Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes

SUR LA DÉRIVÉE ANGULAIRE DES FONCTIONS UNIVALENTES

C. VISSER

SUR LA DÉRIVÉE ANGULAIRE DES FONCTIONS UNIVALENTES

SUR LA DÉRIVÉE ANGULAIRE DES FONCTIONS UNIVALENTES

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. C. W. VOLLGRAFF HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 23 SEPTEMBER 1935, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

CORNELIS VISSER

GEBOREN TE SLIEDRECHT

AMSTERDAM — 1935
N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERSMAATSCHAPPIJ

AAN MIJN OUDERS.

Het zij mij vergund hier mijn dank te betuigen aan hen, die tot mijn academische opleiding hebben bijgedragen.

In het bizonder dank ik U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor, zowel voor Uw onvergetelijke lessen, als voor de steun en belangstelling, die ik steeds in zo ruime mate van U mocht ondervinden.

INTRODUCTION.

En 1926 M. J. Wolff a donné une contribution importante à la théorie des fonctions holomorphes bornées en démontrant le théorème suivant :

Soit la fonction $w(z) = u(z) + i\,v(z)$ *holomorphe dans le demi-plan* $D\,(x > 0)$ *de la variable complexe* $z = x + y\,i$ *et soit pour tout* z *de* D $u(z) > 0$. *Alors il existe un nombre* λ, *qui est positif ou nul, tel que* $w'(z)$ *et* $\frac{w(z)}{z}$ *tendent vers* λ *lorsque* $z \to \infty$ *dans un angle quelconque* $|y| \leqq p\,x\,(p > 0)$. *Cette limite* λ *est la borne inférieure du rapport* $\frac{u}{x}$ *lorsque* z *décrit le demi-plan* D.

On a appelé λ la *dérivée angulaire* de la fonction $w(z)$ à l'infini.

Remarquons que des démonstrations indépendantes de ce théorème ont été données par MM. Landau et Valiron (Journal of the London math. Soc., vol. 4, 1929) et M. Carathéodory (Sitzungsber. der Preuss. Ak. der W., 1929).

Le théorème de M. Wolff s'est montré d'un grand intérêt pour diverses questions concernant la théorie des fonctions bornées. Nous n'aborderons ici que le problème des propriétés d'une représentation conforme au voisinage de la frontière.

Soit donné dans le plan de la variable complexe un domaine simplement connexe G dont la frontière ne se réduit pas à un point unique. On peut faire alors la *représentation conforme* de G sur le cercle-unité, c.à.d. on peut trouver une fonction $z = z(w)$, holomorphe dans D, telle que à chaque point de G corresponde un point intérieur au cercle-unité $|z| < 1$, et réciproquement; autrement dit : on peut trouver une fonction $z(w)$ holomorphe et univalente dans G et ayant une fonction inverse $w(z)$ holomorphe et univalente dans le domaine $|z| < 1$. On sait qu'il existe une infinité de telles fonctions; il suffit de connaître une seule d'entres elles, toute autre étant obtenue au moyen d'une transformation linéaire laissant invariant le cercle-unité.

Ce théorème, qui est fondamental dans la théorie de la représentation conforme, ne nous donne du reste aucune information sur l'allure de la représentation au voisinage de la frontière de G. La recherche des propriétés de la fonction $z(w)$ au voisinage de la frontière de G constitue donc un problème nouveau.

En introduisant la notion de „Primende", M. Carathéodory a démontré, comme on sait, que la correspondance $z = z(w)$ entraîne une correspondance biunivoque et continue entre les points de $|z| = 1$ et les „Primenden" de la frontière de G. Si la frontière de G est une courbe de JORDAN, cela signifie que la fonction $z(w)$ peut être définie sur la frontière de G de telle façon qu'on obtienne une correspondance biunivoque et continue entre le domaine fermé $\overline{G}$ et le domaine fermé $|z| \leqq 1$.

Ce sont des résultats relatifs à des questions de *continuité;* on peut se demander maintenant en quelle mesure sera conservée la *conformité* de la représentation au voisinage de la frontière.

Soit α un point de la circonférence $|z| = 1$. Supposons que la dérivée $w'(z)$ tend vers une limite $l \neq 0$ et $\neq \infty$ lorsque z tend vers α sur tout triangle ayant un sommet en α et ayant tous ses autres points intérieurs à $|z| = 1$. Alors la représentation sera appelée *conforme en* α. Le nombre l est la *dérivée angulaire* de la fonction $w(z)$ *au point* α.

M. CARATHÉODORY a obtenu le résultat suivant: Soit β un point frontière de G. Supposons qu'il existe deux circonférences tangentes en β, telles que tout point intérieur à l'une soit extérieur à G et que tout point intérieur à l'autre soit intérieur à G. Alors il existe un point α sur $|z| = 1$ tel que $w(z) \to \beta$ et $w'(z) \to l \, (\neq 0$ et $\neq \infty)$ lorsque $z \to \alpha$ en restant dans un triangle quelconque de sommet α, dont les côtés sont intérieurs au cercle-unité, le sommet α excepté.

En utilisant une transformation linéaire on peut donner à ce théorème la forme suivante:

Soit D le demi-plan $x > 0$ de la variable complexe $z = x + yi$. Soit G un domaine simplement connexe intérieur à D et comprenant un demi-plan $x > a$. Si alors $w = w(z)$ est une des fonctions qui donnent la représentation conforme de D sur G de telle sorte que $z \to \infty$ lorsque $w \to \infty$ suivant l'axe réel, il existe un nombre $\lambda > 0$, tel que

$$w'(z) \left(\text{et } \frac{w(z)}{z} \right) \to \lambda$$

lorsque $z \to \infty$ dans un angle quelconque d'ouverture plus petite que π intérieur à D.

Les conditions du théorème de M. WOLFF étant réalisées par la fonction représentatrice $w(z)$, l'existence d'une limite $\lambda \geqq 0$ est évidente. L'importance du théorème de M. CARATHÉODORY se trouve donc dans l'assertion $\lambda > 0$. Elle résulte de l'hypothèse que G contienne un demi-plan. Cependant cette hypothèse n'est pas nécessaire, comme le montre la fonction

$$w(z) = z + \frac{z + e}{\log(z + e)},$$

où $\log(z + e)$ désigne cette branche de $\log(z + e)$ qui est égale à un pour $z = 0$. $w(z)$ donne la représentation conforme de D sur un domaine intérieur, qui ne contient pas un demi-plan, tandis que $w'(z) \to 1$ lorsque $z \to \infty$.

Pour qu'il existe une fonction $w(z)$ donnant la représentation conforme de D sur un domaine intérieur G et ayant une dérivée angulaire $\lambda > 0$, il est évidemment nécessaire que G contienne des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π. Mais cette condition n'est pas suffisante, comme le montre la fonction

$$w(z) = \frac{z+e}{\log(z+e)}.$$

Nous sommes conduits ainsi à poser le problème suivant:

Soit G un domaine simplement connexe intérieur au demi-plan D. Supposons que G contienne des angles d'ouverture aussi voisine de π que l'on veut. Soit $w(z)$ une fonction donnant la représentation conforme de D sur G telle que $z \to \infty$ lorsque $w \to \infty$ suivant l'axe réel. On demande une condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée angulaire de la fonction $w(z)$ soit positive.

Nous déduirons une telle condition dans la première partie de ce travail. Dans cette condition figurera la notion de *rayon conforme*. Soit $\triangle$ un domaine simplement connexe ayant deux points frontières au moins. Le point a étant intérieur à $\triangle$, on peut faire la représentation conforme de G sur un cercle $|w| < R$ au moyen d'une fonction $w(z)$ telle que $w(a) = 0$, $|w'(a)| = 1$. Le rayon R de ce cercle ne dépend que de G et a et est appelé *le rayon conforme du domaine G en a.* Nous le désignerons par $k(\triangle, a)$.

Nous montrerons:

Pour que la dérivée angulaire λ de la fonction $w(z)$ soit positive, il faut et il suffit qu'il existe un chemin Γ, allant d'un point c à l'infini et restant dans un angle d'ouverture plus petite que π intérieur à G, tel que l'intégrale, prise suivant Γ,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G,w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds} \right) ds$$

soit convergente. $w = u + vi$ désigne le point qui décrit Γ, s est la longueur de l'arc cw.

Dans le cas spécial d'un domaine symétrique par rapport à l'axe réel le résultat est plus simple. Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit positif, est alors la convergence de l'intégrale

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k\, G, w)} - \frac{1}{2u} \right) du,$$

prise suivant l'axe réel.

La notion de rayon conforme n'est pas d'une nature géométrique élémentaire. Cependant notre condition se montre un utile instrument d'investigation, grâce à une certaine propriété de monotonie du rayon conforme. Cette propriété exprime que pour tout domaine simplement connexe $\triangle'$ intérieur à $\triangle$ et contenant a l'inégalité $k(\triangle', a) \leqq k(\triangle, a)$ a lieu. Cela permet dans bien des cas d'évaluer des valeurs approximées pour le nombre $k(G, w)$, qui figure dans notre condition. C'est ainsi que nous avons établi dans la deuxième partie de ce travail quelques conditions qui sont suffisantes pour que λ soit positif et dans lesquelles ne figurent que des propriétés géometriques élémentaires du domaine G.

Une autre propriété du rayon conforme est exprimée par l'inégalité

$$k(\triangle, a) \leqq \sqrt{\frac{(\triangle)}{\pi}},$$

où $(\triangle)$ désigne l'aire de $\triangle$. De là nous déduirons que pour un domaine G défini par

$$x > 0 \quad , \quad |y| < h(x),$$

où $h(x)$ est une fonction continue et positive, la condition

$$\int_1^\infty \frac{dx}{h(x)} < \infty$$

est *nécessaire* pour que λ soit positif. Si la fonction $h(x)$ n'est pas décroissante, cette condition se montrera aussi suffisante.

En utilisant des notions de géometrie non-euclidienne on peut donner à notre condition une forme très simple. Si la fonction $z(w)$ donne la représentation conforme d'un domaine $\triangle$ sur le cercle-unité $|z| < 1$, l'expression

$$d\sigma = \frac{|z'(w)|}{1 - |z(w)|^2} |dw|$$

est, comme on sait, l'élément linéaire d'une métrique hyperbolique dans $\triangle$. Cette métrique est indépendante de la fonction représentatrice spéciale et les angles ont la même mesure comme dans la géométrie euclidienne. On a évidemment

$$d\sigma = \frac{ds}{k(\triangle, w)},$$

où ds désigne l'élément linéaire euclidien.

Adoptons une telle métrique dans les domaines G et D. En désignant par $d\sigma_G$ et $d\sigma_D$ les éléments linéaires, on a

$$d\sigma_G = \frac{ds}{k(G, w)}, \quad d\sigma_D = \frac{ds}{k(D, w)} = \frac{ds}{2u},$$

où u est la partie réelle de w. Puisque $k(G, w) < k(D, w)$, sauf dans le cas où $G = D$,

$$d\sigma = d\sigma_G - d\sigma_D$$

est l'élément linéaire d'une métrique riemannienne dans laquelle les longueurs sont positives.

Plaçons-nous dans le cas d'un domaine G symétrique par rapport à l'axe réel et contenant l'intervalle $c \leqq u < \infty$. Notre condition devient alors:

Pour que la dérivée angulaire λ soit positive, il faut et il suffit que la partie c, ∞ de l'axe réel ait une longueur finie dans la métrique donnée par l'élément linéaire $d\sigma = d\sigma_G - d\sigma_D$.

PREMIÈRE PARTIE.

L'objet du présent article est l'étude d'une question qui se rattache à un théorème de M. J. WOLFF. Soit la fonction $w(z)$ holomorphe et de partie réelle positive dans le demi-plan $D\,(x > 0)$ de la variable complexe $z = x + yi$. Le théorème de M. WOLFF dit que dans ces conditions la dérivée $w'(z)$ tend vers une constante λ, qui est nulle ou positive, lorsque $z \to \infty$ dans tout angle $|y| \leqq px$, p étant une constante positive arbitraire [1]).

Le nombre λ s'appelle *la dérivée angulaire* de $w(z)$ à l'infini.

Dans le cas d'une fonction $w(z)$ univalente, représentant D sur un domaine intérieur, l'inégalité $\lambda > 0$ exprime la conformité de la représentation à l'infini. Inversement on peut demander de chercher des conditions auxquelles doit satisfaire un domaine intérieur G de D, pour qu'il existe une fonction $w(z)$ représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini.

Quelques conditions qui sont suffisantes sont connues [2]). Je me propose de déduire ici une condition qui est nécessaire et suffisante et qui permet de ramener le problème à celui des propriétés d'une représentation conforme en un point intérieur.

Pour éviter de renvoyer le lecteur à d'autres Mémoires, je démontrerai d'abord les propriétés dont je ferai usage.

§ 1.

Le Théorème de WOLFF.

Théorème. Soit la fonction

$$w(z) = w(x + yi) = u(z) + iv(z)$$

---

1) J. WOLFF, Comptes rendus, **183**, 1926, p. 500. Voir aussi:
C. CARATHÉODORY, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss., 1929, p. 39;
E. LANDAU et G. VALIRON, Journal of the London Math. Soc., Vol. IV. 1929, p. 15.

2) C. CARATHÉODORY, l. c. 1).
G. VALIRON, Bulletin des Sc. math., 2e série, **53**, 1929, p. 70;
L. AHLFORS, Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova Series A. 1, IX. 1930;
J. WOLFF, Comptes rendus, **191**, 1930, p. 921;
C. VISSER, Comptes rendus, **193**, 1931, p. 1388;
J. G. VAN DER CORPUT, Proc. Kon. Ak. van Wet., Amsterdam, **33**, 1932, p. 330.

(x, y, u et v réels) holomorphe dans le demi-plan D ($x > 0$) et soit en tout point z de D

$$u(z) > 0.$$

Alors il existe un nombre λ, qui est positif ou nul, tel que pour tout $p > 0$

$$w'(z) \to \lambda$$

lorsque $z \to \infty$ dans l'angle $|y| \leqq p\,x$.

Démonstration. Soit $z_0 = x_0 + y_0\,i$ un point de D, $w(z_0) = w_0 = u_0 + v_0\,i$. Désignons par z_0^* et w_0^* les points symétriques de z_0 et w_0 par rapport à l'axe imaginaire.

La substitution

$$\zeta = \frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

transforme le demi-plan D biunivoquement le cercle unité $|\zeta| < 1$. En posant

$$\varphi(\zeta) = \frac{w(z(\zeta)) - w_0}{w(z(\zeta)) - w_0^*},$$

on obtient une fonction $\varphi(\zeta)$ qui est holomorphe dans le cercle unité $|\zeta| < 1$ et dont la valeur absolue est plus petite que 1, tandis que $\varphi(0) = 0$. On peut appliquer alors le lemme de SCHWARZ, qui donne

$$|\varphi(\zeta)| \leqq |\zeta|$$

et par conséquent

$$\left|\frac{w(z) - w_0}{w(z) - w_0^*}\right| \leqq \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en tout point z de D. Si $z \neq z_0$, l'inégalité (1) peut exprimer sous la forme

$$\left|\frac{w(z) - w_0}{z - z_0}\right| \leqq \left|\frac{w(z) - w_0^*}{z - z_0^*}\right|$$

et en faisant $z \to z_0$ on obtient

$$|w'(z_0)| \leqq \frac{u_0}{x_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Comme

$$\frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{(u + u_0)^2 + (v - v_0)^2} \geqq \frac{(u - u_0)^2}{(u + u_0)^2},$$

il résulte de (1) que

$$\frac{u-u_0}{u+u_0} \leqq \left| \frac{z-z_0}{z-z_0^*} \right|,$$

donc

$$\begin{aligned} u &\leqq \frac{|z-z_0^*|+|z-z_0|}{|z-z_0^*|-|z-z_0|}\, u_0 \\ &= \frac{(|z-z_0^*|+|z-z_0|)^2}{4\,x\,x_0}\, u_0 \\ &\leqq \frac{(x_0+|z|+x_0+|z|)^2}{4\,x\,x_0}\, u_0 \\ &= \frac{(x_0+|z|)^2}{x}\,\frac{u_0}{x_0} \end{aligned}$$

Supposons que z soit situé dans l'angle $|y| \leqq p\,x$, et soit en même temps $x \geqq x_0$. Alors on a

$$u \leqq \frac{(2|z|)^2}{x}\,\frac{u_0}{x_0} \leqq 4\,(1+p^2)\,x\,\frac{u_0}{x_0}$$

ou bien

$$\frac{u}{x} \leqq 4\,(1+p^2)\,\frac{u_0}{x_0} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Cela posé, désignons par λ la borne inférieure de $\frac{u}{x}$, lorsque z décrit le demi-plan D. λ est positif ou nul. Si en un point z de D $\lambda = \frac{u}{x}$, $w(z) \equiv \lambda z + c\,i$ (d'après le théorème du module maximum appliqué à la fonction $e^{-w(z)+\lambda z}$) et le théorème est évident. Ce cas écarté, la fonction $w(z) - \lambda z$ encore les conditions du théorème.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Choisissons z_0 de façon que

$$\frac{u_0}{x_0} - \lambda < \varepsilon.$$

Si z est situé dans l'angle $|y| \leqq p\,x$, nons avons, lorsque $|z| > x_0$, d'après (3), appliqué à la fonction $w(z) - \lambda z$,

$$\frac{u}{x} - \lambda \leqq 4\,(1+p^2)\,\varepsilon.$$

Il en résulte

$$\frac{u}{x} \to \lambda,$$

lorsque $z \to \infty$ dans l'angle $|y| \leqq px$.

Appliquons enfin l'inégalité (2) à la fonction $w(z) - \lambda z$. On obtient

$$|w'(z) - \lambda| \leqq \frac{u}{x} - \lambda$$

et par là

$$w'(z) \to \lambda,$$

lorsque $z \to \infty$ dans l'angle $|y| \leqq px$. Ainsi le théorème est démontré.

Remarquons que l'on a encore comme conséquence

$$\frac{w(z)}{z} \to \lambda$$

lorsque $z \to \infty$ dans tout angle $|y| \leqq px$.

Le nombre λ s'appelle *la dérivée angulaire* de $w(z)$ à l'infini.

§ 2.

Le Critère de Carathéodory.

La dérivée angulaire est positive ou nulle; tous les deux cas peuvent se présenter. On doit à M. Carathéodory une condition qui est suffisante pour que λ soit supérieur ou égal à un nombre λ_0. Nous l'utiliserons sous la forme suivante [3]):

Théorème. Pour que la dérivée angulaire λ soit supérieure ou égale à λ_0, il suffit qu'il existe une suite de nombres z_n tels que

$$z_n \to \infty \quad , \quad w(z_n) \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

tandis que

$$\frac{x_n}{|z_n|^2} \frac{|w(z_n)|^2}{u(z_n)} \geqq \lambda_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Démonstration. Appliquons (1) aux points z et z_n. En posant $w_n = w(z_n)$ et en désignant par w_n^* le point symétrique de w_n par rapport à l'axe imaginaire, on a

$$\left| \frac{w - w_n}{w - w_n^*} \right| \leqq \left| \frac{z - z_n}{z - z_n^*} \right|.$$

---

[3]) L. c. [1]).

Il s'ensuit que

$$\frac{|w-w_n^*|-|w-w_n|}{|w-w_n^*|+|w-w_n|} \geqq \frac{|z-z_n^*|-|z-z_n|}{|z-z_n^*|+|z-z_n|}$$

ou

$$\frac{4\,u\,u_n}{(|w-w_n^*|+|w-w_n|)^2} \geqq \frac{4\,x\,x_n}{(|z-z_n^*|+|z-z_n|)^2}.$$

Donc

$$\frac{u}{x} \geqq \frac{x_n}{u_n}\,\frac{(|w-w_n^*|+|w-w_n|)^2}{(|z-z_n^*|+|z-z_n|)^2}.$$

En faisant croître n indéfiniment, on obtient en vertu de (5) et (6)

$$\frac{u}{x} \geqq \lambda_0.$$

La dérivée angulaire étant la borne inférieure de $\frac{u}{x}$, il en résulte

$$\lambda \geqq \lambda_0.$$

§ 3.

Considérons un domaine simplement connexe $\triangle$, dont la frontière ne se réduit pas à un point unique. On sait, d'après la théorie générale de la représentation conforme, que pour tout point a de $\triangle$ il existe une fonction unique $\varphi(z)$, qui fait la représentation conforme de $\triangle$ sur un disque circulaire, ayant son centre à l'origine, de façon que

$$\varphi(a)=0 \quad , \quad \varphi'(a)=1.$$

Le rayon du disque circulaire, qui est une fonction de a, sera appelé *rayon conforme* du domaine $\triangle$ au point a. Nous le désignons par

$$k(\triangle\,,a).$$

Si la fonction $w(z)$ représente le domaine $\triangle$ conformément sur un domaine $\triangle'$, on voit sans peine que

$$|w'(z)|=\frac{k(\triangle'\,,w)}{k(\triangle\,,z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Cela posé, considérons un domaine simplement connexe G intérieur au demi-plan D ($x>0$). Supposons que G contienne des angles d'ouverture aussi proche de π que l'on veuille. D'après la théorie des „Primenden" de M. CARATHÉODORY on peut faire la représentation conforme de D sur G par une fonction $w(z)$ de manière que $z\to\infty$ lorsque $w\to\infty$ dans un angle arbitraire d'ouverture plus petite que π et situé dans G.

Traçons dans un pareil angle, à partir d'un point c un chemin Γ, qui s'éloigne indéfiniment. Les points de Γ seront représentés par

$$w(s) = u(s) + i\,v(s),$$

où s est la longueur de l'arc cw. On a donc $w(s) \to \infty$ lorsque $s \to \infty$ et de plus le rapport $\frac{v(s)}{u(s)}$ reste borné.

Remarquons que l'on a aussi

$$z(w(s)) \to \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

lorsque $s \to \infty$.

D'après (7) on a en tout point w de G

$$|z'(w)| = \frac{k(D, z)}{k(G, w)},$$

donc sur Γ

$$\left|\frac{dz(w)}{ds}\right| = \frac{k(D, z)}{k(G, w)}.$$

Or

$$k(D, z) = 2x;$$

on a donc

$$\left|\frac{dz(w)}{ds}\right| = \frac{2x}{k(G, w)}.$$

Remarquons que

$$-\frac{d}{ds} R\left(\frac{1}{z(w)}\right) \leqq \left|\frac{d}{ds}\frac{1}{z(w)}\right|.$$

Il en résulte

$$\frac{2x}{|z|}\frac{d|z|}{ds} - \frac{dx}{ds} \leqq \left|\frac{d}{ds} z(w)\right|.$$

Donc

$$\frac{2}{|z|}\frac{d|z|}{ds} - \frac{1}{x}\frac{dx}{ds} \leqq \frac{2}{k(G, w)}.$$

En ajoutant aux deux membres de cette inégalité l'expression

$$-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds} + \frac{1}{u}\frac{du}{ds},$$

on obtient

$$\frac{d}{ds}\log\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}\leqq\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}.$$

Par là

$$\frac{d}{ds}\left(\log\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}-\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds\right)\leqq 0.$$

Il en résulte que la fonction

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}e^{-\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds}$$

n'est jamais croissante. Elle tend donc vers une limite, qui est positive ou nulle, lorsque $w\to\infty$ sur Γ.

Supposons maintenant que l'intégrale

$$\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

reste bornée lorsque w s'éloigne indéfiniment sur Γ. Alors l'expression

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2\frac{u}{x}$$

reste bornée lorsque w décrit le chemin Γ et en vertu de (8) il résulte du critère de M. CARATHÉODORY que la fonction $w(z)$ a une dérivée angulaire positive à l'infini.

Puisque

$$\int_c^w\left(\frac{2}{k(G,w)}-\frac{2}{|w|}\frac{d|w|}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\right)ds$$

$$=2\int_c^w\left(\frac{1}{k(G,w)}-\frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right)ds+2\int_c^w\frac{1}{u}\frac{du}{ds}ds-2\int_c^w\frac{1}{|w|}\frac{d|w|}{ds}ds$$

$$=2\int_c^w\left(\frac{1}{k(G,w)}-\frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right)ds+2\left[\log\frac{u}{|w|}\right]_c^w$$

et que

$$\frac{1}{k(G,w)} \geqq \frac{1}{k(D,w)} = \frac{1}{2u},$$

la condition que (9) soit borné, revient au même que la condition que l'intégrale, prise suivant Γ,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G,w)} - \frac{1}{2u} \frac{du}{ds} \right) ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

soit convergente.

Nous avons obtenu ainsi le résultat suivant: Soit G un domaine simplement connexe intérieur au demi-plan D. Pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G *et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini*, il suffit que d'abord G contienne des angles d'ouverture aussi proche de π que l'on veuille et qu'en outre il existe un chemin Γ, ayant les propriétés signalées plus haut, sur lequel l'intégrale (10) converge.

§ 4.

Je vais montrer que la condition qui vient d'être donnée est nécessaire. Considérons un domaine G intérieur à D et supposons qu'il existe une fonction

$$w(z) = u(z) + i\,v(z),$$

donnant la représentation conforme de D sur G de façon que

$$w'(z) \to \lambda \;, \;\; \lambda > 0,$$

lorsque $z \to \infty$ dans un angle arbitraire $|y| \leqq p\,x$.

D'abord il est clair que dans ces hypothèses G contient des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π.

Considérons maintenant l'image du segment $1 \leqq x < \infty$ de l'axe réel. C'est évidemment une courbe Γ telle que nous l'avons considérée précédemment. Je montrerai que l'intégrale, prise suivant Γ,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G,w)} - \frac{1}{2u} \frac{du}{ds} \right) ds, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

où $c = w(1)$, est convergente.

Or en tout point w de Γ

$$|z'(w)| = \frac{dx}{ds},$$

donc

$$\frac{dx}{ds} = \frac{k(D, x)}{k(G, w)} = \frac{2x}{k(G, w)}.$$

Par suite

$$\frac{d}{ds} \log \frac{x}{u} = 2\left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right),$$

donc

$$\log \frac{x}{u} = const. + 2\int_c^w \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right) ds$$

Puisque

$$\frac{x}{u} \to \frac{1}{\lambda}$$

lorsque $w \to \infty$ sur Γ, il en résulte que l'intégrale (11) converge.

On a obtenu ainsi la proposition suivante:

Théorème. Soit G un domaine simplement connexe intérieur au demi-plan $D(x > 0)$ de la variable complexe $z = x + yi$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini est que:

1°. G contienne des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π.

2°. Il existe dans G un chemin Γ ayant pour origine un point c de G et aboutissant à l'infini tel que le rapport $v : u$ reste borné sur Γ et que l'intégrale, prise suivant Γ,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right) ds$$

soit convergente.

§ 5.

Considérons les domaines G qui sont *symétriques par rapport à l'axe réel.* Alors on peut simplifier les conditions de notre théorème.

D'après le principe de la symétrie de SCHWARZ, on peut faire la représentation conforme de D sur un domaine simplement connexe G intérieur à D et symétrique par rapport à l'axe réel au moyen d'une fonction $w(z)$ qui est positive lorsque z est positif et qui est telle que $w(z) \rightarrow \infty$ lorsque $z \rightarrow \infty$ sur l' axe réel. En posant $z = x = yi$, $w = u + vi$, on a en tout point $u \geqq c$

$$\frac{dx}{du} = |z'(u)| = \frac{k(D, x)}{k(G, u)} = \frac{2x}{k(G, u)},$$

donc

$$\log \frac{x}{u} = const. + 2 \int_c^u \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du$$

Si u croît indéfiniment, le rapport $\frac{u}{x}$ tend vers la dérivée angulaire de la fonction $w(z)$. On obtient donc le théorème suivant:

Théoréme. Soit G un domaine simplement connexe intérieur à D et symétrique par rapport à l' axe réel. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction représentant D conformément sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l' infini est que l' intégrale

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du,$$

prise sur un segment $c \leqq u < \infty$ de l'axe réel intérieur à G, soit convergente.

DEUXIÈME PARTIE.

Le problème qui nous occupe est le suivant:

Etant donné un domaine simplement connexe G intérieur au demi-plan $D\,(x > 0)$ de la variable complexe $z = x + yi$, on demande de conclure à la possibilité ou à l'impossibilité de représenter D conformément sur G au moyen d'une fonction $w\,(z)$ ayant une dérivée angulaire positive à l'infini.

Dans la première partie de ce travail,[1]) que nous désignerons dans le suivant par I, nous avons démontré un théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle représentation soit possible (I. § 4).

Dans cette deuxième partie ce théorème a été pris comme point de départ. Nous allons déduire d'abord comme conséquence immédiate une proposition importante de M. G. VALIRON[2]). Ensuite nous donnerons quelques conditions qui sont suffisantes pour que les conditions du théorème soient réalisées. On arrive ainsi d'une façon simple à des résultats déjà connus. Pour une certaine classe de domaines G nous établirons également une condition qui est nécessaire pour qu'une représentation avec une dérivée angulaire positive soit possible. Enfin nous arriverons pour une classe spéciale de domaines G à une condition nécessaire et suffisante.

§ 1.

Démontrons d'abord un lemme qui nous sera utile. Soient G et H deux domaines simplement connexes dont les frontières contiennent plus d'un point et dont G est intérieur à H. *Alors en tout point a de* G

$$k\,(G,\,a) \leqq k\,(H,\,a).$$

Pour démontrer celà, désignons par $\varphi\,(w)$ et $\psi\,(w)$ deux fonctions qui représentent respectivement G et H conformément sur le cercle unité $|z| < 1$ de telle manière que $\varphi\,(a) = \psi\,(a) = 0$. On a alors

$$k\,(G,\,a) = \left|\frac{1}{\varphi'\,(a)}\right| \quad , \quad k\,(H,\,a) = \left|\frac{1}{\psi'\,(a)}\right|.$$

---

[1]) C. VISSER, Proc. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, 38, 1935, p. 402.

[2]) G. VALIRON, Bulletin des Sc. math., 2e série, 53, 1929, p. 70.

En désignant par $f(z)$ la fonction inverse de $\varphi(w)$, la fonction

$$F(z) = \psi\{f(z)\}$$

est holomorphe pour $|z| < 1$, elle s'annule à l'origine, tandis que son module reste plus petit que un. Alors $|F'(0)| \leqq 1$, donc

$$\left|\frac{1}{\varphi'(a)}\right| \leqq \left|\frac{1}{\psi'(a)}\right|,$$

c'est-à-dire

$$k(G, a) \leqq k(H, a).$$

Considérons maintenant un domaine G intérieur au demi-plan D $(x > 0)$ pour lequel les conditions du théorème de I. § 4 soient réalisées. Soit H un domaine simplement connexe intérieur à D *et comprenant* G. G contient des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π; H jouit donc de la même propriété. De plus il existe un chemin Γ, allant d'un point c à l'infini et restant intérieur à un angle d'ouverture plus petite que π intérieur à G, tel que l'intégrale, prise suivant ce chemin,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right) ds$$

converge. $w = u + vi$ désigne le point qui décrit Γ. Or, en tout point w de G

$$k(H, w) \geqq k(G, w).$$

Par suite, l'intégrale, prise suivant Γ,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(H, w)} - \frac{1}{2u}\frac{du}{ds}\right) ds$$

est convergente aussi.

Nous avons demontré ainsi un théorème de M. G. VALIRON[3]):

Si G est un domaine intérieur au demi-plan D pour lequel existe une fonction faisant la représentation conforme de D sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini, une telle fonction existe pour tout domaine simplement connexe intérieur à D et comprenant G.

---

[3]) L.c. (2).

§ 2.

Soit G un domaine simplement connexe intérieur à D. Supposons que G contienne des angles d'ouverture arbitrairement voisine de π. Alors il existe un nombre $c > 0$ tel que le segment $c \leqq u < \infty$ de l'axe réel soit intérieur à G. Les conditions du théorème de I. § 4 sont verifiées si l'intégrale, prise suivant l'axe réel,

$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u} \right) du \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

est convergente.

En utilisant le lemme démontré au début du paragraphe précédent, il est aisé d'obtenir des critères qui sont suffisants pour que cette intégrale soit convergente.

Considérons pour tout $u > c^2$ le domaine H_u, défini par

$$x > \sqrt{u} \quad , \quad |y| < m(\sqrt{u}) \, . \, (x - \sqrt{u}).$$

où $m(t)$ signifie la borne supérieure des nombres M pour lesquels le domaine

$$x > t \quad , \quad |y| < M(x - t)$$

reste intérieur à G.

On peut supposer $c > 1$. Un calcul facile montre que

$$k(H_{t^2}, u) = 2(u - t) \frac{\operatorname{arc\,tg} m(t)}{\frac{\pi}{2}},$$

en supposant $u > t \geqq c$.

Donc

$$k(G, u) \geqq k(H_u, u) = 2(u - \sqrt{u}) \frac{\operatorname{arc\,tg} m(\sqrt{u})}{\frac{\pi}{2}}.$$

Il en résulte que la condition

$$\int_c^\infty \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2(u - \sqrt{u}) \operatorname{arc\,tg} m(\sqrt{u})} - \frac{1}{2u} \right) du < \infty$$

est suffisante pour que l'intégrale (1) soit convergente. En posant $\sqrt{u} = t$, on voit immédiatement que cette condition peut s'écrire sous la forme

$$\int_c^\infty \frac{dt}{t \, m(t)} < \infty.$$

Donnons une application. Considérons une fonction continue $h(t)$, définie pour $t \geqq 0$ et ayant les propriétés suivantes:

$$h(0) = 0 \quad , \quad h(t) > 0 \quad \text{lorsque} \quad t > 0,$$

$$\frac{h(t)}{t} \text{ n'est jamais décroissant.}$$

Soit G le domaine défini par

$$x > 0 \quad , \quad |y| < h(x).$$

Alors on peut faire la représentation conforme de D sur G au moyen d'une fonction ayant une dérivée angulaire positive à l'infini si l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dt}{h(t)}$$

est convergente.

Car on a d'abord, comme résulte de la monotonie de $\frac{h(t)}{t}$,

$$\frac{h(t)}{t} \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty,$$

d'où résulte que G contient des angles d'ouverture aussi voisine de π que l'on veut.

De plus

$$m(t) = \underset{\tau > t}{Min} \frac{h(\tau)}{\tau - t} \geqq \underset{\tau > t}{Min} \frac{h(\tau)}{\tau} = \frac{h(t)}{t}.$$

Donc

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\, m(t)} \leqq \int_1^\infty \frac{dt}{h(t)} < \infty.$$

Les conditions du théorème de I. § 4 étant remplies, notre assertion est justifiée.

§ 3.

Dans ce qui précède nous avons comparé le domaine G avec les domaines angulaires intérieurs à G. On peut obtenir un résultat plus précis en considérant une autre classe de domaines intérieurs à G.

Désignons pour $u > c$ par $\mu(u)$ la borne supérieure des nombres r pour lesquels la circonférence

$$\left|\frac{z-u}{z+u}\right| = r$$

est intérieure à G. Le domaine H_u, défini par

$$\left|\frac{z-u}{z+u}\right| < \mu(u),$$

est alors intérieur à G. Donc

$$k(G, u) \geqq k(H_u, u).$$

En représentant H_u sur le cercle unité on obtient aisément

$$k(H_u, u) = \mu(u) \,.\, 2u.$$

Il en résulte que la condition

$$\int\limits_c^\infty \left(\frac{1}{\mu(u)} - 1\right) \frac{du}{u} < \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

est suffisante pour que l'intégrale (1) converge. [4])

M. J-G. van der Corput a donné à cette condition une forme plus habile. [5]) Nous nous bornerons à traiter un cas spécial. Considérons une fonction continue $h(t)$, définie pour $t \geqq 0$ et ayant les propriétés suivantes:

$$h(0) = 0 \quad , \quad h(t) > 0 \text{ lorsque } t > 0,$$

$h(t)$ n'est jamais décroissant.

Alors la condition (4) est vérifiée *si l'intégrale*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{h(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

est convergente. On a ainsi une généralisation du résultat à la fin du paragraphe précédent.

Pour la démonstration, remarquons d'abord que la convergence de (5) entraîne celle de

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{u^2} \underset{h(x) \leqq u}{(Max\ x)}\, du.$$

---

[4]) C. Visser, Comptes rendus, **193**, 1931, p. 1388.

[5]) J. G. van der Corput, Proc. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, **33**, 1932, p. 330.

On a en effet

$$\int_1^\infty \frac{1}{u^2} (\underset{h(x)\leqq u}{\mathrm{Max}}\, x)\, du < \sum_{n=1}^{\infty} \underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x \,.\int_n^{n+1} \frac{du}{u^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\underset{h(x)\leqq 2}{\mathrm{Max}}\, x + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} (\underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x - \underset{h(x)\leqq n}{\mathrm{Max}}\, x) - \frac{1}{N+1} \underset{h(x)\leqq N+1}{\mathrm{Max}}\, x \right) <$$

$$< \underset{h(x)\leqq 2}{\mathrm{Max}}\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (\underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x - \underset{h(x)\leqq n}{\mathrm{Max}}\, x) < \underset{h(x)\leqq 2}{\mathrm{Max}}\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (n+1) \int_{\underset{h(x)\leqq n}{\mathrm{Max}}\, x}^{\underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x} \frac{dx}{h(x)} <$$

$$< \underset{h(x)\leqq 2}{\mathrm{Max}}\, x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\underset{h(x)\leqq n}{\mathrm{Max}}\, x}^{\underset{h(x)\leqq n+1}{\mathrm{Max}}\, x} \frac{dx}{h(x)} = \underset{h(x)\leqq 2}{\mathrm{Max}}\, x + 2 \int_2^\infty \frac{dx}{h(x)} < \infty.$$

On a de plus

$$\frac{x}{h(x)} \to 0 \text{ lorsque } x \to \infty. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

Puisque

$$\mu(u) = \underset{0 \leqq x < \infty}{\mathrm{Min}} \frac{\sqrt{(x-u)^2 + h(x)^2}}{\sqrt{(x+u)^2 + h(x)^2}},$$

on obtient

$$\left(\frac{\mu(u)}{1} - 1\right) \frac{1}{u} =$$

$$= \underset{0 \leqq x < \infty}{\mathrm{Max}} \frac{4x}{\sqrt{(x-u)^2 + h(x)^2} (\sqrt{(x+u)^2 + h(x)^2} + \sqrt{(x-u)^2 + h(x)^2})}$$

$$< \underset{h(x)\leqq u}{\mathrm{Max}} + \underset{h(x)\geqq u}{\mathrm{Max}}$$

$$< \underset{h(x)\leqq u}{\mathrm{Max}} + 4 \underset{h(x)\geqq u}{\mathrm{Max}} \frac{x}{h(x)\,.\,x}$$

$$= \underset{h(x)\leqq u}{\mathrm{Max}} + \frac{4}{h(u)}.$$

Il résulte de (6) que pour u suffisamment grand la relation $h(x) \leqq u$ a comme conséquence $x < \frac{u}{2}$. Donc pour u suffisamment grand

$$\left(\frac{1}{\mu(u)} - 1\right)\frac{1}{u} < \operatorname*{Max}_{h(x) \leqq u} \frac{4x}{\frac{u}{2} \cdot u} + \frac{4}{h(u)}$$

$$= \frac{8}{u^2} (\operatorname*{Max}_{h(x) \leqq u} x) + \frac{4}{h(u)}.$$

Il s'ensuit que l'intégrale (4) est convergente si l'est l'intégrale (5).

§ 4.

Nous allons déduire maintenant pour une certaine classe de domaines un critère qui est nécessaire pour que les conditions du théorème de I. § 4 soient réalisées.

Nous ferons usage de l'inégalité suivante. Soit $\triangle$ un domaine simplement connexe dont la frontière comprend deux points au moins. Désignons par $(\triangle)$ l'aire de $\triangle$. Alors en tout point a de $\triangle$

$$k(\triangle, a) \leqq \sqrt{\frac{(\triangle)}{\pi}}.$$

Pour le prouver, considérons une fonction

$$f(z) = a + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

représentant le cercle unité $|z| < 1$ biunivoquement sur $\triangle$. On a, comme on sait,

$$(\triangle) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \, |a_n|^2.$$

Donc

$$k(\triangle, a) = |a_1| \leqq \sqrt{\frac{(\triangle)}{\pi}}.$$

Cela posé, soit G le domaine défini par

$$x > 0 \quad , \quad |y| < h(x),$$

où $h(x)$ est supposé continu et tel que $h(0) = 0$, $h(x) > 0$ lorsque $x > 0$.

Supposons qu'il existe une fonction donnant la représentation conforme de $D(x>0)$ sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini. Parce que G est symétrique par rapport à l'axe réel, la condition du théorème de I. § 5 est réalisée, c-à-d. l'intégrale

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{k(G, u)} - \frac{1}{2u}\right) du$$

est convergente. On a donc aussi en vertu de $k(G, u) \leqq 2u$

$$\int_1^\infty \frac{2u - k(G, u)}{u^2} du < \infty.$$

Soit $u > 0$. La fonction

$$\zeta = \frac{z-u}{z+u}$$

représente G sur un domaine $\triangle$ intérieur à $|\zeta| < 1$. On a

$$k(\triangle, 0) = \frac{k(G, u)}{2u},$$

$$(\triangle) = \iint_G \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 dx\, dy = 4u^2 \iint_G \frac{dx\, dy}{\{(x+u)^2 + y^2\}^2}.$$

Donc

$$k(G, u) = 2u\, k(\triangle, 0) \leqq 2u \sqrt{\frac{(\triangle)}{\pi}} = 2u \sqrt{1 - \frac{\pi - (\triangle)}{\pi}}$$

$$\leqq 2u\left(1 - \frac{\pi - (\triangle)}{2\pi}\right),$$

d'où résulte

$$2u - k(G, u) \geqq \frac{\pi - (\triangle)}{\pi} u.$$

Il s'ensuit que

$$\int_1^\infty \frac{\pi - (\triangle)}{u} du < \infty.$$

On a

$$(\triangle) = 4u^2 \int_0^\infty dx \int_{-h}^{h} \frac{dy}{\{(x+u)^2+y^2\}^2} = 8u^2 \int_0^\infty dx \int_0^{h} \frac{dy}{\{(x+u)^2+y^2\}^2}$$

$$= 8u^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{2(x+u)^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{x+u} + \frac{h}{2(x+u)^2\{(x+u)^2+h^2\}} \right) dx.$$

Or

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{x+u} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{x+u}\right)^2}}.$$

Donc

$$(\triangle) < 8u^2 \int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{2(x+u)^3} dx$$

$$-8u^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{2(x+u)^2\sqrt{(x+u)^2+h^2}} - \frac{h}{2(x+u)^2\{(x+u)^2+h^2\}} \right) dx$$

$$= \pi - 4u^2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{(x+u)^2+h^2}-h}{(x+u)^2\{(x+u)^2+h^2\}} dx,$$

d'où résulte

$$\frac{\pi - \triangle}{u} > 4u \int_0^\infty \frac{dx}{\{(x+u)^2+h^2\}\{\sqrt{(x+u)^2+h^2}+h\}} > 4u \int \frac{dx}{(x+u+2h)^3}$$

Parce que G contient des angles arbitrairement voisine de π, on a pour x suffisamment grand $h > x$; on voit donc que l'intégrale

$$\int_0^\infty u\,du \int_1^\infty \frac{dx}{(3h+u)^3}$$

doit être convergente.

Comme

$$\int_0^\infty u\,du \int_1^\infty \frac{dx}{(3h+u)^3} = \int_1^\infty dx \int_0^\infty \frac{u\,du}{(3h+u)^3} =$$

$$= \int_1^\infty \left(\int_0^\infty \frac{du}{(3h+u)^2} - \int_0^\infty \frac{3h\,du}{(3h+u)^3} \right) dx =$$

$$= \int_1^\infty \frac{dx}{3h} - \int_1^\infty \frac{3h}{18h^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{6h(x)},$$

il résulte que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{h(x)}$$

est convergente.

Nous avons démontré ainsi le théorème suivant:

Théorème. Soit G le domaine défini par

$$x > 0 \quad , \quad |y| < h(x),$$

où $h(x)$ est une fonction continue telle que $h(0) = 0$, $h(x) > 0$ lorsque $x > 0$. Une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction donnant la représentation conforme de $D\,(x > 0)$ sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini est que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{h(x)}$$

soit convergente.

En vertu de ce théorème et du résultat de § 3, on obtient enfin la proposition suivante:

Théorème. Soit G le domaine défini par

$$x > 0 \quad , \quad |y| < h(x),$$

où $h(x)$ est une fonction continue pas décroissante telle que $h(0) = 0$, $h(x) > 0$ lorsque $x > 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction donnant la représentation conforme de $D\,(x > 0)$ sur G et ayant une dérivée angulaire positive à l'infini est que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{h(x)}$$

soit convergente.

STELLINGEN

I

Zij in het gebied G van het complexe vlak gedefinieerd een reële functie $\mu(z)$ met de eigenschap, dat $\mu(z)$ nergens een maximum bereikt. Is dan $f(z)$ een in zeker gebied H holomorfe functie en ligt $f(z)$ steeds in G, dan bereikt de functie $\mu(f(z))$ in geen enkel punt van H een maximum.

II

Is $f(t)$ een op het interval $a \leqq t \leqq b$ sommeerbare, complexe functie en is $\varepsilon(t)$ op dat interval monotoon niet-toenemend met $\varepsilon(a+0)=1$, $\varepsilon(b) \geqq 0$, dan ligt

$$\int_a^b \varepsilon(t) f(t)\, dt$$

op het convexe omhulsel van de verzameling der getallen

$$\int_a^x f(t)\, dt \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Voor reële $f(t)$ volgt hieruit dadelijk de tweede stelling van het gemiddelde van de Integraalrekening.

III

Is $f(t)$ op het interval $0 \leqq t < \infty$ positief en sommeerbaar en is $\mu(u)$ de maat van de verzameling der punten t met

$$f(t) \geqq \frac{1}{u},$$

dan convergeert de integraal

$$\int_1^\infty \frac{\mu(u)}{u^2}\, du$$

STELLINGEN

I

Zij in het gebied G van het complexe vlak gedefinieerd een reële functie $\mu(z)$ met de eigenschap, dat $\mu(z)$ nergens een maximum bereikt. Is dan $f(z)$ een in zeker gebied H holomorfe functie en ligt $f(z)$ steeds in G, dan bereikt de functie $\mu(f(z))$ in geen enkel punt van H een maximum.

II

Is $f(t)$ een op het interval $a \leqq t \leqq b$ sommeerbare, complexe functie en is $\varepsilon(t)$ op dat interval monotoon niet-toenemend met $\varepsilon(a+0)=1$, $\varepsilon(b) \geqq 0$, dan ligt

$$\int_a^b \varepsilon(t) f(t)\, dt$$

op het convexe omhulsel van de verzameling der getallen

$$\int_a^x f(t)\, dt \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Voor reële $f(t)$ volgt hieruit dadelijk de tweede stelling van het gemiddelde van de Integraalrekening.

III

Is $f(t)$ op het interval $0 \leqq t < \infty$ positief en sommeerbaar en is $\mu(u)$ de maat van de verzameling der punten t met

$$f(t) \geqq \frac{1}{u},$$

dan convergeert de integraal

$$\int_1^\infty \frac{\mu(u)}{u^2}\, du$$

Met een bizonder geval van deze eigenschap hebben we in II § 3 van dit proefschrift te maken.

IV

In zijn artikel „Monotone Funktionen, STIELTJESsche Integrale und harmonische Analyse" (Math. Annalen **108**, 1933, p. 378) neemt S. BOCHNER de theorie van de Inhaltsfunktionen van H. HAHN te hulp voor zijn uitbreiding van de „Auswahlsatz" van HELLY. Dit kan op eenvoudige wijze worden vermeden.

V

Tegen de door B. VON KÉRÉKJARTÓ gegeven definities van topologische en continue deformaties kunnen bezwaren worden aangevoerd.

(Vorlesungen über Topologie, Einleitung, p. 7).

VI

De door S. LEFSCHETZ gegeven bepaling:

„Een afbeelding van een topologische ruimte op een andere is continu, als het beeld van iedere open verzameling in de eerste een open verzameling in de tweede ruimte is"

is niet juist.

(Topology, Introduction, p. 3).

VII

Bij het systeem, dat tegenwoordig in ons land bij de loting voor de militaire dienstplicht gevolgd wordt, zijn de kansen der deelnemers niet gelijk.

VIII

Door de beschouwingen van J. H. TUMMERS wordt het wetenschappelijke karakter der Speciale Relativiteitstheorie niet aangetast.

(„Physica", 1930, 10e Jaargang, p. 259).