BESCHOUWINGEN

OVER DE

RECHT- EN KROMLIJNIGE BEWEGING VAN EEN PUNT

DOOR

DR. P. VAN GEER.

MET UITSLAANDE PLATEN.

LEIDEN, — A. W. SIJTHOFF.

1874.

BESCHOUWINGEN

OVER DE

RECHT- EN KROMLIJNIGE BEWEGING VAN EEN PUNT.

BESCHOUWINGEN

OVER DE

RECHT- EN KROMLIJNIGE BEWEGING VAN EEN PUNT

DOOR

DR. P. VAN GEER.

MET UITSLAANDE PLATEN.

LEIDEN. — A. W. SIJTHOFF.

1874.

„On peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions".

LAGRANGE.

INLEIDING.

Het schrijven en uitgeven eener zuiver wiskundige verhandeling is in den regel een ondankbare en ontmoedigende arbeid. Slechts weinige hebben lust haar op te nemen; de meeste van dezen bepalen zich dan nog tot het doorbladeren en nagaan der resultaten, en zeer enkele nemen de moeite om het geheel te bestudeeren en zich zelven een oordeel over de waarde der behandelingswijze en verkregen uitkomsten te vormen. Zeer verdienstelijke stukken zijn zoowel ten onzent als in het buitenland gepubliceerd, die de sporen van diepe studie met zich droegen, en aan welke blijkbaar veel tijd en inspanning werden besteed, terwijl zij toch zonder eenige opmerking, hetzij ter bevestiging en aanmoediging, hetzij ter bestrijding voorbij gingen, en in het stof der bibliotheken voor goed liggen begraven.

Gelukkig acht ik mij, dat op die wijze niet is gehandeld met een wiskundig opstel, dat voor een paar jaren door mij werd geschreven onder den titel: „Onderzoek eener bijzondere omstandigheid der centrale beweging.” Hoewel volstrekt niet aanspraak makende op de verdiensten van de hierboven bedoelde stukken, genoot het toch de eer eener uitvoerige bespreking tusschen verschillende vaderlandsche wiskundigen, zoowel in tijdschriften als afzonderlijke brochures, waarvan de laatste eerst voor korten tijd verscheen en wellicht nog door andere wordt gevolgd. Mijne poging tot oplossing eener moeilijkheid, die reeds een paar eeuwen op wiskundig gebied had bestaan, en in den laatsten tijd in plaats van in het licht gesteld en opgehelderd stelselmatig bijna algemeen met stilzwijgen werd voorbijgegaan, vond ondersteuning, en de belangstelling was gaande gemaakt voor eene zaak, die tot zulke uiteenloopende beschouwingen aanleiding gaf.

Hierdoor vond ik aanleiding in dit geschrift op de zaak terug te komen. Niet om haar op nieuw historisch en critisch in het licht te stellen, nog minder om al de bedenkingen te beantwoorden, die tegen mijne opstel in het geheel, zoowel als in bijzonderheden zijn aangevoerd, of om de onderling niet minder dan met de mijne strijdige gevolgtrekkingen tot een geheel te brengen. Mijn doel is eenvoudig eene nieuwe wetenschappelijke bijdrage te leveren, dienende tot opheldering van eenige zaken, die men bij onbevooroordeeld onderzoek noodzakelijk op zijn weg ontmoet, doch tot hiertoe door alle vroegere schrijvers zoo niet geheel zijn voorbijgegaan, dan toch nauwelijks van ter zijde aangeraakt. Ik kan mij ten minste niet neerleggen bij de meening van velen, dat het beter is dergelijke twijfelachtige moeilijkheden zoo stil mogelijk ter zijde te laten liggen, en voort te wandelen, als of zij er niet zijn. Kan het mij niet gelukken, al die hinderpalen uit den weg te ruimen, dan wil ik mij gaarne tevreden stellen met de overtuiging, dat het aanwijzen en onderzoeken daarvan reeds een goed werk is, waardoor voor anderen de weg is geopend, om ze voor goed te verwijderen.

Hoe lichtvaardig dergelijke moeilijkheden worden behandeld zelfs door de voortreffelijkste geleerden van onzen tijd, en hoezeer zij er op uit zijn, om daarover heen te springen in plaats van ze op te ruimen, blijkt onder anderen uit den wel bekenden strijd tusschen Helmholtz en Weber [1]). Volgens de electrodynamische wet van Weber zou toch een deeltje met eindige snelheid beginnende eene periodieke beweging kunnen aannemen, waarbij het telkens het middelpunt met oneindig groote snelheid voorbijgaat. Helmholtz beweert, dat zulk eene beweging in strijd is met de wet van het behoud der energie, omdat hier uit eene eindige snelheid een oneindig groote arbeid zou voortvloeien. Op physische gronden tracht Weber in zijne laatste verhandeling die bedenking te weerleggen. Blijkbaar is hier het standpunt der beide strijders onjuist gekozen. Redeneeringen noch physische beschouwingen kunnen de zaak toelichten of oplossen, daar de moeilijkheid van zuiver mathematischen aard is en op natuurkundig terrein nooit kan voorkomen. De begrippen van arbeid en energie staan met haar in geen verband, want de beweging is onstoffelijk, zoodat zelfs het denkbeeld van massa moet ter zijde gesteld worden [2]).

Ook in enkele mathematische verhandelingen van den laatsten tijd worden dergelijke zaken van ter zijde aangeraakt, zonder tot eenige oplossing zelfs tot behoorlijke uiteenzetting te geraken. Zoo vindt men in eene verhandeling van Dr. Leitzmann (Ein Problem aus der Dynamik des Punktes. Magdeburg 1860), dat wanneer een

---

1) Weber. Electrodynamische Maassbestimmungen (Abhandlungen der math-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1852, 1864, 1871.)

Helmholtz. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität. (Journal Von Crelle 72: Band. 1870).

2) „Freilich sollte billiger Weise Jemand, der die Freiheit für sich in Anspruch nimmt, unsicher in der Mathematik sein zu dürfen, nicht über Dinge absprechen wollen, *die nur durch mathematische Untersuchungen entschieden werden können.*" Zoo spreekt Helmholtz in het pas verschenen 2e deel van zijne duitsche bewerking van het „Handbuch der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait." De merkwaardige voorrede van dit 2e deel levert op nieuw het treurig bewijs, hoe de grootste geleerden in een zuiver wetenschappelijken strijd zich soms door drift en partijzucht tot onwaardige argumenten laten vervoeren.

punt met oneindig groote snelheid in een punt van oneindig groote aantrekking komt, de beweging ophoudt, omdat de formulen imaginair worden; eene dergelijke bewering komt voor in een opstel van Dr. C. Zeidler (Einige Probleme aus der Dynamik des Punktes, Königsberg 1870). In de eerste aflevering van den laatsten jaargang van het „Zeitschrift für Mathematik und Physik," wordt door Paul Perlewitz het vraagstuk van Legendre behandeld, dat uitvoerig in het „Onderzoek eener bijz. omst. der c. beweging" is besproken, en komt in strijd met de uitspraak van Legendre tot het besluit, dat het bewegend punt óf tusschen óf buiten de aantrekkende punten zal blijven.

Doch van eene nauwkeurige uiteenzetting en strenge behandeling van dergelijke moeilijkheden is in geen dezer stukken sprake. Het schijnt echter nutteloos, de historische toelichting dezer zaken in alle bijzonderheden voort te zetten, daar het vroeger en ook het hierboven meegedeelde toereikend kan geacht worden om aan te toonen, hoe nergens eene volledige behandeling voorkomt.

In een enkel opzicht moet ik echter uitzondering maken. In mijn vorig werkje heb ik vrij uitvoerig gesproken over de onwaardige wijze, waarop het beroemd werk van Euler over de Mechanica is gecritiseerd door een Engelschman Robins, en over de edele wijze, waarop Euler die critiek heeft beantwoord. Ik meende door dit, in geene der levensbeschrijvingen van den grooten geleerde voorvoorkomend, verhaal eene niet onbelangrijke bijdrage tot de geschiedenis der wiskundige wetenschappen te leveren, die de belangstelling van hare beoefenaars zou opwekken. Het slot dezer geschiedenis nu is eerst sedert korten tijd tot mijne kennis gekomen en zal ik hier in het kort meedeelen.

De critiek van Robins werd in het buitenland niet beantwoord behalve door de vroeger vermelde, welverdiende les, die hij van Buffon ontving. Het was mij eene aangename verrassing tot de ontdekking te komen, dat de eer van Euler in Holland waardig tegenover Robins werd gehandhaafd. In de „Verhandelingen uitgegeven door de Hollandsche Maatschappije der Weetenschappen te Haarlem, zesden Deels, Tweede stuk (1762)" komt eene verhandeling voor van J. F. Hennert, mathematicus, geboren te Berlijn en wonende te Leiden, getiteld: „Van de Beweeginge welke een lichaam verkrijgt, wanneer het in het aantrekkings-middelpunt gekomen is." Hierin wordt, zooals uit den titel reeds blijkt, dezelfde zaak behandeld als in mijn voorgaand werkje, en worden de beschouwingen van Euler met kracht gehandhaafd tegenover de aanvallen van Robins, dien hij niet ten onrechte den Engelschen Momus noemt.

Over de berekeningen en argumenten van Hennert zal ik thans niet uitweiden, daar zij door de uitbreiding der meetkundige en algebraische analysis in deze eeuw grootendeels hunne waarde verloren hebben. Zijn standpunt — het eenige ware in deze netelige zaak — blijkt uit den merkwaardigen zin, vóór hem door Euler, na hem door Helmholtz uitgesproken: „Het is dan Zonneklaar, dat men niets kan besluiten van de beweeging eens lichaams, hetwelke tot het Middelpunt genaadert is, dan door de bereekening" (bladz. 720). Kort na de uitgave dezer verhandeling, wellicht ten gevolge daarvan, werd Hennert benoemd tot hoogleeraar in de philosofie, mathesis en astronomie aan de Hoogeschool te Utrecht, waar hij vele jaren zijn ambt bekleedde, en na nog verscheidene wetenschappelijke bijdragen tot wis- en sterrenkunde geleverd te hebben in 1813 overleed.

§ 1.

Over de bepaalde integralen voor het geval eener oneindige discontinuiteit der functie.

Daar in de volgende bladzijden herhaaldelijk bepaalde integralen voorkomen, wier functie onder het integraalteeken oneindig groot worden voor eene waarde gelegen tusschen de grenzen der integraal, moeten eenige beschouwingen over zoodanige grootheden vooraf gaan.

Op de bladz. 36 en 37 van het „Onderzoek eener bijzondere omstandigheid enz." is voor hetzelfde onderwerp de methode van CAUCHY meegedeeld en nauwkeurig gevolgd. Hetgeen daar voorkomt, is toch volgens de noot overgenomen uit zijn werk „*Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique*". Hetgeen hier over hetzelfde onderwerp zal gezegd worden is evenzoo aan classieke werken ontleend. Ter aanvulling der methode van Cauchy zullen namelijk de beschouwingen der Duitsche wiskundigen LEJEUNE-DIRICHLET en RIEMANN worden meegedeeld, en getrouw, meestal zelfs woordelijk, overgenomen. Het recht begrip dezer zuiver wiskundige theorie is *volstrekt onmisbaar* voor de behoorlijke toepassing op dynamisch gebied; zoodat eene zelfstandige behandeling ontleend aan de groote meesters in de wetenschap vasten grond moet geven aan de later daaruit afteleiden gevolgen. Van daar, dat deze zuiver wiskundige beschouwingen voorafgaan aan de dynamische vraagstukken, die wij in dit werkje wenschen te behandelen.

Wanneer [1]) tusschen de waarden van $x = a$ en $x = b$ voor eene of meer waarden van x of voor de grenzen zelven de functie door het oneindige gaat, kan in het algemeen niet meer beweerd worden, dat de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ steeds een zin heeft. Want zal de integraal niet zonder beteekenis zijn, zoo is de voorwaarde onvermijdelijk, dat hare waarde eene bepaalde eindige grootheid voorstelt; dit echter kan, zoo als men terstoud inziet, volstrekt niet uit de vroeger gegeven verklaring der bepaalde integraal afgeleid worden, wanneer de functie $f(x)$, hetzij aan de grenzen, hetzij daartusschen door oneindig groot gaat. Derhalve is nu de vraag te beantwoorden, welke beteekenis men in een dergelijk geval aan den vorm $\int_a^b f(x)\,dx$ te geven geeft. Nemen wij daartoe kortheidshalve vooreerst aan, dat $f(x)$ slechts voor $x = c$, waarbij c tusschen a en b ligt en $b > a$ is, oneindig groot wordt, overigens echter doorloopend blijft; zoo zal klaarblijkelijk de functie $f(x)$ van $x = a$ tot $x = c - \varepsilon$ en van $x = c + \delta$ tot $x = b$ zich in het vroeger behandelde geval bevinden, en derhalve ook het bestaan der beide integralen

$$1)\qquad \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_{b+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

aangenomen moeten worden. Deze beide integralen echter kunnen, voor zoo ver de positief aangenomen grootheden ε en δ van nul minder dan eene willekeurig kleine hoeveelheid verschillen, de volgende eigenaardigheden vertoonen. Of de beide integralen naderen tot eindige grenzen, óf zij nemen toe zonder ophouden, óf eindelijk verkrijgen de beide integralen oneindig groote waarden, van welke de eene aan de kant der positieve grootheden ligt, de andere daarentegen het minusteeken bezit. Slechts in het eerstge-

---

[1]) Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale mit vorzüglicher Berücksichtigung der vor P. G. Lejeune-Dirichlet gehaltenen Vorträge von Dr. G. F. Meyer. Leipzig Teubner 1871 § 17.

Volgens de inhoudsopgave is het hier aangehaalde woordelijk van Dirichlet.

noemde geval bezit de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ een werkelijken zin en wordt door de vergelijking

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim. \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + lim. \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

bepaald; eene betrekking, die blijkbaar in den vorm

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim. \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right]$$

geschreven kan worden, daar de grenzen in het tweede lid hier werkelijke grenzen, derhalve niet $\pm\infty$ zullen zijn.

In de beide andere gevallen daarentegen is de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ zonder eigenlijke beteekenis, en men noemt haar hier *oneindig*, wanneer beide integralen 1) in denzelfden zin oneindig groote waarden aannemen. *Onbepaald* eindelijk heet de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$, wanneer van de integralen 1) de eene positief, de andere negatief oneindig wordt.

Hoe op deze wijze de gedachtengang moet voortgezet worden, wanneer $f(x)$ op meer tusschen a en b gelegen punten door oneindig groot gaat, behoeft niet vermeld te worden. Ook dit blijkt van zelfs, dat slechts de eene van de uitsluitende waarden $c-\varepsilon$ of $c+\delta$ in aanmerking komt, wanneer c met eene der grenzen van de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ samenvalt.

Stelt [1]) men de hulpgrootheden ε en δ aan elkander gelijk en telt vervolgens de beide integralen

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

bij elkander, dan wordt de voor $lim\ \delta = 0$ voortvloeiende grens door Cauchy de hoofdwaarde der integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ genoemd,

---

[1]) *Ibidem* § 18. Deze paragraaf is van den bewerker Meyer.

echter zullen wij in overeenstemming met Dirichlet geen gebruik van deze bepaling maken.

Gewichtiger voor ons zijn daarentegen de zoogenaamde *singuliere bepaalde integralen*, ofschoon wij ons ook daarvan niet in die uitgebreidheid zullen bedienen, als door Cauchy is geschied.

Hij verstaat namelijk hieronder de grenswaarden van zulke integralen, wier grenzen slechts oneindig kleine grootheden van eene waarde c afwijken, voor welke de functie of door het oneindige gaat, of die zelf tot de oneindige grootheden wordt gerekend. Beschouwen wij hier slechts het eerste geval, zoo zouden wij ons de singuliere bepaalde integralen onder de vormen

$$\int_{c-\varepsilon}^{c-\nu\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{c+\varepsilon}^{c+\mu\varepsilon} f(x)\,dx$$

kunnen voorstellen, in welke ν en μ willekeurige positieve getallen en ε eene oneindig kleine grootheid voorstellen.

Om [1]) een voorbeeld voor het opzoeken der zoogenaamde, *ons echter volkomen onverschillige*, hoofdwaarde eener bepaalde integraal aan te halen, willen wij de integraal $\int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2}$, $o < a < b$ beschouwen. De onbepaalde integraal $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ is zoo als men weet gelijk aan $\frac{1}{2a}\, lg.\, \frac{a+x}{a-x} + C$, waarvoor men echter om het imaginaire te vermijden, den vorm $\frac{1}{4a}\, lg.\, \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 + C.$ kan verkiezen. Nu neemt voor $x = a$ de logarithmus over elke grens toe en derhalve is de integraal $\int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2}$ geheel onbepaald, *alzoo in waarheid zonder zin*. Hare hoofdwaarde echter vindt men als volgt:

$$\int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{4a} lg.\, \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + lim.\, \frac{1}{4a}\left[log.\, \left(\frac{a+a-\varepsilon}{a-a+\varepsilon}\right)^2 - lg.\left(\frac{a+a+\varepsilon}{a-a-\varepsilon}\right)^2\right] = \frac{1}{4a}\, lg.\, \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \frac{1}{4a} lim. lg. \left(\frac{2a-\varepsilon}{2a+\varepsilon}\, \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{4a}\, lg.\, \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

[1]) *Ibidem* § 24.

Zoover gaan de beschouwingen van Dirichlet over deze zaak; thans geven wij het woord aan den anderen meester des nieuweren tijds RIEMANN.

De [1]) vroeger gegeven bepaling der bepaalde integraal is niet meer geldend, wanneer de functie onder het integraal teeken voor eene waarde $x = c$ tusschen a en b oneindig wordt. Dan heeft de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ in het algemeen geen zin meer. In één geval is men echter overeengekomen om haar nog eene beteekenis te geven. Wanneer namelijk k_1 en k_2 willekeurig gekozen positieve eindige getallen zijn en ε evenzoo positief en voorloopig eindig, dan hebben de integralen

$$\int_a^{c - k_1 \varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_{c + k_2 \varepsilon}^b f(x)\,dx$$

eene bepaalde beteekenis. Hare waarden zijn eindig en hangen in het algemeen van $k_1 \varepsilon$ en $k_2 \varepsilon$ af. Nadert nu bij oneindig afnemende ε de som

$$\int_a^{c - k_1 \varepsilon} f(x)\,dx \quad + \quad \int_{c + k_2 \varepsilon}^b f(x)\,dx$$

eene bepaalde eindige grens, *die van de willekeurige grootheden k_1 en k_2 onafhankelijk is*, dan verstaat men onder de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ juist die grenswaarde.

Als voorbeeld nemen wij de bepaalde integraal $\int_a^b \frac{dx}{x^\mu}$, waarvan de waarde reeds vroeger is bepaald. Wij vinden

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\mu} = \frac{b^{1-\mu} - a^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Is $\mu > o$ zoo wordt de functie $\frac{1}{x^\mu}$ oneindig groot voor $x = o$ Derhalve treedt het boven beschouwde geval op, wanneer $x = o$ niet buiten de integratie-grenzen a en b ligt. Dan wordt een bij-

[1]) Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von B. Riemann. Braunschweig 1869, § 8.

zonder onderzoek noodig. Zij $a = o$ en b positief. Dan hebben wij voor eene positieve $k\varepsilon$

$$\int_{k\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x^{\mu}} = \frac{b^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{k^{1-\mu}\varepsilon^{1-\mu}}{1-\mu}$$

en het is de vraag, tot welke grens het tweede lid voor eene oneindig afnemende ε nadert. Deze grenswaarde hangt slechts dan van k niet af, wanneer $lim.\ \varepsilon^{1-\mu} = o$ wordt, dat is wanneer $\mu < 1$ is. Derhalve hebben wij

$$\int_{o}^{b} \frac{dx}{x^{\mu}} = \frac{b^{1-\mu}}{1-\mu}, \qquad 1 > \mu > o.$$

Hiermede eindigt de verklaring van RIEMANN.

Vatten wij nu de beschouwingen over dit onderwerp te samen, dan blijkt, dat CAUCHY de eerste is geweest, die de aandacht vestigde op de discontinuïteit der functien onder het integraal-teeken, en tevens de middelen aangaf om dit te onderzoeken. Hij bewees, dat bij zoodanige discontinuïteit de waarden der bepaalde integraal niet meer wordt gegeven door het verschil der waarden van de onbepaalde integraal genomen voor de grenzen, zooals vóór hem door de wiskundigen werd aangenomen. Om echter den overgang niet plotseling te maken, werd door hem als zuiver algebraische grootheid de hoofdwaarde ingevoerd, die ook bij volkomen discontinuiteit nog eene bepaalde waarde kan hebben, hoewel ook door hem uitdrukkelijk op den voorgrond wordt gesteld, dat die hoofdwaarde volstrekt niet de waarde der bepaalde integraal uitdrukt.

DIRICHLET en RIEMANN zijn echter verder gegaan en hebben voor goed met de oude richting gebroken. Volgens hunne hierboven meegedeelde beschouwingen heeft de bepaalde integraal geen waarde zelfs geen zin meer, wanneer de functie onder het integraalteeken oneindig groot wordt voor eene tusschen de grenzen gelegen waarde. Slechts een enkel geval maakt uitzondering, wanneer namelijk de integralen 1) eene eindige limiet hebben bij tot nul naderende ε en δ. De hoofdwaarde heeft evenmin beteekenis als eenige andere zelfs geheel willekeurige waarde. In den vorm mogen de beschouwingen van Riemann geringe afwijkingen vertoonen met betrekking tot die van zijn leermeester Dirichlet, in het wezen komen zij geheel overeen. In zoover sluiten zij zich volkomen bij Cauchy aan, dat ook deze wel de hoofdwaarde stelt, maar haar geene beteekenis toekent; in geen zijner talrijke verhandelingen en werken, voor zoover het mij na veel moeite en zorg gebleken is, maakt hij gebruik van die hoofdwaarde of voert haar bij de berekening in. Geen voorbeeld op theoretisch physisch of mechanisch gebied is mij bekend, waar hij of een zijner navolgers deze grootheden gebruikt of invoert. Uit een zuiver wiskundig oogpunt moge het opsporen of transformeeren van dergelijke hoofdwaarden niet geheel doelloos zijn, voor toepassing of gebruik zijn zij ten eenenmale ongeschikt, want de integralen zelven zijn zonder waarde, zelfs zonder zin. Dirichlet en Riemann hebben een grooten dienst aan de wetenschap bewezen, door uit haar gebied die zoogenaamde hoofdwaarden, wier bestaan illusorisch is, te verdrijven.

Hierop steunende zullen de volgende beschouwingen slechts gebruik maken van den vasten grondslag, die door Dirichlet aan de theorie der bepaalde integralen met discontinue functien is gegeven, en uitgedrukt in de drieledige verdeeling, die hierboven is meegedeeld. Duidelijkshalve zal deze nog even geresumeerd worden.

Zij $b > c > a$ en $f(x) = \infty$ voor $x = c$.

$$1) \qquad \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

1ste *Geval.* Deze beide integralen naderen tot eindige grenzen, wanneer ε en δ tot nul naderen; dan is de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ *eindig*, en heeft tot waarde de algebraïsche som dezer grenzen.

2de *Geval.* De beide integralen 1) nemen toe tot oneindig groot voor afnemende ε en δ, daarbij hetzelfde teeken hebbende; dan is de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ *oneindig groot.*

3de *Geval.* Als in het 2de geval, doch de integralen 1) hebben tegenovergesteld teeken; dan is de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ *geheel onbepaald.*

§ 2.

Over de rechtlijnige beweging van een punt.

Zij (fig. 1) bij de beweging van het punt P langs de rechte lijn XX′, de versnelling eene functie van den afstand x van het bewegend punt tot een vast punt O op de rechte lijn, derhalve

$$p = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Daar nu volgens de bekende formulen der rechtlijnige beweging

$$p = \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{d^2\,x}{d\,t^2} = \frac{v\,d\,v}{d\,x}, \quad v = \frac{d\,x}{d\,t},$$

wordt

$$\frac{v\,d\,v}{d\,x} = f(x),$$

$$v^2 = 2\int f(x)\,d\,x + \mathrm{C} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Zij ter bekorting

$$\int f(x)\,d\,x = \mathrm{F}(x)$$

dan wordt

$$v^2 = 2\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

waarin C eene willekeurige constante voorstelt.

Deze formule geeft de snelheid uitgedrukt in den tijd.

Om den afstand in den tijd uit te drukken, schrijven wij de laatste formule aldus

$$v = \frac{d\,x}{d\,t} = \sqrt{2\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}},$$

gevende

$$t = \int \frac{d\,x}{\sqrt{2\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}}} + \mathrm{C}_1,$$

waarin C_1 eene nieuwe constante voorstelt.

Deze formule geeft den tijd uitgedrukt in den afstand, en kan ook in dezen vorm geschreven worden

$$t = \varphi(x) + \mathrm{C}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

De beide constanten worden bepaald door de initiale omstandigheden, bijvoorbeeld de plaats en snelheid van het punt op een bepaald tijdstip.

Beschouwt men nu in de vergelijkingen 1), 3) en 4) de p, v en t als ordinaten van een rechthoekig coördinatenstelsel behoorende bij de x als abscissen, dan stellen die vergelijkingen kromme lijnen voor (fig. 1), waarvan wij de eerste P, *versnellingskromme*, de tweede V, *snelheidskromme*, de derde T, *tijdskromme* zullen noemen. [1])

Neemt men de plaats van het bewegend punt P willekeurig in de baan, dan stellen de overeenkomstige ordinaten der drie kromme lijnen $R\,Q_1$, $R\,Q_2$, $R\,Q_3$, de bij die plaats behoorende versnelling, snelheid en tijd voor. Onderling mogen deze drie lijnen niet vergeleken worden, daar zij niet van dezelfde orde zijn. Deze voorstelling door middel van kromme lijnen kan hier als in zoovele andere gevallen groote diensten bewijzen door het licht, dat zij doet opgaan over min of meer ingewikkelde beschouwingen, zooals uit het vervolg zal blijken.

De versnellingskromme is gegeven en uitgedrukt in verg. 1). Hierbij wordt aangenomen, dat in elk punt de versnelling ondubbelzinnig (eindeutig) is, zoodat met elke waarde van x slechts ééne waarde van p overeenkomt. Derhalve wordt de versnellingskromme door eene lijn loodrecht op de as der beweging in hoogstens één punt gesneden. Het positieve teeken duidt aan, dat voor punten der positieve as O X de versnelling is gericht van het vaste punt O naar het bewegend punt (centrifugaal); het negatieve teeken, dat de versnelling is gericht van het bewegend naar het vaste punt (centripetaal). Voor punten der negatieve as O X′ is het omgekeerd. In de kromme lijn worden positieve versnellingen boven de as der beweging, negatieve beneden de as uitgezet. Waar de versnellingskromme de as snijdt, is de versnelling nul en verandert van teeken. Heeft $f(x)$ voor alle waarden der veranderlijke hetzelfde teeken als x, dan blijft de versnelling steeds òf centrifugaal, òf centripetaal. Verandert echter $f(x)$ niet van teeken, ook niet waar dit met x het geval is, dan gaat voor $x = o$ de versnelling van centrifugaal in centripetaal over en omgekeerd; want de versnellingskromme

---

[1]) De beide eerstgenoemde kromme lijnen komen ook voor in eene verhandeling: *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule etc. par Björling.* Archiv der Math. von Grunert 50^e Theil S. 56. De daar voorkomende beschouwingen staan echter verder in geen verband met de onze.

blijft aan dezelfde zijde der as en geeft tegenovergestelde versnellingen voor de punten ter wederzijde van O gelegen.

De *snelheidskromme* is blijkens hare vergelijking 3) symmetrisch met betrekking tot de as. Wegens de ondubbelzinnigheid der versnellingsfunctie komen met elke x twee gelijke, in teeken tegenovergestelde waarden van v, maar ook geene meerdere waarden overeen, zoodat de snelheidskromme aan elke zijde der as ondubbelzinnig is. Waar deze kromme de as snijdt verandert de snelheid van teeken; de raaklijn in het snijpunt staat steeds loodrecht op de as. Beweegt zich het punt in de richting van X naar X′, dan is de snelheid negatief en valt in de kromme beneden de as, voor de beweging in de richting van X′ naar X is de snelheid positief en valt boven de as. Wordt het tweede lid in verg. 3) negatief, dan is de snelheid onbestaanbaar; zoodanige waarde van x, die het tweede lid nul maakt, wijst dus een maximum of minimum in den afstand aan.

Daar op elk tijdstip het bewegend punt slechts ééne plaats in zijne baan kan innemen, moet de vergelijking der tijdskromme voor elke waarde van t slechts ééne ondubbelzinnige waarde voor x opleveren, zoodat de tijdskromme zelve door elke lijn evenwijdig aan de as der beweging in hoogstens één punt kan gesneden worden. De tijdskromme kan dus nooit eene gesloten lijn zijn, ook niet symmetrisch met betrekking tot de as der tijden. Haar snijpunt met de as der beweging is in het beginpunt der tijdstelling. Is zij eene rechte lijn, dan is de beweging eenparig; voor de eenparig veranderlijke beweging is zij eene parabool met de as evenwijdig aan de lijn der beweging. Voor elke periodieke beweging is de tijdskromme eene golflijn met gelijke golven, wier richting loodrecht staat op de as der beweging. Heeft de tijdskromme eene willekeurig gerichte asymptoot, dan wordt de afstand van het bewegend punt met den tijd oneindig groot; loopt de asymptoot evenwijdig aan de as der beweging, dan geeft haar afstand tot deze het tijdstip aan, waarop het bewegend punt in het oneindige verdwijnt; staat de asymptoot loodrecht op die as, dan is haar voetpunt een *asymptotisch punt*, dat is een punt in de baan, waartoe het bewegend punt steeds nadert, zonder het ooit te bereiken.

Wat het onderling verband der drie krommen betreft, zij nog opgemerkt, dat de ordinaten der snelheidskromme evenredig zijn aan de tangenten van de hoeken, die de raaklijnen in de tijdskromme met de as der tijden maken voor punten van gelijke abscissen.

Bij de voorgaande beschouwingen is de versnellingskromme gegegeven en zijn daaruit de beide anderen afgeleid. Is omgekeerd de tijdskromme gegeven en uitgedrukt door de vergelijking

$$t = \varphi(x),$$

die moet voldoen aan de gestelde voorwaarden, dan vindt men de snelheidskromme door te differentieeren, aldus

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varphi'(x)}.$$

Hieruit volgt de vergelijking der versnellingskromme door te stellen

$$p = \frac{v\,dv}{dx} = -\frac{1}{\varphi'(x)}\,\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^2} = \frac{\varphi''(x)}{-[\varphi'(x)]^3}$$

zoodat hier in het algemeen, hoe eenvoudig de oorspronkelijke functie ook genomen worde, een zeer samengestelde vorm ontstaat.

Na deze algemeene opmerkingen gaan wij tot de bijzondere beschouwing van enkele merkwaardige gevallen over.

I. Zij de versnellingskromme gegeven door de vergelijking

$$p = -\mu x^{n}$$

waarin $n \geqq 1$. Zij daarbij in de eerste plaats n oneven $= 2m - 1$ dus

$$p = -\mu x^{2m-1},$$

dan is de versnelling centripetaal voor positieve x en ook voor negatieve x, omdat zij tegelijk met x van teeken verandert.

De versnellingskromme P (fig. 2) is eene lijn, die van O uit rechts daalt beneden de as en links er zich op dezelfde wijze boven verheft, zoodat in O een buigpunt ontstaat, waarvoor de as raaklijn is.

De snelheid wordt nu gegeven door de formule

$$v^2 = -\frac{\mu}{m} x^{2m} + h,$$

waarin $h = v_0^2 + \frac{\mu}{m} x_0^{2m}$ altijd positief is.

Hieruit blijkt, dat de snelheidskromme V symmetrisch is met betrekking tot beide assen. Daarbij is zij gesloten, want voor $v = 0$ wordt

$$x_1 = \sqrt[2m]{\frac{h\,m}{\mu}}$$

gevende het maximum $OA = OA'$ voor den afstand ter wederzijde van O. Het maximum der snelheid is voor $x = 0$

$$V = \sqrt{h}.$$

De tijd volgt uit de formule

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{h - \frac{\mu}{m} x^{2m}}} = \sqrt{\frac{m}{\mu}} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2m} - x^{2m}}},$$

wanneer de tijd wordt geteld van het oogenblik, dat het bewegend punt door O gaat. De beweging periodiek zijnde, is de periode

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{\mu}} \int_0^{X_1} \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2m} - x^{2m}}}$$

bij de amplitudo $2x_1$. De tijdskromme T is eene golflijn, van O uitgaande; de amplitudo geeft de breedte, de periode de lengte der golf.

In de tweede plaats nemen wij n even $= 2m$, dan wordt

$$p = -\mu x^{2m}$$

Daar nu de versnelling niet met x van teeken verandert, maar voortdurend negatief blijft, is zij centripetaal voor de beweging rechts van O en centrifugaal links van O, terwijl zij gelijktijdig met x door nul gaat. De versnellingskromme P (fig. 3) ligt geheel aan de onderzijde der as van beweging, raakt haar in O, en is symmetrisch met betrekking tot de as loodrecht op O X. De snelheidskromme wordt bepaald door de formule

$$v^2 = -\frac{2\mu}{2m+1} x^{2m+1} + h$$

en is dus niet meer symmetrisch voor de lijn loodrecht op de as der beweging. De snelheid wordt nul op een afstand

$$x_1 = \sqrt[2m+1]{\frac{(2m+1)h}{2\mu}},$$

gevende éene positieve waarde O A. Het punt A is de uiterste grens, die het bewegend punt aan de positieve zijde kan bereiken; van hier keert het terug op zijne baan met toenemende snelheid, die de waarde $\sqrt{h}$ in den oorsprong bereikt, en blijft toenemen tot zij gelijk met de negatieve x oneindig groot wordt. De beweging is dus niet periodiek. Voor de bepaling van den tijd heeft men:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{h - \frac{2\mu}{2m+1} x^{2m+1}}} = \sqrt{\frac{2m+1}{2\mu}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2m+1} - x^{2m+1}}}$$

De tijd om van den initialen stand P_0 in A te komen wordt uitgedrukt door

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m+1}{2\mu}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2m+1} - x^{2m+1}}}, = \text{O E}.$$

De tijd om van A in O te komen is

$$t_2 = \sqrt{\frac{2m+1}{2\mu}} \int_{0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2m+1} - x^{2m+1}}}, = \text{E D},$$

terwijl de tijd verloopende sedert den doorgang in het middelpunt tot het verdwijnen op oneindigen afstand in negatieve richting wordt uitgedrukt door

$$t_3 = \sqrt{\frac{2m+1}{2\mu}} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2m+1} + x^{2m+1}}}, = \text{D B}.$$

Deze integraal nu heeft eene eindige waarde [1]). Dus heeft de tijd eene limiet, die niet overschreden kan worden. De tijdskromme, die zich in P_0 verheft, voor A een grootste abscis heeft, daarna terugkeert, heeft voor den negatieven tak eene asymptoot B C evenwijdig aan de as. Haar afstand tot deze wordt gemeten door $t_1 + t_2 + t_3 = \text{O B}$.

In de figuur is ondersteld, dat in den initialen stand P_0 van het bewegend punt, de initiale snelheid $P_0 N_0$ positief is gericht, zoodat het punt zich naar A beweegt. Was de initiale snelheid nul, dan zouden de toppen der snelheidskromme en der tijdskromme in P_0 vallen. Is de snelheid negatief gericht, dus voorgesteld door $P_0 V_0'$, dan komt van de snelheidskromme slechts het deel $V_0' V'$ in aanmerking, terwijl ook van de tijdskromme de top zou

1) Bierens de Haan. Nouvelles tables d'intégrales définies Table 21 n: 9.

vervallen, en slechts de negatieve tak met de asymptoot in aanmerking komen.

Zij in de derde plaats de versnelling voorgesteld door

$$p = \mu x^{2m-1},$$

dan is zij zoowel aan de negatieve als aan de positieve zijde van het middelpunt centrifugaal. De versnellingskromme heeft denzelfden vorm als in fig. 2, doch de beide takken liggen in het tweede en vierde kwadrant. De formule voor de snelheid wordt

$$v^2 = \frac{\mu}{m} x^{2m} + h,$$

waarin nu $h = v_0^2 - \frac{\mu}{m} x_0^{2m}$ positief, nul en negatief zijn kan.

Is h positief, dus $v_0^2 > \frac{\mu}{m} x^{2m}$, dan kan v niet nul worden en behoudt steeds hetzelfde teeken. Is v_0 positief $= P_0 V_0$ (fig. 4), dan verwijdert het punt zich van O met toenemende snelheid, die met den afstand oneindig groot wordt. Is v_0 negatief $= P_0 V_0'$ dan nadert het punt tot O met afnemende snelheid, die in O hare kleinste waarde $\sqrt{h} = O V_1$ bereikt; vervolgens neemt de volstrekte waarde weer toe en wordt met de negatieve x gelijktijdig oneindig groot. In het eene geval is de snelheidskromme $V_0 V$, in het andere $V_0' V_1 V'$.

Is h negatief dus $v_0^2 < \frac{\mu}{m} x_0^{2m}$, dan wordt $v = 0$ voor

$$x_1 = \sqrt[2m]{\frac{hm}{\mu}} = O A,$$

Is in P_0 de snelheid positief $P_0 V_0$, dan blijft de beweging als in het voorgaand geval en de snelheidskromme is $V_0 V$. Doch is nu de snelheid negatief $= P_0 V_0'$, dan zal het punt met afnemende snelheid naderen tot O en, voor het dit punt bereikt, terugkeeren in zijne baan op een afstand $O A = x_1$. Vervolgens neemt de snelheid weer toe met den afstand, zoodat de snelheidskromme is $V_0' A V$.

Is $h = 0$ dus $v_0^2 = \frac{\mu}{m} x_0^{2m}$, dan zal bij de beweging van P naar O de snelheid in dit punt nul worden tegelijk met de versnelling; de snelheidskromme is dan $V_0' O$.

De tijdskromme wordt gegeven door de vergelijking

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\mu}{m} x^{2m} + h}}.$$

Als in fig. 3, heeft ook hier de tijdskromme eene asymptoot evenwijdig aan de as der beweging, zoowel voor $h > 0$ als voor $h < 0$, zoodat het bewegend punt hetzij aan de positieve, hetzij aan de negatieve zijde op *oneindigen* afstand, maar binnen een *eindig* tijdsverloop verdwijnt.

Eene andere bijzonderheid biedt het geval $h = 0$. Dan wordt

$$t = -\sqrt{\frac{m}{\mu}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^m} = \sqrt{\frac{m}{\mu}} \, \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{x_0^{\,m-1}} \right)$$

gevende $t = \infty$ voor $x = 0$.

Dus heeft de tijdskromme T bij de beweging van P_0 naar O tot asymptoot de loodlijn in O op de as der beweging. Hieruit blijkt, hoe de beweging in dit geval zich niet verder dan tot O kan uitstrekken, zoodat het middelpunt een asymptotisch punt is.

II. *De versnelling zij evenredig aan eene negatieve gebroken macht van den afstand.* Om dubbelzinnigheid te vermijden, moet de macht zoodanig gekozen worden, dat met elken afstand slechts éène bestaanbare, in grootte en teeken bepaalde versnelling overeenstemt, derhalve

$$p = \mu \, x^{-\frac{n}{2m+1}}.$$

a. Zij in de eerste plaats ook n oneven, dan geeft de formule

$$p = -\mu \, x^{-\frac{2n+1}{2m+1}}, \qquad m > n$$

zoowel voor positieve als negatieve x eene centripetale versnelling, omdat p en x gelijktijdig van teeken veranderen. De versnellingskromme P P′ (fig. 5) bestaat uit twee gelijke takken in het tweede en vierde kwadrant, die de beide assen tot asymptoten hebben.

De snelheid wordt bepaald door de formule

$$v^2 = -2\mu \int x^{-\frac{2n+1}{2m+1}} dx + h.$$

De functie onder het integraalteeken wordt oneindig groot voor $x = 0$. Vallen de grenzen ter wederzijde van het middelpunt, dan is een nader onderzoek noodzakelijk. Daarom zullen wij de integraal toetsen aan de in het slot van § 1 gegeven kenmerken.

In de integralen 1) is voor dit geval

$$f(x) = x^{-\frac{2n+1}{2m+1}}$$

$$b = x_0, \quad c = 0, \quad a = -x$$

Dus worden zij

$$\int_{+\delta}^{x_0} x^{-\frac{2n+1}{2m+1}} dx = \frac{2m+1}{2(m-n)} \left[x_0^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} - \delta^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} \right]$$

$$\int_{-x}^{-\varepsilon} x^{-\frac{2n+1}{2m+1}} dx = \frac{2m+1}{2(m-n)} \left[x^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} - \varepsilon^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} \right]$$

Beide integralen naderen voor ε en $\delta = 0$ tot eindige grenzen; dus heeft de integraal eene eindige bepaalde waarde, en kan men stellen:

$$\int_{-x}^{x_0} x^{-\frac{2n+1}{2m+1}} dx = \frac{2m+1}{2(m-n)} \left[x_0^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} - x^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} \right]$$

De vergelijking der snelheidskromme wordt nu doorloopend ook voor negatieve x:

$$v^2 = -\frac{(2m+1)\mu}{m-n} x^{\frac{2(m-n)}{2m+1}} + h,$$

zoodat h eene positieve waarde heeft.

De lijn is symmetrisch voor de vier kwadranten. De snelheid wordt nul op een afstand

$$x_1 = \left(h \frac{m-n}{(2m+1)\mu} \right)^{\frac{2m+1}{2(m-n)}}$$

gevende de even-machtswortel twee gelijke waarden, ter wederzijde van O. De snelheid verkrijgt hare grootste waarde $\sqrt{h}$ voor $x = 0$. Derhalve is de snelheidskromme V (fig. 5) eene gesloten lijn even als in fig. 2, en de beweging periodiek. Hare verdere omstandigheden komen geheel met de daar behandelde overeen.

b. Zij bij dezelfde wet de versnelling centrifugaal dus

$$p = +\mu x^{-\frac{2n+1}{2m+1}}$$

dan is de versnellingskromme gelijk aan die in fig. 5, behalve dat de takken in het eerste en derde kwadrant zijn gelegen. De snelheid wordt bepaald door de formule

$$v^2 = \frac{(2\,m + 1)\,\mu}{m - n}\,x^{\frac{2\,(m - n)}{2\,m + 1}} + h.$$

Hierbij zijn weer drie gevallen te onderscheiden, naarmate $h > 0$, $h < 0$, $h = 0$. Voor $h > 0$ kan v niet nul worden en behoudt de snelheid voortdurend hetzelfde teeken. De snelheidskromme is $V_0'\,V_1\,V'$ van fig. 4. Voor $h < 0$ wordt de snelheidskromme V_0' A V; het bewegend punt zal in zijne baan terugkeeren in een punt A gelegen vóór het middelpunt.

Is $h = 0$ dan wordt

$$v^2 = \frac{(2\,m + 1)\,\mu}{m - n}\,x^{\frac{2\,(m - n)}{2\,m + 1}},$$

en de snelheid is gelijktijdig nul met den afstand. Doch dan is de versnelling niet meer nul zooals bij fig. 4. De formule voor den tijd wordt nu

$$\frac{d\,x}{d\;t} = \sqrt{\frac{(2\,m + 1)\,\mu}{m - n}}\;x^{\frac{m - n}{2\,m + 1}},$$

gevende, wanneer $t = 0$ voor $x = x_0$, en tevens de initiale snelheid naar het middelpunt is gericht,

$$t = -\sqrt{\frac{m - n}{(2\,m + 1)\,\mu}}\int_{x_0}^{x} x^{-\frac{m - n}{2\,m + 1}}\,d\,x =$$

$$\sqrt{\frac{m - n}{(2\,m + 1)\,\mu}}\left(x_0^{\frac{m + n + 1}{2\,m + 1}} - x^{\frac{m + n + 1}{2\,m + 1}}\right);$$

derhalve voor $x = 0$:

$$t_1 = \sqrt{\frac{m - n}{(2\,m + 1)\,\mu}}\,x_0^{\frac{m + n + 1}{2\,m + 1}}$$

en niet $t_1 = \infty$ zooals bij fig. 4.

Door invoering der waarde van t_1 wordt de vergelijking der tijdskromme

$$x^{\frac{m+n+1}{2m+1}} = \sqrt{\frac{(2m+1)\mu}{m-n}}(t_1 - t)$$

of

$$x^{m+n+1} = a\left(t_1 - t\right)^{2m+1}$$

waarin ter vereenvoudiging

$$a = \left(\frac{(2m+1)\mu}{m-n}\right)^{\frac{2m+1}{2}}$$

is gesteld.

Nu mag de vergelijking der tijdskromme opgelost volgens x geene even macht van x bevatten, omdat, zooals in het begin dezer paragraaf is uiteengezet, met elke waarde van t slechts ééne in grootte en teeken bepaalde waarde van x mag overeenstemmen. Dus moet $m+n+1$ een oneven, en $m+n$ een even getal zijn. Dan zal voor $t > t_1$, x negatief worden, zoodat het bewegend punt het middelpunt zal voorbijgaan, zijne baan aan de negatieve zijde voortzetten, en na een oneindig tijdsverloop op oneindigen afstand verdwijnen

c. Zij in de derde plaats

$$p = -\mu x^{-\frac{2n}{2m+1}} \qquad m \geqq n$$

dan is de versnelling centripetaal aan de positieve zijde van het middelpunt, in dit punt oneindig groot en aan de negatieve zijde centrifugaal. De versnellingskromme (fig. 6) heeft nu twee symmetrische takken P P′ beneden de as van beweging met de beide assen tot asymptoten. De vergelijking voor de snelheid wordt, de integraal doorloopend zijnde,

$$v^2 = -2\mu \frac{2m+1}{2(m-n)+1} x^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}} + h,$$

zoodat hier h positief is.

De snelheid wordt nul op een afstand

$$\text{O A} = x_1 = \left(\frac{h}{2\mu} \cdot \frac{2(m-n)+1}{2m+1}\right)^{\frac{2m+1}{2(m-n)+1}}$$

zijnde een maximum voor x. Voor $x = 0$ wordt de snelheid $\sqrt{h}$. Voorbij het middelpunt neemt de snelheid steeds toe, tot zij met de negatieve x oneindig groot wordt. De snelheidskromme heeft dus den vorm V A V′ en tot vergelijking door invoering van x_1

$$v^2 = a^2 \left(x_1^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}} - x^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}} \right),$$

waarin ter bekorting

$$a^2 = 2\mu \frac{2m+1}{2(m-n)+1}.$$

is gesteld.

De vergelijking der tijdskromme wordt nu

$$a\,t = \int_x^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{x_1^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}} - x^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}}}},$$

wanneer de tijd wordt geteld van $x = x_1$. De integraal heeft eene bepaalde waarde voor $x = 0$. Aan de negatieve zijde wordt

$$a\,t = \int_0^x \frac{d\,x}{\sqrt{x_1^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}} + x^{\frac{2(m-n)+1}{2m+1}}}},$$

waarbij nu de tijd wordt geteld van $x = 0$. Doch deze integraal heeft niet meer eene eindige waarde voor $x = \infty$, zooals de gelijkvormige onder I. [1]) Dus zal hier het bewegend punt eerst na oneindigen tijd op oneindigen negatieven afstand verdwijnen. De tijdskromme T heeft niet zooals in fig. 3 eene asymptoot, maar komt in vorm met den bovensten tak der snelheidskromme overeen.

III. *De versnelling zij omgekeerd evenredig aan eene geheele macht van den afstand,* dat is

$$p = \mu x^{-n}.$$

a. In de eerste plaats nemen wij n oneven en stellen

$$p = -\mu\, x^{-(2n+1)} \qquad n \geqq 1.$$

waardoor wordt uitgedrukt, dat de versnelling aan beide zijden van het middelpunt is centripetaal en in dit punt oneindig groot. De

---

[1]) Bierens de Haan. Tables d'I. table 21 n⁰. 9. In dit geval wordt niet voldaan aan de voorwaarde $q > 2p$.

versnellingskromme heeft nagenoeg denzelfden vorm als voor het geval II. a voorgesteld in fig. 5. De snelheid wordt gegeven door de formule

$$v^2 = -2\mu \int x^{-(2n+1)} dx + h \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

De vorm onder het integraalteeken wordt oneindig groot voor $x = 0$. Om de waarde der integraal te onderzoeken, passen wij het kenmerk toe, dat aan het slot van § 1 wordt gegeven.

Hier is

$$f(x) = x^{-(2n+1)}$$

$$b = x_0, \quad c = o, \quad a = -x$$

Derhalve

$$\int_{\delta}^{x_0} x^{-(2n+1)} dx = \frac{1}{2n}\left[-x_0^{-2n} + \delta^{-2n}\right]$$

$$\int_{-x}^{-\varepsilon} x^{-(2n+1)} dx = \frac{1}{2n}\left[-\varepsilon^{-2n} + x^{-2n}\right]$$

Beide integralen nemen toe tot oneindig voor afnemende ε en δ, maar met tegenovergesteld teeken; derhalve is de integraal

$$\int_{-x}^{+x_0} x^{-n} dx$$

geheel onbepaald en zonder waarde. De formule voor de snelheid geldt slechts voor de beweging aan dezelfde zijde van het middelpunt. Dan wordt

$$v^2 = \frac{\mu}{n} x^{-2n} + h$$

gevende $v = \infty$ voor $x = 0$. De constante $h = v_0{}^2 - \frac{\mu}{n} x_0^{-2n}$ kan positief, nul en negatief zijn.

Zij $h < 0$, dan wordt $v = 0$ op een afstand

$$x_1 = \left(-\frac{\mu}{n\,h}\right)^{\frac{1}{2n}} = \text{O A (fig. 7)}$$

en de snelheidskromme verkrijgt den vorm $V_1 A V_1'$, bestaande uit twee takken, die in het punt A der as samenkomen en de loodrechte as tot asymptoot hebben.

Zij $h = 0_1$ dan wordt

$$v^2 = \frac{\mu}{n} x^{-2n}$$

en de snelheid kan eerst nul worden voor $x = \infty$. De beide takken der snelheidskromme V_2 en V_2' hebben ook de as der beweging tot gemeenschappelijke asymptoot.

Zij eindelijk $h > 0$, dan heeft v tot grens $\sqrt{h}$ voor $x = \infty$. De beide takken der snelheidskromme V_3 en V_3' hebben tot asymptoten de lijnen getrokken op een afstand $\sqrt{h}$ evenwijdig aan en ter wederzijde van de as van beweging.

De tijd wordt bepaald door de formule

$$b) \quad t = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{d\,x}{\sqrt{\frac{\mu}{n} x^{-2n} + h}} = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{x^n\,d\,x}{\sqrt{\frac{\mu}{n} + h\,x^{2n}}}$$

waarin de integraal steeds eene eindige waarde heeft, doch de grenzen slechts aan de zelfde zijde van het middelpunt mogen genomen worden. Zij het bijzonder geval $h = 0$, dan wordt

$$c) \quad t = -\sqrt{\frac{n}{\mu}} \int_{x_0}^{x} x^n\,d\,x = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{n}{\mu}} \left(x_0^{n+1} - x^{n+1} \right)$$

waarbij $t = 0$ voor $x = x_0$ is genomen en de initiale snelheid naar het middelpunt is gericht. De tijd, dien het punt noodig heeft om in het middelpunt te komen, is

$$t_1 = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{n}{\mu}}\, x_0^{n+1},$$

en met het tijdstip, waarop het bewegend punt het middelpunt bereikt, breekt de formule voor den tijd af wegens de discontinuïteit der integraal.

Een voorbeeld kan hierbij niet ondienstig zijn. Zij

$$p = -\mu\,x^{-3}$$

dus

$$v^2 = \mu\,x^{-2} + h;$$

de drie gevallen dezer vergelijking zijn voorgesteld in fig. 7. De formule voor den tijd wordt

$$d) \quad t = -\int_{x_0}^{x} \frac{x\,d\,x}{\sqrt{\mu + h\,x^2}} = \frac{1}{h} \left(\sqrt{\mu + h\,x_0^2} - \sqrt{\mu + h\,x^2} \right)$$

waarbij de snelheid naar het middelpunt is gericht. Zij $h < 0$, en beginnen wij den tijd te tellen van het oogenblik dat het bewegend punt den grootsten afstand O A heeft bereikt dan wordt $\mu + h x_0^2 = 0$, derhalve

$$t = \frac{\sqrt{\mu + h x^2}}{h} = \frac{x_0 \sqrt{x_0^2 - x^2}}{\sqrt{\mu}}$$

of

$$e) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mu}{x_0^4} t^2 + \frac{x^2}{x_0^2} = 1$$

Dus is de tijdskromme eene ellips (fig. 8) hebbende den grootsten afstand O A tot eene der halve assen en den tijd O B, dien het punt behoeft om van A in O te komen, tot andere halve as. Van de ellips kan slechts het eerste kwadrant als tijdskromme in aanmerking komen. Trouwens eene geheele ellips kan nooit tijdskromme zijn, omdat zij door eene lijn evenwijdig aan de as der beweging in meer dan één punt wordt gesneden. (bladz. 10)

Voor $h = 0$ wordt

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} (x_0^2 - x^2),$$

en de tijdskromme is eene parabool met den top C op de as der tijden op een afstand $O\,C = \frac{x_0^2}{2\sqrt{\mu}}$, die den tijd voorstelt, welke het bewegend punt behoeft om van den initialen stand in O te komen. Is de snelheid in P_0 van O afgericht dan wordt de tijdskromme het stuk P Q, dat oneindig doorloopt. Ook hier komt slechts de positieve helft der parabool als tijdskromme in aanmerking; deze geheele parabool zou om dezelfde reden als de ellips onmogelijk tijdskromme kunnen zijn.

Is $h > 0$, dan wordt

$$h\,t = \sqrt{\mu + h x_0^2} - \sqrt{\mu + h x^2}$$

en de tijdskromme is eene hyperbool met den top op de as der tijden op een afstand

$$O\,D = \frac{1}{h} \left(\sqrt{\mu + h x_0^2} - \mu\right).$$

Slechts een kwadrant D Q′ der hyperbool komt als tijdskromme in aanmerking; ook de verdere omstandigheden komen met die der parabool overeen.

Wij kunnen van dit geval geen afscheid nemen, zonder er eene opmerking bij te voegen.

In verg. 1) verkrijgt de integraal eene volstrekt onbepaalde waarde, wanneer hare grenzen verschillend teeken hebben. Onderstellen wij nu, dat zij gelijk aan de hoofdwaarde mag genomen worden, door ε en δ gelijk te stellen vóór men tot de limiet overgaat. Dan wordt de formule voor de snelheid

$$v^2 = \frac{\mu}{n} x^{-2n} + h,$$

geldende ook voor negatieve x, zoodat de snelheid ter wederzijde van het middelpunt op gelijke afstanden gelijk en tegengesteld is. De formule voor den tijd blijft onveranderd b), doch ook hier mogen dan de grenzen tegengesteld teeken bezitten. Derhalve is c) de formule voor den tijd in het geval $h = 0$. Neemt men hierin x negatief, dan zal voor n *oneven*, de formule niet veranderen, zoodat de tijdskromme symmetrisch zou worden met betrekking tot de as der tijden, hetgeen niet mogelijk is, omdat dan het bewegend punt zich gelijktijdig ter wederzijde van het middelpunt zou bevinden. Voor n even is dit niet het geval, en neemt de tijd voor negatieve x toe, zoodat de tijdskromme zich voortdurend boven de as verheft en dus aan de gestelde voorwaarden voldoet.

Nemen wij het bovenstaand voorbeeld $n = 3$. Voor $h < 0$ is de tijdskromme de ellips volgens e), maar nu zou de geheele ellips tijdskromme zijn, hetgeen niet mogelijk is. Evenmin de parabool en de hyperbool (fig. 8). Ware de beweging periodiek, dan zou in het eerste geval de tijdskromme eene aaneenschakeling van halve ellipsen moeten zijn, hetgeen niet alleen door geene enkele formule wordt uitgedrukt, maar ook met het mathematisch begrip van tijdskromme in volslagen strijd is.

Het gebruik der hoofdwaarde eener onbepaalde integraal is volkomen illusorisch en kan niet anders dan tot mathematische tegenstrijdigheden voeren, zooals door dit voorbeeld op nieuw in het licht is gesteld. De beweging is bepaald en wordt door de formulen volmaakt weergegeven tot het bewegend punt met het middelpunt is saamgevallen; van hier echter treedt de onbepaaldheid der integraal op den voorgrond — geene formulen of beschouwingen kunnen haar ter zijde stellen of elimineeren.

b. Zij nu

$$p = \mu x^{-(2n+1)}$$

zoodat de versnelling aan beide zijden is centrifugaal, omdat zij voortdurend hetzelfde teeken heeft als de afstand. De versnellingskromme komt overeen met die van het geval II. *b*. De snelheid wordt gegeven door de formule

$$v^2 = 2\mu \int x^{-(2n+1)}\, dx + h.$$

Omtrent deze formule gelden dezelfde beschouwingen als van 1) onder *a*. De integraal is volkomen onbepaald, wanneer de grenzen tegengesteld teeken bezitten.

Is dit niet het geval, dan wordt

$$v^2 = -\frac{\mu}{n} x^{-2n} + h,$$

waaruit blijkt, dat h niet anders dan positief kan zijn. De snelheid is nul op den afstand

$$x_1 = \left(\frac{\mu}{n\,h}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

zijnde de kleinste afstand van het bewegend punt tot het middelpunt. Verder neemt de snelheid toe met den afstand en heeft tot limiet $\sqrt{h}$ voor $x = \infty$. Het bewegend punt kan niet met het middelpunt samenvallen, want

$$lim.\ x_1 = 0 \text{ voor } h = \infty.$$

De beweging blijft dus beperkt tot ééne zijde van het middelpunt. De snelheidskromme heeft tot top het punt op den afstand x_1 van O gelegen en tot asymptoot de lijn evenwijdig aan de as der beweging op een afstand $\sqrt{h}$ [1]). Verdere bijzonderheden biedt dit geval niet aan.

c. Zij nu n even, derhalve

$$p = -\mu x^{-2n},$$

dan is de versnelling centripetaal aan de positieve en centrifugaal aan de negatieve zijde van het middelpunt, omdat zij niet met x van teeken verandert. De versnellingskromme heeft denzelfden vorm als onder II. *c* (fig. 6).

---

[1]) Over eene merkwaardige eigenschap dezer beweging, zie een opstel van mij in het *Zeitschrift für Mathematik und Physik* von SCHLÖMILCH, 18e Jahrgang s. 111.

De snelheid wordt nu gegeven door de formule

$$v^2 = -2\mu \int x^{-2n}\, dx + h.$$

De functie onder het integraalteeken wordt weer oneindig voor $x = 0$; dus zullen wij op nieuw het kenmerk van § 1 toepassen.

Hier is

$$f(x) = x^{-2n} \quad \ldots\ldots \quad n \overline{\overline{>}} 1$$

$$b = x_0, \qquad c = 0, \qquad a = -x$$

$$\int_{\delta}^{x_0} x^{-2n}\, dx = \frac{1}{2n-1} \left(-x_0^{-(2n-1)} + \delta^{-(2n-1)}\right)$$

$$\int_{-x}^{-\varepsilon} x^{-2n}\, dx = \frac{1}{2n-1} \left(+\varepsilon^{-(2n-1)} - x^{-(2n-1)}\right).$$

Beide integralen nemen toe tot oneindig voor afnemende ε en δ, maar behouden hetzelfde teeken, dus is de integraal $\int_{-x}^{x_0} x^{-2n}\, dx$ oneindig groot voor elke waarde van x. De formule voor de snelheid wordt nu

$$v^2 = \frac{2\mu}{2n-1} x^{-(2n-1)} + h,$$

gevende eene oneindig groote snelheid voor $x = 0$ en voor alle negatieve waarden van x.

De constante h kan hier positief nul en negatief zijn, waardoor de snelheidskromme denzelfden vorm aanneemt als onder a (fig. 7).

Is de snelheid naar het middelpunt gericht, dan wordt de tijd, dien het punt behoeft om daar te komen, uitgedrukt door

$$t = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\mu}{n-1} x^{-(2n-1)} + h}},$$

gevende in elk geval eene eindige waarde.

Nemen wij tot nadere toelichting het geval $n = 2$.

Hierdoor wordt

$$v^2 = \frac{2\mu}{x} + h.$$

Zij $h < 0$, dan is de afstand waarvoor de snelheid nul wordt

$$x_1 = -\frac{2\mu}{h}$$

en deze in de formule overgebracht zijnde, volgt

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

De tijdskromme wordt nu uitgedrukt door

$$t = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu}} \int_x^{x_0} \frac{x\,dx}{\sqrt{x_0 x - x^2}}$$

waarbij $t = 0$ voor $x = x_0$.

Dit geeft

$$t\sqrt{\frac{2\mu}{x_0}} = \sqrt{x_0 x - x^2} + \frac{x_0}{2}\, Bg.\ cos.\ \frac{2x - x_0}{x_0},$$

waaruit blijkt, dat de tijdskromme den vorm heeft van een boog der gewone cycloide met den grootsten afstand O A (fig. 9) als middellijn van den rollenden cirkel.

O B stelt voor den tijd

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x_0^3}{2\mu}},$$

dien het punt noodig heeft om het middelpunt te bereiken. Hier is de snelheid oneindig groot en blijft dit, zoodat het punt op dit tijdstip op oneindigen afstand verdwijnt. De tijdskromme zet zich derhalve van het punt B niet voort, hetgeen volkomen overeenstemt met het afbreken der integraal in het middelpunt. Eene voortzetting der tijdskromme zou bestaan uit de volgende bogen der cycloide, hetgeen zou overeenstemmen met eene periodieke beweging van het punt over den afstand O A. Zoo wel in O als in A zou het dan in zijne baan moeten terugkeeren. Zulk eene beweging is echter met de formulen in strijd, en kan in geen geval plaats hebben. Derhalve doet zich hier op nieuw het geval voor, dat van de tijdskromme als wiskundige lijn slechts een deel in aanmerking komt.

Voor $h = 0$, wordt

$$t = \int_x^{x_0} \sqrt{\frac{x}{2\mu}}\, dx$$

of

$$t\sqrt{2\mu} = \frac{2}{3}\left(x_0^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right),$$

wanneer $t = 0$ voor $x = x_0$ en de snelheid naar O is gericht. De tijdskromme is nu een tak der cubische parabool C P_0 Q, hebbende de as evenwijdig aan de as der beweging en den top op de loodrechte as op een afstand

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x_0^3}{2\mu}},$$

die den tijd voorstelt, welke het punt behoeft om van den initialen stand P_0 in het middelpunt te komen. Het stuk P_0 Q wordt tijdskromme, wanneer de snelheid in P_0 van het middelpunt af is gericht, waarbij het punt niet meer in zijne baan terugkeert, maar na een oneindig tijdsverloop op oneindigen afstand verdwijnt. De symmetrische tak C Q′ der cubische parabool kan evenmin als tijdskromme in aanmerking komen als de volgende bogen der cycloide. Het geval $h > 0$ voert tot gelijksoortige uitkomsten.

Stellen wij eindelijk in het algemeene geval $h = 0$, dan wordt

$$v^2 = \frac{2\mu}{2n-1} x^{-(2n-1)}$$

gevende

$$t = \sqrt{\frac{2n-1}{2\mu}} \int_X^{X_0} x^{\frac{2n-1}{2}} dx$$

of

$$t = \frac{2}{2n+1}\sqrt{\frac{2n-1}{2\mu}} \left(x_0^{\frac{2n+1}{2}} - x^{\frac{2n+1}{2}}\right).$$

De tijdskromme wordt dus eene parabool van hooger orde, die hare as evenwijdig aan de lijn der beweging heeft en den top op de as der tijden op een afstand

$$T = \frac{2}{2n+1}\sqrt{\frac{2n-1}{2\mu}}\, x_0^{\frac{2n+1}{2}},$$

die den tijd voorstelt, welke het punt behoeft om van den afstand x_0 in het middelpunt te komen. De vorm komt overeen met die van de cubische parabool in fig. 9. De kromme lijn heeft steeds een symmetrischen tak C Q′, die echter als tijdskromme niet in aanmerking kan komen.

IV. *Zij de versnelling uitgedrukt in den sinus van den afstand*, aldus

$$p = -\mu \sin \frac{x}{a}$$

hetgeen voldoet, omdat met elken afstand slechts ééne in grootte en teeken bepaalde versnelling overeenstemt. De versnellingskromme is eene sinussoïde (fig. 10), die door het middelpunt gaat. De versnelling is centripetaal met betrekking tot O voor de eerste rechts en links gelegen halve golf O A en O A′, voor de volgende bogen A B en A′ B′ centrifugaal, doch dan centripetaal met betrekking tot B of B′, zoodat telkens dezelfde toestand terugkeert, wanneer het middelpunt eene geheele golf wordt verplaatst.

De formule voor de snelheid is doorloopend

$$v^2 = 2\, a\, \mu \cos \frac{x}{a} + h,$$

waarin

$$h = v_0{}^2 - 2\, a\, \mu \cos \frac{x_0}{a},$$

zoodat deze standvastige grootheid negatief, nul en positief zijn kan.

Zij in de eerste plaats $h < 0$, daartoe moet $x_0 < \frac{a\pi}{2}$ en is de volstrekte waarde van $h < 2\, a\, \mu$. De snelheid wordt nul op een afstand O C, gegeven door

$$\cos \frac{x_1}{a} = \frac{-h}{2\, a\, \mu}$$

zoodat $x_1 < \frac{a\pi}{2}$. De afstand O D, waarvoor de versnelling een maximum is, wordt niet bereikt en het bewegend punt keert in zijne baan terug op een afstand O C $<$ O D. De formule voor de snelheid wordt nu

$$v^2 = 2\, a\, \mu \left(\cos \frac{x}{a} - \cos \frac{x_0}{a} \right)$$

zoodat de snelheidskromme is eene gesloten lijn C C′, bestaande uit vier symmetrische kwadranten. Het maximum der snelheid heeft plaats in het middelpunt en is

$$V^2 = 2\, a\, \mu \left(1 - \cos \frac{x_0}{a} \right).$$

De beweging is periodiek en symmetrisch voor het middelpunt; de amplitudo is C C′, de periode

$$T = 4 \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{2\,a\,\mu\left(\cos\frac{x}{a} - \cos\frac{x_0}{a}\right)}}$$

en de tijdskromme eene golflijn.

Zij in de tweede plaats $h = 0$, derhalve

$$v_0^2 = 2\,a\,\mu \cos\frac{x_0}{a},$$

dan wordt $v = 0$ voor $x = \frac{a\,\pi}{2}$. De omstandigheden der beweging zijn dezelfde als in het voorgaand geval, doch de amplitudo is D D′, dus begrensd door de punten waar het maximum van versnelling plaats heeft.

Zij in de derde plaats $h > 0$, dan wordt de snelheid nul op een afstand, bepaald door

$$\cos\frac{x_1}{a} = -\frac{h}{2\,a\,\mu}$$

hetgeen slechts mogelijk is wanneer $h < 2\,a\,\mu$. De omstandigheden zijn nog dezelfde als hiervoor, doch de amplitudo strekt zich uit tot de punten G en G′, ter wederzijde van O gelegen voorbij de punten voor het maximum der versnelling, en binnen de punten A en A′, waar de versnelling weer nul wordt.

Is $h = 2\,a\,\mu$, dan strekt de beweging zich uit tot het punt A, waar de versnelling tegelijk met de snelheid nul wordt. De formule voor den tijd geeft in dit geval

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\,x}{\sqrt{h\left(1 + \cos\frac{x}{a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\,h}} \int_{x_0}^{x} \frac{d\,x}{\cos\frac{x}{2\,a}} =$$

$$\frac{2\,a}{\sqrt{2\,h}}\, l.\, \frac{tg\,\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{x}{a}\right)}{tg\,\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{x_0}{a}\right)}.$$

Voor het punt A is $x = a\,\pi$; dit in de formule gesubstitueerd geeft $t = \infty$, dus is A een asymptotisch punt voor de beweging, die hare periodiciteit verliest. De tijdskromme heeft tot asymptoot de lijn, die in A loodrecht op de as der beweging wordt getrokken. Is de initiale snelheid gericht naar het middelpunt voor een positieven initialen afstand, dan verkrijgt de tijdskromme tot asymptoot de lijn, die in A′ loodrecht op de as wordt getrokken.

Is echter $h > 2a\mu$, dan kan de snelheid niet meer nul worden, maar behoudt voortdurend hetzelfde teeken. Het maximum der snelheid is

$$V = \sqrt{h + 2a\mu}$$

en heeft plaats voor

$$x = 0, \qquad 2a\pi, \qquad 4a\pi, \ldots\ldots 2na\pi.$$

Het minimum der snelheid is

$$V' = \sqrt{h - 2a\mu}$$

en geldt voor

$$x = a\pi, \qquad 3a\pi, \ldots\ldots (2n+1)a\pi.$$

Hierdoor wordt de snelheidskromme eene golflijn L M N met dezelfde amplitudo als de versnellingskromme, en de beweging is niet periodiek, maar strekt zich voortdurend uit in denzelfden zin hetzij aan de positieve, hetzij aan de negatieve zijde van het middelpunt. De tijdskromme verheft zich, uitgaande van de initiale plaats van het bewegend punt, boven de as en keert niet terug, zoodat tijd en afstand gelijktijdig oneindig groot worden.

V. Zij de versnelling uitgedrukt door de formule

$$p = -\mu \, tang \, \frac{x}{a},$$

zoodat de versnelling het tegenovergestelde teeken van den afstand heeft en dus centripetaal is, terwijl de versnellingskromme wordt voorgesteld door de tangentoide P O P′ (fig. 11), die hare asymptoten heeft op den afstand

$$O\,A = -O\,A' = \frac{a\pi}{2}.$$

De snelheid wordt gevonden uit

$$v^2 = -2\mu \int tang.\, \frac{x}{a}\, dx = 2a\mu\, l.\, cos\, \frac{x}{a} + h$$

waarin

$$h = v_0^2 - 2a\mu\, l.\, cos\, \frac{x_0}{a},$$

zoodat deze standvastige grootheid altijd eene positieve waarde heeft. De snelheid wordt nul op een afstand O B bepaald door

$$\cos \frac{x_1}{a} = e^{-\frac{h}{2 a \mu}}, \qquad x_1 < a$$

zoodat het bewegend punt steeds in zijne baan terugkeert vóór het den afstand O A heeft bereikt, waar de versnelling oneindig groot wordt. De snelheid verkrijgt haar maximum $V = \sqrt{h}$ in het middelpunt. De snelheidskromme V is eene gesloten lijn bestaande uit vier symmetrische kwadranten met de halve assen $O B = x_1$, en $V = \sqrt{h}$. De beweging is periodiek met de amplitudo B B′ en de tijdskromme is eene golflijn.

Zij vervolgens de versnelling centrifugaal onder dezelfde wet, dus

$$p = + \mu \operatorname{tang} \frac{x}{a},$$

zoodat de versnellingskromme wordt voorgesteld door Q O Q′.

Om de snelheid te bepalen moet worden gebruik gemaakt van de integraal

$$\int \operatorname{tang} \frac{x}{a}\, d x$$

waarin de functie oneindig groot wordt, wanneer de grenzen ter wederzijde van $\frac{a \pi}{2}$ genomen worden. Hiervóór was dit onderzoek niet noodig, omdat x de waarde niet kon bereiken, voor welke de functie oneindig groot wordt.

Passen wij weer het in § 1 gegeven kenmerk toe.

Hier is

$$f(x) = \operatorname{tang} \frac{x}{a}$$

$$a = x_1, \qquad b = x_2, \qquad c = \frac{a \pi}{2}; \qquad x_2 > \frac{a \pi}{2} > x_1.$$

$$\int_{x_1}^{\frac{a \pi}{2} - \varepsilon} tg \frac{x}{a}\, d x = - a\, l. \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{a}\right)}{\cos \frac{x_1}{a}}$$

$$\int_{\frac{a \pi}{2} + \delta}^{x_2} tg \frac{x}{a}\, d x = - a\, l. \frac{\cos \frac{x_2}{a}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{a}\right)}$$

Voor afnemende ε en δ nemen beide integralen toe tot oneindig groot, daarbij verschillend teeken behoudende, derhalve is de integraal

$$\int_{x_1}^{x_2} tang \frac{x}{a} d x$$

geheel *onbepaald* voor $x_2 > \frac{a \pi}{2} > x_1$.

De snelheid wordt nu

$$v^2 = 2 a \mu \, l. \sec \frac{x}{a} + h$$

geldende voor $x < \frac{a \pi}{2}$.

De standvastige grootheid h kan hier alle positieve en negatieve waarden bezitten. Doch in elk geval worden snelheid en versnelling oneindig groot voor $x = \frac{a \pi}{2}$. Voorbij die grens heeft de snelheid geene bepaalde waarde meer.

Stellen wij in de eerste plaats $h = 0$, dan wordt

$$v^2 = 2 a \mu \, l. \sec \frac{x}{a}$$

zoodat snelheid, versnelling en afstand gelijktijdig nul worden, en de snelheidskromme in vorm overeenkomt met den tak O Q.

De tijd volgt uit de formule

$$t = \frac{1}{\sqrt{2 a \mu}} \int_{x}^{x_1} \frac{d x}{\sqrt{l. \sec \frac{x}{a}}}.$$

Door ontwikkeling in eene reeks is gemakkelijk na te gaan, dat voor $x = 0$, $t = \infty$ is.

Is dus de initiale snelheid gericht naar het middelpunt, dan is dit een asymptotisch punt der beweging en de tijdskromme heeft de ordinaten-as tot asymptoot.

Is $h < 0$, derhalve $v_0^2 < 2 a \mu \, l. \sec \frac{x_0}{a}$, dan zal $v = 0$ worden op een afstand O P_0, volgende uit

$$\sec \frac{x_1}{a} = e^{\left(-\frac{h}{2 a \mu}\right)}.$$

In dit punt P_0 zal het bewegend punt, dat tot het middelpunt naderde, in zijne baan terugkeeren en zich met toenemende snelheid verwijderen tot op den afstand $\frac{a\,\pi}{2}$, waar snelheid en versnelling oneindig groot worden, en de onbepaaldheid der integralen op den voorgrond treedt. De snelheidskromme heeft den vorm $P_0 V'$. Voor $h > 0$ kan de snelheid niet meer nul worden, maar behoudt voortdurend hetzelfde teeken. Het bewegend punt zal naderen tot het middelpunt, dit punt voorbijgaan met eene minima snelheid $\sqrt{h}$, en zich met toenemende snelheid weer verwijderen tot aan de andere zijde op den afstand $O\,A' = \frac{a\,\pi}{2}$ snelheid en versnelling oneindig groot worden. Hierdoor verkrijgt de snelheidskromme den vorm $R\,C\,R'$.

§ 3.

Kromlijnige beweging.

Zij de versnelling centraal, — waarbij naar gewoonte het middelpunt tot pool van het coördinatenstelsel in het vlak der beweging is genomen, — en uitgedrukt door de wet:

$$p = f(r) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Stelt men weer

$$\int f(r)\,d\,r = \mathrm{F}(r) \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

dan wordt de snelheid gegeven door de vergelijking

$$v^2 = 2\,\mathrm{F}(r) + h \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

waarin de standvastige grootheid is

$$h = v_0^2 - 2\,\mathrm{F}(r_0) \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

uitgedrukt in de initiale gegevens.

Zij ϑ de anomalie in het coördinatenstelsel, dan is

$$v^2 = \left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2 = \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\,\vartheta}{d\,t}\right)^2 \ldots \quad 5)$$

Het beginsel der sectoren levert nog de vergelijking

$$r^2\,\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = c \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

waarin de standvastige grootheid voorstelt de waarde

$$c = v\,r\,sin\,\alpha = v_0\,r_0\,sin\,\alpha_0 = v\,l = v_0\,l_0. \quad \ldots \quad 7)$$

Hierin is α de hoek tusschen de raaklijn en den voerstraal, l de loodlijn, die uit het middelpunt op de raaklijn wordt neergelaten. De snelheid is dus omgekeerd evenredig aan deze loodlijn, zoodat zij slechts nul kan worden op oneindig grooten afstand, en oneindig groot wordt in het middelpunt. Heeft echter de baan eene asymptoot, waarvan de afstand tot het middelpunt is l', dan zal volgens 7) de snelheid in den asymptotischen tak tot limiet hebben

$$v' = \frac{c}{l'}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Gaat de asymptoot door het middelpunt van versnelling, dan is de snelheid in den asymptotischen tak oneindig groot.

Wordt de snelheid volgens 3) niet oneindig groot voor $r = 0$, dan kan de baan ook niet door het middelpunt gaan.

Is in eenig punt $v = 0$ of $\alpha = 0$, dan is ook $c = 0$ en de baan wordt door het samenvallen van de richting der snelheid en der versnelling rechtlijnig; voor kromlijnige banen kan bij eindigen afstand en snelheid de hoek α nooit nul worden.

Negatieve voerstralen kunnen in geen geval worden toegelaten. Want voor den overgang van positief tot negatief moet de voerstraal door nul gaan, gevende eene oneindig groote snelheid. Voor alle banen, die niet door het middelpunt gaan, behoudt de voerstraal voortdurend hetzelfde teeken; en de banen, die wel door het middelpunt gaan, geven in dit punt $r = 0$ en $v = \infty$; dus ook $F(r) = \infty$. Deze waarden echter maken de integraal onder 2), zooals in de vorige paragraaf is aangetoond, geheel onbepaald, zoodat de formulen bij het samenvallen van het bewegend punt met het middelpunt ophouden te bestaan.

Verder volgt uit 7) in verband met 3)

$$sin^2 \alpha = \frac{c^2}{v^2 r^2} = \frac{c^2}{r^2 \{2 F(r) + h\}} \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

door welke formule de hoek α kan berekend worden uit den voerstraal onafhankelijk van de vergelijking der baan. Hij wordt recht voor afstanden, die voldoen aan de vergelijking

$$r^2 \{2 F(r) + h\} = c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

Kan hieraan door geene positieve waarden van r voldaan worden, dan zal ook in geen punt der baan de snelheid loodrecht staan op den voerstraal.

Zij r' een wortel der vergelijking, v' de overeenkomstige snelheid, dan bestaat de eenvoudige betrekking

$$v' r' = c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

De vergelijkingen voor den vorm der baan en de beweging in de baan volgen door eliminatie uit 3), 5) en 6).

Door eliminatie van dt verkrijgt men

$$c^2 \left(\frac{d r^2}{r^4 \, d\vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\right) = 2 F(r) + h \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

en door eliminatie van $d\vartheta$,

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = 2 F(r) + h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

Beide formulen zijn terstond tot eene kwadratuur te herleiden. De eerste geeft ϑ uitgedrukt in r, dat is de poolvergelijking der baan; de tweede t uitgedrukt in r en bepaalt derhalve de beweging in de baan.

Schrijft men 12) aldus

$$\frac{c^2\, d\, r^2}{r^2\, d\, \vartheta^2} = r^2 \{ 2\, \mathrm{F}(r) + h \} - c^2,$$

dan blijkt, dat de positieve wortels der verg. 10) maxima of minima zijn voor de voerstralen der baan; de maxima en minima-voerstralen zijn in het algemeen tevens assen van symmetrie, omdat in hunne uiteinden de snelheid loodrecht op den voerstraal is gericht. Gevallen van uitzondering zullen later voor den dag komen.

Uit verg. 10) volgt voor de punten, waar de snelheid loodrecht is gericht op den voerstraal

$$2\, \mathrm{F}(r') + h = \frac{c^2}{r'^2}.$$

Moet deze eigenschap voor elk punt der baan gelden, zoodat zij een cirkel om de pool als middelpunt wordt, dan kan de verg. gedifferentieerd worden voor r' en geeft

$$2 f(r') = -2\frac{c^2}{r'^3}$$

of, volgens 11)

$$f(r') = -\frac{v'^2}{r'}. \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

Derhalve moet de versnelling centripetaal zijn, en in eenig punt der baan het vierkant der snelheid gelijk aan het produkt van afstand en versnelling, onafhankelijk van de wet der versnelling. Met andere woorden, wanneer in eenig punt der baan de snelheid loodrecht gericht op den voerstraal zoo groot is, dat de overeenkomstige normale versnelling gelijk is aan de versnelling naar het middelpunt, dan heeft dit in elk punt plaats, en is de beweging eenparig cirkelvormig om het middelpunt. Onafhankelijk van de bovenstaande berekening kan deze eigenschap uit de eerste elementen der cinematica afgeleid worden [1]).

---

[1]) In het *Onderz. eener bijz. omst. der centr. bew.* bladz. 56 wordt dezelfde eigenschap aangehaald, doch de uitdrukking is door het wegvallen van een paar woorden minder juist geworden. Daar staat toch „voor het bijzonder geval dat de

Elke baan bij centripetale versnelling zal derhalve als bijzonder geval den cirkel bevatten. Bij centrifugale versnelling is het niet mogelijk. Aannemende, dat de versnelling voor alle afstanden hetzelfde teeken behoudt, zoodat de banen op eindigen afstand geene buig- of keerpunten kunnen bezitten, zullen wij nu de verschillende gevallen nagaan; waarbij wij ons tot wetten van versnelling uitgedrukt in eenvoudige algebraïsche formulen zullen bepalen.

1ste GEVAL.

$$p = + \mu r^n, \qquad n > 1;$$

de versnelling is centrifugaal, toenemend met den afstand.

De formule voor de snelheid wordt

$$v^2 = \frac{2\mu}{n+1} r^{n+1} + h,$$

zoodat versnelling, snelheid en afstand gelijktijdig oneindig groot worden. De standvastige grootheid

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{n+1} r_0^{n+1}$$

kan positieve en negatieve waarden verkrijgen.

De formule 10) geeft nu

$$\frac{2\mu}{n+1} r^{n+3} + h r^2 - c^2 = 0,$$

welke vergelijking voor elke waarde van h slechts één positieven wortel r_1 oplevert, voor welken de raaklijn loodrecht staat op den voerstraal.

De differentiaal-vergelijking der baan wordt

$$\frac{d r^2}{d \vartheta^2} = \frac{r^2}{c^2} \left(- c^2 + h r^2 + \frac{2\mu}{n+1} r^{n+3} \right),$$

waaruit blijkt, dat $r_1 = \mathrm{O\,A}$ (fig. 12) een minimum is, van waar aan beide zijden de baan zich tot in het oneindige uitstrekt, terwijl de lijn gaande door O en A as der figuur is.

---

initiale snelheid *in deze onderstelling* loodrecht is gericht op den voerstraal" enz., waarvoor gelezen moet worden „*in de onderstelling* $v_0^2 = \frac{\mu}{r_0^{n-1}}$."

Daar de snelheid tegelijk met den afstand oneindig groot wordt heeft de baan twee asymptoten O R en O R′ gaande door het middelpunt, en makende gelijke hoeken met de as.

De hoek tusschen asymptoot en as wordt bepaald door de integraal

$$\vartheta_1 = c \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\,r}{r \sqrt{-c^2 + h r^2 + \frac{2\mu}{n+1} r^{n+3}}},$$

die eene eindige waarde heeft.

Daar negatieve voerstralen niet bestaan, is de baan ingesloten door de beenen der hoeken $+\vartheta_1$ en $-\vartheta_1$.

De tijd wordt uitgedrukt door de formule

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(-c^2 + h r^2 + \frac{2\mu}{n+1} r^{n+3}\right).$$

De tijd, waarin het bewegend punt van het punt A uitgaande op een der beide takken in het oneindige verdwijnt, is in het algemeen eindig, en wordt uitgedrukt door de bepaalde integraal

$$t = \int_{r_1}^{\infty} \frac{r\,d\,r}{\sqrt{-c^2 + h r^2 + \frac{2\mu}{n+1} r^{n+3}}}.$$

Nemen wij als voorbeeld en tot nadere toelichting het bijzonder geval $n = 1$, dan is

$$v^2 = \mu r^2 + h,$$

en

$$\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 = \frac{r^2}{c^2}\left(-c^2 + h r^2 + \mu r^4\right)$$

$$= \frac{\mu r^2}{c^2}(r^2 - r_1^2)(r^2 + r_2^2),$$

waarin r_1 is de positieve wortel der verg:

$$\mu r^4 + h r^2 - c^2 = 0,$$

en is gesteld

$$r_2^2 = \frac{c^2}{\mu r_1^2}.$$

Hieruit volgt

$$\vartheta = \frac{c}{\sqrt{\mu}} \int_{r_1}^{r} \frac{d\,r}{r\sqrt{(r^2 - r_1^2)(r^2 + r_2^2)}},$$

gevende na eenige herleiding:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{r_1{}^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{r_2{}^2},$$

waaruit blijkt, dat de baan is eene hyperbool met de pool tot middelpunt.

De tijd volgt uit de integraal

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{r_1}^{r} \frac{r\,d\,r}{\sqrt{(r^2 - r_1{}^2)(r^2 + r_2{}^2)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\, l.\, \frac{\sqrt{r^2 + r_2{}^2} + \sqrt{r^2 - r_1{}^2}}{\sqrt{r^2 + r_2{}^2} - \sqrt{r^2 - r_1{}^2}},$$

gevende $t = \infty$ voor $r = \infty$, zoodat in dit geval bij uitzondering het punt eerst na een *oneindig* tijdsverloop op oneindigen afstand verdwijnt.

2de GEVAL.

$$p = -\mu\, r^n, \qquad n > 1\,;$$

de versnelling in centripetaal, toenemend met den afstand.

De formule voor de snelheid wordt

$$v^2 = -\frac{2\mu}{n+1}\, r^{\,n+1} + h,$$

waarin

$$h = v_0{}^2 + \frac{2\mu}{n+1}\, r_0{}^{n+1}$$

altijd positief is. Afstand, snelheid en versnelling kunnen hier niet oneindig groot worden.

Verg. 10) geeft voor de voerstralen, die loodrecht staan op de overeenkomstige raaklijnen

$$\frac{2\mu}{n+1}\, r^{\,n+3} - h\, r^2 + c^2 = 0 \qquad \text{15)}$$

Deze vergelijking heeft twee positieve wortels. Want voor $r = 0$ is het eerste lid positief, voor $r = r_0$ negatief en voor $r = \infty$ weer positief. Daar het eerste lid slechts twee variatiën oplevert, kunnen er ook niet meer dan twee positieve wortels zijn. Noemen wij de wortels r_1 en r_2, waarbij $r_1 > r_0 > r_2$.

De differentiaal-vergelijking der baan wordt volgens 12)

$$\frac{d\,r^2}{d\,\vartheta^2} = -\frac{r^2}{c^2}\left(\frac{2\mu}{n+1}\, r^{\,n+3} - h\, r^2 + c^2\right),$$

waaruit blijkt dat slechts die waarden van r kunnen voldoen, welke tusschen r_1 en r_2 zijn gelegen. Een dezer beide wortels geeft een maximum, de ander een minimum van r. Beschrijft men derhalve cirkels om de pool als middelpunt met de stralen r_1 en r_2, dan zal de baan tusschen deze cirkels gelegen zijn en beiden aanraken.

De hoek tusschen een maximum- en een minimum-voerstraal is volgens de laatste formule

$$\vartheta_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{c\,d\,r}{r\sqrt{-\left(\frac{2\mu}{n+1}\,r^{n+3} - h\,r^2 + c^2\right)}},$$

welke waarde eindig is en slechts afhangt van de standvastige grootheden.

De formule voor den tijd wordt:

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{2\mu}{n+1}\,r^{n+3} - h\,r^2 + c^2\right),$$

gevende

$$d\,t = \frac{r\,d\,r}{\sqrt{-\left(\frac{2\mu}{n+1}\,r^{n+3} - h\,r^2 + c^2\right)}},$$

waaruit volgt voor den tijd, dien het punt behoeft om van een maximum-voerstraal tot een minimum te komen

$$t = \int_{r_2}^{r_1} \frac{r\,d\,r}{\sqrt{-\left(\frac{2\mu}{n+1}\,r^{n+3} - h\,r^2 + c^2\right)}}.$$

Deze waarde hangt alleen af van de standvastige grootheden, dus heeft het punt steeds evenveel tijd noodig om van den grootsten tot den kleinsten, en dan weer van den kleinsten tot den grootsten afstand te geraken. De beweging is derhalve periodiek en noemt men den tijd, dien het punt noodig heeft om van een maximum afstand tot een volgend maximum te komen, de periode, dan wordt deze voorgesteld door

$$T = 2\int_{r_2}^{r_1} \frac{r\,d\,r}{\sqrt{-\left(\frac{2\mu}{n+1}\,r^{n+3} - h\,r^2 + c^2\right)}}.$$

In fig. 13 is de beweging voorgesteld. Met de stralen O A en O B zijn de beide cirkels beschreven. Stellen wij, dat het punt uitgaat van den grootsten voerstraal O A_1 en zij $\angle A_1 O B_1 = \vartheta_1$, dan zal de baan in B_1 den kleinsten cirkel aanraken en daarna in A_2 den grootsten, indien $\angle B_1 O A_2 = \vartheta_1$. Evenzoo gaat de baan van A_2 over B_2 naar A_3, van A_3 over B_3 naar A_4 enz., terwijl telkens de hoek uit O tusschen den kleinsten en grootsten voerstraal gelijk is aan ϑ_1. De tijd, dien het punt gebruikt om van A_1 in A_2, van A_2 in A_3, enz. te komen is T, en wordt door het tijdstip, waarop het punt in B_1, B_2, ... is, midden door gedeeld.

Is ϑ_1 een meetbaar deel van 180°, dan zal het bewegend punt na eenige schommelingen weer in A_1 uitkomen en daarna dezelfde banen beschrijven. Is ϑ_1 niet deelbaar op, maar wel meetbaar met betrekking tot 180° dan zal na eenige cirkelomgangen het punt in dezelfde baan terugkeeren. Is eindelijk ϑ niet meetbaar met 180°, dan zal het punt voortdurend andere bogen beschrijven, en nooit tot hetzelfde punt terugkeeren.

Daar de baan voortdurend hare holle zijde naar het middelpunt moet keeren, zal altijd de koorde $A_1 A_2$, die in den grooten cirkel twee uiterste punten vereenigt, den kleinen cirkel snijden.

Wanneer de waarden van r_1 en r_2 onderling gelijk worden, zullen de beide cirkels en dus ook de baan, die tusschen beiden is begrepen samenvallen. De voorwaarde tot het gelijk worden der positieve wortels in de verg. 15), is

$$\frac{n+3}{n+1} \mu r^{n+1} = h,$$

gevende

$$\mu r^{n+3} = c^2,$$

of

$$\mu r^n = \frac{v^2}{r},$$

hetgeen geheel overeenstemt met de verg. 14), die de algemeene voorwaarde uitdrukt, waaronder elke baan bij centripetale versnelling in een cirkel overgaat.

Nemen wij tot toelichting het bijzonder geval $n = 1$, dan wordt

$$v^2 = -\mu r^2 + h.$$

De vergelijking 15) voor de maxima en minima van den voerstraal is nu

$$\mu r^4 - h r^2 + c^2 = 0,$$

gevende twee positieve wortels r_1 en r_2 zoodanig dat

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{h}{\mu}, \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{\sqrt{\mu}}.$$

De vergelijking der baan wordt

$$\frac{d\,r^2}{d\vartheta^2} = -\frac{r^2}{c^2}(\mu r^4 - h r^2 + c^2) =$$

$$= -\frac{r^2}{r_1^2 r_2^2}(r_1^2 - r^2)(r^2 - r_2^2) \quad \ldots \quad r_1 > r_2.$$

Hieruit volgt

$$d\vartheta = \frac{r_1 r_2\, d r}{r\sqrt{(r_1^2 - r^2)(r^2 - r_2^2)}},$$

gevende, wanneer $\vartheta = 0$ voor $r = r_1$ wordt genomen:

$$\vartheta = Bg.\,tang\, \frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{r_1^2 - r^2}{r^2 - r_2^2}},$$

derhalve $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ voor $r = r_1$, zoodat de maxima- en minima-voerstralen loodrecht op elkander staan. Verder is

$$\frac{1}{r^2} = \frac{cos^2\,\vartheta}{r_1^2} + \frac{sin^2\,\vartheta}{r_2^2},$$

waaruit blijkt, dat de baan is eene ellips met de pool tot middelpunt en r_1 en r_2 tot halve assen.

De formule voor den tijd geeft

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_{r}^{r_1} \frac{r\,d r}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)(r^2 - r_2^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, Bg.\,tang \sqrt{\frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 - r_2^2}},$$

of

$$r^2 = r_1^2\, cos^2\, t\sqrt{\mu} + r_2^2\, sin^2\, t\sqrt{\mu}.$$

De periode is

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

zijnde onafhankelijk van de initiale omstandigheden. Zoo komt men terug op de overigens wel bekende eigenschappen der harmonische beweging, die een bijzonder geval uitmaken van de bovenstaande meer algemeene beschouwing. Dit bijzonder geval is het eenige, waarbij de formulen rechtstreeks kunnen geintegreerd worden. In zoover is het ook het eenvoudigst, dat het bewegend punt na eene dubbele periode in dezelfde baan terugkeert, en de maxima- en minima-voerstralen loodrecht op elkander staan.

3^de^ GEVAL.

$$p = + \frac{\mu}{r^n}, \qquad n > 1;$$

de versnelling is centrifugaal, afnemend met toenemenden afstand.

Hier is

$$v^2 = - \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + h,$$

en

$$h = v_0^2 + \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r_0^{n-1}},$$

zoodat h altijd eene *positieve* waarde heeft. De snelheid neemt toe bij toenemenden afstand tot de limiet $V = \sqrt{h}$ voor $r = \infty$.

De verg. 10) voor de voerstralen loodrecht op de overeenkomstige raaklijn wordt:

$$h\, r^{n-1} - c^2 r^{n-3} - \frac{2\mu}{n-1} = 0,$$

gevende in elk geval één en ook niet meer dan een positieven wortel r_1. Deze waarde is een minimum; zoodat de cirkel met r_1 als straal om het middelpunt beschreven door de baan uitwendig wordt aangeraakt.

De hoek tusschen raaklijn en voerstraal wordt uitgedrukt door de formule

$$\sin^2 \alpha = \frac{c^2}{r^2 \left(h - \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} \right)}$$

zoodat hij afneemt bij toenemenden afstand en tot nul nadert voor $r = \infty$. De baan heeft eene asymptoot, waarvan volgens 8) de afstand tot het middelpunt is

$$l = \frac{c}{\sqrt{h}} = \frac{c}{V}.$$

Daar de loodlijn uit het middelpunt op de raaklijn neergelaten omgekeerd evenredig is aan de snelheid, zal l de kleinste loodlijn voorstellen en dus kleiner zijn dan r_1. Beschrijft men met l als straal om O een cirkel, dan zal de asymptoot raaklijn zijn tot dezen cirkel, en aan dezelfde zijde van het middelpunt liggen als de baan. Wegens de symmetrie der baan ten opzichte van den minimumvoerstraal O A zullen er twee symmetrische asymptoten zijn.

De differentiaal-vergelijking der baan wordt:

$$\frac{c^2}{r^4}\,\frac{d\,r^2}{d\,\vartheta^2} = -\frac{c^2}{r^2} - \frac{2\,\mu}{n-1}\,\frac{1}{r^{n-1}} + h,$$

of stellende $\frac{1}{r} = r'$

$$c^2\left(\frac{d\,r'}{d\,\vartheta}\right)^2 = -\,c^2\,r'^2 - \frac{2\,\mu}{n-1}\,r'^{n-1} + h\,;$$

gevende

$$d\,\vartheta = \frac{c\,d\,r'}{\sqrt{-\,c^2\,r'^2 - \frac{2\,\mu}{n-1}\,r'^{n-1} + h}}.$$

Voor den hoek, die de asymptoten met de as maken, volgt hieruit

$$\vartheta_1 = \int_0^{r_1'} \frac{c\,d\,r'}{\sqrt{-\,c^2\,r'^2 - \frac{2\,\mu}{n-1}\,r'^{n-1} + h}}$$

waarbij $r_1' = \frac{1}{r_1}$. De integraal heeft klaarblijkelijk eene eindige bepaalde waarde, waardoor de stand der asymptoten geheel is bepaald.

De formule voor den tijd wordt

$$t = \int_{r'}^{r_1'} \frac{d\,r'}{r'^2\sqrt{-\,c^2\,r'^2 - \frac{2\,\mu}{n-1}\,r'^{n-1} + h}}\,;$$

de waarde van de integraal wordt oneindig groot voor $r' = 0$, dat is voor $r = \infty$. De limiet der beweging in elk der takken is derhalve de eenparig rechtlijnige met de eindsnelheid V en de richting der asymptoot.

Fig. 14 geeft een denkbeeld van de baan. O A is de minimum afstand r_1; de asymptoten L Q en L′ Q′ zijn raaklijnen tot den cirkel met den straal $\mathrm{O\,L} = l$ beschreven, en snijden de as in N. De hoeken O N L en O N L′ worden uitgedrukt door de waarde van ϑ_1.

De banen in het eerste en derde geval hebben groote overeenkomst in vorm. Doch ook het onderscheid is niet gering, zooals blijkt bij het vergelijken der figuren 12 en 14. De asymptoten in de eerste gaan door het middelpunt, in de tweede zijn zij op bepaalden afstand daarvan gelegen.

In het eerste geval verdwijnt het punt na eindigen tijd met oneindige snelheid en versnelling op oneindigen afstand; in het derde heeft de beweging eene bepaalde limiet met eindige snelheid en verdwijnende versnelling.

Beschouwen wij nog tot opheldering het bijzonder geval $n = 2$. Dan wordt

$$v^2 = -\frac{2\mu}{r} + h,$$

en

$$h = V^2 = v_0{}^2 + \frac{2\mu}{r_0}.$$

De straal van den cirkel rakende de asymptoten is

$$l = \frac{c}{\sqrt{v_0{}^2 + \frac{2\mu}{r_0}}} = \frac{c}{V}.$$

De minimum-afstand is de positieve wortel der vergelijking

$$h r^2 - 2\mu r - c^2 = 0.$$

De vergelijking der baan wordt

$$d\vartheta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{h r^2 - 2\mu r - c^2}};$$

gevende, wanneer $\vartheta = 0$ voor $r = r_1$ wordt genomen,

$$\vartheta = Bg.\cos \frac{\mu r + c^2}{r\sqrt{\mu^2 + h c^2}},$$

of

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{h c^2}{\mu^2}}\cos\vartheta - 1};$$

zijnde de vergelijking van een tak der hyperbool met het verwijderd brandpunt tot pool. De halve parameter is $\frac{c^2}{\mu}$, de excentriciteit $\sqrt{1 + \frac{h c^2}{\mu^2}}$. De kleinste afstand is

$$r_1 = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{h c^2}{\mu^2}} - 1},$$

en de hoek, die de asymptoten met de as vormen:

$$\cos\vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h\,c^2}{\mu^2}}}, \quad \text{of} \quad tg\,\vartheta_1 = \frac{c\sqrt{h}}{\mu}.$$

Hieruit volgt voor de bestaanbare as

$$2\,a = \frac{2\,\mu}{h},$$

en voor de onbestaanbare

$$2\,b = \frac{2\,c}{\sqrt{h}};$$

hetgeen met elders verkregen uitkomsten geheel overeenstemt.

4de GEVAL.

$$p = -\frac{\mu}{r^n}, \qquad n > 1;$$

de versnelling is centripetaal, afnemend met toenemenden afstand.

De snelheid wordt uitgedrukt door

$$v^2 = \frac{2\,\mu}{n-1}\,\frac{1}{r^{n-1}} + h,$$

waarin

$$h = v_0^2 - \frac{2\,\mu}{n-1}\,\frac{1}{r_0^{n-1}},$$

zoodat deze standvastige grootheid zoowel negatief, nul, als positief zijn kan. De bijzondere gevallen $n = 2$ en $n = 3$ zijn uitvoerig behandeld in het „onderzoek eener bijzond. omst. der centr. beweg." zoodat wij ons hier kunnen bepalen tot de waarde $n > 3$. Evenzoo is daar beschouwd het geval, dat de standvastige grootheid $h = 0$ is, waarbij de formule voor de baan voor rechtstreeksche integratie vatbaar is. Verwijzende naar die beschouwingen, zullen wij hier dit geval uitsluiten, en aannemen $h \gtrless 0$.

Nog kan worden opgemerkt, dat alle banen overgaan in een cirkel met de pool tot middelpunt, wanneer de initiale snelheid loodrecht is gericht op den initialen voerstraal en daarbij volgens 14) voldoet aan de betrekking

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{\mu}{r_0^n},$$

of

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0^{n-1}}.$$

Zij nu

1°. $h < 0$ en stellen daartoe $h = -a^2$; dan wordt

$$v^2 = \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} - a^2,$$

$$a^2 = \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r_0^{n-1}} - v_0^2.$$

De verg. 10) voor de voerstralen loodrecht op de overeenkomstige raaklijnen geeft,

$$a^2 r^{n-1} + c^2 r^{n-3} - \frac{2\mu}{n-1} = 0.$$

Deze vergelijking heeft één en ook niet meer dan één positieven wortel r_1. Schrijven wij nu voor de laatste vergelijking

$$a^2 (r - r_1) \mathrm{R} = 0,$$

dan is R eene functie van r van de macht $n - 2$, die voor geene positieve waarde van r nul of negatief kan worden.

De differentiaal-vergelijking der baan is:

$$\frac{c^2}{r^4} \frac{d r^2}{d\vartheta^2} = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} - a^2,$$

of

$$\frac{c^2}{d\vartheta^2} \frac{dr^2}{} = a^2 \frac{(r_1 - r)\,\mathrm{R}}{r^{n-5}}.$$

Hieruit blijkt, dat r_1 is een maximum voor den voerstraal, overeenkomende met een minimum voor de snelheid. Tevens is de maximum-voerstraal eene as van symmetrie.

Neemt men de maximum-voerstraal tot poolas, dan wordt

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_r^{r_1} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d r}{\sqrt{(r_1 - r)\,\mathrm{R}}}.$$

Bij toenemende waarde van ϑ neemt r af, tot $r = 0$ wordt voor

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a} \int_0^{r_1} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d r}{\sqrt{(r_1 - r)\,\mathrm{R}}}$$

waarin, lettende op de beteekenis van R en in acht nemende dat $n > 3$, de integraal eene eindige waarde heeft. De baan bestaat derhalve (fig. 15) uit eene gesloten figuur, die in twee symmetrische takken van den maximum afstand A uitgaande in O samenkomen, zoodanig, dat de hoeken A O R en A O R′ tusschen as en de raaklijnen in O gelijk zijn aan de boven berekende waarde ϑ_1.

Zij P de initiale stand van het bewegend punt; maakt nu de initiale snelheid een scherpen hoek Q P O met den voerstraal, dan begeeft het punt zich volgens het kleinste gedeelte der baan P O naar het middelpunt; is echter die snelheid gericht volgens P Q′ en maakt dus een stompen hoek met den voerstraal, dan passeert het bewegend punt eerst den maximum-afstand A, waar de snelheid het kleinst is en begeeft zich daarna met toenemende snelheid volgens den geheelen tweeden tak naar het middelpunt.

De tijd der beweging volgt uit de formule

$$dt = \frac{1}{a} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, dr}{\sqrt{(r - r_1)\, R}},$$

zoodat de tijd, die het punt behoeft om van het punt van grootsten afstand A in het middelpunt te komen, is

$$T = \frac{1}{a} \int_0^{r_1} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, dr}{\sqrt{(r - r_1)\, R}},$$

en deze integraal heeft ook eene eindige waarde, zoodat het bewegend punt in elk geval na een eindig tijdsverloop in bepaalde richting, met oneindig groote snelheid en versnelling in het middelpunt aankomt.

2°. $h > 0$, zoodat gesteld kan worden $h = + a^2$, gevende

$$v^2 = \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + a^2,$$

$$a^2 = v_0^2 - \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r_0^{n-1}},$$

waarbij

$$v_0^2 > \frac{2\mu}{n-1} \frac{1}{r_0^{n-1}}.$$

De verg. 10) geeft nu

$$a^2 r^{n-1} - c^2 r^{n-3} + \frac{2\mu}{n-1} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16)$$

welke vergelijking òf twee, òf in het geheel geene positieve wortels

heeft. Hierdoor moeten weder drie gevallen onderscheiden worden:
a) de verg. 16) heeft twee positieve, onderling gelijke wortels;
b) de verg. 16) heeft twee positieve ongelijke wortels;
c) de verg. 16) heeft geene positieve wortels.

Deze drie gevallen zullen nu afzonderlijk onderzocht worden.

a. Opdat verg. 16) twee *gelijke* positieve wortels hebben zal, moet zij een wortel gemeen hebben met hare afgeleide vergelijking

$$(n-1)\, a^2\, r^{n-2} - (n-3)\, c^2\, r^{n-4} = 0.$$

Daar $r = 0$ de waarde van de gelijke wortels niet zijn kan, volgt hieruit

$$r^2 = \frac{n-3}{n-1}\,\frac{c^2}{a^2},$$

en door substitutie in 16)

$$r^{n-3} = \frac{\mu}{c^2};$$

de voorwaarde voor het gelijk zijn der wortels is derhalve

$$\left(\frac{\mu}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{n-3}{n-1}\,\frac{c^2}{a^2}\right)^{n-3}$$

of

$$c^{n-1} = \mu \left(\frac{n-1}{n-3}\, a^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

waaruit de mogelijkheid van het bijzonder geval blijkt.

Staat de initiale snelheid loodrecht op den initialen voerstraal, dan is $c = v_0 r_0$, gevende door substitutie in 17) $v_0{}^2 = \frac{\mu}{r_0{}^{n-1}}$, zijnde juist de voorwaarde, waaronder de baan in een cirkel om de pool als middelpunt overgaat. Derhalve onderstellen wij, dat de initiale snelheid een schuinen hoek met den initialen voerstraal maakt.

Voor verg. 16) kan nu geschreven worden.

$$a^2 (r - r_1)^2\, \mathrm{R} = 0,$$

waarin r_1 de waarde van de twee gelijke wortels, R eene algebraïsche uitdrukking in r van de macht $n - 3$ voorstelt, die voor geene positieve waarde van r negatief of nul kan worden.

Is $r_0 < r_1$, dan zal r_1 een maximum van den voerstraal voorstellen, zoodat de baan is gelegen binnen den cirkel met deze lijn als straal om de pool als middelpunt beschreven. De differentiaal verg. der baan wordt

$$\frac{c^2\, d\, r^2}{d\, \vartheta^2} = \frac{a^2\,(r_1 - r)^2\, \mathrm{R}}{r^{n-5}};$$

gevende

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}_0} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{(r_1 - r)\sqrt{\mathrm{R}}}.$$

Zij R′ eene middenwaarde van $\sqrt{\mathrm{R}}$ voor de grenzen van de integraal, dan is

$$\vartheta = \frac{c}{a\,\mathrm{R}'} \int_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}_0} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{r_1 - r},$$

en daar de integraal eene eindige waarde verkrijgt voor $r = 0$, zal de baan door het middelpunt gaan en hier de raaklijn een bepaalden eindigen hoek met den voerstraal maken. Neemt men deze raaklijn tot poolas, dan wordt de vergelijking der baan:

$$\vartheta = \frac{c}{a\,\mathrm{R}'} \int_{0}^{\mathrm{r}} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{r_1 - r},$$

waarin nu ϑ en r gelijktijdig toenemen. De integraal wordt met r grooter tot voor $r = r_1$, $\vartheta = \infty$. De baan is derhalve eene spiraal, die van het middelpunt uitgaande in oneindig vele windingen nadert tot den cirkel met den straal r_1, zonder dien te bereiken. Deze cirkel vervult hier de rol van asymptoot.

De formule voor den tijd der beweging is:

$$d\, t = \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, d\, r}{a\,(r_1 - r)\sqrt{\mathrm{R}}},$$

gevende, wanneer het bewegend punt tot de pool nadert

$$t = \frac{1}{a} \int_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}_0} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, d\, r}{(r_1 - r)\sqrt{\mathrm{R}}},$$

welke formule eene eindige waarde oplevert voor $r = 0$, zoodat het punt in eindigen tijd in het middelpunt aankomt.

Verwijdert het punt zich van de pool, dan is

$$t = \frac{1}{a\,\mathrm{R}'} \int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, d\,r}{r_1 - r},$$

gevende $t = \infty$ voor $r = r_1$. De cirkel is dus werkelijk asymptoot der beweging.

Fig. 16 geeft een denkbeeld van de baan. De straal O R van den asymptotischen cirkel is r_1. Zij P de initiale stand van het bewegend punt; is dan de snelheid gericht volgens P Q, zoodat zij een scherpen hoek maakt met den voerstraal P O, dan zal het punt het gedeelte der spiraal beschrijven, dat in het middelpunt O eindigt. Is de snelheid gericht volgens P Q′, zoodat $\angle$O P Q′ stomp is, dan verwijdert het punt zich van O en beschrijft het oneindig lange deel der spiraal, dat den cirkel tot asymptoot heeft, steeds naderende tot den cirkel zonder hem ooit te bereiken. Dus is de limiet der beweging de eenparige cirkelvormige met de eindsnelheid $\mathrm{V} = \frac{c}{r_1}$. Nergens staat de raaklijn loodrecht op den voerstraal, slechts bij den asymptotischen cirkel is dit het geval. Daarom is het duidelijk dat deze cirkel werkelijk eene asymptoot moet vormen, want kon het bewegend punt den cirkel bereiken, dan zou het dien nooit meer verlaten en ware ook te voren eene afwijking van dien cirkel onmogelijk geweest.

Is echter $r_0 > r_1$ (de bepaling van r_1 laat beide onderstellingen toe) dan wordt r_1 een minimum voor den voerstraal, zoodat de beschouwingen wijziging ondergaan.

De formule voor de baan wordt nu

$$\frac{c^2\, d\,r^2}{d\,\vartheta^2} = \frac{a^2\,(r - r_1)^2\,\mathrm{R}}{r^{n-5}},$$

gevende voor afnemende waarden van r:

$$\vartheta = \frac{c}{a\,\mathrm{R}'} \int_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}_0} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\,r}{r - r_1};$$

voor $r = r_1$ wordt de integraal oneindig groot, zoodat de baan nu uitwendig nadert tot den cirkel met den straal r_1 zonder hem te bereiken. Neemt r toe, dan is

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\,r}{(r - r_1)\sqrt{\mathrm{R}}};$$

de integraal neemt toe met r, doch verkrijgt, lettende op de beteekenis van R, eene eindige waarde voor $r = \infty$.

Bij toenemende waarden van den voerstraal heeft dus de baan eene rechtlijnige asymptoot, waarvan de richting met betrekking tot den initialen voerstraal wordt uitgedrukt door

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a} \int_{r_0}^{\infty} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{(r - r_1) \sqrt{R}}.$$

De baan is derhalve eene spiraal (fig. 17), die naderende tot O, den cirkel O R als asymptoot heeft, zoodat de windingen al dichter tot den cirkel naderen en hem steeds omgeven. Aan de andere zijde strekt de spiraal zich uit tot op oneindigen afstand, doch heeft eene rechtlijnige asymptoot U V, waarvan de afstand tot het middelpunt is:

$$O\,U = \frac{c}{a},$$

terwijl a de eindsnelheid in die rechtlijnige asymptotische beweging voorstelt.

Maakt in eenig punt P der baan de snelheid een scherpen hoek Q P O met den voerstraal, dan nadert het punt tot de asymptotische cirkelvormige beweging; is die hoek Q′ P O stomp, dan gaat het punt naar de rechtlijnig asymptotische beweging.

De formule voor den tijd is

$$t = \frac{1}{a} \int_{r}^{r_0} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, d\, r}{(r - r_1) \sqrt{R}},$$

en hieruit blijkt, dat de tijd oneindig groot is zoowel voor $r = r_1$ als voor $r = \infty$, omdat r in den teller tot dezelfde macht opklimt als in den noemer. De rechte lijn en den cirkel zijn dus werkelijk asymptoten der beweging; aan de eene zijde heeft zij tot limiet de eenparige cirkelvormige, aan de andere zijde de eenparige rechtlijnige. Nergens staat de raaklijn loodrecht op den voerstraal. Dat de cirkel O R werkelijk asymptoot moet zijn kan op dezelfde wijze als hierboven duidelijk gemaakt worden.

b. Verg. 16) heeft twee positieve wortels r_1 en r_2, waarbij worde aangenomen $r_1 > r_2$. In plaats van 16) kan geschreven worden:

$$a^2 (r - r_1)(r - r_2) R = 0,$$

waarin R een algebraische vorm in r is van den graad $n-3$, die voor geene positieve waarden van r negatief of nul kan worden.

De differentiaal-vergelijking der baan wordt

$$\frac{c^2\,d\,r^2}{d\,\vartheta^2}=\frac{a^2\,(r-r_1)\,(r-r_2)\,\mathrm{R}}{r^{\mathrm{n}-5}},$$

waaruit blijkt, dat r niet tusschen r_1 en r_2 kan gelegen zijn; ook van r_0 kan hetzelfde gezegd worden, omdat het eerste lid van verg. 16) positief wordt, indien $r=r_0$ wordt gesteld, terwijl het negatief zou worden voor alle waarden, die tusschen r_1 en r_2 zijn gelegen. Derhalve kunnen slechts twee gevallen voorkomen; 1°. dat r_0 grooter is dan de grootste der beide wortels, waarbij alle waarden van r grooter zullen zijn dan r_1 en r_2; 2°. dat r_0 kleiner is dan de kleinste der beide wortels, waarbij alle waarden van r kleiner zijn dan r_1 en r_2. Deze gevallen moeten afzonderlijk overwogen worden.

Zij $r_0<r_2<r_1$, dan schrijven wij de differentiaal-vergelijking der baan aldus

$$\frac{c^2\,d\,r^2}{d\,\vartheta^2}=a^2\,\frac{(r_2-r)\,(r_1-r)}{r^{\mathrm{n}-5}}\,\mathrm{R},$$

zoodat r_2 het maximum van r voorstelt.

Nu is

$$\vartheta=\frac{c}{a}\int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}}\frac{r^{\frac{\mathrm{n}-5}{2}}\,d\,r}{\sqrt{(r_2-r)\,(r_1-r)\,\mathrm{R}}}.$$

Daar R altijd positief blijft, kunnen wij weder eene middenwaarde R′ voor $\sqrt{\mathrm{R}}$ tusschen de grenzen 0 en r_2 aannemen. Hierdoor wordt

$$\vartheta=\frac{c}{a\,\mathrm{R}'}\int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}}\frac{r^{\frac{\mathrm{n}-5}{2}}\,d\,r}{\sqrt{(r_2-r)\,(r_1-r)}},$$

en daar de integraal eene eindige waarde behoudt, zoowel voor $r=r_2$ als voor $r=0$, zal de baan zich uitstrekken van den maximum-voerstraal r_2 tot den voerstraal 0. Brengen wij de poolas door den eersten, dan wordt de vergelijking der baan

$$\vartheta=\frac{c}{a}\int_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}_2}\frac{r^{\frac{\mathrm{n}-5}{2}}\,d\,r}{\sqrt{(r_2-r)\,(r_1-r)\,\mathrm{R}}}.$$

De hoek, die de raaklijn in het middelpunt met de poolas maakt en eene eindige waarde heeft wordt voorgesteld door

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a} \int_0^{r_2} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{\sqrt{(r_2 - r)(r_1 - r)\,\mathrm{R}}}.$$

De tijd in de beweging van het punt wordt uitgedrukt door de formule

$$t = \frac{1}{a} \int_r^{r_2} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, d\, r}{\sqrt{(r_2 - r)(r_1 - r)\,\mathrm{R}}},$$

waarin de integraal ook altijd eene eindige waarde heeft.

De baan is besloten binnen den cirkel, die met den straal $\mathrm{OA} = r_2$ (fig. 18) om de pool als middelpunt wordt beschreven en raakt hem in A. Van dit punt strekt zij zich uit in twee symmetrische takken tot het middelpunt O. $\angle \mathrm{AOR} = \angle \mathrm{AOR}' = \vartheta_1$ kan zoowel scherp als stomp zijn. Zij P de initiale stand van het bewegend punt; maakt de snelheid een scherpen hoek QPO met den voerstraal, dan begeeft het punt zich met toenemende snelheid volgens het kleinste deel der baan naar O; maakt de snelheid een stompen hoek Q′PO met den voerstraal, dan begeeft het punt zich eerst met afnemende snelheid naar het punt A van grootsten afstand, waar de snelheid een minimum is, en van daar met toenemende snelheid volgens den anderen tak naar O, waar het in elk geval na een eindig tijdsverloop met oneindig groote snelheid in bepaalde richting aankomt.

Zij nu $r_0 > r_1 > r_2$, dan zal ook $r > r_1$, zoodat r_1 een minimum van den voerstraal voorstelt, en de cirkel met deze lijn als straal om de pool als middelpunt beschreven binnen de baan zal liggen, haar in één punt rakende.

Brengt men de poolas langs den minimum-voerstraal, dan wordt de vergelijking der baan

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_{r_1}^{r} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)\,\mathrm{R}}}.$$

Daar onder het integraal teeken de noemer van hooger macht is dan de teller, zal de integraal eindig blijven ook voor $r = \infty$. De baan heeft derhalve eene rechtlijnige asymptoot, waarvan de richting wordt gegeven door

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a} \int_{r_1}^{\infty} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)\,R}},$$

terwijl de afstand van het middelpunt tot de asymptoot is $\frac{c}{a}$, en a de eindsnelheid voorstelt. De beweging heeft dus tot limiet de eenparig rechtlijnige. De baan (fig. 19) bestaat uit twee symmetrische takken A B en A B′, die in A den cirkel met den straal $OA = r_1$ aanraken. Elke tak heeft eene asymptoot, waarvan de afstand O L tot het middelpunt is $\frac{c}{a}$ en de richting is bepaald door $\angle QNO = \angle Q'NO = \vartheta_1$.

De tijd in de beweging volgt uit

$$t = \frac{1}{a} \int_{r}^{r} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}\, d\, r}{\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)\,R}}.$$

Hier wordt de integraal tegelijk met r oneindig groot, omdat de teller r tot dezelfde macht bevat als de noemer; dus is de eenparige rechtlijnige beweging volgens de asymptoot werkelijk de limiet der beweging.

c. Verg. 16) heeft geene positieve wortels, hetgeen mogelijk is, omdat het eerste lid positief is zoowel voor $r = o$, $r = r_0$ als voor $r = \infty$. Het blijft dan voor alle waarden van r positief, zoodat gesteld kan worden

$$a^2\, r^{n-1} - c^2\, r^{n-3} + \frac{2\,\mu}{n-1} = a^2\, R,$$

waarbij R nooit nul of negatief kan zijn. De baan heeft dus geen voerstraal, die loodrecht staat op de overeenkomstige raaklijn. De differentiaal-vergelijking der baan is

$$\frac{c^2\, d\, r^2}{d\, \vartheta^2} = \frac{a^2\, R}{r^{n-5}},$$

of

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_{r_0}^{r} \frac{r^{\frac{n-5}{2}}\, d\, r}{\sqrt{R}}.$$

Lettende op de beteekenis van R blijft de integraal eindig voor alle waarden van r, ook voor $r = o$ en $r = \infty$. De baan zal dus gaan door het middelpunt, en neemt men de raaklijn in dit punt tot poolas, dan wordt de vergelijking der baan:

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_0^r \frac{r^{\frac{n-5}{2}} \, d r}{\sqrt{R}}.$$

Nu neemt r toe met ϑ tot $r = \infty$ voor den bepaalden hoek

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{n-5}{2}} \, d r}{\sqrt{R}},$$

die de richting der asymptoot aanwijst, waarvan de afstand tot het middelpunt is $\frac{c}{a}$, terwijl a ook hier de eindsnelheid voorstelt. De baan is dus eene kromme lijn O P B (fig. 20), die van het middelpunt uitgaande zich tot in het oneindige uitstrekt met eene asymptoot L Q. In geen punt staat de raaklijn loodrecht op den voerstraal; de poolas O A is raaklijn in den top O, terwijl de afstand der asymptoot $OL = \frac{c}{a}$ is, en hare richting bepaald wordt door $\angle LNA = \vartheta_1$. De tijd in de beweging wordt uitgedrukt door

$$t = \frac{1}{a} \int_{r_0}^r \frac{r^{\frac{n-1}{2}} \, d r}{\sqrt{R}},$$

waarbij de integraal met r oneindig groot wordt. Het punt P beweegt zich derhalve óf met toenemende snelheid naar O, óf met afnemende snelheid op den oneindigen tak, zoodat de eenparige rechtlijnige beweging volgens de asymptoot en met de eindsnelheid a de limiet is der beweging.

Ten slotte behandelen wij als toepassing en tot nadere toelichting het bijzonder geval $n = 5$. Hierdoor wordt $p = -\frac{\mu}{r^5}$, derhalve

$$v^2 = \frac{\mu}{2 r^4} + h,$$

$$h = v_0^2 - \frac{\mu}{2 r_0^4}.$$

1°. $h < 0$, zoodat gesteld kan worden $h = -a^2$. De vergelijking, die de voerstralen geeft loodrecht op de overeenkomstige raaklijn is

$$a^2 r^4 + c^2 r^2 - \frac{\mu}{2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

waarvoor geschreven kan worden

$$a^2 (r^2 - r_1^2)(r^2 + r_2^2) = 0,$$

zoodat $r = r_1$ de eenige positieve wortel der vergelijking en tevens de maximum-voerstraal is.

De differentiaal-vergelijking der baan is

$$c^2 \frac{d\, r^2}{d\, \vartheta^2} = a^2 (r_1^2 - r^2)(r^2 + r_2^2).$$

Neemt men den maximum-voerstraal als poolas, dan is $\vartheta = 0$ voor $r = r_1$, dus wordt

$$\vartheta = \frac{c}{a} \int_{r_1}^{r} \frac{d\, r}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)(r^2 + r_2^2)}}.$$

Deze integraal is gemakkelijk tot eene elliptische te herleiden; stellende namelijk

$$r = r_1 \cos \varphi, \qquad \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} = k^2,$$

dan wordt

$$\vartheta = \frac{c\, k}{a\, r_1} \int_0^{\varphi} \frac{d\, \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{c\, k}{a\, r_1} \mathrm{F}(\varphi),$$

waarin F de elliptische integraal van de eerste soort voorstelt en k de modulus is.

Tot elliptische functiën overgaande wordt:

$$\varphi = a\, m \frac{a\, r_1\, \vartheta}{c\, k}$$

$$r = r_1 \cos a\, m \frac{a\, r_1\, \vartheta}{c\, k} = r_1 \cos a\, m \left(\vartheta \sqrt{\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}} \right).$$

De kromme lijn door deze vergelijking voorgesteld, heeft den vorm van fig. 15. De hoek, die de raaklijn in het middelpunt met de poolas maakt, is

$$\vartheta_1 = \frac{c\, k}{a\, r_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\, \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{c\, k}{a\, r_1} \mathrm{K},$$

waarin K de volledige elliptische integraal der eerste soort voorstelt.

De tijd der beweging volgt uit

$$dt = -\frac{1}{a}\,\frac{r^2\,dr}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)(r^2 + r_2^2)}},$$

gevende, wanneer de tijd wordt geteld van het oogenblik, dat het punt den grootsten afstand heeft bereikt

$$t = \frac{k\,r_1}{a}\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{k\,r_1}{a}\left[\frac{E_1(\varphi) - (1 - k^2)\,F(\varphi)}{k^2}\right],$$

waarin E_1 de elliptische integraal van de 2e soort voorstelt. Voor den tijd, dien het punt behoeft om van den grootsten afstand in het middelpunt te komen, vindt men hieruit

$$T = \frac{r_1}{a\,k}\,[E - k'^2\,K],$$

waarin E de volledige elliptische integraal der 2e soort, k' den complementairen modulus voorstelt.

2°. $h = 0$. Nu is

$$v^2 = \frac{\mu}{2\,r^4},$$

en de grootste afstand wordt $r_1 = \sqrt{\frac{\mu}{2\,c^2}}$.

De differentiaal-vergelijking der baan geeft

$$d\vartheta = -\frac{dr}{\sqrt{r_1^2 - r^2}};$$

of, in de onderstelling $\vartheta = 0$ voor $r = r_1$:

$$r = \frac{r_1}{\cos\vartheta};$$

waaruit blijkt, dat de baan is een cirkel beschreven op den maximum-voerstraal als middellijn. Voor den tijd, dien het punt behoeft om de halve baan te beschrijven vindt men gemakkelijk

$$T = \frac{\pi\,r_1^2}{4\,c}.$$

3°. $h > 0$, zoodat gesteld kan worden $h = a^2$. Verg. 18) wordt nu

$$a^2\,r^4 - c^2\,r^2 + \frac{\mu}{2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

welke vergelijking óf twee positieve wortels (die gelijk kunnen zijn) óf geene positieve wortels heeft. Daar de vergelijking den vorm eener vierkants-vergelijking heeft, kan het kenmerk dezer gevallen gemakkelijk worden afgeleid. Dit kenmerk toch ligt in de waarde van den determinant

$$\Delta = c^4 - 2\,a^2\,\mu.$$

Is deze positief, dan heeft de vergelijking twee verschillende positieve wortels; is $\Delta = 0$ dan zijn die wortels onderling gelijk, is Δ negatief, dan zijn er geene positieve wortels. De mogelijkheid der drie gevallen blijkt door substitutie. Stellende toch

$$a^2 = v_0^{\,2} - \frac{\mu}{2\,r_0^{\,4}}, \qquad c = v_0\,r_0\,sin\,\alpha_0,$$

wordt

$$\Delta = v_0^{\,4}\,r_0^{\,4}\,sin^4\,\alpha_0 - 2\,\mu\left(v_0^{\,2} - \frac{\mu}{2\,r_0^{\,4}}\right)$$
$$= r_0^{\,4}\left(v_0^{\,2} - \frac{\mu}{r_0^{\,4}}\right)^2 - v_0^{\,4}\,r_0^{\,4}\,(1 - sin^4\,\alpha_0).$$

In de onderstelling $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, kan Δ slechts positief of nul zijn, doch is α_0 willekeurig, dan kan hare waarde zoodanig genomen worden dat Δ negatief wordt.

a. Verg. 19) heeft twee gelijke positieve wortels, waarvan de waarde is

$$r_1^{\,2} = \frac{c^2}{2\,a^2} = \frac{\mu}{c^2},$$

terwijl de voorwaarde voor het gelijk zijn der wortels is:

$$2\,a^2\,\mu = c^4.$$

Voor verg. 19) kan nu geschreven worden:

$$a^2\,(r^2 - r_1^{\,2})^2 = 0,$$

zoodat de voerstraal kleiner is en blijft dan r_1, of grooter is en blijft dan r_1. Staat de initiale snelheid loodrecht op den initialen voerstraal, dan zal de baan onder deze voorwaarde de cirkel om de pool als middelpunt zijn.

Zij $r_0 < r_1$, dan is r_1 een maximum voor den voerstraal, en de differentiaal-vergelijking der baan wordt

$$d\,\vartheta = \frac{c}{a}\;\frac{d\,r}{r_1^{\,2} - r^2} = r_1\sqrt{2}\,.\,\frac{d\,r}{r_1^{\,2} - r^2}.$$

De baan gaat door het middelpunt. Neemt men de raaklijn in dit punt tot poolas, zoodat $\vartheta = 0$ voor $r = 0$, dan is de integraal der vergelijking:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} l . \left(\frac{r_1 + r}{r_1 - r}\right)$$

of

$$r = r_1 \frac{e^{\vartheta\sqrt{2}} - 1}{e^{\vartheta\sqrt{2}} + 1};$$

gevende $r = r_1$ voor $\vartheta = \infty$, zoodat de baan hierdoor voorgesteld in vorm en eigenschappen overeenstemt met fig. 16.

De formule voor den tijd wordt

$$d t = \frac{1}{a} \frac{r^2 d r}{r_1^2 - r^2},$$

gevende

$$t = \frac{1}{a} \int_{r_0}^{r} \frac{r^2 d r}{r_1^2 - r^2}$$

of

$$a t = (r_0 - r) - \frac{r_1}{\sqrt{2}} l . \left(\frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0} . \frac{r_1 - r}{r_1 + r}\right). \quad . \quad 20)$$

De tijd, dien het punt noodig heeft om van den afstand r_0 langs de baan in het middelpunt te komen is dus

$$T = \frac{1}{a}\left(\frac{r_1}{\sqrt{2}} l . \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0} - r_0\right),$$

en om den grootsten afstand r_1 te bereiken oneindig groot, zoodat de eenparige cirkelvormige beweging in den cirkel met den straal r_1 en met de eindsnelheid

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{2 r_1^4} + a^2} = \sqrt{2 a^2} = a\sqrt{2}$$

de limiet is voor de beweging van het punt.

Is echter $r_0 > r_1$, dan is r_1 een minimum voor den voerstraal, en de vergelijking der baan wordt

$$d\vartheta = \frac{c}{a} \frac{d r}{r_1^2 - r^2},$$

gevende

$$\vartheta = r_1 \sqrt{2} \int_{r_0}^{r} \frac{d r}{r^2 - r_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} l \left(\frac{r - r_1}{r + r_1} . \frac{r_0 + r_1}{r_0 - r_1}\right).$$

Voor $r = \infty$ wordt $\vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{r_0 + r_1}{r_0 - r_1}$, zijnde eene eindige waarde, die de richting der asymptoot aanwijst. Nemen wij de poolas evenwijdig aan deze lijn, dan wordt

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{r + r_1}{r - r_1};$$

of

$$r = r_1 \frac{e^{\vartheta\sqrt{2}} + 1}{e^{\vartheta\sqrt{2}} - 1},$$

gevende $\vartheta = \infty$ voor $r = r_1$, zoodat de baan in vorm en eigenschappen overeenkomt met fig. 17. De beweging heeft eene dubbele asymptoot, de eene cirkelvormig, de andere rechtlijnig. De limiet voor de snelheid in de cirkelvormige beweging is haar maximum $V = a\sqrt{2}$, en in de rechtlijnige beweging haar minimum $V' = a$. Hieruit volgt weer, dat de afstand van de rechtlijnige asymptoot tot het middelpunt is $l = \frac{c}{a} = r_1\sqrt{2}$. De tijd is voor beide bewegingen oneindig groot, zooals uit formule 20) onmiddelijk voortvloeit.

b. Δ is positief; zijn de wortels r_1 en r_2, dan kan voor 19) geschreven worden

$$a^2 (r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) = 0,$$

waarin of $r < r_2 < r_1$, of $r > r_1 > r_2$.

Zij in de eerste plaats $r < r_2 < r_1$; dan is de differentiaal-vergelijking der baan

$$d\vartheta = \frac{c}{a} \frac{dr}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)(r_2^2 - r^2)}}.$$

Stellende $r = r_2 \sin\varphi$, $\frac{r_2}{r_1} = k$, zoo wordt

$$\vartheta = \frac{c}{a r_1} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

of $\vartheta = 0$ stellende voor $r = 0$ en $\varphi = 0$:

$$\vartheta = \frac{c}{a r_1} F(\varphi), \quad \textit{modulus } k,$$

$$r = r_2 \sin am \frac{a r_1}{c} \vartheta,$$

zijnde de vergelijking der baan, waarbij de poolas is gericht volgens de raaklijn in het middelpunt. De baan heeft den vorm en de eigenschappen van fig. 18. De hoek A O R tusschen de raaklijn in het middelpunt en den maximum-voerstraal $OA = r_2$ is

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a\, r_1} \mathrm{K}.$$

De formule voor den tijd wordt:

$$d\,t = \frac{1}{a} \frac{r^2\, d\, r}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)(r_2^2 - r^2)}} = \frac{c\, r_2^2}{a\, r_1} \int \frac{\sin^2 \varphi\, d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

gevende voor den tijd, dien het punt behoeft om van een willekeurig punt der baan in het middelpunt te komen:

$$t = \frac{c\, r_2^2}{a\, r_1} \left[\frac{\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}_1(\varphi)}{k^2} \right] = \frac{c\, r_1}{a} [\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}_1(\varphi)],$$

dus voor $r = r_2$ of $\vartheta = \vartheta_1$ en $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\mathrm{T} = \frac{c\, r_1}{a} (\mathrm{K} - \mathrm{E}).$$

Zij nu $r > r_1 > r_2$, zoodat r_1 den minimum-voerstraal voorstelt. De differentiaal-vergelijking der baan wordt in dit geval

$$d\,\vartheta = \frac{c}{a} \frac{d\, r}{\sqrt{(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)}} = \frac{c}{a} \frac{d\,.\frac{1}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}\right)}}.$$

Stellende nu

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{r_1}, \qquad \frac{r_2}{r_1} = k;$$

wordt

$$d\,\vartheta = \frac{c}{a\, r_1} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

of, wanneer de lijn evenwijdig aan de asymptoot tot poolas wordt genomen, zoodat $\varphi = 0$ voor $r = \infty$,

$$\vartheta = \frac{c}{a\, r_1} \mathrm{F}(\varphi),$$

en

$$r = \frac{r_1}{\sin am \dfrac{a\, r_1}{c} \vartheta}.$$

De baan heeft den vorm van fig. 19. De hoek tusschen den minimum-voerstraal $OA = r_1$ en de asymptoot is

$$\vartheta_1 = \frac{c}{a r_1} K.$$

De tijd volgt uit de formule

$$d t = \frac{1}{a} \frac{r^2 d r}{\sqrt{(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)}} = \frac{c r_1}{a} \frac{d \varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

gevende voor den tijd, dien het bewegend punt behoeft om van den kleinsten afstand A tot een willekeurig punt der baan te komen [1]):

$$t = \frac{c r_1}{a} [\cot \varphi \, \Delta \varphi + K - E - F(\varphi) + E_1(\varphi)],$$

derhalve $t = \infty$ voor $\varphi = 0$, zooals behoort.

c. Het laatste geval is, dat verg. 19) geene bestaanbare wortels heeft, omdat Δ negatief is. Dan heeft de baan geen voerstraal loodrecht op de overeenkomstige raaklijn.

De differentiaal-vergelijking der baan is nu

$$\frac{c^2 d r^2}{d \vartheta^2} = a^2 r^4 - c^2 r^2 + \frac{\mu}{2} = a^2 [(r^2 - p)^2 + q^2],$$

waarin

$$p = \frac{c^2}{2 a^2}, \qquad q^2 = \frac{2 a^2 \mu - c^4}{4 a^4}.$$

Hieruit volgt

$$d \vartheta = \frac{c}{a} \frac{d r}{\sqrt{(r^2 - p)^2 + q^2}}.$$

Om den vorm in het tweede lid tot eene elliptische integraal te herleiden, stellen wij eerst:

$$r^2 - p = q x,$$

gevende

$$d \vartheta = \frac{c}{2 a} \frac{d x}{\sqrt{(1 + x^2)(p + q x)}};$$

vervolgens,

$$p + q x = \sqrt{p^2 + q^2} \frac{1 - z}{1 + z}, \text{ waarin } -1 < z < 1,$$

dan wordt:

$$d \vartheta = - \frac{c}{a \sqrt{2}} \frac{d z}{\sqrt{(1 - z^2)[(\sqrt{p^2 + q^2} - p) + z^2(\sqrt{p^2 + q^2} + p)]}}.$$

---

1) Durège, Theorie der ellipt. Functionen, § 19.

Zij eindelijk $z = \cos\varphi$ en:

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2\sqrt{p^2+q^2}} = k^2,$$

zoo is

$$d\vartheta = \frac{c}{2\sqrt[4]{\frac{a^2\mu}{2}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Stellende nog ter bekorting

$$\frac{c}{\sqrt[4]{\frac{a^2\mu}{2}}} = b,$$

dan wordt

$$d\vartheta = \frac{b}{2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

gevende voor den hoek, die de raaklijn in het middelpunt met den initialen voerstraal maakt

$$\vartheta_1 = \frac{b}{2}\mathrm{F}(\varphi), \qquad \textit{modulus } k,$$

en neemt men deze raaklijn weer tot poolas, dan wordt de vergelijking der baan

$$\vartheta = \frac{b}{2}\mathrm{F}(\varphi),$$

gevende

$$r^2 = \sqrt{p^2+q^2}\,\frac{1-\cos am\frac{2\vartheta}{b}}{1+\cos am\frac{2\vartheta}{b}} = \sqrt{\frac{\mu}{2a^2}}\tan g^2\, am\frac{\vartheta}{b},$$

of

$$r = \frac{c}{ab}\tan g\, am\frac{\vartheta}{b};$$

zijnde de vergelijking der baan, die den vorm en de eigenschappen heeft van fig. 20. De hoek tusschen de raaklijn in het middelpun en de asymptoot wordt uitgedrukt door

$$\angle \mathrm{ANQ} = b\mathrm{K}.$$

Het berekenen van den tijd der beweging leidt tot vrij omslachtige herleidingen, die geene nadere bijzonderheden aanbieden, dan bij de beschouwing van het algemeene geval zijn behandeld.

NASCHRIFT.

Over de banen, die door een punt worden beschreven bij andere wetten van centrale versnelling dan die van NEWTON, is eene verhandeling geschreven door STADER in het Journal von Crelle 46e Band bladz. 262. Daar worden echter alleen centripetale versnellingen beschouwd volgens bepaalde wetten, die alle zijn begrepen in het vierde der hier voor behandelde gevallen. De genoemde verhandeling is eigenlijk de beantwoording eener prijsvraag, in 1851 uitgeschreven door de philosophische Faculteit der Hoogeschool te Munster (ab Amplissimo Philosophorum ordine almae *Academiae regiae Monasteriensis*). Dit antwoord werd den eerprijs waardig gekeurd, en vervolgens op aandrang van prof. CRELLE in diens tijdschrift, destijds het voornaamste van Duitschland op mathematisch gebied, gepubliceerd. Toen ik mij reeds geruimen tijd met de behandeling van hetzelfde onderwerp had bezig gehouden, viel mij dit opstel in het oog, en gaf aanleiding tot vergelijking der verkregen uitkomsten. De afwijking was echter zoo groot, dat ik, niet durvende twijfelen aan de juistheid der beschouwingen van eene zoo zwaar en kostbaar gewapende verhandeling, mijn onderzoek opgaf. Toen ik echter geruimen tijd daarna de zaak weer opvatte, bleek mij dat de overeenstemming niet grooter werd, en het mij niet mogelijk was onze uiteenloopende beschouwingen tot een geheel te vereenigen. Het verschil bestaat niet in de formulen en berekeningen die voldoende overeenstemmen, maar in de daaruit af te leiden gevolgen. Van algemeene uitkomsten is bij STADER niets te vinden; hij behandelt elk geval afzonderlijk en bepaalt zich tot $n = 3$, 4, 5, 6 (gedeeltelijk) en 7. Het slot van mijn onderzoek behandelt het geval $n = 5$ als voorbeeld, zoodat hier de overeenstemming der berekening kan blijken, die niet volkomen is, omdat een verschillend uitgangspunt is gekozen. De voornaamste punten van verschil wil ik thans opnoemen, ten einde ieder belangstellende in de gelegenheid te brengen die onderling te vergelijken, en, kan het zijn, tot meerdere overeenkomst te voeren, of wel zich voor de eene of de andere beschouwing te verklaren.

1°. Reeds in mijne vroegere verhandeling „Onderzoek eener bijzondere omstandigheid enz", is in eene noot met een enkel woord gewezen op de beschouwingswijze van STADER, die het bewegend punt door het middelpunt van versnelling laat gaan, alsof daar niets bijzonders gebeurt, zoodat het ongestoord zijne kromlijnige baan kan vervolgen. Hierdoor bestaan zijn banen uit verschillende takken, die alle door het middelpunt van versnelling gaan, terwijl bij mijn onderzoek nooit meer dan een zoodanige tak voorkomt, omdat negatieve voerstralen zijn uitgesloten.

2°. STADER gaat uit van de onderstelling, dat de initiale snelheid loodrecht staat op den initialen voerstraal. Hierdoor worden zijne berekeningen ongetwijfeld veel vereenvoudigd, doch gaat het geval verloren, dat in geen punt der baan die loodrechte stand van voerstraal en snelheid plaats vindt. Ik meen te hebben aangegetoond, dat juist bij elke onderstelling tot het laatste geval behoorende eene zoodanige baan behoort, die niet de minst merkwaardige is, en daarbij de ingewikkeldste berekeningen geeft.

3°. Eene vreemde en voor mij onoplosbare moeilijkheid doet zich in de verhandeling van STADER voor, die met het voorgaande punt in verband staat. Nergens toch wordt gewag gemaakt van de eenparige cirkelvormige beweging om het middelpunt van versnelling, die in elk geval van centripetale versnelling voorkomt, en ook uit de eerste gronden der elementaire dynamica kan afgeleid worden. Bij het nagaan der verschillende omstandigheden, waaronder de banen voorkomen moet men ook komen op de betrekking, waarbij de baan in een cirkel overgaat. Werkelijk komt STADER tot die betrekking; slechts bij het geval $n = 3$ ziet hij in, dat de baan een cirkel is; in elk ander geval komt bij hem eene spiraal in plaats van den cirkel, en wel eene spiraal (taf. VI fig. 9) die onmogelijk door het punt bij de ondersteld e wet kan beschreven worden, omdat zij in een cirkel uitloopt.

4°. Voldoen de initiale gegevens aan de voorwaarde, onder welke *bij rechthoekigen stand van snelheid en voerstraal* de baan in den bovengenoemden cirkel overgaat, doch heeft die rechthoekige stand niet plaats, dan komen wij tot die beweging in een spiraal, welke de eenparige cirkelvormige tot limiet heeft, zoodat de cirkel als asymptoot der baan voorkomt, hetzij uitwendig, hetzij inwendig gelegen. Bij STADER is van zulk eene asymptoot, noch van zulk eene grens der beweging iets te vinden. Trouwens bij geen enkel schrijver van vroeger of later tijd heb ik een spoor van deze zonderlinge beweging kunnen ontdekken, terwijl zij, naar het mij voorkomt, toch met volkomen recht uit de formulen kan afgeleid worden. Dat STADER haar niet ontdekt, is een gevolg van zijn minder gelukkig uitgangspunt. Deze banen toch hebben in geen enkel punt de raaklijn loodrecht op den voerstraal; gaat men nu uit van den loodrechten stand van de snelheid en den voerstraal, dan is het niet mogelijk tot de kennis dezer banen op te klimmen.

5°. Ook in de rechtlijnige asymptoten openbaart zich een punt van verschil. Bij STADER gaan alle asymptoten door het middelpunt van versnelling (Taf. VI fig. 8 en 11), terwijl in mijn opstel is aangetoond, dat bij centripetale versnelling evenredig aan eene macht van den omgekeerden afstand de asymptoot onmogelijk door het middelpunt kan gaan. Want hiertoe zou, volgens het theorema der sectoren de snelheid op oneindigen afstand oneindig groot moeten zijn, hetgeen bij de genoemde wet juist niet het geval is. Uit de eindige waarde van de limiet der snelheid op oneindigen afstand volgt onmiddelijk de afstand der asymptoot tot het middelpunt, waardoor deze lijnen haar bepaalden stand buiten de baan verkrijgen. Bij STADER liggen zij er binnen, waardoor de banen buigpunten verkrijgen, die zij weer onmogelijk hebben kunnen.

Zooals men bemerkt betreffen de opgenoemde punten geene bijkomende omstandigheden van ondergeschikt belang, doch raken het hart der vraag. Ik zou ook niet aarzelen in dit opzicht eene veroordeeling van STADERS verhandeling uit te spreken, indien niet de eerprijs der

Hoogeschool te Munster en het loffelijk getuigschrift van den hoogleeraar CRELLE zooveel gewicht in de schaal lagen, dat ik nauwlijks moed heb mijne bescheiden onderzoekingen daar tegen over te plaatsen, en het oordeel van bevoegde geleerden in te roepen. Hun onpartijdig onderzoek beslisse, aan welke zijde de waarheid is te vinden.

INHOUD.

VERBETERINGEN.

Bladz. 14, regel 8 v. o., *staat:* $\sqrt[2m]{\frac{hm}{\mu}}$, *moet zijn:* $\sqrt[2m]{\frac{-hm}{\mu}}$.

„ 16, „ 10 v. b. In het tweede lid der formule moeten x en ε onderling verwisseld worden.

Bladz. 41, regel 17 v. b. *staat:* den kleinen cirkel snijden, *moet zijn:* snijden of afsluiten.

Fig. 1.

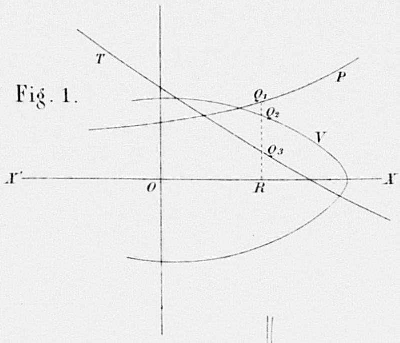


Fig. 2.

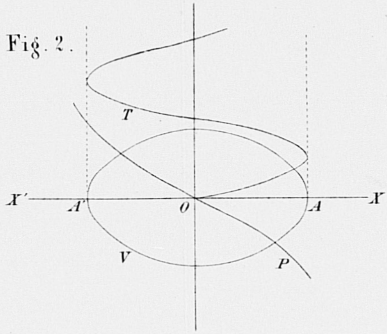


Fig. 4.

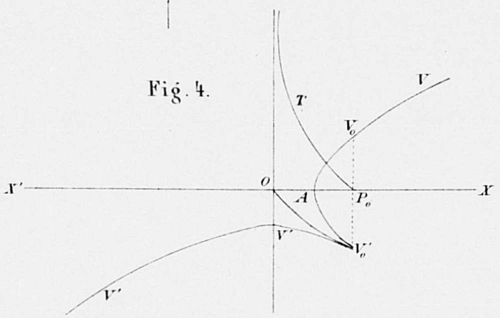


Fig. 5.

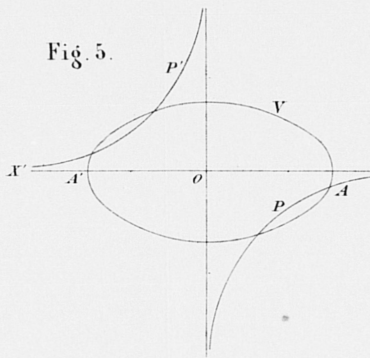


Fig. 7.

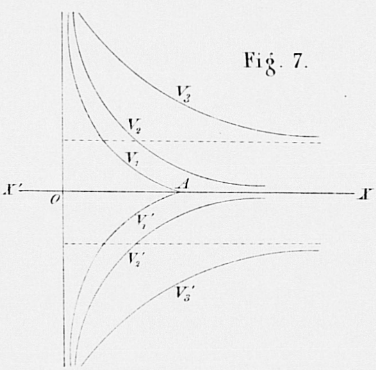
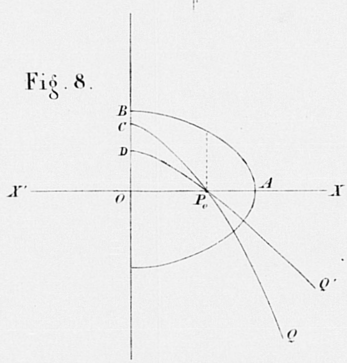
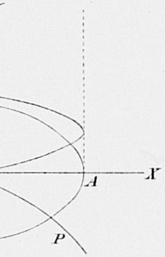


Fig. 8.





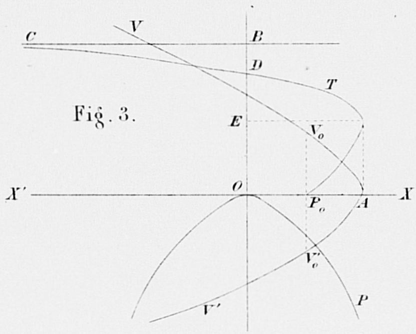
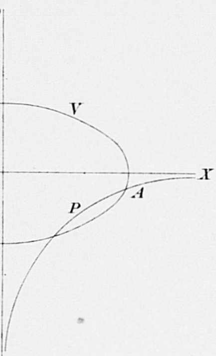


Fig. 3.



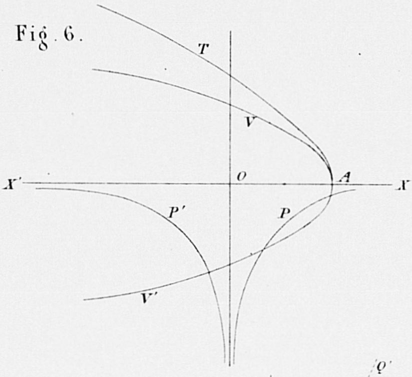
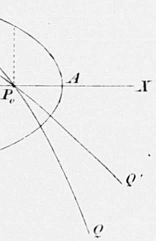


Fig. 6.



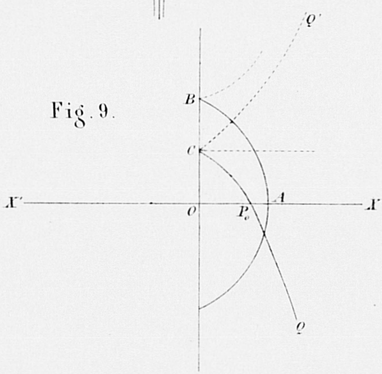


Fig. 9.

Fig. 10.

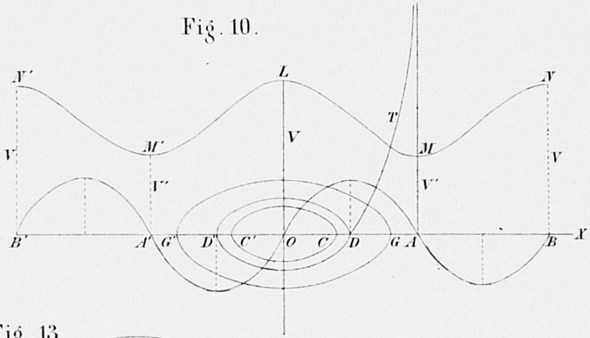


Fig. 11.

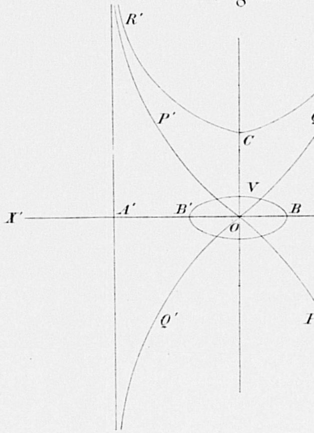


Fig. 13.

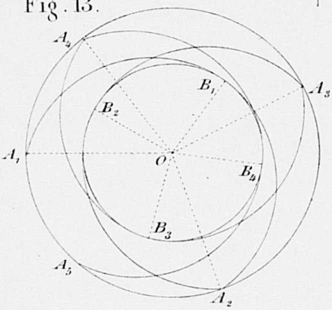


Fig. 14.

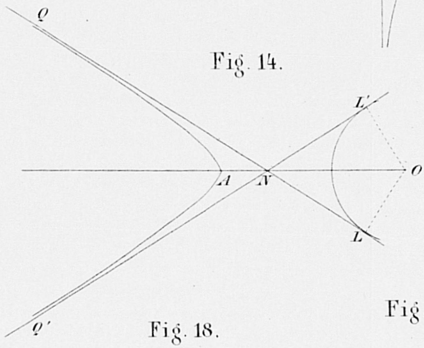


Fig. 17.

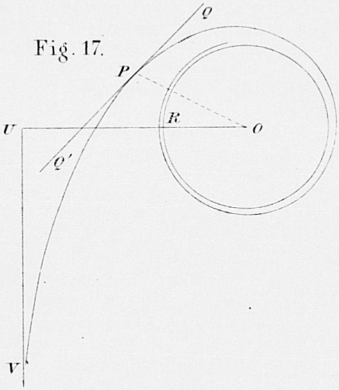


Fig. 18.

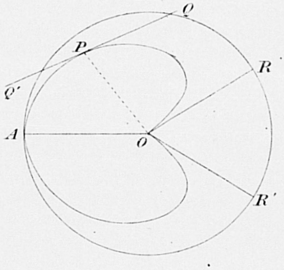


Fig. 19.

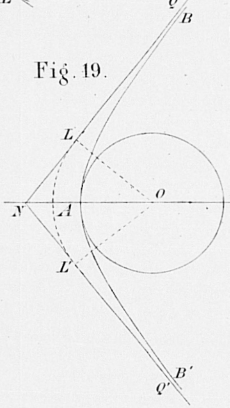
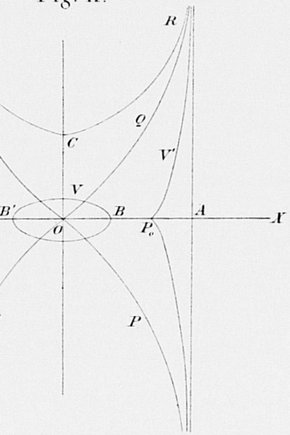


Fig. 11.



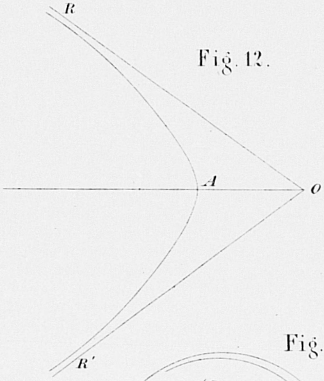


Fig. 12.

Fig. 16.

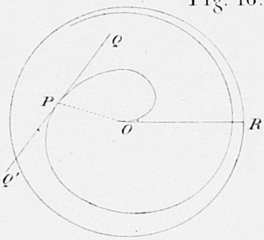
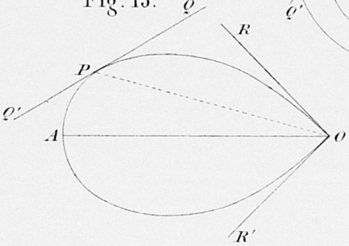


Fig. 15.



9.

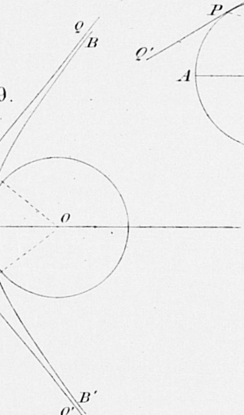


Fig. 20.