Convergeerende rijen van holomorphe functies

CONVERGEERENDE RIJEN VAN HOLOMORPHE FUNCTIES

J. MARX

CONVERGEERENDE RIJEN
VAN
HOLOMORPHE FUNCTIES

CONVERGEERENDE RIJEN VAN HOLOMORPHE FUNCTIES

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. A. A. PULLE, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 10 FEBRUARI 1930 DES NAM. 4 UUR, DOOR

JOHANNA MARX
GEB. TE DEVENTER

DRUKKERIJ J. VAN BOEKHOVEN — UTRECHT — AMSTERDAM

AAN MIJN MOEDER.
AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN VADER.

Het verschijnen van dit proefschrift geeft mij een welkome gelegenheid U, Hoogleeraren en Oud-Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn oprechte dank te betuigen voor de wetenschappelijke vorming, die Gij mij hebt gegeven.

In de eerste plaats mijn hartelijke dank aan U, Hooggeleerde WOLFF, *Hooggeachte Promotor, zoowel voor Uw bezielend onderwijs als voor de steun, die ik bij de bewerking van dit proefschrift van U mocht ontvangen. Steeds waart Gij bereid te helpen wanneer zich moeilijkheden voordeden en Uw opbouwende kritiek is mijn werk op vele plaatsen ten goede gekomen. De persoonlijke belangstelling, die ik van U mocht ondervinden, stel ik ten zeerste op prijs.*

Hooggeleerde DE VRIES, *ik dank U zeer voor de buitengewoon heldere, systematische en geanimeerde wijze waarop Gij mij met de beginselen van de Analyse en de methoden van de Hoogere Meetkunde hebt doen kennismaken.*

Hooggeleerde NIJLAND, ORNSTEIN *en* MOLL, *ook U ben ik zeer erkentelijk voor Uw onderwijs, waarvan ik heb mogen profiteeren.*

Tenslotte dank ik het College van Curatoren en de Wis- en Natuurkundige Faculteit, voor hetgeen zij gedaan hebben om mij een Rijks-studiebeurs te verschaffen, waardoor mij het voortzetten van mijn studie mogelijk was.

INLEIDING.

Door vele onderzoekers is nagegaan, aan welke voorwaarden een rij holomorphe functies in een gebied G moet voldoen, om daar tot een grensfunctie $f(z)$ te convergeeren, die eveneens holomorph in G is. De stellingen over dit onderwerp zijn in twee groote groepen te verdeelen, n.l.

1°. stellingen die betrekking hebben op gelijkmatig convergeerende rijen;

2°. stellingen die betrekking hebben op quasi-gelijkmatig convergeerende rijen.

Tot de eerste groep behoort dan in de eerste plaats de stelling van WEIERSTRASZ [1]), volgens welke de grensfunctie $f(z)$ van een gelijkmatig convergeerende rij holomorphe functies binnen een gebied G, holomorph in G is.

Er zijn echter vele criteria, waaruit men tot de gelijkmatige convergentie van de rij kan besluiten. Hieronder hebben enkele betrekking op het gedrag van de functies binnen het gebied G, andere op het gedrag van de functies op de rand van G.

Zoo is in 1894 door STIELTJES [2]) aangetoond, dat, indien een rij gelijkmatig begrensde holomorphe functies binnen een gebied G, convergeert in een deelgebied g van G, de rij binnen G gelijkmatig convergeert. In 1901 bewees OSGOOD [3]), dat men het gebied g uit de voorgaande stelling vervangen mag door een overal dichte puntverzameling V in G, terwijl VITALI [4]) (1903) en PORTER [5]) (1905) slechts een puntverzameling (z_ν) gebruikten, die minstens

---

1) Werke **1**, blz. 67, **2** blz. 205.

2) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes **2**, blz. 368.

3) Annals of Mathematics (2) **3**, Oct. 1901, blz. 26.

4) Rend. del R. Ist. Lombardo (2) **36**, 1903, blz. 772.

5) Annals of Mathematics (2) **6**, 1904—1905, blz. 190.

één verdichtingspunt z_∞ binnen G heeft. Zelfs mag volgens Blaschke [1]) (1914), indien G de eenheidscirkel is, (wat slechts een onwezenlijke beperking is) en de rij op G gelijkmatig begrensd is, het verdichtingspunt z_∞ van de verzameling (z_ν) op de rand van G liggen, mits $\prod\limits_0^\infty (z_n) = 0$; dat beteekent dus, dat de verzameling (z_n) zich niet te snel naar de rand van G verdicht. Tenslotte toonden Khintchine [2]) en Ostrowski [3]) aan, dat de verzameling (z_ν) vervangen mag worden door een puntverzameling V, met positieve maat, op de rand van G.

De eisch van gelijkmatige begrensdheid van de rij binnen het gebied G, mag vervangen worden door de voorwaarde van Carathéodory en Landau [4]), dat de functies $f_n(z)$ van de rij binnen G twee vaste waarden a en b uitsluiten of zelfs, dat $f_n(z) \neq a_n$ en $f_n(z) \neq b_n$, mits de waarden a_n en b_n binnen een vaste cirkel en niet te dicht bij elkaar liggen.

Bovengenoemde voorwaarden bepalen allen gelijkmatig convergeerende rijen. Er zijn echter voorbeelden van rijen van holomorphe functies, die niet gelijkmatig tot holomorphe grensfuncties convergeeren. De besproken stellingen geven dus eischen die wel voldoende, maar niet noodig zijn.

Omdat een holomorphe functie continu is, zal de rij in ieder geval quasi-gelijkmatig moeten convergeeren. Deze conditie is dus wel noodig, maar uit voorbeelden, waarin een rij holomorphe functies quasi-gelijkmatig tot een continue, doch niet-holomorphe grensfunctie convergeert, blijkt, dat ze niet voldoende is.

Door Wolff [5]) is een noodige en voldoende voorwaarde voor het holomorph zijn van de grensfunctie afgeleid. Door een nader onderzoek van quasi-gelijkmatig convergeerende rijen van holomorphe functies is getracht, deze voorwaarde te transformeeren.

---

[1]) Leipziger Berichte **67**, 1914—1915, blz. 194.
[2]) Fundamenta Mathematicae **4**.
[3]) Acta litt. ac. scient. **1**.
[4]) Sitz.-Ber. der K. Pr. Ak. der Wiss. **32**, 1911, blz. 587.
[5]) Mathematische Annalen (1) **81**, 1920, blz. 48.

Hierbij is onderstaande gedachtengang gevolgd.

Bij een convergeerende rij van holomorphe functies liggen de gebieden waar de convergentie gelijkmatig is, steeds overal dicht in het convergentiegebied G en de punten van ongelijkmatige convergentie vormen een lijnvormig continuum Γ, dat met de rand van G minstens één punt gemeen heeft. Het is wel waarschijnlijk, dat de bouw van dit continuum invloed heeft op de aard van de grensfunctie en het ligt dus voor de hand te trachten, voorwaarden op te sporen waaraan het moet voldoen, opdat de grensfunctie holomorph zij. De gevonden uitkomsten schijnen er op te wijzen (zooals ook te verwachten was) dat deze bouw niet te ingewikkeld mag zijn, doch vermoedelijk zijn op dit gebied nog verder-strekkende resultaten te bereiken.

Bij quasi-gelijkmatig convergeerende rijen van holomorphe functies kan men steeds, na keuze van een positief getal ε en een positief getal N (waarbij dan een getal N' hoort), het gebied G in een eindig aantal deelgebieden g_m verdeelen, zoodat in iedere g_m een functie $f_m(z)$ van de rij bestaat, die in g_m minder dan ε van de grensfunctie $f(z)$ afwijkt. Het aantal gebieden g_m is eindig, omdat $N < m < N'$. De diameter δ van deze gebieden g_m is een functie van N en ε. De invloed, die de vorm van deze functie $\delta(\varepsilon, N)$ op de aard van de grensfunctie van de rij heeft, is nagegaan. Voor enkele gevallen, waarin $\delta(\varepsilon, N)$ een bijzondere vorm heeft, kon aangetoond worden, dat de grensfunctie holomorph is. De vraag, of een dergelijke vorm van de functie δ ook werkelijk voor kan komen, is hiermee natuurlijk niet beantwoord.

Met de voorgaande onderzoekingen hangt nauw samen de vraag, onder welke omstandigheden een gebied G, dat door een lijnvormig continuum Γ in enkelvoudig samenhangende gebieden G_n verdeeld wordt, beschouwd kan worden als convergentiegebied van een rij van holomorphe functies $f_n(z)$, die binnen G gelijkmatig en op Γ ongelijkmatig convergeeren. Bovendien kan men het geval nagaan, dat de grensfunctie is voorgeschreven.

De hierop betrekking hebbende onderzoekingen van Hartogs en ROSENTHAL [1]) zijn in het kort weergegeven, waarbij de resultaten van het tweede onderzoek in iets gewijzigde, en daardoor eenvoudiger vorm zijn medegedeeld.

HARTOGS en ROSENTHAL hebben de afgeleide voorwaarden getransformeerd met behulp van de leer van puntverzamelingen; daar de hiervoor noodige beschouwingen ons echter te ver zouden voeren, zij hiervoor verwezen naar het betreffende artikel. Een zelfde gedachtengang is in het eerste deel van de onderzoekingen over quasi-gelijkmatig convergeerende rijen gevolgd.

Tenslotte worden nog enkele toepassingen en voorbeelden behandeld.

---

[1]) Mathematische Annalen (1, 2) **100**, 1928, blz. 212.

HOOFDSTUK I.

Definities en Algemeene Stellingen.

Een functie $f(z) = w$ van een complexe variabele z is *holomorph in een gebied* G, indien ze voor alle inwendige punten z van G:
1°. een bepaalde waarde w heeft
2°. een eindige afgeleide bezit.

Een functie $f(z) = w$ is *holomorph binnen en continu op een gesloten contour* C indien ze:
1°. holomorph is in het door C omsloten gebied G
2°. in alle punten van C randwaarden aanneemt en op C gelijk gesteld is aan die randwaarden.

Een rij functies $f_n(z)$ *convergeert* in een gebied G tot een grensfunctie $f(z)$, indien bij ieder positief gegeven getal ε in ieder punt z van G een getal N_ε is aan te geven, zoodat voor alle waarden van $n > N_\varepsilon$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{in dat punt } z.$$

Een rij functies $f_n(z)$ *convergeert gelijkmatig binnen een gebied* G tot een grensfunctie $f(z)$, indien voor ieder afgesloten deelgebied A van G en bij ieder positief gegeven getal ε één getal N_A is aan te geven, zoodat voor alle waarden van $n > N_A$ en alle punten z van A

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

In dit geval *convergeert de rij gelijkmatig op het gebied* A.

Een rij functies $f_n(z)$ *convergeert quasi-gelijkmatig binnen een gebied* G tot een grensfunctie $f(z)$, indien
1°. de rij in alle punten z van G convergeert

2°. in ieder afgesloten deelgebied A van G bij ieder positief gegeven getal ε en ieder getal N één getal $N' > N$ is aan te geven, zoodat voor ieder punt z van A een getal n_z bestaat ($N < n_z < N'$) waarvoor

$$\left| f_{n_z}(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Convergeert een rij functies $f_n(z)$ binnen een gebied G tot een grensfunctie $f(z)$, dan noemt men de punten, die een omgeving bezitten waarin de convergentie gelijkmatig is, *punten van gelijkmatige convergentie* en de punten waar dit niet het geval is, *punten van ongelijkmatige convergentie.*

Een rij functies $f_n(z)$ is *gelijkmatig begrensd binnen een gebied* G, indien er bij ieder afgesloten deelgebied A van G een getal M_A bestaat, zoodat $\left| f_n(z) \right| \leqq M_A$ in ieder punt z van A voor iedere n.

In dit geval is de rij *gelijkmatig begrensd op het gebied* A.

Rectificeerbare kromme C. Verdeelt men een kromme C door een willekeurig aantal punten $P_1, P_2, \ldots. P_n$ en verbindt men deze punten achtereenvolgens door rechte lijnen, dan heeft de zoo ontstane polygoon een bepaalde lengte L_n. Bij een andere verdeeling krijgt men in het algemeen een andere polygoon met een andere lengte. Is echter de verzameling van al deze lengten begrensd, dan is C rectificeerbaar en men noemt de bovenste grens L van deze lengten, de *lengte* van de kromme C.

Een punt z is *limietpunt* van een puntverzameling (z_k) ($k = 1, 2, \ldots.$), indien in iedere omgeving van z, voor oneindig veel waarden van k, een punt z_k ligt, terwijl z_k niet $\neq z$ behoeft te zijn.

Men noemt een punt P van een afgesloten puntverzameling V, een *hoofdpunt* van die verzameling, indien iedere omgeving van P oneindig veel gebieden bevat, die geheel door punten van V begrensd worden.

Men noemt een punt P van zoo'n verzameling V een *hoofdpunt van V ten opzichte van een verzameling G*, indien in iedere omgeving van P oneindig veel gebieden liggen, die geheel door punten van V begrensd worden en die een punt van G als inwendig punt bevatten.

Indien een rij van holomorphe functies $f_n(z)$ binnen een gebied G, daar convergeert tot een grensfunctie $f(z)$, dan is er steeds een deelgebied van G, waarin de rij gelijkmatig begrensd is. Deze deelgebieden liggen dus overal dicht in G en in zoo'n deelgebied convergeert de rij gelijkmatig en is de functie $f(z)$ dus holomorph (zie blz. 25, stelling van STIELTJES).

Neem aan, dat de stelling onjuist is. Dan is er binnen G een punt P_1 en een functie $f_{n_1}(z)$, zoodat $|f_{n_1}(P)| > 1$. Omdat $f_{n_1}(z)$ holomorph en dus continu is, is er een gebied ω_1 om P_1 waar overal

$$|f_{n_1}(z)| > 1.$$

In ω_1 moet een punt P_2 met een omgeving ω_2 zijn, waarin een functie $f_{n_2}(z)$ voldoet aan

$$|f_{n_2}(z)| > 2.$$

Gaat men zoo door, dan zou men een reeks gebieden krijgen $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \ldots . \omega_k > \ldots .$ Deze zouden dus een limietpunt P hebben waarvoor zou gelden:

$$|f_{n_1}(P)| \geq 1, \quad |f_{n_2}(P)| \geq 2, \ldots . \quad |f_{n_k}(P)| \geq k, \ldots .$$

In dit punt P zou dan de rij niet tot een eindige limiet convergeeren. Dit is in tegenspraak met de onderstelling.

Er moet dus een gebied ω_k zijn en een functie $f_{n_k}(z)$, zoodat binnen ω_k

$$|f_{n_k}(z)| < k.$$

Deze gebieden van gelijkmatige convergentie zullen in het vervolg door G_n $(n = 1, 2, \ldots .)$ worden aangeduid; de verzameling punten van ongelijkmatige convergentie door Γ.

De gebieden G_n zijn enkelvoudig samenhangend.

Anders zou men in G_n een gesloten contour kunnen trekken waarop de rij $f_n(z)$ gelijkmatig convergeerde, doch die een gebied omsloot, dat punten van Γ als inwendige punten bevatte. Dit zou in tegenspraak zijn met een volgende stelling (zie blz. 23) dus is G_n enkelvoudig samenhangend.

Door dezelfde redeneering ziet men in, dat $C + \Gamma$ (C is de grens van het gebied G) *niet de som kan zijn van twee gesloten verzamelingen, die geen punt gemeen hebben.*

Bovendien is $C + \Gamma$ *gesloten*: C is volgens definitie gesloten en een verdichtingspunt van Γ is òf zelf een punt van ongelijkmatige convergentie en ligt dan op Γ, òf het is een punt van C.

$C + \Gamma$ *is dus een continuum* en, omdat de gebieden G_n overal dicht in G liggen, *een lijnvormig continuum.*

Een noodige en voldoende voorwaarde, dat de grensfunctie $f(z)$, van een in een gebied G convergeerende rij van continue functies $f_n(z)$, eveneens een continue functie is in G, is de quasi-gelijkmatige convergentie van de rij binnen G.

1°. De voorwaarde is noodig. Zij A een afgesloten deelgebied van G. Omdat de rij convergeert is er bij ieder positief gegeven getal ε en ieder getal N in ieder punt z van A een getal $n_z > N$ te bepalen, zoodat

$$|f_{n_z}(z) - f(z)| < \tfrac{1}{3}\,\varepsilon.$$

Omdat $f(z)$ en $f_{n_z}(z)$ beiden continu zijn, is er een omgeving ω van z te vinden, waarin geldt:

$$|f_{n_z}(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Bij ieder punt z van A is zoo'n omgeving ω met index n_z te vinden en omdat A gesloten is, kan A met een eindig aantal gebieden ω overdekt worden, zoodat in ieder punt z van A, uit een eindig aantal indices $> N$, één index n_z gekozen kan worden waarvoor

$$|f_{n_z}(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

2°. De voorwaarde is voldoende. Omdat de rij convergeert is er in ieder punt z van een willekeurig afgesloten deelgebied A van

G, bij ieder positief gegeven getal ε een getal N te vinden, zoodat

(1) $\quad \left| f_n(z) - f(z) \right| < \frac{1}{3}\varepsilon \qquad$ voor iedere $n > N$.

Omdat de rij quasi-gelijkmatig convergeert, is er bij N een getal $N' > N$ te vinden, zoodat bij iedere z' van A een getal $n_{z'}$ $(N < n_{z'} < N')$ bestaat waarvoor

(2) $$\left| f_{n_{z'}}(z') - f(z') \right| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Omdat alle functies $f_{n_{z'}}(z)$ holomorph, en dus continu zijn, en het aantal getallen $n_{z'}$ eindig is, is er één getal δ, zoodat, indien $|z-z'| < \delta$,

(3) $$\left| f_{n_{z'}}(z) - f_{n_{z'}}(z') \right| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Uit (1), (2) en (3) volgt, dat, indien $|z-z'| < \delta$,

$$\left| f(z) - f(z') \right| < \varepsilon,$$

zoodat $f(z)$ continu is.

Een gelijkmatig begrensde rij holomorphe functies $f_n(z)$ binnen een gebied G is „égalemeut continu" d. w. z. bij ieder positief gegeven getal ε is in ieder afgesloten deelgebied A van G een getal $\delta(\varepsilon)$ te vinden, zoodat

$$\left| f_n(z) - f_n(z') \right| < \varepsilon \quad (\text{mits } |z-z'| < \delta)$$

voor iedere z en z' van A en voor iedere n.

Noem de afstand van de rand van A tot de grens van G: d. Trek, met een willekeurig punt ζ van A tot middelpunt 2 concentrische cirkels ω_1 en ω_2, waarvan de stralen resp. $\frac{1}{2}d$ en $\frac{1}{4}d$ zijn. ω_1 en ω_2 liggen dus geheel binnen G. Dan is voor $|\zeta - z| < \frac{1}{4}d$ en $|\zeta - z'| < \frac{1}{4}d$:

$$\left| f_n(z) - f_n(z') \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_1} \frac{f_n(t)}{t-z}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_1} \frac{f_n(t)}{t-z'}\, dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_1} \frac{(z-z')\, f_n(t)}{(t-z)\,(t-z')}\, dt \right| \leqq \frac{|z-z'|\, M_{\omega_1} \,.\, 2\pi \,.\, \frac{1}{2}d}{2\pi\, (\frac{1}{2}d)^2} = |z-z'| \frac{2\, M_{\omega_1}}{d}.$$

Wordt dus bovendien $|z-z'| < \frac{d}{2\,M_{\omega_1}}\,\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ gekozen, dan is overal binnen iedere cirkel ω_2, en dus overal binnen A, onafhankelijk van n

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon.$$

Stelling van SCHWARZ. *Zij $f(z)$ holomorph voor $|z| < 1$, $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$, $f(0) = 0$ en $\frac{f(z)}{z}$ niet constant.*

Dan is $|f(z)| < |z|$ voor $|z| < 1$.

De functie $\frac{f(z)}{z}$ is holomorph voor $|z| < 1$ $\left(\frac{f(0)}{0} = f'(0)\right)$. Op de rand van een cirkelschijf met straal $\varrho < 1$ neemt ze dus een maximum aan. Dan is $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{\varrho}$ voor $|z| \leq \varrho$. Omdat dit voor iedere ϱ geldt zal, indien $\varrho \to 1$ $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$ of, omdat $\frac{f(z)}{z}$ niet constant ondersteld is,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1 \quad \text{of} \quad |f(z)| < |z| \text{ voor } |z| < 1.$$

Stelling van LINDELÖF. *Zij G een gebied van het z vlak, dat door $w = f(z)$ conform op het gebied D van het w vlak wordt afgebeeld, waarbij $f(0) = 0$. Laten verder $g_1(z)$ en $g_2(z)$ de Greensche functies van de gebieden G en D ten opzichte van hun oorsprongen O_G en O_D zijn.*

Dan zal, indien z binnen de niveaukromme Γ_Θ blijft, waarvoor $g_1(z) = lg\ \Theta$ $(0 < \Theta < 1)$, w binnen de overeenkomstige niveaukromme Δ_Θ blijven, waarvoor $g_2(z) = lg\ \Theta$.

De stelling is, op conforme afbeelding na, identiek met de bovenstaande stelling van SCHWARZ. Zij $v = \varphi(z)$, resp. $v = \psi(w)$ de functie waardoor G, resp. D, conform op de eenheidscirkel C

wordt afgebeeld zoo, dat de grens van G, resp. van D, correspondeert met de grens van C en waarbij $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$. Een cirkel om O_G met straal $\Theta < 1$, zal het beeld zijn van een kromme Γ_Θ in het z vlak en van een kromme Δ_Θ in het w vlak. Blijft nu z binnen Γ_Θ, dan blijft w binnen Δ_Θ.

Nu is echter $\dfrac{\varphi(z)}{z}$ holomorph in G $\left(\dfrac{\varphi(0)}{0} = \varphi'(0)\right)$ en daar nergens $= 0$. Dus is $lg \left|\dfrac{\varphi(z)}{z}\right|$ harmonisch in G of

$lg\,|\varphi(z)| = (lg\,|w| +$ harmonische functie in $G) =$ harm. functie [in $(G\,.\,O_G)$

$lg\,|\varphi(z)| = \quad = -\infty$ in O_G

$lg\,|\varphi(z)| = \quad = 0$ op de grens [van G.

$lg\,|\varphi(z)| = g_1(z)$ is dus de Greensche functie van het gebied G ten opzicht van O_G en Γ_Θ is een niveaukromme, waarvoor $g_1(z) = lg\ \Theta$.

Analoog is $lg\,|\psi(w)| = g_2(w)$ de Greensche functie van D ten opzichte van O_D en Δ_Θ is een niveaukromme, waarvoor $g_2(z) = lg\ \Theta$.

Stelling van Landau. *Indien* $w = f(z)$ *een holomorphe functie is voor* $|z| < 1$ *en* $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq 1$, *terwijl verder* $|f(0)| \leq M$ (M *constant*), *dan bestaat er bij ieder positief getal* $\Theta < 1$ *een getal* $\mu(\Theta, M)$ *zoodat*

$$|f(z)| < \mu(\Theta, M) \text{ voor } |z| < \Theta.$$

Met ieder punt van de eenheidscirkel $|z| < 1$ correspondeert door $f(z) = w$ een punt van het w vlak en door de modulaire functie $H = \eta(w)$ met haar voortzettingen, een punt van het noordelijk H-halfvlak en omgekeerd. Want, omdat $w = f(z) \neq 0$, $w \neq 1$, $w \neq \infty$ is, kan $H = \eta(w) = \eta\{f(z)\}$ als functie van z langs iedere weg in de eenheidscirkel $|z| < 1$ worden voortgezet. Voor $z = 0$ zal b.v. $w = \alpha$ worden ($|\alpha| < M$). Beschouw nu die tak van de η functie, die het punt $\beta = \eta(\alpha)$ in één bepaald vak brengt, zooals in fig. 1 is aangegeven. Omdat $|\alpha| < M$, ligt het punt α in het w vlak binnen een cirkel met middelpunt O en straal M. Met de punten van deze cirkel correspondeeren in het H-vlak punten tusschen de reëele as en een vaste lijn AB (afhankelijk van M). Het punt β zal dus ook tusschen de reëele as en de lijn AB liggen.

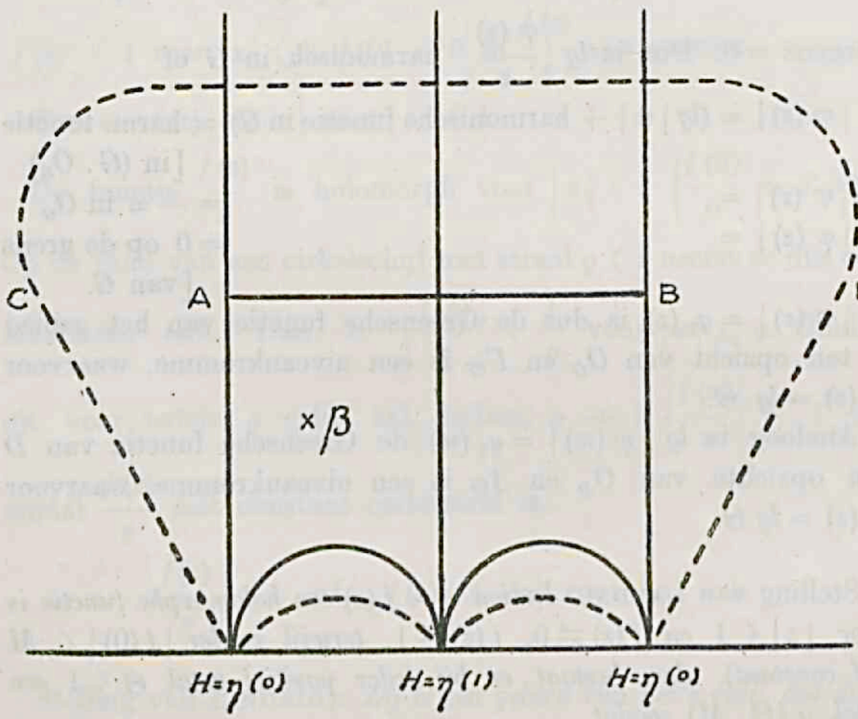

Fig. I.

Pas nu de stelling van Lindelöf toe. De eenheidscirkel $|z| < 1$ komt overeen met het daar gebruikte gebied G, het H-halfvlak met het vlak waarin het gebied D ligt. $g_1(z) = lg\,|z|$ is de Greensche functie van de eenheidscirkel ten opzichte van de oorsprong. Om de Greensche functie van het noordelijk H-halfvlak te krijgen, spiegelt men het punt β tegen de reëele as. Dit geeft een punt β'. Dan is $g_2(z) = lg\,|H-\beta| - lg\,|H-\beta'|$ de gezochte Greensche functie ten opzichte van het punt β.

Voor iedere waarde van Θ liggen de punten z die voldoen aan $lg\,|z| = lg\,\Theta$ op een cirkel met straal Θ en middelpunt O, en de punten H die voldoen aan $lg\,|H-\beta| - lg\,|H-\beta'| = lg\,\Theta$ op een cirkel met β en β' als spiegelpunten. Geeft men Θ verschillende waarden, dan ontstaat dus een cirkelbundel van niveaukrommen.

Blijft $|z| < \Theta < 1$, dan zal H binnen de correspondeerende niveaukromme blijven. Bij ieder punt β behoort echter een andere cirkelbundel niveaukrommen. Doch β ligt binnen het gebied $A\,\eta\,(0)\;\eta\,(1)\;\eta\,(0)\;B$ (fig. 1). Construeert men bij een vast getal Θ voor alle punten van dit gebied de niveaukrommen, dan hebben deze cirkels een omhullende, die in de figuur (ongeveer) door een stippellijn is aangegeven.

Omdat $\Theta < 1$, maken de lijnen $\eta\,(0)\;C$ en $\eta\,(0)\;D$ altijd een hoek met de reëele as. Deze hoek hangt alleen af van Θ, terwijl de uitgestrekheid van de gestippelde figuur alleen van Θ en van de plaats van β, dus van M, afhankelijk is.

Het gebied, dat door de stippellijn begrensd wordt, correspondeert met een gedeelte van het w vlak. Blijft H dus binnen de stippellijn, d. w. z. is $|z| < \Theta < 1$, dan zal, daar w een eenwaardige, holomorphe functie van H is, ook w begrensd zijn.

Komt H echter in de buurt van de punten $H = \eta\,(0)$ en $H = \eta\,(1)$ dan zou er kans bestaan, dat w onbegrensd toenam. Immers, de punten van de reëele as van het H vlak zijn verdichtingspunten van beelden van alle punten van het w vlak.

Men kan echter steeds een cirkel construeeren, die in het punt $H = \eta\,(0)$ aan de reëele as raakt (fig. 2). Dan ligt dus de buurt van het punt $\eta\,(0)$ van de gestippelde figuur binnen deze cirkel. Het zal blijken, dat w zelfs binnen deze cirkel begrensd is.

Want het gebied $\eta\,(0)\;AB$ correspondeert met een buurt om O in het noordelijk w vlak. Zetten we w voort over de lijn $(0, 1)$, dan wordt $\eta\,(0)\;AB$ gespiegeld tegen de cirkelboog $\eta\,(0)\;\eta\,(1)$ en gaat daarbij over in het gebied $\eta\,(0)\;CD$. Dit gebied correspondeert dus met een buurt om O in het zuidelijk w vlak. Zet men zoo w steeds in dezelfde richting voort, dan wordt de halve cirkel

$\eta(0) ABCD \eta(0)$ geheel gevuld met figuren die correspondeeren met de buurt om O in het w vlak. Door voortzetting van w in tegengestelde richting, dus eerst over de lijn (0, — 1), wordt de halve cirkel $\eta(0) AE$ geheel gevuld met figuren die correspondeeren met de buurt om O in het w vlak. Dus al nadert H tot $H = \eta(0)$, toch zal w begrensd blijven.

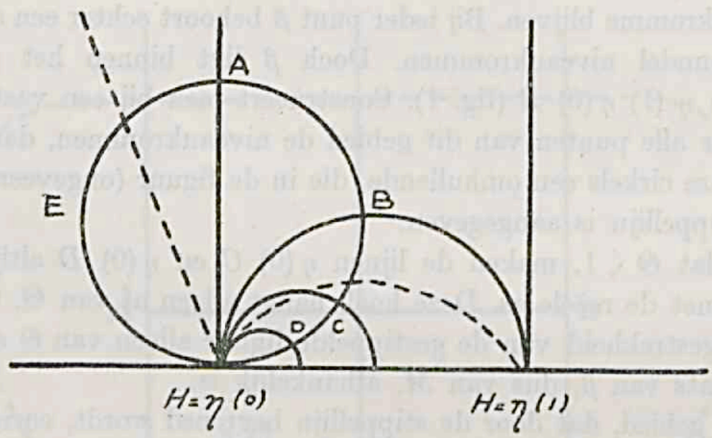

Fig. II.

Op analoge wijze toont men aan, dat w begrensd blijft als H nadert tot $H = \eta(1)$.

Resumeerende kan men dus zeggen, dat voor een functie $f(z)$, die holomorph, $\neq 0, \neq 1$ is voor $|z| < 1$ en waarvoor $|f(0)| < M$,

geldt: $\quad |f(z)| < \mu(\Theta, M)$ indien $|z| < \Theta$.

Hetzelfde geldt voor een holomorphe functie $f(z)$, die $\neq a, \neq b$ is voor $|z| < 1$, $|f(0)| < M$ (M constant), want dan bestaat de

functie $$\psi(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

waarbij $\psi(z) \neq 0, \neq 1$ en holomorph is voor $|z| < 1$, terwijl

$$|\psi(0)| < \frac{M - a}{b - a} = M' \quad (M' \text{ constant}).$$

HOOFDSTUK II.

Gelijkmatig Convergeerende Rijen van Holomorphe Functies.

Stelling van WEIERSTRASZ. *Indien een rij functies $f_n(z)$, die holomorph zijn in een gebied G, binnen G gelijkmatig convergeert tot een grensfunctie $f(z)$, dan is deze holomorph in G en* $f^{(k)}(z) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(k)}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots.)$

Voor iedere binnen G gelegen cirkel c met straal r en middelpunt z geldt:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f_n(t)}{t - z}\, dt$$

Omdat $f_n(t)$ gelijkmatig convergeert tot $f(t)$ en $|t - z| = r$ op de omtrek van c, zal $\dfrac{f_n(t)}{t - r}$ op de omtrek van c gelijkmatig tot $\dfrac{f(t)}{t - r}$ convergeeren. Dus:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f_n(t)}{t - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{t - z}\, dt$$

d.w.z. $f(z)$ is een holomorphe functie van z binnen G.

Verder is:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t - z)^{k+1}}\, dt = \frac{k!}{2\pi i} \int_c \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)}{(t - z)^{k+1}}\, dt = \lim f_n^{(k)}(z).$$

Uit bovenstaande bewijs volgt onmiddellijk de stelling:

Indien een rij functies $f_n(z)$, die holomorph zijn binnen en continu op een gesloten, reciificeerbare contour C, op C gelijkmatig tot een grensfunctie $f(z)$ convergeert, dan convergeert de rij op het gebied binnen C gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Of iets scherper:

Indien een rij functies $f_n(z)$, *die holomorph zijn binnen en continu op een gesloten, rectificeerbare contour* C, *op een overal dichte puntverzameling* V *van* C *gelijkmatig tot een grensfunctie* $f(z)$ *convergeert, dan convergeert de rij op het gebied binnen* C *gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie* $f(z)$.

1°. De rij $f_n(z)$ convergeert overal op C gelijkmatig.

Bij ieder positief gegeven getal ε is een getal N aan te geven, zoodat in ieder punt P van V geldt:

(1) $$|f_{n+p}(P) - f_n(P)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad (p > 0) \text{ mits } n > N.$$

Zij Q een punt van C, dat niet tot V behoort. In iedere omgeving ω van Q liggen punten P van V. Er is dus, wegens de continuïteit van de functies $f_n(z)$ steeds een punt P te vinden, zoodat gelijktijdig

(2) $$|f_{n+p}(P) - f_{n+p}(Q)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

(3) $$|f_n(P) - f_n(Q)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \text{ voor } n > N \text{ en } p > 0.$$

Uit (1), (2) en (3) volgt:

$$|f_{n+p}(Q) - f_n(Q)| < \varepsilon \text{ voor } n > N \text{ en } p > 0.$$

De rij $f_n(z)$ convergeert dus overal op C gelijkmatig tot een grensfunctie $f(z)$.

2°. De rij convergeert op het gebied binnen C gelijkmatig tot een grensfunctie $f(z)$.

Zij z_1 een punt binnen C. Omdat $(f_{n+p}(z) - f_n(z))$ een holomorphe functie binnen C is, ligt haar maximum op C.

Wordt dus $n > N$ gekozen, dan is

$$|f_{n+p}(z_1) - f_n(z_1)| < \varepsilon$$

voor ieder positief gegeven getal ε en $p > 0$.

3°. $f(z)$ is continu op C.

Bij ieder positief gegeven getal ε is een getal δ aan te geven, zoodat

(1) $$|f_n(z) - f(z)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad (n > N)$$

(2) $$|f_n(z') - f(z')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad (n > N)$$

(3) $$|f_n(z) - f_n(z')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{mits } |z - z'| < \delta.$$

Uit (1), (2) en (3) volgt:

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon, \quad \text{mits } |z - z'| < \delta.$$

4°. $f(z)$ is holomorph binnen C.

Voor ieder punt z binnen C geldt:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(t)}{t - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z}\, dt.$$

Stelling van STIELTJES. *Indien een gelijkmatig begrensde rij holomorphe functies $f_n(z)$ binnen een gebied G, convergeert in een deelgebied g van G, dan convergeert ze binnen G gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.*

Volgens een voorgaande stelling (blz. 17) is de rij $f_n(z)$ également continu. Men kan dus na keuze van een positief getal ε een getal $\delta(\varepsilon)$ aangeven, zoodat een afgesloten deelgebied A van G met een eindig aantal cirkels δ, met middellijn $\delta(\varepsilon)$, overdekt kan worden, waarbij:

(1) $$|f_n(z) - f_n(z')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

voor z en z' binnen δ en voor iedere n.

Er zullen nu cirkels $\delta_{g,\, A-g}$ zijn, die zoowel punten van g als van $A - g$ bevatten. Kies in zoo'n cirkel een punt z_g van g. Dan bestaat er voor het punt z_g een getal N, zoodat:

(2) $$|f_{n+p}(z_g) - f_n(z_g)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{mits } n > N \text{ en } p > 0.$$

Uit (1) en (2) volgt dan echter

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

voor alle punten z van $\delta_{g,\, A-g}$, mits $n > N$ en $p > 0$.

Er is dus een gebied $g_1 > g$ waarin de rij $f_n(z)$ convergeert en zelfs gelijkmatig convergeert. Er zijn dus nu andere cirkels $\delta_{g_1,\, A-g_1}$, die zoowel punten van g_1 als van $A - g_1$ bevatten. Men vindt nu, dat ook voor deze cirkels geldt:

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

voor alle punten z van $\delta_{g_1,\, A-g_1}$, mits $n > N'$ en $p > 0$.

Omdat het aantal cirkels δ eindig is, vindt men tenslotte een getal $\mathfrak{N}$, zoodat voor iedere $n > \mathfrak{N}$ geldt:

$$| f_{n+p}(z) - f_n(z) | > \varepsilon \quad (p > 0) \quad \text{in ieder punt } z \text{ van } A.$$

De rij $f_n(z)$ voldoet dus aan de voorwaarden van WEIERSTRASZ en convergeert binnen G gelijkmatig tot de holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Stelling van OSGOOD. *Indien een gelijkmatig begrensde rij holomorphe functies $f_n(z)$ binnen een gebied G, convergeert op een overal dichte puntverzameling V in G, dan convergeert ze binnen G gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.*

Volgens een voorgaande stelling is de rij également continu. Men kan dus, na keuze van een positief getal ε, om ieder punt van V een cirkel δ, met middellijn $\delta(\varepsilon)$ leggen, zoodat:

(1) $\quad | f_n(z) - f_n(z') | < \frac{1}{3}\varepsilon$ voor z en z' binnen δ en iedere n.

In ieder punt z_v van V kan, volgens onderstelling, een getal N bepaald worden, zoodat voor $n > N$ en $p > 0$ geldt:

(2) $$| f_{n+p}(z_v) - f_n(z_v) | < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Uit (1) en (2) volgt dan echter:

$$| f_{n+p}(z) - f_n(z) | < \varepsilon$$

voor alle punten z binnen δ, mits $n > N$ en $p > 0$.

Dus op iedere cirkel δ convergeert $f_n(z)$ gelijkmatig en, omdat ieder afgesloten deelgebied A van G door een eindig aantal cirkels δ overdekt kan worden, convergeert $f_n(z)$ binnen G gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Stelling van VITALI—PORTER. *Indien een gelijkmatig begrensde rij holomorphe functies $f_n(z)$ binnen een gebied G, convergeert op een puntverzameling (z_ν), die minstens één verdichtingspunt z_∞ binnen G heeft, dan convergeert de rij binnen G gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.*

De rij $f_n(z)$ is égalément continu. Men kan dus, na keuze van een positief getal ε, om z_∞ als middelpunt, een cirkel δ, met straal $\frac{1}{2}\ \delta\ (\varepsilon)$ leggen, zoodat:

$$(1) \qquad | f_n(z) - f_n(z') | < \tfrac{1}{9}\ \varepsilon$$

voor z en z' binnen δ en iedere n.

In iedere punt z_ν kan een getal N bepaald worden, zoodat voor $n > N$ en $p > 0$ geldt:

$$(2) \qquad | f_{n+p}(z_\nu) - f_n(z_\nu) | < \tfrac{1}{9}\ \varepsilon.$$

Uit (1) en (2) volgt dan:

$$(3) \qquad | f_{n+p}(z'_\nu) - f_n(z'_\nu) | < \tfrac{1}{3}\ \varepsilon$$

voor alle punten z_ν binnen δ, mits $n > N$ en $p > 0$.

Bovendien is:

$$(4) \qquad | f_n(z_\infty) - f_n(z'_\nu) | < \tfrac{1}{3}\ \varepsilon \quad \text{en}$$

$$(5) \qquad | f_{n+p}(z_\infty) - f_{n+p}(z'_\nu) | < \tfrac{1}{3}\ \varepsilon.$$

Uit (3), (4) en (5) volgt:

$$| f_{n+p}(z_\infty) - f_{n+p}(z_\infty) | < \varepsilon$$

voor $n > N$ en $p > 0$, d.w.z. de rij $f_n(z)$ convergeert in z_∞.

Beschrijf nu binnen G om z_∞ als middelpunt, een cirkel met willekeurige straal R. Voor iedere n is:

$$f'_n(z_\infty) = \lim_{z \to z_\infty} \frac{f_n(z) - f_n(z_\infty)}{z - z_\infty}$$

De functie $\dfrac{f_n(z) - f_n(z_\infty)}{z - z_\infty}$ is dus binnen en op de cirkel R holomorph en daarom is:

$$\left| \frac{f_n(z) - f_n(z_\infty)}{z - z_\infty} \right| < \frac{2\,M_R}{R} \quad \text{binnen cirkel } R.$$

De functierij $\dfrac{f_n(z) - f_n(z_\infty)}{z - z_\infty}$ is dus gelijkmatig begrensd op R en convergeert in de punten z_ν van R tot $\dfrac{f(z) - f(z_\infty)}{z - z_\infty}$.

Uit het voorgaande volgt, dat ze dan ook in z_∞ convergeert. Dus:

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(z_\infty) = \lim_{z \to z_\infty} \frac{f(z) - f(z_\infty)}{z - z_\infty} = f'(z_\infty) \quad \text{en}$$

$$|f'(z_\infty)| \leqq \frac{2 M_R}{R}$$

Analoog toont men aan, dat

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(k)}(z_\infty) = f^{(k)}(z_\infty) \quad \text{en} \quad |f^{(k)}(z_\infty)| \leqq \frac{2^k M_R}{R^k}.$$

Voor iedere z binnen R en iedere n geldt:

$$(6) \qquad f_n(z) = f_n(\infty) + \sum_1^\infty \frac{(z - z_\infty)^k}{k\,!} f_n^{(k)}(z_\infty)$$

Omdat $\left| \dfrac{(z - z_\infty)^k}{k\,!} f_n^{(k)}(z_\infty) \right| < \dfrac{2^k}{k\,!} M_R$ is er bij ieder positief getal ε een getal K te vinden, zoodat indien $k > K$, $\dfrac{2^k}{k\,!} M_R < \varepsilon$. K is onafhankelijk van n. Nadert dus n tot ∞, dan nadert de reeks (6) gelijkmatig tot

$$f(z_\infty) + \sum_1^\infty \frac{(z - z_\infty)^k}{k\,!} f_n^{(k)}(z_\infty) = f(z)$$

Omdat $\left| \dfrac{(z - z_\infty)^k}{k\,!} f^{(k)}(z_\infty) \right| \leqq \dfrac{2^k}{k\,!} M_R$ convergeert deze reeks gelijkmatig op R en stelt daar dus een holomorphe functie voor.

Nu volgt uit de stelling van Stieltjes, dat $f_n(z)$ binnen G gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$ convergeert.

Stelling van BLASCKHE. *Zij* $f_n(z)$ *een rij functies, holomorph voor* $|z| < 1$; $|f_n(z)| < M$ *voor* $|z| < 1$ *en iedere* n; M *constant. Indien deze rij convergeert op een oneindige, aftelbare puntverzameling* (z_ν), $(0 < |z_\nu| < 1)$ *waarvoor* $\prod_1^\infty |z_\nu| = 0$, *dan convergeert ze binnen* $|z| \leqq 1$ *gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie* $f(z)$.

Voor het bijzondere geval, dat (z_ν) een verdichtingspunt heeft binnen $|z| \leqq 1$, is de stelling door VITALI en PORTER bewezen. Dit geval zullen we dus uitsluiten.

Zij (a_i) een willekeurige puntverzameling ($|a_i| < 1$) met minstens één verdichtingspunt binnen $|z| \leqq 1$. Kies uit de rij $f_n(z)$ een deelrij

$$f_{11}(z),\ f_{12}(z), \ldots .\ f_{1n}(z), \ldots .$$

zoodat $\lim\limits_{n \to \infty} f_{1n}(a_1)$ bestaat; dit is mogelijk, omdat voor alle waarden van n $\quad |f_n(a_1)| < M$.

Kies uit deze deelrij een nieuwe deelrij

$$f_{21}(z),\ f_{22}(z), \ldots .\ f_{2n}(z), \ldots .$$

zoodat $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n}(a_2)$ bestaat, enz.

Dan voldoet de rij $f_{11}(z), f_{22}(z), \ldots . f_{nn}(z), \ldots .$ aan de voorwaarden van VITALI—PORTER en convergeert binnen $|z| \leqq 1$ gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $g(z)$.

Zoo bestaan er dus voor $|z| < 1$ één of meer holomorphe functies b.v. $g(z)$ en $h(z)$ waarvoor geldt:

$$|g(z)| < M \qquad |h(z)| < M \qquad \text{voor } |z| < 1$$

$$g(z_1) = h(z_1).$$

$$g(z_2) = h(z_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g(z_\nu) = h(z_\nu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

terwijl $\prod_1^\infty |z_\nu| = 0$.

Ook bestaat dus een functie $\psi(z) = g(z) - h(z)$ die eveneens holomorph is voor $|z| < 1$ en waarvoor verder geldt:

$$|\psi(z)| < 2M \text{ voor } |z| < 1; \quad \psi(z_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \quad \prod_1^\infty |z_\nu| = 0$$

Men kan nu aantoonen, dat onder deze voorwaarden $\psi(z) \equiv 0$ voor $|z| < 1$.

Neem aan $\psi(0) \neq 0$. Rangschik de verzameling (z_ν) naar klimmende afstanden tot $|z| = 0$. Construeer een met $|z| = 1$ concentrische cirkel met straal $\varrho < 1$, die een eindig aantal (k) punten z_ν bevat en zoo, dat $|z_\nu| \neq \varrho$ voor alle waarden van ν.

Dan is de functie $\dfrac{\psi(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k)}$ holomorph binnen en op ϱ en daar nergens 0.

Dus is $lg\left|\dfrac{\psi(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k)}\right|$ harmonisch binnen en op ϱ.

Door toepassing van de middenwaarde stelling vindt men dat:

$$(1) \quad 2\pi\, lg|\psi(0)| = 2\pi\, lg|z_1||z_2|\ldots|z_k| + \int_\varrho lg \frac{|\psi(z)|}{|z - z_1||z - z_2|\ldots|z - z_k|}\, d\varphi$$

Zij z_ν' het spiegelbeeld van z_ν ten opzichte van ϱ, dan is

$$\int_\varrho lg|z - z_\nu|\, d\varphi = \int_\varrho lg|z - z_\nu'|\, d\varphi + \int_\varrho lg|z_\nu|\, d\varphi - \int_\varrho lg\,\varrho\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\, lg|z_\nu'| + 2\pi\, lg|z_\nu| - 2\pi\, lg\,\varrho = 2\pi\, lg\,\varrho.$$

Gesubstitueerd in (1) krijgt men de formule van JENSEN:

$$2\pi\, lg|\psi(0)| = 2\pi\, lg|z_1||z_2|\ldots|z_k| + \int_\varrho lg|\psi(z)|\, d\varphi - 2\pi k\, lg\,\varrho$$

of: $$2\pi\, lg|\psi(0)| < 2\pi\, lg\frac{2M|z_1||z_2|\ldots|z_k|}{\varrho^k}$$

$$|\psi(0)| < 2M\frac{|z_1||z_2|\ldots|z_k|}{\varrho^k}$$

Omdat $\dfrac{|z_\nu|}{\varrho} > 1$ $(\nu = k+1,\ k+2, \ldots)$ is ook

$|\psi(0)| < 2M \dfrac{|z_1|\,|z_2| \ldots |z_\nu|}{\varrho^\nu}$ voor iedere ν bij vaste ϱ.

Dit geldt bij vaste ν voor iedere ϱ. Laat men ϱ tot 1 naderen, dan komt:

$$|\psi(0)| \leqq 2M\,|z_1|\,|z_2| \ldots |z_\nu|$$

Omdat dit voor iedere ν doorgaat en $\prod\limits_1^\infty |z_\nu| = 0$, is:

$$|\psi(0)| = 0.$$

Er was echter ondersteld $\psi(0) \neq 0$. Had men de redeneering toegepast op $\psi_1(z) = \dfrac{\psi(z)}{z}$, dan zou men ook gevonden hebben $\psi_1(0) = 0$, enz. Hieruit zou volgen, dat $\psi(z)$ in $|z| = 0$ een nulpunt van de orde ∞ had. Omdat dit onmogelijk is, is $\psi(z) \equiv 0$, d. w. z. $g(z) \equiv h(z)$ voor $|z| < 1$.

De rij $f_n(z)$ convergeert dus binnen $|z| = 1$ gelijkmatig tot één holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Stelling van KHINTCHINE—OSTROWSKI. *Zij $f_n(z)$ een rij functies, holomorph, $|f_n(z)| < 1$ voor $|z| < 1$ en iedere n. Indien de rij radiale randwaarden $F_n(e^{\varphi i}) = \lim\limits_{\varrho_k \to 1} f_n(\varrho_k\, e^{\varphi i})$ convergeert op een puntverzameling V met positieve maat μV, dan convergeert de rij $f_n(z)$ binnen $|z| \leqq 1$ gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.*

Het bewijs behoeft slechts voor het geval $\mu V < 2\pi$ gegeven te worden (zie blz. 23).

Neem aan, de rij $f_n(z)$ convergeert niet in ieder punt $|z| < 1$. Dan zouden er dus minstens twee deelrijen $f_{\mu_j}(z)$ en $f_{\nu_j}(z)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ te vormen zijn, die binnen $|z| \leqq 1$ gelijkmatig tot twee holomorphe grensfuncties $f_\mu(z)$ en $f_\nu(z)$ zouden convergeeren, doch zoo, dat in een punt z' $(|z'| < 1)$ $f_\mu(z') \neq f_\nu(z')$. Men mag aannemen, dat dit in het punt $z = 0$ zou gebeuren, dus $f_\mu(0) \neq f_\nu(0)$.

Stel $\qquad \psi_j(z) = f_{\mu_j}(z) - f_{\nu_j}(z)$

Benader $|z| = 1$ door concentrische cirkels c_k met straal $\varrho_k = 1 - \frac{1}{k}$ $(k \rightarrow \infty)$. Zorg, dat op c_k geen nulpunten van $\psi_j(z)$ liggen. Ook iedere functie $\psi_j\,(\varrho_k\, e^{\varphi i})$ zal voor $k \rightarrow \infty$, op een verzameling stralen met positieve maat, radiale randwaarden $\Psi_j\,(e^{\varphi i})$ aannemen; deze verzameling heeft een deel W, waarop dit voor iedere j gelijkmatig gebeurt. De verzameling stralen van W, die hun eindpunt in V hebben, bevatten een deelverzameling $\mathfrak{W}$, met positieve maat $\mu\,\mathfrak{W}$, zoodat in de eindpunten van de stralen van $\mathfrak{W}$, $\Psi_j\,(e^{\varphi i})$ voor $j \rightarrow \infty$ gelijkmatig tot 0 convergeert.

Dan is, volgens de formule van Jensen, indien j zóó gekozen wordt, dat $\psi_j(0) \neq 0$:

$$2\,\pi\, lg\,|\,\psi_j\,(0)\,| \leqq \int_0^{2\pi} lg\,|\,\psi_j\,(\varrho_k\, e^{\varphi i})\,|\; d\,\varphi < \int_{\mathfrak{W}} lg\,|\,\psi_j\,(\varrho_k\, e^{\varphi i})\,|\; d\,\varphi$$

Omdat dit voor iedere k geldt en $\psi_j\,(\varrho_k\, e^{\varphi i})$ op $\mathfrak{W}$ gelijkmatig tot $\Psi_j\,(e^{\varphi i})$ convergeert voor $\varrho_k \rightarrow 1$, is dus:

$$2\,\pi\, lg\,|\,\psi_j\,(0)\,| \leqq \int_{\mathfrak{W}} lg\,|\,\Psi_j\,(e^{\varphi i})\,|\; d\,\varphi.$$

Omdat dit voor iedere j geldt en $\Psi_j\,(e^{\varphi i})$ op $\mathfrak{W}$ gelijkmatig tot 0, en dus $lg\,|\,\Psi_j\,(e^{\varphi i})\,|$ op $\mathfrak{W}$ gelijkmatig tot $-\infty$ convergeert voor $j \rightarrow \infty$, is:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} lg\,|\,\psi_j\,(0)\,| = -\infty \qquad \text{d. w. z.}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{\mu_j}\,(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{\nu_j}\,(0)$$

Hieruit volgt dus, dat de rij $f_n(z)$ voor iedere $|\,z\,| < 1$ convergeert en dus binnen $|\,z\,| \leqq 1$ gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f\,(z)$ convergeert.

Stellingen van LANDAU—CARATHEODORY.

I. *Indien een rij functies* $f_n(z)$, *die holomorph zijn en* $\neq a$, $\neq b$ *zijn voor* $|z| < 1$, *in het punt* $|z| = 0$ *convergeert, dan is de rij gelijkmatig begrensd binnen de eenheidscirkel* $|z| \leq 1$.

Omdat de rij $f_n(z)$ in $|z| = 0$ convergeert, is er één getal M aan te geven, zoodat voor iedere n

$$|f_n(0)| \leq M$$

Er bestaat dus, volgens de stelling van LANDAU (blz. 19) een getal $\mu(\Theta, M)$, zoodat voor $|z| < \Theta < 1$,

$$|f_n(z)| < \mu(\Theta, M) \qquad \text{voor iedere } n.$$

II. *Indien een rij functies* $f_n(z)$, *holomorph voor* $|z| < 1$, *waarbij* $f_n(z) \neq a_n$, $f_n(z) \neq b_n$, *terwijl*

$$|a_n| < \gamma, \quad |b_n| < \gamma, \quad |a_n - b_n| > \frac{1}{\gamma} \qquad (\gamma \text{ constant}, > 0, < \infty)$$

in het punt $|z| = 0$ *convergeert, dan is de rij gelijkmatig begrensd binnen de eenheidscirkel* $|z| \leq 1$.

Omdat de rij $f_n(z)$ in $|z| = 0$ convergeert, is er één getal M aan te geven, zoodat voor iedere n:

$$|f_n(0)| \leq M.$$

Dan is

$$\left| \frac{f_n(0) - a_n}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{M + \gamma}{\frac{1}{\gamma}} = \gamma(M + \gamma).$$

Voor $|z| < 1$ is $\dfrac{f_n(z) - a_n}{b_n - a_n} \neq 0$ en $\neq 1$.

Er bestaat dus een getal $\mu\{\Theta, \gamma(M + \gamma)\}$, zoodat voor $|z| < \Theta$

$$\left| \frac{f_n(z) - a_n}{b_n - a_n} \right| \leq \mu \text{ of } |f_n(z)| \leq |a_n| + |b_n - a_n| \mu < \gamma + 2\gamma\mu.$$

De rij $f_n(z)$ is dus binnen de eenheidscirkel $|z| \leq 1$ gelijkmatig begrensd.

Door een conforme afbeelding kan men van de eenheidscirkel overgaan tot een gebied G en kan men het punt $|z| = 0$ door een punt P van G vervangen.

Zoo vindt men tenslotte, door bovenstaande stelling met die van VITALI te combineeren;

Indien een rij functies $f_n(z)$, *die holomorph zijn binnen een gebied* G, *waar* $f_n(z) \neq a_n$, $f_n(b) \neq b_n$, *terwijl* $|a_n| < \gamma$, $|b_n| < \gamma$, $|a_n - b_n| > \frac{1}{\gamma}$, ($\gamma$ *constant*, > 0, $< \infty$) *in een puntverzameling* (z_ν), *met minstens één verdichtingspunt* z_∞ *binnen* G, *convergeert, dan convergeert de rij* $f_n(z)$ *binnen* G *gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie* $f(z)$.

HOOFDSTUK III.

Quasi-gelijkmatig Convergeerende Rijen van Holomorphe Functies.

Stelling van WOLFF. *Zij $f_n(z)$ een convergeerende rij holomorphe functies binnen een gebied G.*

Zij $\psi_n(x, y, z) = \dfrac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} - \dfrac{f_n(y) - f_n(z)}{y - z}$ *voor* $x \neq z,\ y \neq z$

en $\psi_n(x, y, z) = f_n'(z) - f_n'(z) = 0$ *voor* $x = y = z$.

Dan is een noodige en voldoende voorwaarde, dat de grensfunctie $f(z)$ van de rij $f_n(z)$ holomorph is binnen G: de quasi-gelijkmatige convergentie van de rij $\psi_n(x, y, z)$ op iedere begrensde en afgesloten puntverzameling (x, y, z) van G, waar niet tegelijkertijd $x = z,\ y \neq z$ of $x \neq z,\ y = z$ is.

De voorwaarde is noodig, want $\psi(x, y, z) = \dfrac{f(x) - f(z)}{x - z} - \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$ $(x \neq z,\ y \neq z)$ moet continu zijn, evenals $\psi(z, z, z) = 0$ $(x = y = z)$.

De voorwaarde is voldoende. Zij z een willekeurig punt van G, (x_k) en (y_k) $(k = 1, 2, \ldots.)$ twee willekeurige puntverzamelingen van G waarvoor $x_k \neq z$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = z$ en $y_k \neq z$, $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = z$. Dan is de drie-dimensionale verzameling V, die uit de punten (x_k, y_k, z) en het verdichtingspunt (z, z, z) bestaat, begrensd en gesloten.

Omdat $\psi_n(x, y, z)$ quasi-gelijkmatig convergeert op V, is $\psi(x, y, z)$ daar continu en dus is:

$$(1) \qquad \lim_{k \to \infty} \psi(x_k, y_k, z) = \psi(z, z, z) = 0.$$

Bovendien is de rij $\varphi(x_k) = \dfrac{f(x_k) - f(z)}{x_k - z}$ begrensd op de verzameling x_k. Want anders zou men een punt x_{n_2} kunnen kiezen, waarvoor $n_2 > 1$ en $|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_1)| > 1$, en een punt x_{n_3} waarvoor $n_3 > n_2$ en $|\varphi(x_{n_3}) - \varphi(x_{n_2})| > 1$ was.

Gaat men zoo door, dan zou voor de beide rijen :

$$\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_{n_3},\ \xi_3 = x_{n_5}, \ldots\ldots \quad \text{en}$$

$$\eta_1 = x_{n_2},\ \eta_2 = x_{n_4},\ \eta_3 = x_{n_6}, \ldots\ldots$$

z verdichtingspunt zijn, terwijl voor iedere waarde van k $|\varphi(\xi_k) - \varphi(\eta_k)| = |\psi(\xi_k, \eta_k, z)| > 1$ zou zijn, Dit zou echter in tegenspraak zijn met (1). De rij $\varphi(x_k)$ is dus begrensd op de verzameling (x_k) en men kan uit (x_k) een deelverzameling (ξ_k) kiezen, waarvoor $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(\xi_k)$ bestaat en eindig is.

Op iedere verzameling (y_k) met z tot eenig verdichtingspunt, nadert $\varphi(y_k)$ dan tot dezelfde limiet, omdat

$$\psi(\xi_k, \eta_k, z) = \psi(\xi_k) - \varphi(\eta_k) \text{ en } \lim_{k \to \infty} \psi(\xi, \eta_k, z) = 0.$$

De grensfunctie $f(z)$ van de rij $f_n(z)$ is dus holomorph binnen G.

De volgende stellingen hebben allen betrekking op een rij van holomorphe functies $f_n(z)$, die binnen een gebied G, dat begrensd wordt door een kromme C, quasi-gelijkmatig convergeert tot een grensfunctie $f(z)$. Γ zij de verzameling punten van ongelijkmatige convergentie; G_n de gebieden van gelijkmatige convergentie.

Γ kan geen deel Γ^* bevatten, dat geheel uit hoofdpunten van Γ^* ten opzichte van Γ^* bestaat.

Neem aan, Γ bevatte wel zoo'n deel Γ^* en zij P_1 een punt van Γ^*. Dan zou er in een omgeving van P_1 een gebied G_{ν_1} zijn, dat geheel door punten van Γ^* begrensd werd, en dat bovendien een punt Q_1 van Γ^* als inwendig punt bevatte.

Dan zouden er, na keuze van een getal ε, functies $f_{\nu_p}(z)$ van de rij $f_n(z)$ zijn, zoodat voor ieder van hen in een gebied s_{ν_p}, in de buurt van Q_1 gold: $| f_{\nu_p}(z) - f(z) | > \varepsilon$.

Minstens één zoo'n gebied s_{ν_p}, dat we s_{ν_1} kunnen noemen en waarin $| f_{\nu_1}(z) - f(z) | > \varepsilon$, moet een gedeelte δ_{ν_1} van de grens van G_{ν_1} overdekken, omdat anders, wegens de continuïteit van $f(z)$ en $f_{\nu_1}(z)$, alle functies $f_{\nu_p}(z)$ op deze grens gelijkmatig begrensd zouden zijn en dus binnen G_{ν_1} gelijkmatig zouden convergeeren.

Op δ_{ν_1} ligt een punt P_2 en in de omgeving van P_2 ligt een gebied G_{ν_2}, dat geheel door punten van Γ^* begrensd wordt, dat een punt Q_2 van Γ^* als inwendig punt bevat en dat geheel binnen G_{ν_1} en s_{ν_1} ligt. Er is nu weer een gebied s_{ν_2} in de buurt van Q_2, met een functie $f_{\nu_2}(z)$ waarvoor geldt $| f_{\nu_2}(z) - f(z) | > \varepsilon$ binnen s_{ν_2} en zoo, dat s_{ν_2} een gedeelte δ_{ν_2} van de grens van G_{ν_2} overdekt.

Zoo doorgaande vindt men een reeks gebieden $G_{\nu_1} > G_{\nu_2} > G_{\nu_3} > \ldots$ Deze hebben dus een limietpunt Q, dat echter ook in ieder van de gebieden $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots.$ ligt. In Q zou echter gelden:

$$| f_{\nu_1}(Q) - f(Q) | > \varepsilon, \quad | f_{\nu_2}(Q) - f(Q) | > \varepsilon, \quad | f_{\nu_3}(Q) - f(Q) | > \varepsilon, \ldots$$

De rij $f_n(z)$ zou dan niet in Q tot een eindige limiet kunnen convergeeren, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling. Γ bevat dus geen deel Γ^*, dat geheel uit hoofdpunten van Γ^* ten opzichte van Γ^* bestaat.

Indien Γ rectificeerbaar is en G in een eindig aantal gebieden G_n verdeelt, is $f(z)$ holomorph in G.

Trek een willekeurige, gesloten, rectificeerbare kromme C' in G. Hierdoor ontstaan uit de gebieden G_n, de gebieden G'_n binnen C'. Noem het stuk van Γ, dat binnen C' ligt, Γ'. Γ' bestaat uit

de stukken $\Gamma'_{\varkappa\nu} \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2 \ldots n \\ \nu = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$, $\Gamma'_{\varkappa\nu} = 0$ voor $\varkappa = \nu$.

$\Gamma'_{\varkappa\nu}$ vormt de grens tusschen de gebieden $G'_\varkappa$ en G'_ν.

Γ' verdeelt C' in de stukken $C'_1, C'_2 \ldots . C'_n$, die resp. de gebieden $G'_1, G'_2, \ldots . G'_n$ gedeeltelijk begrenzen. Minstens één van deze stukken is $\neq 0$.

De grens van G'_l wordt dus gevormd door $C'_l + \sum_1^n{}^{\nu} \Gamma'_{l\nu}$.

Breng in ieder der gebieden G'_n een reeks in elkaar gelegen gebieden $G_{n\mu}$ aan, waarvan de grenzen $\gamma_{n\mu}$ gelijkmatig tot $(C'_n + \sum_1^n{}^{\nu} \Gamma'_{n\nu})$ naderen. Verbind de daarvoor in aanmerking komende krommen $\gamma_{n\mu}$ met elkaar, zoodat gesloten, krommen γ_μ ontstaan, die gelijkmatig tot C' naderen.

Omdat Γ' en C' volgens onderstelling rectificeerbaar zijn, het aantal gebieden G'_n eindig is en $f(z)$ wegens de quasi-uniforme convergentie continu is, is er, bij ieder positief gegeven getal ε een getal μ te vinden, zoodat:

$$\left| \int_{\gamma_\mu} f(z)\,dz \right| - \left| \sum_1^n{}^{n} \int_{\Gamma'_{n\mu}} f(z)\,dz \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ en } \left| \int_{\gamma_\mu} f(z)\,dz \right| - \left| \int_{C'} f(z)\,dz \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Dus:
$$\left| \int_{C'} f(z)\,dz \right| - \left| \sum_1^n{}^{u} \int_{\Gamma'_{n\mu}} f(z)\,dz \right| < \varepsilon$$

Of, omdat $f(z)$ in ieder gebied G'_n holomorph is:

$$\left| \int_{C'} f(z)\,dz \right| < \varepsilon,$$

en, omdat ε willekeurig is:

$$\int_{C'} f(z)\,dz = 0.$$

Hieruit volgt, door toepassing van de stelling van MORERA dat $f(z)$ holomorph is binnen G.

Indien alle $\Gamma'_{\varkappa\mu}$ rectificeerbaar zijn en de hoofdpunten van $\Gamma + C$ allen op C liggen, is $f(z)$ holomorph binnen C.

Trek in G een willekeurige, gesloten, rectificeerbare kromme

C'. Dan liggen binnen C' een eindig aantal gebieden G'_n (zie vorige stelling). Want binnen en op C' liggen geen hoofdpunten van $\Gamma + C$. Men kan dus om ieder punt binnen en op C' een cirkel met eindige straal ϱ leggen, zoodat er geen gebied G'_n geheel binnen ligt. C' en het gebied erbinnen is dus door een eindig aantal cirkels ϱ te overdekken, en er is slechts een eindig aantal gebieden G'_n binnen C'. Men kan nu de vorige stelling toepassen en hieruit volgt dat $f(z)$ holomorph is binnen iedere kromme C' en dus binnen het gebied G.

Indien alle $\Gamma_{\varkappa\mu}$ rectificeerbaar zijn en het aantal hoofdpunten van Γ binnen G is eindig, dan is $f(z)$ holomorph binnen G.

Leg om elk der hoofdpunten een cirkel met omtrek ϱ_i zoodat $\Sigma \varrho_i < \mu$. Omdat $f(z)$ continu is binnen G, is er een vast, positief getal M, zoodat $|f(z)| < M$ binnen G. Men kan nu bij ieder positief gegeven getal ε μ zóó kiezen, dat

$$(1) \qquad \left| \int_{\Sigma\varrho i} f(z)\, dz \right| < M\mu = \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Trek binnen G een gesloten, rectificeerbare kromme C', die alle hoofdpunten omsluit, dan is het aantal gebieden G'_n binnen $C' + \Sigma \varrho_i$, eindig. Evenals in een voorgaande stelling (blz. 38) bewijst men, dat:

$$(2) \qquad \left| \int_{C' + \Sigma\varrho i} f(z)\, dz \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Uit (1) en (2) volgt: $\left| \int_{C'} f(z)\, dz \right| < \varepsilon.$

Omdat ε geheel willekeurig gekozen kan worden, is:

$$\int_{C'} f(z)\, dz = 0$$

en $f(z)$ is holomorph binnen C', dus ook binnen C.

Bij ieder positief gegeven getal ε en ieder getal N (waaraan dus een getal $N' > N$ is toegevoegd) is een getal $\delta(\varepsilon, N)$ te vinden, zoodat bij ieder deelgebied d_k, van een afgesloten deelgebied A van G, met diameter δ, minstens één getal n_k $(N < n_k < N')$ hoort, waarvoor

$$|f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \textit{voor } z \textit{ binnen } d_k.$$

Wegens de quasie-gelijkmatige convergentie behoort bij ieder punt z van G een getal n_z $(N < n_z < N')$, zoodat:

$$(1) \qquad |f_{n_z}(z) - f(z)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Omdat $f(z)$ en alle functies $f_{n_z}(z)$ (een eindig aantal) continu zijn, is er één getal $\delta(\varepsilon, N)$, zoodat voor $|z - z'| < \frac{1}{2}\delta$ (in A):

$$(2) \quad |f(z) - f(z')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \text{ en } |f_{n_z}(z) - f_{n_z}(z')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad N < n_z < N'.$$

Uit (1) en (2) volgt, dat:

$$|f_{n_z}(z') - f(z')| < \varepsilon$$

voor iedere z' in een gebied met diameter δ.

Er zijn nu verschillende bijzondere gevallen mogelijk, waarbij zal blijken, dat de grensfunctie $f(z)$ holomorph is binnen G.

1°. *N' onafhankelijk van ε.*

Dat wil zeggen, dat bij vaste N er een vast, eindig aantal (b.v. p) functies bestaat, zoodat in ieder punt van een afgesloten deelgebied A van G, voor minstens één dezer functies geldt:

$$|f_{N+i}(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots p).$$

Daar ε geheel willekeurig is, is er in ieder punt van A minstens één functie waarvoor:

$$|f_{N+n}(z) - f(z)| = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots p).$$

We mogen aannemen, dat binnen A voor geen waarde van i of j

$$f_{N+i}(z) \equiv f_{N+j}(z).$$

Er kan slechts een eindig aantal punten E binnen A zijn waar voor meer dan één waarde van n geldt:

$$|f_{N+n}(z) - f(z)| = 0$$

Want, waren er oneindig veel zulke punten, dan zouden deze een verdichtingspunt binnen A hebben en dan zouden er, daar p eindig is, minstens twee functies (die we $f_{N+1}(z)$ en $f_{N+2}(z)$ kunnen noemen) zijn, die in deze punten samenvielen. Dan zou echter binnen A $f_{N+1}(z) \equiv f_{N+2}(z)$ en dit geval hebben we uitgesloten.

In ieder punt Q van A, dat niet tot E behoort, zijn er dus $p-1$ functies waarvoor

$$|f_{N+i}(z) - f(z)| \neq 0.$$

Dan is er, wegens de continuiteit van de functies $f_{N+i}(z)$ en $f(z)$, een omgeving ω van Q, waarin deze functies $\neq f(z)$ zijn. Er is dus één functie $f_{N+n}(z)$ zoodat overal in ω $f_{N+n}(z) = f(z)$ en dus is $f(z)$ holomorph in ω.

Hieruit volgt, dat $f(z)$ holomorph is in alle punten van A buiten E. Maar, omdat E slechts een eindig aantal punten bevat en $f(z)$ continu is in A is $f(z)$ holomorph binnen A en dus holomorph binnen G.

Uit het bewijs volgt, dat het voldoende is, indien voor één waarde van N, N' onafhankelijk is van ε.

2°. *δ onafhankelijk van N.*

Dit beteekent, dat in een deelgebied d_k met diameter δ, bij vaste ε (positief) en veranderlijke N, een deelrij

$$f_{n_{1k}}(z),\ f_{n_{2k}}(z),\ \ldots\ldots,\ f_{n_{ik}}(z),\ \ldots\ldots$$

bestaat, waarvoor $|f_{n_{ik}}(z) - f(z)| < \varepsilon$ voor alle waarden van n_{ik} en iedere z van d_k.

Omdat $f(z)$ continu is in G heeft $|f(z)|$ een maximum M in G. Binnen d_k is dus:

$$|f_{n_{ik}}(z)| < M + \varepsilon = M'.$$

De rij $f_{n_{ik}}(z)$ is dus op d_k gelijkmatig begrensd en convergeert daar in alle punten. Ze convergeert dus binnen d_k gelijkmatig tot de holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Dit geldt voor ieder deelgebied d_k en omdat ieder afgesloten deelgebied A van G met een eindig aantal gebieden d_k overdekt kan worden, is $f(z)$ holomorph binnen A en dus ook binnen G.

De rij $f_{n_{ik}}(z)$ convergeert op d_k gelijkmatig tot $f(z)$. Er is dus bij ieder positief gegeven getal ε en een vast getal N een getal n_ε ($n_\varepsilon > N$) te vinden, waarvoor

$$|f_{n_\varepsilon}(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{in iedere } z \text{ van } d_k.$$

Blijkbaar is dus, indien δ onafhankelijk is van N, δ tevens onafhankelijk van ε.

Uit het bewijs volgt nog, dat het voldoende is, indien δ voor één waarde van ε onafhankelijk van N is.

3°. *δ onafhankelijk van ε.*

Dit beteekent, dat in een deelgebied d_k, met diameter δ, bij vate N (N' behoeft echter niet vast te zijn) en veranderlijke $\varepsilon > 0$, er een deelrij

$$f_{n_{1k}}(z),\ f_{n_{2k}}(z), \ldots\ f_{n_{jk}}(z), \ldots$$

bestaat, zoodat

$$|f_{n_{1k}} - f(z)| < \varepsilon_1,\ |f_{n_{2k}}(z) - f(z)| < \varepsilon_2 \ldots\ |f_{n_{jk}}(z)\ \ f(z)| < \varepsilon_j \ldots$$

waarbij $\qquad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_j > \ldots \quad \lim\limits_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0.$

De rij $f_{n_{jk}}(z)$ convergeert dus gelijkmatig binnen d_k tot de grensfunctie $f(z)$, die daar dan holomorph is. Omdat ieder afgesloten deelgebied A van G met een eindig aantal gebieden d_k overdekt kan worden, is $f(z)$ holomorph in A en dus holomorph in G.

Uit het bewijs volgt, dat het voldoende is, indien δ voor één waarde van N onafhankelijk is van ε.

Omdat de rij $f_{n_{jk}}(z)$ binnen d_k gelijkmatig convergeert is er, bij een vast getal ε en ieder getal N een getal $n_k > N$ te vinden, zoodat : $\qquad |f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad$ in iedere z van d_k.

Blijkbaar is dus, indien δ onafhankelijk is van ε, δ ook onafhankelijk van N. De beide laatste voorwaarden zijn dus aequivalent.

4°. *n_k voor alle gebieden d_k gelijk.*

Dit beteekent, dat er een deelrij $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z) \dots f_{n_k}(z) \dots$ bestaat, die binnen G gelijkmatig tot $f(z)$ convergeert. $f(z)$ is dus holomorph binnen G.

Noem $\frac{1}{N} = \nu$ en beschouw de functie $\delta(\varepsilon, \nu)$.

5°. *Indien er 2 getallenrijen bestaan:*

$$\varepsilon_i \ (i = 1, 2, \dots), \lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0 \qquad \textit{en}$$

$$\nu_i \ (i = 1, 2, \dots), \lim_{i \to 0} \nu_i = 0,$$

waarvoor de getallen $\delta(\varepsilon_i, \nu_i)$ voor iedere i een vast getal $\Delta > 0$ overtreffen, dan convergeert $f_n(z)$ binnen G tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Want ieder inwendig punt van G heeft een omgeving ω met diameter Δ, waarin een gelijkmatig tot $f(z)$ convergeerende deelrij $f_{n_p}(z)$ $(p = 1, 2, \dots)$ bestaat.

6°. *Indien bij constante ε, er één getallenrij*

$$\nu_i \ (i = 1, 2, \dots), \lim_{i \to \infty} \nu_i = 0$$

bestaat, waarvoor de getallen $\delta(\varepsilon, \nu_i)$ voor iedere i een vast getal $\Delta_\varepsilon > 0$ overtreffen, dan convergeert de rij $f_n(z)$ binnen G tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$.

Want ieder inwendig punt van G heeft een omgeving ω met diameter Δ_ε, waarin een gelijkmatig begrensde, tot $f(z)$ convergeerende deelrij $f_{n_q}(z)$ $(q = 1, 2, \dots)$ bestaat.

Het is voldoende, indien voor één waarde van ε zulk een getallenrij ν_i bestaat.

7°. *Indien bij constante* ν, *er één getallenrij*

$$\varepsilon_i \ (i = 1, 2, \ldots) \ \lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$$

bestaat, waarvoor de getallen $\delta\ (\varepsilon_i, \nu)$ *voor iedere* i *een vast getal* $\Delta_\nu > 0$ *overtreffen, dan convergeert de rij* $f_n(z)$ *binnen* G *tot een holomorphe grensfunctie* $f(z)$.

Want ieder inwendig punt van G heeft een omgeving ω met diameter Δ_ν, waarin een gelijkmatig tot $f(z)$ convergeerende deelrij $f_{n_r}(z)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ bestaat.

Het is voldoende, indien voor één waarde van ν zoo'n getallenrij ε_i bestaat.

HOOFDSTUK IV.

Onderzoekingen van Hartogs en Rosenthal.

Door HARTOGS en ROSENTHAL is onderzocht, aan welke voorwaarden een gebied G, dat door een lijnvormig continuum Γ in enkelvoudig samenhangende, overal dicht in G liggende gebieden G_n wordt verdeeld, moet voldoen, opdat het mogelijk zij, een rij van holomorphe functies $f_n(z)$ (waarvoor men polynomen kan nemen) te construeeren, die:

1°. overal binnen G convergeert,

2°. binnen iedere G_n gelijkmatig convergeert,

3°. in de omgeving van ieder punt van Γ ongelijkmatig convergeert.

Γ heeft minstens één punt met de grens C van G gemeen.

Zij K een cirkel, die G geheel bevat. *Dan is een noodige en voldoende voorwaarde, dat er een systeem van strooken $S_1, S_2, \ldots . S_n, \ldots$ bestaat, die zoowel punten met G als met de cirkelomtrek K gemeen hebben en zoodat iedere omgeving van een punt van Γ door ∞ veel van zulke strooken getroffen wordt en ieder punt van G slechts door een eindig aantal strooken overdekt wordt.* (Voorwaarde A).

De voorwaarde is noodig. Neem aan, er bestaat zoo'n rij functies $f_n(z)$. Zij P een willekeurig punt van Γ. Wegens de ongelijkmatige convergentie moet er in een omgeving van P een punt z_n zijn en een functie $f_{\nu_n}(z)$, zoodat $| f_{\nu_n}(z_n) | > n$.

Omdat de rij $f_n(z)$ niet gelijkmatig begrensd is binnen G en dus ook niet binnen K, moet er een strook S_n zijn, die zoowel punten met G als met K gemeen heeft en waarin $| f_{\nu_n}(z) | > n$.

Daar er in iedere omgeving van P een ∞ aantal punten z_n zijn, wordt iedere omgeving van P door ∞ veel strooken S_n getroffen. Een punt Q van G kan echter slechts door een eindig aantal strooken S_n overdekt worden, omdat anders de rij $f_n(z)$ in Q niet zou convergeeren.

De voorwaarde is voldoende. Neem aan, er bestaat een systeem van strooken S_1, S_2, ... S_n...., dat aan de voorwaarde A voldoet. Dan wordt een willekeurig deelgebied van iedere G_n slechts door een eindig aantal strooken S_n getroffen. Benader nu iedere G_n door polygoonvlakken g_{n1}, g_{n2}, ... $g_{n\nu}$, ... en zorg, dat S_n geen gebieden g_{1n}, g_{2n}, ... $g_{\nu n}$, ... treft, doch wel $g_{1,n+1}$, $g_{2,n+1}$, ... $g_{\nu,n+1}$.... en dat de afstand van S_n tot een punt P_n (die overal dicht op Γ liggen) kleiner dan δ_n is, waarbij $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$.

Neem nu S_n weg uit K en noem het overblijvende, enkelvoudig samenhangende gebied, R_n. Men kan dan, volgens de methode van Runge een rij polynomen $f_n(z)$ construeeren, zoodat

$$|f_n(z)| < \frac{1}{n} \text{ in } R_n \quad \text{en}$$

$$|f_n(z) - 1| < \tfrac{1}{2} \text{ voor } |z - P_n| < 2\delta_n, \ z \text{ in } S_n.$$

De rij $f_n(z)$ convergeert dan overal binnen G tot 0, doch doet dit in de omgeving van ieder punt van Γ ongelijkmatig.

Is bovendien de grensfunctie $\varphi(z)$ voorgeschreven, dan moet dit in de gebieden G_n een holomorphe functie $\varphi_n(z)$ zijn en op Γ een functie $\varphi_0(z)$, die als grensfunctie van een polynomenrij $P_n(z)$ is voor te stellen.

Er zullen dan gebieden G_ν zijn, waar de convergentie op het afgesloten gebied G_ν gelijkmatig is en andere gebieden, waar dit niet het geval is. (Dit hangt af van de keuze van $\varphi(z)$). De eerste soort zullen we *gebieden met geheel gelijkmatige convergentie* noemen, de tweede soort *gebieden met ongelijkmatige convergentie aan de rand.* Een gebied van de eerste soort moet steeds begrensd worden door gebieden van de tweede soort.

Voor het bestaan van een rij holomorphe functies, die overal binnen G tot $\varphi(z)$ convergeeren en dat op Γ ongelijkmatig doen, is dan noodig en voldoende, dat er een systeem van strooken S_1, S_2, ... S_n, ... bestaat, die zoowel met de gebieden met ongelijkmatige *convergentie aan de rand, als met de cirkelomtrek K, punten gemeen hebben en zoo, dat iedere omgeving van een punt van Γ aan de „zijde(n) van ongelijkmatige convergentie" door een ∞ aantal strooken S_n getroffen wordt, doch ieder punt van G slechts door een eindig aantal strooken overdekt wordt* (Gewijzigde voorwaarde B).

Dat de voorwaarde noodig is, blijk op dezelfde wijze als in het voorgaande bewijs.

De voorwaarde is voldoende. Neem aan, dat er een systeem van strooken S_n bestaat, dat aan de gewijzigde voorwaarde B voldoet. Benader de gebieden G_ν met ongelijkmatige convergentie aan de rand, door polygoonvlakken $g_{\nu 1}, g_{\nu 2}, \ldots g_{\nu n}$, en zorg, dat $g_{\nu 1}$ punten met S_ν gemeen heeft. Verdeel de strooken S_ν door lengtesneden in ∞ veel strooken $s_{\nu 1}, s_{\nu 2}, \ldots s_{\nu n}, \ldots$ Neem nu van het cirkelvlak K de n polygoonvlakken $g_{1 n}$, $g_{2 n}, \ldots g_{n n}$ met de bijbehoorende strooken $s_{1 n}, s_{2 n}, \ldots s_{n n}$ weg ($g_{\nu n}$ heeft dus punten met $s_{\nu n}$ gemeen). Dan wordt K in hoogstens een eindig aantal enkelvoudig samenhangende gebieden verdeeld, die geen punten met elkaar gemeen hebben. Noem deze rest R_n.

Gescheiden van R_n en van elkaar, liggen de gebieden $g_{1, n-1}$, $g_{2, n-1}, \ldots g_{n, n-1}$. Men kan nu weer, volgens de methode van Runge, een polynomenrij $f_n(z)$ construeeren, die in iedere $g_{\nu, n-1}$ minder dan $\frac{1}{n}$ van $\varphi_\nu(z)$ afwijkt en in ieder gebied R_n minder dan $\frac{1}{n}$ van $P_n(z)$.

Deze rij $f_n(z)$ convergeert overal binnen G tot $\varphi(z)$. Het is echter niet altijd zeker, dat de convergentie in de omgeving van ieder punt van Γ ongelijkmatig is. Is dit niet het geval, dan kan men volgens een voorgaande methode een functierij $h_n(z)$ construeeren, die overal binnen G tot 0 convergeert en die dat in de omgeving van ieder punt van Γ ongelijkmatig doet. Dan zal de functierij $F_n(z) = f_n(z) + \gamma h_n(z)$, waarin γ een geschikt gekozen constante is, aan alle gestelde eischen voldoen.

Opmerking. Uit de bovenstaande onderzoekingen volgt onmiddellijk, dat *het steeds mogelijk is, in een enkelvoudig samenhangend gebied G met kromme Γ, die aan de voorwaarde A voldoet een rij van holomorphe functies $F_n(z)$ te construeeren, die overal binnen G tot een gegeven holomporhe functie $F(z)$ convergeert en die dat in de omgeving van ieder punt van Γ ongelijkmatig doet.*

Benader $F(z)$ gelijkmatig door een rij holomorphe functies $f_n(z)$. Construeer een rij holomorphe functies $h_n(z)$, die overal binnen G tot 0 convergeert en dat in de omgeving van ieder punt van Γ ongelijkmatig doet. De functierij

$$F_n(z) = f_n(z) + \gamma\, h_n(z),$$

waarin γ een geschikt gekozen constante is, voldoet dan aan de gestelde eischen.

Tenslotte onderzochten HARTOGS en ROSENTHAL aan welke eigenschappen een functie $\varphi(z)$ moet voldoen, om grensfunctie van een holomorphe functierij te kunnen zijn.

Noem de gebieden waar $\varphi(z)$ holomorph is: χ_n en de verzameling punten, die niet tot een χ_n behooren: Γ_0. χ_n behoeft niet enkelvoudig samenhangend te zijn.

Dan is een noodige en voldoende voorwaarde:

1°. *$\varphi(z)$ moet op Γ_0 benaderd kunnen worden door een polynomenrij $P_n(z)$.*

2°. *De gebieden χ_n waar de rij $P_n(z)$ niet gelijkmatig binnen en op de begrenzing convergeert moeten voldoen aan de gewijzigde voorwaarde B.*

Het bewijs is geheel analoog met het voorgaande, mits de gebieden χ_n zoo noodig door „kanalen" tot enkelvoudig samenhangende gebieden gemaakt zijn.

Tenslotte blijkt nog, dat $\varphi(z)$ *een functie van de* 1° *of* 2° *klasse van* BAIRE *moet zijn om op Γ_0 door een polynomenrij benaderd te kunnen worden en dat $\varphi(z)$ slechts als een willekeurige zoodanige functie gekozen kan worden, als Γ_0 aan de gewijzigde voorwaarde B voldoet.*

HOOFDSTUK V.

Toepassingen en Voorbeelden.

Stelling van JENTZSCH[1]). *Indien een machtreeks* $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ *de eenheidscirkel* C *tot convergentiecirkel heeft, is ieder punt van de omtrek van* C *een limietpunt van de nulpunten van de functies* $f_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$ $(n = 1, 2 \ldots\ldots)$.

Het is voldoende, het bewijs te leveren voor het punt $z = 1$. Neem aan, dat $z = 1$ geen limietpunt van nulpunten is. Zij c een kleine cirkel met $z = 1$ als middelpunt en straal r. Zij verder c_1 het gemeenschappelijke stuk van C en c; c_2 het overige deel van c. Kies c zoo klein, dat er in c_1 geen nulpunten van een $f_n(z)$ liggen en dus voor iedere cirkel γ binnen c_1 geldt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'_n(t)}{f_n(t)}\,dt = 0.$$

Omdat $\frac{f'_n(t)}{f_n(t)}$ op γ gelijkmatig tot $\frac{f'(t)}{f(t)}$ convergeert, zal voor γ ook:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = 0.$$

Dus is $f(z) \neq 0$ binnen c_1.

Beschouw voor alle waarden van $n > 0$ de functie $\sqrt[n]{f_n(z)}$. Kies deze zoo, dat $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_n(z)} = 1$ in c_1. Dit is mogelijk, omdat $f_n(z)$ en $f(z) \neq 0$ zijn in c_1 en $lg\, f_n(z)$ en $lg\, f(z)$ dus

---

[1]) Diss. 1914.

zoo gekozen kunnen worden, dat: $\lim\limits_{n \to \infty} lg\, f_n(z) = lg\, f(z)$ en $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_n(z)} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n} lg\, f_n(z)} = 1$ binnen c_1.

Omdat $f_n(z) \neq 0$ in c_1, is $\sqrt[n]{f_n(z)}$ holomorph in c_1. Kies een punt ξ in c_2 op het verlengde van de lijn (0, 1).

$\sum\limits_0^\infty |a_k| z^k$ heeft een convergentiestraal = 1, dat is dus ook de convergentiestraal van

$$\frac{1}{1-z} \sum_0^\infty |a_n| z^n = \sum_0^\infty \Big(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|\Big) z^n,$$

d.w.z. dat er een getal N bestaat, zoodat voor $n > N$

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| < M (1 + \xi)^n \qquad M = \text{constant}.$$

Binnen c is

$$\left|\sqrt[n]{f_n(z)}\right| \leqq \left\{\Big(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|\Big) (1+r)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < m(1+\xi)(1+r)$$

$$m = \text{constant}.$$

De rij $\sqrt[n]{f_n(z)}$ is dan gelijkmatig begrensd in c. Bovendien convergeert ze in c_1, dus zal ze volgens de stelling van STIELTJES overal in c gelijkmatig convergeeren, waar dan ook geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_n(z)} = 1.$$

Er is dus een getal $\mathfrak{N}$ aan te geven, zoodat voor $n > \mathfrak{N} + 1$

$$\left|\sqrt[n]{f_n(\xi)}\right| < \xi' \quad \text{of} \quad |f_n(\xi)| < \xi'^n \qquad (1 < \xi' < \xi).$$

Ook is dan:

$$\frac{|f_n(\xi)| - |f_{n-1}(\xi)|}{\xi^n} = |a_n| < \frac{2\,\xi'^n}{\xi}$$

En dus $$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{\xi'}{\xi} < 1$$

De convergentiestraal van $\sum\limits_0^\infty a_k z^k$ zou dan > 1 zijn, hetgeen in tegenspraak met de onderstelling is. Het punt $z = 1$ is dus limietpunt van nulpunten van de functies $f_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$.

Uitbreiding van de stelling van JENTZSCH [1]). *Indien de reeks* $\sum_0^\infty a_k z^k = f(z)$ *een convergentiestraal* $= 1$ *heeft, en die van de reeks* $\sum_0^\infty b_k z^k$ is ≥ 1, *dan is ieder punt van* $|z| = 1$ *limietpunt van wortels van de vergelijkingen* $\sum_0^n a_k z^k = b_n$.

Het is weer voldoende, het bewijs te geven voor het punt $z = 1$. $c, r, c_1, c_2, \xi, \xi'$ hebben dezelfde beteekenis als in het voorgaande.

Neem aan, dat $z = 1$ geen limietpunt van wortels is. Dan kan c zoo klein gekozen worden en is er een getal n_0 aan te geven, zoodat binnen c voor $n > n_0$ geldt: $\sum_0^n a_k z^k \neq b_n$. Dan kan men bij iedere $n > n_0$ een functie $\Phi_n(z) = \sqrt[n]{\sum_0^n a_k z^k - b_n}$ kiezen, die holomorph in c is. Ook is weer

$$|a_0| + |a_1| + \ldots |a_n < M(1+\xi)^n \qquad M = \text{constant}.$$

Bovendien kan men, omdat $\lim \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1$, een getal $\mathfrak{N} > n_0$ aangeven, zoodat voor $n > \mathfrak{N}$, $\sqrt[n]{|b_n|} < (1 + \xi)$. Dus is:

$$|\Phi_n(z)| < \sqrt[n]{\left|\sum_0^n a_k z^k\right| + \sqrt[n]{|b_n|}} < m(1+\xi)(1+r) + (1+\xi) = \mu(1+\xi)$$

d. w. z. de rij $\Phi_n(z)$ is binnen c gelijkmatig begrensd.

Om aan te toonen, dat de rij convergeert in c, zullen 2 gevallen worden onderscheiden, n.l.

$$1^\circ.\ \lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty \quad \text{en } 2^\circ.\ \lim_{n\to\infty} |b_n| = b. \qquad (b \text{ eindig})$$

[1]) J. Wolff. C. R. **184**, 1927, blz. 795.

1°. geval. Er is een getal ν aan te geven, zoodat voor $n > \nu$ in c_1 geldt:

$$\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}|b_n|} < \left|\sqrt[n]{\sum_0^n a_k z^k - b_n}\right| < \sqrt[n]{2|b_n|}$$

Omdat $\overline{lim} \sqrt[n]{|b_n|} \leqq 1$ is $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$, waaruit volgt:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sum_0^n a_k z^k - b_n} = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(z) = 1.$$

2°. geval. In c_1 is $\lim\limits_{n \to \infty} (\sum\limits_0^n a_k z^k - b_n) = f(z) - b \neq 0$ en dus

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sum_0^n a_k z^k - b_n} = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(z) = 1.$$

$f(z) - b \neq 0$ omdat voor een cirkel γ binnen c_1:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'_n(t)}{f_n(t) - b_n}\, dt = 0.$$

Omdat $\dfrac{f'_n(t)}{f_n(t) - b_n}$ op γ gelijkmatig tot $\dfrac{f'(t)}{f(t) - b}$ convergeert, is ook $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(t)}{f(t) - b}\, dt = 0$. Dus moet $f(t) - b \neq 0$ zijn.

In beide gevallen is nu aangetoond, dat de rij $\Phi_n(z)$ binnen c_1 convergeert. De rij is binnen c gelijkmatig begrensd, en dus volgt uit de stelling van STIELTJES, dat $\Phi_n(z)$ overal in c gelijkmatig convergeert. Daar is dan $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi_n(z) = 1$.

Men kan dus een getal N aangeven, zoodat voor $n > N + 1$ in het punt $z = \xi$:

$$\left|\sqrt[n]{\sum_0^n a_k \xi^k - b_n}\right| < \xi' \text{ of } \left|\sum_0^n a_k \xi^k - b_n\right| < \xi'^n.$$

Of, omdat $\overline{\lim}\sqrt[n]{|b_n|} \leqq 1$, $\left|\sum_0^n a_k \xi^k\right| < 2\,\xi'^n$.

Dus: $\left|\dfrac{\sum_0^n a_k \xi^k - \sum_0^{n-1} a_k \xi^k}{\xi^n}\right| = |a_n| < \dfrac{4\,\xi'_n}{\xi^n}$.

Hieruit volgt: $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \dfrac{\xi'}{\xi} < 1$.

Dit is echter in strijd met de onderstelling en dus is $z = 1$ limietpunt van wortels van de vergelijkingen $\sum_0^n a_k z^k = b_n$.

Voorbeeld van een rij holomorphe functies $P_n(z)$ in een cirkel om O, die daar niet gelijkmatig tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$ convergeert [1]).

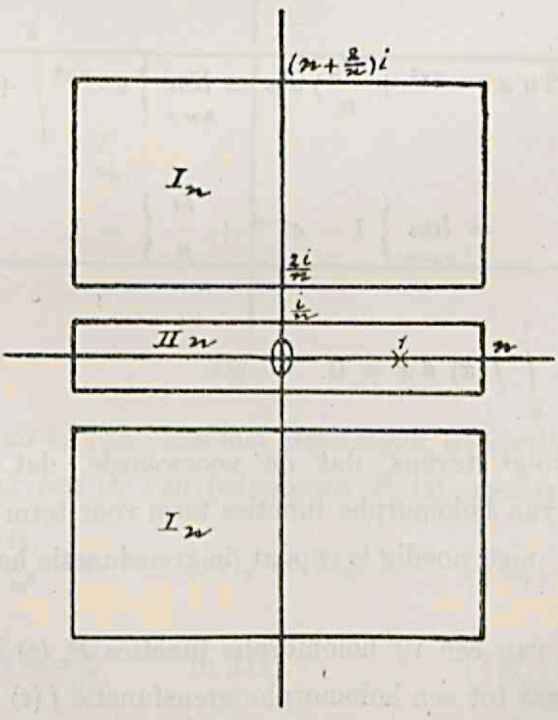

Fig. III

[1]) Montel. Bull. des Sc. Math. (2) **30**, blz. 190.

Construeer in het z vlak een rij figuren I_n, II_n $(n = 1, 2, \ldots.)$, samengesteld uit rechthoeken met afmetingen, zooals de teekening aangeeft. Maak volgens de methode van RUNGE een rij polynomen $P_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, zoodat:

$$P_n(z) = 0 + \frac{\Theta_1}{n} \qquad \text{in } \mathrm{I}_n,\ |\Theta_1| < 1.$$

$$P_n(z) = 2\,n\,e^{-n z^2} + \frac{\Theta_2}{n} \qquad \text{in } \mathrm{II}_n,\ |\Theta_2| < 1.$$

Deze functierij convergeert in iedere cirkel om O met straal $R > 0$ tot de grensfunctie $f(z) \equiv 0$. De convergentie is echter niet gelijkmatig, want men kan de rij niet term voor term integreeren. Men heeft n.l. op de reëele as:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left(2\,n\,x\,e^{-n x^2} + \frac{\Theta_2}{n}\right) d\,x = \lim_{n \to \infty} \left\{ e^{-n x^2} \Big|_1^0 + \frac{\Theta}{n} \right\} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ 1 - e^{-n} + \frac{\Theta}{n} \right\} = 1.$$

Echter is $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,d\,x = 0.$

Hieruit volgt tevens, dat de voorwaarde, dat een convergeerende rij van holomorphe functies term voor term geintegreerd kan worden, niet noodig is, opdat de grensfunctie holomorph zij.

Voorbeeld van een rij holomorphe functies $P_n(z)$ in een cirkel om O, die daar tot een holomorphe grensfunctie $f(z)$ convergeert, terwijl de rij van afgeleiden niet tot de afgeleide van de grensfunctie convergeert.

Construeer in het z vlak een rij figuren I_n, II_n, III_n $(n = 1, 2, ..)$,

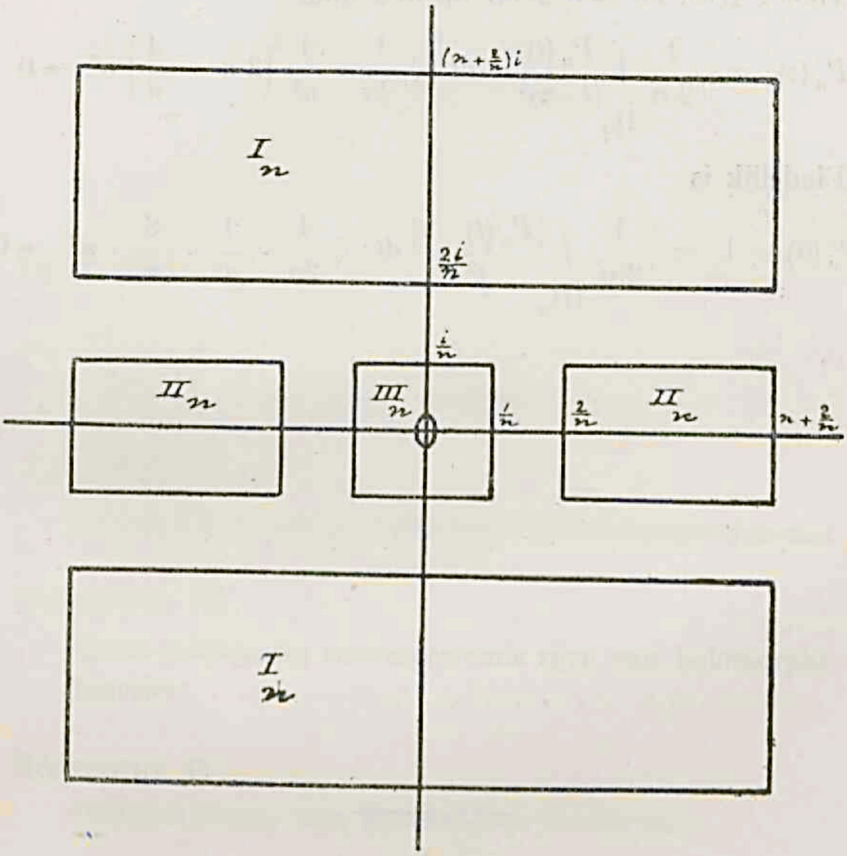

Fig. IV

samengesteld uit rechthoeken met afmetingen, zooals de teekening aangeeft. Maak een rij van polynomen $P_n(z)$, zoodat:

$$P_n(z) = \frac{\Theta_1}{n^4} \qquad \text{in } \mathrm{I}_n \text{ en } \mathrm{II}_n \qquad \left(|\Theta_1| < 1 \right)$$

$$P_n(z) = z + \frac{\Theta_2}{n^2} \qquad \text{in } \mathrm{III}_n. \qquad \left(|\Theta_2| < 1 \right)$$

Deze functierij convergeert overal voor $|z| \neq \infty$ tot de grensfunctie $f(z) \equiv 0$.

Voor z niet reëel is $P'_n(z) \to 0$ (stelling van WEIERSTRASZ). Voor z reëel en $\neq 0$ geldt op den duur

$$\left| P'_n(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{II}_n} \frac{P_n(t)}{(t-z)^2} dt \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n^4} \left(2\,n + \frac{4}{n}\right) n^2 \to 0$$

Eindelijk is

$$\left| P'_n(0) - 1 \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{III}_n} \frac{\{P_n(t) - t\}}{t^2} dt \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{8}{n} \cdot n^2 \to 0$$

INHOUD

STELLINGEN.

I.

Een noodige en voldoende voorwaarde, dat de grensfunctie $f(z)$ van een convergeerende rij continue functies $f_n(z)$ binnen een gebied G daar begrensd is, is de quasi-gelijkmatige begrensdheid van de rij $f_n(z)$ binnen G, d.w.z.:

Aan ieder afgesloten deelgebied A van G is een getal M toegevoegd, met de volgende eigenschap: geeft men N willekeurig, dan kan men uit eenzelfde eindig aantal boven N gelegen indices voor iedere z van A een n_z kiezen waarvoor: $|f_{n_z}(z)| < M$.

II.

Beeldt men de stralenruimte op een stelsel involutiekegelsneden af en laat men de top van een waaier of van een ster een kromme van de graad n beschrijven, dan ontstaat in het beeldvlak een kromme van de graad $2n$.

J. de Vries. Versl. Kon. Ac. (1) **34**, 1925, blz. 13.

III.

Ten onrechte meent Natorp bewezen te hebben, dat de ruimte van de ervaring driedimensionaal is.

P. Natorp. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, 1923, blz. 306.

IV.

De uitspraak van Clay, dat „de” doordringende straling voort moet komen uit de hoogere lagen van de atmosfeer, behoeft nadere experimenteele staving.

J. Clay. Versl. Kon. Ac. (2) **36**, 1927, blz. 1269.

V.

De meening van Lewis, dat er geen grond zou zijn om polarisatie te verwachten in het lijnenspectrum van de corona, is onjuist.

Lick Obs. Bull. **10**, 1918, blz. 7.
Publ. Astr. Soc. Pacific. **30**, 1918, blz. 235.

VI.

Bij vele taalkundige onderzoekingen wordt een onjuist gebruik gemaakt van statistisch materiaal.

N. Beckman. Arkiv för Nordisk Filologie. **43**, 1927, blz. 245.

VII.

De uitdrukking: μ_x is de kans, dat een x-jarige op dit oogenblik sterft, is door haar onvolledigheid onjuist.

H. Galbrun. Assurances sur la vie. Calcul des primes. 1924, blz. 41.

VIII.

Het is niet wenschelijk, de theoretische en praktische opleiding van de a.s. academisch gevormde docent, tijdens de studie voor het doctoraal examen te doen plaats hebben.

Weekblad v. G. en M. O. **26**, no. 18, 1930, blz. 539.

CONVERGEERENDE RIJEN VAN HOLOMORPHE FUNCTIES

J. MARX