \mathbb{G}_{ik} noch Beziehungen bestehen. Solche folgen sogleich aus der Kompressionsbedingung, von der schon in II, § 3

die Rede war. Allseitig gleicher Druck P erzeugt bei regulären Kristallen eine gleichförmige Kompression p , der Kompressionsmodul $\mathfrak{K} = \frac{P}{3p}$ ist bestimmt durch:

$$3\mathfrak{K} = c_{11} + 2c_{12}, \quad \dots \quad (100)$$

also nach (97) und (98)

$$3\mathfrak{K} = 3a - 4c - 2f, \quad \dots \quad (101)$$

Für das axiale primäre Aggregat gilt nach den Hookeschen Gleichungen

$$P = (\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{12} + \mathfrak{C}_{13})p$$

und

$$P = (2\mathfrak{C}_{13} + \mathfrak{C}_{33})p$$

und wir erhalten:

$$\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{12} + \mathfrak{C}_{13} = 3\mathfrak{K}, \quad \dots \quad (102)$$

$$2\mathfrak{C}_{13} + \mathfrak{C}_{33} = 3\mathfrak{K}, \quad \dots \quad (103)$$

Somit bleiben zu berechnen übrig \mathfrak{C}_{33} , \mathfrak{C}_{44} und $\mathfrak{C}_{66} = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{12})$. Die Rechnung ergibt ziemlich leicht:

$$\Delta_{33} = c^2 + 2\psi cf + 3\chi f^2, \quad \dots \quad (104a)$$

$$\Delta_{44} + \Delta_{55} = 2c(a-f) + f(a-f)\Sigma\gamma_i^2(1-\gamma_i^2) + 2cf\Sigma\gamma_i^4 + f^2\Sigma\gamma_k^2\gamma_l^2(1-\gamma_i^2) \quad (104b)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{66} = c\Delta + f[\{ ac^2 + f(a-c-f)(2\psi c + \chi f) \} \Sigma a_i^2\beta_i^2 + \\ + cf(a-c-f)\Sigma a_i^2\beta_i^2\gamma_i^4 - cf(a-f)\Sigma a_i^2\beta_i^2\gamma_i^2 + cf^2\Sigma a_i^2\beta_i^2\gamma_k^2\gamma_l^2 + \\ + 2f^2(a-c-f) \{ c\Sigma a_k\beta_k a_l\beta_l\gamma_k^2\gamma_l^2 + \chi f\Sigma a_k\beta_k a_l\beta_l \}]. \quad (104c) \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist $i \neq k \neq l$, Σ drückt eine Summation über 3 Glieder aus. Δ bedeutet wie immer die Hauptdeterminante (24), sie hat hier folgenden nur von den γ_i abhängigen Wert:

$$\Delta = ac^2 + \psi cf(2a - 2c - f) + \chi f^2(3a - 3c - 2f) \quad \dots \quad (105)$$

Die Mittelung wird auch hier zuerst ausgeführt über alle Lamellen mit gleichen γ_i . Dabei benutzen wir die Formeln:

$$\begin{aligned} \overline{a_i^2\beta_i^2} &= \frac{1}{8}(1 - \gamma_i^2)^2, \\ \overline{a_k\beta_k a_l\beta_l} &= \frac{1}{8}(-\gamma_i^2 + \gamma_k^2\gamma_l^2) \quad \dots \quad (106) \end{aligned}$$

während aus den Definitionen von ψ und χ , (95) und (96), folgt:

$$\begin{aligned}\Sigma \gamma_i^4 &= 1 - 2\psi, \\ \Sigma \gamma_i^6 &= 1 - 3\psi + 3\chi, \\ \Sigma \gamma_i^8 &= 1 - 4\psi + 4\chi + 2\psi^2, \\ \Sigma \gamma_i^4 \gamma_k^2 \gamma_l^2 &= \chi, \\ \Sigma \gamma_k^4 \gamma_l^4 &= \psi^2 - 2\chi \dots \dots \dots (107)\end{aligned}$$

So erhalten wir Mittelwerte für δ_{33} , δ_{44} und φ_{66} , genommen über alle Lamellen mit denselben γ_i , wobei Δ nach (105) einen festen Wert aufweist. Nachher muß dann integriert werden über alle Richtungen der Lamellennormale im System $X^0Y^0Z^0$. Wir schreiben für das Flächenelement der Einheitskugel $d\sigma$ und erhalten dann

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{c^2 + 2\psi cf + 3\chi f^2}{\Delta} d\sigma \dots \dots \dots (108a)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ac + \psi f(a - 2c - \frac{1}{2}f) - \frac{3}{2}\chi f^2}{\Delta} d\sigma \dots \dots (108b)$$

$$\mathfrak{G}_{66} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = c + \frac{1}{8}cf \cdot \frac{1}{4\pi} \int \frac{2c(a - \psi a - 4\chi f) + f(3a - 4c - 2f)(\psi - 5\chi)}{\Delta} d\sigma \dots \dots (108c)$$

Zwischen den Gl. (108a)–(108c) besteht noch eine einfache Beziehung die hervortritt wenn man für Δ die Form (105) einführt und die 3 Gleichungen (108) bzw. mit $a(3a - 2f)$, $4c(2c + f)$ und -8 multipliziert. Addition ergibt sodann:

$$\frac{a(3a - 2f)}{\mathfrak{G}_{33}} + \frac{4c(2c + f)}{\mathfrak{G}_{44}} - 4(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = 3a \dots \dots (109)$$

Die Gl. (108) und (109) gelten auch für jedes spezielle Aggregat mit festen Werten von ψ und χ , nur fallen aus den Formeln (108) die Faktoren $\frac{1}{4\pi}$, die Integralzeichen und $d\sigma$ fort; bei der Behandlung der speziellen Aggregate im V. Kap. werden wir die so vereinfachten Gleichungen benutzen.

Jetzt kehren wir zum allgemeinen Aggregat zurück. (109) tritt an die Stelle der Gl. (108c), es bleiben also noch die Integrale (108a) und (108b) zu berechnen übrig. Wir schreiben:

$$\frac{f(2a - 2c - f)}{ac} = M \dots \dots \dots (110a)$$

$$\frac{f^2(3a - 3c - 2f)}{ac^2} = N \dots \dots \dots (110b)$$

und setzen:

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{1 + M\psi + N\chi} = J \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (111a)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi d\sigma}{1 + M\psi + N\chi} = L \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (111b)$$

Das dritte Integral, das zu den Integralen der Formeln (108) beiträgt, nämlich $\int \frac{\chi d\sigma}{1 + M\psi + N\chi}$, läßt sich ausdrücken in J und L mittels der Formel:

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\chi d\sigma}{1 + M\psi + N\chi} = \frac{1}{N} (1 - J - ML) \cdot \cdot \cdot (112)$$

So erhalten die Gleichungen für die Konstanten des primären Aggregats ihre endgültige Form:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{3ac - Jc(3c + 2f) - Lf^2}{ac(3a - 3c - 2f)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (113a)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{-3ac^2 + Jac(6a - 3c - 4f) + Lf[af + 2(a - c - f)(3a - 3c - f)]}{2ac^2(3a - 3c - 2f)} \quad (113b)$$

zusammen mit

$$4(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = -3a + \frac{a(3a - 2f)}{\mathfrak{G}_{33}} + \frac{4c(2c + f)}{\mathfrak{G}_{44}} \cdot \cdot (113c)$$

$$2\mathfrak{G}_{13} = 3a - 4c - 2f - \mathfrak{G}_{33} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (113d)$$

$$2(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}) = 3a - 4c - 2f + \mathfrak{G}_{33} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (113e)$$

die aus (109), (101), (102) und (103) folgen.

Die Formeln sind beträchtlich einfacher als die analogen Gleichungen (84) des hexagonalen Systems; die Berechnung der Integrale J und L ist hier aber viel umständlicher als die der P und Q im Kap. III.

Für die Bestimmung der J und L gehen wir aus von den Formeln:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2p} \varphi \cos^{2q} \varphi d\varphi = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1(2q-1)(2q-3)\dots 1 \cdot \pi}{(p+q)(p+q-1)\dots\dots\dots 1 \cdot 2^{p+q-1}}$$

und

$$\int_0^\pi \sin^{2p+1} \theta \cos^{2q} \theta d\theta = \frac{p(p-1)\dots\dots\dots 1 \cdot 2^{p+1}}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)\dots\dots(2q+1)},$$

die aus der elementaren Integralrechnung folgen.

Aus diesen Formeln lassen sich endliche Reihen ableiten für

$$\frac{1}{4\pi} \int \psi^i d\sigma, \frac{1}{4\pi} \int \psi^i \chi d\sigma, \frac{1}{4\pi} \int \psi^i \chi^2 d\sigma, \text{ u.s.w.}$$

Hierbei schwankt das ψ im Integrationsgebiet zwischen 0 und $\frac{1}{3}$ mit dem Mittelwert $\frac{1}{6}$, das χ schwankt zwischen 0 und $\frac{1}{27}$ mit dem Mittelwert $\frac{1}{108}$.

Bei den Kristallen, deren Anisotropie f nicht allzu groß ist gegen a und c , sind nach (110) M und N klein gegen 1. Hier können wir

für $\frac{1}{1 + M\psi + N\chi}$ schreiben

$$1 - (M\psi + N\chi) + (M\psi + N\chi)^2 - \dots$$

und mit großer Annäherung die Reihe schnell abbrechen. Ist die Anisotropie aber größer, wie beim Gold und besonders beim Messing, so werden M und N groß, bei Messing ist z.B. $M = -2,956$. In der obigen Reihe kann daher $M\psi$ in einzelnen Kristallen nahezu den Wert 1 erreichen und sein Mittelwert ist ungefähr 0,6, die Reihe ist also unbrauchbar.

Wir führen darum ein:

$$p = \frac{1}{6} - \psi \dots \dots \dots (114a)$$

$$q = \frac{1}{54} - \chi \dots \dots \dots (114b)$$

wo p in absolutem Wert nie $\frac{1}{6}$, q nie $\frac{1}{54}$ übertrifft, und schreiben:

$$\frac{1}{1 + M\psi + N\chi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N - Mp - Nq} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N} \cdot \frac{1}{1 - M'p - N'q}$$

Sodann erhalten wir:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{1 + M\psi + N\chi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N} [1 + M'P_1 + M'^2P_2 + M'^3P_3 + \dots + N'Q_0 + 2M'N'Q_1 + 3M'^2N'Q_2 + \dots + N'^2R_0 + 3M'N'^2R_1 + 6M'^2N'^2R_2 + \dots + \dots] \quad (115)$$

In dieser Reihe, die beim Messing nach rechts und nach unten bis zum 8. Glied inkl. fortgesetzt werden muß, bedeutet

$$P_i = \frac{1}{4\pi} \int p^i d\sigma \dots \dots \dots (116a)$$

$$Q_i = \frac{1}{4\pi} \int p^i q d\sigma \dots \dots \dots (116b)$$

$$R_i = \frac{1}{4\pi} \int p^i q^2 d\sigma \dots \dots \dots (116c)$$

u.s.w.

$$M' = \frac{M}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (117a)$$

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (117b)$$

Die P_i u.s.w. sind feste Zahlen, die Berechnung ist ziemlich zeitraubend. In der Tabelle *F* gebe ich diese Zahlen so weit sie beim Messing benutzt werden:

F. Hilfsintegrale bei regulären Kristallen.

$P_0 = +1$	$Q_0 = 8,9947 \cdot 10^{-3}$	$R_0 = 1,9000 \cdot 10^{-4}$	$S_0 = 2,497 \cdot 10^{-6}$
$P_1 = -3,3333 \cdot 10^{-2}$	$Q_1 = 3,928 \cdot 10^{-4}$	$R_1 = 5,1 \cdot 10^{-7}$	$S_1 = 1,385 \cdot 10^{-7}$
$P_2 = +8,730 \cdot 10^{-3}$	$Q_2 = 3,031 \cdot 10^{-5}$	$R_2 = 1,617 \cdot 10^{-6}$	$S_2 = 1,82 \cdot 10^{-8}$
$P_3 = -4,16 \cdot 10^{-4}$	$Q_3 = 9,71 \cdot 10^{-6}$	$R_3 = 1,0 \cdot 10^{-8}$	$S_3 = 4,06 \cdot 10^{-9}$
$P_4 = +1,348 \cdot 10^{-4}$	$Q_4 = 4 \cdot 10^{-8}$	$R_4 = 2,65 \cdot 10^{-8}$	$S_4 = 3,9 \cdot 10^{-10}$
$P_5 = -6,8 \cdot 10^{-6}$	$Q_5 = 2,0 \cdot 10^{-7}$	$R_5 = -1,0 \cdot 10^{-9}$	$T_0 = 5,135 \cdot 10^{-8}$
$P_6 = +2,57 \cdot 10^{-6}$	$Q_6 = -1,1 \cdot 10^{-8}$	$U_0 = 7,5 \cdot 10^{-10}$	$T_1 = 2,07 \cdot 10^{-9}$
$P_7 = -1,3 \cdot 10^{-7}$	$V_0 = 1,9 \cdot 10^{-11}$	$U_1 = 9,6 \cdot 10^{-11}$	$T_2 = 8,53 \cdot 10^{-10}$
$W_0 = 6 \cdot 10^{-13}$	$V_1 = 2,4 \cdot 10^{-12}$	$U_2 = 2,3 \cdot 10^{-11}$	$T_3 = 4,11 \cdot 10^{-10}$

In der Gl. (115) werden die Daten dieser Tabelle und die besonderen Werte der Größen M , N , M' , N' für jedes einzelne Metall eingeführt; so erhält man den hinzugehörigen Wert von J .

Für L gilt:

$$L = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi d\sigma}{1 + M\psi + N\chi} = \frac{1}{6}J - \frac{1}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N} \cdot \frac{1}{4\pi} \int \frac{p d\sigma}{1 - M'p - N'q},$$

also

$$L = \frac{1}{6}J - \frac{1}{1 + \frac{1}{6}M + \frac{1}{54}N} [P_1 + M'P_2 + M'^2P_3 + M'^3P_4 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + N'Q_1 + 2M'N'Q_2 + 3M'^2N'Q_3 + 4M'^3N'Q_4 + \cdot \cdot \cdot + N'^2R_1 + 3M'N'^2R_2 + 6M'^2N'^2R_3 + 10M'^3N'^2R_4 + \cdot \cdot \cdot + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot] \quad (118)$$

woraus L berechnet wird.

Die Formeln für die Konstanten des primären Aggregats müssen für kleine Anisotropie die Voigtschen Formeln als 1. Annäherung ergeben. Dies ergibt wiederum, wie im III. Kap., eine Prüfung der erhaltenen Formeln.

Wir gehen aus von (108a) und (108b) zusammen mit (113c, d, e).

Das f wird klein, Potenzen von f werden vernachlässigt, es wird also annähernd:

$$M = \frac{2f(a-c)}{ac},$$

$$N = 0.$$

Nach (108a) gilt:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{ac^2} \int (c^2 + 2\psi cf) (1 - M\psi) \frac{d\sigma}{4\pi} = \frac{1}{ac^2} \int [c^2 + \psi(2cf - c^2M)] \frac{d\sigma}{4\pi},$$

also

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{f}{a} \right)$$

und

$$\mathfrak{G}_{33} = a \left(1 - \frac{2}{5} \frac{f}{a} \right) = a - \frac{2}{5} f \dots \dots \dots (119a)$$

Nach (108b) gilt:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{1}{ac^2} \int [ac + \psi f(a - 2c)] (1 - M\psi) \frac{d\sigma}{4\pi} = \frac{1}{ac^2} \int (ac - \psi af) \frac{d\sigma}{4\pi}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{G}_{44} = c \left(1 + \frac{1}{5} \frac{f}{c} \right) = c + \frac{1}{5} f \dots \dots \dots (119b)$$

(113c) ergibt

$$4(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = (3a - 2f) \left(1 + \frac{2}{5} \frac{f}{a} \right) + 4(2c + f) \left(1 - \frac{1}{5} \frac{f}{c} \right) - 3a = 8c + \frac{8}{5} f$$

also

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = c + \frac{1}{5} f \dots \dots \dots (119c)$$

Aus (113d) ergibt sich

$$\mathfrak{G}_{13} = \frac{1}{2}a + c_{12} - \frac{1}{2}\mathfrak{G}_{33} = c_{12} + \frac{1}{5}f \dots \dots \dots (119d)$$

Aus (113e)

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}c_{12} + \frac{1}{4}a - \frac{1}{10}f = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c_{12} - \frac{1}{10}f$$

und aus dieser Gleichung und (119c)

$$\mathfrak{G}_{11} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c_{12} + c + \frac{1}{10}f \dots \dots \dots (119e)$$

$$\mathfrak{G}_{12} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c_{12} - c - \frac{3}{10}f \dots \dots \dots (119f)$$

Führen wir in die Gl. (119) überall a , c und f aus (97) und (98) ein, so erhalten wir:

$$\mathfrak{G}_{11} = \mathfrak{G}_{33} = \frac{1}{5}(3c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}), \dots \dots \dots (120a)$$

$$\mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{G}_{13} = \frac{1}{5}(c_{11} + 4c_{12} - 2c_{44}), \dots \dots \dots (120b)$$

$$\mathfrak{G}_{44} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) = \frac{1}{5}(c_{11} - c_{12} + 3c_{44}), \dots \dots \dots (120c)$$

also wiederum die Voigtschen Formeln (8).

§ 3. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Wolfram.

Wolfram war das erste reguläre Metall, dessen Kristallmoduln s_{ik} gemessen worden sind, und zwar von Bridgman³⁸⁾ im J. 1924. Seine Messungen ergeben:

G 1. Kristallkonstanten von Wolfram.

$s_{11} \cdot 10^{+13}$	2,534	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	51,27
$s_{12} \cdot \text{,,}$	— 0,726	$c_{12} \cdot \text{,,}$	20,58
$s_{44} \cdot \text{,,}$	6,55	$c_{44} \cdot \text{,,}$	15,27
		$f \cdot \text{,,}$	0,15

Nach dieser Tabelle ist die Anisotropie der Kristalle außerordentlich klein, zwischen alter und neuer Theorie kann also kaum ein merklicher Unterschied bestehen. In der Tat ergibt die Rechnung:

G 2. Primäres Aggregat von Wolfram.

$\zeta_{11} \cdot 10^{-11}$	51,22
$\zeta_{33} \cdot \text{,,}$	51,23
$\zeta_{12} \cdot \text{,,}$	20,62
$\zeta_{13} \cdot \text{,,}$	20,60
$\zeta_{44} \cdot \text{,,}$	15,30
$\frac{1}{2}(\zeta_{11} - \zeta_{12}) \cdot \text{,,}$	15,30

Das primäre Aggregat ist also praktisch schon isotrop, und wir erhalten ohne weiteres, wenn wir noch die Voigtschen Formeln anwenden:

G 3. Isotropes Wolframaggregat.

	nach Voigt	neu
$\zeta \cdot 10^{-11}$	51,21	51,22
$\zeta_1 \cdot 10^{-11}$	20,61	20,61
$\zeta \cdot 10^{-11}$	39,4	39,4
$\zeta_2 \cdot 10^{-11}$	15,3	15,3

Die empirischen Daten können also nicht beitragen zur Vergleichung der alten Theorie mit der neuen.

³⁸⁾ Bridgman, l. c. beim Zink.

Diese empirischen Daten liegen ziemlich weit auseinander. In der Tabelle G 4 bringe ich die Werte aus Landolt-Börnstein (1. Ergänzungsband 1927) umgerechnet in C. G. S.-Einheiten, zusammen mit denen, die von Koenigsberger³⁹⁾ gemessen und zitiert worden sind.

G 4. Wolframaggregate (empirisch).

No.	Forscher	Material	Temp.	$\mathcal{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathcal{I} \cdot 10^{-11}$
1	Pintsch	Einkristalldr.			18,0
2	Geiß	„	R.T.	38,8	16,5
3	Pintsch	„			15,5
4	Lax	—	R.T.	37,2	—
5	Dodge	gegl. Draht	20°	35,5	—
6	Schönborn	gezogen	R.T.	32,5—36,5	—
7	Jokibe-Sakai	gez. Draht	19°	—	13,2
8	Koenigsb.	Nymegen-Dr.	—	—	16,2—20
9	„	Osram- „	—	—	7,1—16,8
10	„	Siemens- „	—	—	8,6
11	Geiß-v.Liempt ⁴⁰⁾	Philips- „	—	—	17

Zur Isotropieprüfung bietet nur Stab 2 genügende Daten. Das Resultat ist vorauszusehen, das Material ist ja faktisch ein Kristall, also anisotrop. In der Tat ergibt die Formel (52), wenn wir nach (G 3) $3\mathcal{R} = 92,4$ nehmen:

$$\mathcal{I}_{\text{ber}} = 15,4 \cdot 10^{11}$$

neben

$$\mathcal{I}_{\text{gem}} = 16,5 \cdot 10^{11},$$

also einen ziemlich großen Unterschied. Es liegt also kein erwiesenermaßen isotropes Material vor, die Prüfung unsrer Theorie ist also vorläufig an Wolfram nicht möglich.

Die Besprechung von Wolfram könnten wir damit abschließen. Die schlechte Übereinstimmung zwischen den verschiedenen in G 4 mitgeteilten Resultaten hat mich aber zu den folgenden Erwägungen veranlaßt, die vielleicht zur Erklärung dieser Tatsache beitragen können.

Die Bridgmanschen Kristallkonstanten haben einen ganz besonderen Charakter: das Kristall ist fast genau isotrop. Daraus folgen mehrere Eigenschaften der Aggregate:

³⁹⁾ Koenigsberger, Z. f. Phys. 40, S. 719—741, 1926.

⁴⁰⁾ Geiss u. v. Liempt, Ann. der Phys. 77, S. 105, 1925.

1°. Einkristallstäbe der verschiedenen Orientierungen sollen nahezu dieselben Werte für \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} aufweisen: $\mathfrak{G} = 39,6 \cdot 10^{11}$, $\mathfrak{Z} = 15,3 \cdot 10^{11}$.

2°. Multikristalle sollen ungefähr dieselben Werte ergeben, falls sie den Bedingungen von II, § 1 genügen und zwar unabhängig von den Kristallorientierungen, sowohl allgemeine Aggregate als solche mit Vorzugsorientierungen. Porosität im weitesten Sinne, wie auch die Gleitungen, die bei stärkerer Beanspruchung des Materials bald auftreten, erniedrigen die Moduln, für Aggregate sollen also 39,6 und 15,3 Maximumwerte der Moduln darstellen.

Beide Erwartungen sind, wie aus der Tabelle G 4 hervorgeht, ziemlich schlecht erfüllt. Von den drei Einkristalldrähten haben zwei Torsionsmoduln um 8 % und 16 % zu hoch, von den 12 Multikristalldrähten, worüber Koenigsberger berichtet, haben 7 ein \mathfrak{Z} , das 6 % bis 30 % zu hoch liegt. Will man nicht alle diese Messungen an Materialien von verschiedener Herkunft disqualifizieren, so bleibt wie mir scheint nur die Folgerung übrig, daß die Bridgmanschen Kristallkonstanten von Wolfram ziemlich ungenau sind. Dies scheint auch aus anderen Gründen nicht unwahrscheinlich. Erstens hatte Bridgman nur einen einzigen Kristall zur Verfügung, und es ist bekannt, daß die Einkristalle öfters gestört sind; vielleicht deutet die Krümmung, die nach Bridgman bei dem Einkristallstab anwesend war, auf eine solche Störung. Zweitens erscheint der Kompressionsmodul des Wolframkristalls etwas zu niedrig. Bridgman selbst hat die Kompressibilität gemessen an 2 verschiedenen Vielkristallen von Wolfram⁴¹⁾. Er erhielt bei einem geschmiedeten Stab von der Dichte 19,137 für κ in CGS-Einheiten $2,99 \cdot 10^{-13}$, bei einem gezogenen Draht von der Dichte $\pm 19,48$ $\kappa = 3,21 \cdot 10^{-13}$. Die Kompressionsmoduln der beiden Aggregate sind bzw. $33,4 \cdot 10''$ und $31,2 \cdot 10''$. Den kleineren Wert des Moduln beim dichteren Material erklärt er durch den Einfluß der größeren Menge amorphen Materials im gezogenen Draht, wodurch die Kompressibilität vergrößert wird. Für das Wolframkristall sollte \mathfrak{K} also mindestens gleich $33,4 \cdot 10''$ sein oder

$$3\mathfrak{K} = 100,1 \cdot 10''.$$

Am Einkristallstab erhält Bridgman aber

$$3\mathfrak{K} = c_{11} + 2c_{12} = 92,4 \cdot 10'',$$

es scheint plausibel, daß dieser Wert und daher die Bridgmanschen Kristallkonstanten jedenfalls geändert werden müssen. Übrigens gilt

⁴¹⁾ Bridgman, Proc. Am. Ac. of Arts and Sciences, 58, S. 163, 1922-'23.

dies bei den großen Schwierigkeiten der elastischen Messungen wohl für mehrere Kristallkonstanten, man sieht ja aus den Tabellen D 1 und E 1, wie weit die Werte derselben Konstante bei verschiedenen Forschern aus einander gehen können. So muß man beim Cadmium die Bridgmanschen Konstanten c_{11} , c_{33} , c_{12} und c_{44} bzw. um 10, 11, 21 und 19 % erhöhen, beim Zink das c_{33} 13 % kleiner und das c_{12} 33 % größer machen, um die entsprechenden Grüneisenschen Werte zu erhalten. Mit Änderungen derselben Größenordnung in den c_{ik} von Wolfram können wir so ziemlich alle Moduln der Tabelle G 4 erzeugen. Die Summe $c_{11} + 2c_{12}$ soll etwa 8 % größer werden, es scheint aber nach der Tabelle G 4 erwünscht, das berechnete \mathfrak{G} zu verkleinern. Versuchsweise wähle ich:

$$\begin{aligned} c_{11} & 10 \% \text{ kleiner als bei Br. also } c_{11} = 46 \cdot 10^{11}, \\ c_{12} & 27 \% \text{ größer „ „ „ „ „ } c_{12} = 27 \cdot 10^{11}, \\ c_{44} & 17 \% \text{ „ „ „ „ „ } c_{44} = 18 \cdot 10^{11}. \end{aligned}$$

Das Kristall wird sodann stark anisotrop ($f = -17$), was wegen der verschiedenen Moduln bei Einkristalldrähten notwendig erscheint. Es folgt aus dieser Annahme:
für den Kompressionsmodul:

$$3\mathfrak{K} = 100 \cdot 10^{11}$$

in Übereinstimmung mit der Messung von Bridgman;
für den Einkristallstab parallel der Hexaedernormale:

$$\mathfrak{G} = 27,4 \cdot 10^{11}, \quad \mathfrak{Z} = 18 \cdot 10^{11};$$

für den Einkristallstab parallel der Oktaedernormale:

$$\mathfrak{G} = 45,8 \cdot 10^{11}, \quad \mathfrak{Z} = 12,3 \cdot 10^{11};$$

für das allgemeine, isotrope Aggregat, angenähert nach der Voigtschen Theorie:

$$\mathfrak{G} = 38,6 \cdot 10^{11}, \quad \mathfrak{Z} = 14,6 \cdot 10^{11}.$$

Wo Koenigsberger die möglichen Fehler seiner Torsionsmoduln auf 8 % schätzt, genügt die gewählte Abänderung der Bridgmanschen Kristallkonstanten um alle plausibelen empirischen Werte der Tabelle G 4 zu erklären. Die 2 extremen Werte, die Koenigsberger für \mathfrak{Z} erhält, 7,1 und 8,6, werden von ihm erklärt durch die Annahme einer gewissen Porosität, nämlich einer Aufspaltung des Drahtes, auf die schon Arkel

und van Liempt⁴²⁾ hingewiesen haben. Im übrigen liegen seine \mathfrak{E} alle zwischen 14,9 und 20, könnten also zu isotropen Aggregaten mit ev. Beimischung von Kristallen mit Hexaederorientierung gehören.

Die vorhergehenden Betrachtungen beanspruchen nicht, bessere Kristallkonstanten zu berechnen als die von Bridgman gemessenen; sie wollen nur andeuten, wie man die Kristallkonstanten den Aggregatskonstanten anpassen kann. Nur wenn letztere sehr genau bekannt sind und auch die Verteilung der Orientierungen im Aggregat einigermaßen feststeht, könnte man solchen indirekten Bestimmungen der Kristallkonstanten etwas größeren Wert beilegen. Bei Kupfer habe ich den Versuch einer solchen Bestimmung gemacht, über das Ergebnis werde ich an anderer Stelle berichten. Für Wolfram scheint mir das Ergebnis dieses Paragraphen, daß die Kristallkonstanten, die Bridgman gemessen hat, Fehler von mehreren Prozenten enthalten mögen, und daß seine c_{12} und c_{44} wahrscheinlich bedeutend zu klein sind.

§ 4. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Aluminium.

Hier wie bei den folgenden Metallen liegt nur eine Messung von Kristallkonstanten vor, eine mögliche Ungenauigkeit derselben tritt nicht sofort ans Licht. Goens der die s_{ik} der Al.Kristalle gemessen hat⁴³⁾, schätzt den möglichen Fehler auf 1 %; in c_{11} und c_{12} wird der Fehler noch vergrößert. Die Anisotropie der Kristalle ist gering, aber merklich größer als bei den Bridgmanschen Konstanten des Wolfram, wie sich ergibt aus

H 1. Kristallkonstanten von Al.

$s_{11} \cdot 10^{13}$	16,7	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	10,54
s_{12} „	— 5,6	c_{12} „	5,84
s_{44} „	35,7	c_{44} „	2,80
		f „	— 0,90

Daraus folgt nach ziemlich kurzer Rechnung, (da die Reihen (115) und (118) bald abgebrochen werden können)

⁴²⁾ Arkel u. van Liempt, Ann. der Phys. 77, S. 105—108, 1925.

⁴³⁾ Goens, Die Naturwiss. 17, S. 180, 1929.

H 2. Primäres Aggregat von Al.

$\zeta_{11} \cdot 10^{-11}$	10,89
ζ_{33} „	10,89
ζ_{12} „	5,67
ζ_{13} „	5,67
ζ_{44} „	2,61
$\frac{1}{2}(\zeta_{11} - \zeta_{12})$ „	2,61

Wiederum ist das Aggregat praktisch isotrop, es folgt ohne weiteres:

H 3. Isotropes Al.

	nach Voigt	neu
$\zeta \cdot 10^{-11}$	10,90	10,89
ζ_1 „	5,66	5,67
ζ „	7,03	7,005
ζ_2 „	2,62	2,61

Auch hier ist der Unterschied zwischen der alten und der neuen Theorie zu klein, um zwischen ihnen zu wählen; sie können nur gemeinsam geprüft werden.

Beim Aluminium liegt zur Prüfung viel Material vor und die meisten Daten liegen nicht allzuweit auseinander.

H 4. Al. Aggregate (empirisch).

Nummer	Forscher	Material	Temp.	$\zeta \cdot 10^{-11}$	$\zeta_2 \cdot 10^{-11}$
1	Dodge	geglüht	20°	7,50	—
2	Baumann	—	—	7,22—7,36	—
3a	Grüneisen	gezogen	18°	7,05	—
3b	„	„	„	6,98	2,67
3c	„	„	„	7,18	2,69
4a	Voigt	gegossen	—	6,06	2,36
4b	„	„	—	6,80	2,645
4c	„	„	—	6,37	2,59
4d	„	„	—	6,37	2,49
4e	„	„	—	6,45	2,56
4f	„	„	—	6,67	2,625
5	Schaefer	—	20°	6,21	2,29
6	Koch-Dieterle	Band, geglüht	17°	6,04	—
7	Kikuta	Draht, „	11°	—	2,75
8	Koch	„ „	20°	—	2,71
9	Guye-Schapper	—	0°	—	2,61
10	Jokibe-Sakai	Draht, geglüht	25°	—	2,48

Im allgemeinen ist die Übereinstimmung mit der Theorie nicht schlecht. Um genauer nachzuprüfen untersuchen wir erst, wo es möglich ist, die Isotropie mit $3\mathfrak{R} \cdot 10^{-11} = 22,22$.

H 5. Isotropieprüfung der Al. Stäbe.

Nummer	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ berechnet	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ gemessen
3b	6,98	2,60	2,67
3c	7,18	2,68	2,69
4a	6,06	2,22	2,36
4b	6,80	2,525	2,645
4c	6,37	2,35	2,59
4d	6,37	2,35	2,49
4e	6,45	2,38	2,56
4f	6,67	2,47	2,625
5	6,21	2,28	2,29

Von den Grüneisenschen Stäben genügt also 3c dem Isotropiekriterium ganz gut. Dies stimmt mit den eigenen Ergebnissen Grüneisens: die Querkontraktion, berechnet nach Formel (51) war bei diesem Stab 0,337, während die gemessene Querkontraktion 0,334 betrug. Auch das Schaefersche Material war isotrop, die Moduln sind aber bedeutend kleiner, als alle andern, wie es bei den Schaeferschen Materialien allgemein der Fall ist⁴⁴⁾. Porosität kann diese Abweichung erklären, wo aber die Abweichungen so allgemein auftreten und immer in demselben Sinn, scheint ein systematischer Fehler in den Schaeferschen Messungen (Gleitung?) nicht ausgeschlossen.

Auch die Voigtschen Werte sind kleiner als die Grüneisenschen, wenn auch die Abweichung im Durchschnitt viel kleiner ist, und bei den einzelnen Stäben sehr verschieden. Der letzte Umstand spricht für Porosität als Ursache der Erscheinung, die Poren werden ja in den verschiedenen kleinen Stäben ungleichen Einfluß haben. Grüneisen zieht die Unreinheit des Voigtschen Materials als Erklärungsgrund heran. Aus der Tabelle H 5 vermutet man eine dritte Ursache: die Anisotropie des Materials. Zum Teil ist diese wohl die Folge der geringen Dimensionen der Stäbe, $100 \times 6 \times 1$ mm, gewiß sind nicht in jedem Querschnitt alle Orientierungen in gleicher Häufigkeit vertreten. Neben

⁴⁴⁾ vgl. Landoltsche Tabellen I.

den Abweichungen, die von der zufälligen Verteilung von Orientierungen und Poren herrühren, tritt eine systematische Abweichung auf, das \mathfrak{L} ist überall verhältnismäßig groß und übertrifft bisweilen den berechneten Wert. Dies deutet auf eine prinzipielle Bevorzugung gewisser Orientierungen im Gußstück, woraus alle Stäbe mit paralleler Längsrichtung geschnitten sind, ich komme auf diesen Punkt im V. Kapitel zurück.

Für die Vergleichung der berechneten und gemessenen Konstanten kommt also schließlich nur der Stab 3c (Grüneisens Al. II) in Betracht; wo alte und neue Theorie praktisch übereinstimmen, ist die Vergleichung so ziemlich eine gegenseitige Prüfung der Messungen von Grüneisen und Goens.

H 6. Prüfung für isotropes Al.

	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{L} \cdot 10^{-11}$
Empirischer Wert	7,18	2,69
Berechneter Wert	7,005	2,61

Bei der immerhin ziemlich großen Ungenauigkeit aller elastischen Messungen und bei der Möglichkeit einer etwas verschiedenen Zusammensetzung der Proben (das Grüneisensche Aluminium war nicht chemisch rein) erscheint die Übereinstimmung als sehr befriedigend. Die meisten nicht besprochenen Daten der Tabelle H 4 schließen sich dem Grüneisenschen Werte gut an; es sieht aus, alsob die Goensschen Kristallkonstanten etwas niedrig sind.

§ 5. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Gold.

Die Kristallkonstanten von Gold stammen von Goens⁴⁵⁾, sie sind zusammengetragen in:

K 1. Kristallkonstanten von Gold.

$s_{11} \cdot 10^{13}$	24,5	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	19,41
$s_{12} \cdot "$	— 11,3	$c_{12} \cdot "$	16,61
$s_{44} \cdot "$	25	$c_{44} \cdot "$	4,00
		$f \cdot "$	— 5,20

⁴⁵⁾ Goens, l. c. beim Al.

Goens schätzt die Genauigkeit seiner s_{ik} auf 5 %, die möglichen Fehler in c_{11} und c_{12} sind noch größer; in den hieraus berechneten Moduln \mathfrak{G} und \mathfrak{X} dürfen wir sie wiederum auf 5 % schätzen.

Aus K 1 ergibt sich, daß die Anisotropie der Goldkristalle ziemlich groß ist. Die Rechnung ist daher etwas zeitraubend, das Ergebnis ist:

K 2. Primäres Aggregat von Gold.

$\mathfrak{G}_{11} \cdot 10^{-11}$	21,17
$\mathfrak{G}_{33} \cdot \text{,,}$	21,03
$\mathfrak{G}_{12} \cdot \text{,,}$	15,67
$\mathfrak{G}_{13} \cdot \text{,,}$	15,80
$\mathfrak{G}_{44} \cdot \text{,,}$	2,65
$\frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12}) \cdot \text{,,}$	2,75

Die große Anisotropie der Kristalle ist im primären Aggregat schon beinahe verschwunden. Für die Berechnung der Konstanten des isotropen Aggregats genügt also jetzt die Voigtsche Theorie.

In der Tabelle K 3 sind die so berechneten Konstanten rechts eingetragen, in der linken Spalte stehen die Werte welche man erhält, wenn man überhaupt nur die Voigtsche Theorie benutzt:

K 3. Isotropes Gold.

	nach Voigt	neu
$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	21,50	21,12
$\mathfrak{G}_1 \cdot \text{,,}$	15,57	15,75
$\mathfrak{G} \cdot \text{,,}$	8,405	7,665
$\mathfrak{X} \cdot \text{,,}$	2,96	2,68

Hier tritt also der Unterschied zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Theorie deutlich hervor; wie bei Zink und Cadmium ist bei Gold eine Prüfung der neuen Theorie möglich. Leider ist die Unge-
wißheit der Goenschen Werte noch etwas groß, 5 % von \mathfrak{G} und \mathfrak{X} ist so ziemlich die Hälfte der Unterschiede zwischen alten und neuen Werten.

Die verschiedenen gemessenen Aggregatsmoduln stimmen nicht allzu schlecht, wie es die Tabelle K 4 zeigt:

K 4. Goldaggregate (empirisch).

Nummer	Forscher	Temp.	$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
1a	Grüneisen	18°	7,65	2,55
1b	"	"	7,92	2,77
2a	Voigt	—	7,30	2,82
2b	"	—	7,58	2,77
3	Koch-Dannecker	0°		2,84
4	Kikuta	26°		2,83
5	Guye-Schapper	0°		2,62
6	Jokibe-Sakai	53°		2,55

Mehrere empirische Werte liegen zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Theorie, die Entscheidung ist daher nicht leicht. Zuerst machen wir die Isotropieprüfung bei den Präparaten mit 2 gemessenen Moduln.

K 5. Isotropieprüfung der Goldstäbe.

Nummer	$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ berechnet	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ gemessen
1a	7,65	2,68	2,55
1b	7,92	2,78	2,77
2a	7,30	2,55	2,82
2b	7,58	2,65	2,77

Das \mathfrak{R} der Formel (52) ist berechnet aus c_{11} und c_{12} der Tabelle K 1; wegen des großen Wertes des Verhältnisses $\frac{c_{12}}{c_{11}}$ ist $3\mathfrak{R}$ (52,63) sehr groß gegen $\frac{1}{3}\mathfrak{G}$ und ein abweichendes \mathfrak{R} würde das berechnete \mathfrak{Z} sehr wenig ändern.

Von den 4 Stäben sind 3 stark anisotrop, und zwar ist beim Grüneisenschen Stab 1a das \mathfrak{Z} verhältnismäßig zu klein, bei den Voigtschen Stäben wieder zu groß wie bei Al. Letztere werden im Kap. V noch besprochen, mit 1a ist nicht viel anzufangen, die Unregelmäßigkeiten dieses Stabes sind schon in II, § 4 besprochen. Der Stab 1b aber (bei

Grüneisen *Au* II) kann nach K 5 sehr genau isotrop sein und Grüneisens eigene Prüfung mit der Formel (51) ergab nach Tabelle C (in II, § 4) dasselbe Resultat, wenn auch nicht mit derselben Genauigkeit. Auch dieser Stab wird im V. Kap. näher besprochen, vorläufig wollen wir ihn hier zur Prüfung heranziehen.

K 6. Prüfung für nahezu isotropes Gold.

	$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
Empirischer Wert	7,92	2,77
Alte Theorie	8,405	2,96
Neue „	7,665	2,68

Die empirischen Werte stimmen also mit den nach der neuen Theorie berechneten Werten bis auf ungefähr 3 %, während die Abweichungen von den Werten der alten Theorie rund 6 % sind. Auch die andern Werte von \mathfrak{Z} aus der Tabelle K 4, gemessen an Material von unbekannter Anisotropie, liegen durchschnittlich ganz in der Nähe der neuen Werte. Soweit bei der immerhin noch merklichen Anisotropie des Stabes 1 b und der mäßigen Genauigkeit der Goensschen Konstanten die Beweiskraft der Prüfung reicht, spricht sie wieder zugunsten der neuen Theorie. Auch bei Gold liegen aber die alten und neuen Werte von \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} noch zu dicht neben einander; zur endgültigen Entscheidung brauchen wir ein Material von noch größerer Anisotropie.

§ 6. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Messing.

Mazima und Sachs⁴⁶⁾ haben die Elastizitätskonstanten an Einkristallstäben von Messing bestimmt. Die Kristalle zeigten sich außerordentlich anisotrop, hier haben wir also das Mittel zur endgültigen Prüfung der Voigtschen Theorie. Mazima und Sachs haben diese Prüfung ausgeführt, sie konstatieren ausdrücklich die sehr schlechte Übereinstimmung und sagen: „die Ursache der Unstimmigkeiten ist bisher nicht erkannt worden.“

Einwandfrei sind ihre Messungen nicht, die Forscher selbst haben manches gegen sie einzuwenden. Sie messen zuerst an 8 Einkristallstäben

⁴⁶⁾ Mazima und Sachs, Mechanische Eigenschaften von Messingkristallen, Z. f. Phys. 50, S. 161, 1928.

von sehr verschiedener Orientierung die Dehnungs- und Torsionsmoduln, wobei sie die Genauigkeit auf „höchstens 1 bis 3 %“ abschätzen, und suchen Werte s_{ik} , die sich am besten den Messungen an dem einen, nahezu kubisch orientierten Stab anschließen. Als dann aber aus den s_{ik} die verschiedenen E und T der Einkristalle zurückberechnet werden, zeigen sich systematische Abweichungen, das E ist immer zu groß, das T zu klein. Sie sagen selbst: „die Genauigkeit der Messungen ist jedoch aus technisch nicht geklärten Ursachen gering.“ Den erhaltenen Kristallkonstanten gegenüber ist also einiges Mißtrauen wohl erlaubt.

Auch in anderer Hinsicht ist Messing kein ideales Material für unsere Prüfung.

Von den verschiedenen Messingarten, deren Aggregatskonstanten in Landolt-Börnstein angegeben sind, hat keine genau die Zusammensetzung des Messings von Mazima und Sachs (71,7—74,1 % Cu). Glücklicherweise gehen die Aggregatsmoduln für Messing von verschiedener Zusammensetzung nicht allzuweit auseinander und durch Interpolation ist eine Abschätzung der Moduln bei einem Aggregat mit 73 % Cu möglich. Für das \mathfrak{C} gelingt diese Abschätzung nur zwischen ziemlich weiten Grenzen. Wegen der großen Unterschiede in den Werten von \mathfrak{C} und \mathfrak{T} nach der alten und der neuen Theorie ist dennoch die Entscheidung zwischen beiden Theorien an Messing möglich.

Die Ergebnisse lassen sich aus den nachfolgenden Tabellen ablesen:

L 1. Kristallkonstanten von Messing.

$s_{11} \cdot 10^{13}$	19,4	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	14,75
$s_{12} \cdot "$	— 8,35	$c_{12} \cdot "$	11,14
$s_{44} \cdot "$	13,9	$c_{44} \cdot "$	7,19
		$f \cdot "$	— 10,77

L 2. Primäres Aggregat von Messing.

$\mathfrak{C}_{11} \cdot 10^{-11}$	19,28	$(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{33}) \cdot 10^{-11}$	— 0,34
$\mathfrak{C}_{33} \cdot "$	19,62	$(\mathfrak{C}_{13} - \mathfrak{C}_{12}) \cdot "$	— 0,34
$\mathfrak{C}_{12} \cdot "$	9,04	$\mathfrak{f} \cdot "$	4,76
$\mathfrak{C}_{13} \cdot "$	8,70	$\mathfrak{g} \cdot "$	4,43
$\mathfrak{C}_{44} \cdot "$	2,91	$\mathfrak{h} \cdot "$	9,86
$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{12}) \cdot "$	5,12		

Das primäre Aggregat ist also noch deutlich anisotrop, bei diesem axialen Aggregat wenden wir also die Methode des III. Kapitels an, mit

$$M = -2,497$$

$$N = -2,473.$$

Die Diskriminante $M^2 - 4N$ ist positiv, also wenden wir (91) an. Von den Formeln (84) benutzen wir nur die Nummern (84a), (84c) und (84e), das übrige leistet die Kompressibilitätsbedingung

$$\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{12} + \mathfrak{C}_{13} = \mathfrak{C}_{33} + 2\mathfrak{C}_{13} = c_{11} + 2c_{12}.$$

So erhalten wir:

L 2a. Sekundäres Aggregat von Messing.

$\mathfrak{C}_{11} \cdot 10^{-11}$	17,885
$\mathfrak{C}_{33} \cdot \text{,,}$	17,84
$\mathfrak{C}_{12} \cdot \text{,,}$	9,545
$\mathfrak{C}_{13} \cdot \text{,,}$	9,59
$\mathfrak{C}_{44} \cdot \text{,,}$	4,13
$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{12}) \cdot \text{,,}$	4,17

Das Aggregat ist jetzt beinahe isotrop, die Voigtschen Formeln oder einfaches Mitteln $\left(\frac{2\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{33}}{3} \text{ u.s.w.}\right)$ ergeben schließlich die Konstanten für isotropes Messing.

In der Tabelle L 3 sind diese mit den Werten zusammengestellt, welche die Anwendung der Voigtschen Theorie auf die ursprünglichen Kristallkonstanten ergibt:

L 3. Isotropes Messing.

	nach Voigt	neu
$\mathfrak{C} \cdot 10^{-11}$	19,06	17,87
$\mathfrak{C}_1 \cdot \text{,,}$	8,99	9,575
$\mathfrak{C} \cdot \text{,,}$	13,29	11,19
$\mathfrak{Z} \cdot \text{,,}$	5,035	4,14

Die alte Theorie ergibt also für \mathfrak{C} und \mathfrak{Z} Werte, die bzw. 19 % und 22 % höher liegen als die Werte nach der neuen Theorie.

Die verschiedenen Aggregatsmoduln sind zusammengestellt in:

L 4. Messingaggregate (empirisch).

Nummer	Forscher	Material	Zusammensetzung	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
1a	Voigt	gegossen	Cu 60 %, Zn 40 %	9,8	3,475
1b	"	"	" "	9,5	3,51
1c	"	"	" "	9,0	3,68
1d	"	"	" "	9,4	3,50
1e	"	"	" "	8,8	3,67
1f	"	"	" "	8,6	3,67
1g	"	"	" "	8,8	3,83
1h	"	"	" "	8,45	3,69
2a	Koch-Dannecker	Draht	85 % 15 %	—	4,33
2b	" "	"	60 % 40 %	—	3,83
3	Kikuta	"	70 % 30 %	—	4,14
4	Koch-Dieterle	Band	60 % 40 %	7,29	—

Zuerst führen wir die Isotropieprüfung aus mit $3\mathfrak{R} = 37,03$ nach den Daten von Mazima und Sachs; abweichende Werte haben wenig Einfluß.

L 5. Isotropieprüfung der Messingstäbe.

Nummer	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ berechnet	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$ gemessen
1a	9,8	3,58	3,475
1b	9,5	3,46	3,51
1c	9,0	3,27	3,68
1d	9,4	3,42	3,50
1e	8,8	3,19	3,67
1f	8,6	3,11	3,67
1g	8,8	3,19	3,83
1h	8,45	3,05	3,69

Im allgemeinen ist \mathfrak{Z} wiederum zu groß, ein einziges Mal zu klein, der Stab 1b genügt aber dem Isotropiekriterium ziemlich gut. Gegossenes Messing mit 60 % Cu hat also bei Isotropie die Modulwerte:

$$\mathfrak{E} = 9,5 \cdot 10^{11}, \quad \mathfrak{Z} = 3,5 \cdot 10^{11}.$$

Hiernach lassen sich die Modulwerte bei 72 % Cu-Gehalt abschätzen.

Zunächst schreiben wir die Werte von \mathfrak{Z} für gezogenes Messing von verschiedener Zusammensetzung hin:

bei 60 % Cu Gehalt	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11} = 3,83$	(Koch-Dannecker)
„ 70 % „ „ „	4,14	(Kikuta)
„ 85 % „ „ „	4,33	(Koch-Dannecker)
„ 100 % „ „ „	4,57	(Mittel der Werte von Koch, Jokibe-Sakai, Grüneisen und Kikuta).

Interpolation ergibt mit Wahrscheinlichkeit für gezogenen Draht
bei 72 % Cu-Gehalt $\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11} = 4,15 \pm 0,05$.

Bei den gezogenen Messing- und Kupferdrähten ist im allgemeinen die Isotropie nicht festgestellt, das isotrope, aber vermutlich poröse Voigtsche Messing hat ein \mathfrak{Z} , $8\frac{1}{2}$ % unter dem Wert für gezogenen Draht von derselben Zusammensetzung. Der erhaltene Wert für \mathfrak{Z} mag also einige Prozente zu hoch sein, jedenfalls können wir mit großer Wahrscheinlichkeit für isotropes porienfreies Messing von 72 % Cu-Gehalt schreiben

$$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11} = 4,0 \pm 0,2,$$

wobei die größeren Werte die wahrscheinlicheren sind.

Für die Abschätzung von \mathfrak{G} haben wir keine andre Daten als das Voigtsche $\mathfrak{G} \cdot 10^{-11} = 9,5$ bei 60 % Cu, welche Zahl wohl einige Prozente zu niedrig sein dürfte, und den wahrscheinlich sehr genauen Wert 12,5 für reines Kupfer⁴⁷⁾. Mit sehr weiten Fehlergrenzen können wir sicher für ideales Messing mit 72 % Cu schreiben:

$$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11} = 11,0 \pm 1,5.$$

Es folgt also schließlich

L 6. Prüfung für Messing mit 72 % Cu.

	$\mathfrak{G} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
Empirischer Wert	$11,0 \pm 1,5$	$4,0 \pm 0,2$
Alte Theorie	13,29	5,035
Neue „	11,19	4,14

Dieses Ergebnis spricht entschieden zugunsten der neuen Theorie.

⁴⁷⁾ Grüneisen, l. c. bei der Tabelle B 2, Seite 14.

§ 7. Berechnung und Prüfung der Aggregatskonstanten von Flußspat.

Früher ist betont worden, daß die Gesteine im allgemeinen jede Theorie, welche von den Annahmen von II, § 1 ausgeht, schlecht erfüllen. Die Schuld liegt an der Porosität im weitesten Sinne, besonders wohl an der amorphen, vielleicht fremdartigen Bindesubstanz zwischen den Elementarkristallen; außerdem ist Anisotropie keineswegs ausgeschlossen. Dennoch wollen wir die Aggregatskonstanten von Flußspat ausrechnen, weil dies das einzige reguläre Material ist, woran Voigt früher seine Theorie geprüft hat.

Nach den Voigtschen Messungen ⁴⁸⁾ gilt in $\frac{g}{cm^2}$:

M 1. Kristallkonstanten von Flußspat.

$c_{11} \cdot 10^{-8}$	16,7
$c_{12} \cdot "$	4,57
$c_{44} \cdot "$	3,45
$f \cdot "$	5,23

Flußspat ist also ungefähr in demselben Maß anisotrop wie Gold, nur ist hier das f positiv.

Die Rechnung ergibt:

M 2. Primäres Aggregat von Flußspat.

$\mathfrak{C}_{11} \cdot 10^{-8}$	14,41
$\mathfrak{C}_{33} \cdot "$	14,34
$\mathfrak{C}_{12} \cdot "$	5,68
$\mathfrak{C}_{13} \cdot "$	5,75
$\mathfrak{C}_{44} \cdot "$	4,308
$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{11} - \mathfrak{C}_{12}) \cdot "$	4,365

Hier tritt schon nahezu Isotropie auf; ohne weiteres erhalten wir also

M 3. Isotropes Flußspat.

	nach Voigt	neu
$\mathfrak{C} \cdot 10^{-8}$	14,61	14,385
$\mathfrak{C}_1 \cdot "$	5,615	5,73
$\mathfrak{C} \cdot "$	11,49	11,12
$\mathfrak{C} \cdot "$	4,495	4,33

⁴⁸⁾ Voigt, Lehrbuch, S. 741.

Die berechneten Moduln liegen also nicht so weit auseinander wie beim Gold; immerhin gibt es, besonders im \mathfrak{Z} , noch einen deutlichen Unterschied zwischen der alten und der neuen Theorie.

Quasiisotrope Aggregate von Flußspat sind nur von Voigt gemessen worden⁴⁹⁾. Er hat 5 Stäbe untersucht. Wie gewöhnlich schneidet er sie aus dem Aggregat mit gleicher Längsrichtung; die Nummern *a* bis *c* haben auch die größte Querrichtung parallel, *d* und *e* haben die größte Querrichtung senkrecht dazu. Die Messungen zeigen keinen deutlichen Unterschied in den beiden Querrichtungen. Wir können also nahezu Isotropie erwarten, weil nur zufällig die Längsrichtung mit einer ausgezeichneten Richtung im Aggregat zusammentreffen würde.

Weil das Verhältnis $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{E}}$ hier klein ist, hängt das Resultat der Isotropieprüfung mehr als gewöhnlich von der Porosität ab. \mathfrak{Z} ist hier berechnet mit $3\mathfrak{R} = 25,84$, es ist aber eingeklammert beigelegt der Wert für \mathfrak{Z} , der aus einem 10 % kleineren \mathfrak{R} erfolgt; höhere Porosität scheint allerdings nicht ausgeschlossen.

M 4. Isotropieprüfung der Flußspataggregate.

Nummer	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-8}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-8}$ berechnet	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-8}$ gemessen
a	10,57	4,10 (4,17)	4,28
b	10,42	4,02 (4,09)	4,285
c	10,42	4,02 (4,09)	4,30
d	10,49	4,05 (4,12)	4,25
e	10,34	3,98 (4,05)	4,29

Es scheint also doch eine kleine prinzipielle Anisotropie aufzutreten; das gemessene \mathfrak{Z} ist überall etwas zu groß. Wir wählen die Stäbe *a* und *d*, die am besten isotrop sind, und erhalten sodann schließlich:

M 5. Prüfung für nahezu isotropes Flußspat.

	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-8}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-8}$
Empirischer Wert <i>a</i>)	10,57	4,28
Empirischer Wert <i>d</i>)	10,49	4,25
Alte Theorie	11,49	4,495
Neue Theorie	11,12	4,33

Wegen der schlechten Isotropie hat die Vergleichung keine große Beweiskraft, er spricht allenfalls nicht gegen die neue Theorie.

⁴⁹⁾ Voigt, Wied. Ann. 42, S. 537—548, 1891.

V. UNTERSUCHUNGEN AN SPEZIELLEN AGGREGATEN.

§ 1. Die nichtisotropen Aggregate.

Aus den Isotropieprüfungen im III. und IV. Kapitel ist hervorgegangen, daß von den Metallaggregaten, deren Moduln bis jetzt gemessen worden sind, nur wenige ungefähr isotrop sind. Im allgemeinen waren die Stäbe so ziemlich zylindrisch symmetrisch in Bezug auf die Stabsachse, es zeigten sich aber oft bedeutende Unterschiede zwischen dem elastischen Verhalten in der Richtung der Stabsachse und senkrecht dazu. Diese Aggregate von nahezu axialer Symmetrie bilden 3 Gruppen, wovon jede durch bestimmte Abweichungen von \mathfrak{E} und \mathfrak{I} gekennzeichnet ist:

1^o. Einige gegossene Stäbe der hexagonalen Metalle, nämlich der Grüneisensche Zinkstab I der Tabelle D 4 und die Voigtschen Cadmiumstäbe 1a—1d aus E 4; bei allen ist das \mathfrak{E} , und, wo es gemessen ist, das \mathfrak{I} bedeutend größer als die berechneten und empirischen Werte für isotrope Aggregate.

2^o. Alle Voigtschen gegossenen Stäbe der regulären Metalle; hier ist \mathfrak{E} zu klein, \mathfrak{I} verhältnismäßig größer und bei einigen Al. und allen Au.-Stäben auch absolut zu groß.

3^o. Der Grüneisensche Goldstab II, 1b der Tabelle K 4. Bei diesem Stab sind die gemessenen \mathfrak{E} und \mathfrak{I} beide größer als die berechneten. Die Abweichungen sind so klein, daß sie vielleicht aus der Ungenauigkeit der Goensschen Kristallkonstanten zu erklären sind; wo aber Grüneisen selbst merkliche Anisotropie fand (vergl. Tabelle C) scheint es lohnend, auch diesen Fall näher zu untersuchen.

Für jede dieser 3 Gruppen wollen wir die Rechnung durchführen mit Hinblick auf bestimmte Objekte. Wir wählen:

für die erste Gruppe das Zink 1	aus D 4
„ „ zweite „ „	Gold 2a, b „ K 4
„ „ dritte „ „	Gold 1b „ K 4.

In diesen Fällen handelt es sich um Metallstäbe, die als chemisch rein bezeichnet sind. Die Abweichungen sind also nicht dem Einfluß

von Beimischungen zuzuschreiben; die Tatsache, daß wenigstens ein Modul zu groß ist, zeigt, daß auch die Porosität jedenfalls nicht die einzige Ursache der Abweichungen sein kann. Fehler in den Kristallkonstanten können schwerlich den sehr hohen Wert des Grüneisenschen Zinkmoduls erklären, um so weniger, wo die sehr verschiedenen Kristallkonstanten von Grüneisen und Bridgman ungefähr dasselbe \mathcal{E} ergeben; bei Gold würde Änderung der Kristallkonstanten jedenfalls nicht für alle Objekte gleichzeitig Übereinstimmung erzeugen. Sehr wahrscheinlich sind daher spezielle Strukturen der ausgewählten Aggregate als Ursachen der Abweichungen zu betrachten; wir wollen versuchen, diese Strukturen aus den Aggregatsmoduln zu ermitteln und an andern Daten nachzuprüfen.

Mit großer Vorsicht lassen sich die erhaltenen Resultate vielleicht auf andre Objekte derselben Gruppen übertragen, wie das Voigtsche *Cd* und *Al*.

In den folgenden Paragraphen werden zuerst Formeln für die Konstanten und Moduln ermittelt bei verschiedenen einfachen speziellen Aggregaten. Bei den hexagonalen Kristallen beschränken wir uns auf die Aggregate, wo alle hexagonalen Hauptachsen der Einkristalle entweder parallel oder senkrecht zur Stabsachse sind, im letzteren Fall mit gleicher Häufigkeit in allen möglichen Richtungen. Im regulären System betrachten wir diejenigen Vielkristallstäbe, wo die gleiche kristallografisch wichtige Richtung in allen Einkristallen der Stabsachse parallel liegt; ist dies die Hexaeder-, Oktaeder- oder Rhombendodekaedernormale, so werden die Aggregate bzw. als *H*-, *O*- und *R*-Aggregate bezeichnet. Auch hier kommen alle mit der gewählten Annahme verträglichen Orientierungen in gleicher Häufigkeit vor.

Wir tragen in die so erhaltenen Formeln die Kristallkonstanten von Zink und Gold ein und vergleichen die so berechneten Werte für \mathcal{E} und womöglich \mathfrak{L} und μ (die Querkontraktion) mit den empirischen. Vielleicht ist die Übereinstimmung so gut, daß wir dem Aggregat die reine spezielle Struktur zuschreiben dürfen. Meistens wird jedoch eine der speziellen Strukturen zwar Werte für \mathcal{E} , \mathfrak{L} und μ aufweisen, die von den Isotropiemoduln in der erwünschten Richtung abweichen, aber in zu starkem Maße; die empirischen Daten liegen zwischen den berechneten Werten für das allgemeine und ein bestimmtes spezielles Aggregat. Wir können das Ergebnis deuten als eine Struktur, wo im isotropen Aggregat Einzelkristalle von bestimmter Vorzugsorientierung vorkommen. Falls alle empirischen Werte zuverlässig sind, können wir sogar den Prozentsatz

der speziell orientierten Kristallsubstanz abschätzen. An jedem einzelnen Modul können wir die Schätzung machen; gute Übereinstimmung der Prozentsätze, mit \mathfrak{G} , \mathfrak{Z} und eventuell μ erhalten, weisen darauf hin, daß die so bestimmte Struktur des Aggregats einigermaßen zuverlässig ist. Jedenfalls ist Nachprüfung der ermittelten Struktur, mit Röntgenstrahlen oder andern Hilfsmitteln, sehr erwünscht.

Wir können die obenerwähnte Abschätzung ziemlich roh so machen, daß wir für jeden Modul seine Änderung dem Prozentgehalt der speziell orientierten Substanz proportional ansetzen. Eine größere Genauigkeit wird erreicht, wenn wir diese Proportionalität nicht anwenden auf \mathfrak{G} , \mathfrak{Z} und μ , sondern auf die Größen $\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}}$, $\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}}$ u.s.w. der Formeln (40)–(44). Dies geht hervor aus der Gl. (34), die für jede einzelne Lamelle, speziell orientiert oder nicht, des gemischten Aggregats gilt. Daraus folgen für die Kristallkonstanten des gemischten Aggregats, wo der Bruchteil p der Kristallsubstanz speziell, der Rest allgemein orientiert ist, wenn wir die Aggregatskonstanten bei spezieller und allgemeiner Orientierung mit Einzel- und Doppelstrich andeuten:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{p}{\mathfrak{G}'_{33}} + \frac{1-p}{\mathfrak{G}''_{33}}, \dots \dots \dots (121a)$$

$$\frac{\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{33}} = p \frac{\mathfrak{G}'_{13}}{\mathfrak{G}'_{33}} + (1-p) \frac{\mathfrak{G}''_{13}}{\mathfrak{G}''_{33}}, \dots \dots \dots (121b)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_{44}} = \frac{p}{\mathfrak{G}'_{44}} + \frac{1-p}{\mathfrak{G}''_{44}}, \dots \dots \dots (121c)$$

$$\mathfrak{G}_{11} - \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = p \left(\mathfrak{G}'_{11} - \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}'_{33}} \right) + (1-p) \left(\mathfrak{G}''_{11} - \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}''_{33}} \right), (121d)$$

$$\mathfrak{G}_{11} - \mathfrak{G}_{12} = p(\mathfrak{G}'_{11} - \mathfrak{G}'_{12}) + (1-p)(\mathfrak{G}''_{11} - \mathfrak{G}''_{12}) \dots (121e)$$

Im regulären System werden (121b) und (121d) wie früher ersetzt durch die Kompressionsformel:

$$\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_{13} = 2\mathfrak{G}_{13} + \mathfrak{G}_{33} = c_{11} + 2c_{12} \dots \dots \dots (121f)$$

Aus diesen Formeln lassen sich für einige Zahlenwerte von p die \mathfrak{G}_{ik} und daraus \mathfrak{G} , \mathfrak{Z} und μ des gemischten Aggregats berechnen; Interpolation der empirischen Daten ergibt dann 2 oder 3, mehr oder weniger übereinstimmende Werte für p .

Es ist ohne weiteres klar, daß die Messung von 2 oder 3 elastischen Konstanten nie die genaue Struktur eines gemischten Aggregats ein-

wandfrei feststellen kann; denselben Effekt wie den einer Beimischung von Einkristallen in H -Orientierung kann man etwa erzielen durch Beimischung von Einkristallen, deren H -Achsen einen bestimmten spitzen Winkel mit der Stabsachse bilden und in gleicher Häufigkeit um diese Achse herum verteilt sind, oder durch andre Verteilungsfunktionen von axialer Symmetrie. Die Röntgenanalyse wird voraussichtlich über die Einzelheiten solcher Strukturen nähere Auskunft geben können.

§ 2. Spezielle Aggregate von hexagonalen Kristallen.

Wir suchen zuerst Formeln für die Konstanten der 2 speziellen Aggregate hexagonaler Kristalle, die im vorigen § hervorgehoben sind, nämlich der Vielkristalle mit allen hexagonalen Hauptachsen parallel bzw. senkrecht zur Stabsachse.

Die erste Orientierung gibt ein sehr einfaches Resultat: wegen der axialen Symmetrie des hexagonalen Kristalls benimmt sich das Aggregat in seinen elastischen Eigenschaften wie ein Einkristall mit der hexagonalen Hauptachse in der Längsrichtung des Stabes.

Als Aggregatskonstanten erhalten wir also die unmodifizierten Kristallkonstanten und es gelten nach den Hookeschen Gleichungen für dieses spezielle Aggregat die Formeln:

$$\mathfrak{G} = c_{33} - \frac{2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}} \dots \dots \dots (122a)$$

$$\mathfrak{I} = c_{44} \dots \dots \dots (122b)$$

Mehr Schwierigkeiten bringt die zweite spezielle Struktur, wo die hexagonalen Hauptachsen über alle Richtungen senkrecht zur Stabsachse in gleicher Häufigkeit verteilt sind. Für ein solches Aggregat wollen wir jetzt die Konstanten berechnen.

Zunächst betrachten wir ein primäres Lamellenaggregat mit der Stabsachse als Lamellennormale. Es gelten jetzt die Formeln (81) des III. Kapitels, wenn man in ihnen $\int_0^1 d\gamma$ überall streicht und das γ

durch o ersetzt. Die Moduln werden in diesem Falle mit \mathfrak{G}_I und \mathfrak{I}_I angedeutet; wir berechnen nur diejenigen Aggregatskonstanten, die zur Berechnung von \mathfrak{G}_I und \mathfrak{I}_I benutzt werden. Wir erhalten:

$$\mathfrak{I}_I = \mathfrak{G}_{44} \dots \dots \dots (123a)$$

und

$$\mathfrak{G}_I = \frac{1}{\mathfrak{G}_{33}},$$

also nach (69)

$$\mathfrak{G}_I = \frac{\mathfrak{G}_{33}(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}) - 2\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}} \dots \dots \dots (123b)$$

Aus (81d) erhalten wir

$$2(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}) - 4 \frac{\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{\varrho}{c_{11}},$$

aus (81a) und (81b)

$$\frac{4\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{33}} = \frac{(c_{13} + c_{12})^2}{c_{11}},$$

also

$$2(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}) = \frac{\varrho + (c_{13} + c_{12})^2}{c_{11}}$$

oder nach (75)

$$2(\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}) = c_{11} + c_{33} + 2c_{13}.$$

Tragen wir diesen Wert und

$$\mathfrak{G}_{33} = c_{11}$$

in die Gleichung (123b) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{G}_I = \frac{\varrho}{c_{11} + c_{33} + 2c_{13}} \dots \dots \dots (124a)$$

Daneben folgt aus (123a) und (81c)

$$\frac{2}{\mathfrak{I}_I} = \frac{1}{c_{44}} + \frac{1}{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} \dots \dots \dots (124b)$$

Die Voigtsche Theorie ergibt nach einiger Rechnung:

$$\mathfrak{G}_{\text{Voigt}} = \frac{\varrho}{c_{11} + c_{33} + 2c_{13}} \dots \dots \dots (125a)$$

$$2\mathfrak{I}_{\text{Voigt}} = c_{44} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \dots \dots \dots (125b)$$

Erstere Formel stimmt genau mit (124a) überein, letztere ist die erste Annäherung von (124b) für kleine Anisotropie. Ist die Isotropie der Einkristalle gering, so dürfen wir ohne weiteres die Formeln (125) anwenden.

Ist die Anisotropie der Einkristalle größer, von der Größenordnung der Anisotropie beim Gold, so wird die Voigtsche Annäherung zu grob. In diesem Fall haben wir gefunden (Tabelle K 2), daß das allgemeine primäre Aggregat schon praktisch isotrop ist, die Lage der Grenzflächen

im Aggregat also keinen merklichen Einfluß ausübt. Wir übertragen dieses Resultat auf das spezielle Aggregat und nehmen an, daß auch hier bei mittlerer Anisotropie die Aggregatskonstanten wenig von der Lage der Lamellennormale beeinflußt werden. Die durch (124a) und (124b) bestimmten Moduln dürften also in zweiter Annäherung nicht nur gelten für das einfache Lamellenpaket mit der Lamellennormale in der Stabsachse, sondern für jedes Aggregat mit willkürlichen Grenzflächen, das die spezielle Orientierung der Kristallachsen aufweist. Auch für hexagonale Einkristalle mittlerer Anisotropie wäre die gestellte Aufgabe also gelöst.

Bei den hexagonalen Metallen, die uns jetzt beschäftigen, Zink und Cadmium, ist aber die Anisotropie leider sehr groß. Die Tabellen D 2 und E 2 zeigen, daß das primäre allgemeine Aggregat hier ausgesprochen anisotrop ist, daß also die Lage der Grenzflächen bei der allgemeinen Orientierung die elastischen Konstanten merklich beeinflußt. Dies könnte bei der speziellen Orientierung auch der Fall sein, es ist daher nicht ohne weiteres erlaubt, das in Wirklichkeit auftretende Körneraggregat durch ein einfaches Lamellenpaket zu ersetzen. Die beste Annäherung würden wir wohl erhalten durch Anwendung des Aufbauprinzips (VII) des Kap. II, § 1. Wir hätten demnach ein Aggregat aufzubauen aus sekundären Lamellen senkrecht zur Stabsachse, jede einzelne Lamelle zusammengesetzt aus primären Lamellen irgend welcher Lage, während in jedem Paket solcher primären Lamellen die Netzorientierungen eine gleichmäßige Verteilung der hexagonalen Hauptachsen senkrecht zur Normale der sekundären Lamellen aufweisen sollten. Für die Rechnung bringt dies aber beträchtliche Schwierigkeiten mit sich. Die sekundären Lamellen haben jetzt im allgemeinen die Symmetrie monokliner Kristalle und zwar mit Konstanten, die in den einzelnen Lamellen verschiedene Werte haben. Als Grenzfälle treten sekundäre Lamellen von hexagonaler und rhombischer Symmetrie auf. Erstere zeigen den Aufbau des vorher besprochenen primären Lamellenaggregats mit den Moduln \mathfrak{G}_I und \mathfrak{T}_I , letztere sind zusammengesetzt aus primären Lamellen senkrecht zur sekundären Lamellenebene, welche also der Stabsachse parallel sind.

Wären die Kristallkonstanten für die monoklinen sekundären Lamellen einmal berechnet, so würde die Mittelung über das ganze Aggregat mittels der Voigtschen Formeln ziemlich leicht sein, die Bestimmung der monoklinen Konstanten scheint aber um so schwerer. Ich habe mich daher entschlossen, von den sekundären Lamellen nur die

fallen, das Verhältnis von Drehungsmoment und Drillung in verschiedener, mehr oder weniger verwickelter Weise von den Größen \mathfrak{E}_{44} ($= \frac{1}{\mathfrak{E}_{44}}$) und \mathfrak{E}_{66} ($= \frac{1}{\mathfrak{E}_{66}}$) ab, je nachdem der Querschnitt des Stabes die eine oder die andre Form hat⁵¹⁾. Es wird sich aber zeigen, daß für unser rhombisches Lamellenaggregat gilt

$$\mathfrak{E}_{44} = \mathfrak{E}_{66},$$

sodann gehen die betreffenden Formeln in die Formeln für eine isotrope Substanz⁵²⁾ oder ein axiales Aggregat über und es gilt

$$\mathfrak{I}_{II} = \frac{1}{\mathfrak{E}_{44}} = \frac{1}{\mathfrak{E}_{66}} \quad \dots \quad (127b)$$

Für unsern Zweck genügt es also, die 3 Hauptmoduln \mathfrak{E}_{22} , \mathfrak{E}_{44} und \mathfrak{E}_{66} des rhombischen Aggregats zu berechnen.

Dazu schreiben wir wie im II. Kapitel den Ausdruck für die Potentialfunktion $\bar{\varphi}$ des Aggregats in den beiden gleichwertigen Formen (35) und (35a):

$$\begin{aligned} 2\bar{\varphi} &= -\bar{\delta}_{33}Z_z^2 - \bar{\delta}_{44}Z_y^2 - \bar{\delta}_{55}Z_x^2 - \dots + \\ &+ \bar{\varphi}_{11}x_x^2 + \dots = \\ &= \bar{\sigma}_{11}x_x^2 + \bar{\sigma}_{22}y_y^2 + \bar{\sigma}_{66}x_y^2 + 2\bar{\sigma}_{12}x_xy_y + \dots \quad (128) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung lassen sich ausdrücken, das eine Mal in den Hauptmoduln \mathfrak{E}_{ik} des rhombischen Aggregats, das andre Mal als Integralformeln der Hauptkonstanten oder Hauptmoduln des hexagonalen Einkristalls. Die erste Rechnung, analog derjenigen, die zu der Gleichung (39) geführt hat, liefert die Formeln:

$$\bar{\delta}_{44} = \mathfrak{E}_{44}, \quad \dots \quad (129a)$$

$$\bar{\sigma}_{66} = \frac{1}{\mathfrak{E}_{66}}, \quad \dots \quad (129b)$$

außerdem

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\mathfrak{E}_{22}}{\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{E}_{22} - \mathfrak{E}_{12}^2},$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{\mathfrak{E}_{11}}{\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{E}_{22} - \mathfrak{E}_{12}^2},$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{-\mathfrak{E}_{12}}{\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{E}_{22} - \mathfrak{E}_{12}^2},$$

⁵¹⁾ vgl. z. B. Voigt, l. c. S. 638, 644; Love, Treatise on the math. theor. of elast., 4th ed. 1927, S. 325.

⁵²⁾ vgl. Love, l. c. S. 318.

woraus folgt

$$\overline{\sigma_{11}\sigma_{22}} - \overline{\sigma_{12}}^2 = \frac{1}{\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{22} - \mathfrak{S}_{12}^2}$$

also schließlich

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_{22}} = \overline{\sigma_{22}} - \frac{\overline{\sigma_{12}}^2}{\overline{\sigma_{11}}} \dots \dots \dots (129c)$$

Wir brauchen also bloß die Koeffizienten $\overline{\delta_{44}}$, $\overline{\sigma_{66}}$, $\overline{\sigma_{11}}$, $\overline{\sigma_{22}}$ und $\overline{\sigma_{12}}$ der Gleichung (128) in den c_{ik} oder s_{ik} auszudrücken.

Die Rechnung verläuft den Ausführungen im III. Kapitel parallel. Die Hauptdeterminanten Δ und Σ haben genau dieselbe Form, diejenige der Gl. (71) und (71a); von den Zählern der Ausdrücke $\frac{\Delta_{44}}{\Delta}$, $\frac{\Sigma_{66}}{\Sigma}$ u.s.w. werden einzelne einfacher, weil $\beta = 0$ und $\alpha^2 = 1 - \gamma^2$.

Um die Mittelwerte zu bilden schreiben wir $\gamma = \cos \varphi$, es wird so z. B.

$$\overline{\delta_{44}} = \frac{2}{c_{11} - c_{12}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{1 - L \cos^2 \varphi}.$$

Neben diesem Integral, das wegen (72) den Wert $\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2c_{44}}}$ besitzt, treten Ausdrücke auf, die den Formen (82b—d) analog sind:

$$P' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4}, \dots \dots \dots (130a)$$

$$Q' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\gamma^2 d\varphi}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4}, \dots \dots \dots (130b)$$

$$R' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\gamma^2(1 - \gamma^2) d\varphi}{1 - M\gamma^2 + N\gamma^4}, \dots \dots \dots (130c)$$

Die Rechnung ergibt:

$$\overline{\delta_{44}} = \sqrt{\frac{2}{c_{44}(c_{11} - c_{12})}} \dots \dots \dots (131a)$$

$$\overline{\sigma_{66}} = \sqrt{\frac{c_{44}(c_{11} - c_{12})}{2}} \dots \dots \dots (131b)$$

$$\overline{\sigma_{11}} = \frac{\lambda(c_{11} - c_{12})}{c_{11}} \cdot s_{11} P' \dots \dots \dots (131c)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{\lambda(c_{11} - c_{12})}{c_{11}} [-s_{13}P' + (s_{13} - s_{12})Q'] \quad \dots \quad (131d)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{\lambda(c_{11} - c_{12})}{c_{11}} [s_{33}P' + (s_{11} - s_{33})Q' - HR'] \quad \dots \quad (131e)$$

Sodann erhalten wir aus (127a), (127b), (129a, b, c):

$$\mathfrak{E}_{II} = \frac{\lambda(c_{11} - c_{12})}{c_{11}} \left[s_{33}P' + (s_{11} - s_{33})Q' - HR' - \frac{\{-s_{13}P' + (s_{13} - s_{12})Q'\}^2}{s_{11}P'} \right] \quad (132a)$$

$$\mathfrak{T}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2}c_{44}(c_{11} - c_{12})} \quad \dots \quad (132b)$$

Diese Werte, zusammen mit dem \mathfrak{E}_I und dem \mathfrak{T}_I der Formeln (124), werden eingetragen in die Gleichungen:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{3}(\mathfrak{E}_I + 2\mathfrak{E}_{II}) \quad \dots \quad (133a)$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{3}(\mathfrak{T}_I + 2\mathfrak{T}_{II}) \quad \dots \quad (133b)$$

So erhalten wir die Dehnungs- und Torsionsmoduln des zweiten speziellen Aggregats (mit den hexagonalen Hauptachsen der Einkristalle senkrecht zur Stabsachse) für den Fall, wo die Einkristalle stark anisotrop sind.

§ 3. Untersuchung der Struktur des anisotropen Grüneisen-schen Zinkaggregats.

Wir wollen jetzt die Formeln (122) und (133) bei Zink anwenden um zu untersuchen, ob eine der besprochenen speziellen Strukturen den außerordentlich hohen Wert für \mathfrak{E} erklärt, den Grüneisen 1907 an einem Zinkstab der Phys. Techn. Reichsanstalt in Charlottenburg gemessen hat; sein \mathfrak{E} war höher als der höchste Wert, den der Dehnungsmodul im Einkristall erreicht. Darum sind in der Tabelle N 1 die extremen Werte des Moduls im Einkristall zusammengestellt mit den Werten für \mathfrak{E} bei speziellen Aggregaten der beiden erwähnten Orientierungen und beim allgemeinen Aggregat, und mit dem Grüneisenschen Modul, gemessen am Stab 1 von D 4. Alle berechneten Moduln sind mit der Voigtschen und mit der neuen Theorie bestimmt worden; überall sind wiederum 2 Werte angegeben, wovon der erste aus den Grüneisenschen, der zweite, eingeklammert geschriebene, aus den Bridgmanschen Kristallkonstanten berechnet worden ist. Stets sind C. G. S. Einheiten verwendet.

N 1. Dehnungsmoduln ($\cdot 10^{-11}$) beim Zink.

Einkristall, kleinster Modul ⁵³⁾	3,54 (3,79)	
„ , größter „ ⁵⁴⁾	12,50 (12,15)	
Spez. Aggr., hexag. H.A. // Stabsachse,	3,54 (3,79)	(122a)
„ „ , „ „ \perp „ , n.Voigt ⁵⁵⁾	13,59 (13,86)	(125a)
„ „ , „ „ „ „ „ , neu ⁵⁶⁾ . .	13,16 (13,17)	(133a)
Isotropes Aggr., n. Voigt	10,96 (11,23)	D 3
„ „ , neu	9,94 (10,21)	D 3
Das Grüneisensche Zn II	12,85	D 4

Aus dieser Tabelle lassen sich mehrere Schlüsse ziehen.

Erstens erkennt man beim zweiten speziellen Aggregat einen deutlichen Unterschied zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Theorie. Wird die neue Theorie nur auf das hexagonale primäre Lamellenaggregat angewandt, so stimmt das \mathcal{E}_I aus (124a) mit dem Voigtschen \mathcal{E} überein, die umfangreiche Rechnung, die \mathcal{E}_I mittels (132a) und (133a) durch \mathcal{E} ersetzt hat, ist lohnend gewesen.

Zweitens ist der Modul für das spezielle Aggregat mit allen hexagonalen Hauptachsen senkrecht zur Stabsachse wirklich größer als der größte Dehnungsmodul im Einkristall, sowohl wenn man die Grüneisenschen als wenn man die Bridgmanschen Kristallkonstanten zu Grunde legt. Diese merkwürdige Eigentümlichkeit des Grüneisenschen Zinkstabs geht somit zwanglos aus der Annahme hervor, daß der betreffende Stab die erwähnte spezielle Struktur aufweist.

Drittens besteht eine gute Übereinstimmung zwischen dem empirischen und dem nach der neuen Theorie berechneten Wert des Dehnungsmoduls. Zieht man in Betracht, daß das Zinkaggregat eine rissige Oberfläche hatte, wodurch das \mathcal{E} verkleinert wird, so ist vollständige Übereinstimmung nicht ausgeschlossen.

$$^{53)} \quad \mathcal{E} = c_{33} - \frac{2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}}.$$

$$^{54)} \quad \mathcal{E} = c_{11} - \frac{c_{11}c_{13}^2 + c_{33}c_{12}^2 - 2c_{12}c_{13}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}.$$

⁵⁵⁾ Dieser Wert ist gleich dem \mathcal{E}_I der neuen Theorie.

⁵⁶⁾ Aus $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_I + 2\mathcal{E}_{II}}{3}$, das \mathcal{E}_{II} hat den Wert 12,95 (12,83).

Es scheint also die Folgerung erlaubt, daß in dem gegossenen Zinkstab II der Grüneisenschen Untersuchung vom J. 1907 die Einkristalle wahrscheinlich in überwiegender Zahl speziell orientiert waren mit den hexagonalen Hauptachsen senkrecht zur Stabsachse.

Ich habe in der Literatur keine Angabe über spezielle Strukturen bei Zinkaggregaten gefunden; Röntgenprüfungen liegen soviel ich weiß nicht vor. Dagegen läßt sich aus Messungen auf ganz andrem Gebiet eine zweite, unabhängige Prüfung der Struktur desselben Zinkstabs II vornehmen. Der Stab ist nämlich früher von Jaeger und Diesselhorst auf seine elektrische Leitfähigkeit untersucht worden⁵⁷⁾, diese betrug bei 18° $16,51 \cdot 10^4$. Da tat sich die merkwürdige Tatsache vor, daß zwei Drähte, aus diesem Stab gezogen, Leitfähigkeiten zeigten bzw. gleich $15,98 \cdot 10^4$ und $15,95 \cdot 10^4$; ein anderer Zinkstab, Zn I (Nummer 4 unsrer Tabelle D 4) wies Werte $15,88 \cdot 10^4$ und $15,83 \cdot 10^4$ auf. Dies deutet jedenfalls auf eine spezielle Struktur des Zinkstabs II hin. Näheres läßt sich schließen aus den Messungen der elektrischen Widerstände in Zinkeinkristallen, die sowohl Grüneisen und Goens⁵⁸⁾ wie Bridgman⁵⁹⁾ ausgeführt haben. Erstere fanden für den elektrischen Widerstand parallel und senkrecht zur hexagonalen Hauptachse bzw. $5,83 \cdot 10^{-6}$ und $5,39 \cdot 10^{-6}$, letzterer fand für dieselben Größen bzw. 5,66 und 5,45. Aus diesen elektrischen Kristallkonstanten lassen sich die Widerstände für allgemeine und spezielle Aggregate berechnen.

Die Voigtsche Theorie für diese Rechnung ist im Kap. I, § 2 dieser Arbeit kurz wiedergegeben. Seine Methode ist wiederum eine erste Annäherung, nach der Methode des II. Kapitels dieser Arbeit lassen sich neue Formeln ermitteln, die hier viel einfacher sind als für die Elastizität. Wo aber die elektrische Anisotropie des Zinks klein ist, genügen hier die Voigtschen Formeln. In der Tabelle N 2 sind die berechneten und empirischen Werte zusammengestellt, wie bei den elastischen Größen findet man auch hier in jeder Zeile der berechneten Werte 2 Zahlen, erstere nach den Grüneisenschen, letztere nach den Bridgmanschen Widerständen bei Einkristallen. Die Einheit ist das $\Omega \text{ cm} \cdot 10^{-6}$.

⁵⁷⁾ Jaeger und Diesselhorst, Wärmeleitung, Elektrizitätsleitung, Wärmekapazität u. Thermokraft einiger Metalle.

Wiss. Abh. der Phys.-Techn. Reichsanstalt, 3, S. 269—423, 1900.

⁵⁸⁾ Grüneisen u. Goens, Z. f. Phys. 26, S. 250—273, 1924.

⁵⁹⁾ Bridgman, Proc. Nat. Ac. 10, S. 411, 1924.

N 2. Elektrische Widerstände beim Zink.

Einkristall parallel der H. A.	5,83 (5,66)
„ senkrecht zur H. A.	5,39 (5,45)
Spezielles Aggregat, H. A. // Stabsachse.	5,83 (5,66)
„ „ , H. A. \perp „	5,39 (5,45)
Allgemeines „ , n. Voigt	5,61 (5,55)
Empirischer Wert für Zn I	6,31
„ „ „ Zn II	6,05
„ „ „ 1. Draht aus Zn II	6,26
„ „ „ 2. „ „ „ „	6,27

Die berechneten und gemessenen Widerstände stimmen dem absoluten Wert nach schlecht überein, offenbar hat die Tatsache der Vielkristallstruktur mehr Einfluß auf die elektrischen als auf die elastischen Widerstände. Es zeigt sich aber, daß Zn II in derselben Richtung abweicht von den andren Aggregaten (die unter sich ziemlich gut übereinstimmen) wie das 2. spezielle Aggregat von dem isotropen. Auch das Verhältnis stimmt nicht schlecht, Zn II bleibt 3 bis 4 Prozent unter den andern Aggregaten, während die spezielle Struktur, die wir aus den elastischen Messungen für Zn II ermittelt haben, für den spezifischen Widerstand Werte ergeben würde, die nach den Grüneisenschen bzw. Bridgmanschen Daten 4 bzw. 2% kleiner sind als der Widerstand des allgemeinen Aggregats.

Soweit die Genauigkeit der Leitfähigkeitsmessungen reicht, scheinen sie also unsre Vermutung über die Struktur des Grüneisenschen Zinkstabs II zu bestätigen.

Falls der Rest dieses Stabes in Charlottenburg aufbewahrt wird (ein Teil ist jedenfalls für die erwähnten Drähte verwendet worden) wäre Nachprüfung der gefundenen Struktur mittels Röntgenstrahlen sehr erwünscht.

Beim Cadmium liegen die Verhältnisse ähnlich wie beim Zink, nur ist alles ungewisser. Erstens liegen die Aggregatskonstanten, berechnet aus den Grüneisenschen und Bridgmanschen Kristallkonstanten, beim speziellen wie beim allgemeinen Aggregat, weiter auseinander. Zweitens ist von den abweichenden Aggregaten, hier den 4 Voigtschen Stäben, die Leitfähigkeit nicht bekannt, so daß die Kontrolle auf die eventuell gefundene Struktur wegfällt. Dem steht gegenüber, daß Voigt an seinen Stäben 2 Moduln gemessen hat, wodurch eine doppelte Prüfung möglich wird. Das Ergebnis findet man in

N 3. Moduln für spezielles Cadmium.

	$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$
Spez. Aggr., hex. H.A. \perp Stabsachse, n. Voigt	8,78 (8,32)	2,73 (2,51)
„ „ „ „ „ „ „ „ , neu .	8,52 (8,08)	2,54 (2,27)
Isotropes Aggregat, neu	6,02 (5,47)	2,27 (2,07)
Empirische Werte, Cd 1a	6,94	2,42
„ „ „ „ 1b	7,06	2,36
„ „ „ „ 1c	6,94	2,42
„ „ „ „ 1d	6,78	2,41

Bei allen Stäben zeigen \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} deutliche Abweichungen von der Isotropie im Sinne einer Struktur mit Vorherrschaft derjenigen Orientierungen, wo die hexagonale Hauptachse senkrecht zur Stabsachse liegt. Nach den empirischen Werten von \mathfrak{Z} wäre es nicht ausgeschlossen, daß das Aggregat nur solche Orientierungen enthalten würde, die gemessenen \mathfrak{E} sind aber merklich zu klein. In wiefern die Abweichungen beruhen auf der Beimischung von Kristallen anderer Orientierungen, in wiefern sie auf Porosität (die bei ungleichmäßiger Verteilung der Poren \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} verschieden beeinflußt) beruhen, läßt sich bei der großen Ungewißheit der Daten nicht einmal vermuten. Jedenfalls ist das Voigtsche Cadmium anisotrop, wie aus der Tabelle E 5 hervorgeht, und die Tabelle N 3 macht es wahrscheinlich, daß bei der speziellen Verteilung der Kristallorientierungen diejenigen mit der hexagonalen Hauptachse senkrecht zur Stabsachse stark vertreten sind. Die Häufigkeit dieser Vorzugsorientierung wird in den verschiedenen Stäben nie völlig gleich sein, daher wohl die verschiedenen Werte der empirischen Moduln.

§ 4. Spezielle Aggregate von regulären Kristallen.

Im regulären System untersuchen wir die Strukturen, wo alle Einkristalle des Aggregats bzw. eine Hexaeder-, Oktaeder- oder Rhombendodekaedernormale in der Stabsachse haben; im folgenden werden sie als *H*-, *O*- und *R*-Aggregate bezeichnet. Ich beschränke mich auf primäre Lamellenaggregate mit den Lamellenebenen senkrecht zur Stabsachse, die erhaltenen Formeln gelten also mit guter Annäherung nur für Kristalle von kleiner und mittlerer Anisotropie, wie sie beim Aluminium und Gold auftreten.

Für die Aggregatskonstanten gelten sodann die Gleichungen (108a)

und (108b) zusammen mit (113c, d, e), wenn wir aus ersteren den Faktor $\frac{1}{4\pi}$, das \int und das $d\sigma$ streichen. Die ψ und χ lassen sich entnehmen aus der Tabelle

O 1. Richtungscosinus in spez. Aggr.

	H-Aggr.	O-Aggr.	R-Aggr.
γ_1	1	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
γ_2	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
γ_3	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0
ψ	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
χ	0	$\frac{1}{27}$	0

In der Tabelle O 2 ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{G}_{44}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\mathfrak{E}_{33}} = \mathfrak{G}_{33} - \frac{2\mathfrak{G}_{13}^2}{\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}}.$$

Die Querkontraktion

$$\mu = \frac{\mathfrak{G}_{13}}{\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}}.$$

Wir erhalten:

O 2. Konstanten bei speziellen Aggregaten regulärer Kristalle.

	H-Aggr.	O-Aggr.	R-Aggr.
\mathfrak{G}_{33}	c_{11}	$c_{11} - \frac{2}{3}f$	$c_{11} - \frac{1}{2}f$
\mathfrak{G}_{13}	c_{12}	$c_{12} + \frac{1}{3}f$	$c_{12} + \frac{1}{4}f$
\mathfrak{G}_{44}	c_{44}	$c_{44} + \frac{1}{3}f$	$\frac{c_{44}(c_{44} + \frac{1}{2}f)}{c_{44} + \frac{1}{4}f}$
\mathfrak{G}_{11}	$c_{11} - \frac{1}{4}f$	$c_{11} - \frac{2}{3}f + \frac{1}{6} \frac{c_{44}f}{c_{44} + \frac{1}{3}f}$	$c_{11} - \frac{5}{8}f + \frac{1}{8}f \frac{3c_{11} - 2f}{2c_{11} - f}$
\mathfrak{G}_{12}	$c_{12} + \frac{1}{4}f$	$c_{12} + \frac{1}{3}f - \frac{1}{6} \frac{c_{44}f}{c_{44} + \frac{1}{3}f}$	$c_{12} + \frac{3}{8}f - \frac{1}{8}f \frac{3c_{11} - 2f}{2c_{11} - f}$
$\mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{12}$	$c_{11} + c_{12}$	$c_{11} + c_{12} - \frac{1}{3}f$	$c_{11} + c_{12} - \frac{1}{4}f$
\mathfrak{E}	$c_{11} - \frac{2c_{12}^2}{c_{11} + c_{12}}$	$c_{11} - \frac{2}{3}f - \frac{2(c_{12} + \frac{1}{3}f)^2}{c_{11} + c_{12} - \frac{1}{3}f}$	$c_{11} - \frac{1}{2}f - \frac{2(c_{11} + \frac{1}{4}f)^2}{c_{11} + c_{12} - \frac{1}{4}f}$
\mathfrak{E}	c_{44}	$c_{44} + \frac{1}{3}f$	$\frac{c_{44}(c_{44} + \frac{1}{2}f)}{c_{44} + \frac{1}{4}f}$
μ	$\frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}}$	$\frac{c_{12} + \frac{1}{3}f}{c_{11} + c_{12} - \frac{1}{3}f}$	$\frac{c_{12} + \frac{1}{4}f}{c_{11} + c_{12} - \frac{1}{4}f}$

Ist die Größe f , das Maß der Anisotropie, negativ, so ist bei der H -Struktur das \mathfrak{E} kleiner und das \mathfrak{I} größer als bei der O -Struktur, bei positivem f verhält sich die Sache umgekehrt. Die Moduln beim allgemeinen Aggregat liegen jedenfalls zwischen diesen extremen Werten.

§ 5. Strukturuntersuchung bei anisotropen Goldaggregaten.

In der Tabelle O 3 sind zusammengestellt die Moduln der erwiesenermaßen anisotropen Goldaggregate aus K 4 und die berechneten Moduln für mehrere spezielle und gemischte Aggregate sowie für isotropes Gold. Bei Gold ist f negativ, für die gegossenen Stäbe 2a und 2b, wo \mathfrak{E} kleiner und \mathfrak{I} größer ist als die Isotropiewerte kommt also nur eine partielle H -Struktur in Betracht. Der gezogene Goldstab 1b weist für \mathfrak{E} und \mathfrak{I} beide zu große Werte auf. Beimischung einer einzigen speziellen Orientierung kann diese Abweichung nicht erklären, ich hatte sie daher zuerst, wie schon bemerkt, einer Ungenauigkeit der Goensschen Kristallkonstanten zugeschrieben. Später fand ich die Abhandlung von Polanyi⁶⁰⁾, worin er mittels Röntgenprüfung nachweist, daß die gezogenen Aggregate von den flächenzentrierten Metallen Kupfer, Aluminium und Palladium „paratrop“ sind für 2 verschiedene spezielle Orientierungen. Im Aggregat treten Einkristalle mit O - und H -Orientierungen beide „mit stark erhöhter Häufigkeit“ auf, wobei die ersteren die zahlreicheren sind.

Polanyi hat nicht bei gezogenen Goldstäben eine solche Struktur nachgewiesen, Gold gehört aber auch zu den kubisch flächenzentrierten Elementen und aus andern Untersuchungen geht hervor, daß in gewalztem Gold dieselbe „Faserstruktur“ auftritt wie in Blechen von andern flächenzentrierten Metallen: Ag , Cu , Al , Pt ⁶¹⁾. Wir wollen daher versuchsweise für den Grüneisenschen Goldstab dieselbe Faserung annehmen, wie für die Metalle von Polanyi, und haben mittels der Formeln (121) aus § 1, auf 3 Bestandteile angewandt, die Moduln berechnet für mehrere gemischte Aggregate, zusammengesetzt aus allgemeinem, O - und H -Material (die in Betracht kommenden Prozentzahlen wurden abgeschätzt durch Interpolation der \mathfrak{E} und \mathfrak{I} zwischen den Werten für reines isotropes, bzw. O - oder H -orientiertes Material).

Die verschiedenen berechneten und gemessenen Moduln haben wir zusammengestellt in der Tabelle:

⁶⁰⁾ Polanyi, Z. f. Physik 17, S. 42—53, 1923.

⁶¹⁾ Vergl. z. B. Ewald, Kristalle u. Röntgenstrahlen, 1923, S. 143.

O 3. Prüfung für spezielle Goldaggregate.

	$\mathcal{E} \cdot 10^{-11}$	$\mathcal{L} \cdot 10^{-11}$	\mathcal{E}/\mathcal{L}	μ
Berechn. Wert für <i>H</i> -Aggregate	4,09	4,00	1,02	0,461
„ „ „ O- „	11,15	2,27	4,91	0,394
„ „ „ Isotropie	7,665	2,68	2,86	0,427
„ „ „ 95 % Is. + 5 % <i>H</i>	7,47	2,72	2,75	—
„ „ „ 90 % Is. + 10 % <i>H</i>	7,30	2,77	2,64	—
Gemess. Wert, Stab 2a, gegossen . . .	7,30	2,82	2,59	—
„ „ „ „ 2b, „ . . .	7,58	2,77	2,74	—
Berechn. Wert, für 60% Is. + 20% O + 20% <i>H</i>	7,57	2,76	2,75	0,428
„ „ „ 45% Is. + 30% O + 25% <i>H</i>	7,70	2,76	2,79	0,427
„ „ „ 20% Is. + 45% O + 35% <i>H</i>	7,82	2,77	2,82	0,426
„ „ „ 5% Is. + 55% O + 40% <i>H</i>	7,97	2,78	2,87	0,424
Gemess. Wert, Stab 1b, gezogen . . .	7,92	2,77	2,86	0,42

Nach dieser Tabelle läßt sich aus den elastischen Messungen nichts quantitatives aussagen über die Struktur der verschiedenen Goldstäbe, wohl aber qualitatives.

Erstens zeigt sich, daß hinter der scheinbar kleinen Anisotropie des gezogenen Stabes, die bei der Grüneisenschen Prüfung (Tabelle C, im § 4 des II. Kap.) hervortrat, eine sehr große wirkliche Paratropie stecken kann, wenn die Struktur bei Gold dieselbe ist wie bei den andern gezogenen Metallen mit kubisch flächenzentriertem Gitter. Wäre die Fehlergrenze der Goensschen Kristallkonstanten viel enger, z. B. unter 1 %, so könnten wir schließen, daß der Grüneisensche Stab wenig isotropes Material enthält und die 2 Polanyischen Vorzugsorientierungen ungefähr im Verhältnis 3 : 2 vertreten sind. Unter den gegebenen Umständen bleibt das Verhältnis noch einigermaßen zuverlässig und somit die Polanyische Struktur des Stabes wahrscheinlich; es ist aber sehr gut möglich, daß den Vorzugsorientierungen in viel höherem Maße die allgemeine Orientierung beigemischt ist. Beim Zinkstab konnten wir von einer wahrscheinlichen Struktur sprechen, hier ist die gefundene Struktur kaum mehr als eine Vermutung. Falls der Goldstab noch aufbewahrt wird, wäre hier, noch mehr als beim Zink, Nachprüfung mit Röntgenstrahlen erwünscht.

Nicht viel anders scheint die Sache zu liegen beim gezogenen

Aluminium, doch kommt hier die ungleiche chemische Zusammensetzung der verschiedenen Proben als weitere Ursache von Abweichungen in Betracht. Das Verhalten des Stabes 3c (= Al II) der Tabelle H 4, der sowohl dem Grüneisenschen Isotropiekriterium wie dem unsrigen genügte (vergl. Tab. C und H 5), aber für \mathcal{E} und \mathfrak{L} Werte aufwies ungefähr 3 % größer als die berechneten, wäre vielleicht aus einer Polanyischen Paratropie zu erklären.

Über die gegossenen Goldstäbe läßt sich wenig mehr aussagen, als was schon im Anfang dieses Paragraphen bemerkt worden ist. Das verkleinerte \mathcal{E} und das vergrößerte \mathfrak{L} zusammen weisen bei allen Metallen mit negativem f auf eine Beimischung von Kristallen in der H -Orientierung hin. Diese werden natürlich in verschiedenen Stäben in ungleicher Häufigkeit vertreten sein, die Daten der Tabelle O 3 vertragen sich z.B. mit etwa 12 % und 5 % solcher Kristalle in 2a und 2b. Die Zuverlässigkeit solcher Abschätzungen ist aber gering, wir beschränken uns daher auf die Aussage, daß die Annahme eines geringen Prozentsatzes von Einkristallen der H -Orientierung genügt, um die abweichenden Moduln der Voigtschen Goldstäbe zu erklären.

ZUSAMMENFASSUNG.

I. Die Voigtschen Formeln (8) [Seite 6] für die Elastizitätskonstanten eines Kristallaggregats beruhen auf unrichtigen Annahmen über die Grenzbedingungen.

II. Aus den richtigen Grenzbedingungen werden die Formeln (40)—(44) [Seite 27] und (43a)—(44a) [Seite 30] abgeleitet, deren Anwendung, nötigenfalls wiederholt, für ein zweckmäßig gewähltes isotropes Aggregat die Elastizitätskonstanten ergibt. In diesen Formeln bezeichnen die $\bar{\delta}_{ik}$, $\bar{\varphi}_{ik}$ und $\bar{\sigma}_{ik}$ Mittelwerte über gewisse Funktionen der elastischen Kristallkonstanten.

III—IV. Die Funktionen $\bar{\delta}_{ik}$ u.s.w. werden berechnet für Kristalle der hexagonalen und regulären Systeme; so erhalten wir die Formeln (84) [Seite 48] bzw. (113) [Seite 65]. Diese werden geprüft an allen mir bekannt gewordenen Daten für isotrope Metallaggregate. Die Resultate, so viel sie deutliche Unterschiede zwischen der alten und der neuen Theorie aufweisen, sind zusammengestellt in der Tabelle Q, wo \mathfrak{E} und \mathfrak{Z} bzw. Dehnungs- und Torsionsmoduln bezeichnen.

Q. Schlußtable für \pm isotropes Material.

		Zink	Cadmium	Gold	Messing
$\mathfrak{E} \cdot 10^{-11}$	{ alte Theorie neue „ gemessen	10,96 (11,23)	6,63 (6,09)	8,405	13,29
		9,94 (10,21)	6,025 (5,475)	7,665	11,19
		9,97	5,00	7,92	$11,0 \pm 1,5$
$\mathfrak{Z} \cdot 10^{-11}$	{ alte Theorie neue „ gemessen	4,415 (4,545)	2,50 (2,32)	2,96	5,035
		4,005 (4,105)	2,27 (2,07)	2,68	4,14
		3,95	1,93	2,77	$4,0 \pm 0,2$

V. Es werden für mehrere spezielle Verteilungsfunktionen der Achsenorientierungen die Aggregatskonstanten berechnet und verglichen mit den Werten, gemessen an anisotropen Aggregaten. Ein interessantes Resultat dieser Rechnungen findet sich in der Tabelle N 1 (Seite 96), die sich bezieht auf den Dehnungsmodul eines Grüneisen-schen Zinkstabs, dessen wahrscheinliche Struktur ermittelt wird.

STELLINGEN.

I.

Elke 3^e graadsvergelijking met reële coëfficiënten is te herleiden tot een vergelijking van den vorm:

$$x^3 - x - s = 0,$$

waarin s een reëel getal ≥ 0 is. Deze vergelijking heeft één positieve wortel, die gelijk is aan de convergente „wortelkettingbreuk”

$$\sqrt{1 + \frac{s}{\sqrt{1 + \frac{s}{\sqrt{\dots}}}}}$$

II.

De twee definities, die Hobson in zijn „Theory of functions of a real variable” (2^e druk, § 64, 65) geeft van de transfiniëte ordinaalgetallen der 2^e klasse, zijn niet gelijkwaardig. In verband daarmee bevat de fundamenteële stelling in § 66 een overbodige beperking.

III.

Ten onrechte meent Czuber, dat men een waarschijnlijkheidsrekening kan opbouwen op het „Prinzip des mangelnden Grundes”.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, I, 1908, p. 10.

IV.

Nog steeds worden onder de elasticiteitsconstanten van kristallen opgenomen de constanten van koperkristallen, die Voigt in 1883 indirect heeft bepaald. Deze getallen zijn niet juist, ook niet bij benadering.

W. Voigt, Berl. Sitz. Ber. 37, 1883, p. 961; 38, 1884, p. 1004.

M. Born, Enz. d. math. Wiss. V 25, 1923, p. 570.

Müller—Pouillet, Lehrbuch d. Physik, 11^e dr. I², 1929, p. 936.

V.

De theorie van Voigt over het geleidingsvermogen voor warmte en electriciteit van kristalaggregaten is slechts een eerste benadering, die b.v. bij electriche geleiding in tin zeer onnauwkeurig is.

W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, 1928, p. 956—960.

VI.

Tutton betoogt, dat de eigenschappen van Lehmanns „vloeibare kristallen” geheel verklaard worden door de „zwerm”-hypothese van Bose. Dit betoog is niet afdoende.

A. E. H. Tutton, Natural History of Crystals, 1924, p. 226—228.

VII.

Waarschijnlijk zal men elastische anisotropie bij vloeibare kristallen, althans bij sommige, kunnen aantoonen.

VIII.

In zijn „Dynamik der Kristallgitter” [1914] leidt M. Born de formules (32'), (37) en (41) voor de drie deelen van de potentiële energie bij homogene vervorming zoo af, dat hij in de formule voor de totale potentiële energie eerst overgaat van absolute tot relatieve verschuivingen en na de splitsing terugkeert tot de absolute. Deze omweg is overbodig.

IX.

Bij de Algebra op gymnasium en H. B. S. kan de behandeling der wortelvormen zeer sterk worden beperkt; de vrijkomende uren geven gelegenheid, in den onderbouw het rekenen met benaderde waarden en in de hoogste klas de ontwikkeling van het getalbegrip degelijk te behandelen.

X.

Het is gewenscht, dat ieder gymnasium en lyceum het recht verkrijgt, elk jaar te kiezen tusschen Differentiaalrekening, Analytische en Projectieve Meetkunde als verplicht examenvak voor de B-leerlingen.

