Axiomatische opbouw der verzamelingenleer, in het bijzonder der getallentheorie

https://hdl.handle.net/1874/301003

AXIOMATISCHE OPBOUW DER VERZAMELINGENLEER, IN HET BIJZONDER DER GETALLENTHEORIE

P. G. J. VREDENDUIN

AXIOMATISCHE OPBOUW DER VERZAMELINGENLEER
IN HET BIJZONDER DER GETALLENTHEORIE

AXIOMATISCHE OPBOUW DER VERZAMELINGENLEER, IN HET BIJZONDER DER GETALLEN-THEORIE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DE RECTOR-MAGNIFICUS, DR. L. S. ORNSTEIN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DE SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN DER FACULTEIT TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 30 NOVEMBER 1931 TE 15 UUR

DOOR

PIETER GAELE JOHANNES VREDENDUIN
GEBOREN TE AMSTERDAM

UITGEVERIJ „DE PLOEG". W. LANDSTRA — UTRECHT

I. AXIOMATIEK. THEORIE DER AEQUIVALENTIE. SYSTEEM DER NATUURLIJKE GETALLEN.

Grondbegrip: Verzameling.

Grondrelatie: ϵ (is element van).

Negatie $\acute{\epsilon}$.

Definitie: Indien uit $x \epsilon a$ volgt $x \epsilon b$, dan heet a *deelverzameling* van b. Notatie: $a \lesssim b, b \gtrsim a$. Is er bovendien een element $y \epsilon b$, zoodat $y \acute{\epsilon} a$, dan heet a een *echte deelverzameling* van b.

Definitie: Is $a \lesssim b$ en $b \lesssim a$, dan zijn a en b *gelijk*. Anders zijn a en b *verschillend*. Notatie resp. $a = b$ en $a \neq b$.

Axioma 1: Is $a = b$ en $a \epsilon A$, dan geldt $b \epsilon A$.

Gevolg: In elke relatie mag een verzameling worden vervangen door een daaraan gelijke verzameling. Dientengevolge noteeren we een verzameling door zijn verschillende elementen tusschen accoladen te plaatsen.

Axioma 2: Uit de existentie van a en b volgt die van $\{a, b\}$, mits $a \neq b$.

Axioma 3: Existeert m, dan existeert de verzameling van alle elementen der elementen van m.

Definitie: Deze verzameling heet de *vereenigingsverzameling* van m. Notatie: Σm.

Axioma 4: Existeert m, dan existeert de verzameling der deelverzamelingen van m.

Notatie: Um.

Oordeels-definitie: Noodzakelijke voorwaarde, waaronder geldt: ψ (x) *is een functie van* x, is dat geldt: ψ (x) is een verzameling, als x een verzameling is. Functies van x zijn:

a. een verzameling a,

b. x,

c. Σx,
d. Ux,
e. als $\phi(x)$ en $\psi(x)$ functies van x zijn: $\phi(\psi(x))$.

Oordeels-definitie: $\phi(x, y)$ is een functie van x en y beteekent: indien x een verzameling is, is $\phi(x, y)$ een functie van y en indien y een verzameling is, is $\phi(x, y)$ een functie van x.

Gevolg: Een functie van x is tevens functie van x en y.

Axioma 5: Existeert m en zijn $\phi(x)$ en $\psi(x)$ functies van x, dan existeeren de deelverzamelingen van m der elementen, waarvoor geldt $\phi(x) \acute{\epsilon}\, \psi(x)$, resp. $\phi(x) \neq \psi(x)$.

Notatie:

$$m_{\phi(x) \acute{\epsilon}\, \psi(x)}, \text{ resp. } m_{\phi(x) \neq \psi(x)}.$$

Gevolg: Onder de voorwaarden genoemd in axioma 5 existeeren ook:

$$m_{\phi(x) \epsilon\, \psi(x)} \text{ en } m_{\phi(x) = \psi(x)},$$

immers dit is:

$$m_{y \acute{\epsilon}\, m_{\phi(x) \acute{\epsilon}\, \psi(x)}}, \text{ resp. } m_{y \acute{\epsilon}\, m_{\phi(x) \neq \psi(x)}}.$$

Oordeels-definitie:

$m_{\phi(x) \acute{\epsilon}\, \psi(x)}$ en $m_{\phi(x) \neq \psi(x)}$ *zijn functies van m.*

Oordeels-definitie:

$m_{\phi(x, y) \acute{\epsilon}\, \psi(x, y)}$ en $m_{\phi(x, y) \neq \psi(x, y)}$ *zijn functies van y.*

Gevolg: In bovenstaande definities mag $\acute{\epsilon}$ door ϵ, $\neq$ door $=$ vervangen worden.

Stelling 1: Existeert een verzameling m, dan existeert een verzameling, die geen element bevat.

Bewijs: De verzameling $m_{x \acute{\epsilon}\, m}$ voldoet.

Definitie: Een verzameling, die geen element bevat heet *nulverzameling.* Notatie: 0. De nulverzameling noemt men *leeg.*

Stelling 2: Existeert m, dan existeert $\{m\}$.

Bewijs: Zij $m \neq 0$, dan voldoet aan het gestelde:

$$\{m, 0\}_{x = m}.$$

Is $m = 0$, dan voldoet $U0$.

Oordeels-definitie: Zijn $\phi\,(x)$ en $\psi\,(x)$ functies van x, dan *is* ook *een functie van x*:

$$\{\phi\,(x), \psi\,(x)\} \text{ voor } \phi\,(x) \neq \psi\,(x),$$
$$\{\,\phi\,(x)\,\} \text{ voor } \phi\,(x) = \psi\,(x).$$

Gevolg: Kies $\phi\,(x) \equiv \psi\,(x) \equiv x$, dan vinden we: $\{x\}$ is een functie van x. (Het symbool $\equiv$ verbindt steeds verschillende notaties voor hetzelfde begrip.)

Stelling 3: Bij een verzameling A bestaat de verzameling der elementen, welke element zijn van alle elementen van A.

Bewijs: De verzameling van alle elementen van A, die een element y bevatten, is:

$$A_{y \,\epsilon\, x} \equiv \phi\,(y).$$

Zij nu $a \,\epsilon\, A$, dan is de gevraagde verzameling:

$$a_{\phi\,(y) = A}.$$

Definitie: De in stelling 3 ingevoerde verzameling heet *doorsnede* van A.

Gevolgen: 1. De doorsnede van A is een functie van A.

2. De doorsnede van $\{a, b\}$ is $a_{x \,\epsilon\, b}$, is dus een functie van a en b. Notatie: $[ab]$.

Definitie: Indien voor elk element a der verzameling m geldt:

$$[a\ \Sigma\, m_{x \,\neq\, a}] = 0,$$

heet m *normaal*.

Definitie: Men zegt, dat m *één element bevat* als geldt:

1e: $m \neq 0$,

2e: is $a \,\epsilon\, m$, dan is $m_{x \,\neq\, a} = 0$.

Gevolg: Is $b \neq a$, dan is $b \,\bar{\epsilon}\, m$. Dus $m = \{a\}$. Maar dan is $m = \{\Sigma\, m\}$. Omgekeerd volgt hieruit, dat m één element bevat, immers:

$$m \neq 0 \text{ en } m_{x \,\neq\, \Sigma m} = 0.$$

Stelling 4: Zij gegeven een normale verzameling $M\,\{m_1, m_2, \ldots.\}$, dan existeert de verzameling van alle deelverzamelingen van $\Sigma\, M$, welker doorsnede met ieder element van M één element bevat. Deze verzameling is een functie van M.

Bewijs: De gevraagde verzameling is deelverzameling van $U\Sigma M$. De verzameling van alle elementen van M, welker doorsnede met een verzameling z één element bevat, is:

$$M_{[x\,z]} = \{\Sigma\,[x\,z]\} \equiv \phi\,(z).$$

De gevraagde verzameling is dus:

$$U\Sigma M_{\phi\,(z)} = M',$$

een functie van M.

(Indien niet door haken anders is aangeduid, worden de operaties van rechts naar links opvolgend uitgevoerd.)

Definitie: De in stelling 4 ingevoerde verzameling heet *productverzameling* van M. Notatie: PM.

Gevolg: Is $0 \in M$, dan geldt $PM = 0$.

Axioma 6: Is $M \neq 0$ een normale verzameling en is $0 \notin M$, dan is $PM \neq 0$.

Invoering van de natuurlijke getallen en vaststelling eener orderelatie.

Axioma 7: *a.* Er existeert een verzameling.

b. Bij elke verzameling m en functie $\phi\,(x)$ existeert een verzameling M met de eigenschappen:

1e: $m \in M$,

2e: is $y \in M$, dan is $\phi\,(y) \in M$.

c. Voor elke zoodanige verzameling M existeert de deelverzameling M' der elementen, waarvan met behulp van uitsluitend de voorschriften 1e en 2e kan aangetoond worden, dat ze tot M behooren (d.w.z. er geldt $\mu \in M'$, indien er relaties gelden, allen van de vorm 1e of 2e, waaronder voorkomt de relatie $\mu \in M'$).

Notatie: $\{\, m, \phi\,(m), \phi\,(\phi\,(m)), \ldots\ldots \}$.

Oordeels-definitie: $\{ m, \phi(m), \phi(\phi(m)), \ldots\ldots \}$ *is een functie van m.*

Gevolg: De verzameling:

$$Z' \equiv \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \ldots\ldots\}$$

existeert.

Analoog existeert:

$$Z \equiv \{\{0\}, \{\{0\}\}, \ldots\ldots\}.$$

We noteeren Z ook wel als volgt:

$$\{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\ldots\},$$

of:

$$\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}.$$

Definitie: De elementen der verzameling Z heeten *natuurlijke getallen.*

Stelling 5: Is $n \neq 1$ een natuurlijk getal, dan is ook Σn een natuurlijk getal.

Bewijs: De eindconclusie, welke aantoont, dat n een natuurlijk getal is, is daar $n \neq 1$, van de vorm: p is natuurlijk getal, dus ook $\{p\}$. Substitueeren we hierin voor $\{p\}$ n, dan vinden we: Σn is een natuurlijk getal, dus ook n. Maar dan moet Σn een natuurlijk getal zijn.

Opmerking: Onder eindconclusie wordt niet verstaan de laatste conclusie, echter de conclusie, waarin uitgesproken wordt, dat n een natuurlijk getal is.

Zij p een natuurlijk getal dan existeert volgens axioma 7c:

$$Z'_p \equiv \{p+1, p+2, \ldots\ldots\},$$

en dit is een deelverzameling van Z, dus existeert ook:

$$Z_p \equiv Z - Z'_p.$$

(Is $\overline{m} \prec m$, dan noteeren we $m_{x \notin \overline{m}}$ ook wel verkort $m - \overline{m}$.)

Stelling 6: $1 \in Z_p$.

Bewijs: Voor alle $n \in Z'_p$ geldt $\Sigma n \in Z$, dus $1 \notin Z'_p$.

Stelling 7: Er is een natuurlijk getal a, zoodat $a \notin Z'_p$, $a + 1 \in Z'_p$.

Bewijs: Was het gestelde onjuist, dan was, daar $1 \bar{\epsilon} Z'_p$, volgens axioma 7c geen der natuurlijke getallen element van Z'_p.

Definitie: Zijn p en q natuurlijke getallen en kan met behulp van uitsluitend voorschrift 2e q uit p afgeleid worden, dan zegt men dat q *grooter* is dan p, p *kleiner* dan q. Notatie: $q > p$, $p < q$.

Gevolg: Is $p > q$ en $q > r$, dan geldt $p > r$ (transitiviteit der orderelatie).

Is $b < a$, dan kan niet $b \epsilon Z'_p$, daar dan ook $a \epsilon Z'_p$.

Is $b > a$, dan is $b = a + 1$ of $b > a + 1$ (of beide), dus in elk geval $b \epsilon Z'_p$. Dus:

Z'_p bestaat uit alle natuurlijke getallen $> a$,

Z_p bestaat uit alle natuurlijke getallen $\leqslant a$.

Daar $Z = Z_p + Z'_p$ is hiermede bewezen, dat voor elk natuurlijk getal n geldt òf $n > a$, òf $n \leqslant a$. ($m + n$ is een verkorte notatie voor $\Sigma\{m, n\}$, als $\{m, n\}$ normaal is.) Niet zeker is of deze uitspraak juist is voor elk natuurlijk getal a. Deze zekerheid verkrijgen we door te bewijzen:

Stelling 8: $p = a$.

Bewijs: Uit het ongerijmde zien we gemakkelijk, dat uit:

$$a \bar{\epsilon} Z'_p, a + 1 \epsilon Z'_p \text{ en } b \bar{\epsilon} Z'_p, b + 1 \epsilon Z'_p$$

volgt $a = b$. We kunnen dus volstaan met te bewijzen:

$$p \bar{\epsilon} Z'_p.$$

Als gevolg van stelling 5 geldt:

$$1 \bar{\epsilon} Z'_1 \{2, 3, \ldots.\}.$$

We toonen nu aan, dat indien geldt:

$$p \bar{\epsilon} Z'_p \{p + 1, p + 2, \ldots.\},$$

ook voldaan is aan:

$$p + 1 \bar{\epsilon} Z'_{p+1} \{p + 2, p + 3, \ldots.\}.$$

Was n.l. $p + 1 \epsilon Z'_{p+1}$, dan was $p + 1 > p + 2$ en daaruit volgt $p > p + 1$. We vinden dit door in het bewijs van $p + 1 > p + 2$ overal het natuurlijk getal p te vervangen door Σp. Contradictie. Uit het voorgaande volgt, dat voor willekeurige p geldt:

$$p \,\bar{\epsilon}\, Z'_p.$$

Toelichting: We kunnen bewijzen, dat p een natuurlijk getal is door gebruik te maken van uitsluitend de beide volgende uitspraken:

1e: 1 is een natuurlijk getal,

2e: is q een natuurlijk getal, dan is ook $q + 1$ een natuurlijk getal.

Vervangen we in het bewijs overal „p is een natuurlijk getal" door „p is gelijk aan het bij p behoorend natuurlijk getal a", dan zien we de geldigheid van bovenstaande conclusie. (Bewijsmethode der *volledige inductie.*)

Gevolg:

Stelling 9: Voor de natuurlijke getallen a en b geldt steeds òf $a > b$, òf $a < b$, òf $a = b$.

Gevolg: Is $p > q$, dan geldt:

Z_q is een echt deel van Z_p,

Z'_p is een echt deel van Z'_q.

Notatie:

$$Z_p \equiv \{1, 2, \ldots, p\},$$
$$Z_0 \equiv 0.$$

Theorie der aequivalentie.

Stelling 9a: Existeert m en is $\phi(x)$ een functie van x, dan existeert de verzameling, die tot elementen heeft $\phi(y)$, indien $y \epsilon m$, wanneer tevens een verzameling M existeert, zoodat voor elke $y \epsilon m$ geldt $\phi(y) \epsilon M$.

Bewijs: Uit m leiden we af de deelverzameling, die na transformatie overgaat in een gegeven verzameling z:

$$m_z = \phi(y) \equiv \psi(z).$$

Uit M leiden we vervolgens af de deelverzameling der elementen, welke door transformatie uit de elementen van m ontstaan:

$$M_{\psi(z)} \neq 0.$$

Dit is de gevraagde verzameling.

Notatie: We noteeren de hierboven afgeleide verzameling $m\{\phi(x)\}$.

Gevolg: Is m een functie van y, dan is ook $m\{\phi(x)\}$ een functie van y.

$m\{\phi(x, y)\}$ is een functie van y, als steeds $x \epsilon m$.

Definitie: Hebben A en B geen element gemeen en heeft de productverzameling $P\{A, B\}$ een deelverzameling met de eigenschap, dat elk element van $A + B$ element is van één element dezer deelverzameling, dan heet A *aequivalent* met B.

Definitie: Hebben A en B een element gemeen en bestaat er een verzameling C, die volgens de voorgaande definitie aequivalent is met A en B, dan heet A *aequivalent* met B.

Notatie: $A \sim B$.

Definitie: Bovengenoemde deelverzameling van $P\{A, B\}$ heet een *afbeelding* van A op B.

Stelling 10: Hebben A en B geen element gemeen, dan existeert de verzameling van alle afbeeldingen van A op B.

Bewijs: De verzameling van alle elementen van $A + B$, welke element zijn van één element eener verzameling z is:

$$(A + B)_{z_{x \epsilon \zeta}} = \{\Sigma(z_{x \epsilon \zeta})\} \equiv \psi(z),$$

waarin $\zeta \epsilon z$, $x \epsilon A + B$. We vragen nu naar de deelverzamelingen van $P\{A, B\}$, dus naar de elementen van $UP\{A, B\}$, waarvoor $\psi(z)$ alle elementen van $A + B$ bevat. Deze is:

$$UP\{A, B\}_{\psi(z) = A + B}.$$

Definitie: De verzameling $UP\{A, B\}_{\psi(z) = A + B}$ heet *afbeeldingsverzameling* van A op B.

Gevolgen: 1. Hebben A en B geen element gemeen, dan is de noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor $A \sim B$:

$$UP\{A, B\}_{\psi(z)=A+B} \neq 0.$$

2. De afbeeldingsverzameling van A op B is een functie van A en B. Dus existeert steeds:

$$m_{\phi(x)} \sim \psi(x)\cdot$$

Stelling 11: Hebben A en B geen element gemeen, is $A \sim B$ en is ϕ een afbeelding van A op B, dan bepaalt ϕ een functionaal verband tusschen de elementen van A en B.

Bewijs: De verzameling der elementen van ϕ, die een element y bevatten, is:

$$\phi_{y \in x} \equiv \psi(y).$$

Is $y \in A$, dan bevat ψ (y) steeds één element van B. Dit is:

$$\psi(y)_{z \in B} \equiv \chi(y).$$

Deze functie legt het gevraagde verband.

Stelling 12: Hebben de verzamelingen A en B geen element gemeen en bestaat er een functie $\phi(x)$ met de eigenschappen:

1e: is $a \in A$, dan geldt $\phi(a) = b \in B$,

2e: is $\begin{matrix} a_1 \in A \\ a_2 \in A \end{matrix}$, $a_1 \neq a_2$, dan geldt $\begin{matrix} \phi(a_1) = b_1 \\ \phi(a_2) = b_2 \end{matrix}$, $b_1 \neq b_2$,

3e: is $b \in B$, dan existeert een verzameling $a \in A$, zoodat $\phi(a) = b$,

dan is $A \sim B$.

Bewijs: Volgens stelling 9*a* existeert $A\{x, \phi(x)\}$. Dit is een afbeelding van A op B.

Definitie: De functie $\phi(a)$ heet *afbeeldingsfunctie* van A op B.

Gevolgen: 1. Is $\{A, B, C\}$ normaal, dan volgt uit $A \sim B$ en $B \sim C$, dat ook $A \sim C$ (transitiviteit der aequivalentie).

2. Uit stelling 11 en 12 volgt, dat bij iedere afbeeldingsfunctie van A op B, $\phi(a)$, bestaat een afbeeldingsfunctie

van B op A, $\psi(b)$, zoodat indien $\phi(a_1) = b_1$ ook geldt $\psi(b_1) = a_1$. De functie $\psi(b)$ heet de *inverse* van $\phi(a)$.

Stelling 13: Is $M\{m_1, m_2, \ldots\} \sim N\{n_1, n_2, \ldots\}$, zijn M en N normaal en hebben ΣM en ΣN geen element gemeen, en bestaat er vervolgens een afbeeldingsfunctie $n = \phi(m)$, zoodat steeds $m \sim \phi(m)$, dan is $\Sigma M \sim \Sigma N$.

Bewijs: De afbeeldingsverzameling van m op $\phi(m)$ is een functie van m. Zij deze functie $\psi(m)$, dan existeert:

$$M\{\psi(m)\}.$$

Deze verzameling is normaal, zijn productverzameling is niet leeg. Zij $p \in PM\{\psi(m)\}$, dan is Σp een afbeelding van ΣM op ΣN.

Stelling 14: Is $M \sim N$ en hebben M en N geen element gemeen, dan is $UM \sim UN$.

Bewijs: UM en UN hebben geen element gemeen. Zij $\phi(m)$ een afbeeldingsfunctie van M op N en $\psi(n)$ zijn inverse. Is:

$$u_M\{m_1, m_2, \ldots\} \in UM,$$

dan is:

$$u_N\{\phi(m_1), \phi(m_2), \ldots\} \in UN.$$

Deze verzameling kan echter ook geschreven worden:

$$N_{\psi(n) \in u_M}$$

en is dus een functie van u_M. Gemakkelijk is aan te toonen, dat deze functie voldoet aan de eischen van stelling 12.

Stelling 15: Onder de onderstellingen van stelling 13 is $PM \sim PN$.

Bewijs: PM en PN hebben geen element gemeen. Elke volgens de bewijzen der stellingen 13 en 14 te construeeren afbeelding van $U\Sigma M$ op $U\Sigma N$ bevat een deelverzameling, welke afbeelding is van PM op PN.

Stelling 16: Is M normaal en $a \in PM$, dan is $a \sim M$.

Bewijs: Een afbeeldingsfunctie is, als $m \in M$:

$$a_{x \in m}.$$

Ten einde over te gaan tot de behandeling van verzamelingen, welke elementen gemeen hebben, bewijzen we eerst de hulpstellingen 17—19.

Stelling 17: Bij elke verzameling $m \neq 0$ bestaat een deelverzameling, die geen element van m is.

Bewijs: De verzameling $m_{x \bar{\epsilon} x}$ voldoet.

Stelling 18: Bij de verzamelingen $m \neq 0$ en n bestaat een verzameling $M \backsim m$, die geen element gemeen heeft met m en n.

Bewijs: Zij $r \bar{\epsilon} \Sigma \{m, \Sigma m, \Sigma n\}$. Dan voldoet $P\{m, \{r\}\}$. De functie $\{x, r\}$ is afbeeldingsfunctie van m op $P\{m, \{r\}\}$.

Stelling 19: Is $m \neq 0$ en normaal, dan bestaat er bij $m\{m_1, m_2, \ldots\ldots\}$ en n een verzameling m' met de volgende eigenschappen:

1e: m' is normaal,

2e: $\Sigma m'$ heeft geen elementen gemeen met Σm en Σn,

3e: $m' \backsim m$,

4e: er bestaat een afbeeldingsfunctie van m op m', $\phi(m_k)$, zoodat steeds $m_k \backsim \phi(m_k)$.

Bewijs: Volgens stelling 18 bestaat een verzameling $M \backsim \Sigma m$, die geen elementen gemeen heeft met Σm en Σn. Zij $\psi(x)$ een afbeeldingsfunctie van M op Σm. Dan bestaat de deelverzameling der elementen van M, die door $\psi(x)$ toegevoegd zijn aan de elementen van m_1, n.l.:

$$r_1 \equiv M_{\psi(x) \epsilon m_1} \equiv \omega(m_1).$$

Dus existeert:

$$R\{r_1, r_2, \ldots\ldots\}.$$

We zien gemakkelijk, dat R aan de vraag voldoet.

Met behulp dezer stellingen zien we:

De stellingen 11 tot en met 15 blijven juist, indien we de eisch, dat A en B, resp. M en N geen element gemeen hebben, laten vallen. Eveneens de transitiviteit der aequivalentie.

Stelling 20: Iedere verzameling is aequivalent met zichzelf.

Bewijs: Zij gegeven $m \neq 0$, is $n \sim m$ en hebben m en n geen element gemeen, dan is volgens de tweede definitie van aequivalentie $m \sim m$. Voor $m = 0$ is het gestelde een direct gevolg der eerste definitie van aequivalentie.

Stelling 21: Is $a \in A$ en $p \notin A$, dan is $A - a + p \sim A$.

Bewijs: Zij $B \sim A$, $p \notin B$ en hebben A en B geen element gemeen. Is ϕ een afbeelding, $\phi(x)$ de bijbehoorende afbeeldingsfunctie van A op B, dan is:

$$\phi - \{a, \phi(a)\} + \{p, \phi(a)\}$$

een afbeelding van $A - a + p$ op B.

Definitie: Een verzameling heet *eindig*, als hij met geen zijner echte deelverzamelingen aequivalent is.

Definitie: Een verzameling heet *oneindig*, als hij een echte deelverzameling heeft, waarmee hij aequivalent is.

Stelling 22: De verzameling Z_p is eindig.

Bewijs: $Z_1 \equiv \{1\}$ is eindig, daar zijn eenige echte deelverzameling 0 is. — We bewijzen nu: is Z_p eindig, dan is ook Z_{p+1} eindig. Onderstel Z_{p+1} is oneindig, dus:

$$Z_{p+1} \sim \overline{Z}_{p+1},$$

waarin $\overline{Z}_{p+1}$ een echt deel is van Z_{p+1}. Is $a \in Z_{p+1}$ en $a \notin \overline{Z}_{p+1}$, zij verder $\phi(x)$ een afbeeldingsfunctie van Z_{p+1} op $\overline{Z}_{p+1}$ en is $\phi(p+1) = b$. Dan is:

$$Z_p \sim \overline{Z}_{p+1} - b.$$

Volgens stelling 21 is dan ook:

$$Z_p \sim \overline{Z}_{p+1} - b - (p+1) + a,$$

en dit is een echt deel van Z_p. Hieruit volgt het gestelde. (Indien $b = p + 1$ ondergaat het bewijs eenige vereenvoudiging.)

Stelling 23: Z is oneindig. Voor elke q geldt $Z'_q \sim Z$.

Bewijs: $Z'_1 \sim Z$, immers de functie $\{x\}$ is afbeeldingsfunctie van Z op Z_1'. Is $Z'_p \sim Z$, dan is ook $Z'_{p+1} \sim Z$. Immers $Z'_p \sim Z'_{p+1}$.

Definitie: Is $M \sim Z_p$, dan zegt men, dat *M p elementen bevat.*

Er is nu overeenstemming bereikt tusschen de uitspraken „*M* bevat één element" en „*M* bevat 1 element".

Definitie: Is $M \sim Z$, dan noemt men *M aftelbaar.*

Stelling 24: Een eindige verzameling heeft geen oneindige deelverzameling.

Bewijs: Is *A* eindig, $B \lesssim A$ oneindig en $A = B + C$, dan is:

$$A = B + C \sim \bar{B} + C,$$

waarin $\bar{B}$ een echte deelverzameling van *B* is. Contradictie.

Axioma 8: Elke eindige verzameling is aequivalent met een element der verzameling:

$$\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\ldots\}.$$

Gevolg: In verband met stelling 23 en 24 geldt nu: de vereenigingsverzameling van een aftelbare en een eindige verzameling is aftelbaar.

Ten einde de invoering van dit axioma te rechtvaardigen de volgende poging tot bewijs:

Onderstel er existeert bij een gegeven eindige verzameling *M* geen verzameling Z_p, die aan de eisch voldoet. Er geldt dan:

1e: *M* heeft een echte deelverzameling $M_1 \sim Z_1$.

2e: Heeft *M* een echte deelverzameling $M_p \sim Z_p$, dan heeft *M* ook een echte deelverzameling:

$$M_{p+1} \sim Z_{p+1}.$$

Hieruit volgt voor willekeurige q: *M* heeft een echte deelverzameling $M_q \sim Z_q$. — Alle deelverzamelingen van *M* aequivalent met Z_q vormen een verzameling, die een functie is van Z_q. Echter is Z'_q een functie van $q + 1$, dus daar $q + 1$ een functie is van q, ook van q, dus is ook Z_q een functie van q. Dan is echter:

$$(UM)_{x \sim Z_q} \equiv \psi(q).$$

Dus existeert de verzameling:

$$Z\{\psi(q)\}.$$

Deze verzameling is normaal, dus de productverzameling existeert. Zij een element ervan: $A\{a_1, a_2, \ldots.\}$. Daar bij gegeven q steeds 1 element van A q elementen bevat, bestaat er een functionaal verband $a_q = \chi(q)$, waarin a_q het element van A is met q elementen. We trachten nu uit A een aftelbare deelverzameling van M af te leiden, stuiten daarbij echter op de volgende moeilijkheden:

We kiezen achtereenvolgens a_1, een element van a_2, dat verschillend is van a_1, een element van a_3, dat nog niet gekozen is, enz. Deze keuze kunnen we tot elk rangnummer voortzetten en de gekozen elementen tot een verzameling vereenigen (volledige inductie), we kunnen echter niet alle zoo gekozen elementen tot een verzameling vereenigen. Dit laatste zou mogelijk zijn, indien steeds gold: $a_{k-1} \lessgtr a_k$. Trachten we echter A zoo op te bouwen, dat hieraan voldaan is, dan stuiten we op een analoge moeilijkheid.

Stelling 25: De vereenigingsverzameling eener eindige verzameling met eindige elementen is eindig.

Bewijs: 1. We onderstellen, dat de gegeven verzameling normaal is.

a. De stelling is juist als de verzameling 1 element bevat.

b. De stelling is juist als de verzameling 2 elementen bevat. Zij dan de verzameling $\{a, b\}$. Bevat b 1 element, dan is aan het gestelde voldaan. Het algemeene geval bewijzen we met volledige inductie.

c. Is de stelling juist als de verzameling p elementen bevat, dan is ze ook juist als de verzameling $p + 1$ elementen bevat. We splitsen daartoe de verzameling in:

$$\{a_1, a_2, \ldots., a_p\} \text{ en } \{a_{p+1}\}.$$

Van deze beide verzamelingen is de vereenigingsverzameling eindig, dus is volgens b ook eindig:

$$\Sigma\{a_1, a_2, \ldots., a_p\} + \Sigma\{a_{p+1}\}.$$

2. De gegeven verzameling is niet normaal. Zij gegeven:

$$A \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_q\},$$

dan existeert de normale verzameling:

$$B \{b_1, b_2, \ldots\ldots, b_q\} \backsim A,$$

zoodat er een afbeeldingsfunctie van A op B bestaat, $\phi(a)$, waarvoor algemeen geldt: $\phi(a_k) \backsim a_k$. ΣB is dan eindig. Zij $\psi(a_k)$ de afbeeldingsverzameling van a_k op b_k, dan existeert $A\{\psi(a_k)\}$. Dan is $\Sigma PA\{\psi(a_k)\}$ een verzameling, welker elementen de vorm $\{\alpha, \beta\}$ hebben, waarin $\alpha \in a_k$ en β het aan α door een aequivalentietransformatie toegevoegde element van b_k is. De verzameling der elementen $\{\alpha, \beta\}$ met vaste α is een functie van α, $\chi(\alpha)$, dus ook $\Sigma \chi(\alpha) - \alpha$. Dan existeert dus:

$$(\Sigma A)\{\Sigma \chi(\alpha) - \alpha\}.$$

Een element der hieruit afgeleide productverzameling is aequivalent met ΣA en is deelverzameling van ΣB, dus ook ΣA is eindig.

Stelling 26: De productverzameling eener eindige verzameling met eindige elementen is eindig.

Bewijs: Analoog aan het bewijs van de vorige stelling.

Stelling 27: De U-verzameling eener eindige verzameling met eindige elementen is eindig.

Bewijs: De deelverzamelingen die 1 element bevatten, vormen een eindige verzameling U_1. Volledige inductie levert: de deelverzamelingen die q elementen bevatten, vormen een eindige verzameling U_q. Voorts is U_q een functie van q, dus existeert, indien de gegeven verzameling p elementen bevat:

$$\{U_1, U_2, \ldots\ldots, U_p\}.$$

Het gestelde is nu een gevolg van stelling 25.

Invoering der hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen en afleiding hunner grondeigenschappen.

Definitie: Zij $A \{a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_k}\}$ een eindige, normale verzameling, zijn zijn elementen eindig en wel resp. bestaande uit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ elementen en is $\Sigma A \backsim Z_s$, dan heet s de *som* der natuurlijke getallen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Notatie: $s = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$. De verzamelingen A en a_{p_i} heeten representeerende verzamelingen.

De optelling is *altijd mogelijk*. Uit stelling 25 volgt n.l., dat de definitie een zin heeft.

De optelling is *ondubbelzinnig*. Immers is $r \neq s$, dan geldt niet $Z_r \backsim Z_s$.

De optelling is *commutatief*. In de definitie speelt de volgorde der natuurlijke getallen geen rol.

Stelling 28: De optelling is *associatief*.

Bewijs: Voegen we groepen der elementen van A samen tot verzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_q$, zoodat dus:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_q,$$

immers A is niet splitsbaar in oneindig veel deelverzamelingen. Het aantal elementen van A_1 is dan de som van een deel der getallen p_i, het aantal elementen van $A_2, \ldots, A_q$ evenzoo. We verkrijgen zoo q natuurlijke getallen, die elk de som zijn van een aantal der getallen p_i, zoodat elk getal p_i in de partiëele sommen één en niet meer dan één keer voorkomt. De som dezer q getallen is echter weer het aantal elementen van A.

Stelling 29: Is $r > s$, dan bestaat er steeds een natuurlijk getal x, zoodat $r = s + x$.

Bewijs: Zijn A_r en A_s representeerende verzamelingen. Zij verder $A_s \backsim Z_s$, dan bestaat er een echte deelverzameling van A_r : $\overline{A_r} \backsim Z_s$. We beschouwen nu $A_r - \overline{A_r}$. Het aantal elementen dezer verzameling voldoet aan de vraag.

Definitie: Is $r = s + x$, dan heet x het *verschil* van r en s. Notatie: $x = r - s$.

Gevolg: De aftrekking $r - s$ is *steeds mogelijk indien* $r > s$.

Definitie: Zij $A\{a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_k}\}$ een eindige, normale verzameling, zijn zijn elementen eindig en wel resp. bestaande uit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ elementen en is $PA \backsim Z_p$, dan heet p het *product* der natuurlijke getallen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Notatie: $p = p_1 p_2 \ldots p_k$.

De vermenigvuldiging is *altijd mogelijk.* Uit stelling 26 volgt n.l., dat de definitie een zin heeft.

De vermenigvuldiging is *ondubbelzinnig.* Immers is $r \neq s$, dan geldt niet $Z_r \backsim Z_s$.

De vermenigvuldiging is *commutatief.* In de definitie speelt de volgorde der natuurlijke getallen geen rol.

De vermenigvuldiging is *associatief.* De juistheid hiervan bewijzen we als in stelling 28.

De vermenigvuldiging heeft de *moduluseigenschap.* Immers $1 . p = p$.

Stelling 30: De vermenigvuldiging is *distributief.*

Bewijs: We willen bewijzen:

$$a\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) = ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_k.$$

We representeeren de getallen daartoe door verzamelingen A en $B\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, zoodat B en $\{A, \Sigma B\}$ normaal zijn. Uit de definitie van gelijkheid van verzamelingen volgt: $P\{A, \Sigma B\} = \Sigma\{P\{A, B_1\}, P\{A, B_2\}, \ldots, P\{A, B_k\}\}$, waarvan het gestelde een direct gevolg is.

Definitie: Zijn r, s en x natuurlijke getallen en is $r = sx$, dan heet x, het *quotiënt* van r en s. Notatie: $x = \dfrac{r}{s}$.

Definitie: Is $A\{a_1, a_2, \ldots, a_q\} \backsim Z_q$ en normaal en is $a_1 \backsim a_2 \backsim \ldots \backsim a_q \backsim Z_p$, dan heet $a_1\, a_2 \ldots a_q$ de q^e *macht* van p. Notatie: p^q.

Stelling 31: Is $r > s$, dan is $r + t > s + t$.

Bewijs: Zijn A_r, A_s, A_t representeerende verzamelingen, dan is A_s aequivalent met een echt deel $\bar{A}_r$ van A_r. Dus:

$$A_s + A_t \backsim \bar{A}_r + A_t$$

en dit is een echt deel van $A_r + A_t$. Is dus:

$$A_r + A_t \sim Z_{r+t},$$

dan is $A_s + A_t$ aequivalent met een echt deel van Z_{r+t}, waaruit het gestelde volgt.

Opmerking: Analoog bewijzen we:

$$r + t > t.$$

De overige eigenschappen van optelling, vermenigvuldiging, aftrekking en machtsverheffing zijn afgeleide eigenschappen, d.w.z. eigenschappen, welker bewijs volgt uit de totnogtoe bewezen eigenschappen (grondeigenschappen) zonder gebruik te maken van de definities van de begrippen natuurlijk getal, som en product, dus ook zonder gebruik te maken van volledige inductie.

De volgende eigenschap, hoewel niet-afgeleid, rekenen we niet tot de grondeigenschappen:

Stelling 32: Is $a > b$ en bestaat het quotiënt van a en b niet, dan bestaan de natuurlijke getallen n en c, zoodat:

$$a = nb + c \text{ en } c < b.$$

Bewijs: Een natuurlijk getal n heeft òf de eigenschap $nb > a$ (eigenschap 1), òf de eigenschap $nb < a$ (eigenschap 2). Een natuurlijk getal met eigenschap 1 is steeds grooter dan een natuurlijk getal met eigenschap 2. Zij m een natuurlijk getal met eigenschap 1. De verzameling Z_m bevat dan een natuurlijk getal μ met de eigenschap 2, zoodat $\mu + 1$ de eigenschap 1 heeft. Immers 1 heeft de eigenschap 2. Had nu in Z_m steeds $\mu + 1$ de eigenschap 2 als μ de eigenschap 2 had, dan hadden alle elementen van Z_m de eigenschap 2. Contradictie. Nu is:

$$a = \mu b + c \quad \text{en} \quad c < b,$$

daar anders:

$$c = b + d \quad \text{en dus} \quad a = (\mu + 1)\, b + d.$$

We bewijzen nu de eigenschappen der functievorming. Daartoe echter eerst de volgende hulpstelling:

Stelling 32*a:* Het aantal elementen van een verzameling V is een functie van V.

Bewijs: Zij:

$$Z^* \equiv \{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\ldots\},$$

en:

$$Z^*_x \sim V = Z_k,$$

dan is Z_k een functie van V en $k = Z_k - Z_{k-1}$ is een functie van Z_k, dus k is een functie van V. (Is V een oneindige verzameling, dan levert deze functie 0.)

Grondeigenschappen der *functievorming:*

Stelling 33: Zijn $\phi\,(x)$ en $\psi\,(x)$ functies van x en stellen $\phi\,(x)$ en $\psi\,(x)$ natuurlijke getallen voor, indien x een natuurlijk getal is, dan is ook $\phi\,(x) + \psi\,(x)$ een functie van x in het gebied der natuurlijke getallen.

Bewijs: 1. Zijn:

$$A\{a_1, a_2, \ldots\} \sim Z, \text{ waarin } a_k \sim Z_k,$$
$$B\{b_1, b_2, \ldots\} \sim Z, \text{ waarin } b_k \sim Z_k,$$

beide normaal en hebben $\Sigma\, A$ en $\Sigma\, B$ geen element gemeen, dan zijn functies van $\{Z_p\}$ resp. a_p en b_p, $a_p + b_p$, $2p$.

2. Zij:

$$A\{a_1, a_2, \ldots\ldots\} \sim Z, \text{ waarin } a_k \sim Z_k,$$

normaal. Dan zijn functies van $\{Z_p, Z_q\}$ resp. $\{a_p, a_q\}$, $a_p + a_q$, $p + q$.

3. Uit de theorie der aequivalentie volgt: er is een functie $\chi\,(x)$, zoodat:

$$\chi(\{Z_p\}) = 2p, \; \chi(\{Z_p, Z_q\}) = p + q.$$

4. Zij $Z_k \equiv \omega\,(k)$, dan is:

$$\chi\,\{\omega\,(\,\phi\,(x)\,),\; \omega\,(\,\psi\,(x)\,)\} = \phi\,(x) + \psi\,(x).$$

Opmerking: Bovengenoemde uit $\phi\,(x)$ en $\psi\,(x)$ afgeleide functie neemt voor elke x een waarde aan. Niet zeker is echter of, indien x geen natuurlijk getal is, de notatie $\phi\,(x) + \psi\,(x)$ een zin heeft. Dit is bedoeld met de toevoeging „in het gebied der natuurlijke getallen".

Stelling 34: Onder de voorwaarden genoemd in stelling 33 is $\phi(x)\psi(x)$ een functie van x in het gebied der natuurlijke getallen.

Bewijs: Analoog aan dat der vorige stelling.

Stelling 35: Onder de voorwaarden genoemd in stelling 33 is $\phi(x) - \psi(x)$ een functie van x in het gebied der natuurlijke getallen.

Bewijs: Zij weer $Z_k \equiv \omega(k)$, dan is $\phi(x) - \psi(x)$ het aantal elementen van:

$$\omega(\phi(x)) - \omega(\psi(x)).$$

Stelling 36: Onder de voorwaarden genoemd in stelling 33 is $\phi(x)^{\psi(x)}$ een functie van x in het gebied der natuurlijke getallen.

Bewijs: We gaan uit van de verzamelingen:

$$B\{b_1, b_2, \ldots.\} \sim Z, \text{ waarin } b_k \sim Z_k,$$
$$C\{c_1, c_2, \ldots.\} \sim Z,$$

waarvoor geldt, dat ΣB en C geen element gemeen hebben. Zij:

$$a_{kl} \equiv P\{b_k, \{c_l\}\}.$$

We leiden dan hieruit af de verzamelingen:

$$A_1\{a_{11}, a_{12}, \ldots.\},$$
$$A_2\{a_{21}, a_{22}, \ldots.\},$$
$$\text{———} . \text{———} . \text{———}$$

en daaruit:

$$A\{A_1, A_2, \ldots.\}.$$

Dan zijn functies van x:

$$\Sigma A_{x \sim \omega(\phi(x))} \text{ (waarin weer } Z_k \equiv \omega(k)),$$

en:

$$\Sigma\{A_1, A_2, \ldots, A_{\psi(x)}\}.$$

Zij D de doorsnede dezer beide verzamelingen, dan is $\phi(x)^{\psi(x)}$ het aantal elementen van PD en dit is een functie van x.

Ten einde eenig inzicht te geven in de wijze, waarop uit de rekenkunde bekende verzamelingen gevormd worden, zullen we enkele dezer verzamelingen afleiden. De gebezigde terminologie komt overeen met de gebruikelijke.

a. De verzameling van alle *n*-vouden existeert, daar xn een functie is van x. Hij luidt:

$$\{2n, 3n, \ldots.\} \equiv \psi(n).$$

b. De verzameling van alle veelvouden is:

$$\psi\{\psi(2), \psi(3), \ldots.\}.$$

c. De verzameling van alle priemgetallen is:

$$Z - \Sigma\,\psi.$$

d. De verzameling van alle echte deelers van a is:

$$Z_{a\,\epsilon\,\psi(x)} \equiv \omega(a).$$

e. Vervangen we de elementen van $\omega(a) + a$ doormiddel der functie $\psi(x)$ door de verzameling hunner veelvouden, dan is:

$$(\omega(a) + a) + (\omega(a) + a)\{\psi(x)\} \equiv \chi(a)$$

de verzameling van alle natuurlijke getallen onderling deelbaar met a.

f. De verzameling:

$$Z - \chi(a)$$

bevat alle natuurlijke getallen onderling ondeelbaar met a.

Uitbreiding van de theorie der aequivalentie.

Stelling 37: Is $M\{m_1, m_2, \ldots, m_q\}$ een eindige, normale verzameling en zijn alle elementen van M aftelbaar, dan is ΣM aftelbaar.

Bewijs: 1. De stelling is juist, als M 1 element bevat.

2. De stelling is juist, als M 2 elementen bevat. We zien dit alsvolgt:

$$Z = Z\{2x\} + Z\{2x - 1\} \text{ (volgens stelling 32),}$$

en dit zijn beide aftelbare verzamelingen.

3. Is de stelling juist, als M p elementen bevat, dan is hij ook juist als M $p+1$ elementen bevat.

Stelling 38: Is $M\{m_1, m_2, \ldots\} \backsim Z$ en normaal en is $m_k \backsim Z_k$, dan is $\Sigma M \backsim Z$.

Bewijs:

$$m_1 \backsim Z_1,\ m_2 \backsim Z_{2+1} - Z_1, \ldots$$

$$\ldots, m_k \backsim Z_{\overset{k}{\underset{1}{\Sigma n}}} - Z_{\overset{k-1}{\underset{1}{\Sigma n}}} = Z_{\frac{k(k+1)}{2}} - Z_{\frac{k(k-1)}{2}}, \ldots$$

Nu is:

$$Z_{\frac{k(k+1)}{2}} - Z_{\frac{k(k-1)}{2}} \equiv \phi(k).$$

Dan is $M \backsim Z\{\phi(k)\}$, $m_k \backsim \phi(k)$ en $Z\{\phi(k)\}$ normaal, dus:

$$\Sigma M \backsim \Sigma Z\{\phi(k)\} = Z.$$

Stelling 39: Is $M\{m_1, m_2, \ldots\} \backsim Z$ en normaal en zijn alle elementen van M aftelbaar, dan is $\Sigma M \backsim Z$.

Bewijs: We maken gebruik van de eigenschap, dat $P\{\phi(x), \psi(x)\}$ een functie is van x. (Dit is een gevolg daarvan, dat $P\{\phi(x), \psi(x)\}$ ontstaan is uit $U(\phi(x) + \psi(x))$ door de elementen hiervan een voorwaarde op te leggen.) Zij $M'\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots\} \backsim Z$ en hebben M' en Z geen element gemeen, dan is de verzameling $P\{\bar{k}, Z_k\}$ een functie van k ($\bar{k}$ is het door een afbeeldingsfunctie van Z op M' aan k toegevoegde element). Dus existeert:

$$\{\{\{1, \bar{1}\}\}, \{\{1, \bar{2}\}, \{2, \bar{2}\}\}, \ldots\} \equiv A.$$

Volgens stelling 37 is $\Sigma A \backsim Z$. De deelverzameling van ΣA, waarvoor geldt $k \in x$ is:

$$\{\{k, \bar{k}\}, \{k, \overline{k+1}\}, \ldots\} \equiv \chi(k)$$

en is dus aftelbaar. Dan is $Z\{\chi(k)\}$ normaal en:

$$\Sigma Z\{\chi(k)\} = \Sigma A \backsim Z,$$

waaruit het gestelde volgt.

Gevolg: De productverzameling van een eindige, normale verzameling is aftelbaar (volledige inductie).

Zij gegeven de verzameling:

$$M \{m, \phi(m), \phi(\phi(m)), \ldots\},$$

dan is voor elk element aan te toonen doormiddel van uitsluitend de voorschriften 1e en 2e van axioma 7, dat het tot M behoort. Dezelfde redeneering toegepast op de elementen der verzameling Z' levert dan als eindconclusie, dat een element k tot Z' behoort. We noteeren het met k overeenkomstige element van M dan $\phi^{(k)}(m)$. De notatie der verzameling M wordt dan:

$$M \{\phi^{(0)}(m), \phi^{(1)}(m), \ldots\}.$$

Stelling 40: Bij gegeven:

$$M \{m, \phi(m), \phi^{(2)}(m), \ldots\},$$
$$N \{n, \psi(n), \psi^{(2)}(n), \ldots\},$$

existeert:

$$P \{p, \chi(p), \chi^{(2)}(p), \ldots\},$$

zoodat P geen element gemeen heeft met M en N.

Bewijs: We bewijzen, dat voldoet een verzameling P van de vorm:

$$P \{p, \{p\}, \{\{p\}\}, \ldots\},$$

of bij veranderde notatie:

$$P \{p, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}.$$

Uit M en N leiden we af:

$$M_1 \{M, \Sigma M, \Sigma\Sigma M, \ldots\},$$
$$N_1 \{N, \Sigma N, \Sigma\Sigma N, \ldots\}.$$

We kiezen p, zoodat $p \,\bar{\epsilon}\, \Sigma \{\Sigma M_1, \Sigma N_1\}$. Dan is $p \,\bar{\epsilon}\, \Sigma\{M, N\}$. Door volledige inductie zien we, dat onder deze voorwaarde P aan het gestelde voldoet. Immers was: $p^{(k+1)} \epsilon \Sigma \{\Sigma M_1, \Sigma N_1\}$, dan was ook $p^{(k)} \epsilon \Sigma\{\Sigma M_1, \Sigma N_1\}$.

Stelling 41: De verzameling:

$$M \{m, \phi(m), \phi^{(2)}(m), \ldots\}$$

is aftelbaar, mits voor $k \neq l$ geldt $\phi^{(k)}(m) \neq \phi^{(l)}(m)$.

Bewijs: 1. We onderstellen, dat M geen element gemeen heeft met Z'. Daar $M \sim M - m$ en $\phi(x)$ afbeeldingsfunctie is van M op $M - m$, heeft de functie $\phi(x)$ een inverse $\psi(x)$. Zij nu gegeven:

$$Q\{\zeta, \mu\},$$

waarin:

$$\zeta \in Z', \quad \mu \in M.$$

Dan is:

$$\{\zeta\} = Z'_{\Sigma x \in Q} \equiv \chi_1(Q),$$

$$\phi(\mu) = M_{\psi(x) \in Q} \equiv \chi_2(Q),$$

dus:

$$\{\{\zeta\}, \phi(\mu)\} \equiv \chi(Q).$$

De verzameling:

$$\{\{0, m\}, \chi\{0, m\}, \chi^{(2)}\{0, m\}, \ldots\}$$

existeert dan en is afbeeldingsverzameling van M op Z'.

2. Hebben de verzameling M en Z een gemeenschappelijk element, dan volgt de juistheid van het gestelde uit stelling 40.

Stelling 42: Elke oneindige verzameling heeft een aftelbare deelverzameling.

Bewijs: Zij M oneindig, dan is:

$$M \sim \overline{M},$$

waarin $\overline{M}$ een echt deel van M is. Zij $\phi(x)$ een afbeeldingsfunctie van M op $\overline{M}$, dan is:

$$\overline{M} = M\{\phi(x)\} \equiv \chi(M),$$

$$M - \overline{M} \equiv \psi(M) \neq 0.$$

Echter volgt uit het voorgaande:

$$\overline{\overline{M}} \equiv \overline{M}\{\phi(x)\} = \chi(\overline{M})$$

is een echte deelverzameling van $\overline{M}$. Dus:

$$\overline{M} - \overline{\overline{M}} = \psi(\overline{M}) \neq 0.$$

Dan existeert:

$$\{\psi(M), \psi^{(2)}(M), \ldots.\},$$

een normale, aftelbare verzameling. Een element zijner productverzameling is een aftelbare deelverzameling van M.

Gevolg: In verband met stelling 37 geldt, als A aftelbaar of eindig is en M oneindig:

$$M + A \sim M.$$

Stelling 43: Is $A \sim \overline{B} \leqslant B$ en $B \sim \overline{A} \leqslant A$, dan is $A \sim B$.

Bewijs: Inplaats hiervan zullen we bewijzen: is A aequivalent met een zijner deelverzamelingen $\overline{\overline{A}}$, dan is A eveneens aequivalent met ieder zijner deelverzamelingen $\overline{A}$, waarvoor geldt $\overline{A} \geqslant \overline{\overline{A}}$, m.a.w.: uit $A + B + C \sim A$ volgt $A + B + C \sim A + C$. — Voor $B = 0$ of $C = 0$ is de stelling dadelijk duidelijk. We onderstellen nu $B \neq 0$ en $C \neq 0$. Zij $\phi(x)$ een afbeeldingsfunctie van $A + B + C$ op A, $\psi(x)$ zijn inverse en zij:

$$A_1 \equiv A\{\phi(x)\},$$

dan is:

$$A_1 = A_{\psi(x) \in A} \equiv \chi(A).$$

Evenzoo voeren we in $A_2 \equiv \chi(A_1)$, enz. Dan existeert:

$$\alpha\{A_1, A_2, \ldots.\}.$$

We leiden hieruit af de doorsnede D van α. Zij voorts:

$$B_1 \equiv A_{\psi(x) \in B} = \chi(B),$$
$$B_2 \equiv \chi(B_1), \text{ enz.},$$
$$C_1 \equiv A_{\psi(x) \in C} = \chi(C),$$
$$C_2 \equiv \chi(C_1), \text{ enz.}$$

Dan existeeren:

$$\beta\{B_1, B_2, \ldots.\},$$
$$\gamma\{C_1, C_2, \ldots.\},$$

en zijn normaal. Gemakkelijk is aan te toonen:

$$A + B + C = D + \Sigma\beta + \Sigma\gamma + B + C.$$

Nu is:

$$\{B, B_1, B_2, \ldots .\} \sim \{B_1, B_2, B_3, \ldots .\},$$
$$B \sim B_1,$$
$$B_1 \sim B_2, \text{ enz.},$$

dus:

$$\Sigma\beta + B \sim \Sigma\beta.$$

Hieruit volgt:

$$A + B + C \sim D + \Sigma\beta + \Sigma\gamma + C = A + C.$$

Stelling 44: Een deel van een aftelbare verzameling is eindig of aftelbaar.

Bewijs: Is de deelverzameling oneindig, dan heeft hij een aftelbare deelverzameling. Stelling 42 levert dan de aftelbaarheid.

Stelling 45: Is A aftelbaar, dan is $A\,\{\phi(x)\}$ eindig of aftelbaar.

Bewijs: Zij $y \in A\,\{\phi(x)\}$, dan is:

$$A_{\phi(x) = y} \equiv \psi(y)$$

een deelverzameling der elementen van A, waarvoor $\phi(x)$ gelijk is. Dan is:

$$(A\,\{\psi(x)\})\,\{\phi(x)\} = A\,\{\phi(x)\}$$

en:

$$(A\,\{\psi(x)\})\,\{\phi(x)\} \sim A\,\{\psi(x)\}.$$

Echter $A\,\{\psi(x)\}$ is aequivalent met een element van zijn productverzameling en dat is een deelverzameling van A, waaruit het gestelde volgt.

Stelling 46: Is $A \sim B$, zijn A en B normaal en is $\phi(x)$ een zoodanige afbeeldingsfunctie van A op B, dat steeds $a \in A$ aequivalent is met een deel van $\phi(a)$, dan is ΣA aequivalent met een deel van ΣB.

Bewijs: De verzameling van alle deelverzamelingen van $\phi(a)$ aequivalent met a is een functie van a, $\psi(a)$. Dus existeert:

$$A\,\{\psi(x)\}.$$

Zij $p \in PA\{\psi(x)\}$, dan is $\Sigma p \sim \Sigma A$ en Σp is een deel van ΣB, waaruit het gestelde volgt.

Stelling 47: Is $V \sim Z$ normaal en zijn alle elementen van V eindig of aftelbaar, dan is $\Sigma V \sim Z$.

Bewijs: We doen aan de algemeenheid niet te kort, als we onderstellen $0 \bar{\epsilon} V$. Een element van PV is dan aftelbaar en een deel van ΣV. Volgens stelling 39 is Z te verdeelen in aftelbaar veel aftelbare verzamelingen. Dan levert stelling 46, dat een verzameling $\overline{Z}$ existeert, zoodat:

$$\Sigma V \sim \overline{Z} \preceq Z.$$

In verband met stelling 43 volgt hieruit het gestelde.

Stelling 48: Is $V \sim Z$ en zijn alle elementen van V eindig of aftelbaar, dan is ΣV eindig of aftelbaar.

Bewijs: Zij $v_k \in V$ en:

$$\phi(v_k) \equiv v_k - [v_k \, \Sigma\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}],$$

dan voldoet $\Sigma V\{\phi(x)\}$ aan de eischen van stelling 47, dus $\Sigma V\{\phi(x)\}$ is eindig, echter $\Sigma V\{\phi(x)\} = V$.

Definitie: Een verzameling A heeft een *grootere machtigheid* dan een verzameling B, indien B aequivalent is met een deelverzameling van A, echter A niet met een der deelverzamelingen van B aequivalent is. Notatie: $A > B$, $B < A$.

Stelling 49: $UM > M$.

Bewijs: 1.

$$M \sim (UM)_{x \in M}.$$

2. Onderstel, dat UM aequivalent is met een deel $\overline{M}$ van M. Zij $\phi(x)$ de afbeeldingsfunctie van $\overline{M}$ op UM. We beschouwen de verzameling:

$$\overline{M}_{x \bar{\epsilon} \phi(x)} \equiv u_1.$$

Dan is er een element x_1, zoodat:

$$u_1 = \phi(x_1).$$

Beide onderstellingen $x_1 \in u_1$ en $x_1 \bar{\epsilon} u_1$ voeren dan tot een contradictie.

II. INVOERING VAN NIEUWE GETALSYSTEMEN.

We zullen in dit hoofdstuk voortgaan met het doormiddel van verzamelingen invoeren van getalsystemen en zullen daarbij steeds de elementen der reeds ingevoerde systemen correlatief stellen met een deel der elementen van het nieuw ingevoerde systeem. Deze elementen van het nieuwe systeem noemen we de correlatieve elementen van het reeds ingevoerde systeem. Voorts zullen we de hoofdbewerkingen en de orderelaties definiëeren en bewijzen, dat voldaan is aan de volgende grondeigenschappen:

Grondeigenschappen der *optelling:*

S 1: De optelling is steeds mogelijk.

S 2: De optelling is ondubbelzinnig.

S 3: De optelling is commutatief.

S 4: De optelling is associatief.

Grondeigenschappen der *vermenigvuldiging:*

P 1: De vermenigvuldiging is steeds mogelijk.

P 2: De vermenigvuldiging is ondubbelzinnig.

P 3: De vermenigvuldiging is commutatief.

P 4: De vermenigvuldiging is associatief.

P 5: De vermenigvuldiging is distributief.

Grondeigenschappen der *orderelatie*:

O 1: Steeds geldt òf $a = b$ (lees: a is gelijkwaardig met b), òf $a > b$, òf $a < b$.

O 2: In bewerkingen en relaties levert vervanging van een getal door een daarmee gelijkwaardig een met het oorspronkelijk gelijkwaardig resultaat.

O 3: De orderelaties zijn transitief.

O 4: Uit $a > b$ volgt $a + c > b + c$.

O 5: Uit $a > 0, b > 0$ volgt $ab > 0$.

Grondeigenschappen der *correlatie:*

C 1: In bewerkingen en relaties in een reeds ingevoerd systeem levert vervanging der getallen door de daarmee correlatieve elementen een resultaat correlatief met dat verkregen in het reeds ingevoerde systeem.

C 2: Bij elk getal a bestaat een correlatief natuurlijk getal $n > a$.

C 3: $a + 0 = a$.

C 4: $a . 1 = a$.

(Hierin stellen 0 en 1 correlatieve natuurlijke getallen voor.)

Omtrent het begrip correlatief stellen we vast, dat we het steeds transitief zullen onderstellen.

Grondeigenschappen der *omgekeerde verbindingen*:

V: Bij elk getal a bestaat een getal a', zoodat $a + a' = 0$.

Q: Bij elk getal $a \neq 0$ bestaat een getal a', zoodat $aa' = 1$. (Hierin stellen 0 en 1 correlatieve natuurlijke getallen voor.)

De volgende definities gelden in elk systeem:

Definitie: Indien $r = s + x$ heet x het *verschil* van r en s.

Definitie: Indien $r = sx$ en $s \neq 0$ heet x het *quotiënt* van r en s.

Grondeigenschappen der *functievorming:*

F 1: Zijn $\phi(x)$ en $\psi(x)$ zoodanige functies van x, dat indien x een element van het systeem is, ook $\phi(x)$ en $\psi(x)$ elementen van het systeem zijn en dat bij gelijkwaardige x ook gelijkwaardige $\phi(x)$ en $\psi(x)$ behooren, dan is ook $\phi(x) + \psi(x)$ een functie van x.

F 2: Onder dezelfde omstandigheden is $\phi(x)\ \psi(x)$ een functie van x.

We zullen $\phi(x)$ een functie van de getallen van het systeem noemen, indien $\phi(x)$ voldoet aan de voorwaarden genoemd in F 1.

Ten slotte vereenigen we alle gelijkwaardige getallen tot een verzameling, die we getalcomplex noemen. De bewerkingen met en de relaties tusschen getalcomplexen worden zoo gedefiniëerd, dat hun resultaat in overeenstemming is met dat verkregen na vervanging der getalcomplexen door representeerende (d. i. tot hen behoorende) getallen.

Grondeigenschappen der *complexvorming:*

Cv 1: De complexvorming is steeds mogelijk.

Cv 2: De verzameling van alle getalcomplexen bestaat.

Gevolg: Zij deze verzameling C, zij c een getalcomplex, g een representeerend getal, dan is $c = C_{g \in x}$, dus c is een functie van g. Hieruit volgt in verband met F 1 en F 2: Zijn $\phi(x)$ en $\psi(x)$ functies, die een getalcomplex steeds in een getalcomplex overvoeren, dan zijn ook $\phi(x) + \psi(x)$ en $\phi(x)\,\psi(x)$ dergelijke functies. We zullen functies, die aan bovenstaande eisch voldoen, functies van de getalcomplexen van het systeem noemen.

Cv 3: Zijn $\phi(x)$ en $\psi(x)$ functies der getalcomplexen, dan is ook $\phi(x) - \psi(x)$ een functie der getalcomplexen.

Cv 4: Zijn $\phi(x)$ en $\psi(\phi)$ functies der getalcomplexen, dan is ook $\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$ een functie der getalcomplexen.

Van de verzameling van alle getalcomplexen van het systeem zullen we ons voorts afvragen of hij aftelbaar is.

Voor het systeem der natuurlijke getallen gelden niet O 5, V, Q en Cv 3—4. De begrippen gelijk en gelijkwaardig vallen samen, correlatief heeft geen zin. Dus vervallen C 1—4 en komt hiervoor in de plaats: $a.\,1 = a$. De begrippen getal en getalcomplex vallen samen.

Invoering der aantallen.

Definitie: De elementen der verzameling:

$$Z' \equiv \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$$

heeten *aantallen.*

De definities der optelling, vermenigvuldiging en orderelatie zijn eensluidend met de overeenkomstige definities in het systeem der natuurlijke getallen. De begrippen gelijk en gelijkwaardig vallen samen; correlatief is een natuurlijk getal, indien het gelijk is aan een aantal. De begrippen getal en getalcomplex vallen samen.

De grondeigenschappen gelden, behalve V, Q, Cv 3—4. Stelling 32 gaat over in:

Stelling 50: Bij gegeven a en b bestaan de aantallen n en c, zoodat:

$$a = nb + c \text{ en } c < b.$$

Stelling 51: De verzameling der aantallen is aftelbaar.

Invoering der geheele getallen.

We leiden uit Z' af de verzamelingen:

$$G_1 \{ \{0, \overline{1}\}, \{1, \overline{1}\}, \{2, \overline{1}\}, \ldots\ldots \},$$
$$G_2 \{ \{0, \overline{2}\}, \{1, \overline{2}\}, \{2, \overline{2}\}, \ldots\ldots \},$$

waarin $\overline{1} \neq \overline{2}$, $\overline{1} \,\bar{\epsilon}\, Z'$ en $\overline{2} \,\bar{\epsilon}\, Z'$. Zij $P\{G_1, G_2\} \equiv G$.

Definitie: De elementen der verzameling G heeten *geheele getallen.*

Definitie:

$$\{\{a,\overline{1}\},\{b,\overline{2}\}\} + \{\{c,\overline{1}\},\{d,\overline{2}\}\} = \{\{a+c,\overline{1}\},\{b+d,\overline{2}\}\}.$$

De grondeigenschappen S 1—4 gelden. (Het bewijs geschiedt, zooals in het vervolg herhaaldelijk het geval zal zijn, door gebruik te maken van de overeenkomstige eigenschappen van het voorgaande systeem.)

De definitie der optelling is gemakkelijk te generaliseeren tot de definitie van de som eener eindige verzameling van geheele getallen, waardoor de grondeigenschappen een meer algemeen karakter krijgen. Om het overzicht niet te schaden laten we dit echter hier en in het vervolg achterwege.

Definitie:

$$\{\{a,\overline{1}\},\{b,\overline{2}\}\}\,.\,\{\{c,\overline{1}\},\{d,\overline{2}\}\}=$$
$$=\{\{ac+bd,\ \overline{1}\},\ \{ad+bc,\overline{2}\}\}.$$

De eigenschappen P 1—5 gelden.

Definitie:

$$\{\{a,\overline{1}\},\ \{b,\overline{2}\}\}\lesseqgtr\{\{c,\overline{1}\},\{d,\overline{2}\}\},$$

al naarmate:

$$a+d\lesseqgtr b+c.$$

De eigenschappen O 1—5 gelden.

Definitie: Is a een aantal, dan is a *correlatief* met $\{\{a,\overline{1}\},\ \{0,\ \overline{2}\}\}$ en met elk daarmee gelijkwaardig getal.

De eigenschappen C 1—4 gelden.

Aan V is voldaan bij gegeven $\{\{a,\ \overline{1}\},\ \{b,\ \overline{2}\}\}$ door $\{\{b,\overline{1}\},\ \{a,\overline{2}\}\}$. Het verschil tusschen de correlatieve aantallen a en b heeft nu steeds een zin, n.l.:

$$\{\{a,\ \overline{1}\},\ \{b,\ \overline{2}\}\}.$$

Een verkorte schrijfwijze voor $0 - b$ is $- b$.

De geheele getallen, die geen correlatieve aantallen zijn, zijn dus voor te stellen door $-b$, waarin b een correlatief natuurlijk getal is.

Is $\phi\,(x)$ een functie der geheele getallen. Zij:

$$\phi\,(\alpha)=\{\{c,\ \overline{1},\},\ \{d,\ \overline{2}\}\},$$

dan is:

$$\{c,\ \overline{1}\}=\phi\,(\alpha)_{\overline{1}\,\epsilon\, x},$$
$$c=\{c,\overline{1}\}_{\ x\,\neq\,\overline{1}},$$

dus zijn c en d functies van α. In verband met de overeenkomstige eigenschappen der natuurlijke getallen vinden we de juistheid van F 1—2.

Complexvorming.

Zij α een geheel getal, dan is dit te schrijven als:

$$\{\{a, \bar{1}\}, \{0, \bar{2}\}\}, \text{ indien } \alpha \geqslant 0,$$

en als:

$$\{\{0, \bar{1}\}, \{b, \bar{2}\}\}, \text{ indien } \alpha \leqslant 0.$$

We onderstellen $\alpha > 0$. We beschouwen de verzameling:

$$\{a, a+1, \ldots\} \equiv \phi(a).$$

Is $k \equiv \psi(a+k)$, dan is:

$$\phi(a)_{\psi(x)=k} \equiv \chi(k, a).$$

Dan bestaat dus de verzameling:

$$Z\{\{\chi(k, a), k\}\} \equiv A$$

en is A een functie van a. A is echter het getalcomplex gerepresenteerd door α. Dan bestaat de verzameling G_1 der geheele getalcomplexen behoorend bij $\alpha > 0$, evenzoo G_2 behoorend bij $\alpha < 0$ en G_3 behoorend bij $\alpha = 0$, dus ook $G' = G_1 + G_2 + G_3$, de verzameling van alle geheele getalcomplexen. Dus Cv 1 en 2 gelden.

Zij $\alpha > 0$, dan is:

$$\{\{a, \bar{1}\}, \{0, \bar{2}\}\} = [G'_{\alpha \in x}]_{0 \in \Sigma x}$$

een functie van α. Voorts is:

$$a = \Sigma\{\{a, \bar{1}\}, \{0, \bar{2}\}\} - (0 + \bar{1} + \bar{2}),$$

dus is a een functie van α. Verder is:

$$\{\{0, \bar{1}\}, \{a, \bar{2}\}\}$$

een functie van a, en daar ten slotte complexen functies zijn van hun representanten geldt voor $\alpha > 0$:

$$-\alpha = \phi(\alpha).$$

We beschouwen nu:

$$G_1\{x, \phi(x)\}.$$

Er geldt steeds, mits $\alpha \neq 0$:

$$-\alpha = [G_1\{x, \phi(x)\}_{\alpha \in y}]_{z \neq \alpha'}$$

een functie van α. Uit de theorie der aequivalentie is af te leiden, dat de beperking $\alpha \neq 0$ mag weggelaten worden. Nu is volgens een afgeleide eigenschap:

$$\phi(\alpha) - \psi(\alpha) = \phi(\alpha) + [-\psi(\alpha)],$$

dus geldt ten gevolge van F 2 ook Cv 3.

De eigenschappen Q en Cv 4 gelden niet.

Uit stelling 37 volgt:

Stelling 52: De verzameling der geheele getalcomplexen is aftelbaar.

Invoering der rationeele getallen.

Definitie: Is $\overline{1} \neq \overline{2}$, $\overline{1} \in G'$ en $\overline{2} \in G'$, dan heeten de elementen van het product R van:

$$G'\{\{x, \overline{1}\}\} \text{ en } (G' - 0)\{\{x, \overline{2}\}\}$$

rationeele getallen.

Definitie:

$$\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\} + \{\{c, \overline{1}\}, \{d, \overline{2}\}\} = \{\{ad + bc, \overline{1}\}, \{bd, \overline{2}\}\}.$$

De eigenschappen S 1—4 gelden.

Definitie:

$$\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\}, \{\{c, \overline{1}\}, \{d, \overline{2}\}\} = \{\{ac, \overline{1}\}, \{bd, \overline{2}\}\}.$$

De eigenschappen P 1—5 gelden.

Definitie:

$$\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\} \gtreqless \{\{c, \overline{1}\}, \{d, \overline{2}\}\},$$

al naarmate:

$$ad \gtreqless bc.$$

De eigenschappen V 1—5 gelden.

Definitie: Is α een geheel getal behoorend tot het geheele complex a, dan is α *correlatief* met $\{\{a, \overline{1}\}, \{1, \overline{2}\}\}$ en met elk daarmee gelijkwaardig rationeel getal.

De eigenschappen C 1—4 en A gelden.

Aan Q is bij gegeven $\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\}$ voldaan door $\{\{b, \overline{1}\}, \{a, \overline{2}\}\}$. Hieruit volgt, dat $\frac{a}{b}$ voor correlatieve geheele getallen steeds een zin heeft.

De eigenschappen F 1—2 gelden.

Complexvorming.

Uit $\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\}$ leiden we resp. af:

$$a \text{ en } b,$$

$$\{a, 2a, \ldots, -a, -2a, \ldots\} \text{ en } \{b, 2b, \ldots, -b, -2b, \ldots\},$$

$$\{\{a, \overline{1}\}, \{2a, \overline{1}\}, \ldots, \{-a, \overline{1}\}, \{-2a, \overline{1}\}, \ldots\} \text{ en}$$

$$\{\{b, \overline{2}\}, \{2b, \overline{2}\}, \ldots, \{-b, \overline{2}\}, \{-2b, \overline{2}\}, \ldots\},$$

en daaruit:

$$\{\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\}, \{\{2a, \overline{1}\}, \{2b, \overline{2}\}\}, \ldots,$$

$$\{\{-a, \overline{1}\}, \{-b, \overline{2}\}\}, \{\{-2a, \overline{1}\}, \{-2b, \overline{2}\}\}, \ldots\}.$$

Deze verzameling is een functie van het gegeven rationeele getal. Dus existeert de verzameling V van al deze verzamelingen. Zij $r \in V$, dan is:

$$\Sigma V_{[r\,x]} \neq 0 \equiv \phi(r)$$

een rationeel getalcomplex. De verzameling van alle rationeele complexen is dus:

$$R\{\phi(r)\} \equiv R'.$$

Hiermee zijn Cv 1—2 bewezen. Cv 3 bewijzen we door aan te toonen, dat $-a$ een functie is van a, Cv 4 door aan te toonen, dat $\frac{1}{a}$ een functie is van a, waarin a een rationeel complex algemeen voorstelt.

Dus: alle grondeigenschappen gelden.

Stelling 53: De verzameling der rationeele complexen is aftelbaar.

Bewijs: Bij de ontwikkeling der rationeele complexvorming leidden we af de verzameling $V \gtrless R'$, welker elementen door een functionaalsubstitutie uit R werden afgeleid.

R is aftelbaar, als product van 2 aftelbare verzamelingen, dus ook V. Dan is volgens stelling 44 R' aftelbaar of eindig, dus aftelbaar.

Ten einde de invoering der reëele getallen voor te bereiden eerst nog eenige stellingen over rationeele complexen.

Stelling 54: De verzameling van alle veelvouden van een rationeel complex bestaat en is een functie van dat complex.

Bewijs: Er is een functie $\phi(x)$, welke de correlatieve natuurlijke complexen afbeeldt op de verzameling der natuurlijke getallen. Deze afbeeldingsfunctie neemt in de rationeele complexen, die niet correlatief natuurlijk zijn de waarde 0 aan. Zij het gegeven complex a, dan existeert:

$$R' \{\phi(x) \,.\, a\}.$$

Deze verzameling verminderd met a en 0 is de gevraagde en is een functie van a.

Stelling 55: De verzameling der correlatieve natuurlijke complexen grooter dan een gegeven rationeel complex $\alpha > 0$ bestaat en is een functie van α.

Bewijs: Zij $\{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\}$ een representant van α en zij:

$$a = nb + c,$$
$$c < b,$$

waarin a, b, c en n correlatieve aantallen zijn in het systeem der geheele getallen. Uit b leiden we af:

$$\{0, b, 2b, \ldots.\} \equiv \phi(b).$$

Nu geldt algemeen als gegeven is een verzameling V van natuurlijke getallen en een natuurlijk getal p, dat de deelverzameling van V der elementen $> p$ een functie is van V en p, immers deze deelverzameling is $V - [V Z_p]$. Dit toegepast op a en $\phi(b)$ levert een verzameling:

$$\{(n+1)\, b, (n+2)\, b, \ldots..\}.$$

Dit is een functie van a en b, dus ook:

$$\{n+1, n+2, \ldots.\}.$$

Daar bij speciale keuze van de representant (b.v. a en b onderling ondeelbaar) a en b functies worden van α, is deze verzameling dan een functie van α. Dit overgedragen op de correlatieve natuurlijke complexen levert het gestelde.

Gevolg: Zijn gegeven de rationeele complexen α en β, dan bestaat de verzameling der correlatieve natuurlijke complexen n, waarvoor geldt $n\alpha > \beta$, en deze is een functie van α en β.

Stelling 56: Zij V een verzameling van rationeele complexen > 0 en α een rationeel complex, dan bestaat de verzameling der correlatieve natuurlijke complexen n, waarvoor geldt dat $n\alpha$ grooter is dan een der elementen van V, en deze is een functie van α en V.

Bewijs: Bij elk complex $\beta \epsilon V$ bestaat de verzameling van correlatieve natuurlijke complexen $> \frac{\beta}{\alpha}$. De vereenigingsverzameling dezer verzamelingen bestaat en voldoet.

Stelling 57: Zij gegeven een rationeel complex $\alpha > 0$, dan bestaat de verzameling van alle rationeele complexen $> \alpha$, en deze is een functie van α.

Bewijs: Zij $\phi(\alpha, \beta)$ de verzameling der rationeele complexen $n\beta$, waarin n een correlatief natuurlijk complex is en $n\beta > \alpha$. Uit de verzameling R'_1 der rationeele complexen > 0, welker existentie gemakkelijk is aan te toonen, leiden we dan af:

$$R'_1 \{ \phi(\alpha, x) \}.$$

De gevraagde verzameling is dan:

$$\Sigma R'_1 \{ \phi(\alpha, x) \} \equiv \psi(\alpha).$$

Uit het voorgaande volgt, dat ook de verzameling der rationeele complexen $< \alpha$ bestaat, dus ook die der rationeele complexen $> \beta$, indien $\beta < 0$. Deze is een functie van β, $\chi(\beta)$. Zij weer R'_1 de verzameling van alle rationeele complexen > 0, dan beschouwen we de verzameling:

$$\{R'_1\} + R'_1 \{\psi(x)\} + R'_1 \{\chi(-x)\},$$

waarvoor geldt:

$$\{R'_1\} \sim \{0\},\ R'_1\ \{\psi(x)\} \sim R'_1,$$
$$R'_1\ \{\chi\,(-x)\} \sim R' - (R'_1 + 0).$$

Vereenigen we de 3 afbeeldingen, welker elementen steeds bestaan uit een rationeel complex ρ en de verzameling van alle rationeele complexen $> \rho$, dan vinden we de volgende stelling:

Stelling 58: Bij elk rationeel complex ρ bestaat de verzameling van alle rationeele complexen $> \rho$, en deze is een functie van ρ.

Opmerking: Deze stelling blijft juist, indien we „grooter" vervangen door „kleiner", „grooter of gelijk aan", of „kleiner of gelijk aan".

Stelling 59: Bij elke verzameling van rationeele complexen bestaat de verzameling der rationeele complexen, die grooter zijn dan een element der verzameling, en deze is een functie van de gegeven verzameling.

Bewijs: Zij gegeven $V\ \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ en zij $\phi\,(x)$ de verzameling van alle rationeele complexen $> x$, dan is de gevraagde verzameling:

$$\Sigma\, V\ \{\phi\,(x)\},$$

een functie van V.

Stelling 60: Zijn gegeven 2 verzamelingen rationeele complexen $V\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ en $W\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$, dan bestaat de verzameling U der complexen, welke men verkrijgt door bij elke complex α elk complex β op te tellen.

Bewijs: Uit V leiden we af:

$$V\ \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_1, \ldots\} \equiv \phi\,(\beta_1),$$
$$V\ \{\alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_2, \ldots\} \equiv \phi\,(\beta_2),$$

—— . —— . —— . —— . ——

en vervolgens uit W:

$$W\ \{\phi\,(x)\}.$$

Dan is:

$$U = \Sigma\, W\{\phi\,(x)\}.$$

Opmerking: De stelling blijft juist, als we de som der complexen vervangen door hun product, verschil of quotiënt.

Invoering der reëele getallen.

We volgen de methode van Baudet[1]) en definiëeren:

Definitie: De elementen van:

$$UR'_1 \equiv S$$

heeten *niet-negatieve reëele getallen.*

Definitie: Een *majorant* van een niet-negatief reëel getal a is een rationeel complex, grooter dan een der elementen van a.

Definitie: De verzameling van alle majoranten van a heet *majorantverzameling* van a.

De majorantverzameling bestaat ten gevolge van stelling 59. Hij is een functie van a.

Voor de definities van optelling, vermenigvuldiging en orderelatie, alsmede voor het bewijs der grondeigenschappen S 1—4, P 1—5 en O 1—5 en der stelling van de bovenste grens verwijzen we naar de theorie van Baudet. Stelling 60 dient ter vertaling dezer theorie.

Definitie: Een rationeel getal α is *correlatief* met een niet-negatief reëel getal a, als de majorantverzameling van a gelijk is aan de verzameling van alle rationeele complexen grooter dan het bij α behoorend complex.

De eigenschappen C 1—4 gelden. Voor het bewijs van Q verwijzen we weer naar de theorie van Baudet, terwijl F 1—2 bewezen worden analoog aan het bewijs van stelling 60.

Is a een niet-negatief reëel getal, A zijn majorantverzameling, dan is UA het bij A behoorend niet-negatief reëel getalcomplex. De verzameling S' al dezer getalcomplexen existeert.

De eigenschappen Cv 1, 2 en 4 gelden. Cv 4 volgt daaruit, dat $\frac{1}{a}$ representant is van:

[1]) Zie Schuh: Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare Getal.

$$U\left(R'_1 - (\Sigma\, UA)\left\{\frac{1}{x}\right\}\right),$$

een functie van A.

Niet van kracht zijn dus V en Cv 3.

We trachten nu te bewijzen, dat de verzameling der niet-negatieve reëele getalcomplexen niet aftelbaar is. Daartoe echter eerst eenige voorbereidende stellingen.

Stelling 61: De verzameling van alle niet-negatieve reëele getalcomplexen $> a$ bestaat en is een functie van a.

Bewijs: Er voldoet n.l. de verzameling:

$$S'_{[ax]} = x - a.$$

Duale ontwikkeling der niet-negatieve reëele getallen.

We vormen de productverzameling P der natuurlijke getallen met $\{0, 1\}$, waarin 0 en 1 niet-negatieve reëele getallen zijn. Verder vormen we de verzameling:

$$\left\{\left\{\tfrac{1}{2}, 1\right\}, \left\{\tfrac{1}{4}, 2\right\}, \ldots\ldots\right\},$$

waarin 1, 2, ... natuurlijke getallen, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, .. , niet-negatieve reëele getallen zijn. Zij een element van P:

$$\left\{\{a_1, 1\}, \{a_2, 2\}, \ldots\ldots\right\},$$

We leiden hieruit af:

$$\left\{\tfrac{1}{2}\, a_1, \tfrac{1}{4}\, a_2, \ldots\ldots\right\}$$

en vervolgens:

$$\left\{\tfrac{1}{2}\, a_1, \tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{4}\, a_2, \ldots\ldots\right\} \equiv A.$$

Ten slotte is de doorsnede der majorantverzamelingen der elementen van deze verzameling een niet-negatief reëel getal tusschen 0 en 1, indien we uitsluiten $a_k = 0$ voor alle k en $a_k = 1$ voor alle k. Indien we voorts uitsluiten $a_k = 1$ voor alle $k > l$ (l is een vast aantal), dan behooren bij 2 verschillende verzamelingen A steeds 2 verschillende niet-negatieve reëele getallen.

Is $\{b_1, b_2, \ldots\ldots\}$ de deelverzameling van Z, welker elementen bij de vorming van het product $P\{Z, \{0, 1\}\}$ gecombineerd werden met 1, dan is A een functie dezer verzameling. Zij deze functie $\phi(x)$ en zij $U'Z$ de verzameling, die tot elementen heeft 0 en alle deelverzamelingen van Z, waarvoor geldt dat er een verzameling Z'_k bestaat, die er een deel van is. Dan is:

$$(UZ - U'Z) \{\phi(x)\},$$

dus omdat $U'Z \sim Z$, ook UZ aequivalent met een deel der niet-negatieve reëele complexen tusschen 0 en 1.

Definitie: De verzameling A heet *duale ontwikkeling* van het getal a.

Omgekeerd behoort bij elk niet-negatief reëel getal tusschen 0 en 1 een duale ontwikkeling. Zij gegeven a. We passen dan stelling 56 toe en kiezen voor V de majorantverzameling van a, voor α resp. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ . . . . . We vinden daarbij dan de verzameling:

$$\{\psi(a, \tfrac{1}{2}), \psi(a, \tfrac{1}{4}), \ldots\ldots\},$$

waarin $\psi(a, b)$ de verzameling der correlatieve natuurlijke complexen n in het rationeele systeem is, zoodat $nb > a$. Zij Z_{rat} de verzameling van alle rationeele, correlatief natuurlijke complexen. We leiden dan hieruit af:

$$\{Z_{rat} - \psi(a, \tfrac{1}{2}), Z_{rat} - \psi(a, \tfrac{1}{4}), \ldots.\}$$

en daaruit, indien het aantal elementen dezer verzamelingen resp. $p_1, p_2, \ldots\ldots$ is:

$$\{p_1, p_2, \ldots.\}.$$

We kiezen hieruit de deelverzameling, waarvoor geldt:

$$p_{k+1} = 2p_k + 1,$$

waarbij we formeel invoeren $p_0 \equiv 0$. De natuurlijke getallen, waarmee deze elementen correlatief zijn, leveren dan een deelverzameling van Z, welke een duale ontwikkeling van a levert.

Gevolg:

Stelling 62: De verzameling der niet-negatieve reëele complexen tusschen 0 en 1 is niet aftelbaar en is aequivalent met UZ.

Definitie: Deze verzameling heet *continuum*. Notatie: C.

Definitie: Is $M \sim C$, dan zegt men, dat M de *continue machtigheid* heeft.

Stelling 63: De verzameling der niet-negatieve reëele complexen > 1 heeft de continue machtigheid.

Bewijs: Hij wordt door $\frac{1}{x}$ op het continuum afgebeeld.

Gevolg: De vereenigingsverzameling van een aftelbare normale verzameling, welker elementen de continue machtigheid hebben, heeft de continue machtigheid. In verband met stelling 43 mogen we de voorwaarde „normaal" weglaten. Uit dezelfde stelling volgt de juistheid voor een eindige verzameling, welker elementen de continue machtigheid hebben. Hieruit volgt weer in verband met de stellingen 62 en 63:

Stelling 64: De verzameling van alle niet-negatieve reëele complexen heeft de continue machtigheid.

Definitie: Zij $\overline{1} \in S'$, dan heeten de elementen van:

$$S_1 \equiv S' + (S' - 0)\,\{x, \overline{1}\}$$

reëele getallen.

De verzameling der reëele getallen is dus een uitbreiding der verzameling van niet-negatieve getalcomplexen. De begrippen gelijk en gelijkwaardig vallen samen. Een niet-negatief reëel getal is correlatief met een reëel getal, indien het representant is van een complex, dat er gelijk aan is. Een rationeel getal $a < 0$, dat representant is van het rationeele complex A, is correlatief met $\{-A', \overline{1}\}$, waarin A' het met A correlatieve, niet-negatief reëele complex is. De begrippen getal en getalcomplex vallen samen. De definities der hoofdbewerkingen en orderelatie zijn gemakkelijk zoo vast te leggen, dat aan alle hoofdeigenschappen voldaan is, benevens aan de stelling van de bovenste grens. Ten slotte volgt uit stelling 64 in verband met het feit, dat de vereenigingsverzameling van 2 verzamelingen met de continue machtigheid een verzameling met de continue machtigheid is:

Stelling 65: De verzameling van alle reëele getalcomplexen (getallen) heeft de continue machtigheid.